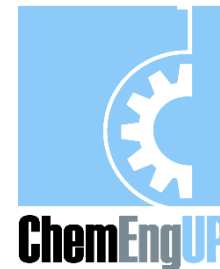




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS



CHM_582: Μηχανική Υλικών

Διάλεξη 9: Λυγισμός

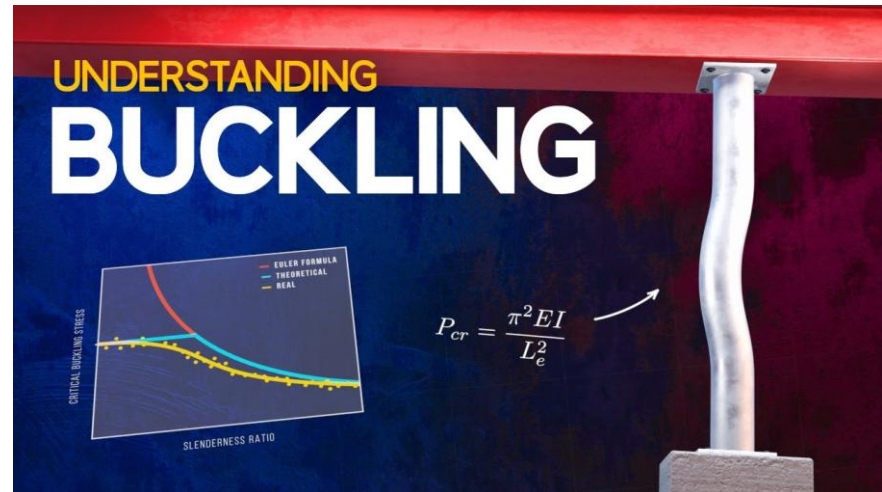
Κωνσταντίνος Γ. Δάσιος, Αναπλ. Καθηγητής
Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
kdassios@upatras.gr

Πάτρα, Μάιος 2025

Λυγισμός

Έως τώρα η μελέτη της απόκρισης του υλικού σε φορτίσεις **δεν μετέβαλε την διαμόρφωση (διάταξη)** του δομικού στοιχείου/κατασκευής.

Στον **λυγισμό** μελετούμε την **ευστάθεια** της κατασκευής, δηλαδή την ικανότητά της να φέρει φορτία χωρίς **απότομη αλλαγή της διαμόρφωσής της**.



Η συζήτηση θα επικεντρωθεί σε **υποστυλώματα**: κατακόρυφα πρισματικά μέλη που φέρουν αξονικά θλιπτικά φορτία.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Υποστύλωμα καταπονείται σε **λυγισμό** όταν υπό την επίδραση θλιπτικού φορτίου μεταβάλλει το αρχικό ευθύγραμμο σχήμα του και καμπυλώνεται σημαντικά.

Λυγισμός

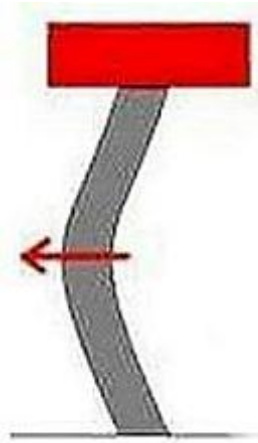
Σχεδιασμός Κατασκευών

Αστοχία
Υλικού

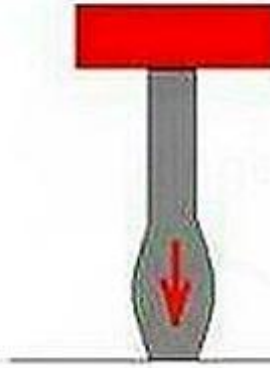
Αστοχία
Κατασκευής

- Εύρεση **επιπέδου τάσης και παραμόρφωσης** σαν αποτέλεσμα των εφαρμοζόμενων δυνάμεων
- **Σύγκριση** επιπέδου με κριτήρια **μέγιστων τιμών** τάσης και παραμόρφωσης και εντοπισμός δυνάμεων αστοχίας
- Καθορισμός **συντελεστών ασφαλείας κατασκευής**
- Κανένα τμήμα της κατασκευής **δεν ικανοποιεί κριτήρια** μέγιστης τάσης ή παραμόρφωσης, διότι:
 - Μικρές αλλαγές στη φόρτιση ή εισαγωγή μικρών ατελειών στην κατασκευή την θέτουν **εκτός ισορροπίας**
 - Συνήθως συμβαίνει στη **θλιπτική φόρτιση**
 - Κυριότερη αιτία ο **λυγισμός**

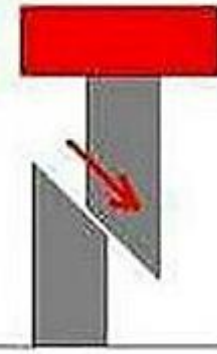
Αστοχία Υποστυλωμάτων



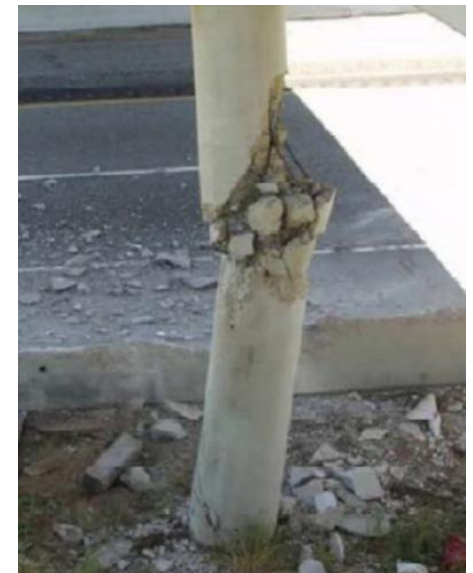
ΛΥΓΙΣΜΟΣ



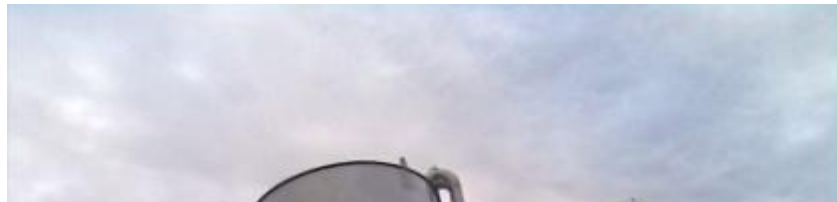
ΘΛΙΨΗ



ΔΙΑΤΜΗΣΗ

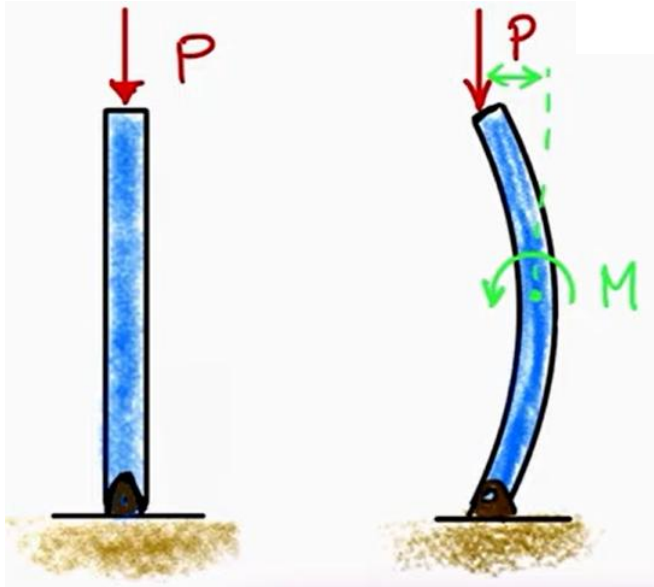


Παραδείγματα λυγισμού



Ισορροπία και Αστάθεια

Ιδανικό υποστύλωμα: Ευθύγραμμο, λεπτό, από υλικό με ελαστικές ιδιότητες



Με αύξηση του κάθετου αξονικού φορτίου P το ιδανικό υποστύλωμα περνά από 2 διαδοχικές καταστάσεις:

1. Ευσταθής ισορροπία

Όταν **μικρή** δύναμη ασκούμενη μεταξύ των δύο άκρων εκτός από θλίψη, λόγω σχήματος υφίσταται και μικρή πλευρική **εκτροπή** η οποία ισχύει όσο και μόνο ισχύει η πλευρική δύναμη και **παύει να ισχύει όταν αυτή αναιρεθεί. Η εκτροπή παράγει καμπτική ροπή.**

2. Ασταθής ισορροπία

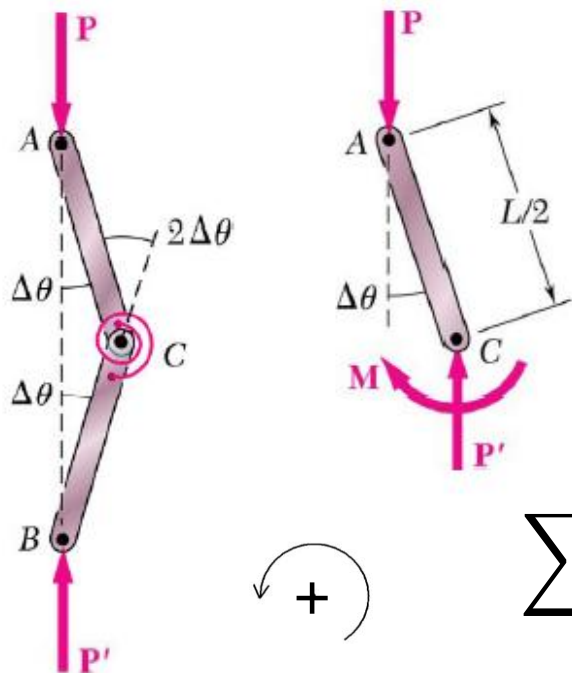
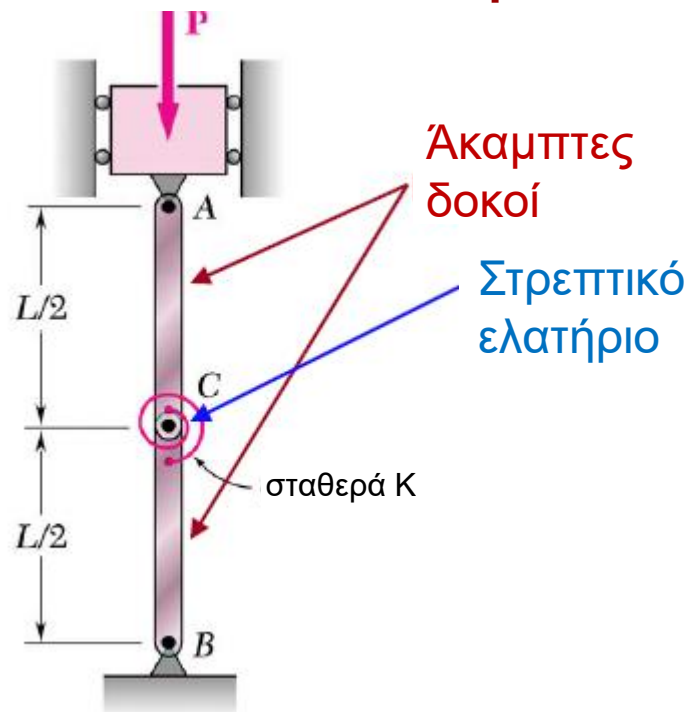
Με περαιτέρω αύξηση του φορτίου πάνω από μια τιμή που καλείται , **κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr}** επέρχεται κατάσταση όπου η πλευρική εκτροπή του υποστυλώματος υφίσταται ακόμη και μετά την αναίρεση του πλευρικού φορτίου.

Ανάλυση Ευστάθειας Ελαστικών Υποστυλωμάτων

Θεωρούμε απλουστευμένο μοντέλο 2 άκαμπτων ράβδων που συνδέονται με πείρο και στρεπτικό ελατήριο.

Εφαρμόζουμε μικρή δύναμη ώστε το σημείο C να μετακινηθεί δεξιά. Εάν μετά την αναίρεση της δύναμης το σύστημα :

- επανέλθει στην κατακόρυφη θέση, τότε έχουμε **ευσταθή ισορροπία**
- δεν επανέλθει έχουμε **αστάθεια**



Κατασκευάζουμε το ΔΕΣ της άνω δοκού

Ροπή στρεπτικού ελατηρίου: $M = K(2\Delta\theta)$

Άθροισμα ροπών στο σημείο C:

$$\sum M_C = P \left(\frac{L}{2} \right) \sin \Delta\theta - M = P \left(\frac{L}{2} \right) \sin \Delta\theta - K(2\Delta\theta)$$

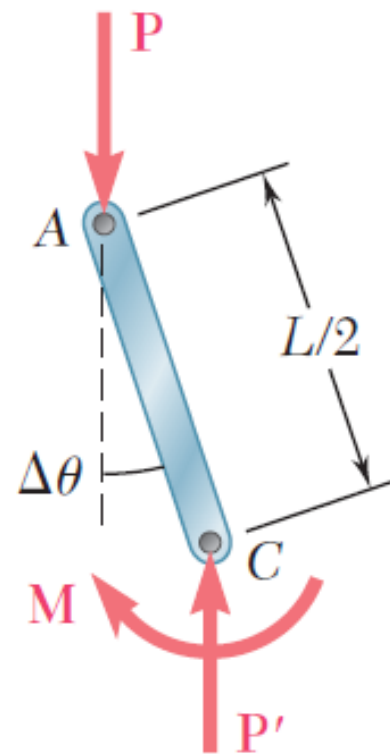
Ανάλυση Ευστάθειας Ελασ. Υποστυλωμάτων (2)

Για μικρές δυνάμεις $\rightarrow$ μικρές γωνίες $\Delta\theta \rightarrow \sin\Delta\theta \approx \Delta\theta$

$$\begin{aligned}\sum M_C &= P \left(\frac{L}{2} \right) \sin\Delta\theta - K(2\Delta\theta) = \\ &= P \left(\frac{L}{2} \right) \Delta\theta - K(2\Delta\theta) \\ &= \left(\frac{PL}{2} - 2K \right) \Delta\theta\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως:

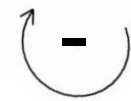
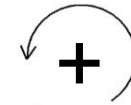
$$\sum M_C = \frac{L}{2} \Delta\theta \left(P - \frac{4K}{L} \right)$$



Ανάλυση Ευστάθειας Ελασ. Υποστυλωμάτων (3)

Η ροπή αλλάζει
πρόσημο για
διαφορετικές τιμές
φορτίου P:

$$\sum M_C = \frac{L}{2} \Delta\theta \left(P - \frac{4K}{L} \right)$$



1. $P < \frac{4K}{L} \Rightarrow P - \frac{4K}{L} < 0 \Rightarrow \sum M_C < 0$

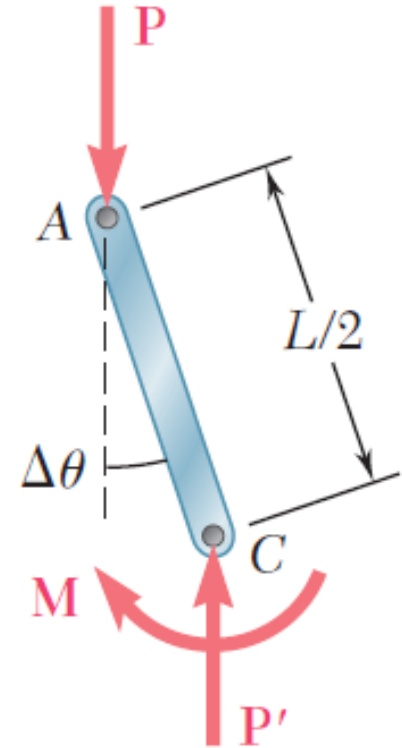
Το σημείο C κινείται προς την αρχική θέση
στα αριστερά. **Ευσταθής Ισορροπία.**

2. $P = \frac{4K}{L} \Rightarrow P - \frac{4K}{L} = 0 \Rightarrow \sum M_C = 0$

Το σημείο C παραμένει ακίνητο. **Ουδέτερη ισορροπία.**

3. $P > \frac{4K}{L} \Rightarrow P - \frac{4K}{L} > 0 \Rightarrow \sum M_C > 0$

Το σημείο C κινείται προς τα δεξιά. **Ασταθής ισορροπία.**



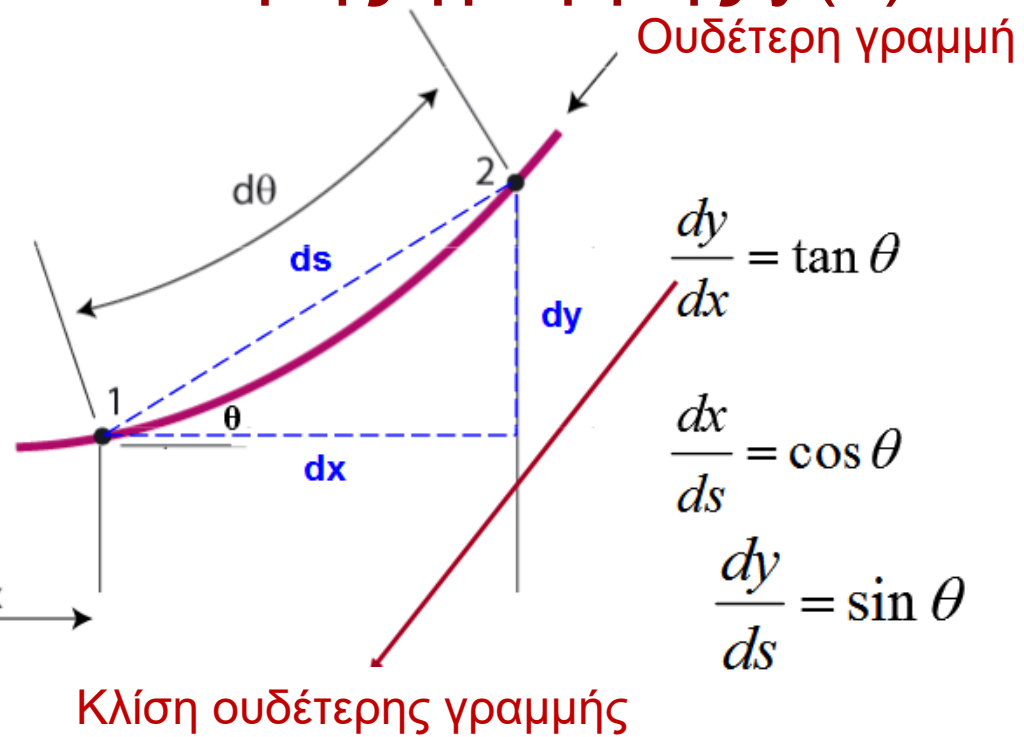
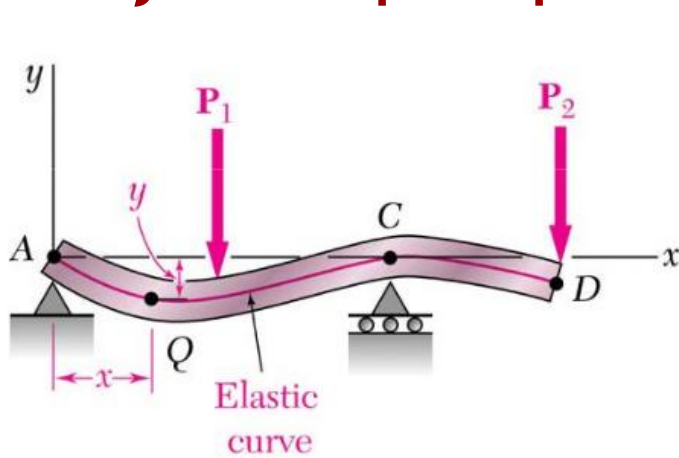
Ανάλυση Ευστάθειας Ελασ. Υποστυλωμάτων (4)

Ορίζουμε ως

$$P_{CR} = \frac{4K}{L}$$

Την **κρίσιμη τιμή του φορτίου P** για την οποία το σύστημα μεταβαίνει από την κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας στην κατάσταση ασταθούς ισορροπίας

Εξίσωση εκτροπής ουδέτερης γραμμής $y(x)$



$$ds = \rho d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

Παραδοχή 1:
Μικρές γωνίες θ :

$$ds \cong dx \longrightarrow \frac{d\theta}{ds} \cong \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\rho}$$

$$\tan \theta \cong \theta \longrightarrow \frac{dy}{dx} \cong \theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\rho}$$

Εξίσωση εκτροπής ουδέτερης γραμμής (συν.)

Παραδοχή 2:
Υποστύλωμα
συμπεριφέρεται
γραμμικά ελαστικά

$$M = \frac{EI}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

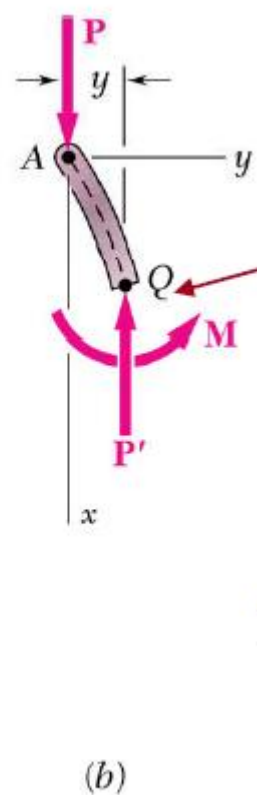
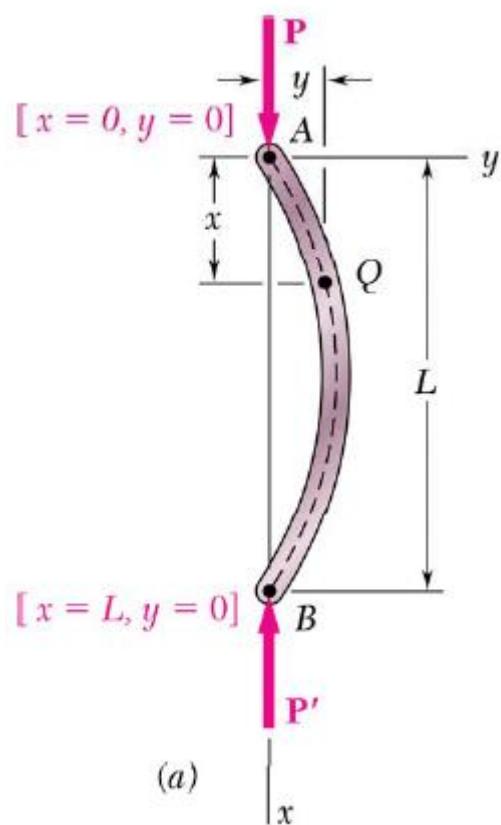
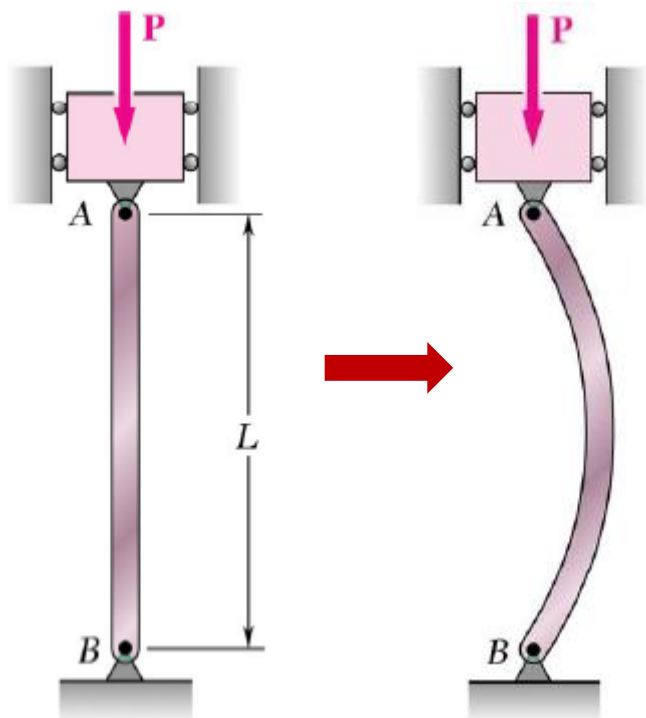
Από ύλη κάμψης

Συνεπώς:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

*Διαφορική εξίσωση
ουδέτερης γραμμής*

Κρίσιμο φορτίο Euler για διαρθρωτό υποστύλωμα



Ροπή στη
θέση x :

$$M + Py = 0$$

$$M = -Py$$

Η εξίσωση ουδέτερης γραμμής γίνεται:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{Py}{EI}$$

Τύπος Euler (συν.)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{Py}{EI} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Θέτω } p^2 = \frac{P}{EI}} \frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0$$

Γενική λύση: $y = A \sin px + B \cos px$

Οριακές συνθήκες: $y(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$$y(L) = 0 \Rightarrow A \sin pL = 0$$
$$\Rightarrow pL = n\pi \Rightarrow p = \frac{n\pi}{L}$$

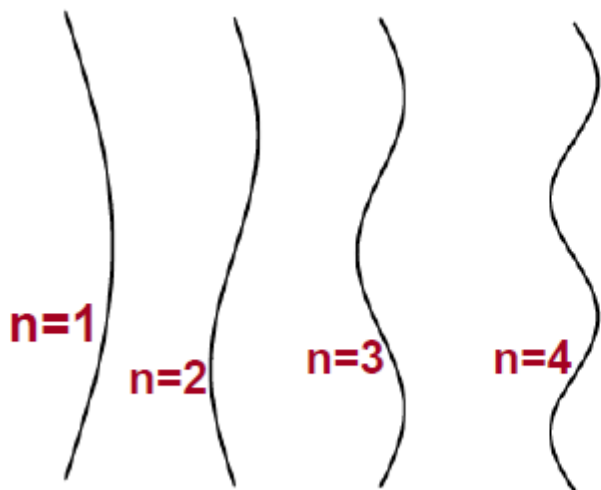
Ειδική λύση: $y(x) = A \sin \frac{n\pi}{L} x$

Τύπος Euler (συν.)

Αντικατάσταση: $p^2 = \frac{P}{EI} \longrightarrow \frac{n^2\pi^2}{L^2} = \frac{P}{EI} \Rightarrow$

$$p = \frac{n\pi}{L}$$

$$P = \frac{n^2\pi^2}{L^2} EI$$

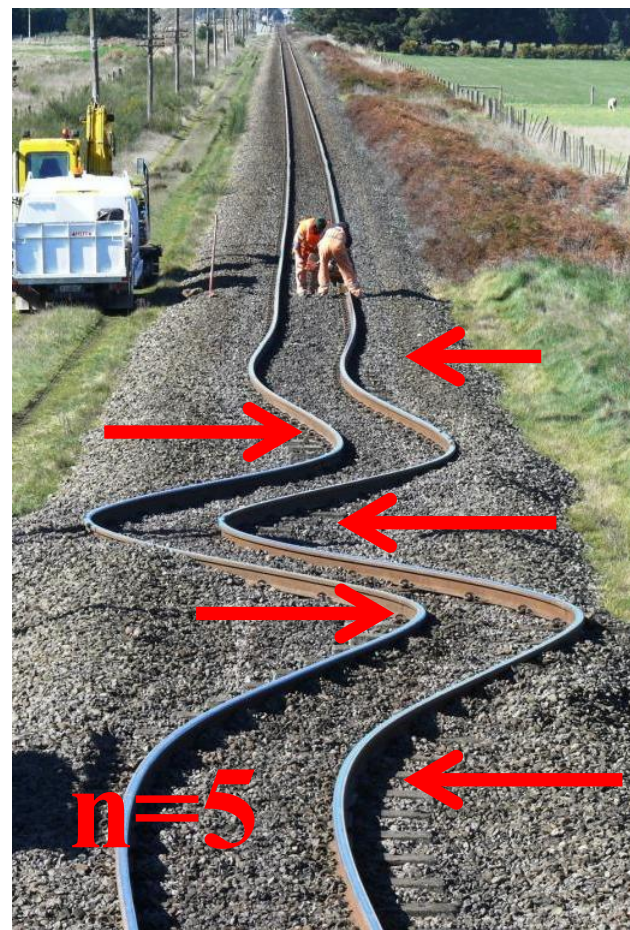


$$(P_{CR})_{n=1} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$$

$$< (P_{CR})_{n=2} = \frac{4\pi^2}{L^2} EI$$

$$< (P_{CR})_{n=3} = \frac{9\pi^2}{L^2} EI$$

$$< (P_{CR})_{n=4} = \frac{16\pi^2}{L^2} EI$$



Τύπος Euler (συν.)

Η χαμηλότερη τιμή φορτίου λυγισμού P αντιστοιχεί στο $n = 1$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$$

$$y(x) = A \sin \frac{\pi}{L} x$$

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού



Όσο κοντύτερη και σκληρότερη είναι η ράβδος και όσο πιο «ανοιχτή» η διατομή τόσο δυσκολότερα λυγίζει!!

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{AL^2} EI$$

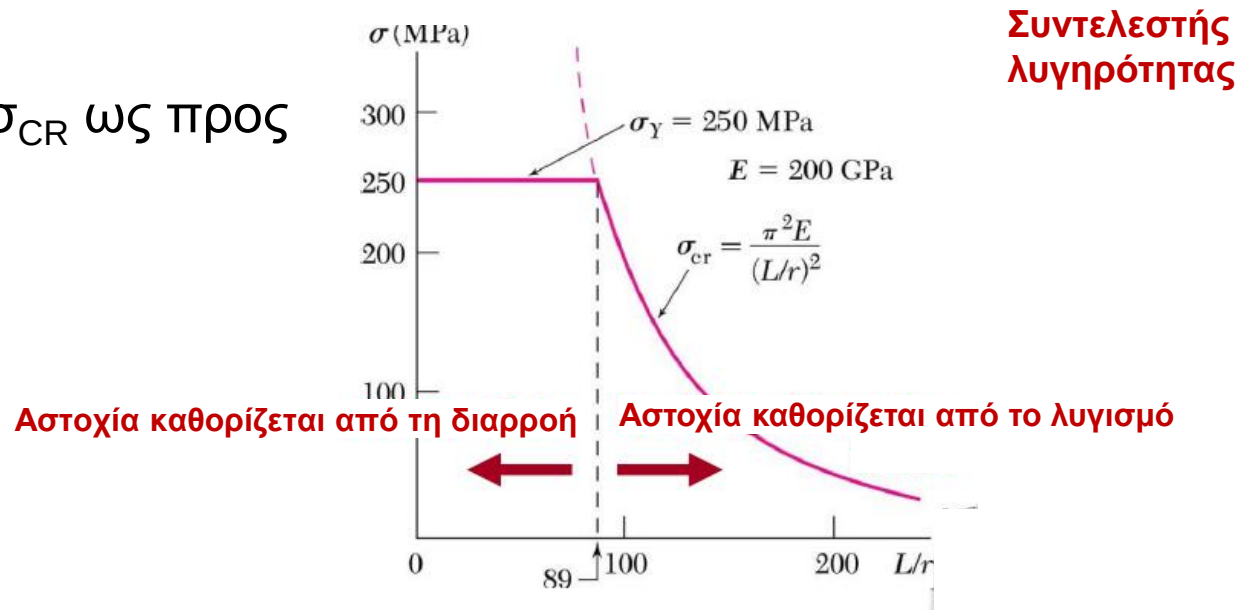
Να υπολογίζεται στο σημείο της διατομής με το μικρότερο λόγο A/I

Τύπος Euler (συν.)

Για διατομή ορθογώνιου παραλληλόγραμμου $I = \frac{bh^3}{12}$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{AL^2} EI = \frac{\pi^2}{bhL^2} E \frac{bh^3}{12} = \frac{\pi^2 E h^2}{12L^2} = \frac{\pi^2 E}{12} \left(\frac{1}{(L/h)^2} \right)$$

Τυπικό διάγραμμα σ_{CR} ως προς L/h για χάλυβα



Διεύθυνση λυγισμού

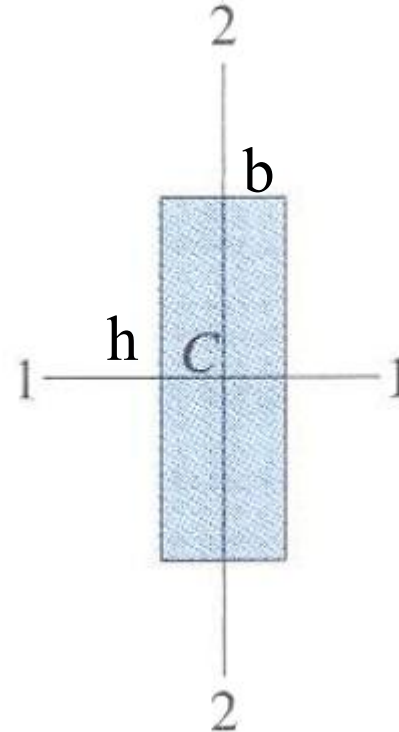
$$I_{1-1} = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_{2-2} = \frac{1}{12}hb^3$$

$$I_{1-1} > I_{2-2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2}EI$$

$$P_{CR,1-1} > P_{CR,2-2}$$

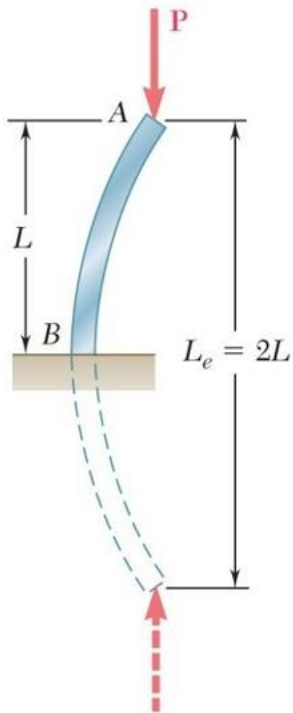


Το υποστύλωμα
λυγίζει ως προς τον
άξονα 2-2 πρώτα.

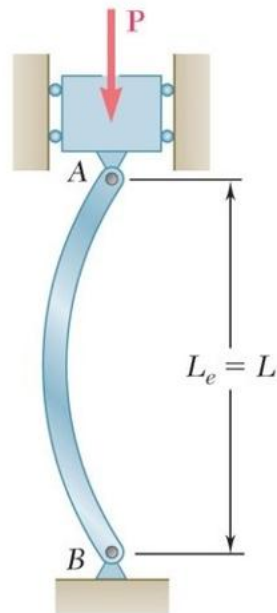
Άλλες συνθήκες άκρων

Ο τύπος Euler υπολογίστηκε για διαρθρωτό υποστύλωμα. Η χρήση του μπορεί να επεκταθεί σε υποστυλώματα με άλλες συνθήκες άκρων με αντικατάσταση του μήκους L με ένα ισοδύναμο μήκος L_e . L συνεχίζει να είναι το πραγματικό μήκος του υποστυλώματος όμως στη σχέση του Euler χρησιμοποιείται το ισοδύναμο μήκος L_e .

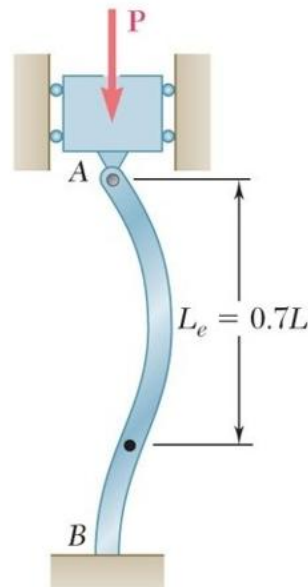
(a) Μια πάκτωση,
ένα ελεύθερο άκρο



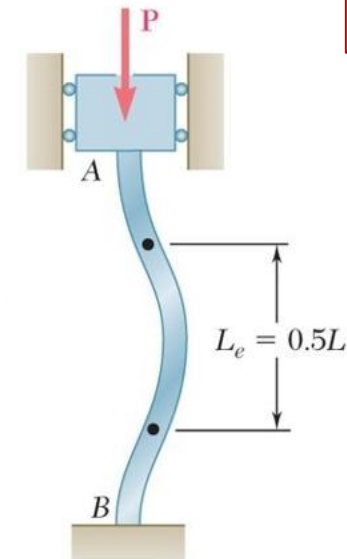
(b) Άθρωση και
στα δύο άκρα



(c) Μια άρθρωση,
μια πάκτωση

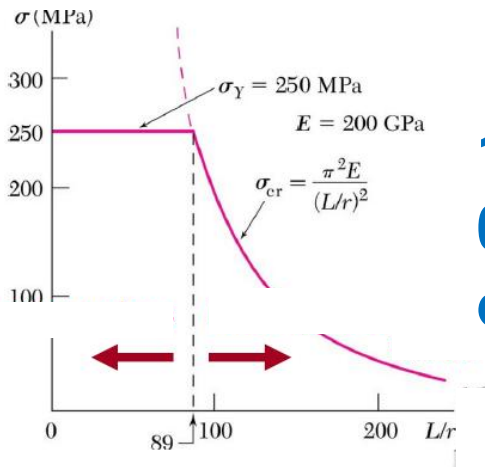


(d) Πάκτωση και
στα δύο άκρα



$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L_e^2} EI$$

Ο λυγισμός εξαρτάται

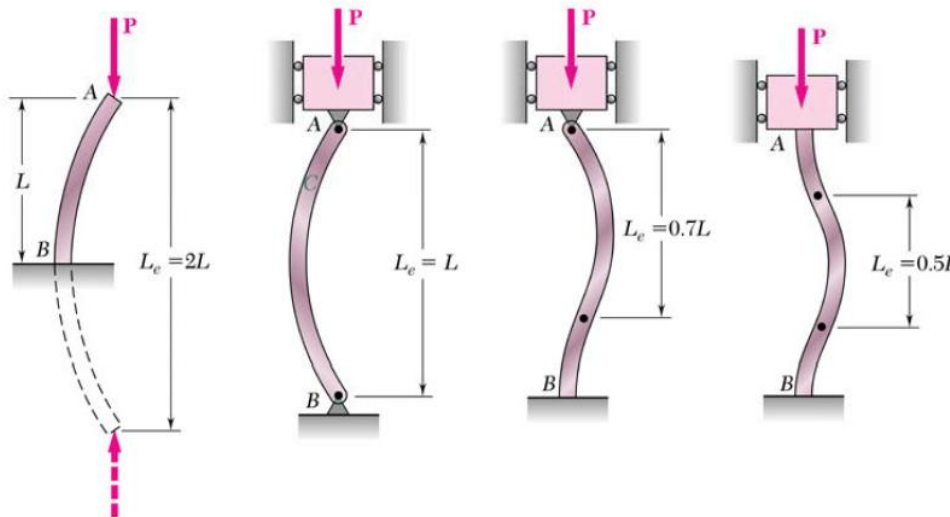


1. από το
θλιπτικό
φορτίο

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$$

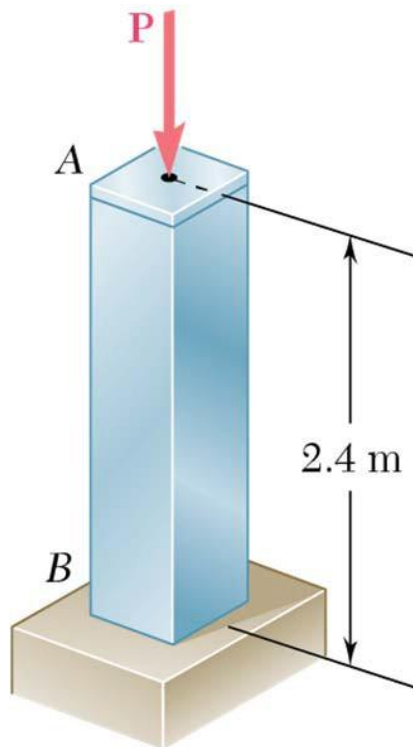
2. τις
ελαστικές
ιδιοτήτες
του υλικού

3. το σχήμα
της διατομής



4. τον τρόπο
στήριξης της
ράβδου

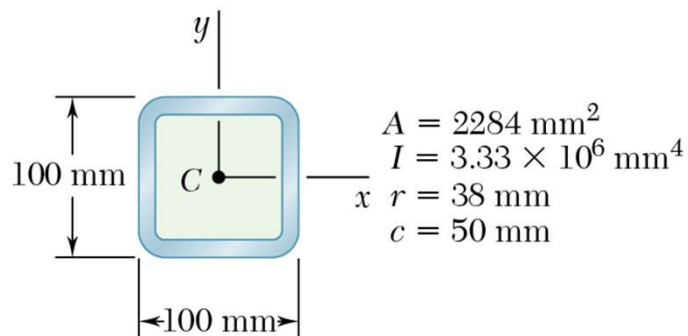
Πρόβλημα 1



Το ομοιόμορφο υποστύλωμα AB αποτελείται από δομικό σωλήνα μήκους 2,4 m που έχει την εικονιζόμενη εγκάρσια τομή.

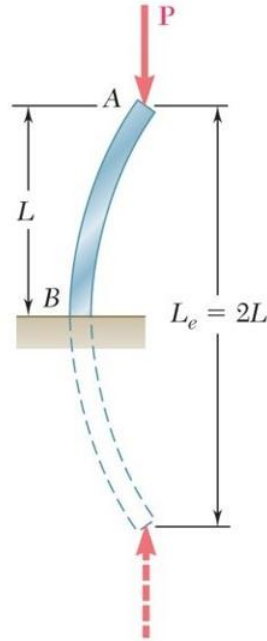
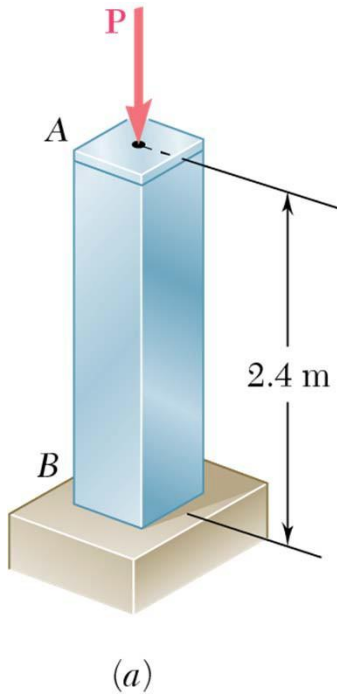
Χρησιμοποιώντας το τύπο του Euler και συντελεστή ασφαλείας $FS=2.0$, προσδιορίστε το μέγιστο επιτρεπόμενο κεντρικό φορτίο για το υποστύλωμα και την αντίστοιχη ορθή τάση.

Δίνεται $E = 200 \text{ GPa}$



Πρόβλημα 1 (συν.)

(a) Μια πάκτωση,
ένα ελεύθερο άκρο



Λύση:

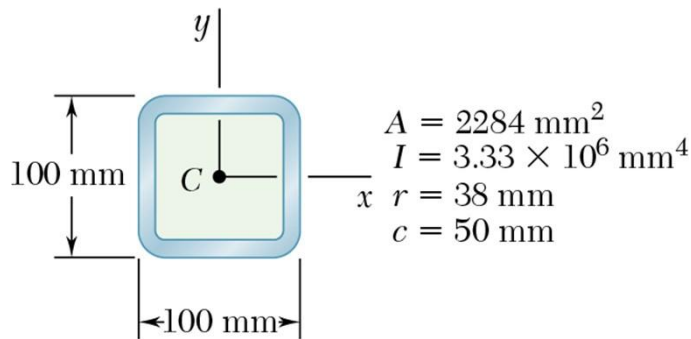
- Ισοδύναμο μήκος: $L_e = 2(2,4 \text{ m}) = 4,8 \text{ m}$
- Κρίσιμο φορτίο λυγισμού:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2 (200 \times 10^9 \text{ Pa}) (3,33 \times 10^{-6} \text{ m}^4)}{(4,8 \text{ m})^2} = 285,3 \text{ kN}$$

- Επιτρεπόμενο φορτίο & τάση:

$$P_{all} = \frac{P_{cr}}{FS} = \frac{285,3 \text{ kN}}{2} \quad P_{all} = 142,7 \text{ kN}$$

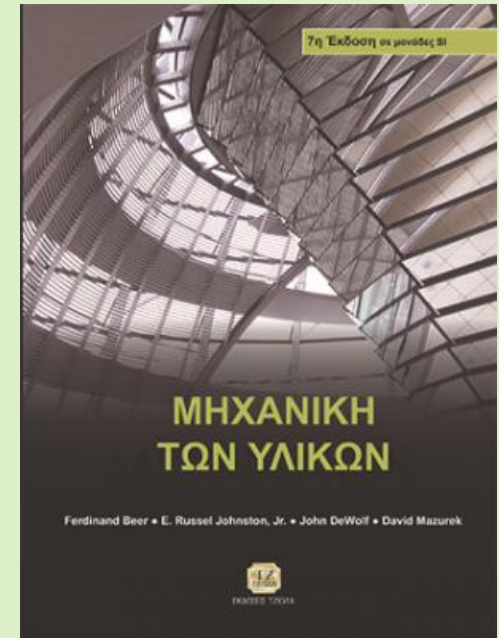
$$\sigma = \frac{P_{all}}{A} = \frac{142,7 \text{ kN}}{2284 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \quad \sigma = 62,5 \text{ MPa}$$



Ανακοινώσεις

Περισσότερη Μελέτη:

- Κεφάλαιο 10, F. Beer et al, Μηχανική των Υλικών, 7^η Έκδοση, 2022



Ώρες συνεργασίας με φοιτητές: Τετάρτη 12.00-14.00