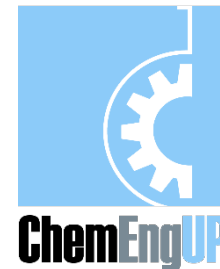




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS



CHM_582: Μηχανική Υλικών

Διάλεξη 11: ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

Κωνσταντίνος Γ. Δάσιος, Αναπλ. Καθηγητής
Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
kdassios@upatras.gr

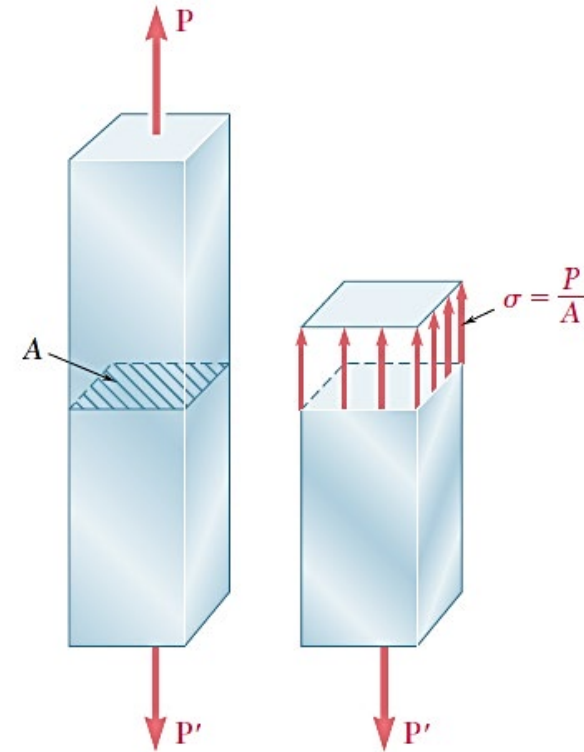
Πάτρα, Μάιος 2025

Τάση

Η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας (ή ένταση των δυνάμεων που κατανέμονται σε μια διατομή), ονομάζεται **μηχανική τάση** και προκύπτει διαιρώντας το αξονικό φορτίο P με το εμβαδό (ή επιφάνεια) διατομής, A :

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Θετικό πρόσημο: εφελκυστική τάση
Αρνητικό πρόσημο: θλιπτική τάση



Μονάδες @ SI: $N/m^2 = Pa$

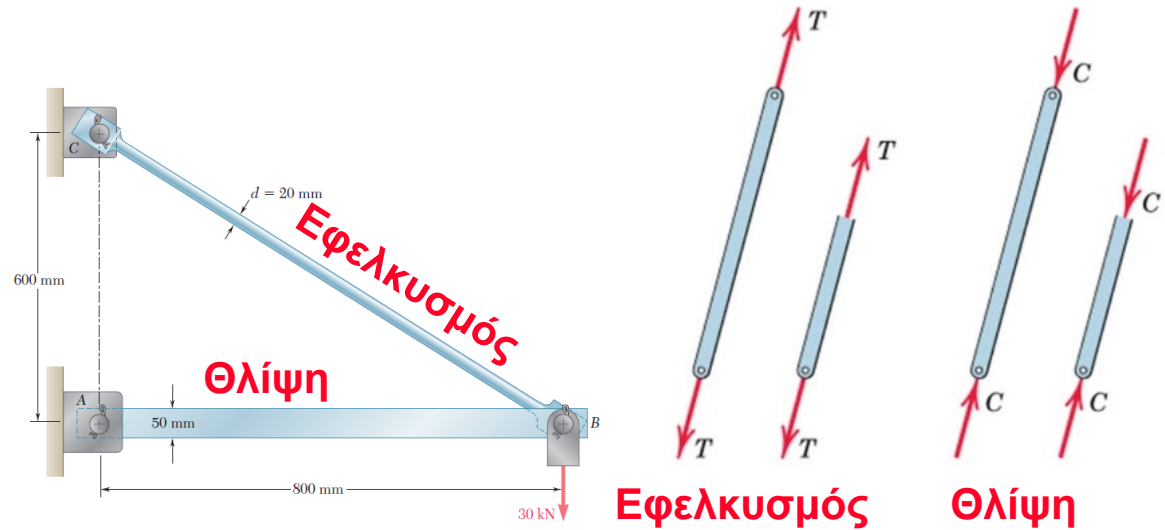
$$1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$$

Αξονική Φόρτιση, Ορθή Τάση

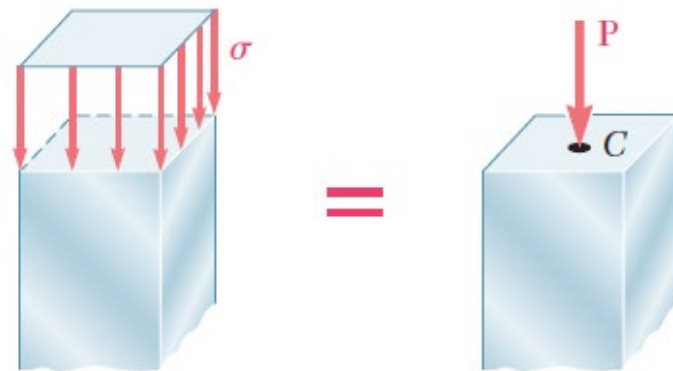
Είδαμε πως σε δικτυωτούς και ολόσωμους φορείς αναπτύσσονται αξονικές (ορθές) δυνάμεις.



Οι αξονικές δυνάμεις είναι κάθετες στο επίπεδο της διατομής και οι αντίστοιχες τάσεις καλούνται **ορθές τάσεις**.

Ομοιόμορφη Κατανομή Τάσεων στη Διατομή

Υποθέτουμε **ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων στην διατομή**, δηλαδή η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων εφαρμόζεται στο κεντροειδές C της διατομής.

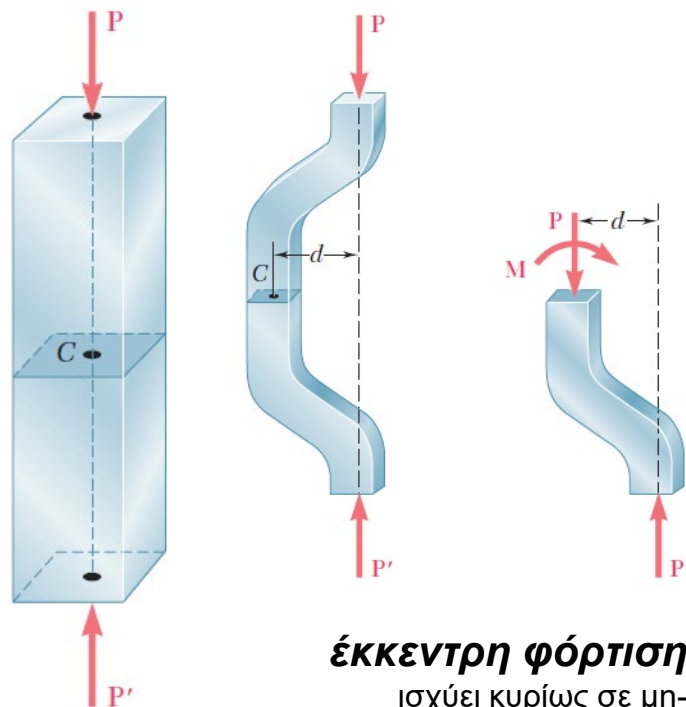


Δηλαδή η γραμμή δράσης των συγκεντρωμένων φορτίων P και P' διέρχεται από το κεντροειδές της διατομής: **κεντρική φόρτιση**.

Αντίθετη περίπτωση:
αξονική **έκκεντρη**

φόρτιση: μη-ομοιόμορφη κατανομή τάσεων στην διατομή

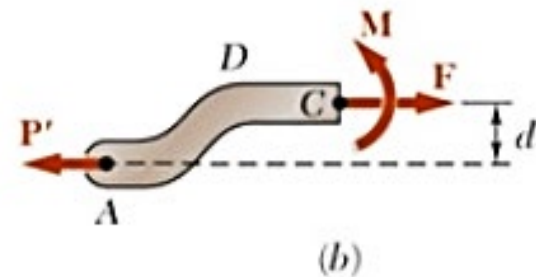
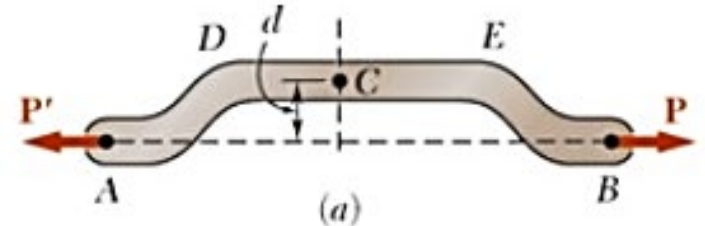
κεντρική φόρτιση
ισχύει στους περισσότερους
ευθύγραμμους δικτυωτούς και
ολόσωμους φορείς



έκκεντρη φόρτιση
ισχύει κυρίως σε μη-
ευθύγραμμους φορείς

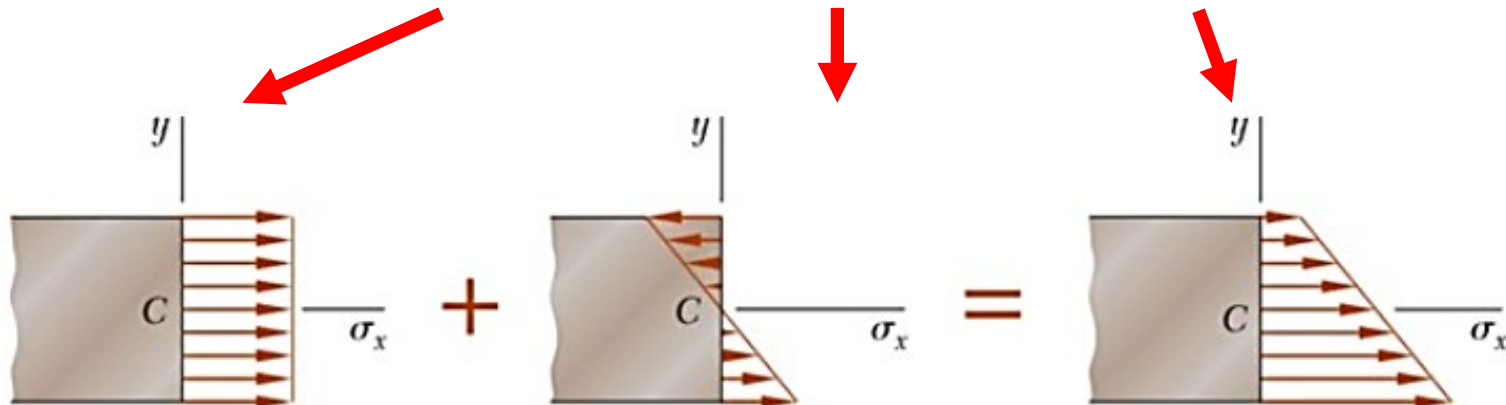
Παράδειγμα ανομοιόμορφης κατανομής τάσης

Η καμπτική ροπή προκαλεί **συνεισφορά σε ορθή τάση** που μεταβάλλεται με τη θέση y κατά μήκος της διατομής



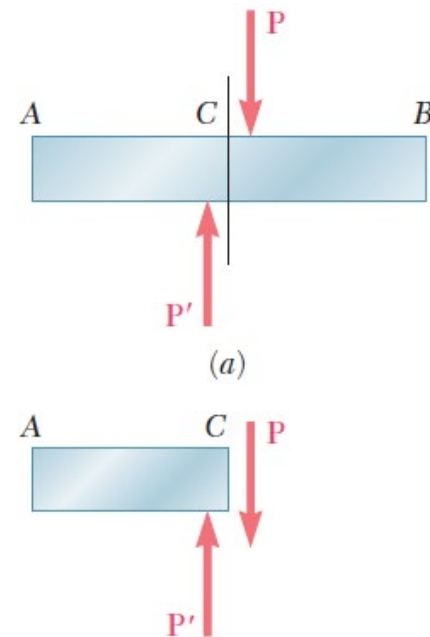
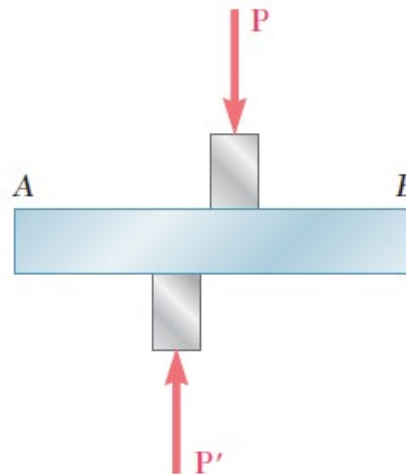
$$F = P$$
$$M = Pd$$

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{centric} + (\sigma_x)_{bending} = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$



Διατμητική Τάση

Όταν σε φορέα ασκούνται **εγκάρσιες** δυνάμεις P και P' , στο εσωτερικό του αναπτύσσονται **διατμητικές** ή **τέμνουσες δυνάμεις**.

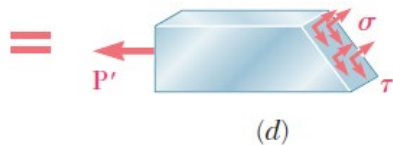
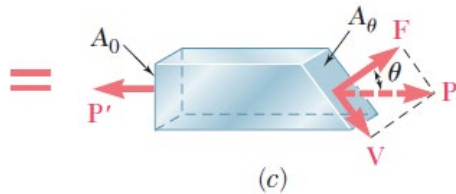
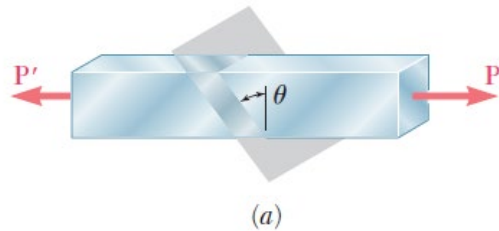


Αν P η συνισταμένη των δυνάμεων, η **διατμητική τάση** προκύπτει ως το πηλίκο της **διατμητικής δύναμης P** με το **εμβαδόν A** της διατομής:

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A}$$

Μέση τιμή ως προς ολόκληρη τη διατομή:
Σε αντίθεση με τις ορθές, **η κατανομή** των διατμητικών τάσεων στην διατομή **δεν είναι ομοιόμορφη**.

Τάσεις σε κεκλιμένο επίπεδο υπό αξονική φόρτιση



$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \quad \tau = \frac{V}{A_\theta}$$



$$\sigma = \frac{P \cos \theta}{A_0 / \cos \theta} \quad \tau = \frac{P \sin \theta}{A_0 / \cos \theta}$$



$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$

ΟΡΘΕΣ ΤΑΣΕΙΣ

$$\sigma_m = \frac{P}{A_0} \quad \begin{matrix} \text{max @ } \theta=0^\circ \\ 0 @ \theta=90^\circ \end{matrix}$$

ΔΙΑΤΜΗΤΙΚΕΣ ΤΑΣΕΙΣ

$$\tau_m = \frac{P}{2A_0} \quad \begin{matrix} \text{max @ } \theta=45^\circ \\ 0 @ \theta=0^\circ \text{ \& } \theta=90^\circ \end{matrix}$$

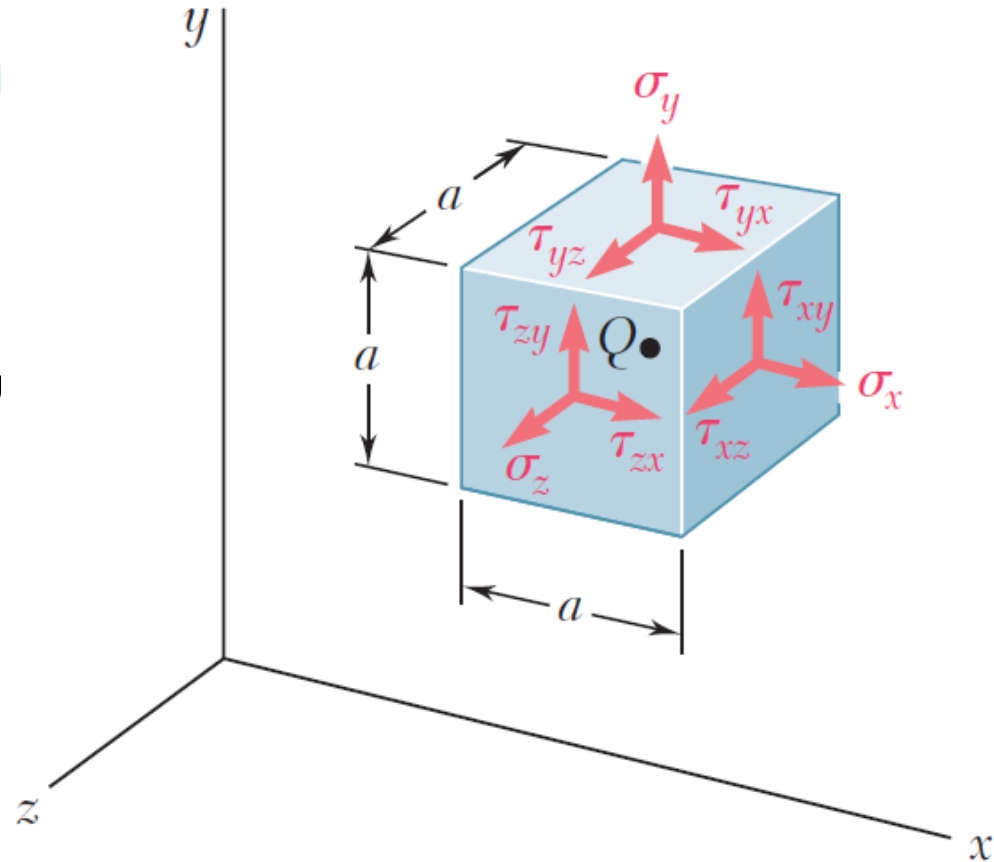
Απεικόνιση Γενικευμένης Φόρτισης

Για να **απεικονίσουμε** την **πλήρη εντατική κατάσταση στο σημείο Q**, θεωρούμε **διαφορικό κύβο πλευράς a** , με κέντρο το Q. Οι τάσεις στο Q απεικονίζονται ως τάσεις που δρουν στις 6 έδρες του κύβου.

9 τασικές συνιστώσες:

3 ορθές: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

6 διατμητικές: $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$



Μόνο 3 έδρες είναι ορατές. Στις 3 μη-ορατές έδρες δρουν ίσες και αντίθετες συνιστώσες τάσης.

Σχέσεις μεταξύ Διατμητικών Τάσεων

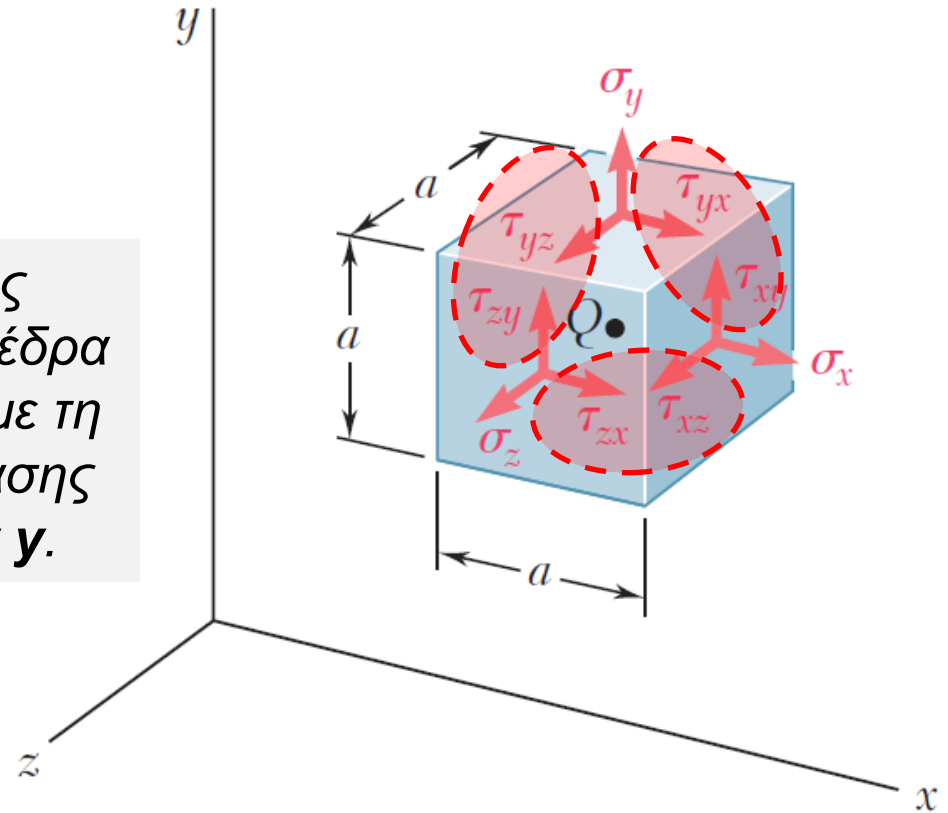
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Δείχνει ότι η **y-συνιστώσα** της διατμητικής τάσης που δρα στην έδρα **κάθετη στον άξονα x**, είναι ίση με τη **x-συνιστώσα** της διατμητικής τάσης στην έδρα **κάθετη στον άξονα y**.

Από την ισορροπία ροπών ως προς x και y, παίρνουμε με παρόμοιο τρόπο:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$



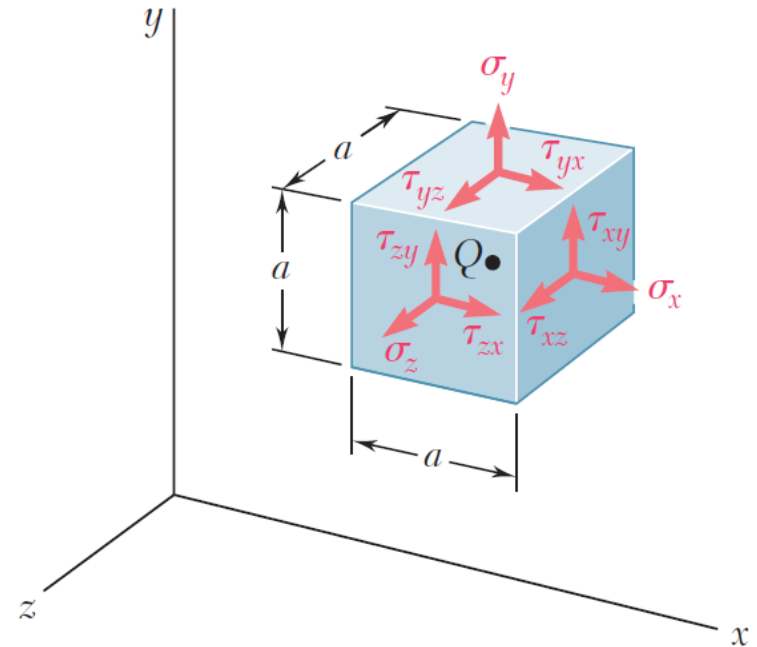
Πρόταση Cauchy: οι διατμητικές τάσεις σε 2 κάθετα επίπεδα είναι ίσες μεταξύ τους & κατευθύνονται και οι δυο προς την κοινή ακμή των επιπέδων, ή απομακρύνονται απ' αυτήν.

Γενικευμένη Φόρτιση: Συμπεράσματα

1. Για να ορίσουμε την **πλήρη εντατική κατάσταση σε τυχαίο σημείο Q**, απαιτούνται 6 (και όχι 9) συνιστώσες τάσης:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx},$$

2. Η διάτμηση **δεν μπορεί να εμφανίζεται σε ένα μόνο επίπεδο**, ίση διατμητική τάση θα ασκείται και σε δεύτερο επίπεδο, κάθετο στο αρχικό



$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

Σχεδιασμός Κατασκευών

- Προσδιορισμός τάσεων αναγκαίος για τον σχεδιασμό στοιχείων που φέρουν φορτία με ασφάλεια (χωρίς αστοχία) και οικονομία.
- Το **μέγιστο φορτίο** κάθε δομικού μέλους ή στοιχείου μηχανής είναι το φορτίο στο οποίο αυτό αναμένεται να αστοχήσει (υπολογίζεται από πειραματικές δοκιμές)
- Το μέγιστο φορτίο πρέπει να είναι **σημαντικά μεγαλύτερο** από το **επιτρεπόμενο φορτίο**, δηλ. το φορτίο που επιτρέπεται να φέρει το μέλος ή το στοιχείο υπό κανονικές συνθήκες λειτουργίας.
- Λόγος μέγιστου προς επιτρεπόμενο φορτίο: **συντελεστής ασφάλειας**

$$\text{Συντελεστής ασφαλείας} = \Sigma.A. = \frac{\text{μέγιστο φορτίο}}{\text{επιτρεπτό φορτίο}}$$

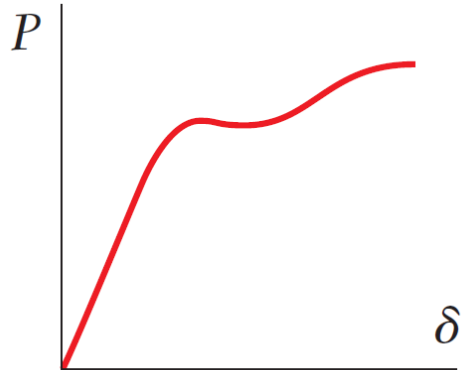
Επιλογή σωστού ΣΑ, ένα από τα κρισιμότερα καθήκοντα του μηχανικού

- Παραδείγματα σχεδιασμού με μέγιστη & επιτρεπόμενη τάση

Ορθή Παραμόρφωση

Παραμορφώσιμο στερεό: Ασκώντας αξονική δύναμη P στο άκρο C της ράβδου μήκους L και επιφάνειας διατομής A , το μήκος της θα **αυξηθεί κατά δ** (μετατόπιση C κατά δ).

Εάν η επιβαλλόμενη δύναμη **αυξάνεται σταδιακά**, μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη μεταβολή της μετατόπισης δ για κάθε P :

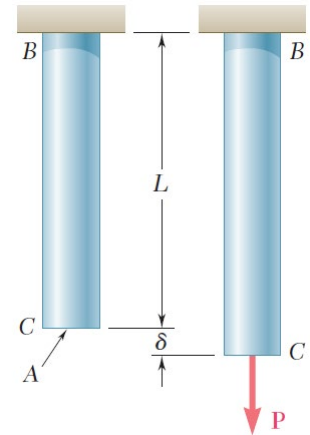
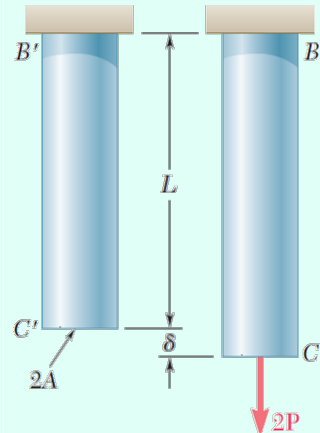


Διάγραμμα
δύναμης P –
μετατόπισης δ

Διάγραμμα δεν μπορεί να περιγράψει ενδογενώς το υλικό (για όλες τις διαστάσεις).

Διατομή $2A$,
χρειάζεται
δύναμη $2P$.

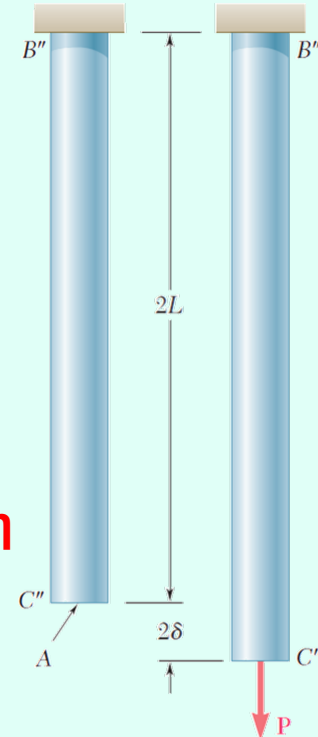
**Τάση $\sigma = P/A$
σταθερή**



Μήκος $2L$,
μετατοπίζεται
κατά 2δ .

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

**Παραμόρφωση
σταθερή
(ορθή)**

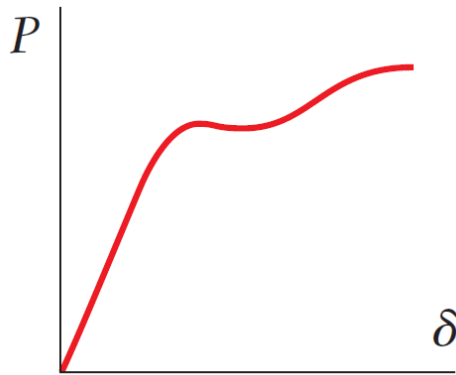


Μονάδες;

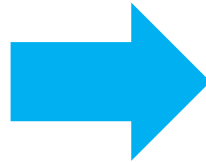
Αδιάστατο
[mm/mm], [%]¹²

Διάγραμμα Τάσης-Παραμόρφωσης

Αναπαριστώντας την τάση ως προς την παραμόρφωση, λαμβάνουμε διάγραμμα που περιγράφει τη μηχανική απόκριση του υλικού ενδογενώς, ανεξάρτητα από της διαστάσεις ή το δείγμα.

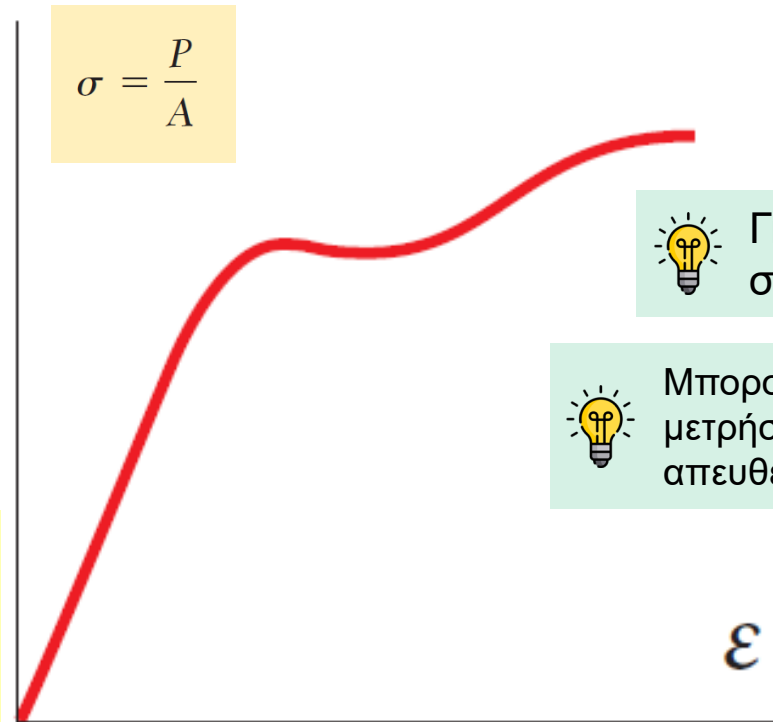


Διάγραμμα δύναμης – μετατόπισης $P(\delta)$



σ

$$\sigma = \frac{P}{A}$$



Γιατί ίδιο σχήμα;



Μπορούμε να μετρήσουμε απευθείας $\sigma(\epsilon)$;

ϵ

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

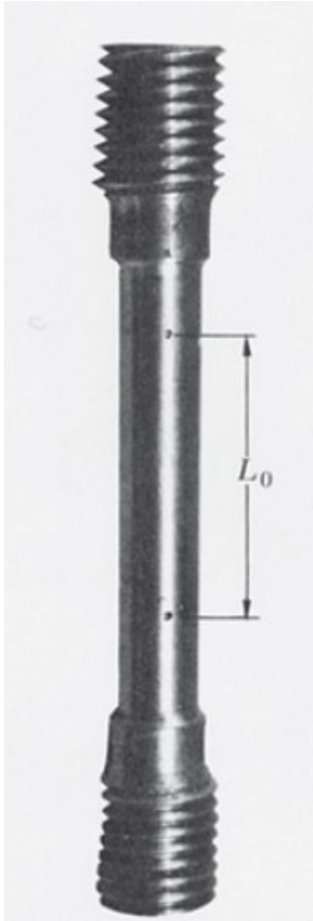
Κανονικοποιώντας κατά y ως προς τη διατομή ($2D$) και κατά x ως προς το μήκος ($1D$), εξαλείψαμε την εξάρτηση του διαγράμματος από τον όγκο ($3D$) του σώματος.

$\sigma(\epsilon)$: ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΥΛΙΚΟΥ

Διάγραμμα Τάσης – Παραμόρφωσης $\sigma(\epsilon)$

Διάγραμμα Τάσης-Παραμόρφωσης (2)

Προκύπτει από υποβολή δειγμάτων του υπό μελέτη υλικού σε καταστροφικές δοκιμές εφελκυσμού.



**Δοκίμιο
εφελκυσμού
(κυλινδρικό)**

**Αρχική επιφάνεια
διατομής A [mm²]**

Ενεργό μήκος L_0 :
το κεντρικό τμήμα
όπου μετράται η
παραμόρφωση

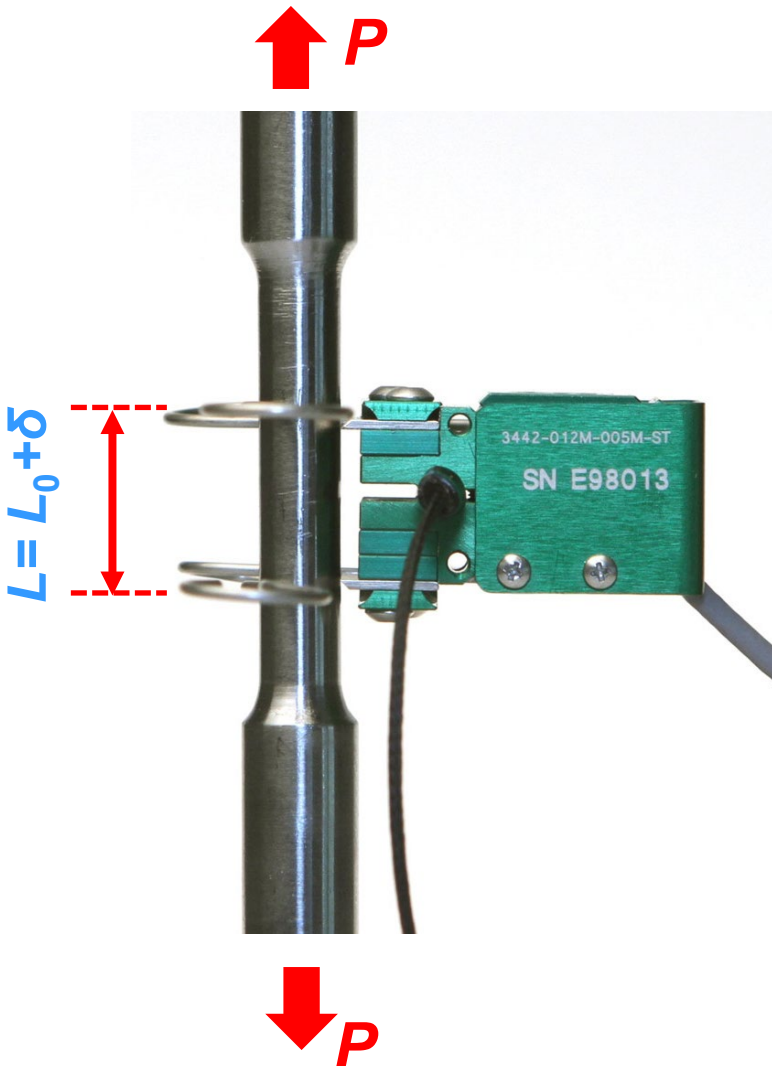


**Πλαίσιο μηχανικών
δοκιμών**

Τρόποι Φόρτισης:

1. Επιβολή P > μέτρηση δ (force control)
2. Επιβολή δ > μέτρηση P (displacement control)

Διάγραμμα Τάσης-Παραμόρφωσης (3)



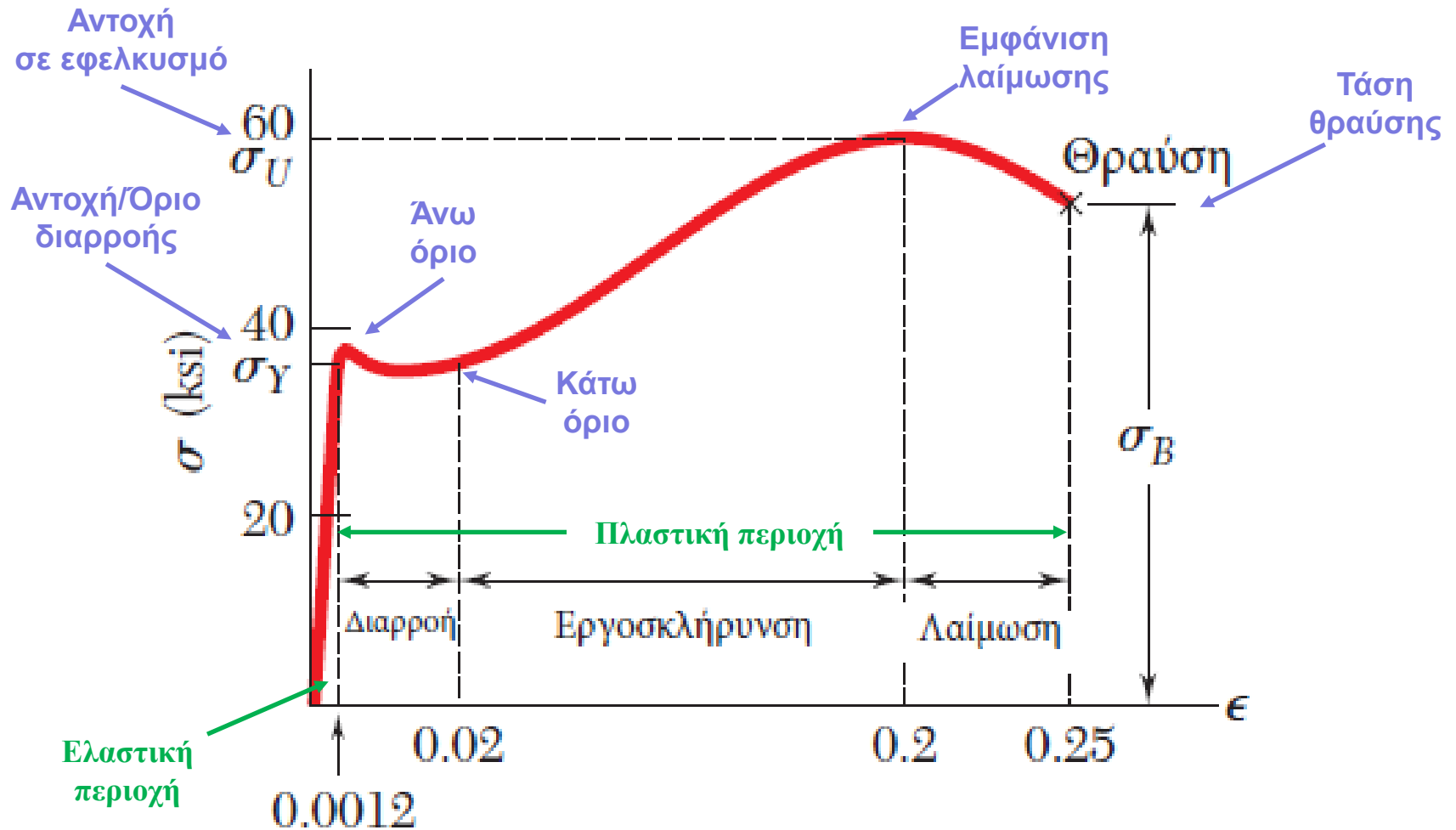
1. Μέτρηση A και L_0 πριν την δοκιμή
2. Κατά την δοκιμή, επιβολή αυξανόμενου $P >$ αύξηση ενεργού μήκους κατά δ (μετατόπιση)
3. Μέτρηση μεταβολής στιγμιαίου ενεργού μήκους (μετατόπισης δ) με εξωτερικό επιμηκυνσιόμετρο, όχι από πλαίσιο
4. Υπολογισμός μετατόπισης: $\delta = L - L_0$
5. Κατασκευή ζευγών $P(\delta)$
6. Διαίρεση P με A και δ με L_0 για κατασκευή ζευγών $\sigma(\epsilon) >$ γραφική αναπαράσταση

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

$$\epsilon = \frac{\delta}{L}$$

Θεμελιώδεις πληροφορίες από $\sigma(\epsilon)$

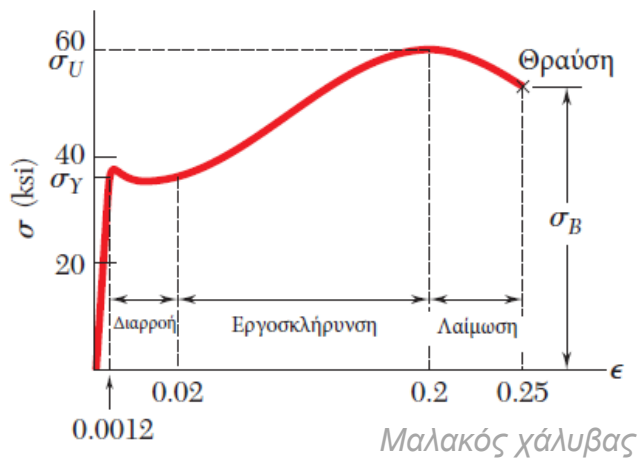
1. Συνολική συμπεριφορά και περιοχές



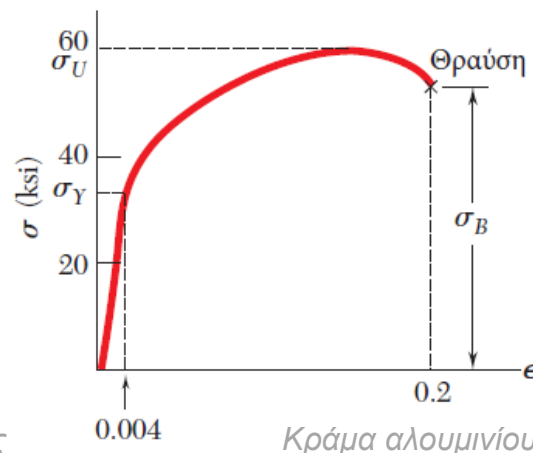
Θεμελιώδεις πληροφορίες από $\sigma(\epsilon)$ (2)

2. Κατηγοριοποίηση υλικού ως όλκιμο ή ψαθυρό

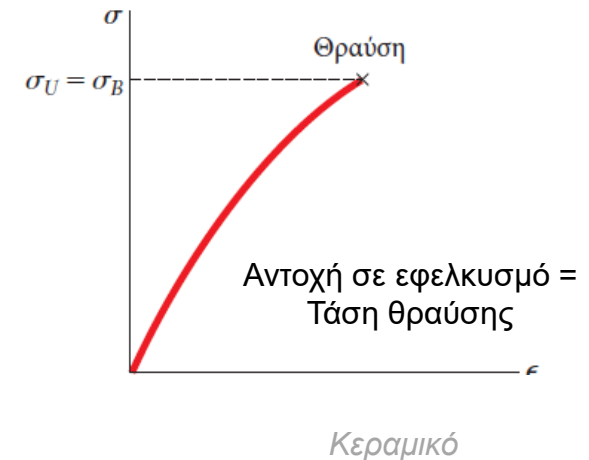
Όλκιμο εάν εμφανίζει πλαστικά φαινόμενα (διαρροή, λαίμωση, κλπ)



Μαλακός χάλυβας



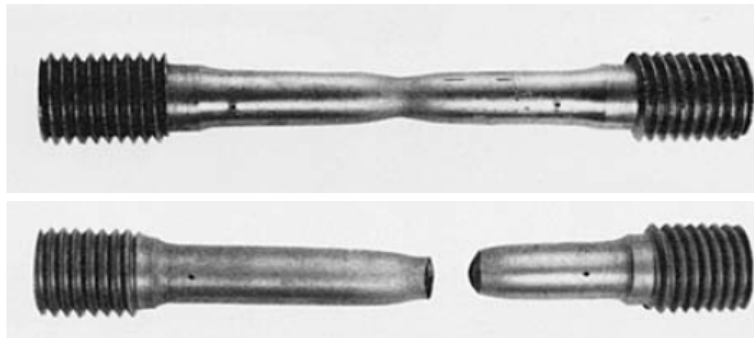
Κράμα αλουμινίου



Κεραμικό

Όλκιμη θραύση

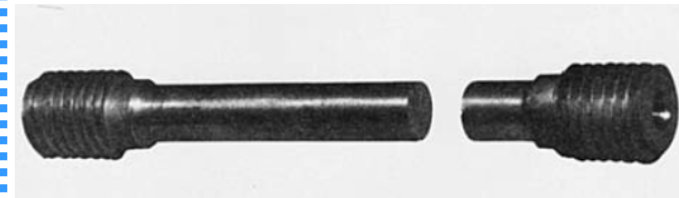
Κωνική επιφάνεια θραύσης με περιμετρικό χείλος 45°



Τύπος αστοχίας;

ΥΠΟ ΔΙΑΤΜΗΣΗ

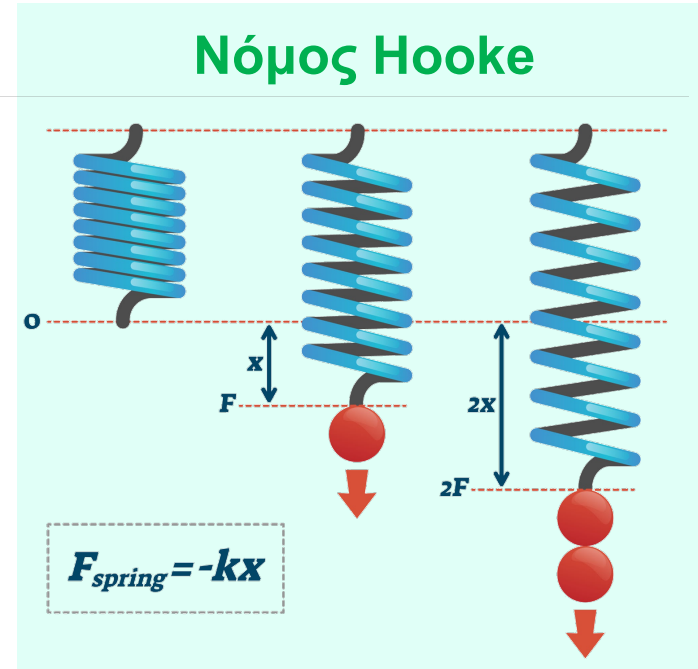
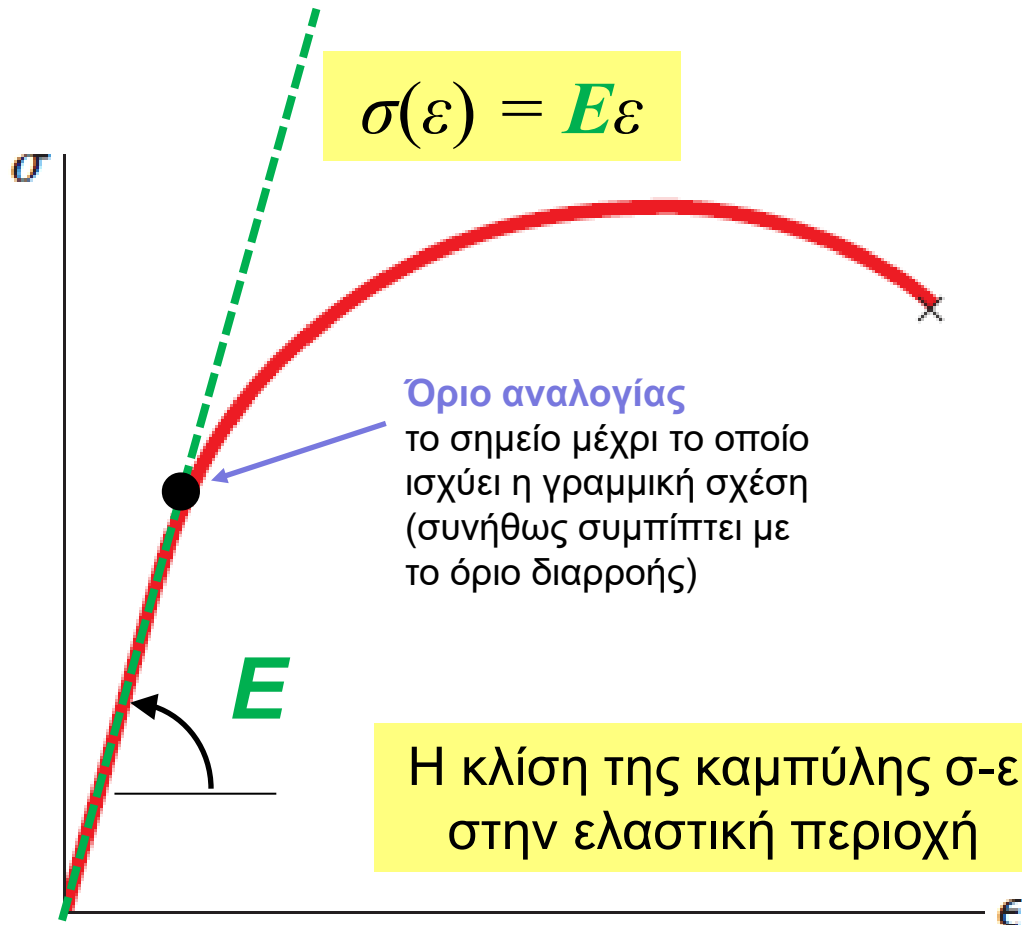
Ψαθυρή θραύση



Επίπεδη επιφάνεια θραύσης κάθετα στην επιβαλλόμενη τάση: **αστοχία υπό την επίδραση ορθών τάσεων**

Θεμελιώδεις πληροφορίες από $\sigma(\epsilon)$ (3)

3. Μέτρο Ελαστικότητας ή Δυσκαμψίας ή Μέτρο Young, E



Μονάδες E ;

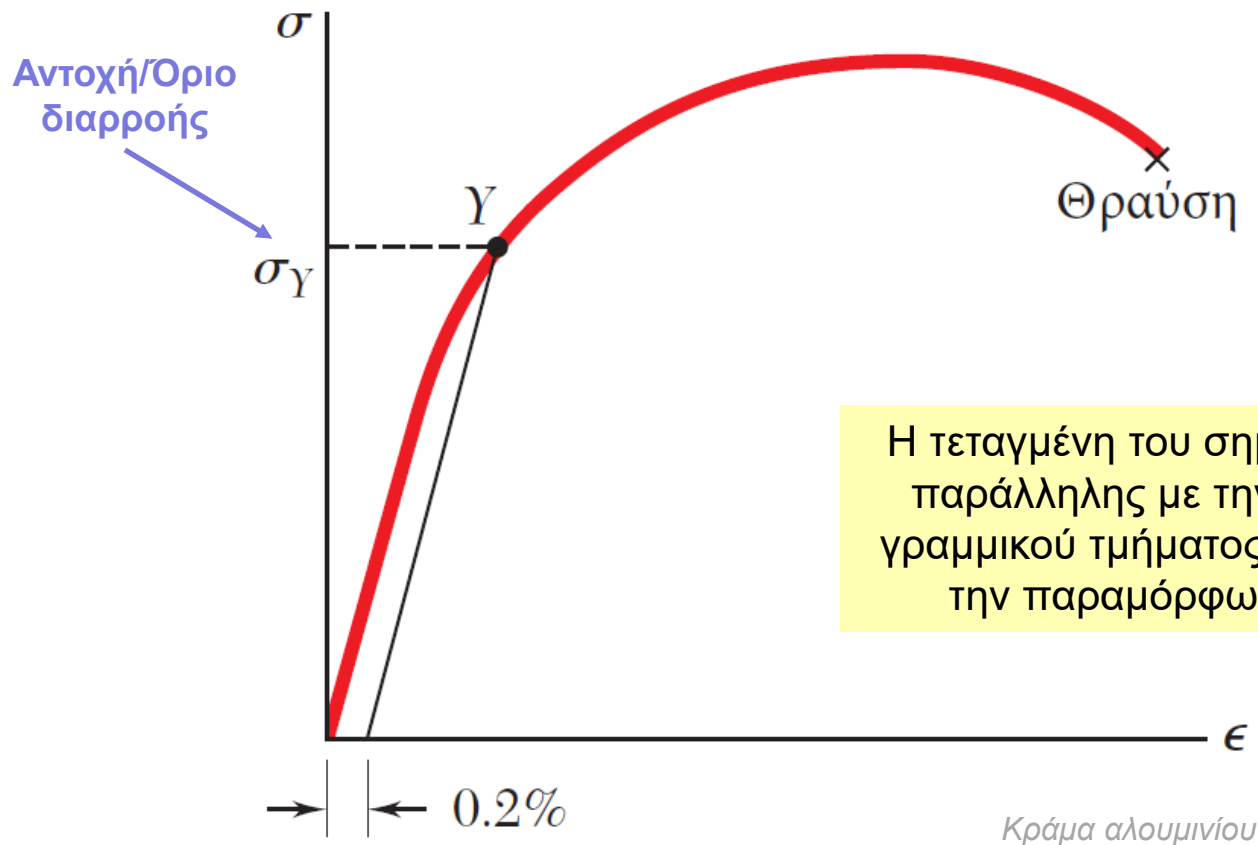
Εφόσον ϵ αδιάστατο:
ίδιες με τάση [Pa]

Τάξη μεγέθους $E \sim 10^3 \sigma_B$

Θεμελιώδεις πληροφορίες από $\sigma(\epsilon)$ (4)

4. Συμβατικό όριο διαρροής 0.2%

Όταν κατά την διαρροή η τάση δεν εμφανίζει πλατό



Θεμελιώδεις πληροφορίες από σ(ε) (5)

5. Ολκιμότητα

Αν L_B , και A_B το συνολικό μήκος και η επιφάνεια διατομής κατά τη θραύση, η ολκιμότητα μετράται μέσω των :

$$\text{Ποσοστιαία επιμήκυνση} = 100 \frac{L_B - L_0}{L_0}$$

$$\text{Ποσοστιαία μείωση διατομής} = 100 \frac{A_0 - A_B}{A_0}$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ

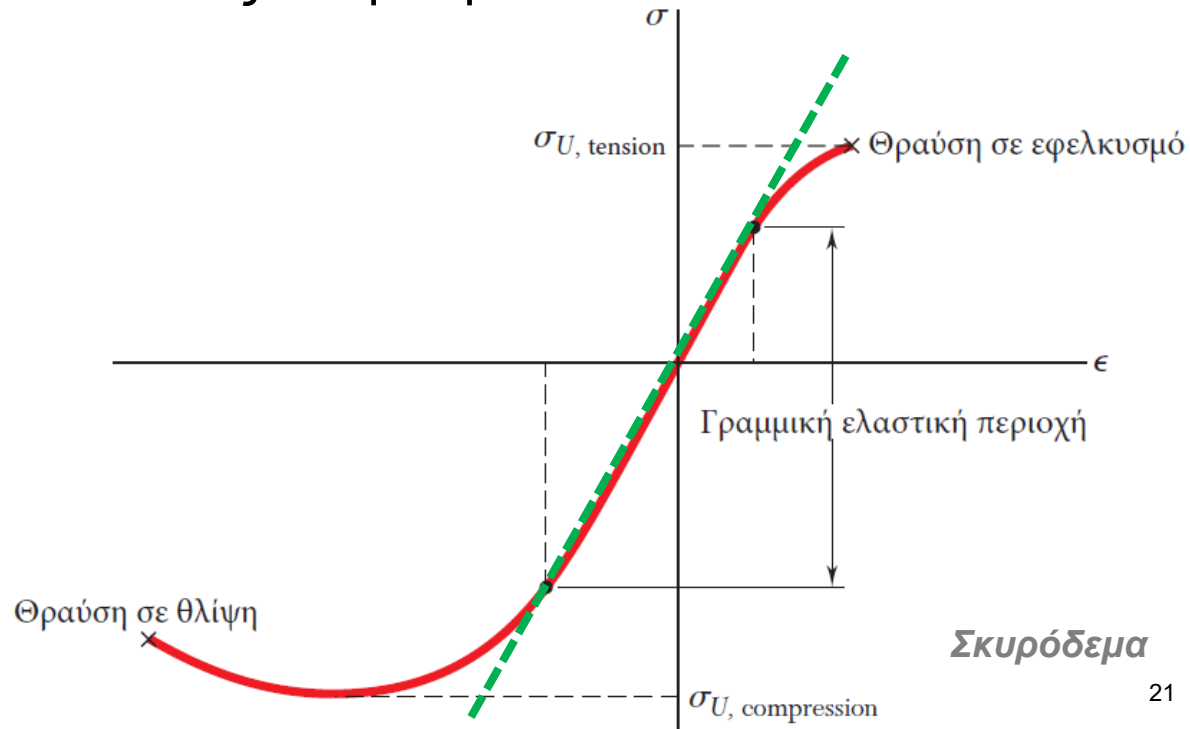
- Η συμπεριφορά των διαγραμμάτων σ(ε) ποικίλει με την **θερμοκρασία** και την **ταχύτητα δοκιμής**.
- Ακόμη και με τις παραμέτρους αυτές σταθερές, οι ιδιότητες παρουσιάζουν **στατιστική διακύμανση**: απαιτείται διεξαγωγή πολλαπλών δοκιμών για τον ακριβή προσδιορισμό τους

$\sigma(\epsilon)$ σε Θλιπτική Φόρτιση

- Καμπύλη $\sigma(\epsilon)$ σε θλίψη ουσιαστικά **όμοια με εφελκυσμού** μέχρι μέγιστο φορτίο (ελαστική περιοχή, διαρροή, εργοτράχυνση)
- Σε μεγαλύτερες παραμορφώσεις, απόκλιση καμπυλών, δεν μπορεί να συμβεί λαίμωση.
- Για ψαθυρά υλικά, **θλιπτική αντοχή μεγαλύτερη εφελκυστικής** καθώς οι ρωγμές και οι ατέλειες δεν μπορούν να διαδοθούν

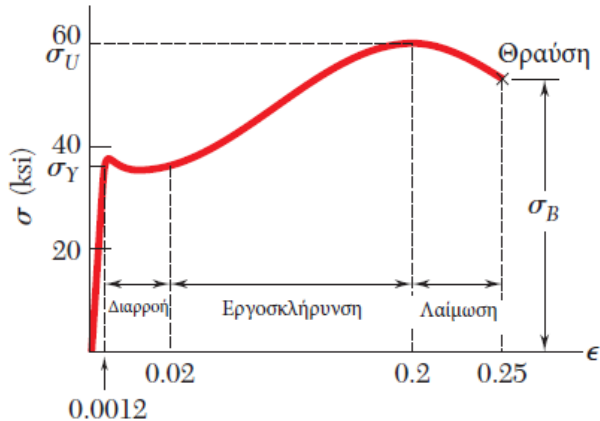
Σκυρόδεμα:

- **Εφελκυσμός:** Τυπική ψαθυρή συμπεριφορά, θραύση αμέσως μετά το όριο αναλογίας
- **Θλίψη:** Μεγαλύτερη ελαστική περιοχή, θραύση μετά τη μέγιστη τάση με αύξηση παραμόρφωσης, E ίδιο



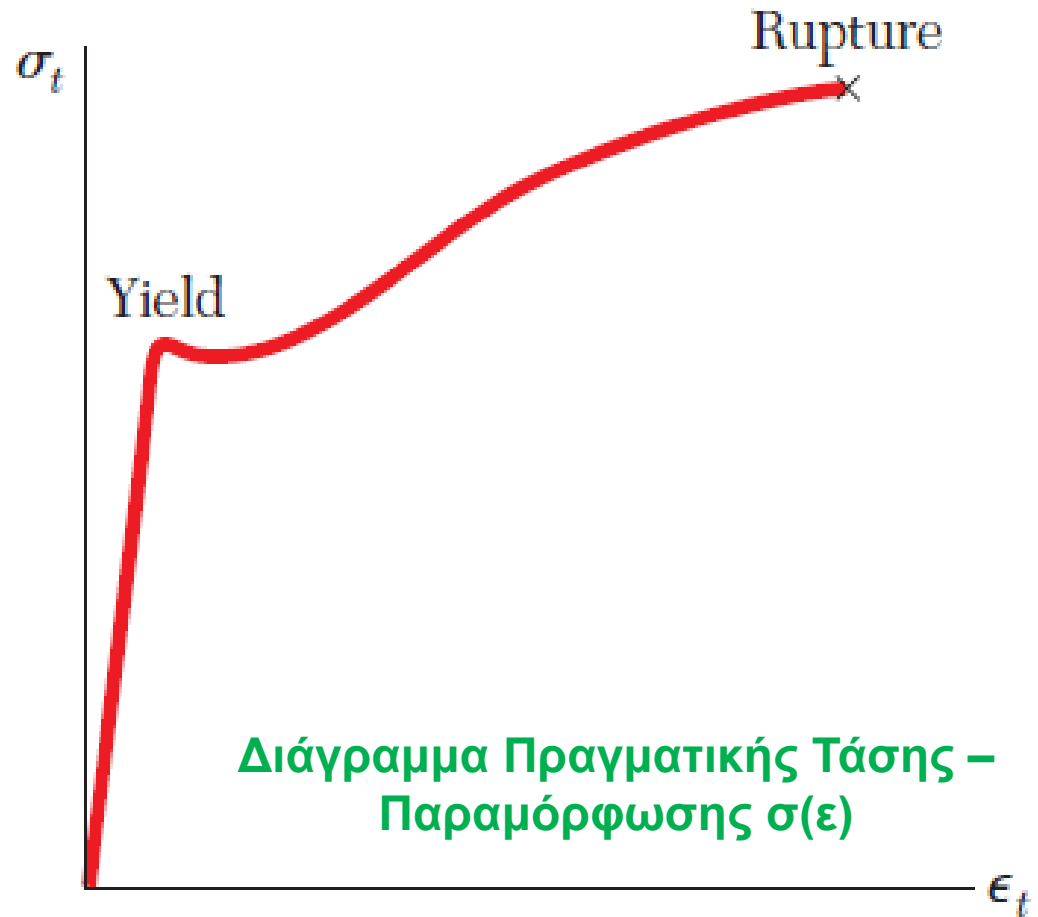
Σκυρόδεμα

Ονομαστική vs Πραγματική Τάση



Γιατί θραύση σε τάση μικρότερη της μέγιστης;

- Γιατί αναφέρεται στην (σταθερή) **αρχική διατομή A_0**
- Η **πραγματική τάση** (πηλίκο της δύναμης προς πραγματική στιγμιαία διατομή), **αυξάνει μονότονα** μέχρι την θραύση.

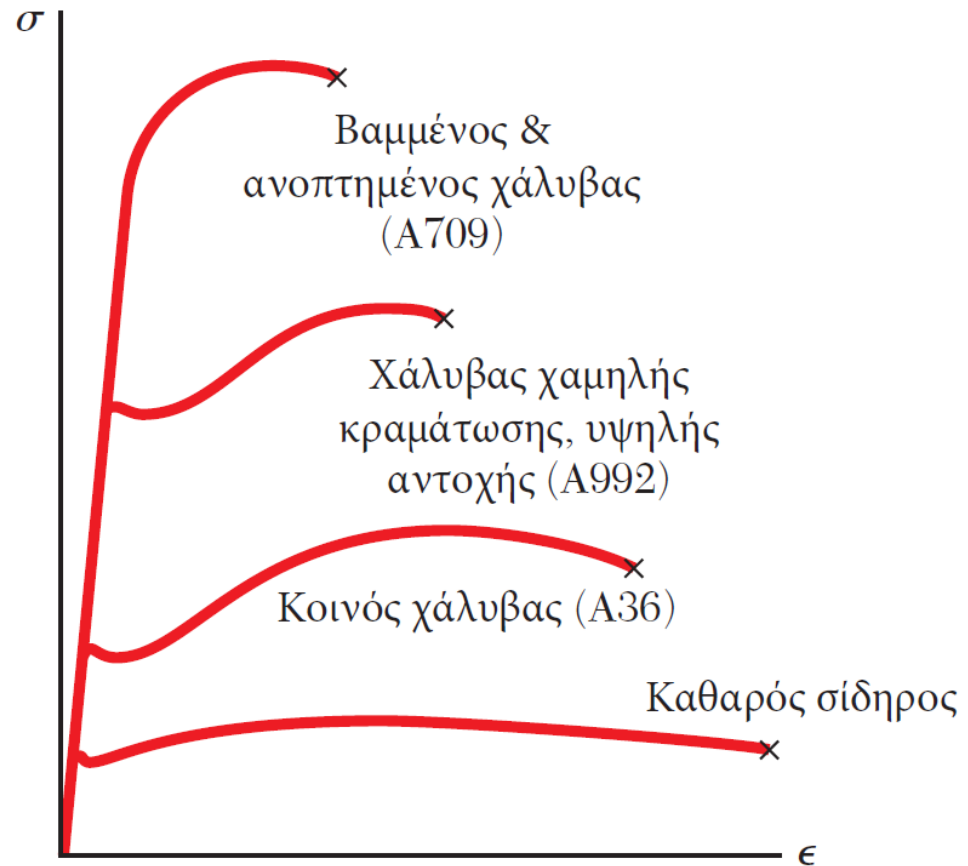


Διάγραμμα Πραγματικής Τάσης – Παραμόρφωσης $\sigma(\epsilon)$

Επίδραση Κραμάτωσης & Κατεργασίας

Στα κράματα, η αντοχή, η ολκιμότητα ακόμη και η αντίσταση στη διάβρωση των υλικών, επηρεάζονται από την **κραμάτωση**, την **θερμική κατεργασία** και την **διαδικασία παρασκευής**.

- Ίδια δυσκαμψία E
- Διαφορετική αντοχή διαρροής σ_y
- Διαφορετική αντοχή σ_B
- Διαφορετική ολκιμότητα ϵ_B



$\sigma(\epsilon)$ για σίδηρο και
διάφορους χάλυβες

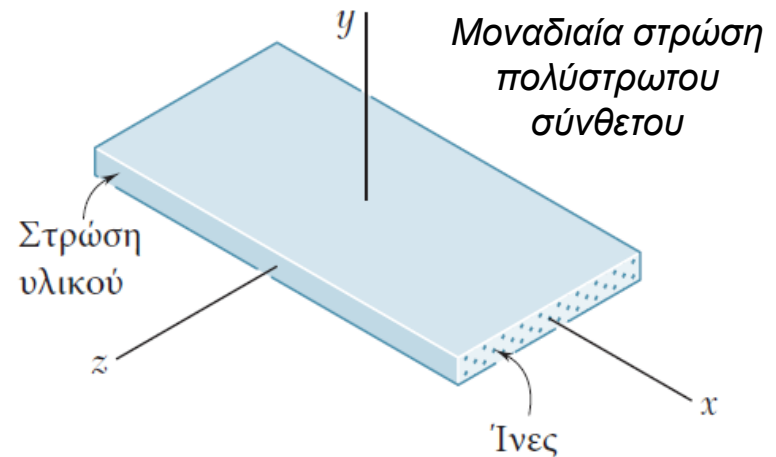
Ισοτροπία

Όταν η σχέση μεταξύ ορθής τάσης και ορθής παραμόρφωσης $\sigma = E\varepsilon$ παραμένει ίδια σε όλες τις διευθύνσεις εξέτασης, οι **μηχανικές ιδιότητες του υλικού είναι ανεξάρτητες από τη διεύθυνση φόρτισης**.

Τέτοια υλικά καλούνται **ισότροπα**.

Υλικά των οποίων οι ιδιότητες **μεταβάλλονται με την διεύθυνση** στην οποία εξετάζονται καλούνται **ανισότροπα**.

Μια σημαντική κατηγορία ανισότροπων υλικών είναι τα **σύνθετα υλικά**: Προκύπτουν από την εισαγωγή ινών (φάση ενίσχυσης) από ένα ισχυρό, δύσκαμπτο υλικό σε μια λιγότερο ισχυρή φάση που καλείται μήτρα (συνεχής φάση).



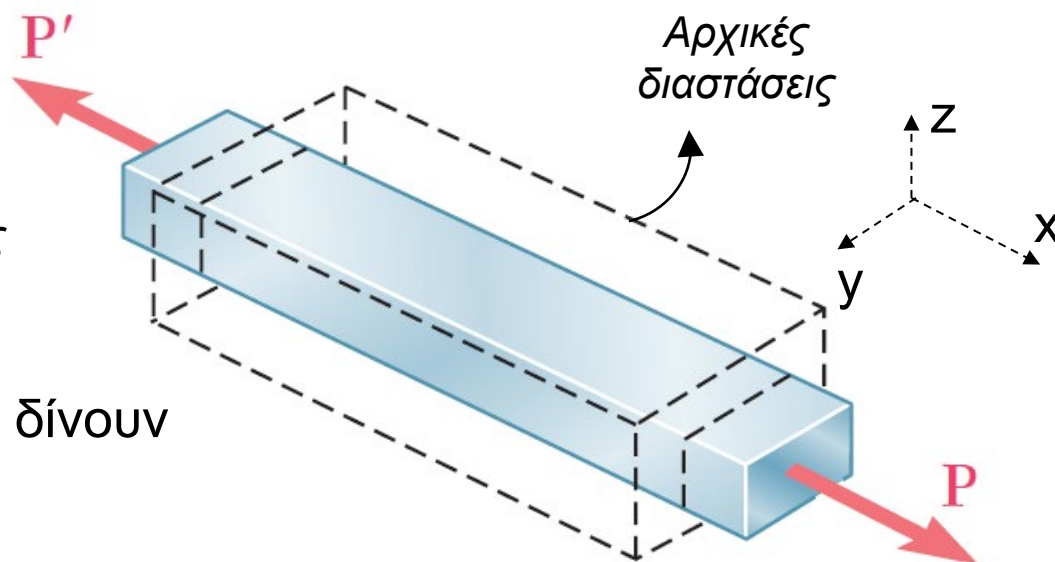
$$E_x > E_y, E_z$$

Φαινόμενο Poisson

Σε όλα τα τεχνικά υλικά, μεταβολή του μήκους που παράγεται από αξονική δύναμη P , στη διεύθυνση της δύναμης, συνοδεύεται από αντίθετη μεταβολή μήκους στις δύο εγκάρσιες διευθύνσεις.

πχ, επιμήκυνση στον άξονα της δύναμης εφελκυσμού συνοδεύεται από συστολή στις εγκάρσιες διευθύνσεις

Οι εγκάρσιες μετατοπίσεις δίνουν αντίστοιχες **εγκάρσιες παραμορφώσεις**, ϵ_y & ϵ_z



Λόγος Poisson:

$$\nu = - \frac{\text{εγκάρσια παραμόρφωση}}{\text{αξονική παραμόρφωση}}$$

$$\nu = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x}$$

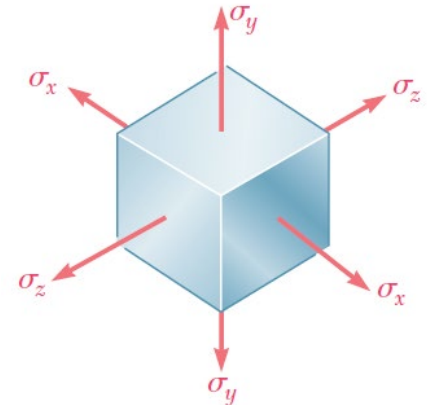
ϵ_y & ϵ_z αντίθετου πρόσημου από $\epsilon_x \rightarrow$ **ν θετική ποσότητα**

$$\epsilon_y = \epsilon_z = - \frac{\nu \sigma_x}{E}$$

Εγκάρσιες παραμορφώσεις ϵ_y & ϵ_z εξαιτίας ϵ_x & φαινομένου Poisson

Γενικευμένος Νόμος Hooke για Τριαξονική Φόρτιση Ισότροπου Υλικού

- Στο πείραμα εφελκυσμού, το δοκίμιο καταπονείται σε **απλή αξονική** φόρτιση.
- Στοιχεία που υπόκεινται σε φορτία στις 3 κύριες διευθύνσεις που προκαλούν τάσεις σ_x , σ_y , σ_z , υποβάλλονται σε **τριαξονική φόρτιση***.



Αρχή επαλληλίας

Το αποτέλεσμα 2 ή περισσότερων φορτίσεων που δρουν ταυτόχρονα σε σώμα, ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των αποτελεσμάτων κάθε φόρτισης αν δρούσε ξεχωριστά στο ίδιο σώμα.

Η σ_x προκαλεί παραμόρφωση σ_x/E στην διεύθυνση x & παραμορφώσεις $-\nu\sigma_x/E$ στις y & z. Ομοίως για σ_y και σ_z & καταλήγουμε:

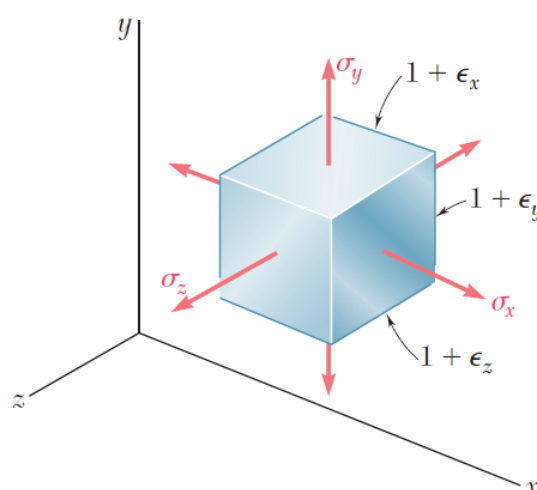
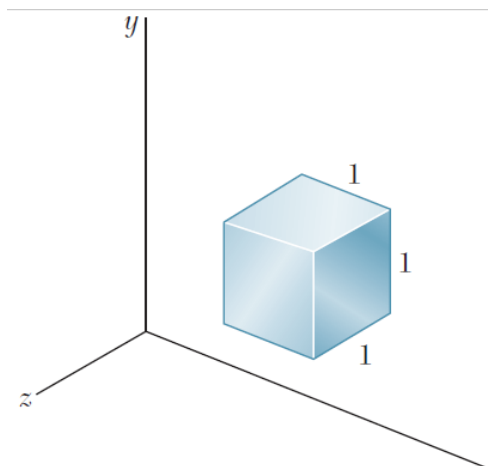
$$\begin{aligned}\epsilon_x &= +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_y &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \\ \epsilon_z &= -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}\end{aligned}$$

Γενικευμένος
Νόμος Hooke
για **Τριαξονική**
Φόρτιση
Ισότροπου
Υλικού

* Δεν είναι η γενικευμένη φόρτιση της διάλεξης 5, δεν περιλαμβάνεται διάτμηση

Ογκομετρικό Μέτρο Ελαστικότητας

- Μελέτη επίδρασης τριαξονικής φόρτισης σε όγκο ισότροπου υλικού.
- Κυβικό στοιχείο ισότροπου υλικού, **μοναδιαίας ακμής** υπό 3αξονική φόρτιση.



Τελικά μήκη ακμών:

$$1 + \epsilon_x, 1 + \epsilon_y, 1 + \epsilon_z$$

Όγκος:

$$v = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z)$$

Αν $\epsilon_i \ll 1$, $\epsilon_i \epsilon_j \rightarrow 0$, οπότε

$$v = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Αρχικός όγκος=1

Μεταβολή όγκου e :

$$e = v - 1$$

$$e = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

**Ογκομετρικό
Μέτρο
Ελαστικότητας**

$$e = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E}p$$

$$e = -\frac{p}{k}$$

Αν $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$
όπως για
υδροστατική
πίεση $\sigma_i = -p$

Ογκομετρικό Μέτρο & Λόγος Poisson

$$k = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} > 0 \Rightarrow \nu < \frac{1}{2}$$

Συνεπώς για όλα τα τεχνικά υλικά:

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$



Φυσική σημασία $\nu < 0.5$;



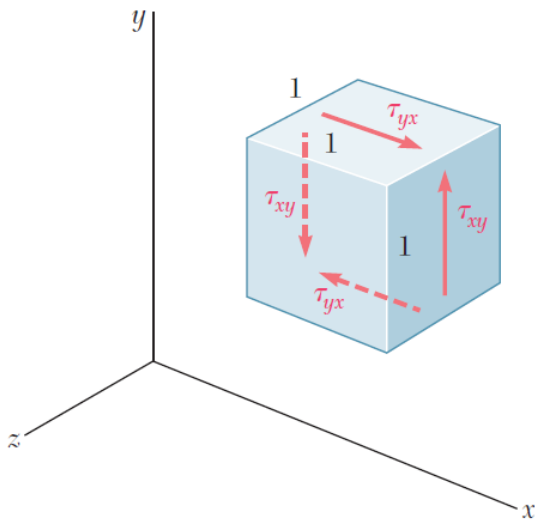
$\nu > 0.5$;

Material	Poisson's ratio
Rubber	0.4999
Gold	0.42 -0.44
Copper	0.33
Stainless steel	0.30-0.31
Steel	0.27-0.30
Cast iron	0.21-0.26
Concrete	0.1-0.2
Glass	0.18-0.3
Foam	0.10-0.50
Cork	0.0

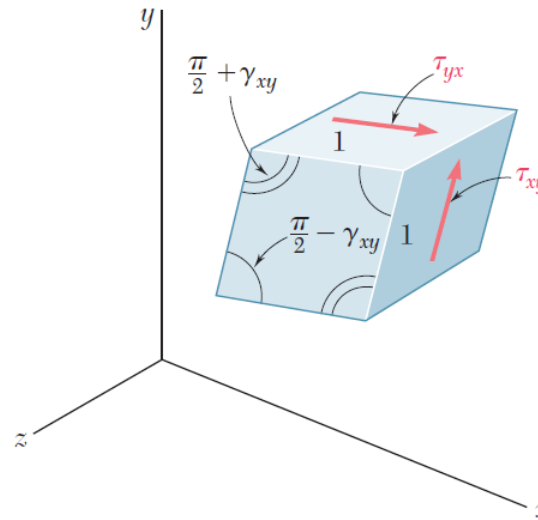
- Υλικό με $\nu=0$ θα μπορούσε να τανυστεί σε μια διεύθυνση **χωρίς να εμφανίσει εγκάρσια συστολή**
- Υλικό με $\nu=1/2 > k=\infty > e=0$, θα ήταν **υδροστατικά ασυμπίεστο**

Διατμητική Παραμόρφωση

- Σε **γενικευμένη φόρτιση** λαμβάνουμε υπόψη και τις διατμητικές τάσεις τ_{xy} , τ_{yz} και τ_{zx}
- Υπό την επίδρασή τους, το κυβικό στοιχείο υλικού θα παραμορφωθεί προς **λοξό παραλληλεπίπεδο** (ρομβοειδές).



Κύβος μοναδιαίας ακμής στον
οποίον δρουν μόνο τ_{xy} και τ_{yx}



Αποτέλεσμα: ρομβοειδές με 2
γωνίες μειωμένες & 2
προσαυξημένες κατά γ_{xy}

Η γωνία γ_{xy} (rad)
είναι η **διατμητική
παραμόρφωση** στις
διευθύνσεις x και y

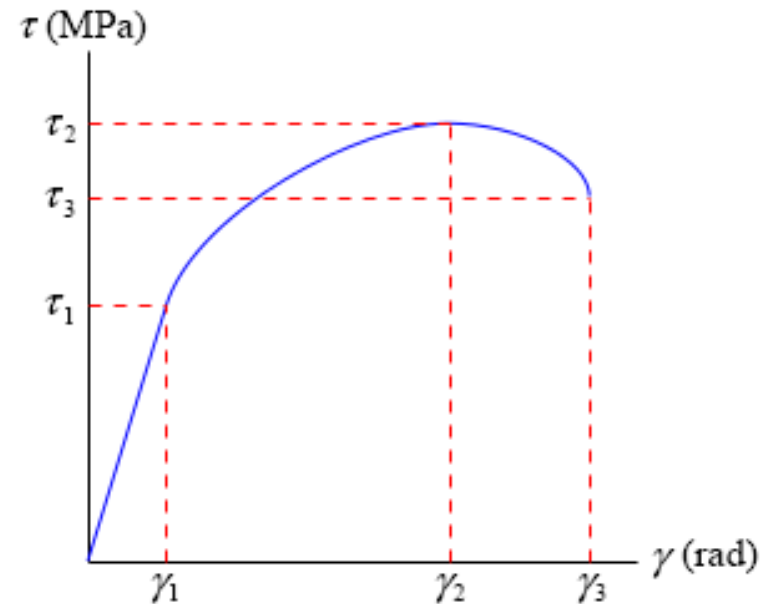
Μετρίεται σε ακτίνια, rad

**Πρόσημο διατμητικής
παραμόρφωσης**

Θετικό : μείωση γωνίας
Αρνητικό: αύξηση γωνίας

Διάγραμμα $\tau(\gamma)$

Αναπαριστώντας διαδοχικά ζεύγη τιμών τ_{xy} - γ_{xy} (πχ πείραμα στρέψης), λαμβάνουμε το **διάγραμμα $\tau(\gamma)$** διατμητικής τάσης ως προς διατμητική παραμόρφωση.



- Οι **αντοχές διαρροής και θραύσης** ενός υλικού σε διάτμηση ανέρχονται περίπου **στο ήμισυ** εκείνων σε εφελκυσμό.
- Όπως και στις ορθές τάσεις, το **αρχικό τμήμα είναι γραμμικό**.

- Εντός του ορίου αναλογίας:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Νόμος Hooke σε διάτμηση

G : μέτρο διάτμησης, [Pa]

Με ανάλογη συλλογιστική:

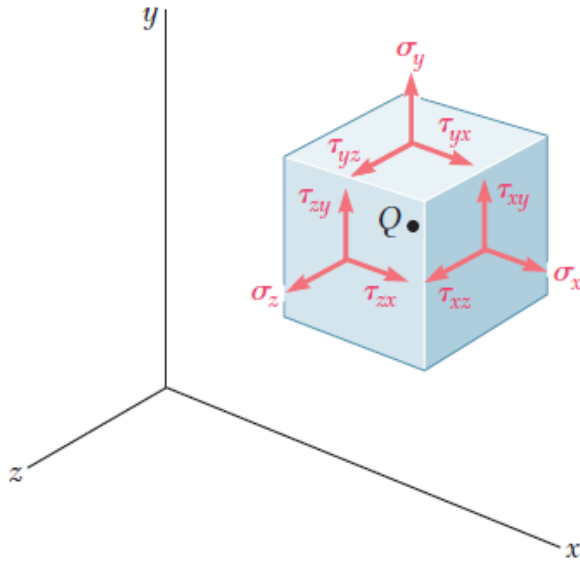
$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$



Γιατί χρησιμοποιώ το ίδιο G ;

Γενικευμένη Φόρτιση – Νόμος Hooke



Για γενικευμένη φόρτιση & ελαστικές τάσεις (< ορίου αναλογίας), χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας, οι παραμορφώσεις που προκαλούνται σε υλικό από αυθαίρετο συνδυασμό τάσεων:

E , G & ν , συνδέονται μεταξύ τους:

$$\frac{E}{2G} = 1 + \nu$$

(Βλ. απόδειξη, ενότητα 2.8 συγγράμματος)

$$\epsilon_x = +\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_y = -\frac{\nu\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_z = -\frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E}$$

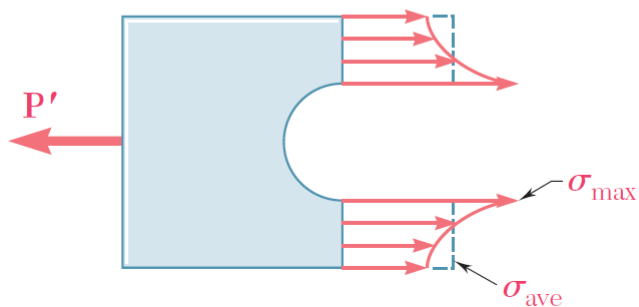
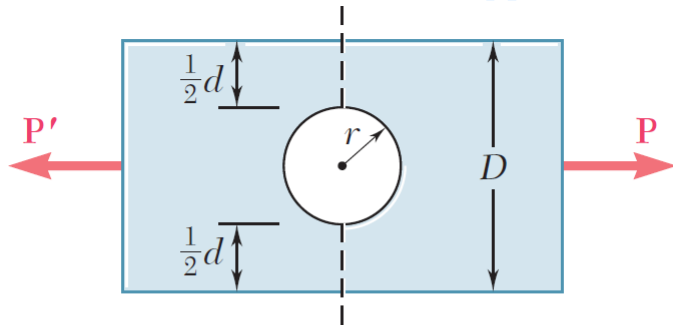
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

Γενικευμένος Νόμος Hooke για
Γενικευμένη Φόρτιση Ομοιογενούς
Ισότροπου Υλικού

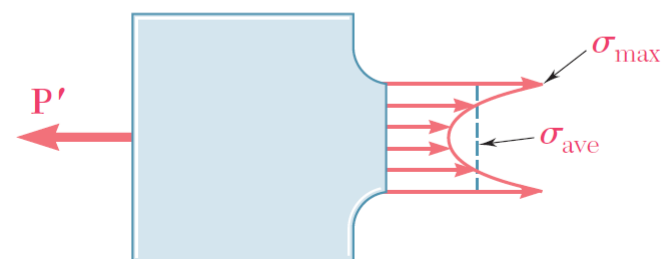
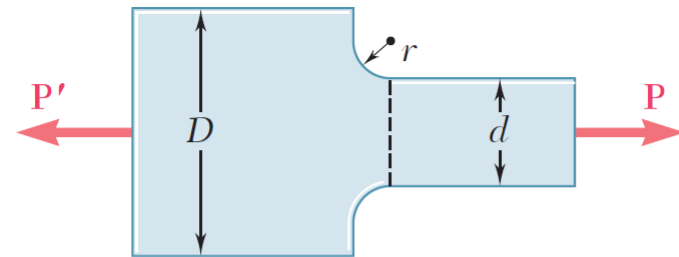
Συγκέντρωση Τάσεων

Κοντά σε ατέλειες/ασυνέχειες υλικού και απότομες μεταβολές διατομής, οι τάσεις μεγεθύνονται (συγκεντρώνονται).

Ατέλεια/ασυνέχεια



Μεταβολή διατομής

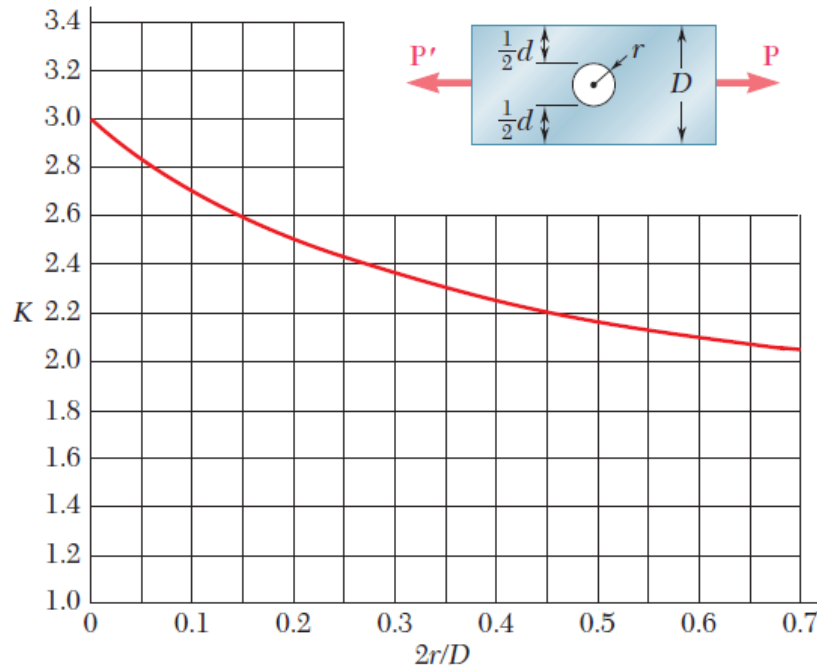


Συντελεστής συγκέντρωσης τάσης:

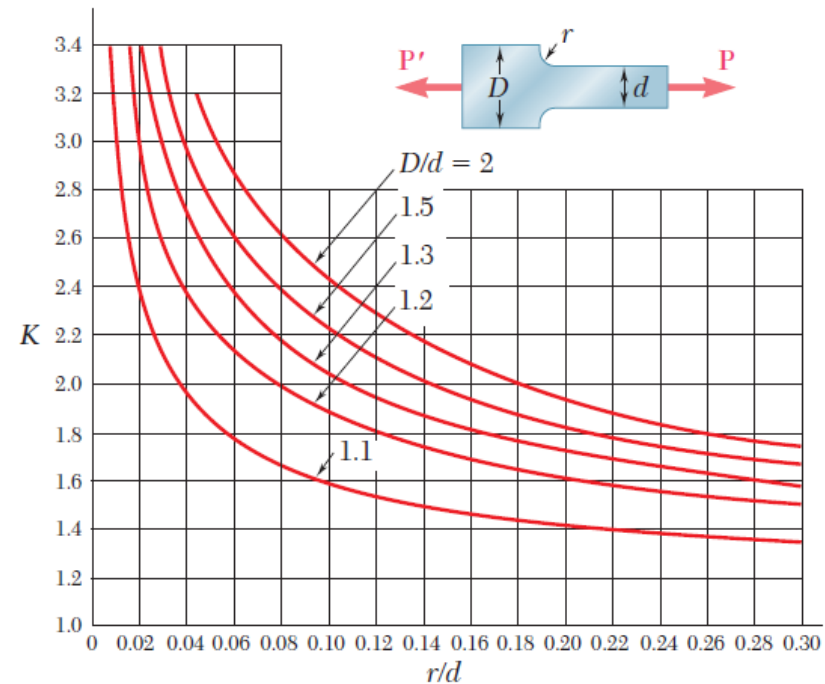
$$K = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\text{ave}}}$$

Συντελεστής Συγκέντρωσης Τάσεων

Ατέλεια/ασυνέχεια



Μεταβολή διατομής



Παρουσία ατέλειας/ασυνέχειας ή μεταβολής διατομής, ο **σχεδιασμός** και ο συντελεστής ασφάλειας, πρέπει να λαμβάνει υπόψη την **μέγιστη τάση** λόγω του φαινομένου της συγκέντρωσης τάσεων.

Στρέψη

Έως τώρα μελετήσαμε τις ροπές και τις τάσεις σε δομικά μέλη που υπόκεινται σε αξονικές και εγκάρσιες φορτίσεις (ορθές-διατμητικές τάσεις και παραμορφώσεις).

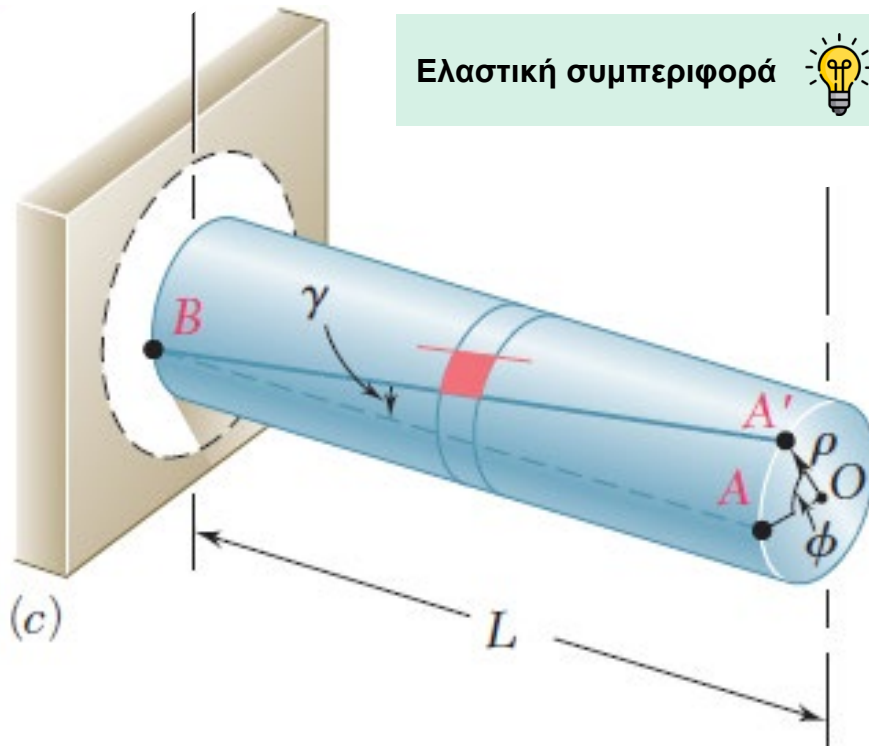
Στην **στρέψη** μελετούμε τις τάσεις και παραμορφώσεις σε άξονες (στοιχεία κυκλικής εγκάρσιας διατομής) που υπόκεινται σε **ζεύγη ροπών στρέψης**.



Είδος απλής καταπόνησης όπως εφελκυσμός, όμως $M \neq 0$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Στοιχείο καταπονείται σε **στρέψη** όταν πάνω σε αυτόν ενεργούν **ζεύγη ίσων και αντίθετων ροπών** (κοινό μέτρο και αντίθετες κατευθύνσεις), που τα **επίπεδα τους είναι κάθετα** στον κεντροβαρικό του άξονα.

Κατανομή Διατμητικής Παραμόρφωσης



Για **μικρές γωνίες γ** ($\tan \gamma \approx \gamma$):

- Τρίγωνο $A'BA$: τόξο AA' ευθύγραμμο, μήκος **$AA' \approx L\gamma$**

- Τρίγωνο μικρό $A'OA$: **$AA' \approx \rho\phi$**

Συνεπώς **$L\gamma = \rho\phi$** , ή:

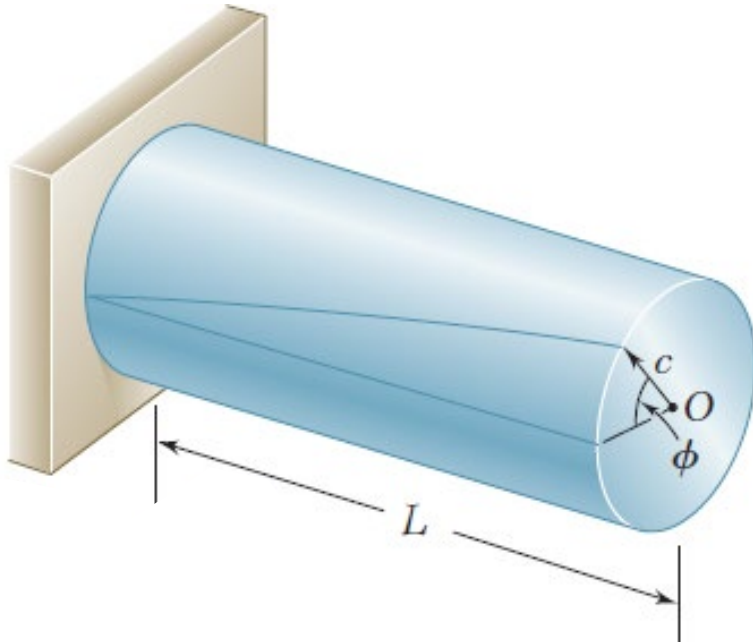
Η διατμητική παραμόρφωση γ είναι ανάλογη:

- της γωνίας στρέψης ϕ
- της απόστασης ρ από τον κεντροβαρικό άξονα

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

Η διατμητική παραμόρφωση σε κυκλικό άξονα μεταβάλλεται **γραμμικά** με την απόσταση από το κέντρο του.

Κατανομή Διατμητικής Παραμόρφωσης (2)



Για $\rho=0$, $\gamma=0=\min$

Για $\rho=c$, $\gamma=\gamma_{\max}$

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$

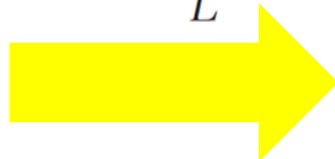
Η διατμητική παραμόρφωση σε συμπαγή άξονα είναι **μέγιστη** στην εξωτερική του επιφάνεια και **μηδέν** στο κέντρο του.



Από ποια σημεία ξεκινά η αστοχία ενός άξονα σε στρέψη;

$$\gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

$$\gamma_{\max} = \frac{c\phi}{L}$$



$$\gamma = \frac{\rho}{c} \gamma_{\max}$$

Διατμητική παραμόρφωση γ σε απόσταση ρ από το κέντρο του άξονα

Κατανομή Διατμητικών Τάσεων

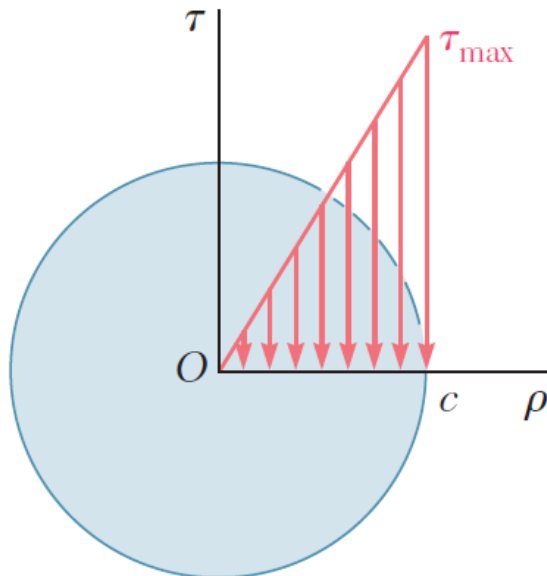
Για ελαστικές τάσεις-παραμορφώσεις (κάτω από το όριο διαρροής) ισχύει ο νόμος του Hooke για διάτμηση:

$$\tau = G\gamma$$

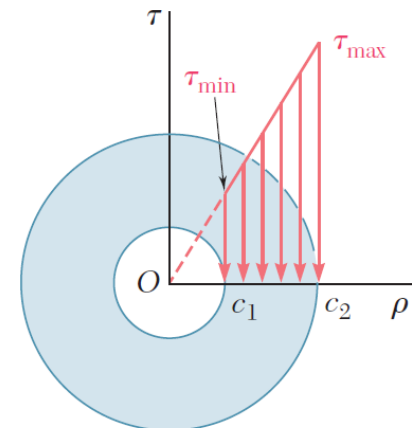
Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη:

$$\gamma G = \gamma_{max} G \frac{\rho}{c} \Rightarrow \tau = \tau_{max} \frac{\rho}{c}$$

Η διατμητική τάση μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση από το κέντρο του άξονα.
min @ $\rho=0$ / max @ $\rho=c$



Τι συμβαίνει σε κοίλο άξονα;



Ροπή Στρέψης

Θέλουμε να εκφράσουμε τη διατμητική τάση T ως προς την επιβαλλόμενη ροπή, T , που συχνά αποτελεί το μόνο γνωστό μέγεθος κατά τη στρέψη.

Αρχικά βρίσκουμε τη ροπή, dM , που ασκείται σε ένα στοιχείο dA της διατομής, σε θέση r κατά μήκος της ακτίνας:

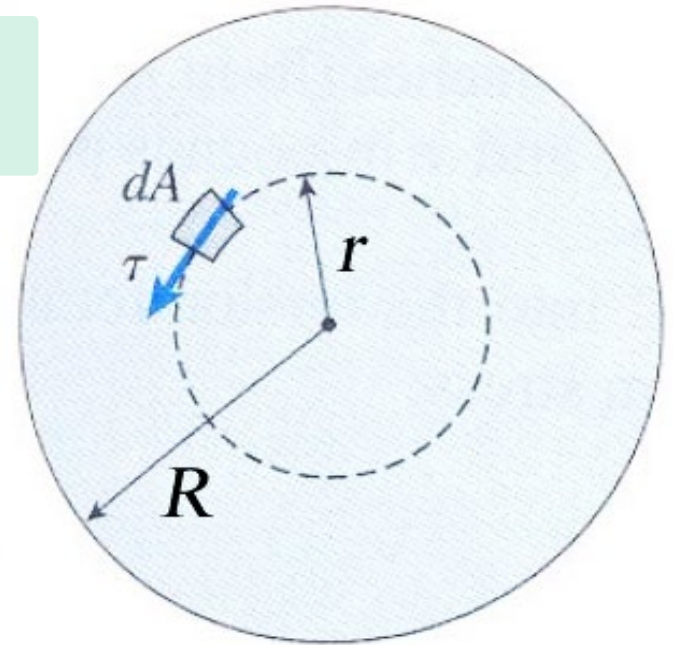
$$dM = r\tau dA$$



$$\tau dA [=] ?$$

Η συνολική ροπή θα είναι:

$$T = \int_A \tau r dA = \frac{\tau_{max}}{R} \int_A r^2 dA$$



Ροπή Στρέψης (2)

Στη σχέση

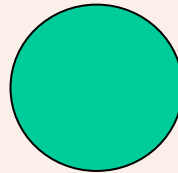
$$T = \frac{\tau_{max}}{R} \int_A r^2 dA$$

$$\tau_{max} = \frac{TR}{J}$$

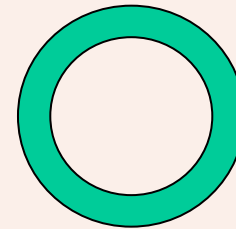
J

**«Πολική ροπή αδράνειας»
της διατομής του άξονα**

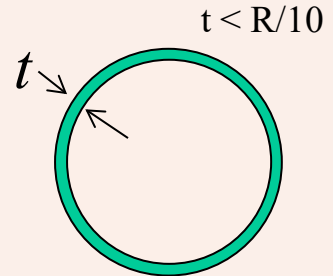
*Μέτρο της ικανότητας της γεωμετρίας
του άξονα να αντιστέκεται στη στρέψη*



$$J = \frac{1}{2} \pi R^4$$



$$J = \frac{1}{2} \pi (R^4 - r^4)$$



$$J = 2\pi R^3 t$$

Ομοίως

$$\tau(r) = \frac{Tr}{J}$$

Διατμητική τάση σαν
συνάρτηση της
απόστασης από το
κέντρο βάρους του άξονα

Γωνία στρέψης από τάση

$$\tau_{max} = \gamma_{max} G \Rightarrow \tau_{max} = \frac{\varphi R}{L} G$$

Σε συνδυασμό με $\tau_{max} = \frac{TR}{J}$ προκύπτει:

$$\frac{TR}{J} = \frac{\varphi R}{L} G \Rightarrow \varphi = \frac{TL}{JG}$$

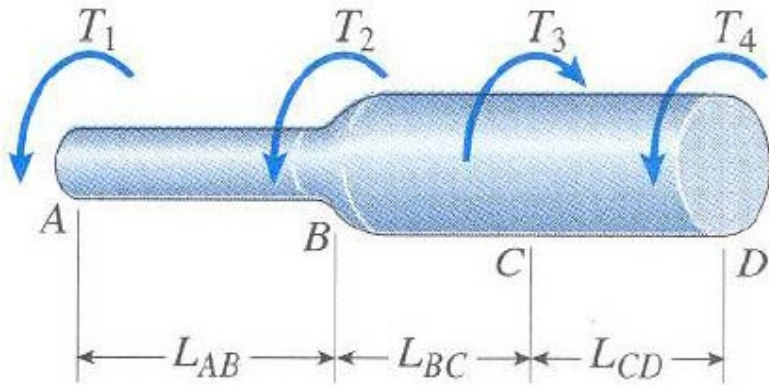
Η γωνία στρέψης εξαρτάται από την **εξωτερικά επιβαλλόμενη ροπή T**, το **μήκος** του άξονα L, την **πολική ροπή αδράνειας** της διατομής J και το **μέτρο διάτμησης** του άξονα, G.



Πως
υπεισέρχεται
το υλικό;

Ροπή στρέψης - ειδικές περιπτώσεις

Για άξονα μη-ομοιόμορφης διατομής:



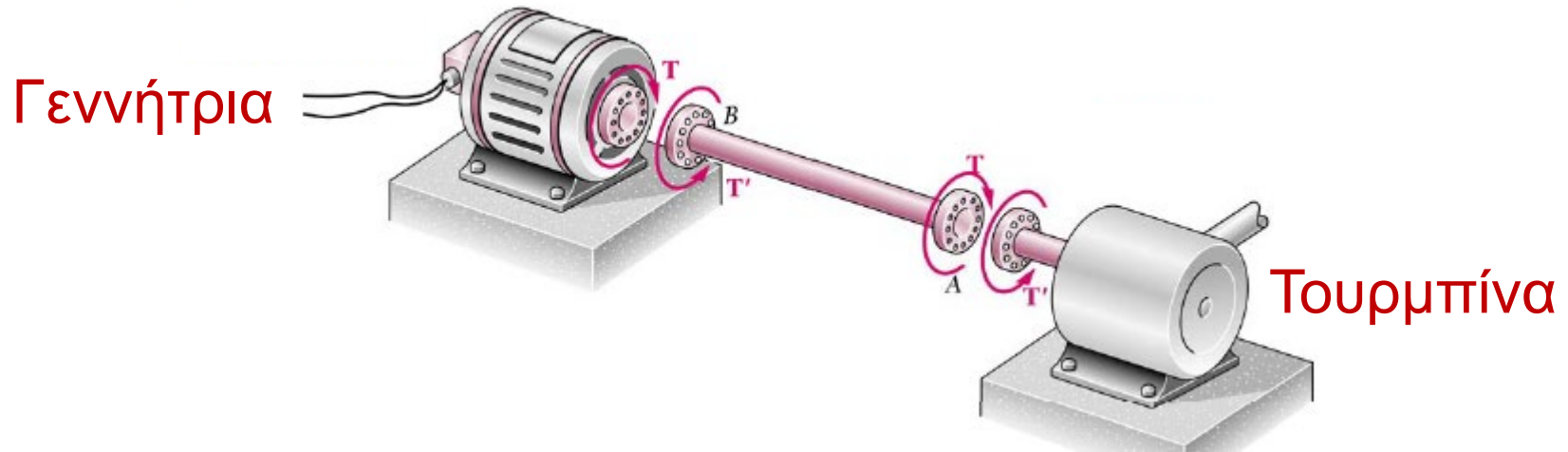
$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

Για άξονα μονοτόνως μεταβαλλόμενης διατομής:

$$\varphi = \int_0^L \frac{T(x)}{GJ(x)} dx$$

Ισχύς Άξονα

Ένας άξονα μετάδοσης μεταδίδει μηχανική ισχύς από μια συσκευή, σε μια άλλη, όπως για παράδειγμα από μια γεννήτρια προς μια τουρμπίνη



Η ισχύς, P , που μεταδίδεται από τον άξονα δίνεται από τη σχέση:

$$P = T\omega$$

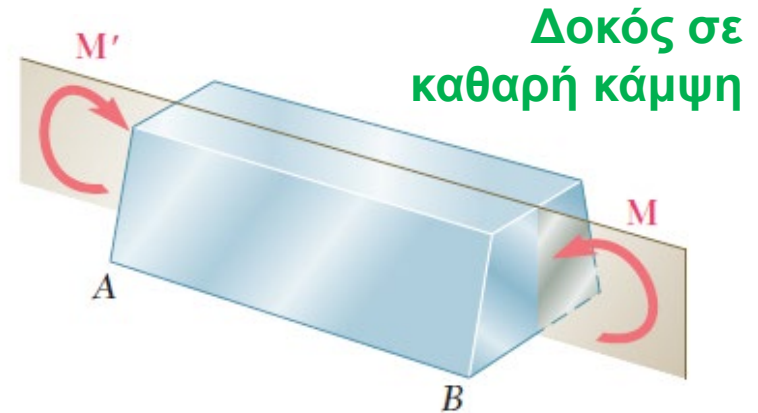
- T , η ροπή που ασκείται στον άξονα, και μεταδίδεται από αυτόν [N.m]
- ω , η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του άξονα [rad/s]

P σε [W]

Κάμψη

Έως τώρα μελετήσαμε ροπές και τάσεις σε άξονες που υπόκεινταν σε **αξονικές** και **εγκάρσιες** φορτίσεις και **στρεπτικές ροπές**.

Στην **κάμψη** μελετούμε τις τάσεις και παραμορφώσεις σε δοκούς (στοιχεία πρισματικής εγκάρσιας διατομής) που υπόκεινται σε **ζεύγη ροπών κάμψης**.



Βασικό είδος καταπόνησης που χρησιμοποιείται στο σχεδιασμό πολλών στοιχείων και δομικών εξαρτημάτων, κυρίως **δοκών**.

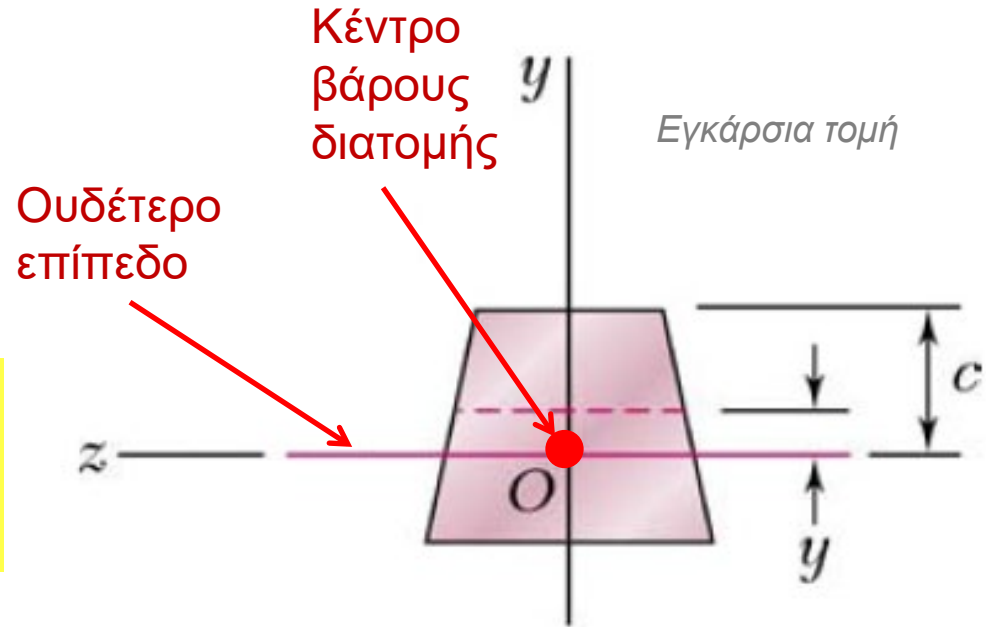
ΟΡΙΣΜΟΣ: Στοιχείο καταπονείται σε **καθαρή κάμψη** όταν πάνω σε αυτόν ενεργούν **μόνο ζεύγη ίσων και αντίθετων ροπών** (κοινό μέτρο/αντίθετες κατευθύνσεις), στο **διαμήκες επίπεδο** συμμετρίας του.

Στην καθαρή κάμψη η **ροπή είναι σταθερή σε όλο το μήκος** του στοιχείου.

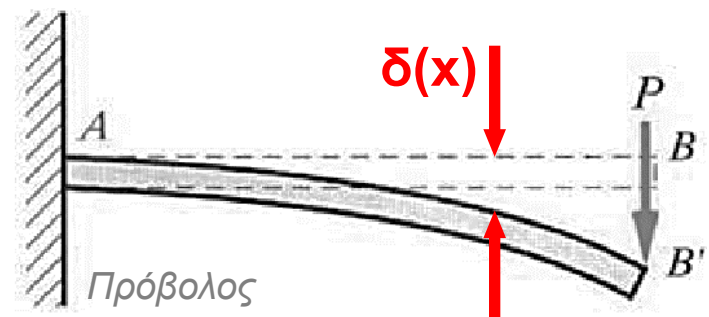
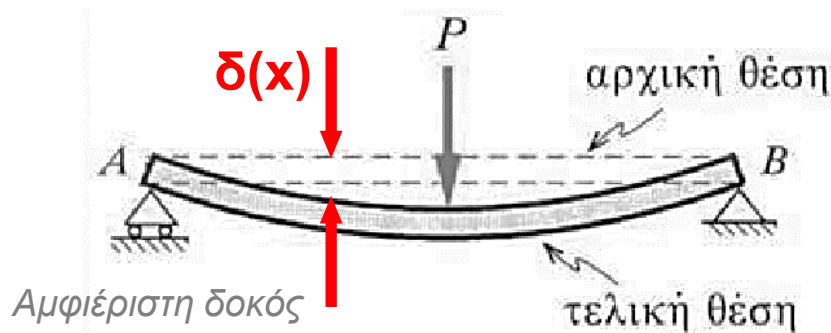
Ουδέτερο Επίπεδο

Τέμνει κάθετα το
επίπεδο συμμετρίας &
από αυτό διέρχεται ο
κεντροβαρικός άξονας.

Κατά σύμβαση, $y = 0$
στο ουδέτερο
επίπεδο



Η κατακόρυφη μετατόπιση των σημείων του ουδέτερου επιπέδου από την αρχική θέση, ονομάζεται **βέλος κάμψης $\delta(x)$** της δοκού στην θέση x .

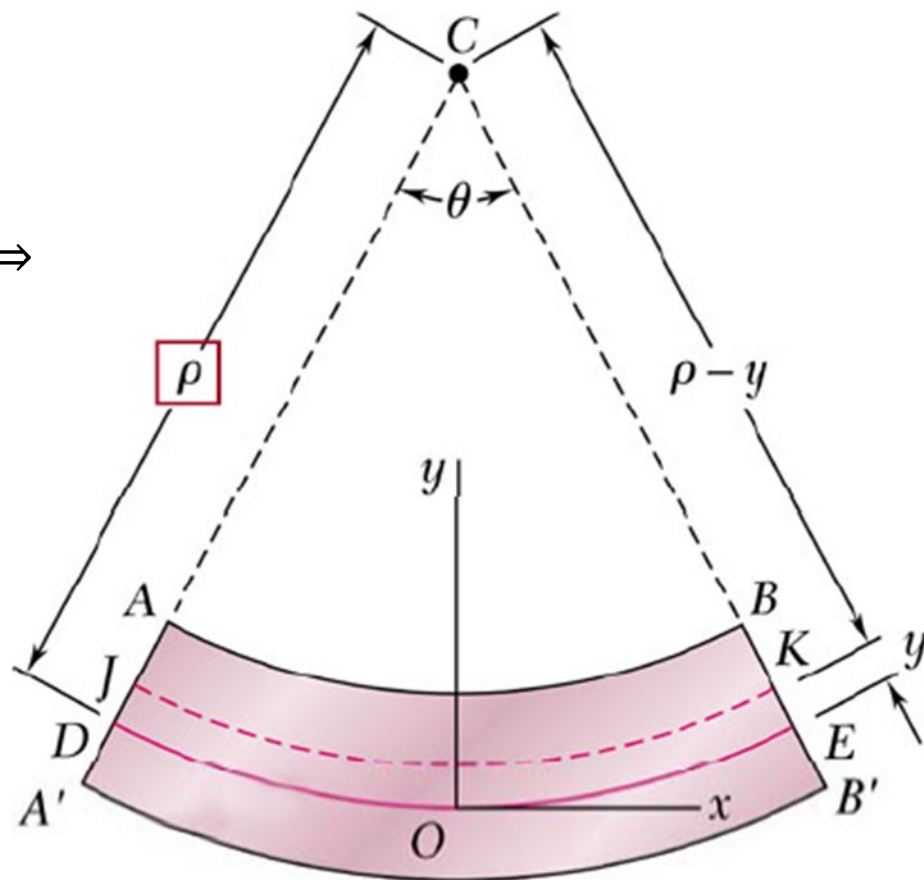


Ορθή παραμόρφωση

Τότε
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{(\rho - y)\theta - \rho\theta}{\rho\theta} \Rightarrow$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

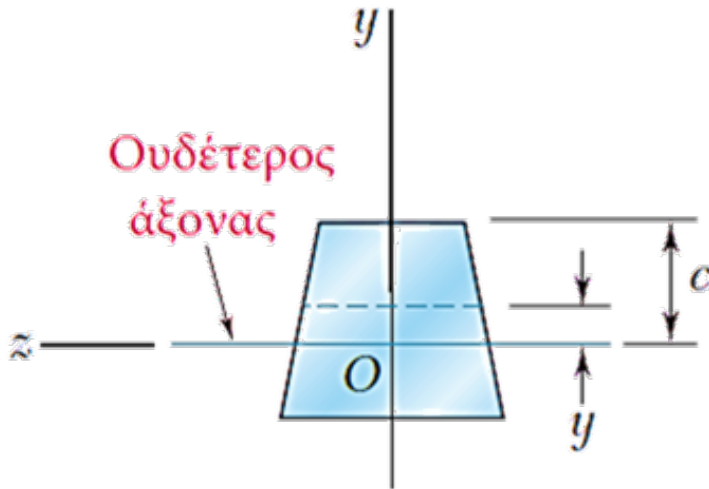
Η διαμήκης ορθή παραμόρφωση μεταβάλλεται **γραμμικά** με την απόσταση από το ουδέτερο επίπεδο



Μέγιστη Ορθή παραμόρφωση

$$\varepsilon_{max} = \begin{cases} -\frac{L_{EB}}{\rho}, & \text{για } y = EB \\ \frac{L_{EB'}}{\rho}, & \text{για } y = -EB' \end{cases}$$

- Η μέγιστη θλιπτική τάση παρατηρείται στην **άνω** επιφάνεια της δοκού
- Η μέγιστη εφελκυστική τάση παρατηρείται στην **κάτω** επιφάνεια της δοκού



Αν c η μέγιστη απόσταση από το ουδέτερο επίπεδο (που αντιστοιχεί είτε στην άνω ή στην κάτω επιφάνεια)

$$\varepsilon_{max} = \frac{c}{\rho} \quad \swarrow \quad \varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

$$\varepsilon = -\frac{y}{c} \varepsilon_{max}$$

Εγκάρσια παραμόρφωση

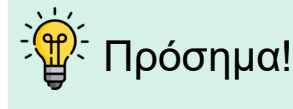
Θα υπάρχουν εγκάρσιες παραμορφώσεις λόγω του φαινομένου Poisson

$$\varepsilon_y = -\nu_{xy}\varepsilon_x = \nu_{xy}\frac{y}{\rho}$$

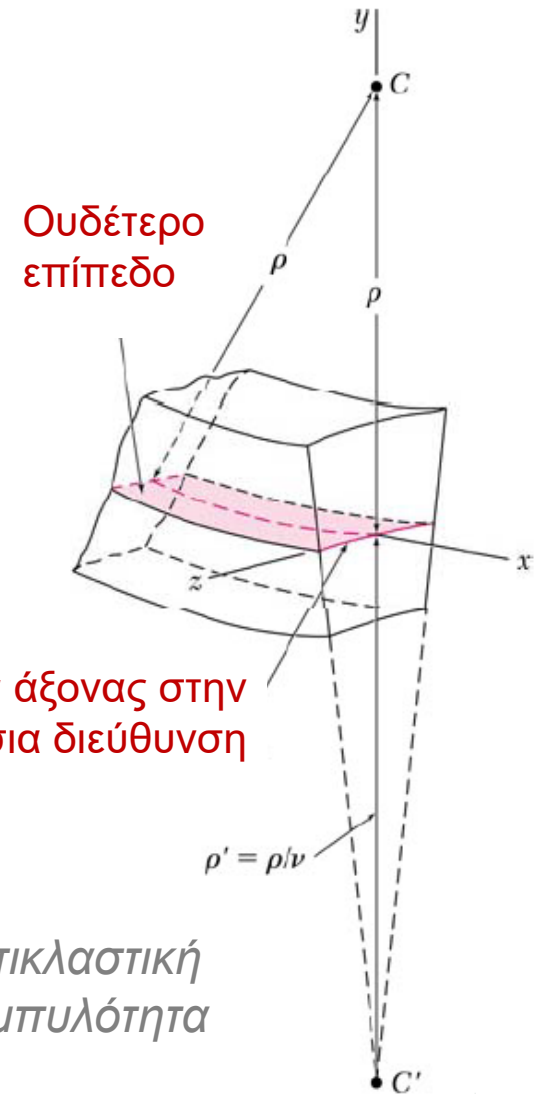
$$\varepsilon_z = -\nu_{xz}\varepsilon_x = \nu_{xz}\frac{y}{\rho}$$

Για ισότροπο υλικό $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \nu\frac{y}{\rho} = \frac{y}{\rho'}$$



$$\rho' = \frac{\rho}{\nu} \quad \text{Αντικλαστική καμπυλότητα}$$



Ορθές τάσεις

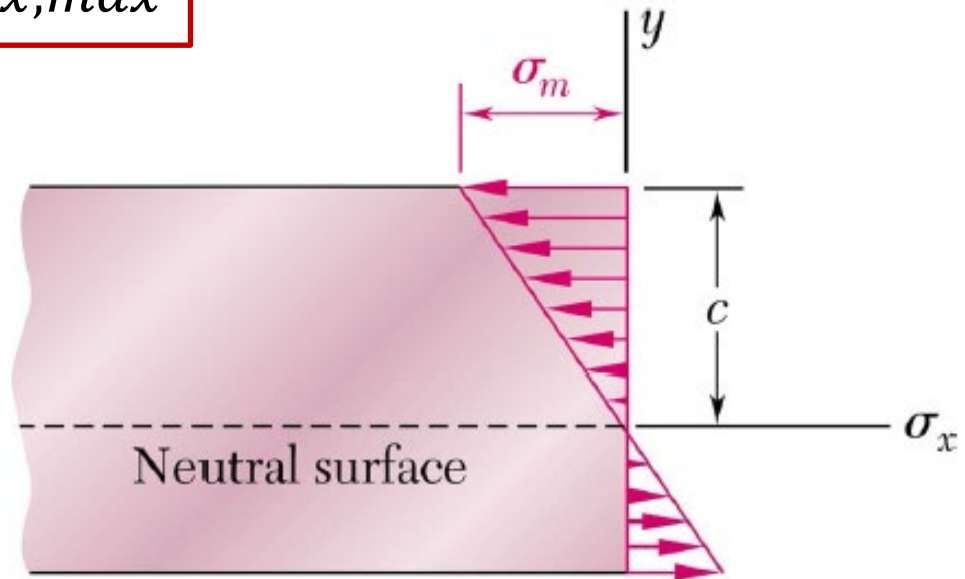
Αν το υλικό κατασκευής της δοκού συμπεριφέρεται γραμμικά-ελαστικά:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \longrightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x = -E\frac{y}{\rho}$$

Η ορθή τάση μεταβάλλεται γραμμικά σαν συνάρτηση της απόστασης από το ουδέτερο επίπεδο

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c} \varepsilon_{x,max} \longrightarrow \sigma_x = -\frac{y}{c} \sigma_{x,max}$$

Τα πρόσημα δεν έχουν αλλάξει, η μέγιστη εφελκυστική τάση θα βρίσκεται στην κάτω επιφάνεια της δοκού και η μέγιστη θλιπτική στην άνω επιφάνεια.



Σχέση μεταξύ ροπής M και τάσης σ

Έστω στοιχειώδης επιφάνεια dA της διατομής σε απόσταση y από το ουδέτερο επίπεδο. Αν M η επιβαλλόμενη ροπή, η στοιχειώδης ροπή που θα ασκείται στην επιφάνεια dA θα είναι:

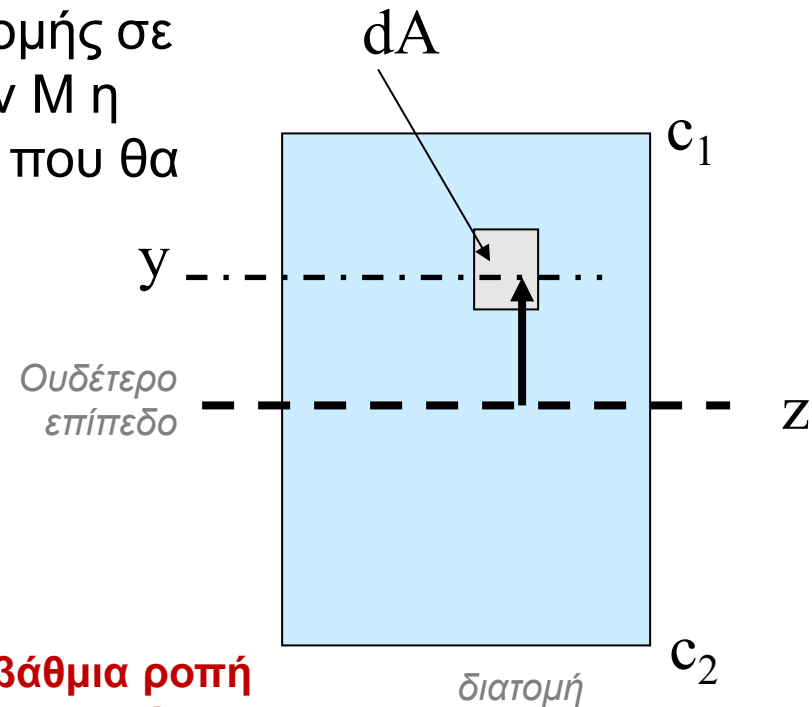
$$dM = -\sigma_x y dA$$

$$M = - \int_A \sigma_x y dA = \int_A \frac{E y}{\rho} y dA$$

όπου $I = \int_A y^2 dA$

I Δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας επιφάνειας (ως προς το ουδέτερο επίπεδο)

Μέτρο της ικανότητας της γεωμετρίας διατομής της πρισματικής δοκού να αντιστέκεται στη κάμψη



Συνεπώς:

$$\boxed{M = \frac{EI}{\rho}} \xrightarrow{\sigma_x = -\frac{Ey}{\rho} \Rightarrow \frac{E}{\rho} = -\frac{\sigma_x}{y}} M = -\frac{\sigma_x I}{y} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I}}$$
$$\boxed{\sigma_{x,max} = -\frac{Mc}{I}}$$

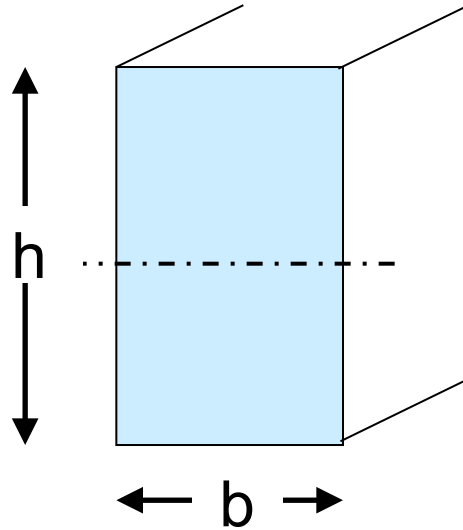
Καμπυλότητα $1/\rho$

Ένας άλλο μέτρο της παραμόρφωσης της δοκού σαν αποτέλεσμα της επιβαλλόμενης καμπτικής ροπής, είναι η **καμπυλότητα του ουδέτερου άξονα**. Ορίζεται ως ο αντίστροφος της ακτίνας καμπυρόλητας ρ , και προκύπτει ως:

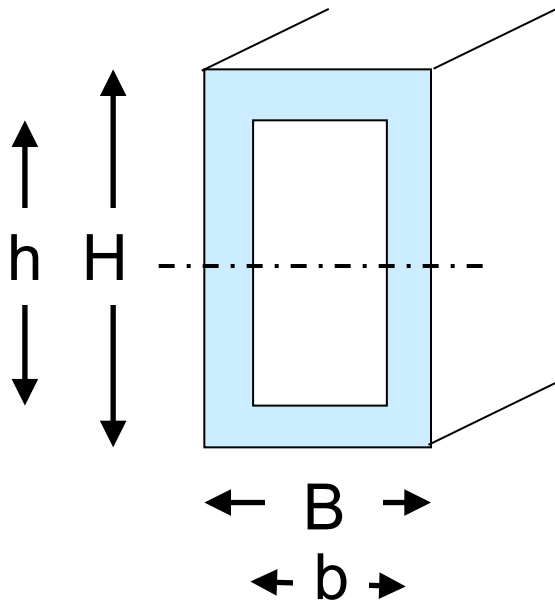
$$\varepsilon_{max} = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_{max}}{c} = \frac{\sigma_{max}}{Ec} = \frac{Mc/I}{Ec} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}}$$

Δευτεροβάθμιες ροπές αδράνειας επιφανειών

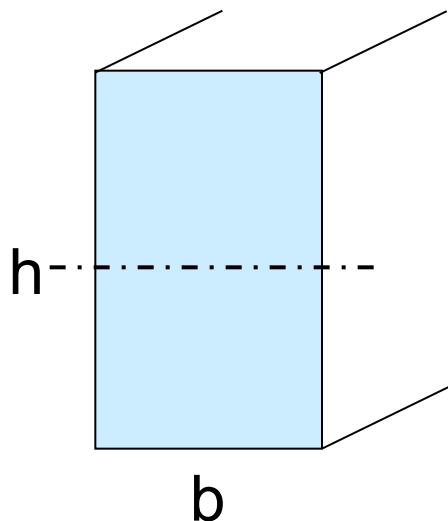


$$I = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$



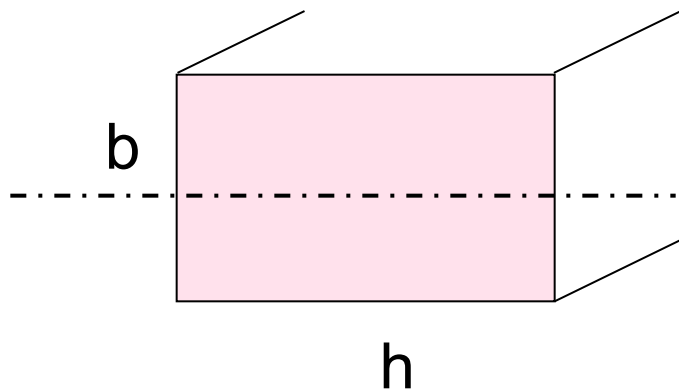
$$I = \frac{1}{12} (B \cdot H^3 - b \cdot h^3)$$

Δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας επιφάνειας



$$I_1 = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$

Διατομές ίδιου εμβαδού
ΔΕΝ έχουν κατ'ανάγκη ίδιες
ροπές αδράνειας



$$I_2 = \frac{1}{12} h \cdot b^3$$

Ορθές τάσεις σε καθαρή κάμψη

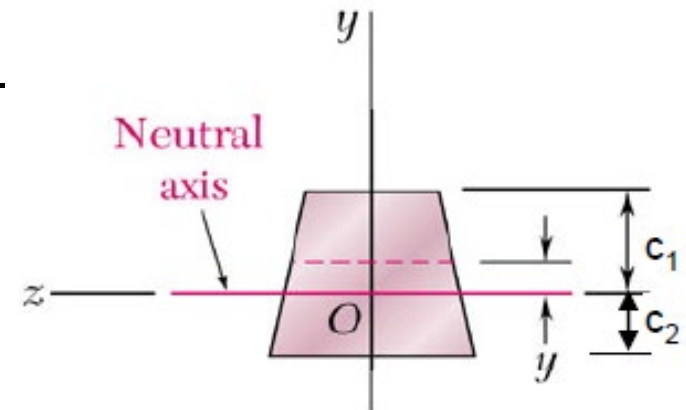
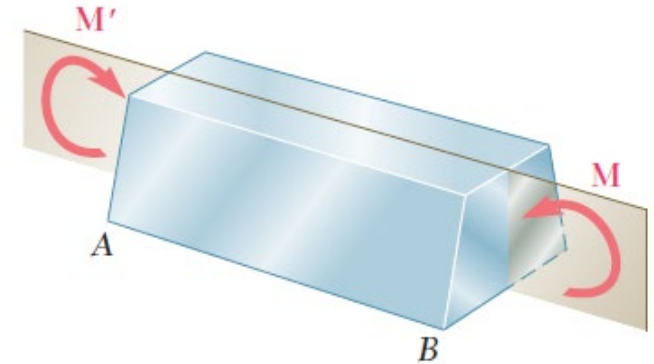
Αν c_1 και c_2 οι αποστάσεις του ουδέτερου επιπέδου από την άνω και κάτω επιφάνεια αντίστοιχα, έχουμε:

Μέγιστη εφελκυστική τάση: $M \frac{c_2}{I} = \frac{M}{S_2}$

Μέγιστη θλιπτική τάση: $M \frac{c_1}{I} = \frac{M}{S_1}$

Ο λόγος $S = \frac{I}{c}$ καλείται **ελαστική ροπή αντίστασης της επιφάνειας**.

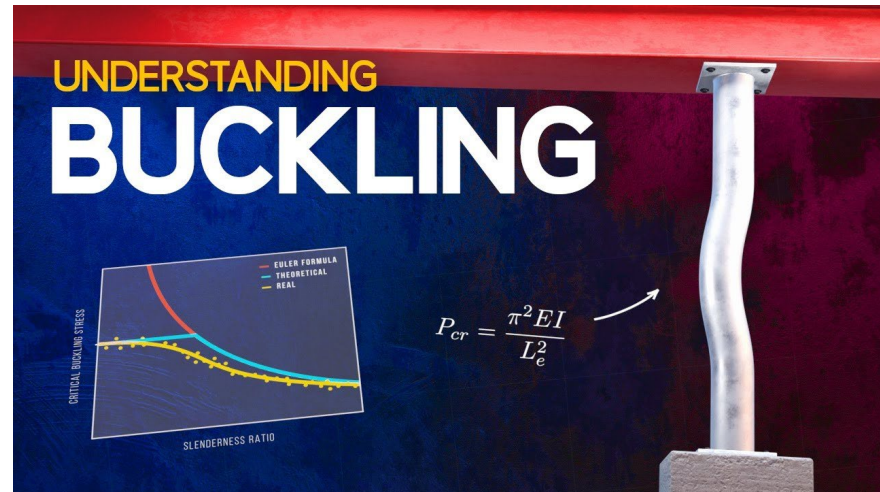
Μεγαλύτερη S υποδηλώνει δοκό με μεγαλύτερη αντίσταση σε κάμψη.



Λυγισμός

Έως τώρα η μελέτη της απόκρισης του υλικού σε φορτίσεις **δεν μετέβαλε την διαμόρφωση (διάταξη)** του δομικού στοιχείου/κατασκευής.

Στον **λυγισμό** μελετούμε την **ευστάθεια** της κατασκευής, δηλαδή την ικανότητά της να φέρει φορτία χωρίς **απότομη αλλαγή της διαμόρφωσής της**.

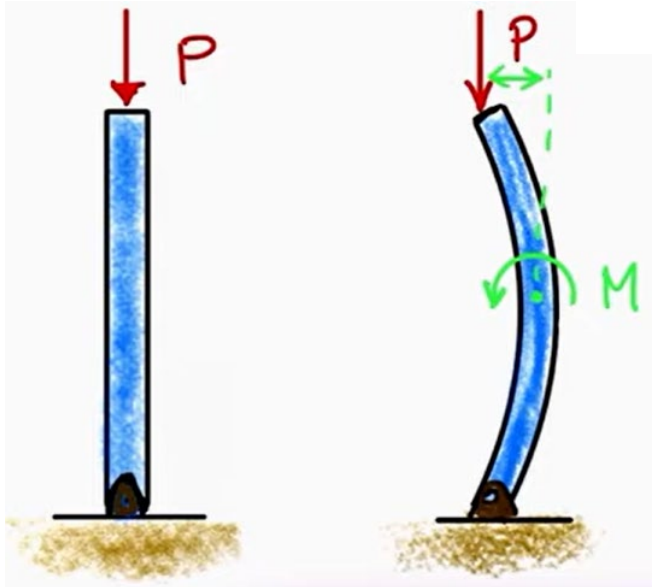


Η συζήτηση θα επικεντρωθεί σε **υποστυλώματα**: κατακόρυφα πρισματικά μέλη που φέρουν αξονικά θλιπτικά φορτία.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Υποστύλωμα καταπονείται σε **λυγισμό** όταν υπό την επίδραση θλιπτικού φορτίου μεταβάλλει το αρχικό ευθύγραμμο σχήμα του και καμπυλώνεται σημαντικά.

Ισορροπία και Αστάθεια

Ιδανικό υποστύλωμα: Ευθύγραμμο, λεπτό, από υλικό με ελαστικές ιδιότητες



Με αύξηση του κάθετου αξονικού φορτίου P το ιδανικό υποστύλωμα περνά από 2 διαδοχικές καταστάσεις:

1. Ευσταθής ισορροπία

Όταν **μικρή** δύναμη ασκούμενη μεταξύ των δύο άκρων εκτός από θλίψη, λόγω σχήματος υφίσταται και μικρή πλευρική **εκτροπή** η οποία ισχύει όσο και μόνο ισχύει η πλευρική δύναμη και **παύει να ισχύει όταν αυτή αναιρεθεί. Η εκτροπή παράγει καμπτική ροπή.**

2. Ασταθής ισορροπία

Με περαιτέρω αύξηση του φορτίου πάνω από μια τιμή που καλείται , **κρίσιμο φορτίο λυγισμού P_{cr}** επέρχεται κατάσταση όπου η πλευρική εκτροπή του υποστυλώματος υφίσταται ακόμη και μετά την αναίρεση του πλευρικού φορτίου.

Εξίσωση εκτροπής ουδέτερης γραμμής

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

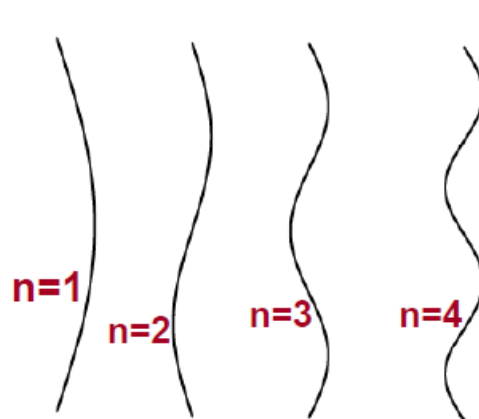
Διαφορική εξίσωση
ουδέτερης γραμμής

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{Py}{EI}$$

Ειδική λύση: $y(x) = A \sin \frac{n\pi}{L} x$

Αντικατάσταση: $p^2 = \frac{P}{EI} \xrightarrow{p = \frac{n\pi}{L}} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = \frac{P}{EI} \Rightarrow$

$$P = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} EI$$



$(P_{CR})_{n=1} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$
 $< (P_{CR})_{n=2} = \frac{4\pi^2}{L^2} EI$
 $< (P_{CR})_{n=3} = \frac{9\pi^2}{L^2} EI$
 $< (P_{CR})_{n=4} = \frac{16\pi^2}{L^2} EI$

Τύπος Euler (συν.)

Η χαμηλότερη τιμή φορτίου λυγισμού P αντιστοιχεί στο $n = 1$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$$

$$y(x) = A \sin \frac{\pi}{L} x$$

Κρίσιμο φορτίο λυγισμού



Όσο κοντύτερη και σκληρότερη είναι η ράβδος και όσο πιο «ανοιχτή» η διατομή τόσο δυσκολότερα λυγίζει!!

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{AL^2} EI$$

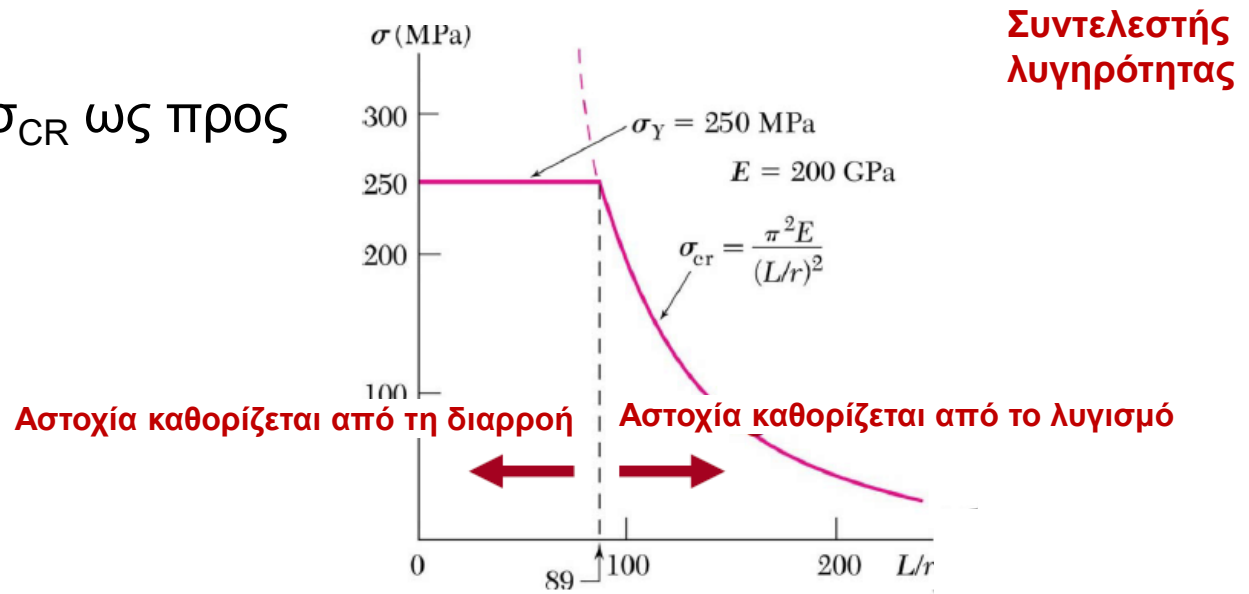
Να υπολογίζεται στο σημείο της διατομής με το μικρότερο λόγο A/I

Τύπος Euler (συν.)

Για διατομή ορθογώνιου παραλληλόγραμμου $I = \frac{bh^3}{12}$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2}{AL^2} EI = \frac{\pi^2}{bhL^2} E \frac{bh^3}{12} = \frac{\pi^2 E h^2}{12L^2} = \frac{\pi^2 E}{12} \left(\frac{1}{(L/h)^2} \right)$$

Τυπικό διάγραμμα σ_{CR} ως προς L/h για χάλυβα



Διεύθυνση λυγισμού

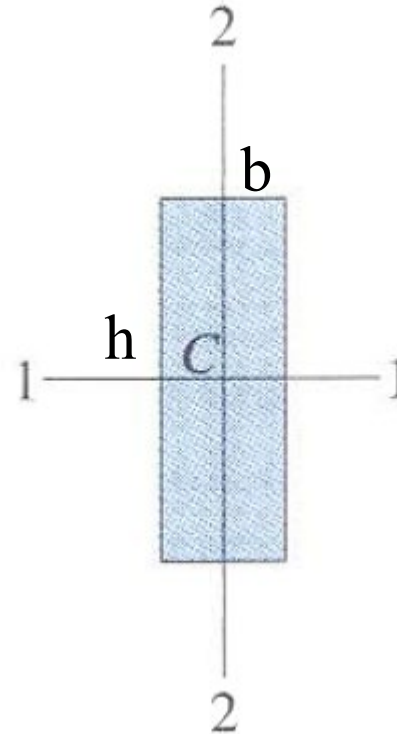
$$I_{1-1} = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_{2-2} = \frac{1}{12}hb^3$$

$$I_{1-1} > I_{2-2}$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2}EI$$

$$P_{CR,1-1} > P_{CR,2-2}$$

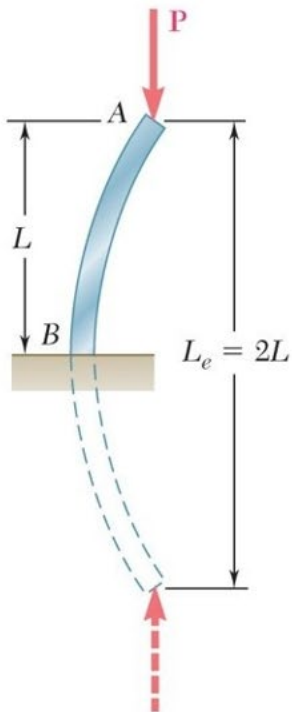


Το υποστύλωμα
λυγίζει ως προς τον
άξονα 2-2 πρώτα.

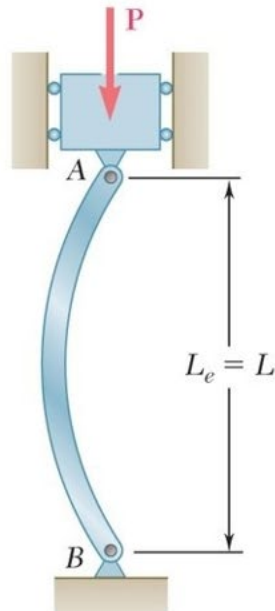
Άλλες συνθήκες άκρων

Ο τύπος Euler υπολογίστηκε για διαρθρωτό υποστύλωμα. Η χρήση του μπορεί να επεκταθεί σε υποστυλώματα με άλλες συνθήκες άκρων με αντικατάσταση του μήκους L με ένα ισοδύναμο μήκος L_e . L συνεχίζει να είναι το πραγματικό μήκος του υποστυλώματος όμως στη σχέση του Euler χρησιμοποιείται το ισοδύναμο μήκος L_e .

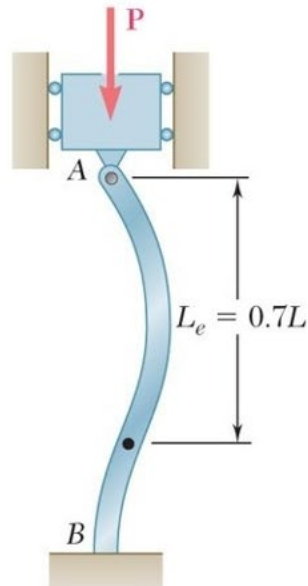
(a) Μια πάκτωση, ένα ελεύθερο άκρο



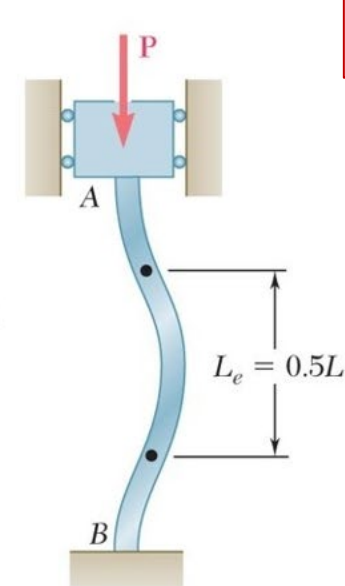
(b) Άθρωση και στα δύο άκρα



(c) Μια άρθρωση, μια πάκτωση

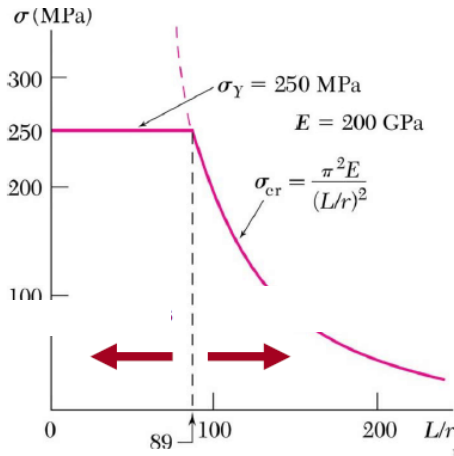


(d) Πάκτωση και στα δύο άκρα



$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L_e^2} EI$$

Ο λυγισμός εξαρτάται

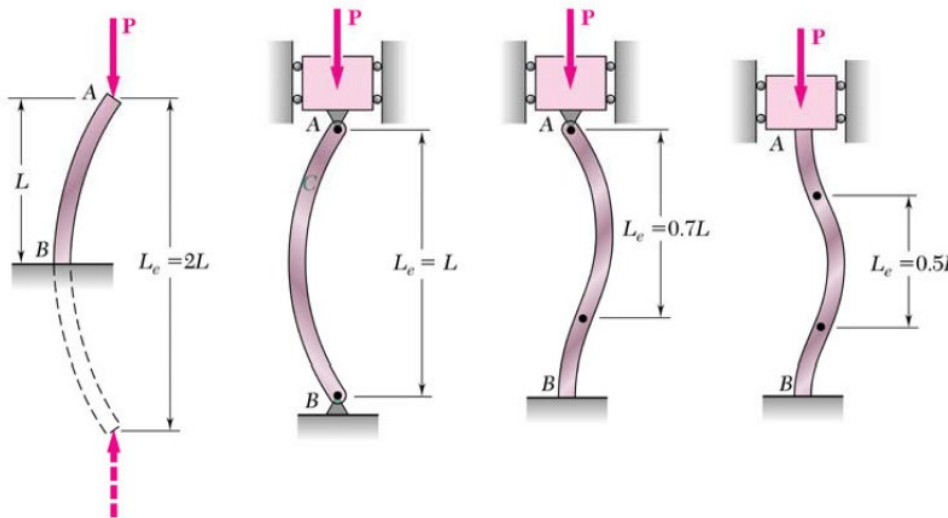


1. από το
θλιπτικό
φορτίο

$$P_{cr} = \frac{\pi^2}{L^2} EI$$

2. τις
ελαστικές
ιδιοτήτες
του υλικού

3. το σχήμα
της διατομής



4. τον τρόπο
στήριξης της
ράβδου

Κόπωση

Έως τώρα ο σχεδιασμός βάσει συντελεστών ασφαλείας βασιζόταν στην **αντοχή** του υλικού (διαρροή, εφελκυστική, θλιπτική, κλπ) ή στην ευστάθεια της κατασκευής (λυγισμός).

Συχνά, στοιχεία που υπόκεινται σε **δυναμικά κυμαινόμενες (κυκλικές) τάσεις** οποιασδήποτε μορφής, ακόμη και θερμικής φύσης, αστοχούν υπό **κόπωση**, σε **τάση χαμηλότερη της αντοχής διαρροής** του υλικού.



ΟΡΙΣΜΟΣ: Κόπωση είναι η μείωση της αντοχής ή αστοχία ενός υλικού, λόγω επαναλαμβανόμενης έκθεσης σε τάση μικρότερη του ορίου διαρροής του.

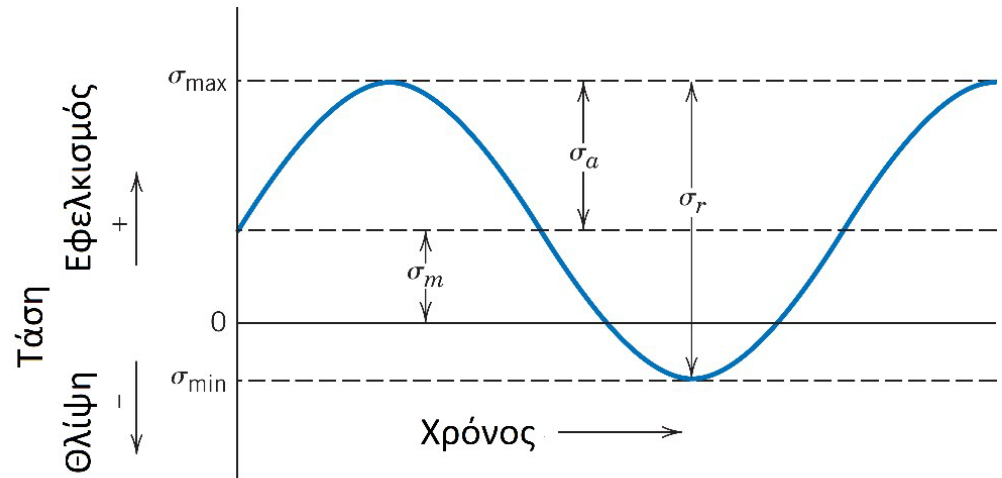
Στάδια Αστοχίας υπό Κόπωση

1. Δημιουργία **αρχικής μικροσκοπικής ρωγμής**, από **πυρήνες στην εξωτερική επιφάνεια** του υλικού ή όπου η τάση είναι μέγιστη (επιφανειακές ατέλειες, εγκλείσματα, οξείες ακμές από κακό σχεδιασμό ή από κατασκευή, κλπ).
2. **Ομαλή διάδοση** ρωγμής καθώς συνεχίζεται η κυκλική φόρτιση.
3. **Ξαφνική αστοχία** του υλικού, όταν η εναπομένουσα επιφάνεια διατομής είναι τόσο μικρή που δεν δύναται να υποστηρίξει το εφαρμοζόμενο φορτίο.

*Η αστοχία λόγω κόπωσης συμβαίνει σε μακροσκοπικά εφαρμοζόμενη τάση **χαμηλότερη από το όριο διαρροής**, επειδή η ένταση της τάσης υπερβαίνει την αντοχή.*

Εμφανίζεται κυριότερα σε μεταλλικά και πολυμερικά υλικά, τα κεραμικά έχουν ήδη χαμηλή δυσθραυστότητα και αστοχούν αμέσως μετά την εμφάνιση ρωγμών.

Ορισμός Κρίσιμων Μεγεθών της Κόπωσης



Η **μέση τάση, σ_m** , ορίζεται ως η μέση τιμή της μέγιστης και της ελάχιστης τάσης στον κύκλο:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$$

Το **εύρος των τάσεων, σ_r** , ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ των τιμών σ_{max} και σ_{min} :

$$\sigma_r = | \sigma_{max} - \sigma_{min} |$$

Το **πλάτος της τάσης, σ_a** , ορίζεται ως το μισό του εύρους των τάσεων:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{2} = \frac{| \sigma_{max} - \sigma_{min} |}{2}$$

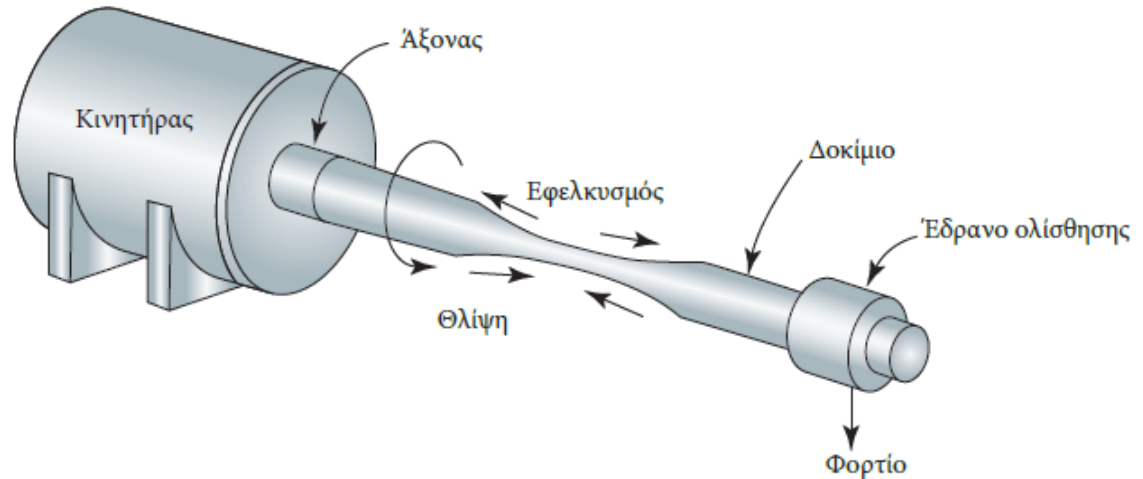
Ο **λόγος τάσεων R** ορίζεται ως ο λόγος του ελάχιστου προς το μέγιστο πλάτος τάσης:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

Μέτρηση Αντοχής Υλικού στην Κόπωση

Δοκιμή περιστρεφόμενου προβόλου

(rotating cantilever beam test)



1. Ένα άκρο κυλινδρικού δοκιμίου στερεώνεται σε μηχανοκίνητο περιστροφέα, στο δεύτερο **αιωρείται βάρος** (ανάπτυξη τέμνουσας).
2. Αρχικά η άνω επιφάνεια του δοκιμίου καταπονείται σε **εφελκυσμό** και η κάτω σε **θλίψη**.
3. Μετά την περιστροφή κατά 90° , οι περιοχές που ήταν αρχικά υπό εφελκυσμό ή θλίψη **δεν υφίστανται καμία τάση**.
4. Μετά την περιστροφή κατά 180° , το τμήμα του υλικού που ήταν αρχικά σε εφελκυσμό βρίσκεται τώρα υπό θλίψη και αντίστροφα.

Συνεπώς, σε κάθε σημείο η τάση μεταβάλλεται ημιτονοειδώς από τη μέγιστη εφελκυστική τάση στη μέγιστη θλιπτική.

Μέτρηση Αντοχής Υλικού στην Κόπωση



Στη δοκιμή αυτή, η μέγιστη τάση είναι:

$$\pm \sigma = \frac{32 FL}{\pi d^3}$$

L : απόσταση ανάμεσα στα σημεία επιβολής
τέμνουσας δύναμης και στήριξης του δοκιμίου
 F : φορτίο
 d : διάμετρος δοκιμίου

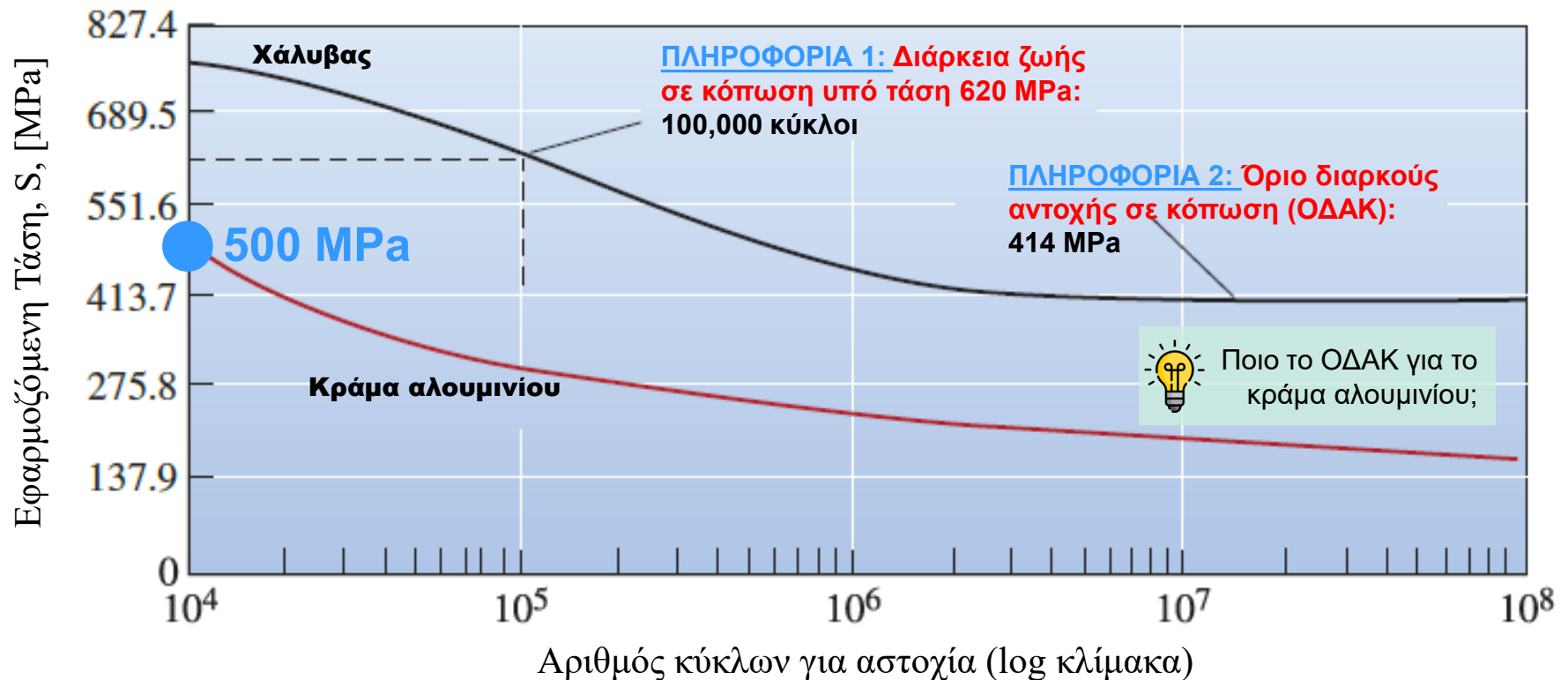


Νεότερες συσκευές: μηχανές άμεσης φόρτισης (direct loading machines) χρησιμοποιούν **σερβοϋδραυλικά** συστήματα για **εφαρμογή δυναμικής κυκλικής δύναμης, εκτροπής, μετατόπισης ή παραμόρφωσης**.

Αποτελέσματα Δοκιμών Κόπωσης

- Σειρά δειγμάτων εξετάζονται σε **διαφορετικές εφαρμοζόμενες τάσεις**.
- Καθένα αστοχεί μετά από **ικανό αριθμό κύκλων** κόπωσης.

Αναπαριστούμε την εφαρμοζόμενη τάση (S) ως προς τον αριθμό των κύκλων (N) που απαιτήθηκαν για την αστοχία του δείγματος.



Καμπύλη S-N (S-N curve) ή καμπύλη Wöhler

Πληροφορίες από Δοκιμές Κόπωσης

ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ 1: Η **Διάρκεια Ζωής σε Κόπωση (κύκλοι)** μας δείχνει πόσο δύναται να επιβιώσει ένα εξάρτημα υπό συγκεκριμένη τάση.

- π.χ., αν ο χάλυβας υπόκειται σε κυκλική φόρτιση τάσης ίσης με 620 MPa, η διάρκεια ζωής του σε κόπωση είναι 100,000 κύκλοι.

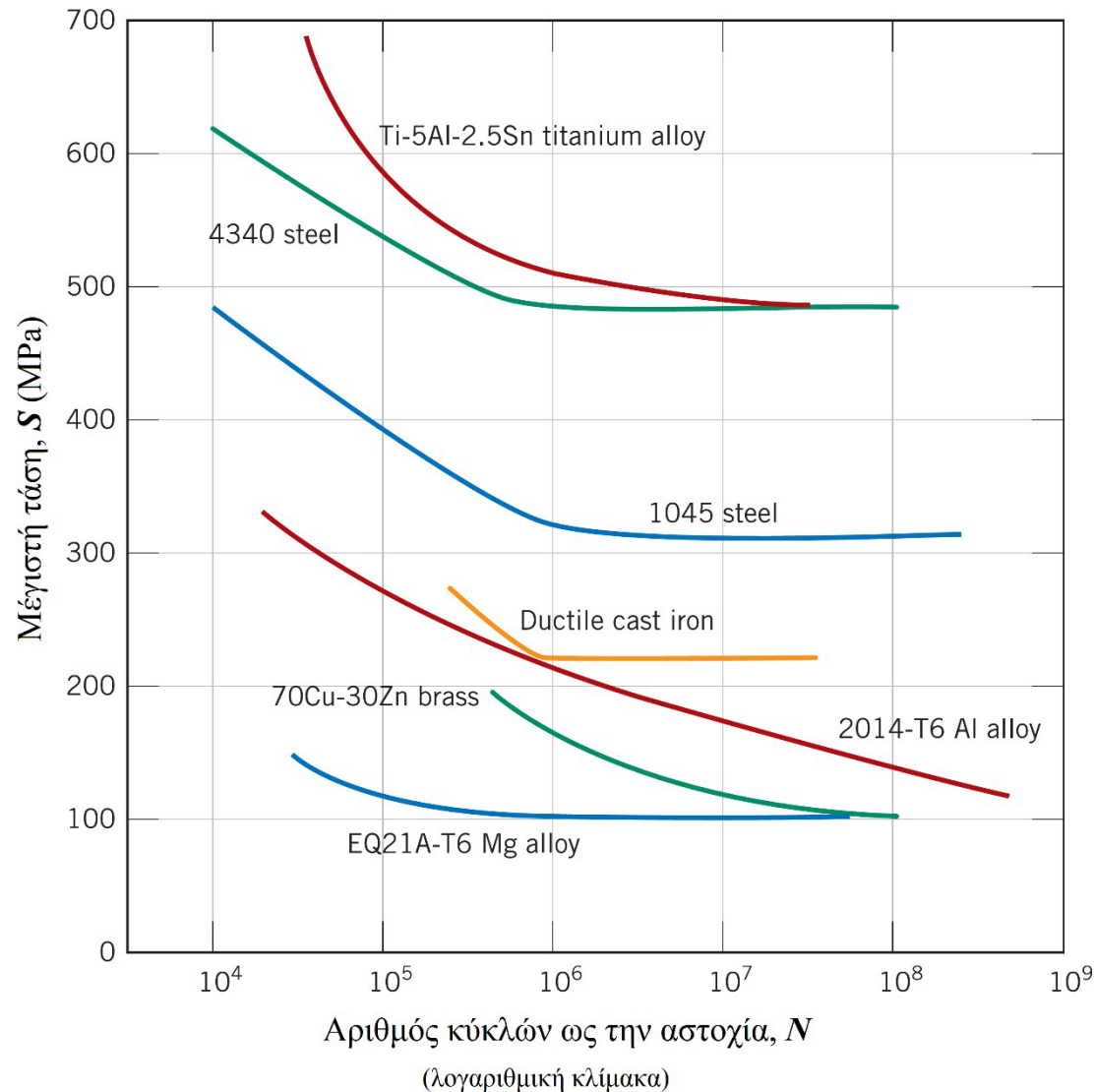
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑ 2: Το **Όριο Διαρκούς Αντοχής σε Κόπωση (τάση)** ή **όριο κόπωσης**, είναι η τάση κάτω από την οποία υπάρχει 50% πιθανότητα να μη συμβεί αστοχία λόγω κόπωσης (αποτελεί το προτιμώμενο σχεδιαστικό κριτήριο)

- π.χ., προκειμένου να αποτρέψουμε την αστοχία ενός εξαρτήματος από χάλυβα, πρέπει η εφαρμοζόμενη τάση να μην ξεπερνά τα 413.7 MPa

Ως **Αντοχή στην Κόπωση (τάση)** ορίζουμε τη μέγιστη τάση για την οποία δεν εμφανίζεται αστοχία για συγκεκριμένο αριθμό κύκλων, π.χ. 500MPa.

- Η γνώση της είναι απαραίτητη στον σχεδιασμό με υλικά που δεν επιδεικνύουν όριο κόπωσης όπως αλουμίνιο και πολυμερικά.

Καμπύλες S-N μεταλλικών κραμάτων



Εμπειρικός Κανόνας

Ο λόγος μεταξύ του ορίου κόπωσης και της εφελκυστικής αντοχής είναι γνωστός ως **Λόγος Διαρκούς Αντοχής** (endurance ratio):

$$\text{Λόγος διαρκούς αντοχής} = \frac{\text{Όριο κόπωσης}}{\text{Αντοχή σε εφελκυσμό}}$$

Ο λόγος διαρκούς αντοχής επιτρέπει την εκτίμηση των ιδιοτήτων κόπωσης από αποτελέσματα εφελκυστικών δοκιμών.

Στους χάλυβες, το όριο κόπωσης είναι συνήθως το ήμισυ της εφελκυστικής αντοχής, δίνοντας λόγο διαρκούς αντοχής: **0.5**

Σε άλλα μεταλλικά υλικά, οι τιμές του κυμαίνονται **από ~0.3 έως 0.4**.

Προστασία από Κόπωση

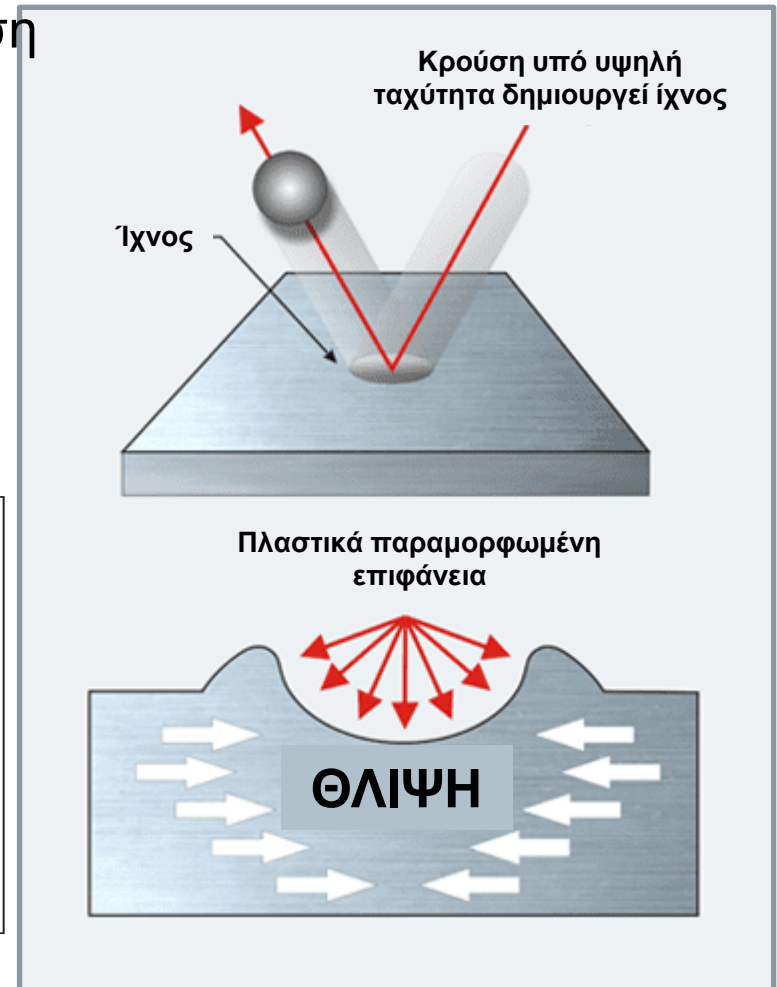
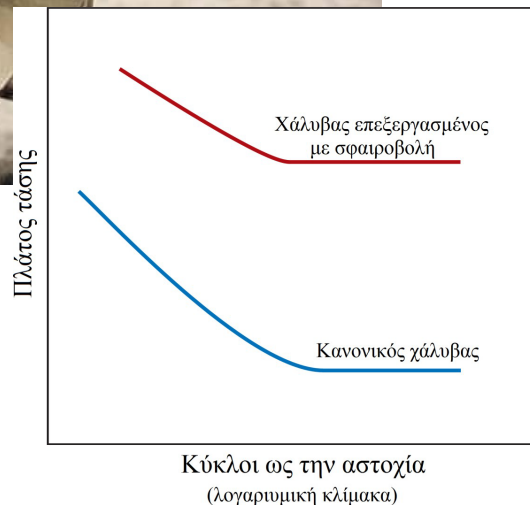
Τα περισσότερα υλικά παρουσιάζουν **ευαισθησία στην παρουσία ατελειών**: Οι ιδιότητες κόπωσής τους εξαρτώνται έντονα από τις ατέλειες, κυρίως τις επιφανειακές.

Οι ατέλειες που προκύπτουν από το σχεδιασμό ή κατά την κατασκευή, **ενισχύουν τις τάσεις και ελαττώνουν το όριο κόπωσης, την αντοχή στην κόπωση ή τη διάρκεια ζωής σε κόπωση**.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΤΑΣΙΑΣ Ι: Προετοιμασία εξωτερικών επιφανειών με υψηλό επίπεδο **λείανσης**, με σκοπό την ελαχιστοποίηση της πιθανότητας αστοχίας λόγω κόπωσης.

Προστασία από Κόπωση (2)

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΤΑΣΙΑΣ II: Στην **σφαιροβολή** (shot peening), βάλλοντας μικρές μεταλλικές σφαίρες στην επιφάνεια των υλικών, αναπτύσσονται σε αυτήν απομένουσες θλιπτικές τάσεις, που βελτιώνουν τη διάρκεια ζωής σε κόπωση



Προστασία από Κόπωση με Διάχυση (3)

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΤΑΣΙΑΣ III: Η διάχυση αερίων στο εσωτερικό του μετάλλου είναι μία τεχνική βελτίωσης της **επιφανειακής σκληρότητας** και της **διάρκεια ζωής σε κόπωση** κραμάτων χάλυβα.

- Επιτυγχάνεται κυρίως μέσω **ενανθράκωσης ή εναζώτωσης** των χαλύβδινων εξαρτημάτων, εκθέτοντάς τα σε **ρεύματα των αερίων σε υψηλή θερμοκρασία**, για την ταχεία και έντονη διάχυση των αερίων ειδών στο εσωτερικό τους που δημιουργούν περίβλημα πλούσιο σε άνθρακα/άζωτο (πάχος ~1 mm).
- Η βελτίωση των ιδιοτήτων σε κόπωση προκύπτει από την **αυξημένη σκληρότητα του περιβλήματος** (σε σχέση με τον πυρήνα), καθώς επίσης από την ανάπτυξη επιθυμητών εναπομενουσών θλιπτικών τάσεων.

Ρυθμός Διάδοσης Ρωγμής σε Κόπωση

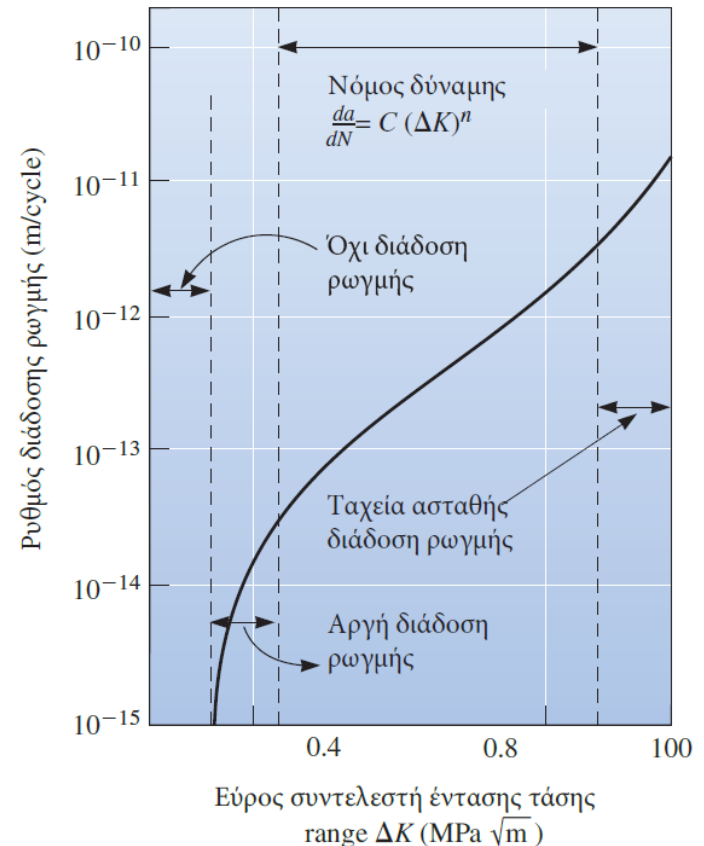
Από τα παραπάνω έγινε σαφές ότι ένα υλικό μπορεί να **μην κινδυνεύει να αστοχήσει**, ακόμη και αν **υφίσταται ατέλεια**, εάν βρίσκεται κάτω από το όριο διαρκούς αντοχής σε κόπωση.

Αν όμως η **ατέλεια διαδωθεί σε ρωγμή**, η τάση θα αυξηθεί σαν αποτέλεσμα τη συγκέντρωση τάσεων.

Συνεπώς για την εκτίμηση του ενδεχομένου αστοχίας, ιδιαίτερη σημασία έχει ο **ρυθμός με τον οποίο διαδίδεται μία ρωγμή**.

Μπορούμε να αποτυπώσουμε το ρυθμό διάδοσης μίας ρωγμής συναρτήσει του εύρους του **συντελεστή έντασης τάσεων ΔK** , παράμετρος που χαρακτηρίζει τη γεωμετρία της ρωγμής και το πλάτος της τάσης.

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a}$$



Ρυθμός Διάδοσης Ρωγμής σε Κόπωση (2)

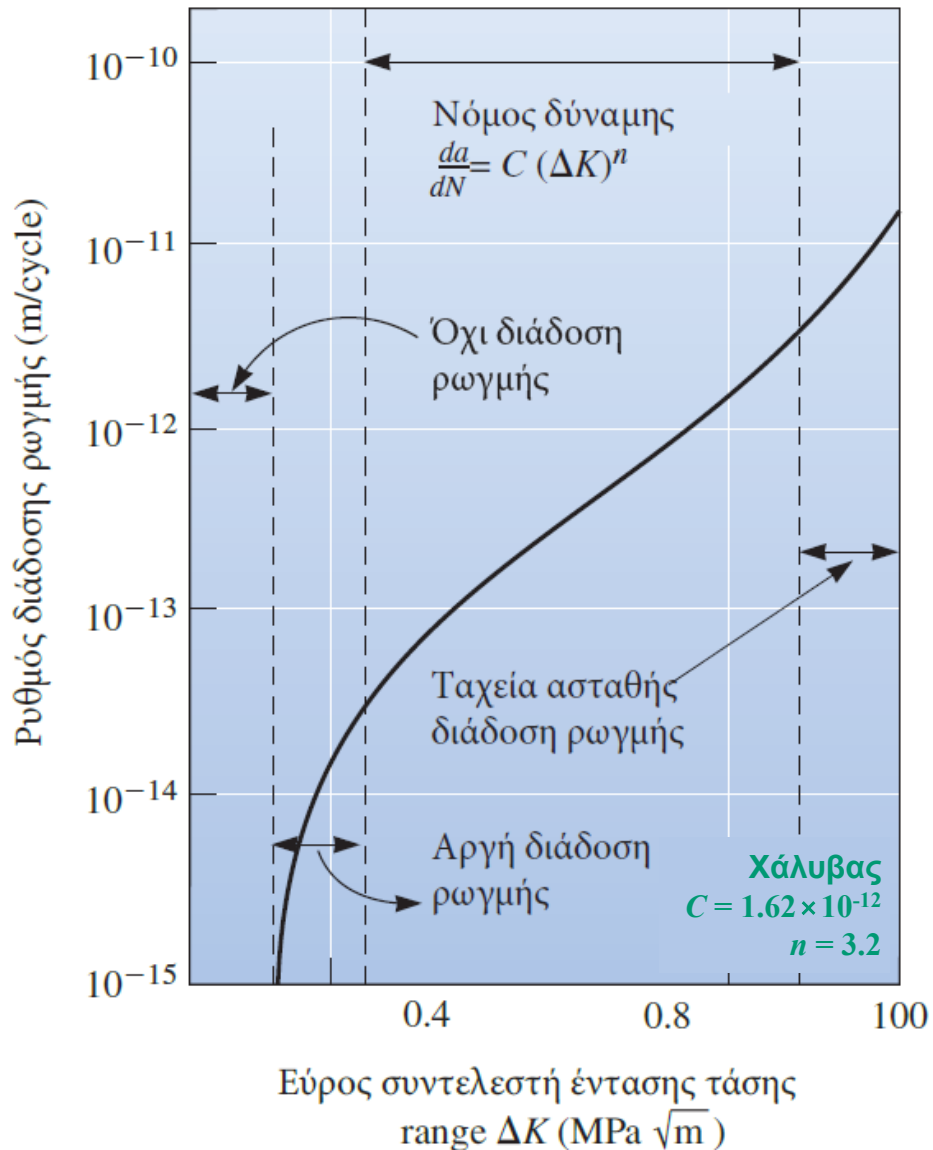
1. Κάτω από μία οριακή τιμή ΔK , η ρωγμή δεν αναπτύσσεται
2. Για υψηλότερες εντάσεις οι ρωγμές αναπτύσσονται αργά
3. Για ακόμη μεγαλύτερες εντάσεις, ο ρυθμός διάδοσης μιας ρωγμής δίνεται από:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n$$

**Νόμος
Paris**

C, n : εμπειρικές σταθερές του υλικού

4. Όταν το εύρος ΔK είναι ακόμη υψηλότερο, οι ρωγμές διαδίδονται ταχύτατα και με ασταθή τρόπο, έως ότου επέλθει θραύση.





**Καλή επιτυχία
Καλό καλοκαίρι**