



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS



CHM_582: Μηχανική Υλικών

Διάλεξη 8: Κάμψη

Κωνσταντίνος Γ. Δάσιος, Αναπλ. Καθηγητής
Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
kdassios@upatras.gr

Πάτρα, Μάιος 2025

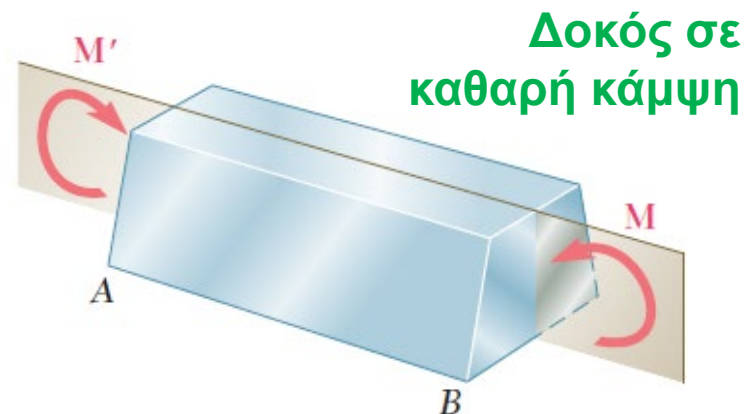
Περιεχόμενα

- Εισαγωγή – Παραδείγματα
- Είδη Κάμψης
- Γενική θεώρηση - Παραδοχές
- Παραμόρφωση δοκού
- Ουδέτερος άξονας – Κέντρο Βάρους - Βέλος κάμψης
- Ορθή παραμόρφωση και μέγιστη τιμή της
- Εγκάρσιες παραμορφώσεις
- Ορθή Τάση
- Σχέση μεταξύ ροπής και τάσης
- Καμπυλότητα
- 2/βάθμια δοπή αδράνειας και ροπή αντίστασης
- Σχεδιασμός δοκών κάμψης

Κάμψη

Έως τώρα μελετήσαμε ροπές και τάσεις σε άξονες που υπόκεινταν σε **αξονικές** και **εγκάρσιες** φορτίσεις και **στρεπτικές ροπές**.

Στην **κάμψη** μελετούμε τις τάσεις και παραμορφώσεις σε δοκούς (στοιχεία πρισματικής εγκάρσιας διατομής) που υπόκεινται σε **ζεύγη ροπών κάμψης**.



Βασικό είδος καταπόνησης που χρησιμοποιείται στο σχεδιασμό πολλών στοιχείων και δομικών εξαρτημάτων, κυρίως **δοκών**.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Στοιχείο καταπονείται σε **καθαρή κάμψη** όταν πάνω σε αυτόν ενεργούν **μόνο ζεύγη ίσων και αντίθετων ροπών** (κοινό μέτρο/αντίθετες κατευθύνσεις), στο **διαμήκες επίπεδο** συμμετρίας του.

Στην καθαρή κάμψη η **ροπή είναι σταθερή σε όλο το μήκος** του στοιχείου.

Κάμψη - Παραδείγματα

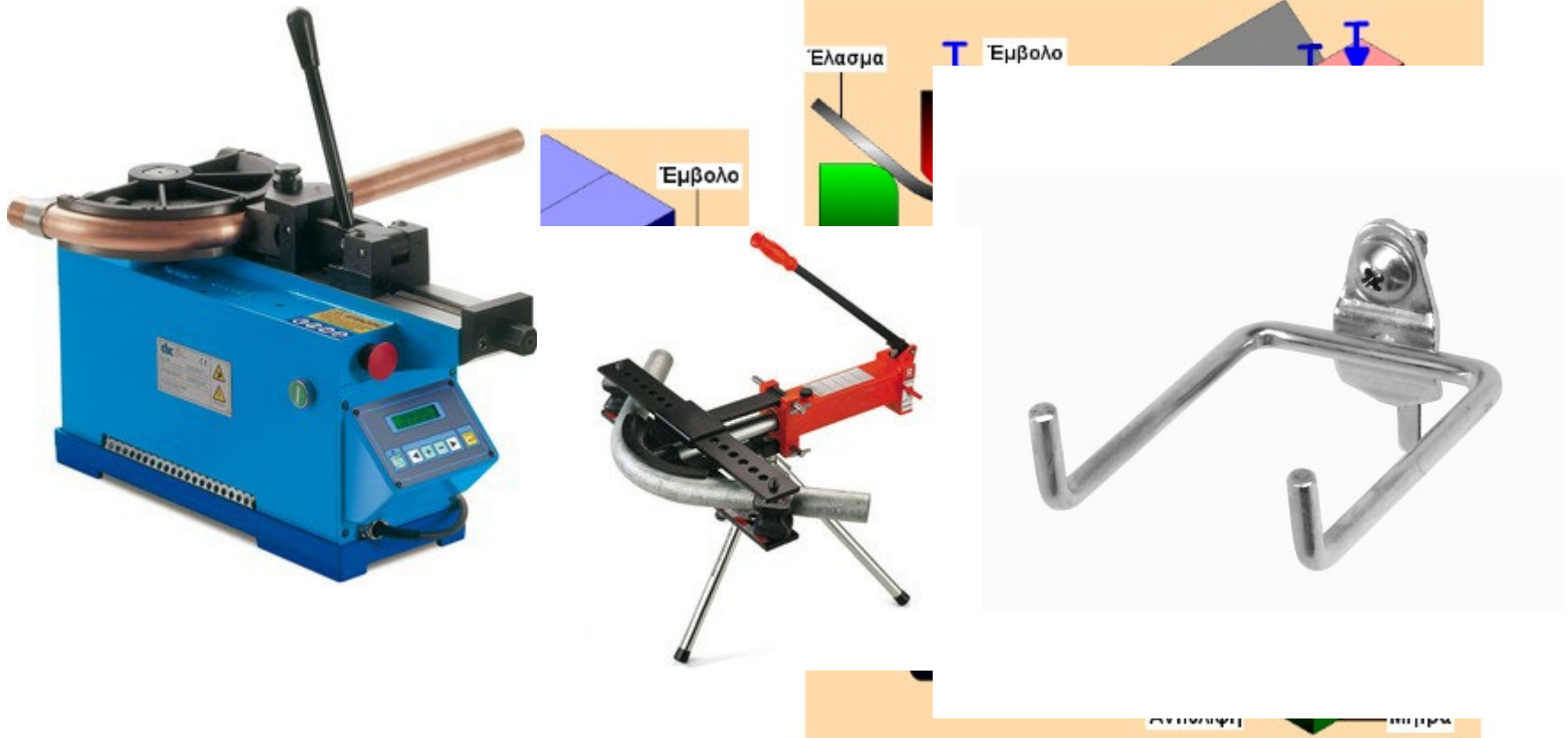
Δοκοί που υπόκεινται σε κάμψη είναι συνήθως στενόμακρα πρισματικά δομικά στοιχεία με την μια διάσταση τουλάχιστον $\times 10$ μεγαλύτερη, των υπολοίπων δυο.



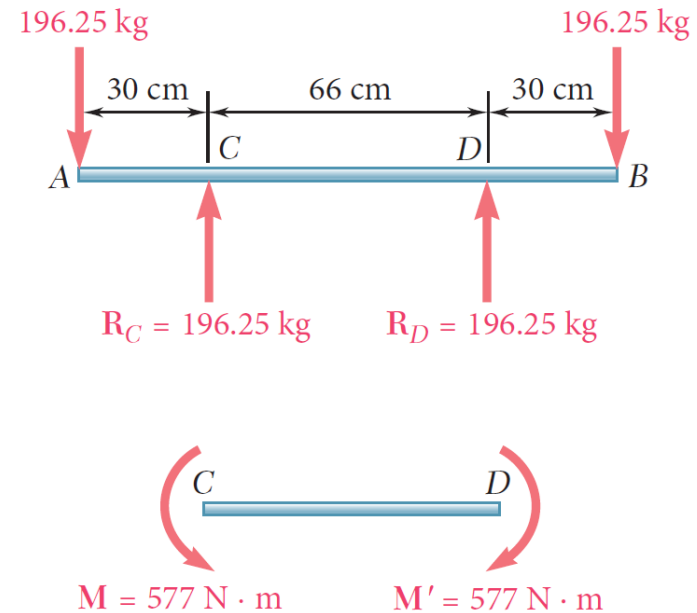
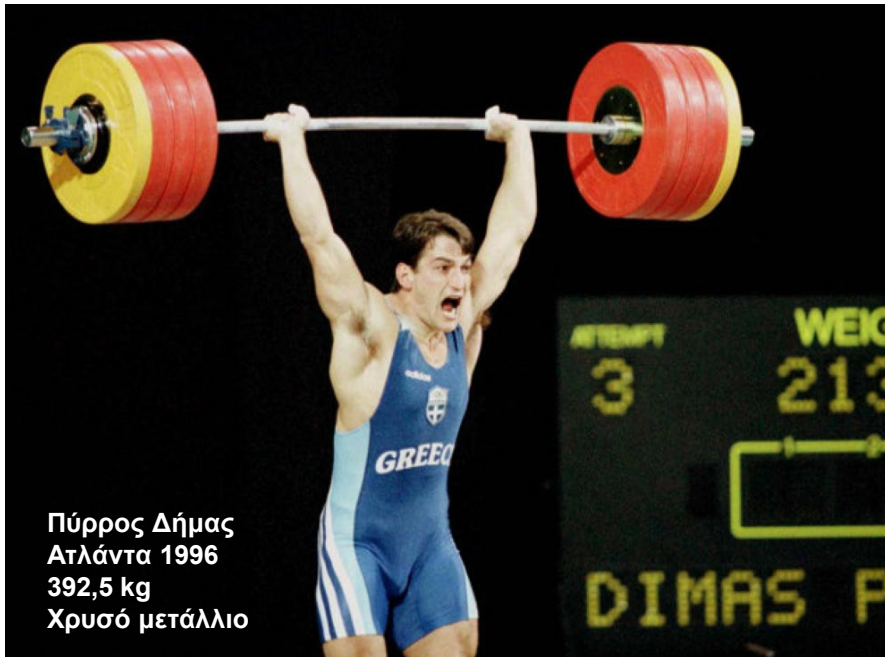
Κάμψη – Παραδείγματα (2)

Στα προηγούμενα παραδείγματα η κάμψη ήταν γενικά **ανεπιθύμητη**.

Η κάμψη είναι **επιθυμητή** στην μηχανουργία όπου αποτελεί βασική μέθοδο μορφοποίησης μεταλλικών υλικών.



Παράδειγμα Καθαρής Κάμψης



- Η μπάρα φέρει **ίσα βάρη** σε **ίσες αποστάσεις** από τα χέρια του αρσιβαρίστα.
- Λόγω της **συμμετρίας** του ΔΕΣ, οι αντιδράσεις στα χέρια πρέπει να είναι ίσες και αντίθετα με τα βάρη.
- Συνεπώς τα βάρη και οι αντιδράσεις στο μεσαίο τμήμα CD μπορούν να αντικατασταθούν **από δύο ίσες και αντίθετες ροπές**
- Δηλαδή το μεσαίο τμήμα της δοκού καταπονείται σε **καθαρή κάμψη**

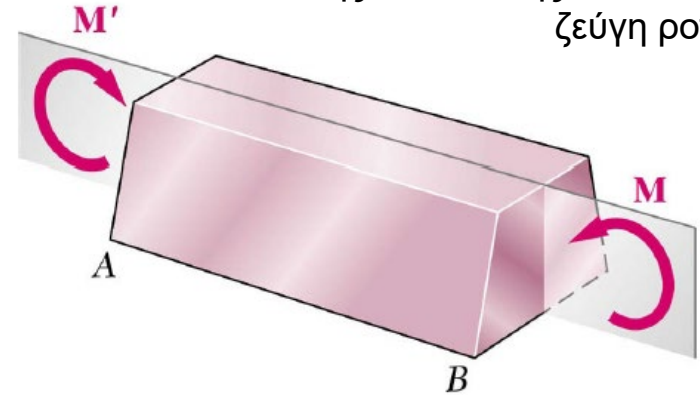
Είδη Κάμψης

Καθαρή κάμψη

Κάμψη δοκού υπό σταθερό ζεύγος ροπών $\rightarrow$ σταθερό $M(x)$.
Εμφάνιση μόνο ορθών τάσεων κατά μήκος της δοκού.

$$V = \frac{dM(x)}{dx} = 0$$

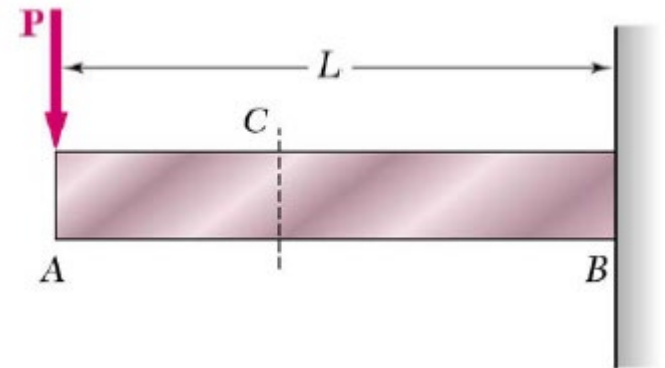
Δοκός στην οποία ασκούνται ίσα & αντίθετες διεύθυνσης συνεπίπεδα ζεύγη ροπών



Γενική κάμψη

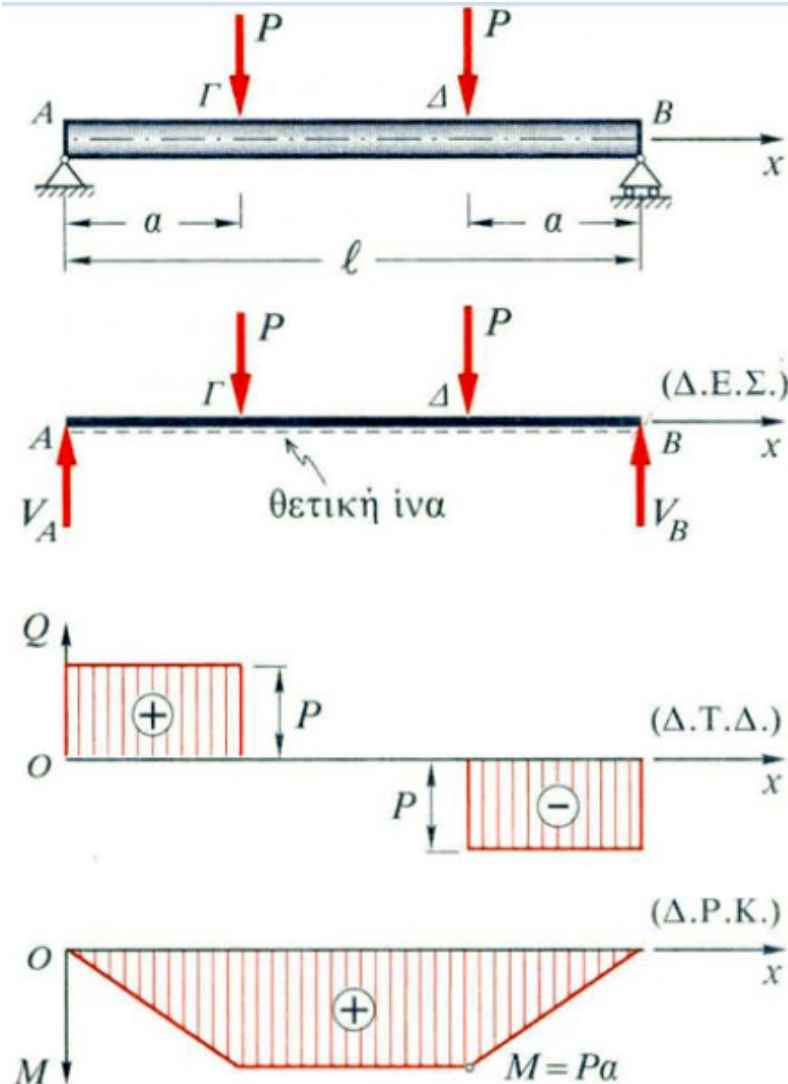
Η καμπτική ροπή μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού, εμφάνιση και τεμνουσών δυνάμεων κατά μήκος της δοκού.

$$V = \frac{dM(x)}{dx} \neq 0$$



Γενική κάμψη έχουμε όταν το **σχήμα** της δοκού σαν αποτέλεσμα της εφαρμοζόμενης καμπτικής ροπής **δεν** αποτελεί **τόξο κύκλου**

Παράδειγμα Καθαρής & Γενικής Κάμψης



Δοκός που καταπονείται από δύο δυνάμεις. Από ΝQM προκύπτει:

- Στα ΑΓ και ΔΒ η δοκός καταπονείται και από διάτμηση και από κάμψη.
- Στο ΓΔ η καμπτική ροπή είναι σταθερή και η τέμνουσα μηδέν
- Συνεπώς:

Καθαρή κάμψη @ ΓΔ
Γενική κάμψη @ ΑΓ & ΔΒ

Γενική Θεώρηση

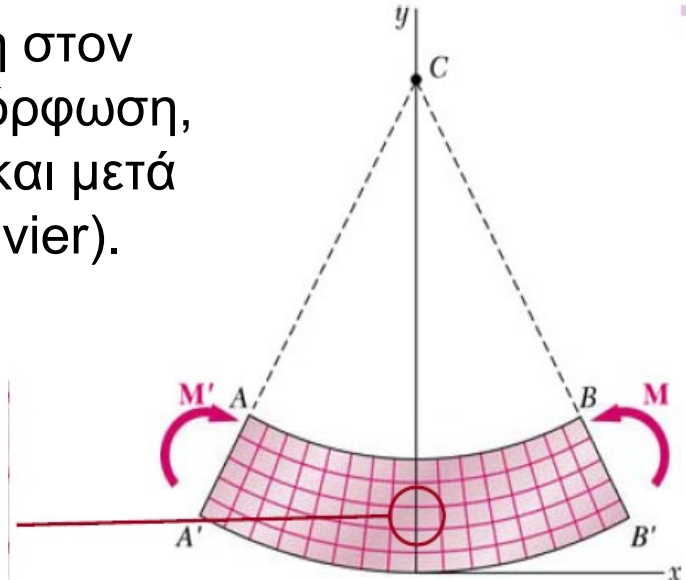
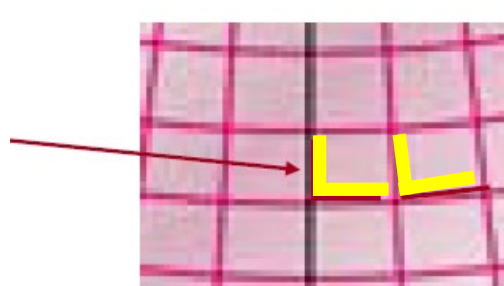
- Στην **Στατική** (απαραμόρφωτα σώματα) μελετήσαμε την μεταβολή τεμνουσών και ροπών σε **απαραμόρφωτες** δοκούς στις οποίες ασκούνταν δυνάμεις (N, Q) και καμπτικές ροπές (M) $\rightarrow$ **διαγράμματα NQM** , ανεξάρτητα μεγέθους & γεωμετρίας διατομής
- Στην **Αντοχή Υλικών** (παραμορφώσιμο σώμα), στην κάμψη θα μελετήσουμε την **παραμόρφωση των δοκών υπό καμπτικές ροπές** και την κατανομή των τάσεων στην διατομή.
- Επειδή, *όπως και στη στρέψη*, η στατική ανάλυση για τον προσδιορισμό της **κατανομής των τάσεων** σε δοκό υπό κάμψη οδηγεί σε στατικά απροσδιόριστο σύστημα, ξεκινούμε να εργαζόμαστε με **παραμόρφωση**.

Παραδοχές Καθαρής Κάμψης

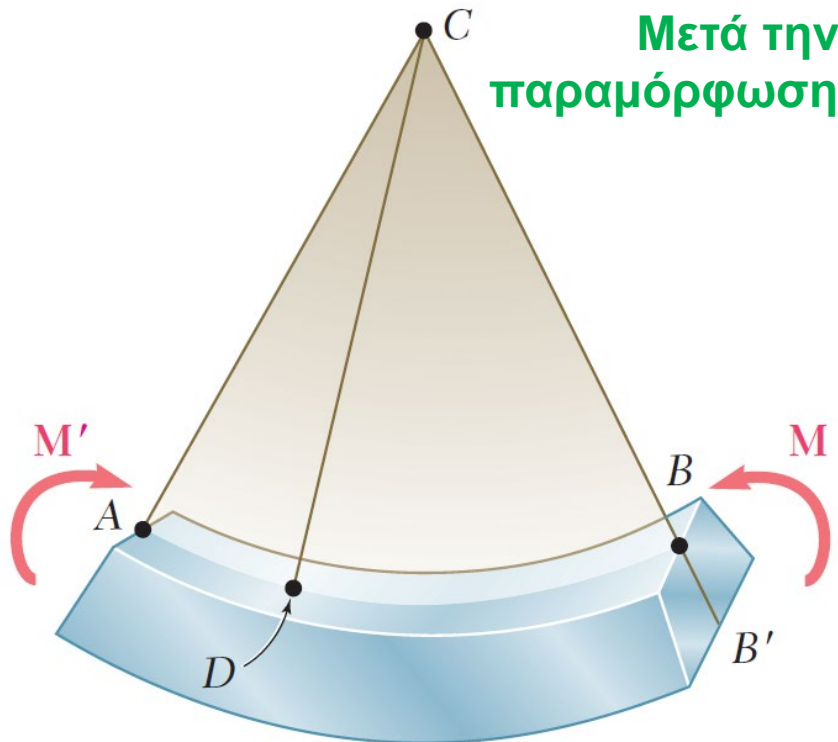
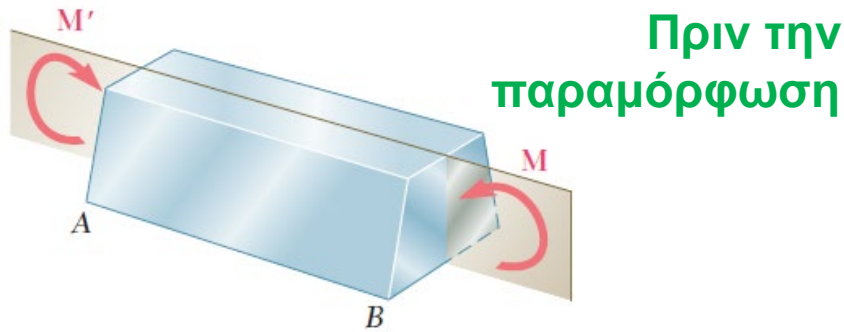
Για την ανάλυση κάνουμε τις παραδοχές:

1. Το υλικό είναι **ομογενές** και **γραμμικά ελαστικό**.
2. **Μέτρο ελαστικότητας** υλικού δοκού σε **εφελκυσμό** ίσο με μέτρο ελαστικότητας σε **θλίψη**.
3. Αναπτυσσόμενες τάσεις περιορίζονται **στην ελαστική περιοχή** όπου ισχύει ο νόμος του Hooke.
4. **Κάθε διατομή** επίπεδη και κάθετη στον άξονα της δοκού πριν την παραμόρφωση, **παραμένει επίπεδη και κάθετη** και μετά από αυτήν (υπόθεση Bernoulli-Navier).
(απόδειξη 4.1B/σελ. 262 συγγράμματος)

Ορθές
γωνίες



Παραμόρφωση Δοκού υπό Καθαρή Κάμψη



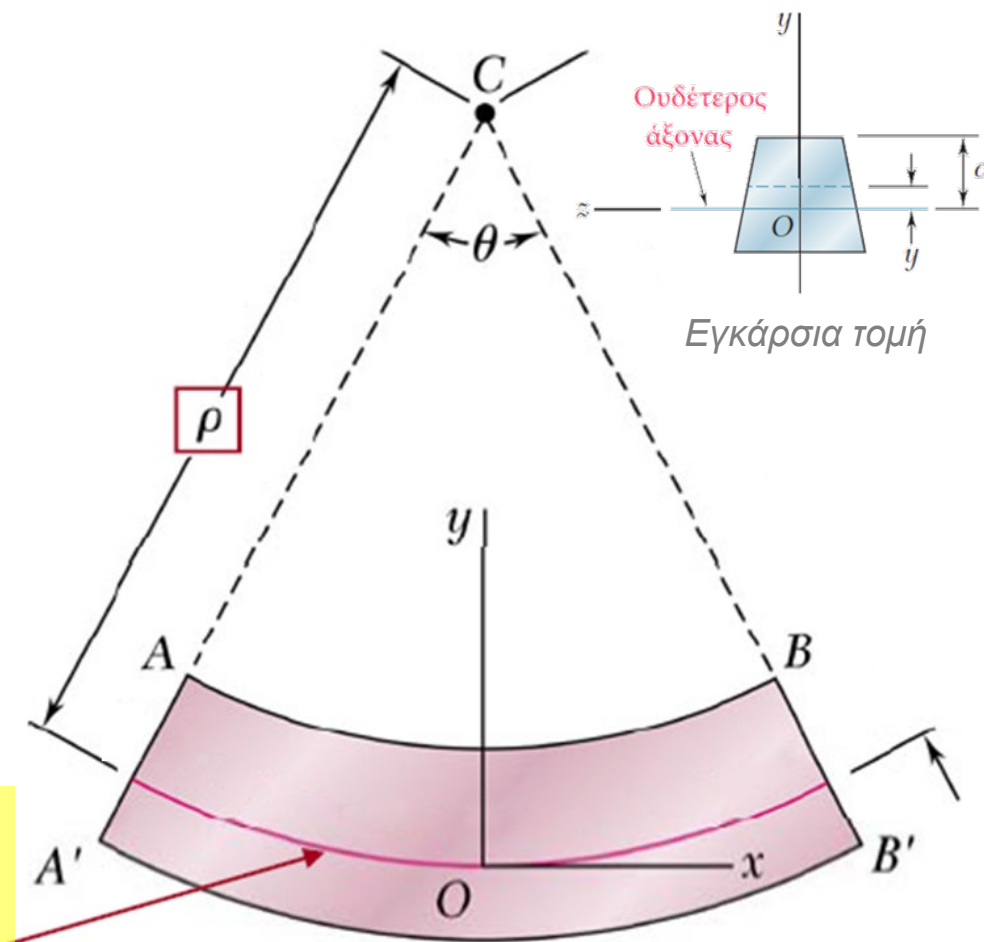
- Υπό την επίδραση του ζεύγους ροπών παράλληλα στο επίπεδο συμμετρίας, το στοιχείο **κάμπτεται**, ενώ το επίπεδο συμμετρίας διατηρείται.
- Αφού M σταθερή σε όλο το μήκος, η **δοκός κάμπτεται ομοιόμορφα**.
- Συνεπώς το τμήμα AB (τομή άνω επιφάνειας με επίπεδο συμμετρίας, αρχικά ευθύγραμμο) αποκτά **σταθερή καμπυλότητα**.
- Το **AB μικραίνει** σε μήκος ενώ το τμήμα **A'B' στην κάτω επιφάνεια επιμηκώνεται**.

Παραμόρφωση Δοκού υπό Καθαρή Κάμψη (2)

- Επομένως υπό την επίδραση του ζεύγους ροπών, η **άνω επιφάνεια καταπονείται σε θλίψη**, ενώ η **κάτω σε εφελκυσμό**.
- Τα ενδιάμεσα τμήματα καταπονούνται **σταδιακά** λιγότερο σε θλίψη ή εφελκυσμό



Υπάρχει ένα επίπεδο όπου η συνολική καταπόνηση είναι μηδέν, καλείται «**ουδέτερο επίπεδο**»

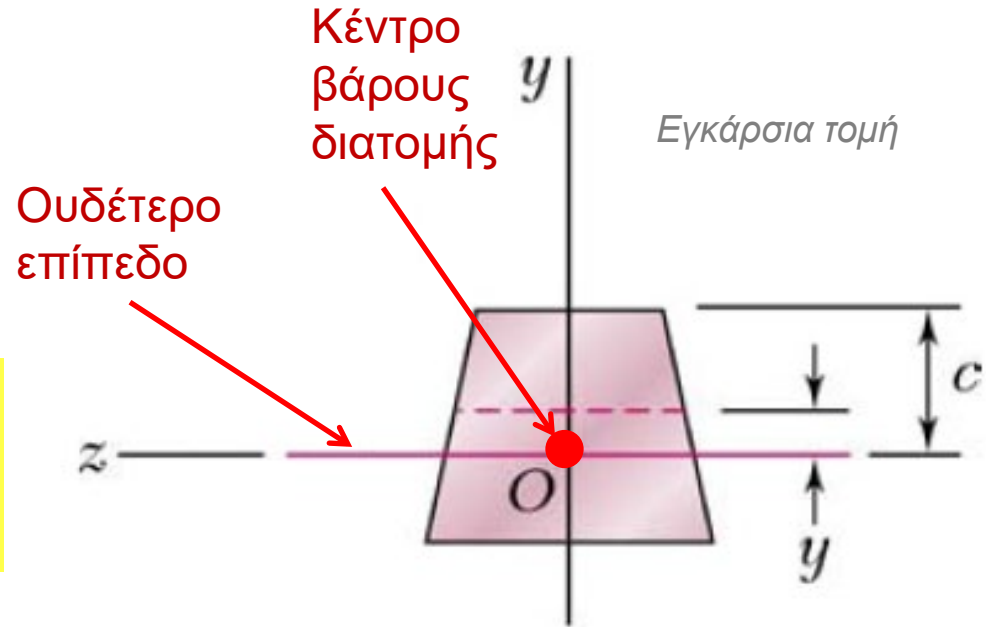


Γιατί το επίπεδο δεν είναι στο κέντρο;

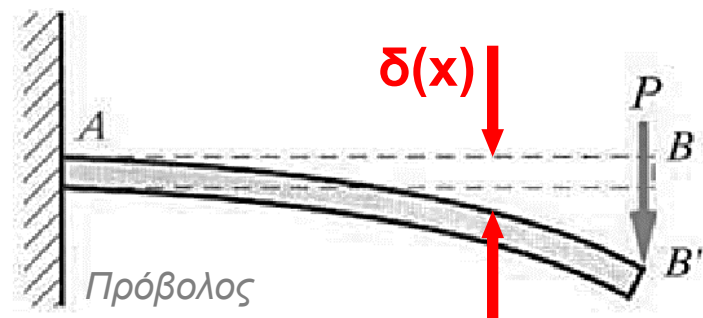
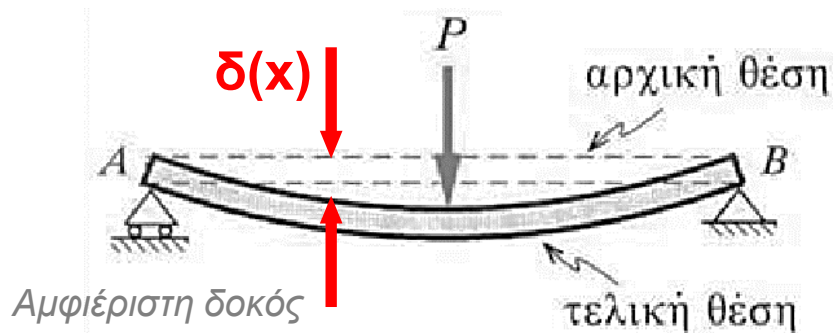
Ουδέτερο Επίπεδο

Τέμνει κάθετα το
επίπεδο συμμετρίας &
από αυτό διέρχεται ο
κεντροβαρικός άξονας.

Κατά σύμβαση, $y = 0$
στο ουδέτερο
επίπεδο



Η κατακόρυφη μετατόπιση των σημείων του ουδέτερου επιπέδου από την αρχική θέση, ονομάζεται **βέλος κάμψης $\delta(x)$** της δοκού στην θέση x .

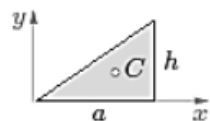


Ουδέτερο Επίπεδο & Κέντρο Βάρους

Επιφάνεια

Συντεταγμένες κέντρου βάρους

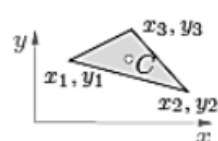
Ορθωγώνιο τρίγωνο



$$A = \frac{1}{2} a h$$

$$x_c = \frac{2}{3} a, \quad y_c = \frac{h}{3}$$

Τυχαίο τρίγωνο

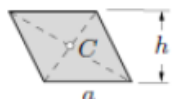


$$A = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$$

$$x_c = \frac{1}{3} (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$y_c = \frac{1}{3} (y_1 + y_2 + y_3)$$

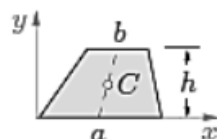
Παραλληλόγραμμο



$$A = a h$$

Το κέντρο βάρους
βρίσκεται στην
τομή των διαγωνίων
του παραλληλογράμμου

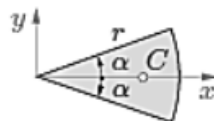
Τραπεζίδιο



$$A = \frac{h}{2} (a + b)$$

$$y_c = \frac{h}{3} \frac{a + 2b}{a + b}$$

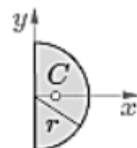
Κυκλικός τομέας



$$A = \alpha r^2$$

$$x_c = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

Ημικύκλιο



$$A = \frac{\pi}{2} r^2$$

$$x_c = \frac{4r}{3\pi}$$

Ορθή παραμόρφωση

ρ = ακτίνα καμπυλότητας ουδέτερου επιπέδου

$$\varepsilon_x < 0 \text{ για } y > 0 \quad \text{και} \quad \varepsilon_x > 0 \text{ για } y < 0$$

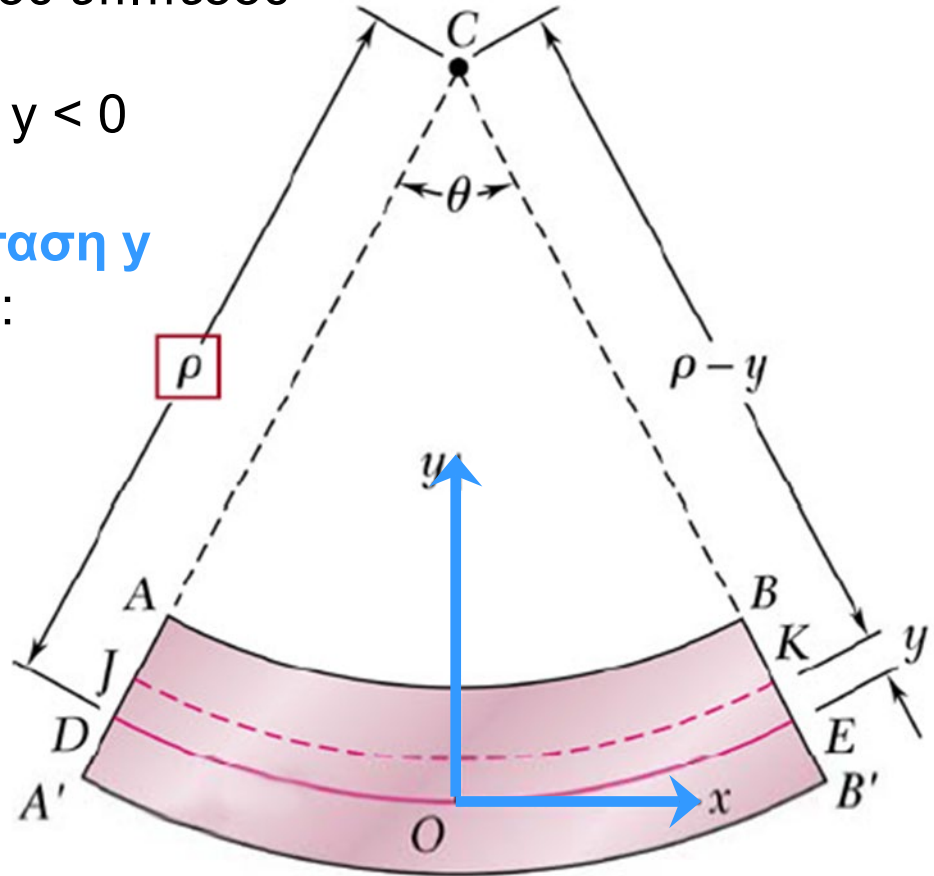
Η ορθή παραμόρφωση σε απόσταση y από το ουδέτερο επίπεδο θα είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{L_{\text{JK}} - L_{\text{DE}}}{L_{\text{DE}}}$$

Έστω **μικρές γωνίες** θ : τμήματα JK, DE ευθύγραμμα, $\tan \theta \approx \theta$

JCK: $\theta = \frac{L_{JK}}{\rho - y} \Rightarrow L_{JK} = (\rho - y)\theta$

DCE: $\theta = \frac{L_{DE}}{\rho} \Rightarrow L_{DE} = \rho\theta$

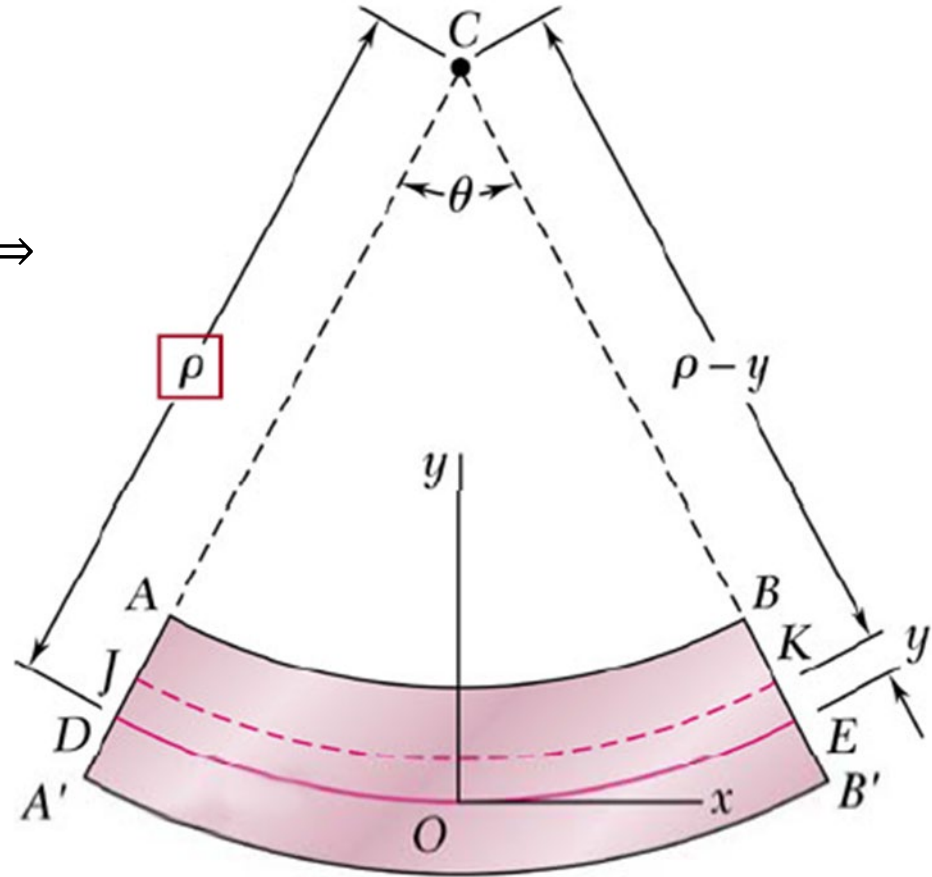


Ορθή παραμόρφωση (2)

Τότε
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{(\rho - y)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

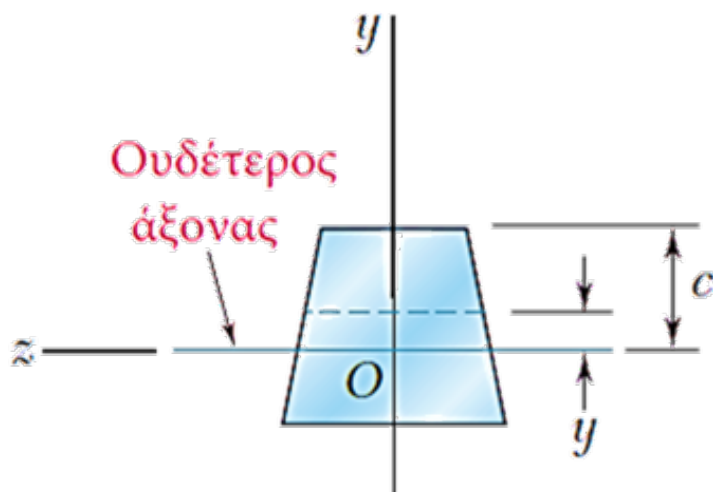
Η διαμήκης ορθή
παραμόρφωση μεταβάλλεται
γραμμικά με την απόσταση
από το ουδέτερο επίπεδο



Μέγιστη Ορθή παραμόρφωση

$$\varepsilon_{max} = \begin{cases} -\frac{L_{EB}}{\rho}, & \text{για } y = EB \\ \frac{L_{EB'}}{\rho}, & \text{για } y = -EB' \end{cases}$$

- Η μέγιστη θλιπτική τάση παρατηρείται στην **άνω** επιφάνεια της δοκού
- Η μέγιστη εφελκυστική τάση παρατηρείται στην **κάτω** επιφάνεια της δοκού



Αν c η μέγιστη απόσταση από το ουδέτερο επίπεδο (που αντιστοιχεί είτε στην άνω ή στην κάτω επιφάνεια)

$$\varepsilon_{max} = \frac{c}{\rho} \quad \swarrow \quad \varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

$$\varepsilon = -\frac{y}{c} \varepsilon_{max}$$

Εγκάρσια παραμόρφωση

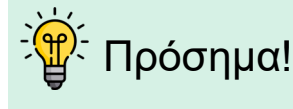
Θα υπάρχουν εγκάρσιες παραμορφώσεις λόγω του φαινομένου Poisson

$$\varepsilon_y = -\nu_{xy}\varepsilon_x = \nu_{xy}\frac{y}{\rho}$$

$$\varepsilon_z = -\nu_{xz}\varepsilon_x = \nu_{xz}\frac{y}{\rho}$$

Για ισότροπο υλικό $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \nu\frac{y}{\rho} = \frac{y}{\rho'}$$



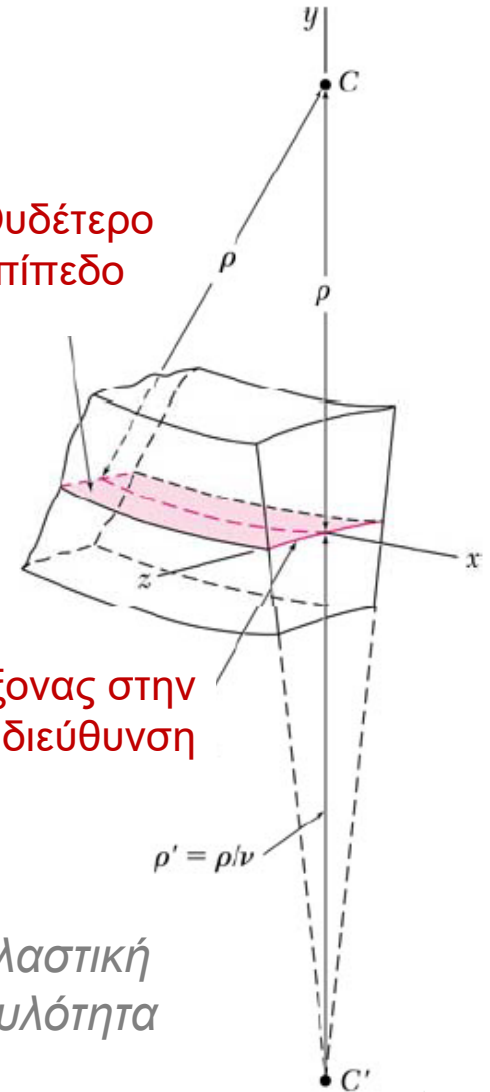
$$\rho' = \frac{\rho}{\nu}$$

Αντικλαστική
καμπυλότητα

Ουδέτερο
επίπεδο

Ουδέτερος άξονας στην
εγκάρσια διεύθυνση

$$\rho' = \rho/\nu$$



Ορθές τάσεις

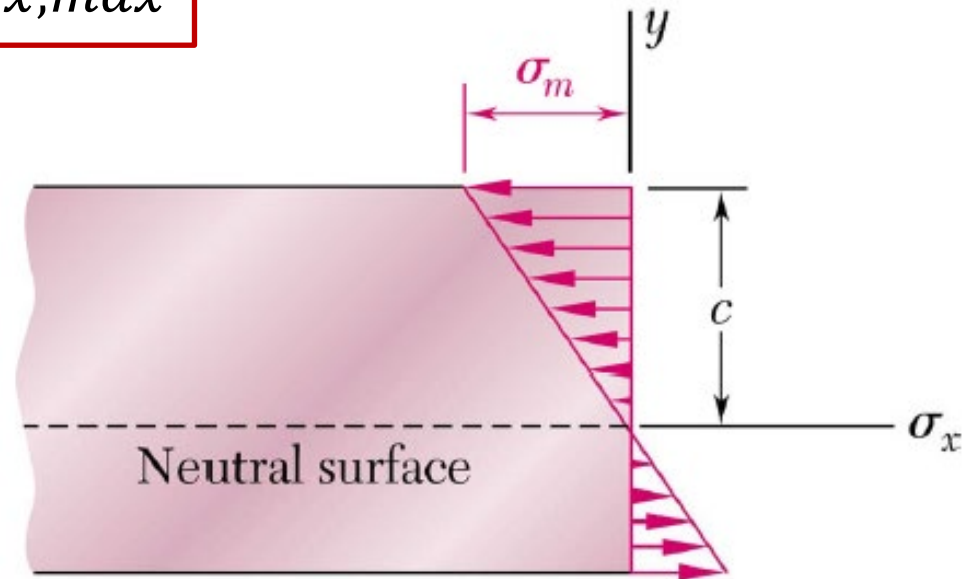
Αν το υλικό κατασκευής της δοκού συμπεριφέρεται γραμμικά-ελαστικά:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \longrightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x = -E\frac{y}{\rho}$$

Η ορθή τάση μεταβάλλεται γραμμικά σαν συνάρτηση της απόστασης από το ουδέτερο επίπεδο

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c} \varepsilon_{x,max} \longrightarrow \sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_{x,max}$$

Τα πρόσημα δεν έχουν αλλάξει, η μέγιστη εφελκυστική τάση θα βρίσκεται στην κάτω επιφάνεια της δοκού και η μέγιστη θλιπτική στην άνω επιφάνεια.



Σχέση μεταξύ ροπής M και τάσης σ

Έστω στοιχειώδης επιφάνεια dA της διατομής σε απόσταση y από το ουδέτερο επίπεδο. Αν M η επιβαλλόμενη ροπή, η στοιχειώδης ροπή που θα ασκείται στην επιφάνεια dA θα είναι:

$$dM = -\sigma_x y dA$$

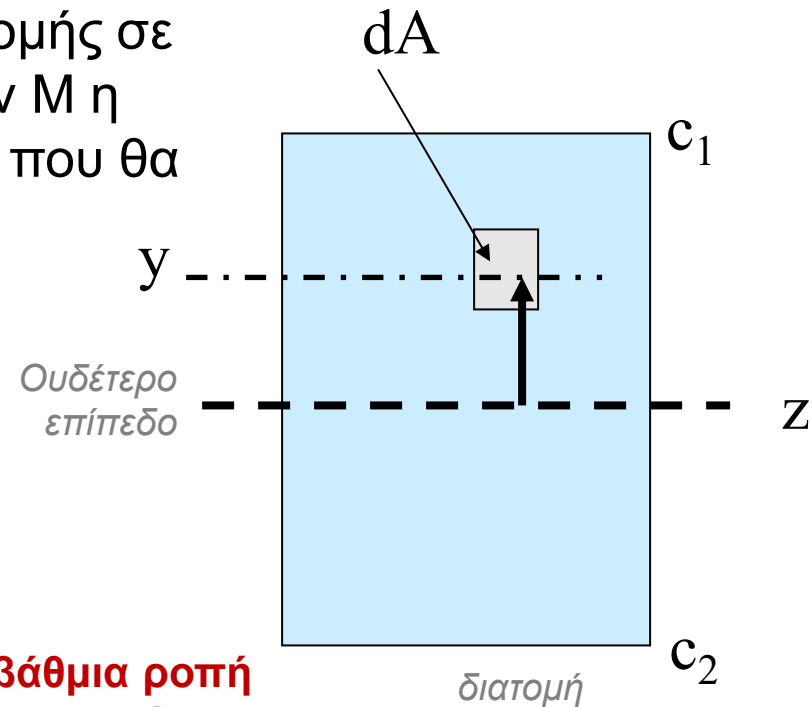
$$M = - \int_A \sigma_x y dA = \int_A \frac{E y}{\rho} y dA$$

όπου $I = \int_A y^2 dA$

I

Δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας επιφάνειας (ως προς το ουδέτερο επίπεδο)

Μέτρο της ικανότητας της γεωμετρίας διατομής της πρισματικής δοκού να αντιστέκεται στη κάμψη



Συνεπώς: $M = \frac{EI}{\rho}$ $\xrightarrow{\sigma_x = -\frac{Ey}{\rho} \Rightarrow \frac{E}{\rho} = -\frac{\sigma_x}{y}}$ $M = -\frac{\sigma_x I}{y} \Rightarrow \sigma_x = -\frac{My}{I}$

$\sigma_{x,max} = -\frac{Mc}{I}$

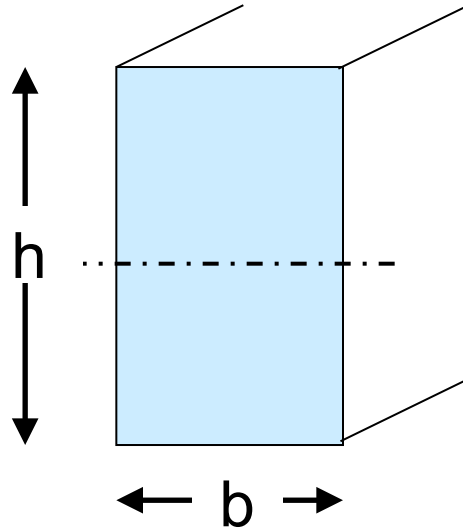
Καμπυλότητα $1/\rho$

Ένας άλλο μέτρο της παραμόρφωσης της δοκού σαν αποτέλεσμα της επιβαλλόμενης καμπτικής ροπής, είναι η **καμπυλότητα του ουδέτερου άξονα**. Ορίζεται ως ο αντίστροφος της ακτίνας καμπυρόλητας ρ , και προκύπτει ως:

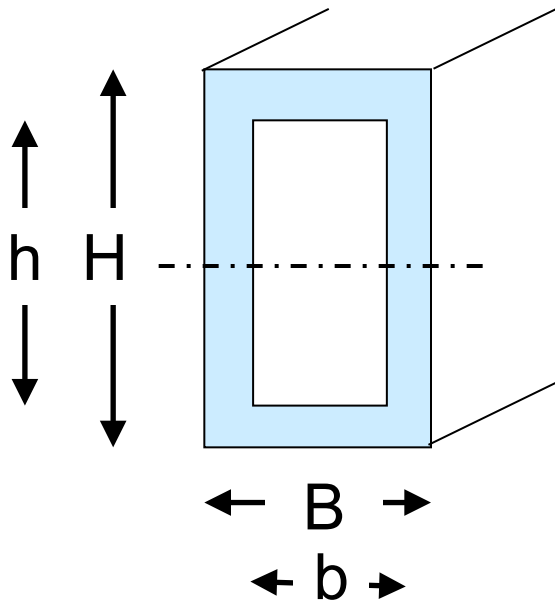
$$\varepsilon_{max} = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_{max}}{c} = \frac{\sigma_{max}}{Ec} = \frac{Mc/I}{Ec} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

Δευτεροβάθμιες ροπές αδράνειας επιφανειών

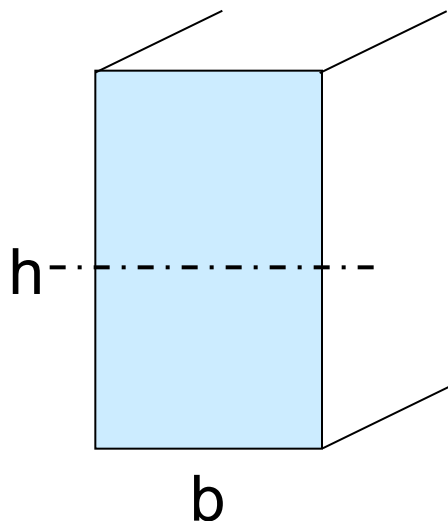


$$I = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$



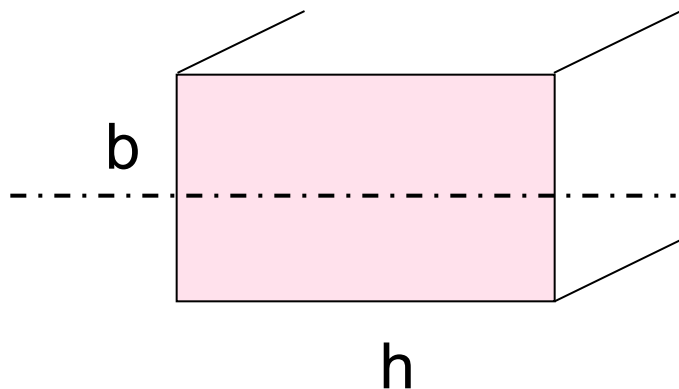
$$I = \frac{1}{12} (B \cdot H^3 - b \cdot h^3)$$

Δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας επιφάνειας



$$I_1 = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$

Διατομές ίδιου εμβαδού
ΔΕΝ έχουν κατ'ανάγκη ίδιες
ροπές αδράνειας



$$I_2 = \frac{1}{12} h \cdot b^3$$

Ορθές τάσεις σε καθαρή κάμψη

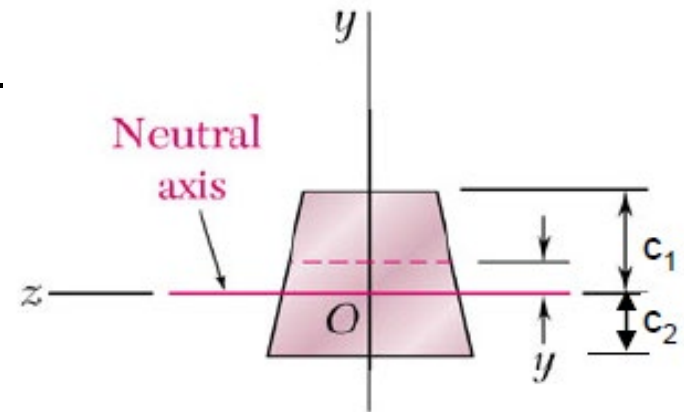
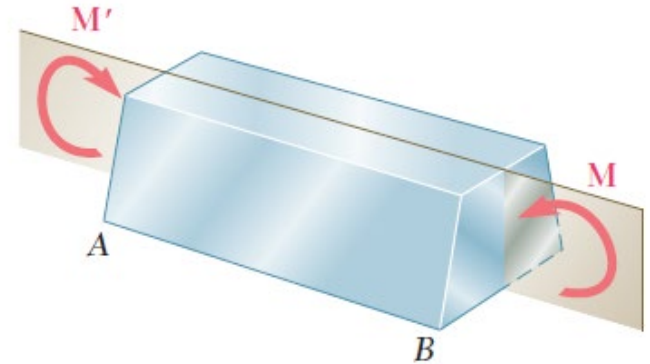
Αν c_1 και c_2 οι αποστάσεις του ουδέτερου επιπέδου από την άνω και κάτω επιφάνεια αντίστοιχα, έχουμε:

Μέγιστη εφελκυστική τάση: $M \frac{c_2}{I} = \frac{M}{S_2}$

Μέγιστη θλιπτική τάση: $M \frac{c_1}{I} = \frac{M}{S_1}$

Ο λόγος $S = \frac{I}{c}$ καλείται **ελαστική ροπή αντίστασης της επιφάνειας**.

Μεγαλύτερη S υποδηλώνει δοκό με μεγαλύτερη αντίσταση σε κάμψη.



Σχεδιασμός δοκών κάμψης

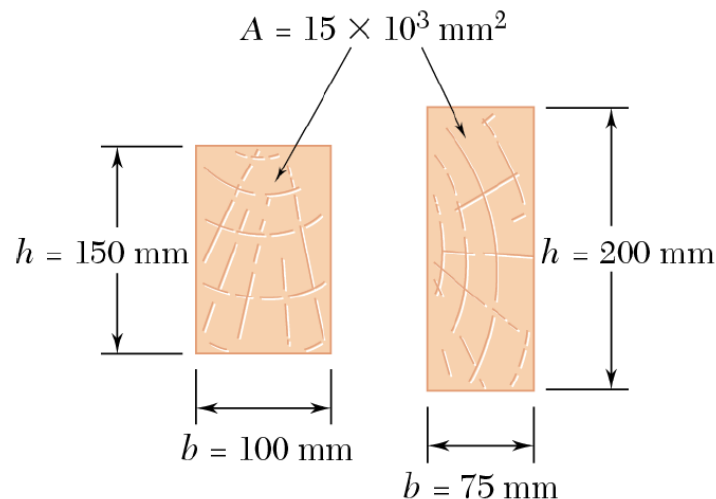
Αφού

$$\sigma_m = \frac{M}{S}$$

ο σχεδιασμός δοκών κάμψης, για την ελάχιστη καταπόνηση σε κάμψη, πρέπει να περιλαμβάνει την μεγαλύτερη δυνατή ροπή αντίστασης S .

Για ορθογώνια διατομή:

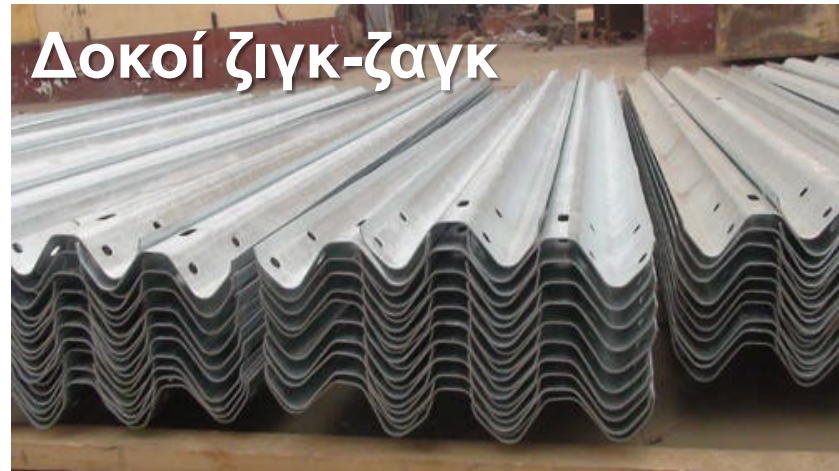
$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah$$



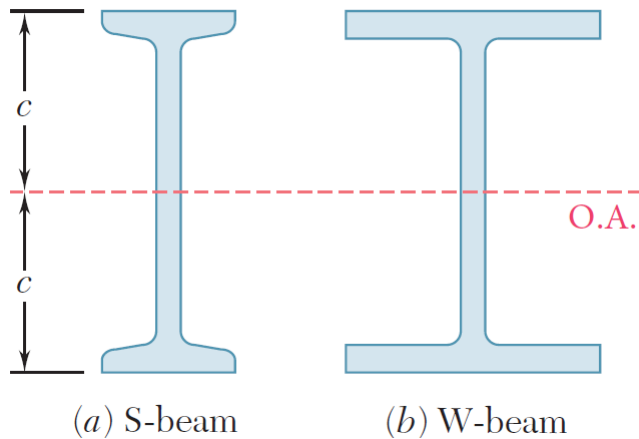
Μεταξύ δύο δοκών με ίδια διατομή, μεγαλύτερη αντίσταση στην κάμψη επιδεικνύει εκείνη με το μεγαλύτερο ύψος

Διατομές μέγιστης αντίστασης στην κάμψη

Δοκοί H (I-beams)



Δοκοί ζιγκ-ζαγκ

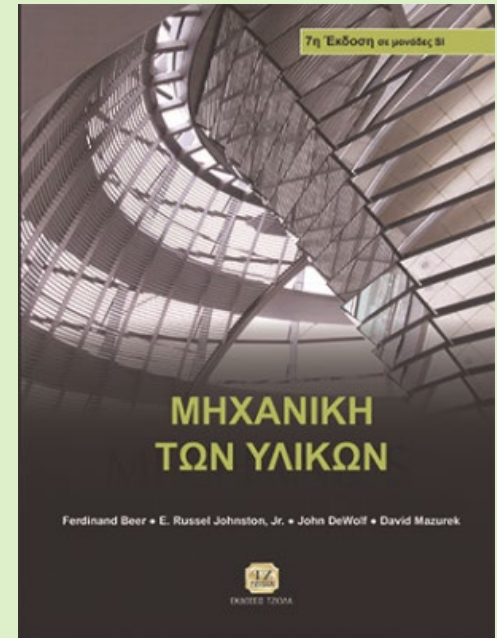


Μεγάλο μέρος της διατομής βρίσκεται μακριά από το ουδέτερο επίπεδο γεγονός που οδηγεί σε υψηλές τιμές I , συνεπώς και S .

Ανακοινώσεις

Περισσότερη Μελέτη:

- Κεφάλαιο 4, F. Beer et al, Μηχανική των Υλικών, 7^η Έκδοση, 2022



Ώρες συνεργασίας με φοιτητές: Τετάρτη 12.00-14.00