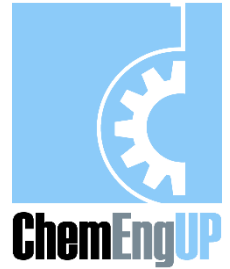




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS



CHM_582: Μηχανική Υλικών

Διάλεξη 5: Μηχανική Τάση

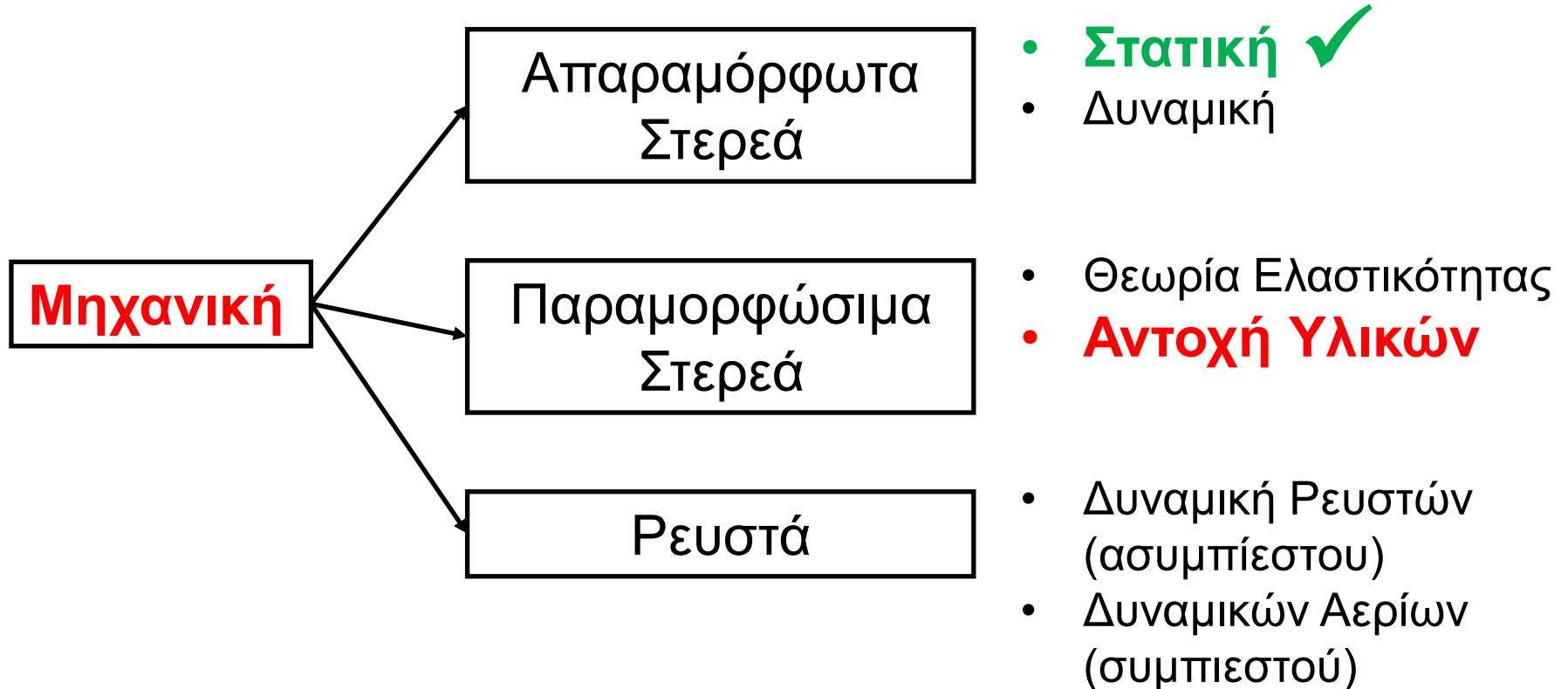
Κωνσταντίνος Γ. Δάσιος, Αναπλ. Καθηγητής
Τμήμα Χημικών Μηχανικών, Πανεπιστήμιο Πατρών
kdassios@upatras.gr

Πάτρα, Απρίλιος 2024

Μηχανική

Ο κλάδος της Φυσικής που ασχολείται με την μελέτη της συμπεριφοράς των φυσικών σωμάτων που υπόκεινται σε δυνάμεις, F , ή μετατοπίσεις, δ .

Σώματα:



Αντοχή Υλικών

Η μελέτη της **συμπεριφοράς** ενός δομικού στοιχείου ή ενός τμήματος μιας κατασκευής όταν αυτή **καταπονείται με εξωτερικά φορτία** ή φορτία που προκύπτουν από μεταβολές θερμοκρασίας, πίεσης, λόγω ατελειών κτλ.

- Αναπτύσσει τις σχέσεις που συνδέουν τα **εξωτερικά φορτία** με τις **εσωτερικές δυνάμεις** και **παραμορφώσεις** που αναπτύσσονται στο σώμα.
- Παρέχει στον μηχανικό την ικανότητα **ανάλυσης** και **σχεδιασμού** τμημάτων και στοιχείων που φέρουν φορτία (φέροντα στοιχεία - φέρουσες κατασκευές).
- Ανάλυση και σχεδιασμός δομής περιλαμβάνει τον **προσδιορισμό των τάσεων & παραμορφώσεων** που αναπτύσσονται σε αυτές.

Αντοχή Υλικών (2)

- Στηρίζεται τόσο σε **εμπειρικούς τύπους** που προέκυψαν από **πειραματικές μετρήσεις** όσο και σε ακριβείς **μαθηματικές αναλύσεις** και μαθηματικά υπολογιστικά μοντέλα.
- Χρησιμοποιείται στην επίλυση πλήθους **πρακτικών προβλημάτων** χρησιμοποιώντας απλές αναλυτικές μεθόδους.

Θα ασχοληθούμε με την **μηχανική συμπεριφορά** δομικών στοιχείων σε διάφορες καταπονήσεις (κυρίως εφελκυσμό, θλίψη, κάμψη, στρέψη).

Σκοπός Αντοχής Υλικών

*Η παροχή στοιχείων για την διαμόρφωση των κατασκευών με τον **ασφαλέστερο** και **οικονομικότερο** τρόπο με τη μέγιστη δυνατή εκμετάλλευση διαθέσιμων υλικών και μεθόδων αλλά και **αναζήτηση νέων μεθόδων** μόρφωσης κατασκευών.*

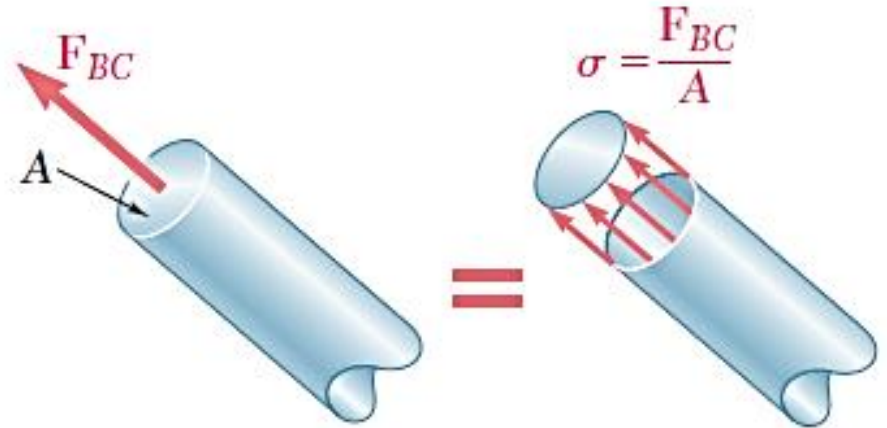
Τρόποι επίτευξης:

- Υπολογισμός **μέγιστου φορτίου** που μπορεί να δεχτεί ένα στοιχείο.
- Πρόβλεψη **κρίσιμων διατομών** που θα το οδηγούσαν σε αστοχία.
- Προσδιορισμός **ανώτατων** αλλά και των **επιτρεπτών ορίων** φόρτισης των διαφόρων υλικών σε διάφορα είδη φόρτισης.
- Καθορισμός του **προφίλ της διατομής** των φορέων αλλά και διαστασιολόγηση της με τρόπο τέτοιο ώστε να μπορούν να φέρουν **με ασφάλεια** τα φορτία που καλούνται να δεχτούν.

Η Έννοια της Τάσης

Η εσωτερική δύναμη F_{BC} κατανέμεται σε ολόκληρη την διατομή A .

Έτσι τελικά, η μέση ένταση της κατανεμημένης δύναμης, είναι ίση με τη **δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας**, F_{BC}/A , στην διατομή.



Αν η ράβδος μπορεί να φέρει το φορτίο **με ασφάλεια ή θα αστοχήσει**, εξαρτάται ξεκάθαρα από την **ικανότητα του υλικού να «αντέξει» την ένταση F_{BC}/A** του κατανεμημένου εσωτερικού φορτίου.

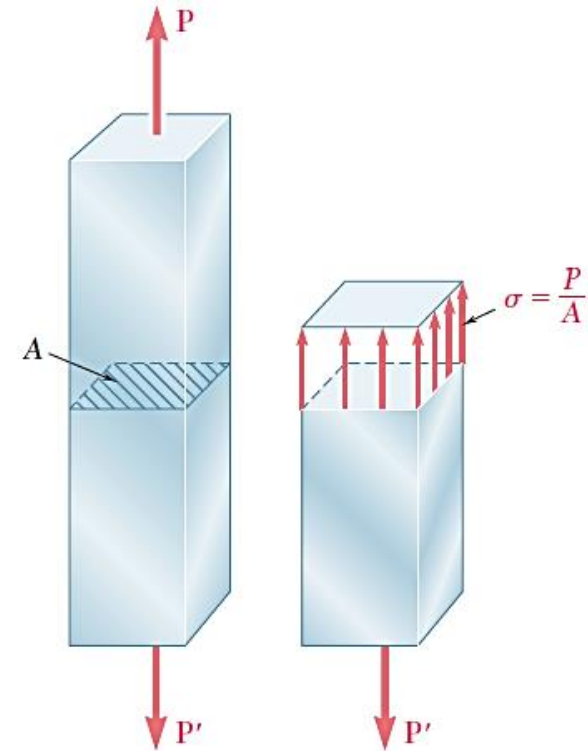
Επομένως, η αντοχή της ράβδου εξαρτάται από τη **δύναμη F_{BC}** , το **εμβαδό της επιφάνειας της διατομής, A** , και το **υλικό της ράβδου**.

Η Έννοια της Τάσης (2)

Η δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας (ή ένταση των δυνάμεων που κατανέμονται σε μια διατομή), ονομάζεται **μηχανική τάση** και προκύπτει διαιρώντας το αξονικό φορτίο P με το εμβαδό (ή επιφάνεια) διατομής, A :

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Θετικό πρόσημο: εφελκυστική τάση
Αρνητικό πρόσημο: θλιπτική τάση



Μονάδες @ SI: N/m²=Pa

$$1 \text{ kPa} = 10^3 \text{ Pa} = 10^3 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ GPa} = 10^9 \text{ Pa} = 10^9 \text{ N/m}^2$$

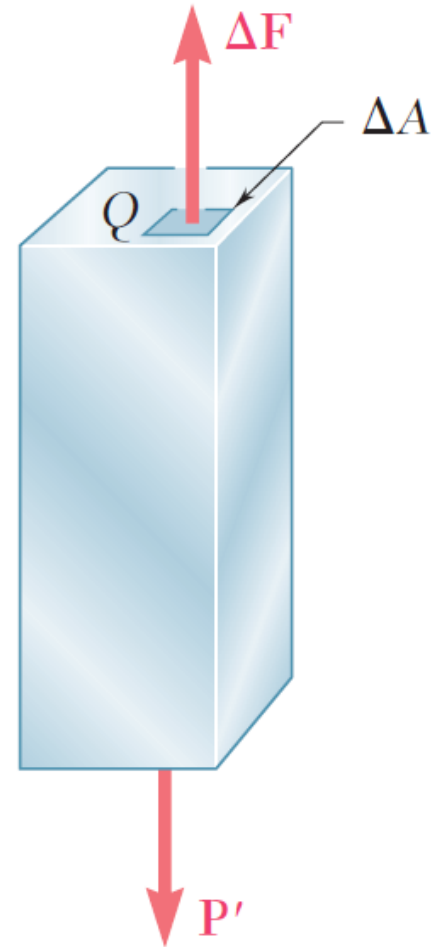
Ορισμός της Τάσης

Για να ορίσουμε την τάση σε σημείο Q της διατομής, εξετάζουμε την στοιχειώδη επιφάνεια ΔA γύρω από το σημείο.

Διαιρώντας την στοιχειώδη δύναμη ΔF με την ΔA , λαμβάνουμε την μέση τιμή της ορθής τάσης που ασκείται στην ΔA .

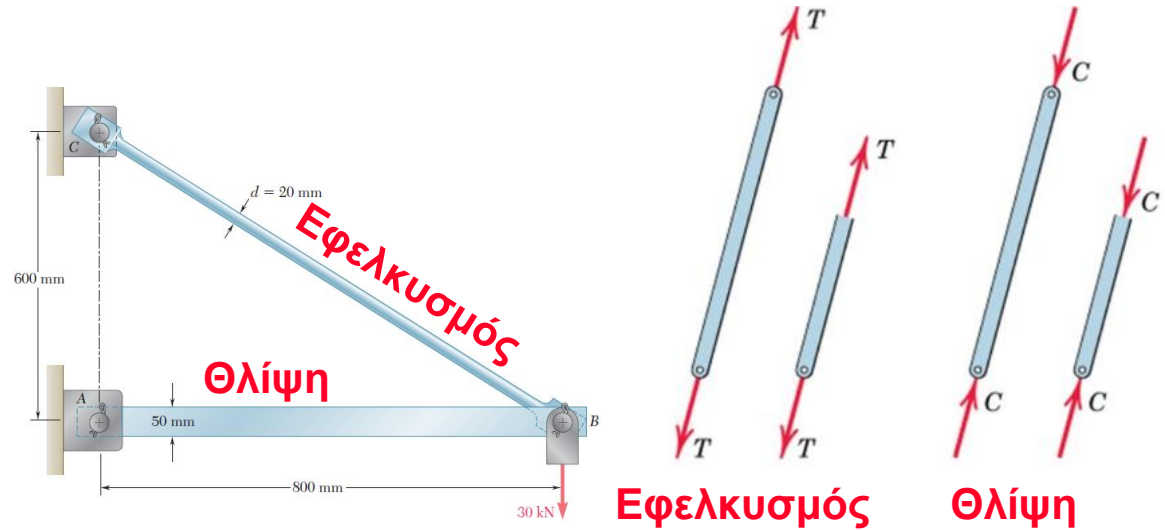
Λαμβάνοντας το όριο καθώς $\Delta A \rightarrow 0$, παίρνουμε την τάση στο σημείο Q:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$



Αξονική Φόρτιση, Ορθή Τάση

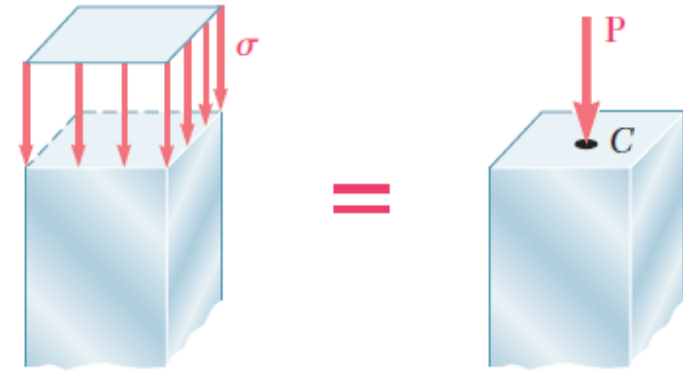
Είδαμε πως σε δικτυωτούς και ολόσωμους φορείς αναπτύσσονται αξονικές δυνάμεις.



Οι αξονικές δυνάμεις είναι κάθετες στο επίπεδο της διατομής και οι αντίστοιχες τάσεις καλούνται **ορθές τάσεις**.

Ομοιόμορφη Κατανομή Τάσεων στη Διατομή

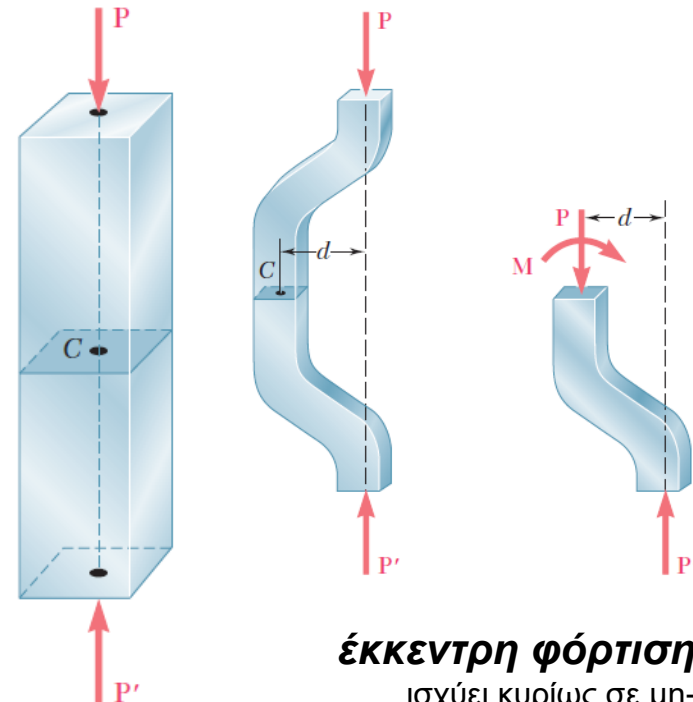
Υποθέτουμε **ομοιόμορφη κατανομή των τάσεων στην διατομή**, δηλαδή η συνισταμένη των εσωτερικών δυνάμεων εφαρμόζεται στο κεντροειδές C της διατομής.



Δηλαδή η γραμμή δράσης των συγκεντρωμένων φορτίων P και P' διέρχεται από το κεντροειδές της διατομής: **Κεντρική φόρτιση**.

Αντίθετη περίπτωση: αξονική **έκκεντρη φόρτιση**: μη-ομοιόμορφη κατανομή τάσεων στην διατομή

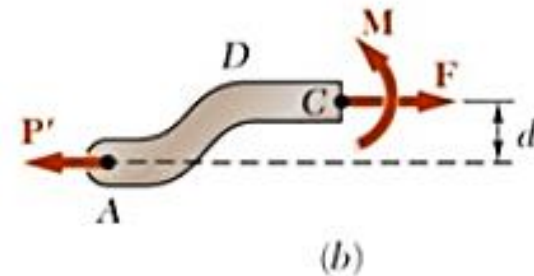
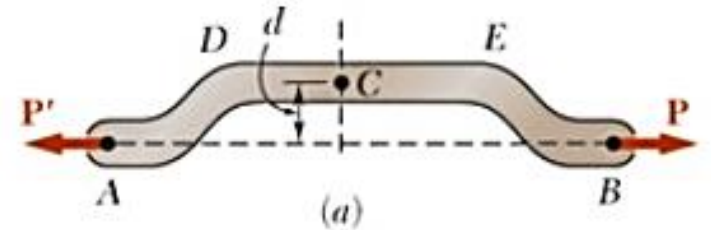
Κεντρική φόρτιση
ισχύει στους περισσότερους ευθύγραμμους δικτυωτούς και ολόσωμους φορείς



έκκεντρη φόρτιση
ισχύει κυρίως σε μη-ευθύγραμμους φορείς

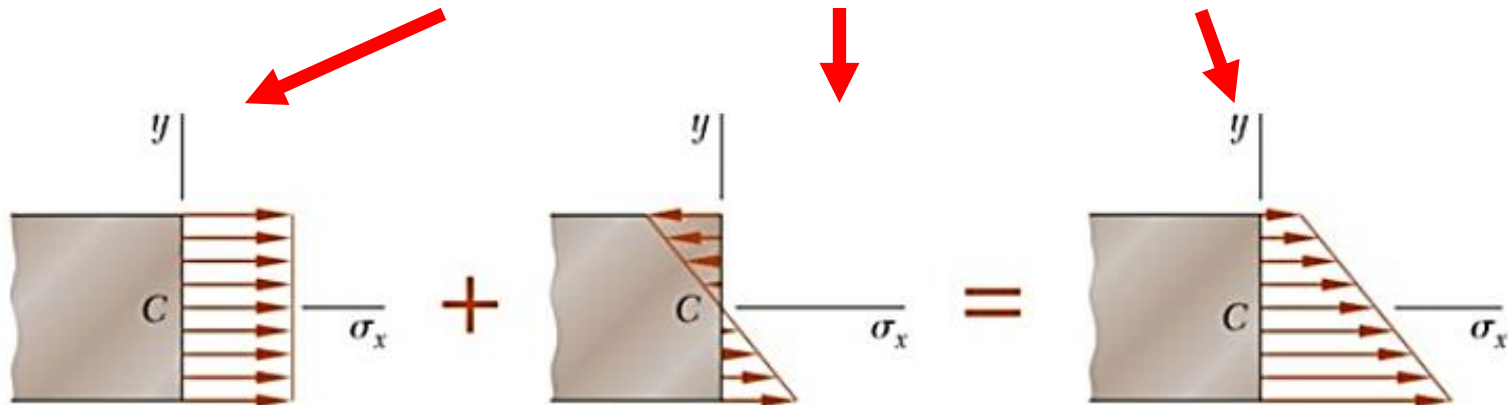
Παράδειγμα ανομοιόμορφης κατανομής τάσης

Η καμπτική ροπή προκαλεί **συνεισφορά σε ορθή τάση** που μεταβάλλεται με τη θέση y κατά μήκος της διατομής



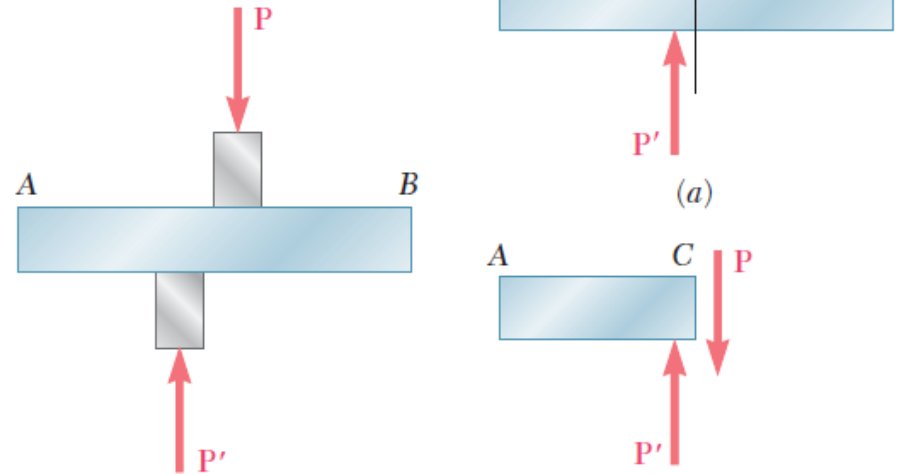
$$F = P$$
$$M = Pd$$

$$\sigma_x = (\sigma_x)_{centric} + (\sigma_x)_{bending} = \frac{P}{A} - \frac{My}{I}$$



Διατμητική Τάση

Όταν σε φορέα ασκούνται **εγκάρσιες** δυνάμεις P και P' , στο εσωτερικό του αναπτύσσονται **διατμητικές** ή **τέμνουσες δυνάμεις**.



Αν P η συνισταμένη των δυνάμεων, η **διατμητική τάση** προκύπτει ως το πηλίκο της **διατμητικής δύναμης P** με το **εμβαδόν A** της διατομής:

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A}$$

Μέση τιμή ως προς ολόκληρη τη διατομή:
Σε αντίθεση με τις ορθές, η **κατανομή** των διατμητικών τάσεων στην διατομή **δεν είναι ομοιόμορφη**.

Που Συναντάμε Διάτμηση

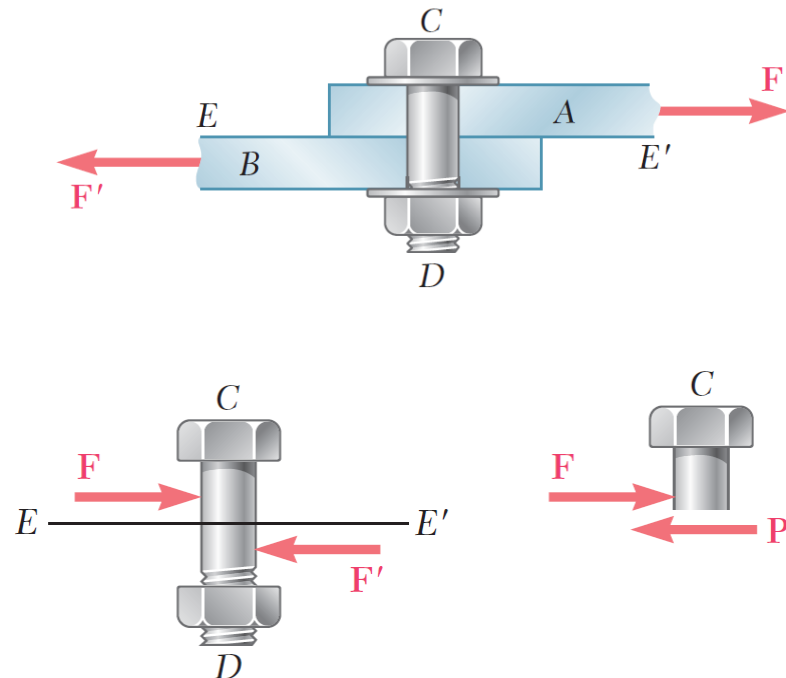
Διατμητικές τάσεις απαντώνται συνήθως σε **συνδέσεις διαφόρων δομικών μελών** και στοιχείων μηχανών (π.χ. μπουλόνια, πείροι, πριτσίνια).

Για παράδειγμα, εάν δύο πλάκες A και B, που συνδέονται με μπουλόνι CD, υπόκεινται σε **εφελκυστική δύναμη F**, θα αναπτυχθούν **διατμητικές τάσεις** στο τμήμα του μπουλονιού που αντιστοιχεί στο επίπεδο EE'.

Εισαγωγή τομής στο EE' αποκαλύπτει ότι η **διάτμηση P** στην τομή είναι ίση με **F**. Η μέση διατμητική τάση στο τμήμα είναι:

$$\tau_{\text{ave}} = \frac{P}{A} = \frac{F}{A}$$

Μονότμητος κοχλίας



Διατμητικές Τάσεις (2)

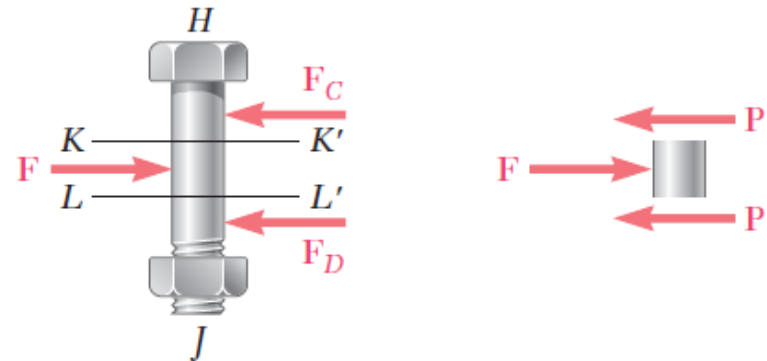
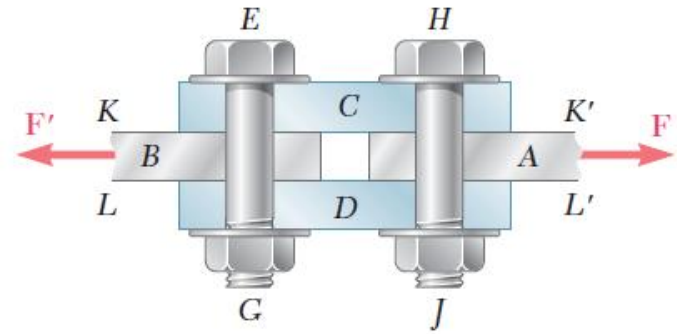
Σε δίτμητο κοχλία έχουμε **διπλή διάτμηση**. Οι πλάκες μάτισης C και D χρησιμοποιούνται για τη σύνδεση των πλακών A και B.

πχ. στο μπουλόνι HJ, διάτμηση θα σημειωθεί σε **καθένα από τα δύο επίπεδα** KK' και LL' (ομοίως στο μπουλόνι EG).

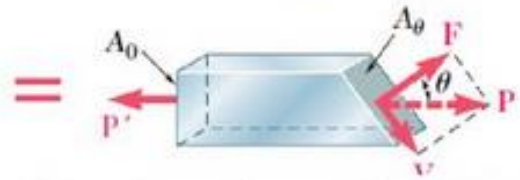
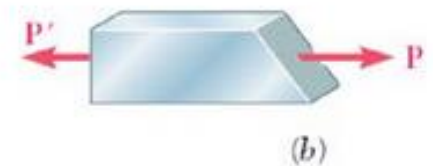
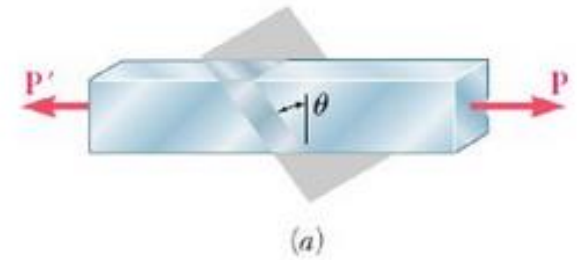
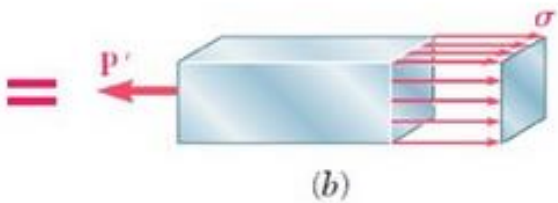
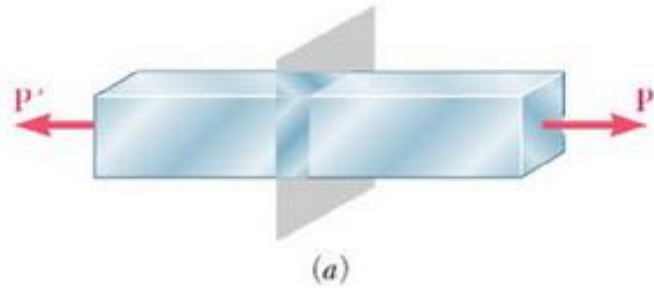
Για να προσδιορίσουμε τη **μέση διατμητική τάση** σε κάθε επίπεδο, σχεδιάζουμε ΔΕΣ του μπουλονιού HJ και του τμήματος που βρίσκεται μεταξύ των 2 επιπέδων.

Παρατηρούμε ότι διάτμηση (P) = $F/2$, άρα $\tau_{ave} = \frac{P}{A} = \frac{F/2}{A} = \frac{F}{2A}$

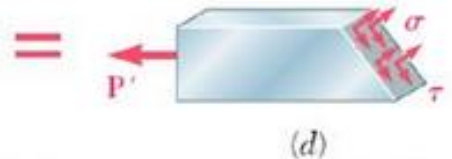
Δίτμητος κοχλίας



Τάσεις σε κεκλιμένο επίπεδο υπό αξονική φόρτιση



$$F = P \cos \theta \quad V = P \sin \theta \quad A_\theta = A_0 / \cos \theta$$



$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \quad \tau = \frac{V}{A_\theta}$$

Αξονικές δυνάμεις

Θεώρηση στο κεκλιμένο επίπεδο

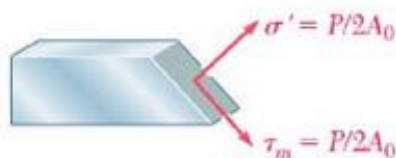
Τάσεις σε κεκλιμένο επίπεδο υπό αξονική φόρτιση (2)



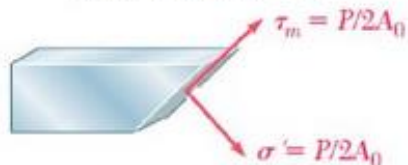
(a) Axial loading



(b) Stresses for $\theta = 0$



(c) Stresses for $\theta = 45^\circ$



(d) Stresses for $\theta = -45^\circ$

$$F = P \cos \theta \quad V = P \sin \theta \quad A_\theta = A_0 / \cos \theta$$

$$\sigma = \frac{F}{A_\theta} \quad \tau = \frac{V}{A_\theta}$$

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \cos^2 \theta \quad \tau = \frac{P}{A_0} \sin \theta \cos \theta$$

$$\sigma_m = \frac{P}{A_0} \quad \tau_m = \frac{P}{A_0} \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{P}{2A_0}$$

$$\sigma' = \frac{P}{A_0} \cos^2 45^\circ = \frac{P}{2A_0}$$

Γενικευμένη Φόρτιση: Τάσεις

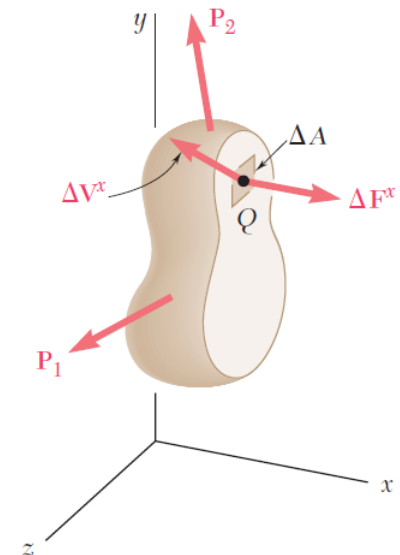
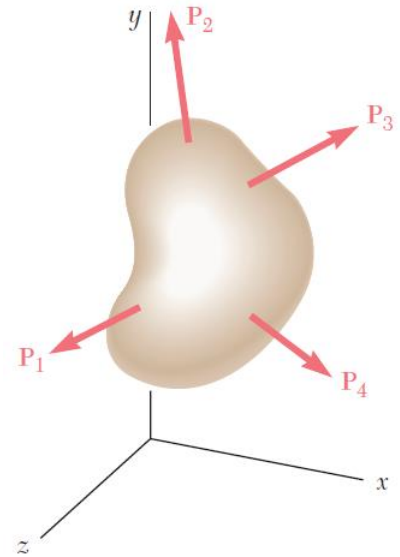
Τα περισσότερα στοιχεία μηχανών και δομικά μέλη δεν καταπονούνται μόνο σε αξονικές και εγκάρσιες φορτίσεις αλλά και σε πιο **σύνθετες φορτίσεις**.

Έστω πχ το γενικευμένο σώμα που υποβάλλεται σε πολλά φορτία P_1, P_2 , κ.λπ.

Για την κατανόηση της **εντατικής (τασικής) κατάστασης** που δημιουργείται από αυτά σε **σημείο Q** του σώματος, φέρουμε τομή στο Q, παράλληλα στο yz.

Το αριστερό τμήμα υπόκειται σε κάποια από τα αρχικά φορτία και σε **ορθές και διατμητικές δυνάμεις** στην **επιφάνεια της τομής**.

Έστω ΔF^x και ΔV^x , οι ορθές και διατμητικές δυνάμεις σε στοιχειώδη επιφάνεια ΔA κάθετη στον άξονα x, γύρω από το Q.



Γενικευμένη Φόρτιση: Τάσεις (2)

Η ορθή δύναμη είναι σαφώς καθορισμένη. Η διατμητική είναι συνεπίπεδη με το επίπεδο τομής αλλά τυχαίας διεύθυνσης.

Την αναλύουμε σε συνιστώσες ΔV_x^x και ΔV_y^x παράλληλες στους άξονες x και y αντίστοιχα.

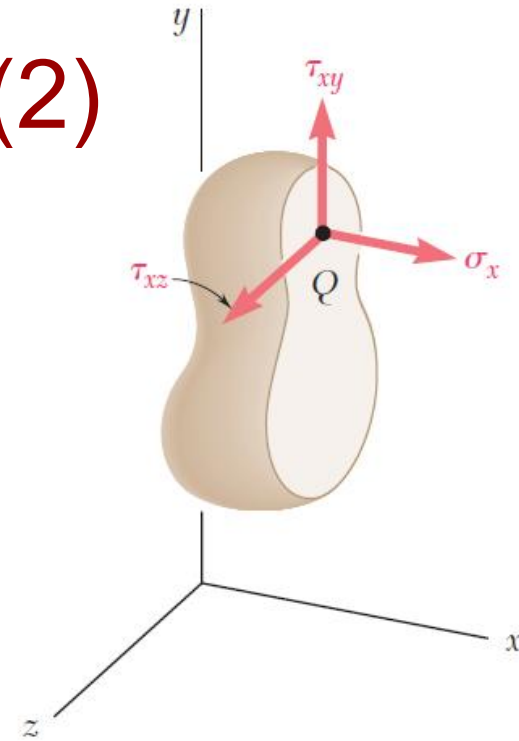
Διαιρώντας με ΔA και παίρνοντας το όριο $\Delta A \rightarrow 0$, **ορίζουμε τις τρεις συνιστώσες της τάσης:**

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^x}{\Delta A}$$

$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_y^x}{\Delta A} \quad \tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta V_z^x}{\Delta A}$$

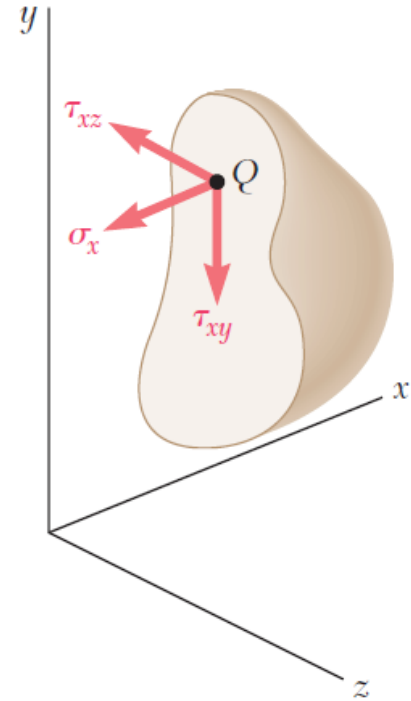
1ος δείκτης: δείχνει το άξονα **κάθετα** στον οποίο ασκούνται οι τάσεις
2ος δείκτης: δείχνει κατεύθυνση της συνιστώσας

- Οι ορθές τάσεις σ_x είναι **θετικές** αν τα βέλη δείχνουν προς τη θετική φορά του άξονα x
- Οι διατμητικές τ_{xy} και τ_{xz} είναι **θετικές** αν τα βέλη δείχνουν προς τις θετικές φορές των αξόνων y και z αντίστοιχα.



Γενικευμένη Φόρτιση: Τάσεις (3)

Εκτελώντας την ανάλυση για το **τμήμα** του σώματος **δεξιά της τομής**, θα λαμβάναμε ίδια μεγέθη για τα σ_x , τ_{xy} και τ_{xz} αλλά αντίθετες διευθύνσεις.



Εκτελώντας την ίδια ανάλυση για τομή παράλληλη στο επίπεδο **zx**, θα ορίζαμε τις συνιστώσες σ_y , τ_{yz} και τ_{yx} της εντατικής κατάστασης της γενικευμένης φόρτισης.

Εκτελώντας μια τρίτη φορά την ίδια ανάλυση για τομές παράλληλες στο επίπεδο **xy**, θα ορίζαμε τις συνιστώσες σ_z , τ_{zx} και τ_{zy} της εντατικής κατάστασης της γενικευμένης φόρτισης

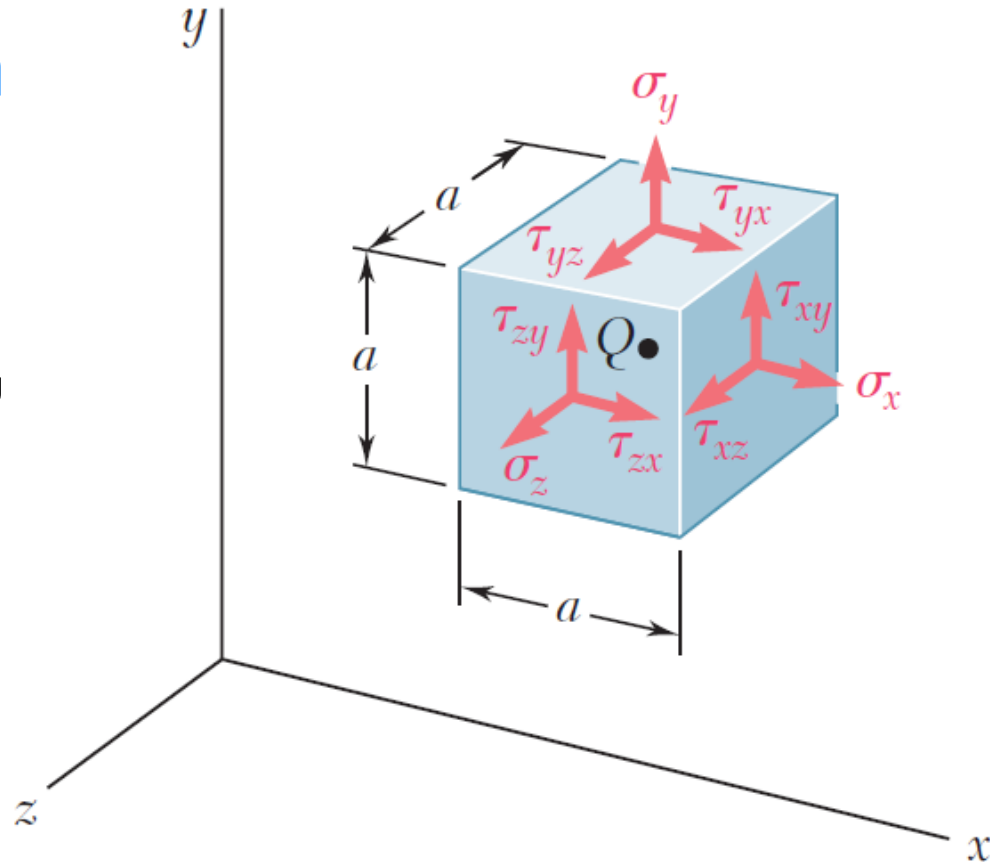
Απεικόνιση Γενικευμένης Φόρτισης

Για να **απεικονίσουμε** την **πλήρη εντατική κατάσταση στο σημείο Q**, θεωρούμε **διαφορικό κύβο πλευράς a** , με κέντρο το Q. Οι τάσεις στο Q απεικονίζονται ως τάσεις που δρουν στις 6 έδρες του κύβου.

9 τασικές συνιστώσες:

3 ορθές: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

6 διατμητικές: $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$



Μόνο 3 έδρες είναι ορατές. Στις 3 μη-ορατές έδρες δρουν ίσες και αντίθετες συνιστώσες τάσης.

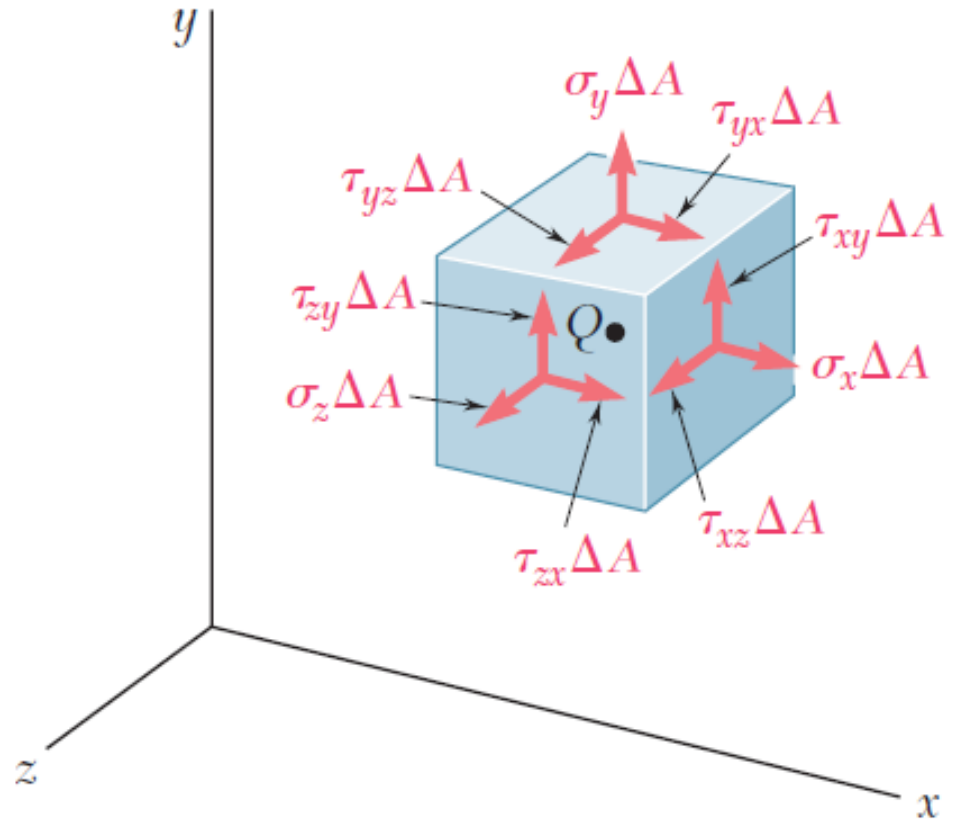
Σχέσεις μεταξύ Διατμητικών Τάσεων

Στο ΔΕΣ του διαφορικού κύβου γύρω από το σημείο Q, οι **ορθές και διατμητικές δυνάμεις** που δρουν στις έδρες προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας τις τάσεις με την επιφάνεια της έδρας, ΔA .

Η **ισορροπία δυνάμεων** ικανοποιείται από τις ίσες και αντίθετες συνιστώσες που δρουν στις μη-ορατές έδρες.

Η **ισορροπία ροπών** απαιτεί:

$$\Sigma M_x=0, \quad \Sigma M_y=0, \quad \Sigma M_z=0$$



Σχέσεις μεταξύ Διατμητικών Τάσεων (2)

Εξετάζοντας μια **προβολή στο επίπεδο xy** παρατηρούμε πως οι μόνες δυνάμεις με **μη-μηδενικές ροπές** ως προς τον άξονα z είναι οι διατμητικές δυνάμεις.

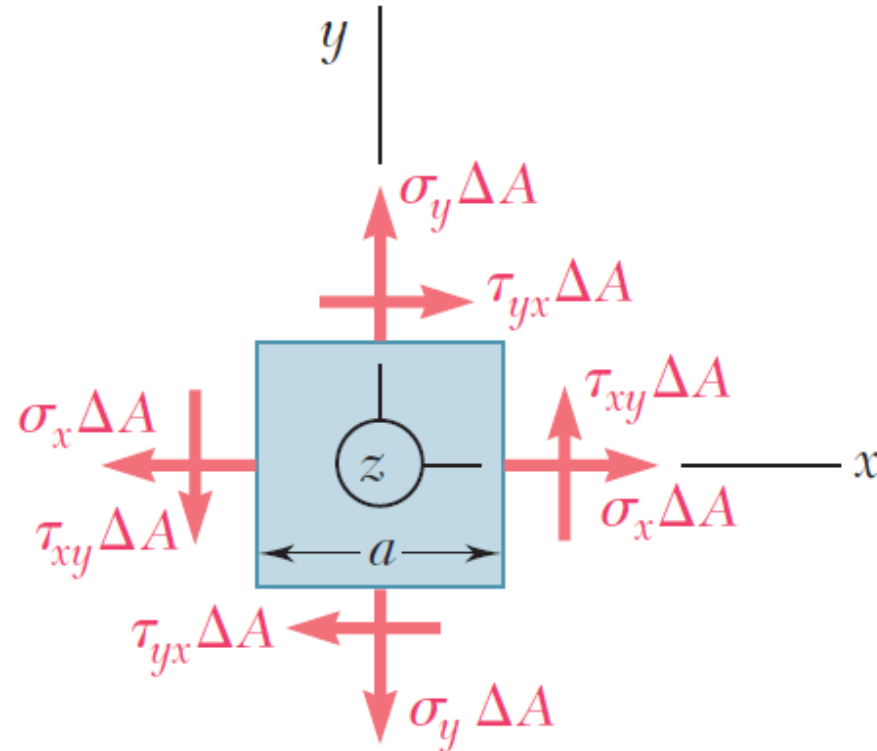
Αυτές, δε, εμφανίζονται ως 2 ζεύγη:

- το ένα προκαλεί αριστερόστροφη (θετική) ροπή $(\tau_{xy}\Delta A)\alpha$
- το άλλο προκαλεί δεξιόστροφη (αρνητική) ροπή $-(\tau_{yx}\Delta A)\alpha$

Συνεπώς η ισορροπία ροπών ως προς z :

$$+\uparrow \sum M_z = 0: \quad (\tau_{xy} \Delta A)\alpha - (\tau_{yx} \Delta A)\alpha = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$



Σχέσεις μεταξύ Διατμητικών Τάσεων (3)

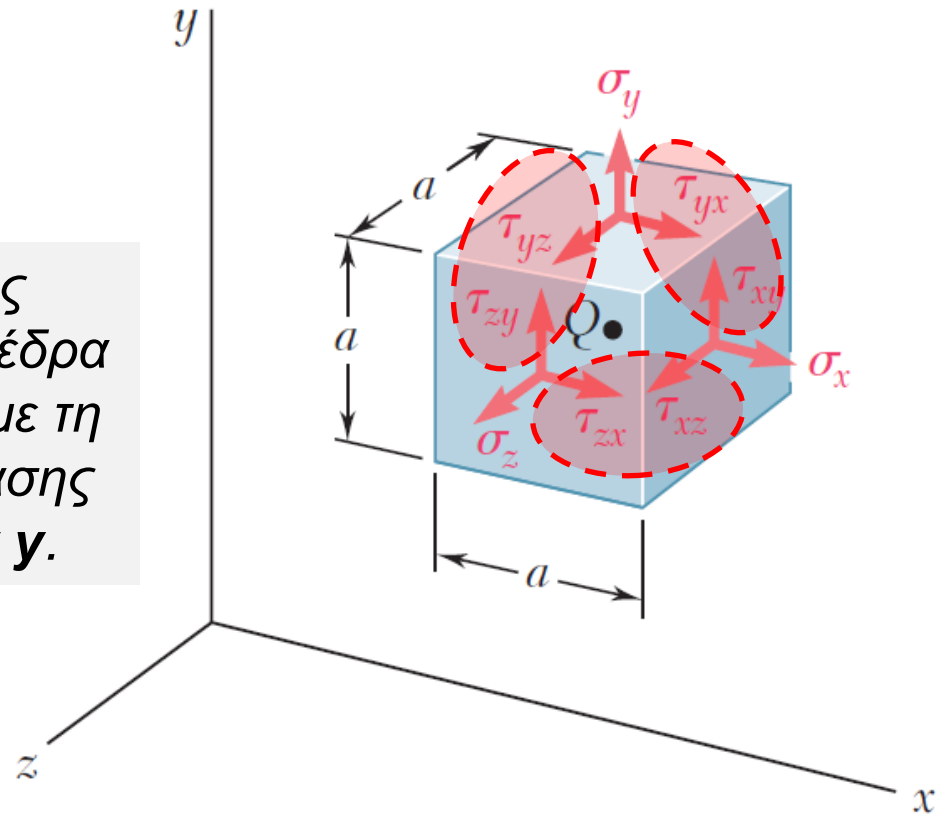
$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

Δείχνει ότι η **y-συνιστώσα** της διατμητικής τάσης που δρα στην έδρα **κάθετη στον άξονα x**, είναι ίση με τη **x-συνιστώσα** της διατμητικής τάσης στην έδρα **κάθετη στον άξονα y**.

Από την ισορροπία ροπών ως προς x και y, παίρνουμε με παρόμοιο τρόπο:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$



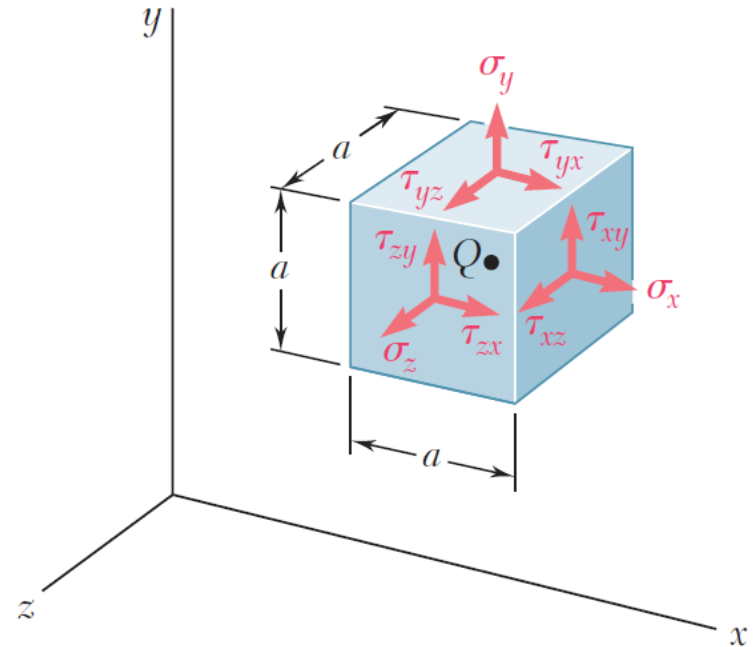
Πρόταση Cauchy: οι διατμητικές τάσεις σε 2 κάθετα επίπεδα είναι ίσες μεταξύ τους & κατευθύνονται και οι δυο προς την κοινή ακμή των επιπέδων, ή απομακρύνονται απ' αυτήν.

Γενικευμένη Φόρτιση: Συμπεράσματα

1. Για να ορίσουμε την **πλήρη εντατική κατάσταση σε τυχαίο σημείο Q**, απαιτούνται 6 (και όχι 9) συνιστώσες τάσης:

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx},$$

2. Η διάτμηση **δεν μπορεί να εμφανίζεται σε ένα μόνο επίπεδο**, ίση διατμητική τάση θα ασκείται και σε δεύτερο επίπεδο, κάθετο στο αρχικό

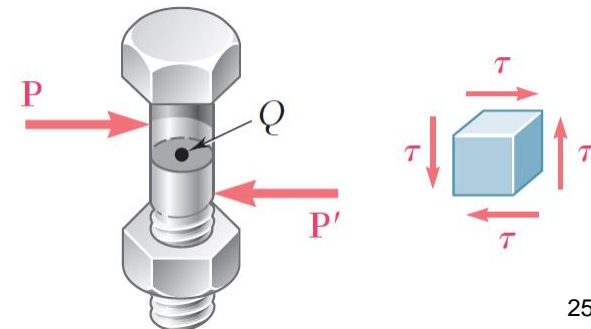


$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

π.χ. στο μπουλόνι που καταπονείται σε διάτμηση, στο διαφορικού όγκου σημείο Q, ζεύγη διατμητικών τάσεων εμφανίζονται παράλληλα αλλά και κάθετα στην **P-P'**



Αρχές Σχεδιασμού Κατασκευών

*Σε εφαρμογές μηχανικού, ο προσδιορισμός των τάσεων δεν είναι αυτοσκοπός. Η γνώση τους χρησιμοποιείται στο σχεδιασμό κατασκευών και μηχανών που μπορούν να εκτελούν συγκεκριμένη λειτουργία με **οικονομία και ασφάλεια**.*

Χρήσιμα στοιχεία:

1. Το **μέγιστο φορτίο** κάθε δομικού μέλους ή στοιχείου μηχανής είναι το φορτίο στο οποίο αυτό αναμένεται να αστοχήσει.
2. Υπολογίζεται από την **μέγιστη τάση** ή **αντοχή του υλικού** που χρησιμοποιείται, όπως αυτή προσδιορίζεται με **πειραματικές δοκιμές** σε δείγματα αυτού του υλικού.
3. Το μέγιστο φορτίο πρέπει να είναι **σημαντικά μεγαλύτερο** από το **επιτρεπόμενο φορτίο**, δηλ. το φορτίο που επιτρέπεται να φέρει το μέλος ή το στοιχείο υπό κανονικές συνθήκες λειτουργίας.

Αρχές Σχεδιασμού Κατασκευών (2)

Ο λόγος μέγιστου προς επιτρεπόμενο φορτίο ονομάζεται **συντελεστής ασφαλείας**:

$$\text{Συντελεστής ασφαλείας} = \Sigma.A. = \frac{\text{μέγιστο φορτίο}}{\text{επιτρεπτό φορτίο}}$$

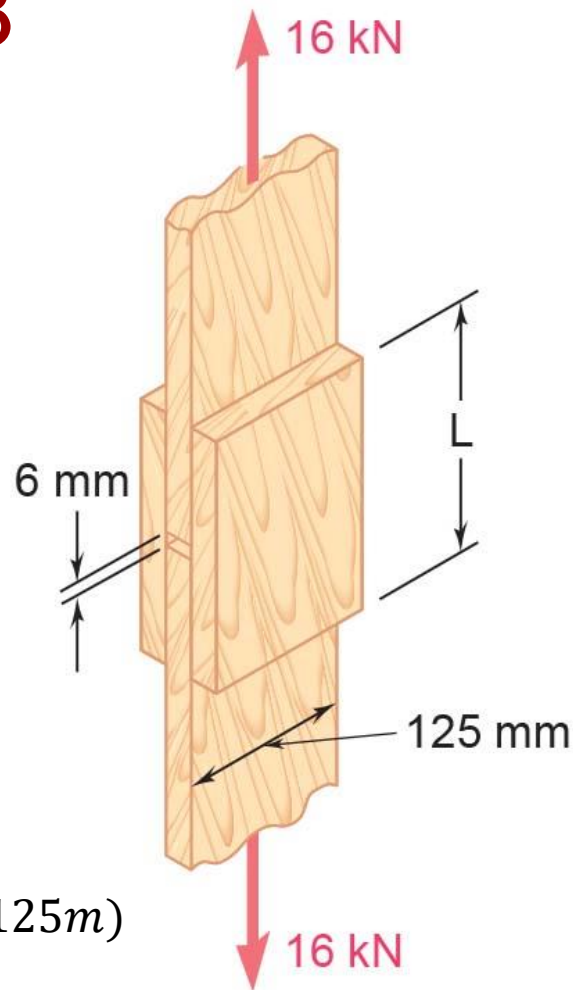
Η επιλογή του ΣΑ για διάφορες εφαρμογές είναι ένα από τα σημαντικότερα καθήκοντα του μηχανικού.

- Πολύ μικρός ΣΑ καθιστά την πιθανότητα αστοχίας απαράδεκτα μεγάλη.
- Πολύ μεγάλος ΣΑ, ο σχεδιασμός επιβαρύνεται οικονομικά χωρίς να είναι λειτουργικός.

Αρχές επιλογής Σ.Α.: σελ. 35 συγγράμματος

Πρόβλημα 1.43

Δύο ξύλινα μέλη συγκρατούνται μεταξύ τους με δύο πλάκες από κόντρα πλακέ που είναι συγκολλημένες στις επιφάνειες επαφής. Γνωρίζοντας ότι το διάκενο μεταξύ των άκρων των μελών είναι 6 mm και ότι η οριακή διατμητική τάση (διατμητική αντοχή) στη συγκόλληση είναι 2.5 MPa, προσδιορίστε το απαιτούμενο μήκος L για το οποίο ο Σ.Α. είναι ίσος με 2.75 για τη φόρτιση που φαίνεται στο σχήμα.



ΛΥΣΗ:

$$\tau_{\text{επιτρ}} = \frac{2.5 \text{ MPa}}{2.75} = 0.9090 \text{ MPa}$$

$$\text{Επιφάνεια μιας πλευράς επαφής: } A = \frac{L - 0.006\text{m}}{2} (0.125\text{m})$$

Για 2 πλευρές επαφής:

$$\tau_{\text{επιτρ}} = \frac{P}{2A} \Rightarrow 0.9090 \times 10^6 = \frac{16 \times 10^3}{(L - 0.006\text{m})0.125} \Rightarrow L = 0.14680\text{m}$$



Γιατί /2 ;

Πρόβλημα 1.43 (2)

Ποιος θα ήταν ο Σ.Α. εάν $L=180$ mm

ΛΥΣΗ:

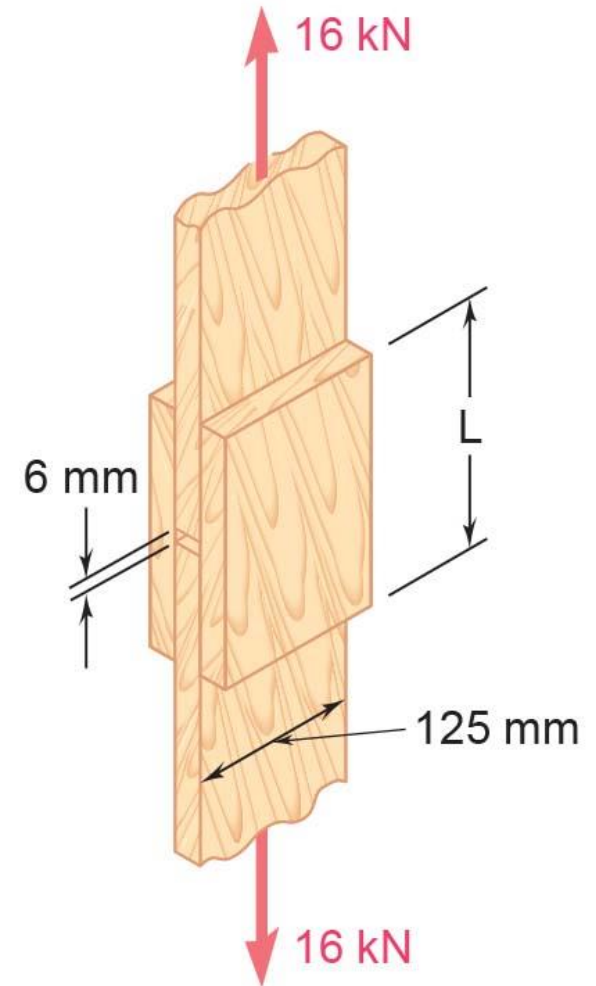
Επιφάνεια μιας πλευράς επαφής:

$$A = \frac{0.180 - 0.006\text{m}}{2} (0.125\text{m}) = 10.8750 \times 10^{-3}\text{m}^2$$

Για 2 πλευρές επαφής:

$$\tau_{\text{επιτρ}} = \frac{P}{2A} = \frac{16 \times 10^3\text{N}}{2(10.8750 \times 10^{-3}\text{m}^2)} = 0.73563\text{ MPa}$$

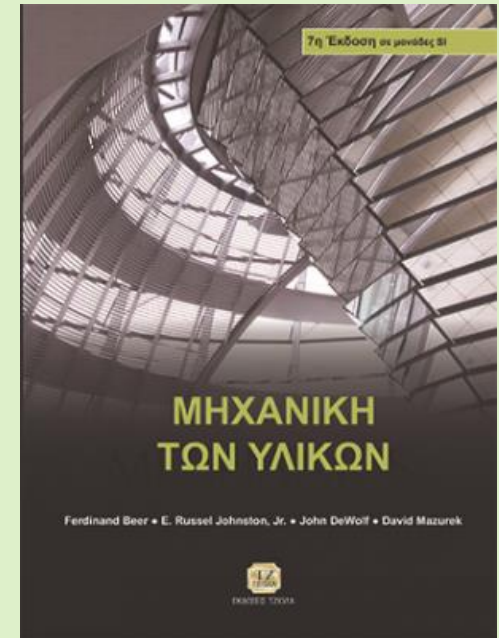
$$\Sigma. \text{Α.} = \frac{\tau_{\text{max}}}{\tau_{\text{επιτρ}}} = \frac{2.5\text{ MPa}}{0.73563\text{ MPa}} = 3.40$$



Ανακοινώσεις

Περισσότερη Μελέτη:

- Κεφάλαιο 1, F. Beer et al, Μηχανική των Υλικών, 7^η Έκδοση, 2022



Ώρες συνεργασίας με φοιτητές: Τετάρτη 12.00-14.00