CHM_582: Μηχανική Υλικών

Διάλεξη 8: Κάμψη

Κωνσταντίνος Γ. Δάσιος, Αναπλ. Καθηγητής
Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
kdassios@upatras.gr

Πάτρα, Μάιος 2024

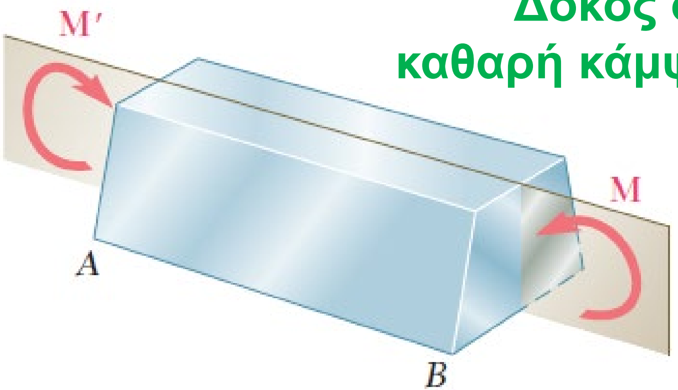
Περιεχόμενα

- Εισαγωγή – Παραδείγματα
- Είδη Κάμψης
- Γενική θεώρηση - Παραδοχές
- Παραμόρφωση δοκού
- Ουδέτερος άξονας – Κέντρο Βάρους - Βέλος κάμψης
- Ορθή παραμόρφωση και μέγιστη τιμή της
- Εγκάρσιες παραμορφώσεις
- Ορθή Τάση
- Σχέση μεταξύ ροπής και τάσης
- Καμπυλότητα
- 2/βάθμια δοπή αδράνειας και ροπή αντίστασης
- Σχεδιασμός δοκών κάμψης

Κάμψη

Έως τώρα μελετήσαμε ροπές και τάσεις σε άξονες που υπόκειντο σε **αξονικές** και **εγκάρσιες** φορτίσεις και **στρεπτικές ροπές**.

Στην **κάμψη** μελετούμε τις τάσεις και παραμορφώσεις σε δοκούς (στοιχεία πρισματικής εγκάρσιας διατομής) που υπόκεινται σε **ζεύγη ροπών κάμψης**.



Δοκός σε καθαρή κάμψη

Βασικό είδος καταπόνησης που χρησιμοποιείται στο σχεδιασμό πολλών στοιχείων και δομικών εξαρτημάτων, κυρίως **δοκών**.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Στοιχείο καταπονείται σε **καθαρή κάμψη** όταν πάνω σε αυτόν ενεργούν **μόνο ζεύγη ίσων και αντίθετων ροπών** (κοινό μέτρο/αντίθετες κατευθύνσεις), στο **διαμήκες επίπεδο** συμμετρίας του.

Στην καθαρή κάμψη η **ροπή είναι σταθερή σε όλο το μήκος** του στοιχείου.

Κάμψη - Παραδείγματα

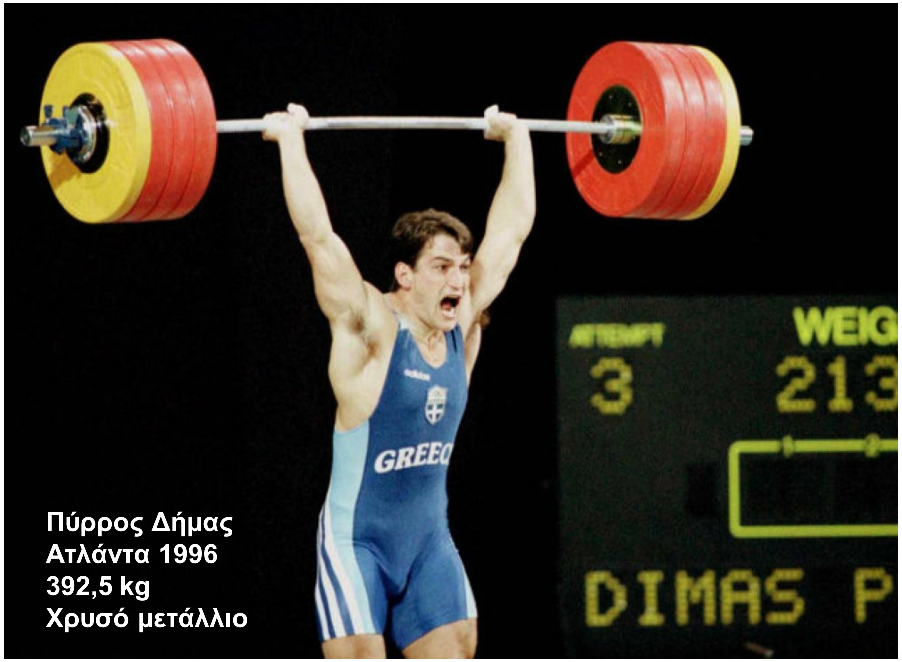
Δοκοί που υπόκεινται σε κάμψη είναι συνήθως στενόμακρα πρισματικά δομικά στοιχεία με την μια διάσταση τουλάχιστον x10 μεγαλύτερη, των υπολοίπων δυο.

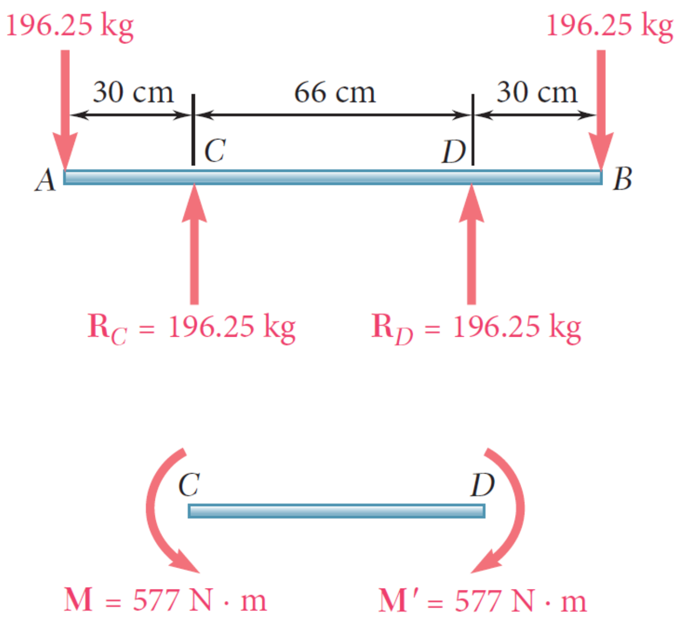
Κάμψη – Παραδείγματα (2)

Στα προηγούμενα παραδείγματα η κάμψη ήταν γενικά **ανεπιθύμητη**.

Η κάμψη είναι **επιθυμητή** στην μηχανουργία όπου αποτελεί βασική μέθοδο μορφοποίησης μεταλλικών υλικών.

Παράδειγμα Καθαρής Κάμψης

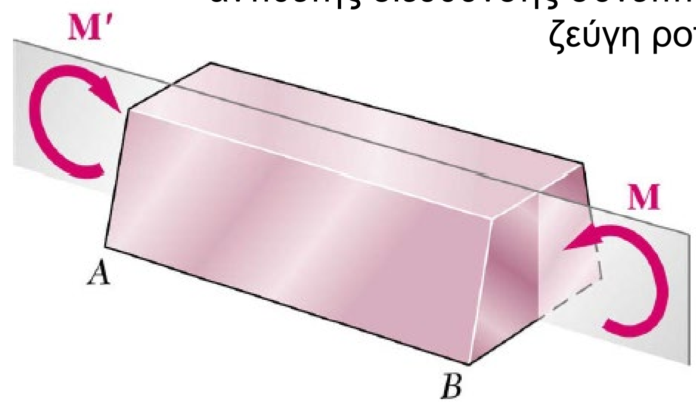




- Η μπάρα φέρει **ίσα βάρη** σε **ίσες αποστάσεις** από τα χέρια του αρσιβαρίστα.
- Λόγω της **συμμετρίας** του ΔΕΣ, οι αντιδράσεις στα χέρια πρέπει να είναι ίσες και αντίθετα με τα βάρη.
- Συνεπώς τα βάρη και οι αντιδράσεις στο μεσαίο τμήμα CD μπορούν να αντικατασταθούν **από δύο ίσες και αντίθετες ροπές**
- Δηλαδή το μεσαίο τμήμα της δοκού καταπονείται σε **καθαρή κάμψη**

Είδη Κάμψης

Δοκός στην οποία ασκούνται ίσα & αντίθετης διεύθυνσης συνεπίπεδα ζεύγη ροπών

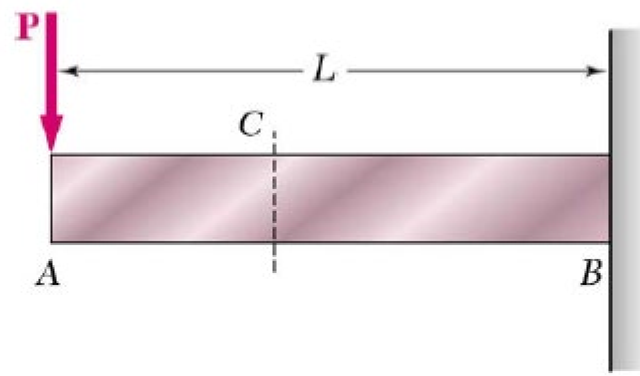


Καθαρή κάμψη

Κάμψη δοκού υπό σταθερό ζεύγος ροπών → σταθερό M(x). Εμφάνιση **μόνο ορθών** τάσεων κατά μήκος της δοκού.

$$\mathrm{V} = \frac{dM(x)}{dx} = \mathbf{0}$$

Γενική κάμψη

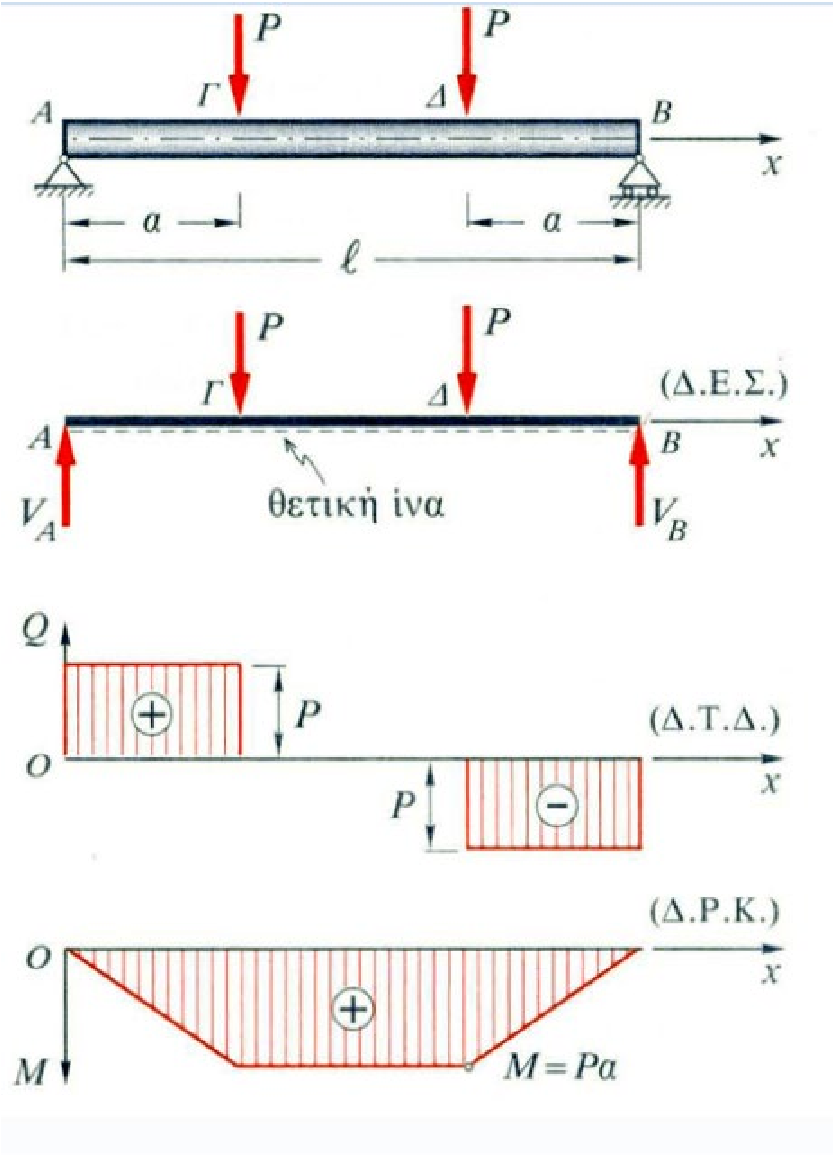


Η καμπτική ροπή μεταβάλλεται κατά μήκος της δοκού, εμφάνιση **και τεμνουσών** δυνάμεων κατά μήκος της δοκού.

$$\mathrm{V} = \frac{dM(x)}{dx} \neq \mathbf{0}$$

Γενική κάμψη έχουμε όταν το **σχήμα** της δοκού σαν αποτέλεσμα της εφαρμοζόμενης καμπτικής ροπής **δεν** αποτελεί **τόξο κύκλου**

Παράδειγμα Καθαρής & Γενικής Κάμψης



Δοκός που καταπονείται από δύο δυνάμεις. Από NQM προκύπτει:

- Στα ΑΓ και ΔΒ η δοκός καταπονείται και από διάτμηση και από κάμψη.
- Στο ΓΔ η καμπτική ροπή είναι σταθερή και η τέμνουσα μηδέν
- Συνεπώς:

Καθαρή κάμψη @ ΓΔ
Γενική κάμψη @ ΑΓ & ΔΒ

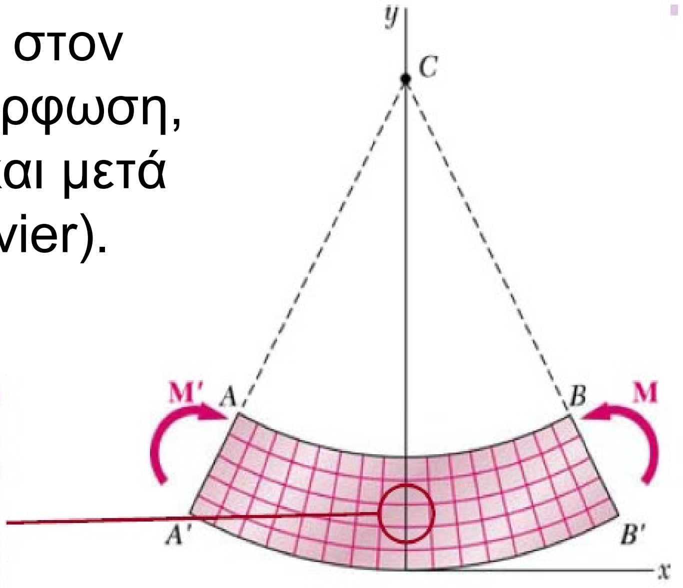
Γενική Θεώρηση

- Στην **Στατική** (απαραμόρφωτα σώματα) μελετήσαμε την μεταβολή τεμνουσών και ροπών σε **απαραμόρφωτες** δοκούς στις οποίες ασκούνταν δυνάμεις (N,Q) και καμπτικές ροπές (M) → **διαγράμματα NQM**, ανεξάρτητα μεγέθους & γεωμετρίας διατομής
- Στην **Αντοχή Υλικών** (παραμορφώσιμο σώμα), στην κάμψη θα μελετήσουμε την **παραμόρφωση των δοκών υπό καμπτικές ροπές** και την κατανομή των τάσεων στην διατομή.
- Επειδή, όπως και στη στρέψη, η στατική ανάλυση για τον προσδιορισμό της **κατανομής των τάσεων** σε δοκό υπό κάμψη οδηγεί σε στατικά απροσδιόριστο σύστημα, ξεκινούμε να εργαζόμαστε με **παραμόρφωση**.

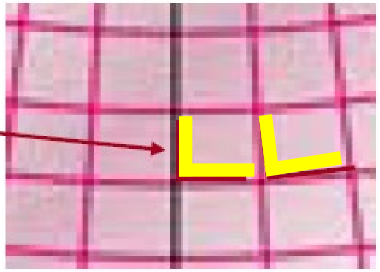
Παραδοχές Καθαρής Κάμψης

Για την ανάλυση κάνουμε τις παραδοχές:

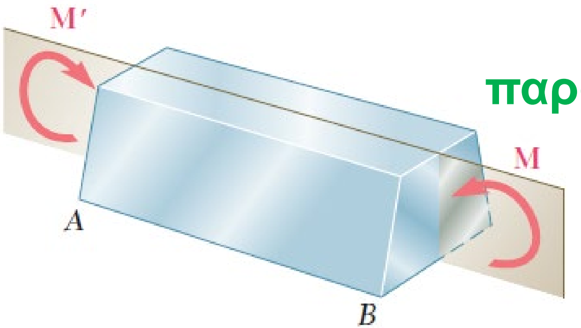
1. Το υλικό είναι **ομογενές** και **γραμμικά ελαστικό**.
2. **Μέτρο ελαστικότητας** υλικού δοκού σε **εφελκυσμό** ίσο με μέτρο ελαστικότητας σε **θλίψη**.
3. Αναπτυσσόμενες τάσεις περιορίζονται **στην ελαστική περιοχή** όπου ισχύει ο νόμος του Hooke.
4. **Κάθε διατομή** επίπεδη και κάθετη στον άξονα της δοκού πριν την παραμόρφωση, **παραμένει επίπεδη και κάθετη** και μετά από αυτήν (υπόθεση Bernoulli-Navier).
(απόδειξη 4.1B/σελ. 262 συγγράμματος)



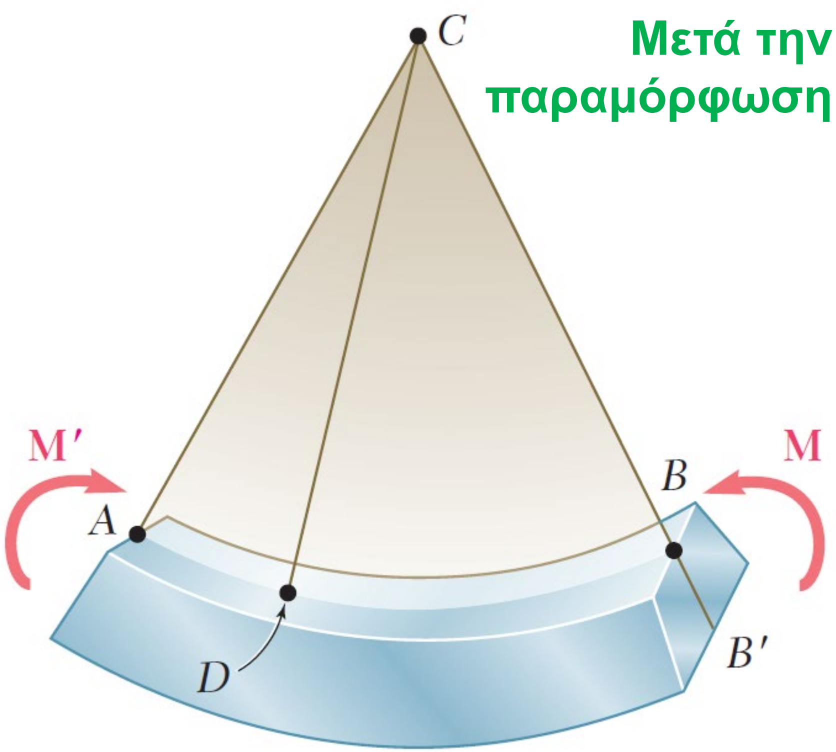
Ορθές γωνίες



Παραμόρφωση Δοκού υπό Καθαρή Κάμψη



Πριν την παραμόρφωση



Μετά την παραμόρφωση

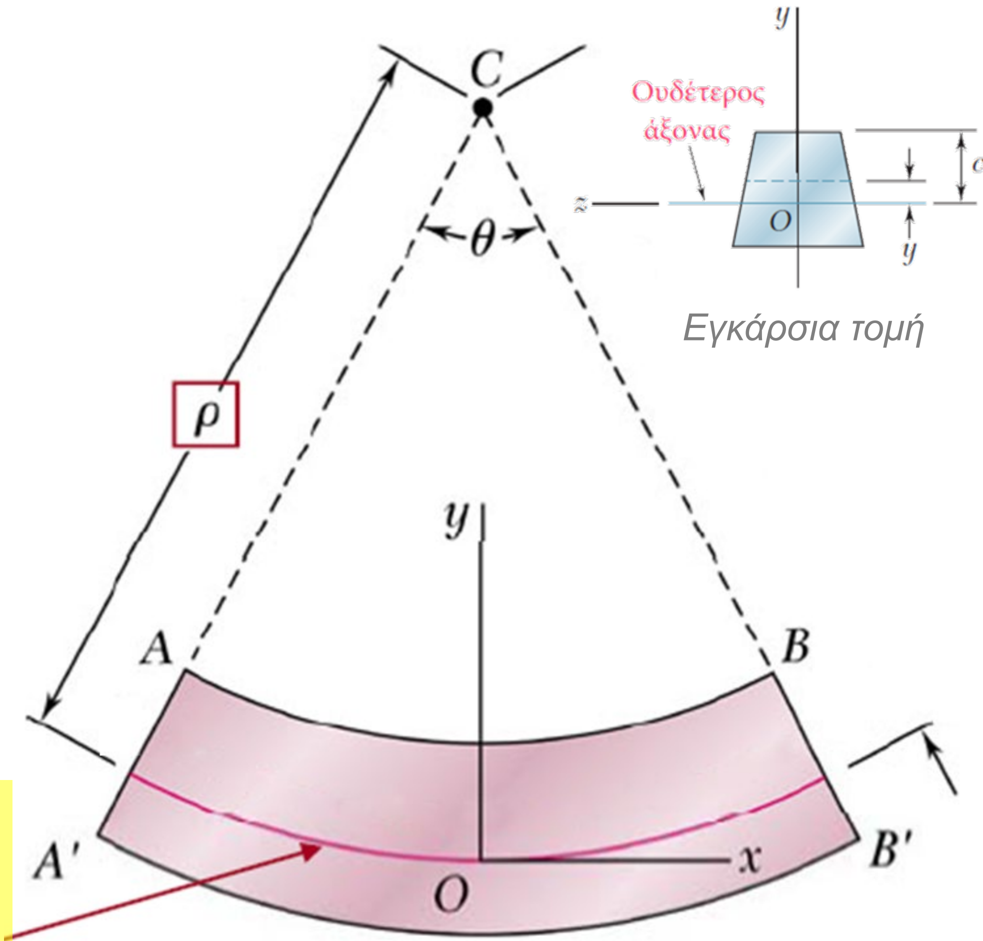
- Υπό την επίδραση του ζεύγους ροπών παράλληλα στο επίπεδο συμμετρίας, το στοιχείο **κάμπτεται**, ενώ το επίπεδο συμμετρίας διατηρείται.
- Αφού M σταθερή σε όλο το μήκος, η **δοκός κάμπτεται ομοιόμορφα**.
- Συνεπώς το τμήμα AB (τομή άνω επιφάνειας με επίπεδο συμμετρίας, αρχικά ευθύγραμμο) αποκτά **σταθερή καμπυλότητα**.
- Το **AB μικραίνει** σε μήκος ενώ το τμήμα **A’B’ στην κάτω επιφάνεια επιμηκύνεται**.

Παραμόρφωση Δοκού υπό Καθαρή Κάμψη (2)

- Επομένως υπό την επίδραση του ζεύγους ροπών, η **άνω επιφάνεια καταπονείται σε θλίψη**, ενώ η **κάτω σε εφελκυσμό**.
- Τα ενδιάμεσα τμήματα καταπονούνται **σταδιακά** λιγότερο σε θλίψη ή εφελκυσμό

Τι συνεπάγεται;

Υπάρχει ένα επίπεδο όπου η συνολική καταπόνηση είναι μηδέν, καλείται «ουδέτερο επίπεδο»



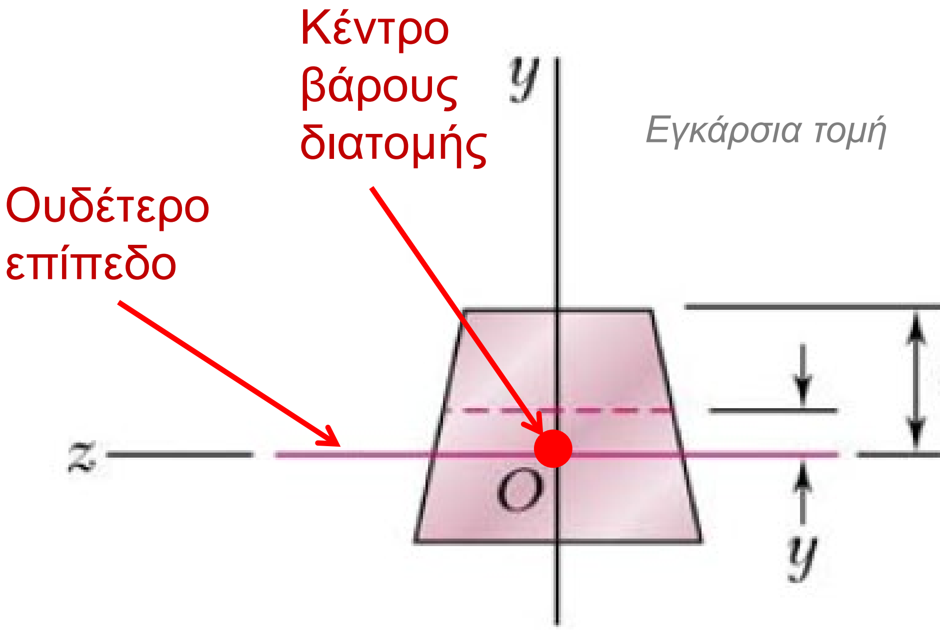
Εγκάρσια τομή

Γιατί το επίπεδο δεν είναι στο κέντρο;

Ουδέτερο Επίπεδο

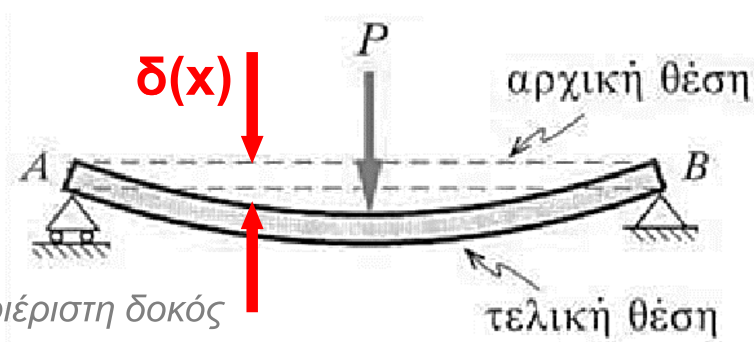
Τέμνει κάθετα το επίπεδο συμμετρίας & από αυτό διέρχεται ο κεντροβαρικός άξονας.

Κατά σύμβαση, **y = 0 στο ουδέτερο επίπεδο**

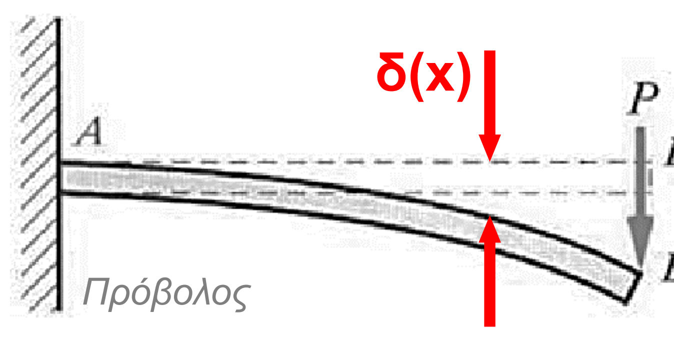


Εγκάρσια τομή

Η κατακόρυφη μετατόπιση των σημείων του ουδέτερου επιπέδου από την αρχική θέση, ονομάζεται **βέλος κάμψης δ(x)** της δοκού στην θέση **x**.

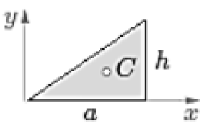
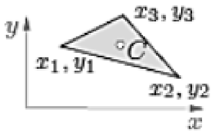
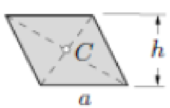


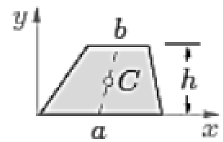
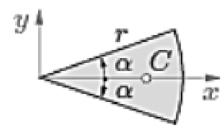
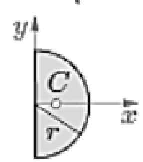
Αμφιέριστη δοκός



Πρόβολος

Ουδέτερο Επίπεδο & Κέντρο Βάρους

Επιφάνεια		Συντεταγμένες κέντρου βάρους
Ορθωγώνιο τρίγωνο 	$A = \frac{1}{2}\, a h$	$x_c = \frac{2}{3}\, a, \quad y_c = \frac{h}{3}$
Τυχαίο τρίγωνο 	$A = \frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$	$x_c = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$, $y_c = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$
Παραλληλόγραμο 	$A = a\, h$	Το κέντρο βάρος βρίσκεται στην τομή των διαγωνίων του παραλληλογράμου

Τραπέζιο 	$A = \frac{h}{2}(a + b)$	$y_c = \frac{h}{3}\, \frac{a + 2\, b}{a + b}$
Κυκλικός τομέας 	$A = \alpha\, r^2$	$x_c = \frac{2}{3}\, r\, \frac{\sin \alpha}{\alpha}$
Ημικύκλιο 	$A = \frac{\pi}{2}\, r^2$	$x_c = \frac{4\, r}{3\, \pi}$

Ορθή παραμόρφωση

ρ = ακτίνα καμπυλότητας ουδέτερου επιπέδου

$\varepsilon_x < 0$ για $y > 0$ και $\varepsilon_x > 0$ για $y < 0$

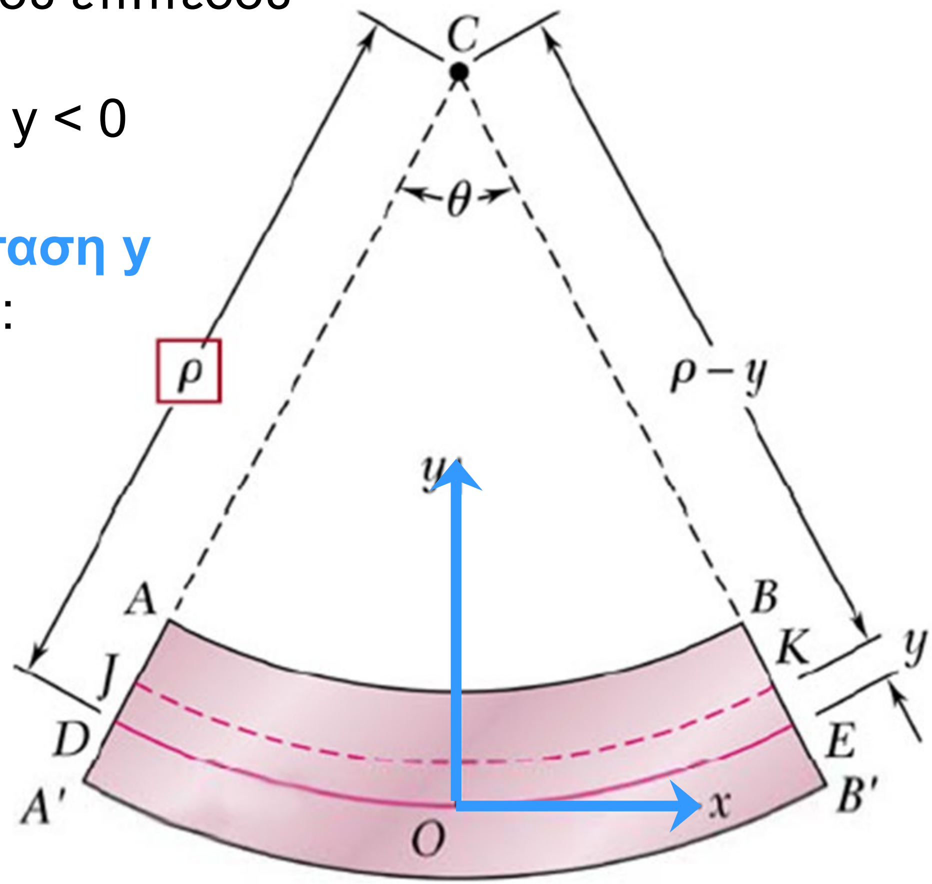
Η ορθή παραμόρφωση **σε απόσταση y** από το ουδέτερο επίπεδο θα είναι:

$$\varepsilon_x = \frac{L_{\mathrm{JK}} - L_{\mathrm{DE}}}{L_{\mathrm{DE}}}$$

Έστω **μικρές γωνίες** θ: τμήματα JK, DE ευθύγραμμα, tanθ≈θ

$\triangle$ JCK: $\theta = \dfrac{\mathrm{L}_{JK}}{\rho - y} \Rightarrow \mathrm{L}_{JK} = (\rho - y)\theta$

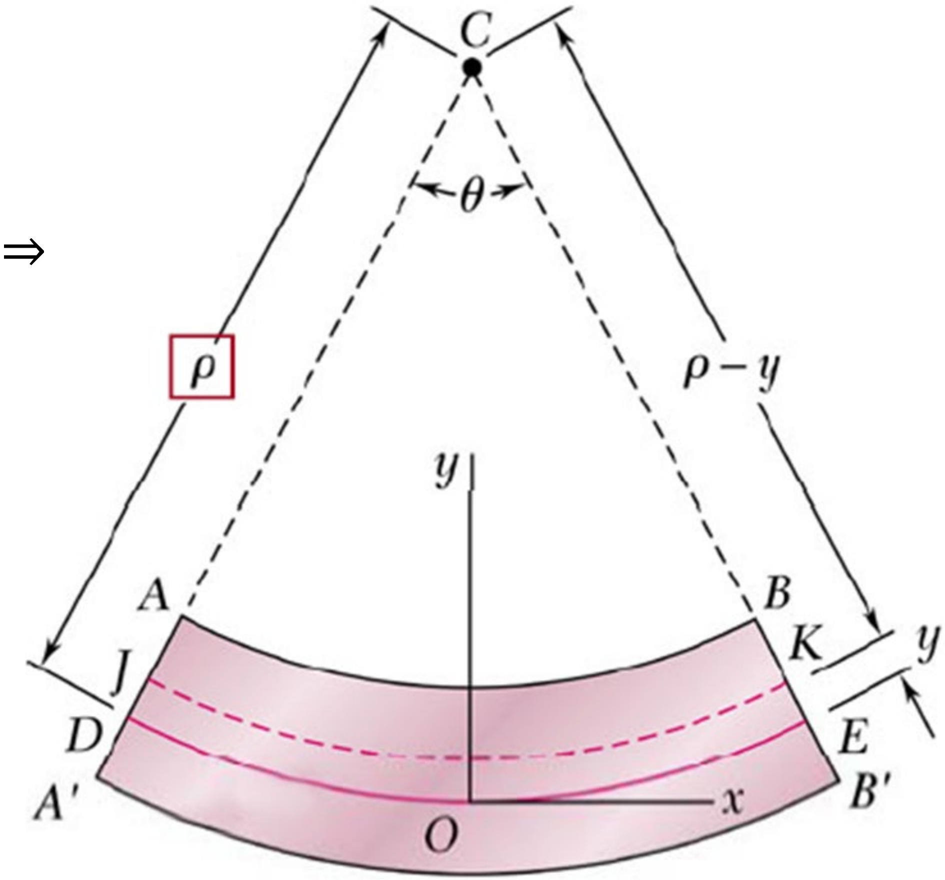
$\triangle$ DCE: $\theta = \dfrac{\mathrm{L}_{DE}}{\rho} \Rightarrow \mathrm{L}_{DE} = \rho\theta$



Ορθή παραμόρφωση (2)

Τότε $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta l}{l_0} = \dfrac{(\rho - y)\theta \ - \rho\theta}{\rho\theta} \Rightarrow$

$$\boxed{\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}}$$

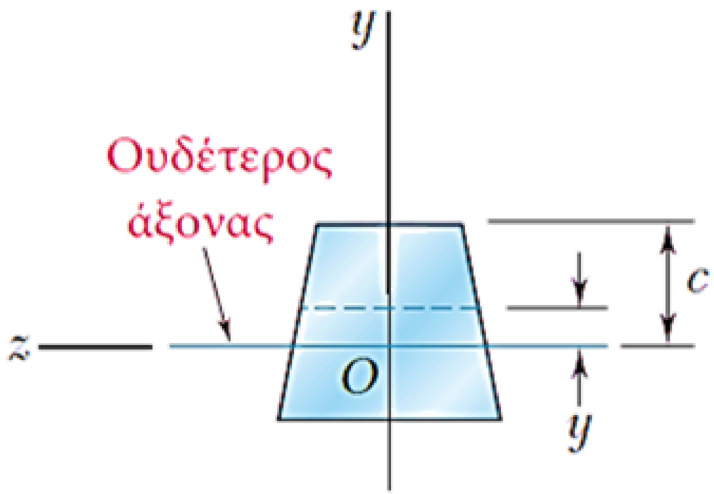


Η διαμήκης ορθή παραμόρφωση μεταβάλλεται **γραμμικά** με την απόσταση από το ουδέτερο επίπεδο

Μέγιστη Ορθή παραμόρφωση

$$\varepsilon_{max} = \begin{cases} -\dfrac{L_{EB}}{\rho}, & \text{για } \mathrm{y} = \mathrm{EB} \\ \dfrac{L_{EB'}}{\rho}, & \text{για } \mathrm{y} = -\mathrm{EB'} \end{cases}$$

- Η μέγιστη θλιπτική τάση παρατηρείται στην άνω επιφάνεια της δοκού
- Η μέγιστη εφελκυστική τάση παρατηρείται στην κάτω επιφάνεια της δοκού



Αν c η μέγιστη απόσταση από το ουδέτερο επίπεδο (που αντιστοιχεί είτε στην άνω ή στην κάτω επιφάνεια)

$$\varepsilon_{max} = \frac{c}{\rho}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho}$$

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{y}{c}\,\varepsilon_{max}}$$

Εγκάρσια παραμόρφωση

Θα υπάρχουν εγκάρσιες παραμορφώσεις λόγω του φαινομένου Poisson

$$\varepsilon_y = -\nu_{xy}\varepsilon_x = \nu_{xy}\frac{y}{\rho}$$

Πρόσημα!

$$\varepsilon_z = -\nu_{xz}\varepsilon_x = \nu_{xz}\frac{y}{\rho}$$

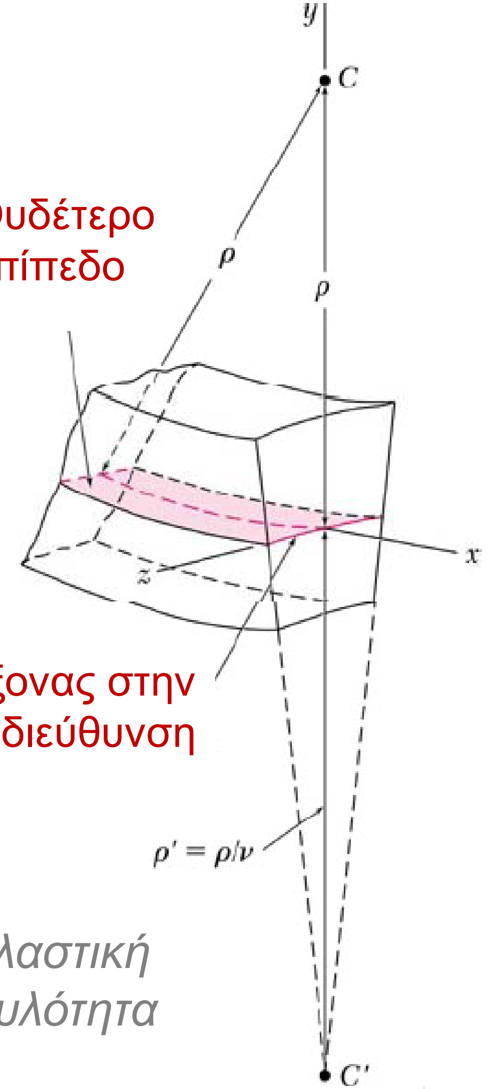
Για ισότροπο υλικό $\nu_{xy} = \nu_{xz} = \nu$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = \nu\frac{y}{\rho} = \frac{y}{\rho'}$$

$$\rho' = \frac{\rho}{\nu}$$

Αντικλαστική καμπυλότητα

Ουδέτερο επίπεδο



Ουδέτερος άξονας στην εγκάρσια διεύθυνση

Ορθές τάσεις

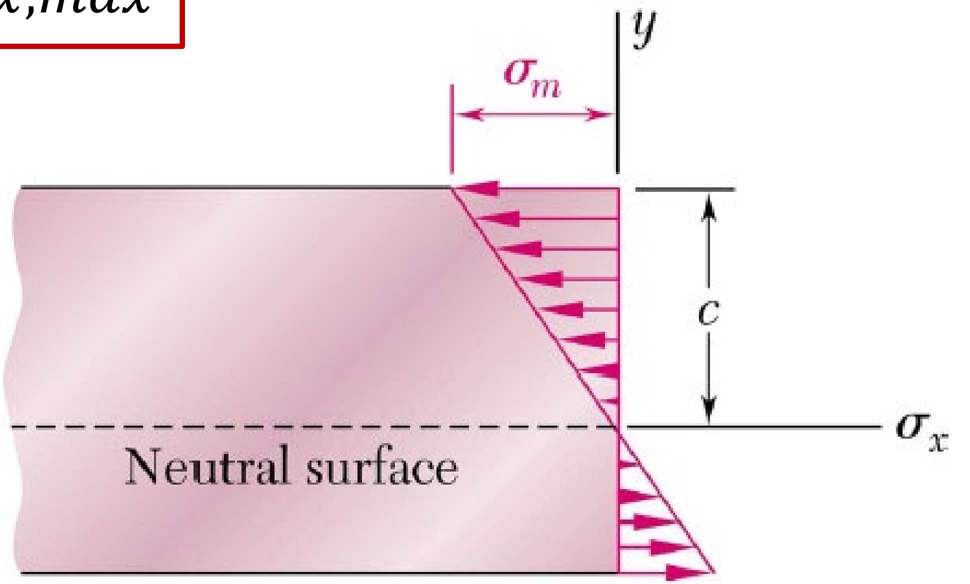
Αν το υλικό κατασκευής της δοκού συμπεριφέρεται γραμμικά-ελαστικά:

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \longrightarrow \boxed{\sigma_x = \mathrm{E}\varepsilon_x = -\mathrm{E}\frac{y}{\rho}}$$

Η ορθή τάση μεταβάλλεται γραμμικά σαν συνάρτηση της απόστασης από το ουδέτερο επίπεδο

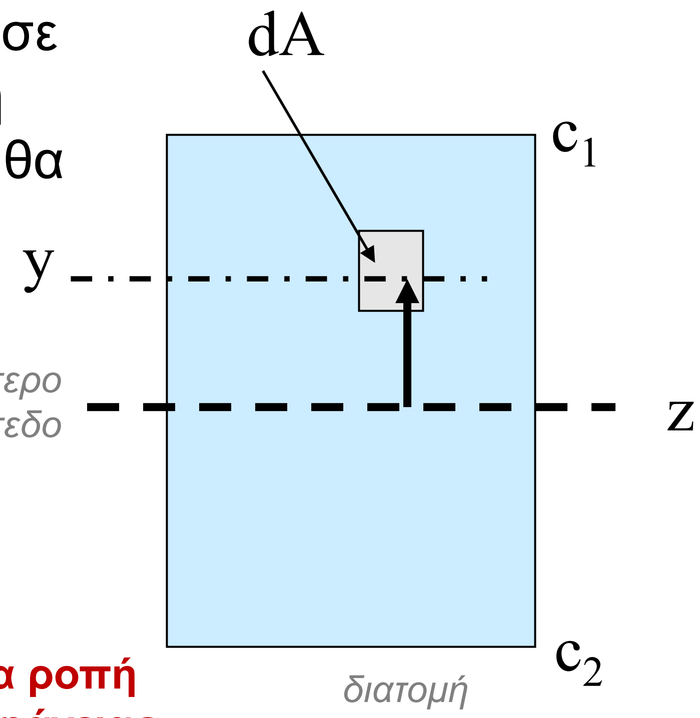
$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c}\varepsilon_{x,max} \longrightarrow \boxed{\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_{x,max}}$$

Τα πρόσημα δεν έχουν αλλάξει, η μέγιστη εφελκυστική τάση θα βρίσκεται στην κάτω επιφάνεια της δοκού και η μέγιστη θλιπτική στην άνω επιφάνεια.



Σχέση μεταξύ ροπής M και τάσης σ

Έστω στοιχειώδης επιφάνεια dA της διατομής σε απόσταση y από το ουδέτερο επίπεδο. Αν M η επιβαλλόμενη ροπή, η στοιχειώδης ροπή που θα ασκείται στην επιφάνεια dA θα είναι:



$$dM = -\sigma_x y dA$$

$$M = -\int_A \sigma_x\, y dA = \int_A \frac{\mathrm{E}y}{\rho} y\, dA$$

όπου $I = \int_A y^2\, dA \longrightarrow I$ **Δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας επιφάνειας (ως προς το ουδέτερο επίπεδο)**

Μέτρο της ικανότητας της γεωμετρίας διατομής της πρισματικής δοκού να αντιστέκεται στη κάμψη

Συνεπώς: $\boxed{M = \frac{\mathrm{E}I}{\rho}} \xrightarrow[\sigma_x = -\frac{\mathrm{E}y}{\rho} \Rightarrow \frac{\mathrm{E}}{\rho} = -\frac{\sigma_x}{y}]{} M = -\frac{\sigma_x I}{y} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = -\frac{My}{I}}$

$$\boxed{\sigma_{x,max} = -\frac{Mc}{I}}$$

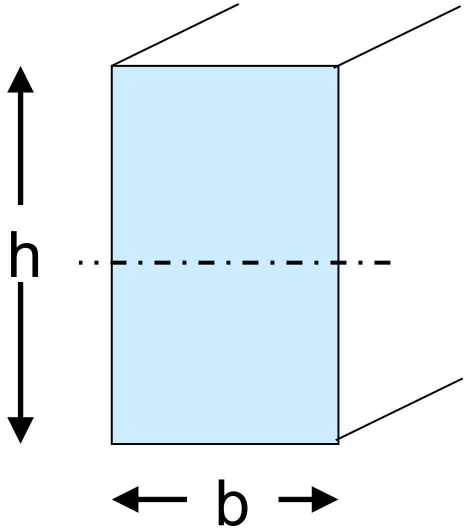
Καμπυλότητα 1/ρ

Ένας άλλο μέτρο της παραμόρφωσης της δοκού σαν αποτέλεσμα της επιβαλλόμενης καμπτικής ροπής, είναι η **καμπυλότητα του ουδέτερου άξονα**. Ορίζεται ως ο αντίστροφος της ακτίνας καμπυρόλητας ρ, και προκύπτει ως:

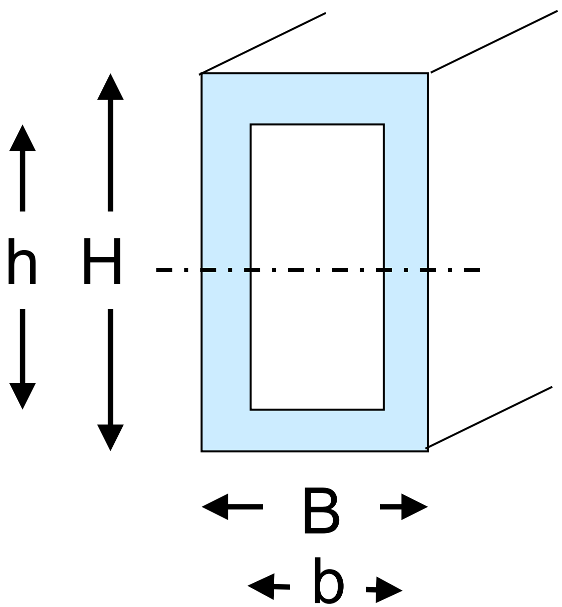
$$\varepsilon_{max} = \frac{c}{\rho} \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon_{max}}{c} = \frac{\sigma_{max}}{\mathrm{E}c} = \frac{\mathrm{M}c/\mathrm{I}}{\mathrm{E}c} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}}}$$

Δευτεροβάθμιες ροπές αδράνειας επιφανειών

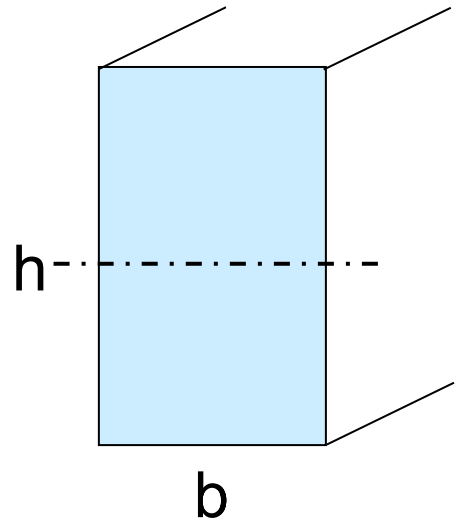


$$I = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$



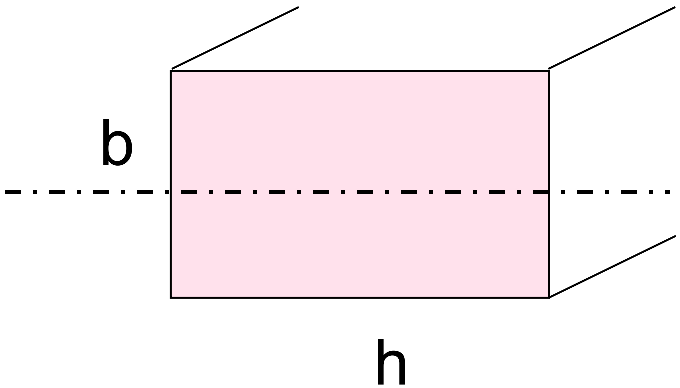
$$I = \frac{1}{12}(B \cdot H^3 - b \cdot h^3)$$

Δευτεροβάθμια ροπή αδράνειας επιφάνειας



$$I_1 = \frac{1}{12} b \cdot h^3$$

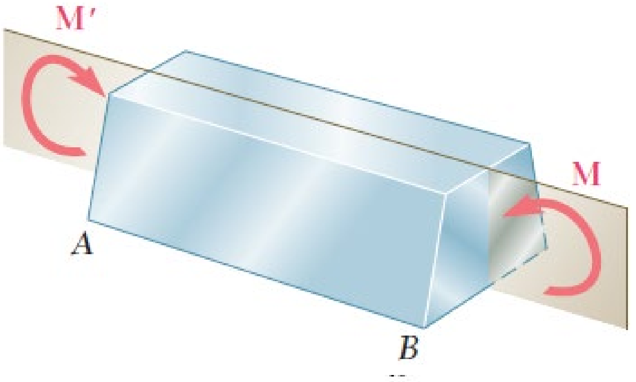
Διατομές ίδιου εμβαδού
ΔΕΝ έχουν κατ’ανάγκη ίδιες
ροπές αδράνειας



$$I_2 = \frac{1}{12} h \cdot b^3$$

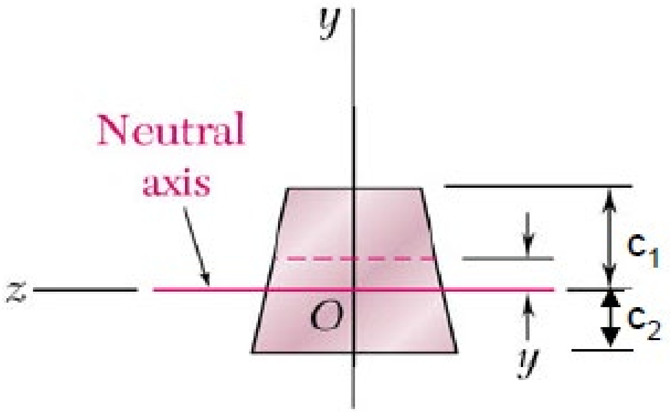
Ορθές τάσεις σε καθαρή κάμψη

Αν c1 και c2 οι αποστάσεις του ουδέτερου επιπέδου από την άνω και κάτω επιφάνεια αντίστοιχα, έχουμε:



Μέγιστη εφελκυστική τάση: $\mathrm{M}\dfrac{c_2}{I} = \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{S}_2}$

Μέγιστη θλιπτική τάση: $\mathrm{M}\dfrac{c_1}{I} = \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{S}_1}$



Ο λόγος $S = \frac{I}{c}$ καλείται **ελαστική ροπή αντίστασης της επιφάνειας**.

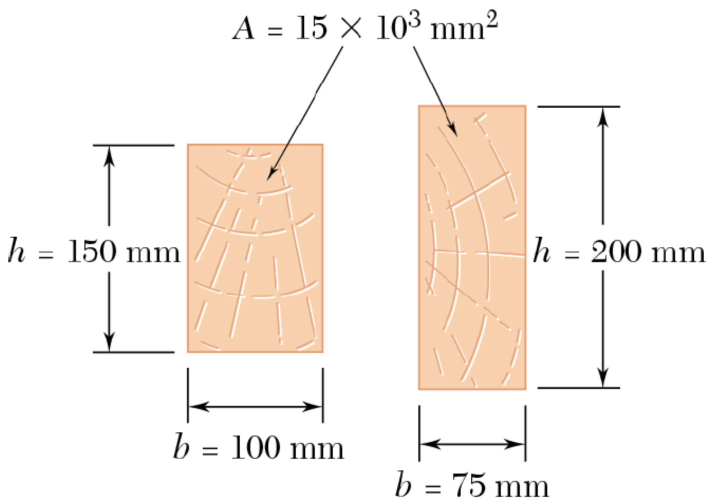
Μεγαλύτερη S υποδηλώνει δοκό με μεγαλύτερη αντίσταση σε κάμψη.

Σχεδιασμός δοκών κάμψης

Αφού $$\sigma_m = \frac{M}{S}$$

ο σχεδιασμός δοκών κάμψης, για την ελάχιστη καταπόνηση σε κάμψη, πρέπει να περιλαμβάνει την μεγαλύτερη δυνατή ροπή αντίστασης S.

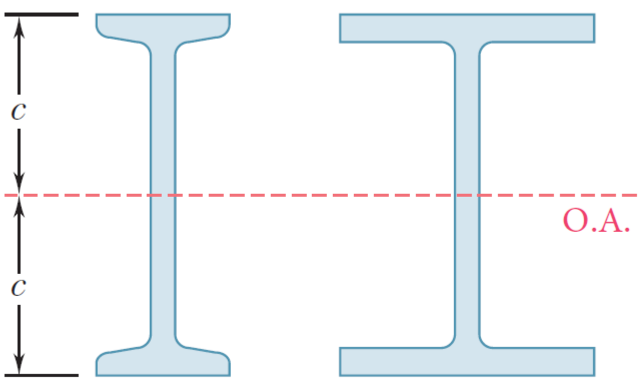
Για ορθογώνια διατομή: $$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{h/2} = \frac{1}{6}bh^2 = \frac{1}{6}Ah$$



Μεταξύ δύο δοκών με ίδια διατομή, μεγαλύτερη αντίσταση στην κάμψη επιδεικνύει εκείνη με το μεγαλύτερο ύψος

Διατομές μέγιστης αντίστασης στην κάμψη

Δοκοί H (I-beams)



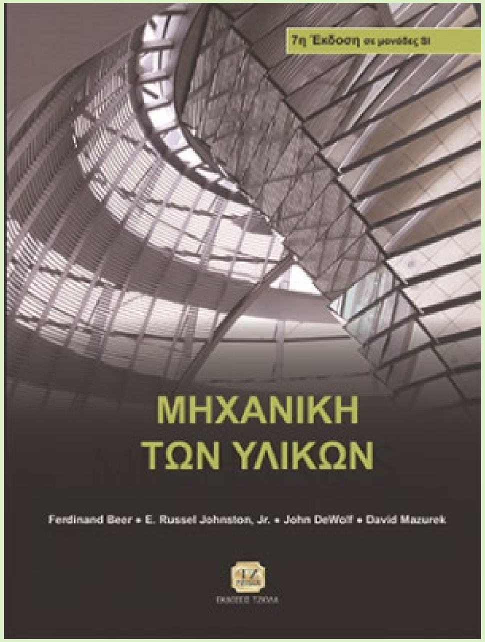
(*a*) S-beam (*b*) W-beam

Μεγάλο μέρος της διατομής βρίσκεται μακριά από το ουδέτερο επίπεδο γεγονός που οδηγεί σε υψηλές τιμές I, συνεπώς και S.

Ανακοινώσεις

Περισσότερη Μελέτη:

- **Κεφάλαιο 4**, F. Beer et al, Μηχανική των Υλικών, 7η Έκδοση, 2022



Ώρες συνεργασίας με φοιτητές: Τετάρτη 12.00-14.00