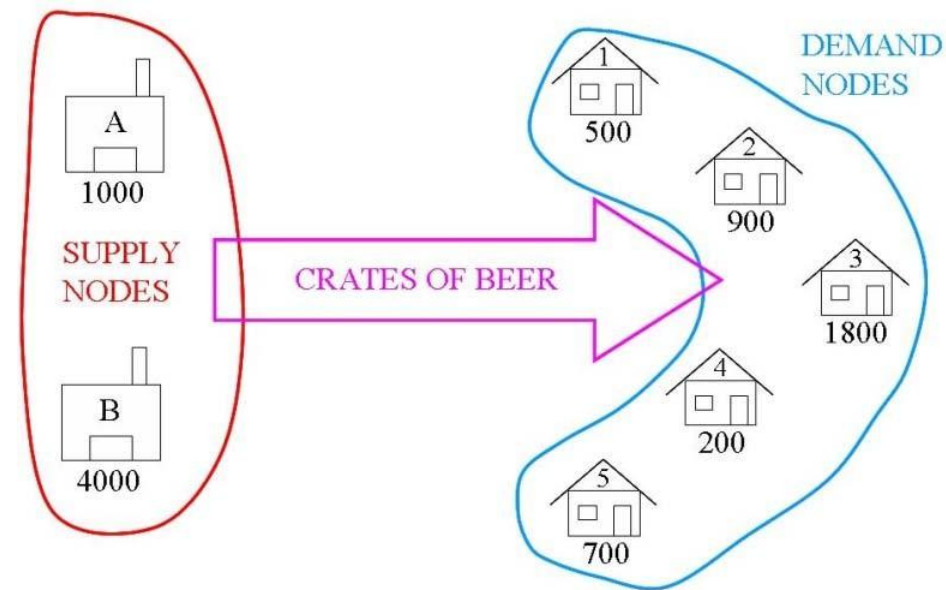


Προβλήματα Μεταφορών



Προβλήματα Μεταφορών

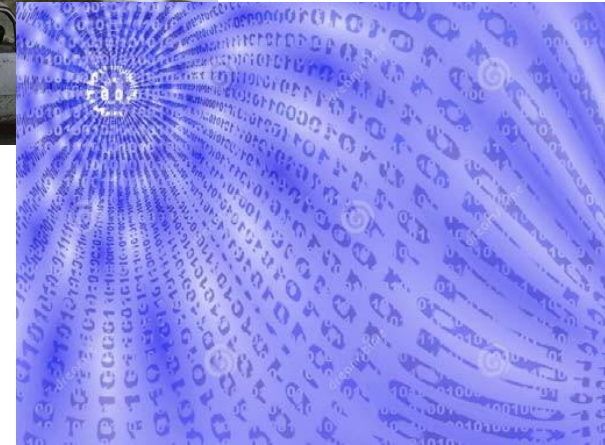
- Αφορούν σε μεταφορά

- Ατόμων
- Αγαθών
- Πληροφοριών
- Υπηρεσιών



- Βασικά Προβλήματα:

- Πρόβλημα Μεταφοράς (Transportation Problem)
- Πρόβλημα Αντιστοίχισης (Assignment Problem)
- Πρόβλημα Διαμετακόμισης (Transshipment Problem)



- Μπορούν να διατυπωθούν και επιλυθούν ως

Προγράμματα Γραμμικού Προγραμματισμού

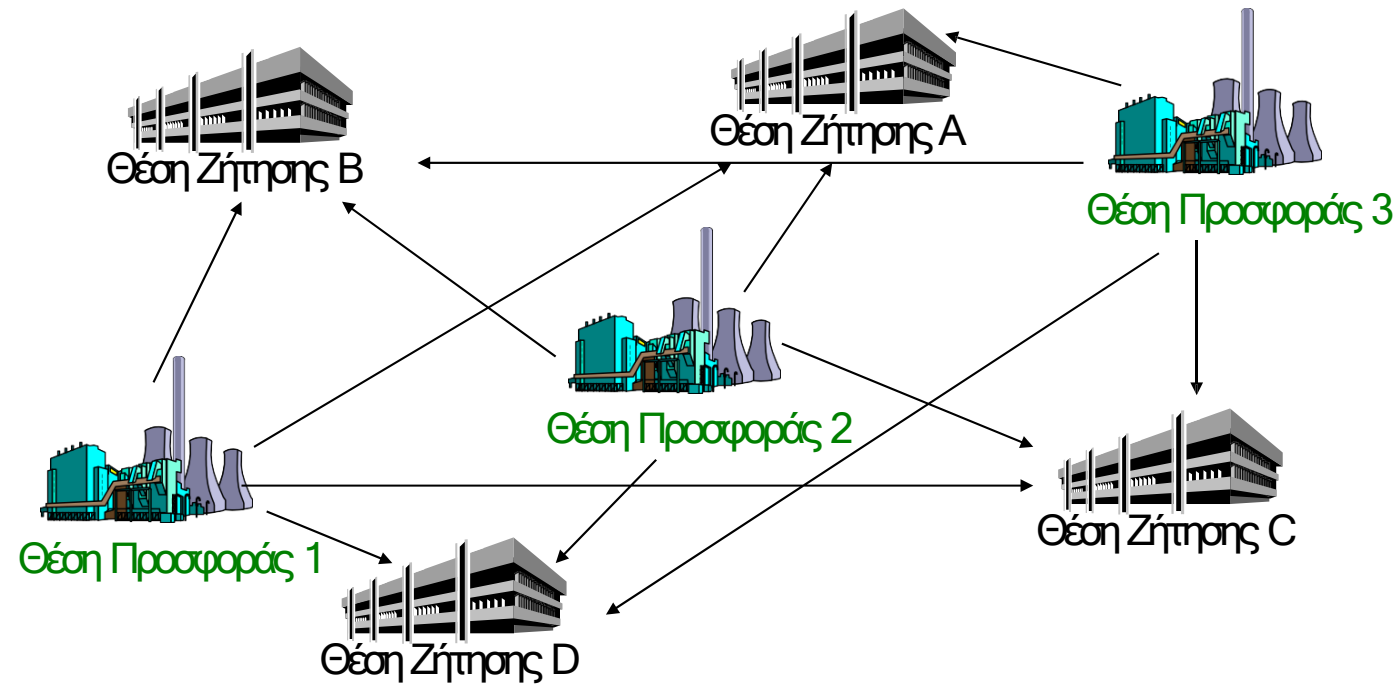
- Ειδικές Τεχνικές επίλυσης
- Γενικοί Επιλυτές (Simplex, Branch-and-Bound)

Πρόβλημα Μεταφοράς

- Πρόβλημα «διανομής» αγαθών (ή υπηρεσιών)
 - Ποσότητες αγαθών σε θέσεις προσφοράς (supply locations)
 - Απαιτήσεις αγαθών σε θέσεις ζήτησης (demand locations)
 - **Βέλτιστη διανομή αγαθών**
- Επιδιωκόμενα Αποτελέσματα
 - Ποσότητες από θέσεις προσφοράς σε θέσεις ζήτησης
 - Συνολικό κόστος διανομής
 - Επιμέρους κόστος διανομής ανά θέση προσφοράς και ζήτησης
- Εφαρμογή
 - Ανάλυση εναλλακτικών θέσεων προσφοράς και ζήτησης.

Πρόβλημα Μεταφοράς

Ελαχιστοποίηση Κόστους Μεταφοράς ανάμεσα σε θέσεις προσφοράς και ζήτησης



Πρόβλημα μεταφοράς

- Τα προβλήματα μεταφοράς ανακύπτουν συχνά σε περιπτώσεις σχεδιασμού διανομής αγαθών και υπηρεσιών από τα σημεία προσφοράς προς τα σημεία ζήτησης (πώλησης)
- Συνήθως, οι διαθέσιμες ποσότητες προϊόντων σε κάθε σημείο προσφοράς (πηγή) είναι περιορισμένες και οι ζητούμενες ποσότητες σε κάθε σημείο ζήτησης (προορισμός) είναι δεδομένες
- Στόχος των προβλημάτων μεταφοράς είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς των αγαθών από τις πηγές προς τους προορισμούς

Πρόβλημα Μεταφοράς

- Δεδομένα

Μοναδιαίο κόστος μεταφοράς ανάμεσα σε θέσεις προσφοράς και ζήτησης

	Αποθήκη			
Εργοστάσιο	A	B	C	D
1	4	7	7	1
2	12	3	8	8
3	8	10	16	5

Το κόστος μεταφοράς μιας (1) μονάδας από το εργοστάσιο 1 στην αποθήκη B είναι ίσο με 7.

Πρόβλημα Μεταφοράς

- Δεδομένα

Προσφερόμενες ποσότητες αγαθών

Απαιτούμενες ποσότητες αγαθών



Εργοστ.	Προσφορά
1	100
2	200
3	150
Total	450



	Αποθήκη				
	A	B	C	D	Total
Ζήτηση	80	90	12	16	45
			0	0	0

Πρόβλημα Μεταφοράς

- Δεδομένα

	Αποθήκη					
Εργοστ.	A	B	C	D	Προσφορ.α	
1	4	7	7	1	100	
2	12	3	8	8	200	Σύνολ.
3	8	10	16	5	150	Προσφ.
Ζήτηση	80	90	120	160		450
			Συνολική Ζήτηση		450	

Πρόβλημα Μεταφοράς

- Ποιες είναι οι μεταβλητές του προβλήματος;
- Ποια η αντικειμενική συνάρτηση;
- Τι περιορισμοί υπάρχουν;

Πρόβλημα Μεταφοράς

Γενική Μαθηματική Διατύπωση

$$\text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \quad (\text{Συνολικό Κόστος Μεταφοράς})$$

$$\text{s.t. } \sum_j x_{ij} \leq s_i \quad \text{για κάθε θέση προσφοράς } i \text{ (περιορισμοί προσφοράς)}$$

$$\sum_i x_{ij} = d_j \quad \text{για κάθε θέση ζήτησης } j \text{ (περιορισμοί ζήτησης)}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{για κάθε } i \text{ και } j \text{ (θετικές τιμές)}$$

Πρόβλημα μεταφοράς

- Θα εξετάσουμε το πρόβλημα μεταφοράς της Foster Generators
- Το πρόβλημα αναφέρεται στη μεταφορά προϊόντων από τρία εργοστάσια προς τέσσερα κέντρα διανομής
- Η εταιρία κατέχει τρία εργοστάσια, στο Cleveland, στο Bedford και στο York
- Η δυναμικότητα παραγωγής ως προς ένα συγκεκριμένο τύπο προϊόντος για το προσεχές τρίμηνο είναι η εξής:

Πηγή	Εργοστάσιο	Δυναμικότητα παραγωγής (μονάδες)
1	Cleveland	5.000
2	Bedford	6.000
3	York	2.500
Σύνολο		13.500

Πρόβλημα μεταφοράς

- Η διανομή των προϊόντων πραγματοποιείται από τέσσερα περιφερειακά κέντρα διανομής (Boston, Chicago, St. Louis και Lexington)
- Εκτιμάται ότι η ζήτηση ανά κέντρο διανομής για το προσεχές τρίμηνο είναι:

Προορισμός	Κέντρο διανομής	Εκτίμηση ζήτησης (μονάδες)
1	Boston	6.000
2	Chicago	4.000
3	St. Louis	2.000
4	Lexington	1.500
Σύνολο		13.500

Πρόβλημα μεταφοράς

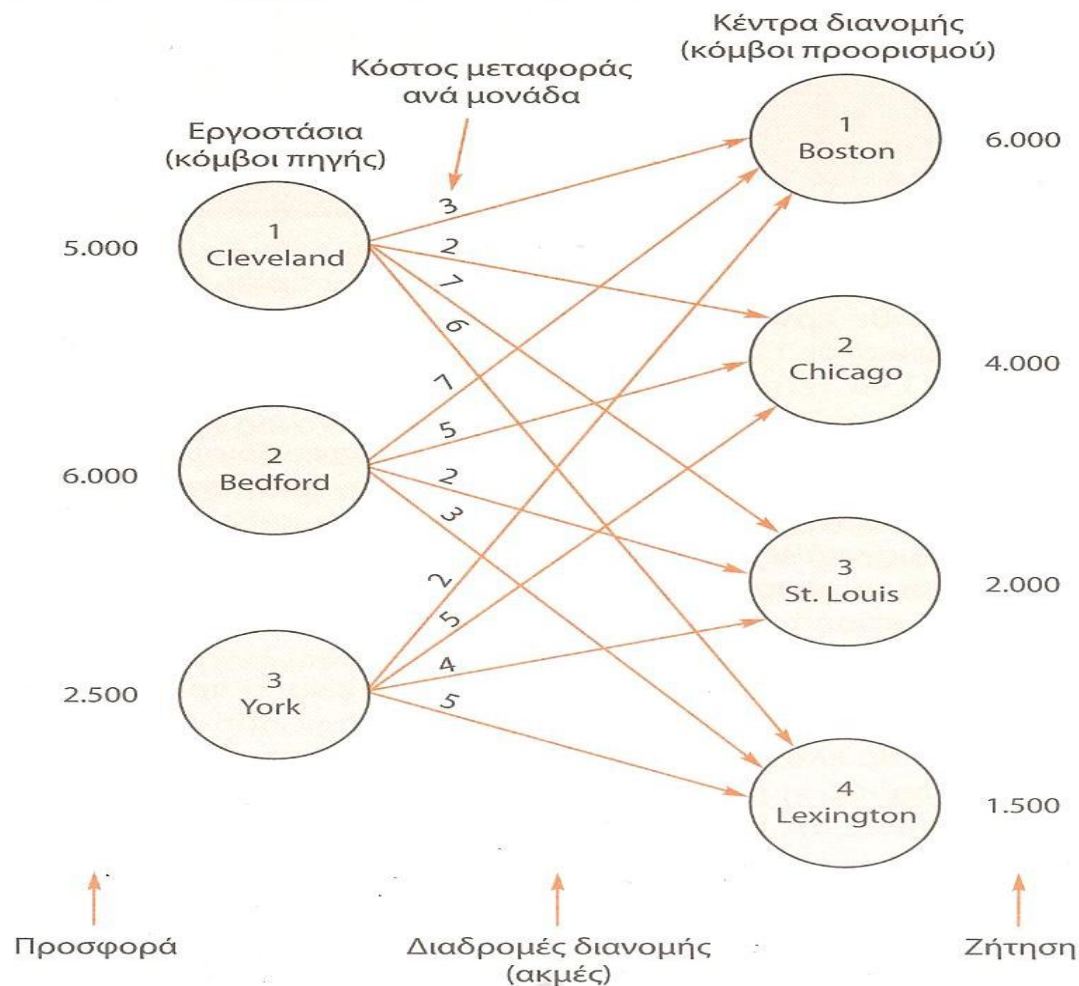
- Το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα μεταξύ των πηγών και των προορισμών παρουσιάζεται στον παρακάτω Πίνακα

Πηγή	Προορισμός			
	Boston	Chicago	St. Louis	Lexington
Cleveland	3	2	7	6
Bedford	7	5	2	3
York	2	5	4	5

- Η διοίκηση της εταιρίας επιθυμεί να προσδιορίσει τον αριθμό των μονάδων που θα μεταφερθούν από κάθε εργοστάσιο προς κάθε κέντρο διανομής

Πρόβλημα μεταφοράς

- Το **δίκτυο** του προβλήματος είναι το εξής:



Πρόβλημα μεταφοράς

- Σκοπός είναι ο προσδιορισμός των διαδρομών που θα χρησιμοποιηθούν και των ποσοτήτων που θα διακινηθούν μέσω κάθε διαδρομής ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς
- Οι μεταβλητές απόφασης θα είναι οι εξής:
 - x_{ij} : ο αριθμός των μονάδων που μεταφέρονται από την πηγή i στον προορισμό j , $i=1,2,3$ και $j=1,2,3,4$

Πρόβλημα μεταφοράς

- Η αντικειμενική συνάρτηση (που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί) αποτελείται από το άθροισμα των κοστών μεταφοράς από κάθε πηγή σε καθένα από τους τέσσερις προορισμούς
- κόστος μεταφοράς των μονάδων από το Cleveland
 - $3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14}$
- κόστος μεταφοράς των μονάδων από το Bedford
 - $7x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24}$
- κόστος μεταφοράς των μονάδων από το York
 - $2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34}$

Πρόβλημα μεταφοράς

- Περιορισμοί προσφοράς πηγών
 1. $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 5.000$
 2. $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 6.000$
 3. $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 2.500$
- Περιορισμοί ζήτησης κέντρων διανομής
 1. $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6.000$
 2. $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4.000$
 3. $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2.000$
 4. $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1.500$

Πρόβλημα μεταφοράς

- Το συνολικό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα της μεταφοράς της Foster Generators

- **$\text{Min } 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + 7x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34}$**

Υπό τους περιορισμούς

- **$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 5.000$**

- **$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 6.000$**

- **$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 2.500$**

- **$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6.000$**

- **$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4.000$**

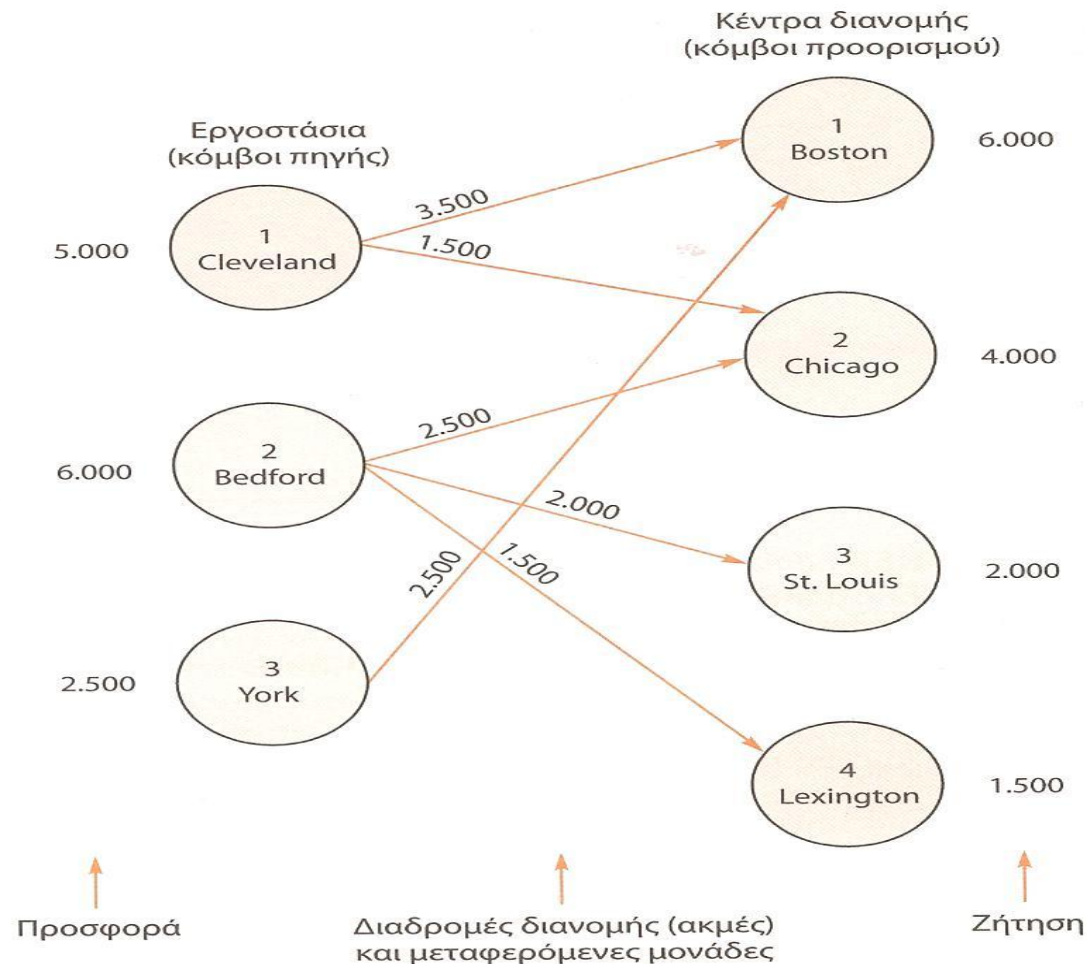
- **$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2.000$**

- **$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1.500$**

- **$x_{ij} \geq 0, i=1,2,3 \text{ και } j=1,2,3,4$**

Πρόβλημα μεταφοράς

- **Βέλτιστη λύση** για το πρόβλημα μεταφοράς της Foster Generators



Πρόβλημα μεταφοράς – Παραλλαγές

- **Συνολική προσφορά διάφορη της συνολικής ζήτησης**
 - Συχνά, η συνολική προσφορά είναι διάφορη της συνολικής ζήτησης
 - Εάν η συνολική προσφορά **υπερβαίνει** τη συνολική ζήτηση δεν απαιτείται τροποποίηση του μοντέλου του γραμμικού προγραμματισμού
 - Η υπερβάλλουσα προσφορά θα εμφανιστεί ως **χαλαρή τιμή** στη βέλτιστη λύση του προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού
 - Η χαλαρή τιμή για οποιαδήποτε πηγή ερμηνεύεται ως αχρησιμοποίητη προσφορά ή ως **ο αριθμός των μονάδων που δεν μεταφέρθηκαν από την πηγή**
 - **Πώς μπορεί να διατυπωθεί ως ισορροπημένο πρόβλημα;**

Πρόβλημα μεταφοράς – Παραλλαγές

- **Συνολική προσφορά διάφορη της συνολικής ζήτησης**

- Εάν η συνολική προσφορά είναι **μικρότερη** από τη συνολική ζήτηση το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού δεν έχει εφικτή λύση
 - Σε αυτή την περίπτωση τροποποιούμε το δίκτυο προσθέτοντας μια **εικονική πηγή**, με προσφορά ίση με τη διαφορά συνολικής ζήτησης και συνολικής προσφοράς
 - Με την προσθήκη της εικονική πηγής και των ακμών από την εικονική πηγή προς κάθε προορισμό, το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού αποκτά εφικτή λύση
 - Το κόστος που θα αντιστοιχηθεί σε κάθε ακμή της εικονικής πηγής είναι μηδενικό, ώστε η τιμή της βέλτιστης λύσης να αντιπροσωπεύει το κόστος μεταφοράς των μονάδων που θα μεταφερθούν στην πραγματικότητα (στην πράξη δε θα πραγματοποιηθούν μεταφορές από την εικονική πηγή)
 - Εφόσον επιλυθεί το τροποποιημένο μοντέλο, **οι προορισμοί που εμφανίζονται να λαμβάνουν προϊόντα από την εικονική πηγή θα είναι οι προορισμοί που θα παρουσιάσουν έλλειμμα** (ζήτηση που δεν ικανοποιείται)

- Μπορεί να μοντελοποιηθεί ποινή για έλλειψη;

Πρόβλημα μεταφοράς – Παραλλαγές

- **Αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποίησης**

- Σε ορισμένες περιπτώσεις προβλημάτων μεταφοράς, ο στόχος είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης που μεγιστοποιεί τα κέρδη ή τα έσοδα
- Χρησιμοποιώντας τα ανά μονάδα κέρδη ή έσοδα ως συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης, ουσιαστικά επιλύουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης αντί για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης
- Οι εν λόγω τροποποιήσεις δεν επηρεάζουν τους ήδη υφιστάμενους περιορισμούς του αρχικού μοντέλου

Πρόβλημα μεταφοράς – Παραλλαγές

- **Δυναμικότητα διαδρομών ή ελάχιστες ποσότητες διαδρομών**
 - Υπάρχει η δυνατότητα ενσωμάτωσης στο μοντέλο στοιχείων δυναμικότητας των διαδρομών ή ελάχιστης ποσότητας διαδρομών
 - Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στο παράδειγμα της Foster Generators η διαδρομή York-Boston (πηγή 3 – προορισμός 1) έχει δυναμικότητα 1.000 μονάδων, εξαιτίας περιορισμένης χωρητικότητας του μέσου μεταφοράς που χρησιμοποιείται
 - Συμβολίζοντας με x_{31} τον αριθμό των μονάδων που μεταφέρονται από το York στο Boston, ο περιορισμός της διαδρομής York-Boston θα είναι:
 - $x_{31} \leq 1.000$

Πρόβλημα μεταφοράς – Παραλλαγές

- **Δυναμικότητα διαδρομών ή ελάχιστες ποσότητες διαδρομών**
 - Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε ελάχιστες ποσότητες διαδρομών
 - Για παράδειγμα, η σχέση
 - $x_{22} \geq 2.000$
 - εξασφαλίζει ότι θα καλυφθεί η δέσμευση της εταιρίας ως προς μια μεταφορά τουλάχιστον 2.000 μονάδων από το Bedford (πηγή 2) προς το Chicago (προορισμός 2)

Πρόβλημα μεταφοράς – Παραλλαγές

- **Μη αποδεκτές διαδρομές**

- Ενδέχεται να μην είναι δυνατή η δημιουργία διαδρομών από κάθε πηγή προς κάθε προορισμό
- Για να διαχειριστούμε αυτή την κατάσταση, διαγράφουμε τη συγκεκριμένη ακμή από το δίκτυο και την αντίστοιχη μεταβλητή από το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού
- Για παράδειγμα, αν η διαδρομή Cleveland-St. Louis (πηγή 1 – προορισμός 3) ήταν μη αποδεκτή ή ήταν αδύνατο να χρησιμοποιηθεί, θα αφαιρούσαμε τη μεταβλητή x_{13} από το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού

Πρόβλημα Μεταφοράς

Παράδειγμα:

Εταιρεία επεξεργασίας και διανομής καυσίμων διαθέτει 3 διυλιστήρια που εξυπηρετούν 4 πόλεις. Το κάθε διυλιστήριο μπορεί να παρέχει τις εξής ποσότητες καυσίμων θέρμανσης (σε It) : διυλιστήριο 1: 35 εκατομμύρια, διυλιστήριο 2: 50 εκατομμύρια, διυλιστήριο 3: 40 εκατομμύρια.

Οι απαιτήσεις καυσίμων σε κάθε πόλη είναι οι εξής (σε It) : Πόλη 1: 45 εκατομμύρια, Πόλη 2: 20 εκατομμύρια. Πόλη 3: 30 εκατομμύρια, Πόλη 4: 30 εκατομμύρια.

Το κόστος μεταφοράς (σε Ευρώ) από διυλιστήριο σε πόλη 1 εκατομμυρίου It καυσίμων θέρμανσης είναι ανάλογο της απόστασης ανάμεσα σε αυτά και φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

Από	1	2	3	4
Προς				
1	8	6	10	9
2	9	12	13	7
3	14	9	16	5

Πρόβλημα Μεταφοράς

Γενική Μαθηματική Διατύπωση

$$\text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \quad (\text{Συνολικό Κόστος Μεταφοράς})$$

$$\text{s.t. } \sum_j x_{ij} \leq s_i \quad \text{για κάθε θέση προσφοράς } i \text{ (περιορισμοί προσφοράς)}$$

$$\sum_i x_{ij} = d_j \quad \text{για κάθε θέση ζήτησης } j \text{ (περιορισμοί ζήτησης)}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{για κάθε } i \text{ και } j \text{ (θετικές τιμές)}$$

Πρόβλημα Μεταφοράς

- Όταν η συνολική προσφορά...

...υπολείπεται της συνολικής ζήτησης => έλλειμμα προσφοράς

...ισούται με τη συνολική ζήτηση => Ισορροπημένο πρόβλημα

...υπερβαίνει τη συνολική ζήτηση => περίσσεια προσφοράς

Πρόβλημα διανομής

Εταιρεία παραγωγής και διανομής γάλακτος διαθέτει 3 εργοστάσια και 4 πόλεις τις οποίες εξυπηρετεί. Η εταιρεία ενδιαφέρεται να μεταφέρει το προϊόν της στις 4 πόλεις με το ελάχιστο δυνατό κόστος καθημερινά. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι δυνατότητες παραγωγής γάλακτος κάθε εργοστασίου, η ζήτηση κάθε πόλης αλλά και το κόστος μεταφοράς γάλακτος από το κάθε εργοστάσιο στην κάθε πόλη. Λόγω της ευπάθειας του προϊόντος, το εργοστάσιο φροντίζει ώστε η προσφορά είναι ίση με τη ζήτηση. Το προϊόν πρέπει να καταναλώνεται εξ'ολοκλήρου. (κόστος σε ΕΥΡΩ/lt, ποσότητες σε lt/ημέρα)

- Να βρεθεί ΠΓΠ που να κατανέμει τις ποσότητες γάλακτος από τα εργοστάσια στις πόλεις με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Εργοστάσιο/ Πόλη	1	2	3	4	Προσφορά
1	0.6	0.7	0.6	0.4	2000
2	0.8	0.4	0.3	0.6	3000
3	0.5	0.5	0.4	0.6	5000
Ζήτηση	1500	2500	3500	2500	10000

Λύση:

στω x_{ij} η ποσότητα γάλακτος που αποστέλλεται από το εργοστάσιο i ($i=1,2,3$) στην πόλη j ($j=1,2,3,4$).

Η αντικειμενική συνάρτηση του ΠΓΠ είναι:

Min

$$z=0.6x_{11}+0.7x_{12}+0.6x_{13}+0.4x_{14}+0.8x_{21}+0.4x_{22}+0.3x_{23}+0.6x_{24}+0.5x_{31}+0.5x_{32}+0.4x_{33}+0.6x_{34}$$

Περιορισμοί προσφοράς:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2000(\text{εργοστάσιο 1})$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=3000(\text{εργοστάσιο 2})$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=5000(\text{εργοστάσιο 3})$$

Περιορισμοί ζήτησης:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1500 \quad (\text{πόλη 1})$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=2500 \quad (\text{πόλη 2})$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=3500 \quad (\text{πόλη 3})$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=2500 \quad (\text{πόλη 4})$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3,4.$$

Πρόβλημα ανάθεσης

- Ένα τυπικό πρόβλημα μπορεί να αναφέρεται σε ανάθεση
 - εργασιών σε μηχανήματα
 - υπαλλήλων σε έργα
 - Εμπορικών αντιπροσώπων σε εμπορικές περιφέρειες
 - συμβολαίων σε συμμετέχοντες σε διαγωνισμό,
 - κλπ.
- Ένα χαρακτηριστικό που διαφοροποιεί τα προβλήματα ανάθεσης από άλλα προβλήματα λήψης αποφάσεων είναι ότι σε έναν υπάλληλο θα ανατεθεί ένα και μόνο ένα έργο
- Στόχος θα μπορούσε να είναι ο προσδιορισμός των αναθέσεων που ελαχιστοποιούν το κόστος, ελαχιστοποιούν το χρόνο ή μεγιστοποιούν το κέρδος

Πρόβλημα ανάθεσης

- Ελαχιστοποίηση συνολικού κόστους m εργαζόμενων, μηχανημάτων κλπ σε n εργασίες.
 - Δεδομένη τιμή κόστους c_{ij} εργαζόμενου i που πραγματοποιεί την εργασία j
 - Κάθε εργαζόμενος θα συμμετάσχει σε εργασία (?)
 - Κάθε εργασία θα πραγματοποιηθεί
- Πρόκειται για ειδική περίπτωση του προβλήματος μεταφοράς όπου κάθε θέση προσφοράς και ζήτησης έχει τιμή ίση με 1

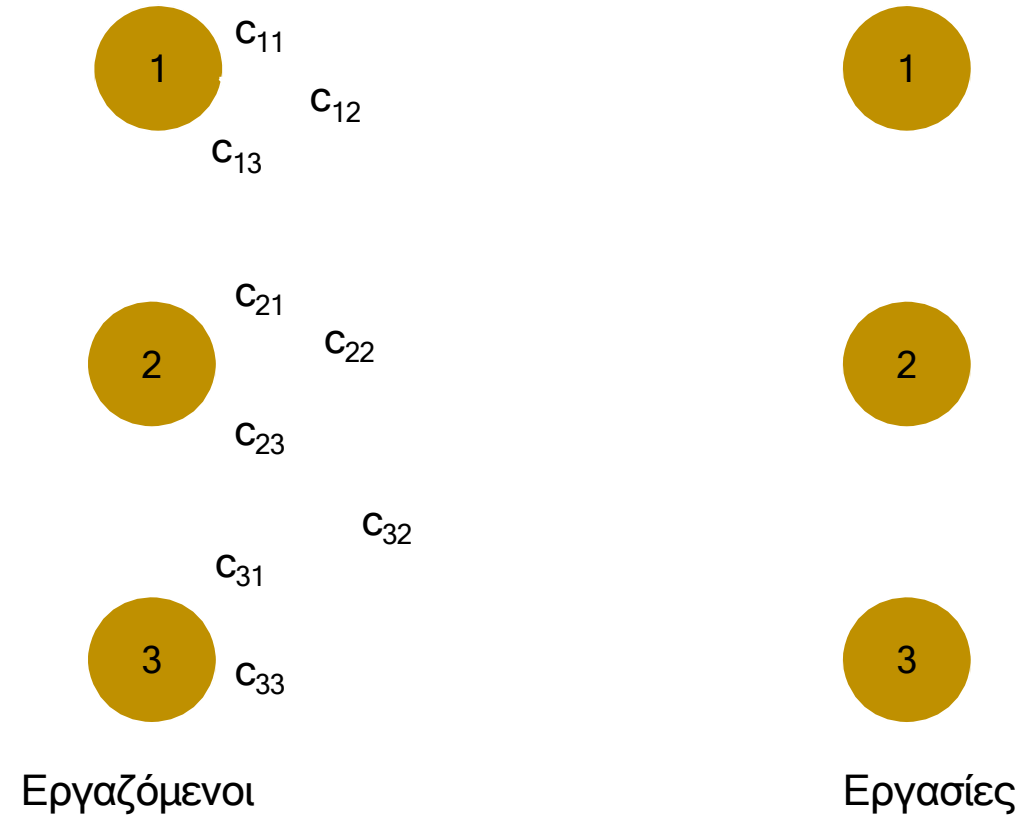
Πρόβλημα ανάθεσης

Παράδειγμα:

Τρεις εργαζόμενοι μιας επιχείρησης πρόκειται αναλάβουν τρεις εργασίες. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο χρόνος που απαιτείται ώστε ο κάθε εργαζόμενος να ολοκληρώσει μια εργασία.

Να διατυπωθεί π.γ.π. με το οποίο να γίνεται η βέλτιστη αντιστοίχιση.

Εργαζόμενος / Εργασία	1	2	3
1	32	22	11
2	23	44	46
3	48	19	21



Πρόβλημα ανάθεσης

- Γενική Διατύπωση

$$\text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t. } \sum_j x_{ij} = 1 \quad \text{για κάθε εργαζόμενο } i$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \text{για κάθε εργασία } j$$

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad \text{για κάθε } i \text{ \& } j.$$

Πρόβλημα ανάθεσης

- Ας εξετάσουμε την περίπτωση της Fowle Marketing Reserch, η οποία μόλις έλαβε εντολή να διενεργήσει έρευνα αγοράς για τρεις διαφορετικούς πελάτες της
- Η εταιρία αντιμετωπίζει το πρόβλημα της ανάθεσης κάθε πελάτη (έργο) σε έναν υπεύθυνο έργου (υπάλληλος)
- Τρεις υπάλληλοι της Fowle είναι διαθέσιμοι για να αναλάβουν υπηρεσία ως υπεύθυνοι έργου
- Ο απαιτούμενος χρόνος για την ολοκλήρωση κάθε έρευνας θα εξαρτηθεί από την εμπειρία και ικανότητα του υπεύθυνου έργου που θα την αναλάβει
- Τα τρία έργα έχουν τον ίδιο βαθμό προτεραιότητας και η διεύθυνση της εταιρίας επιδιώκει την **ελαχιστοποίηση του συνολικού αριθμού των ημερών** που θα απαιτηθούν για την ολοκλήρωση και των τριών έργων
- Εάν κάθε πελάτης μπορεί να ανατεθεί σε ένα μόνο υπεύθυνο, με ποιον τρόπο θα γίνει η ανάθεση;

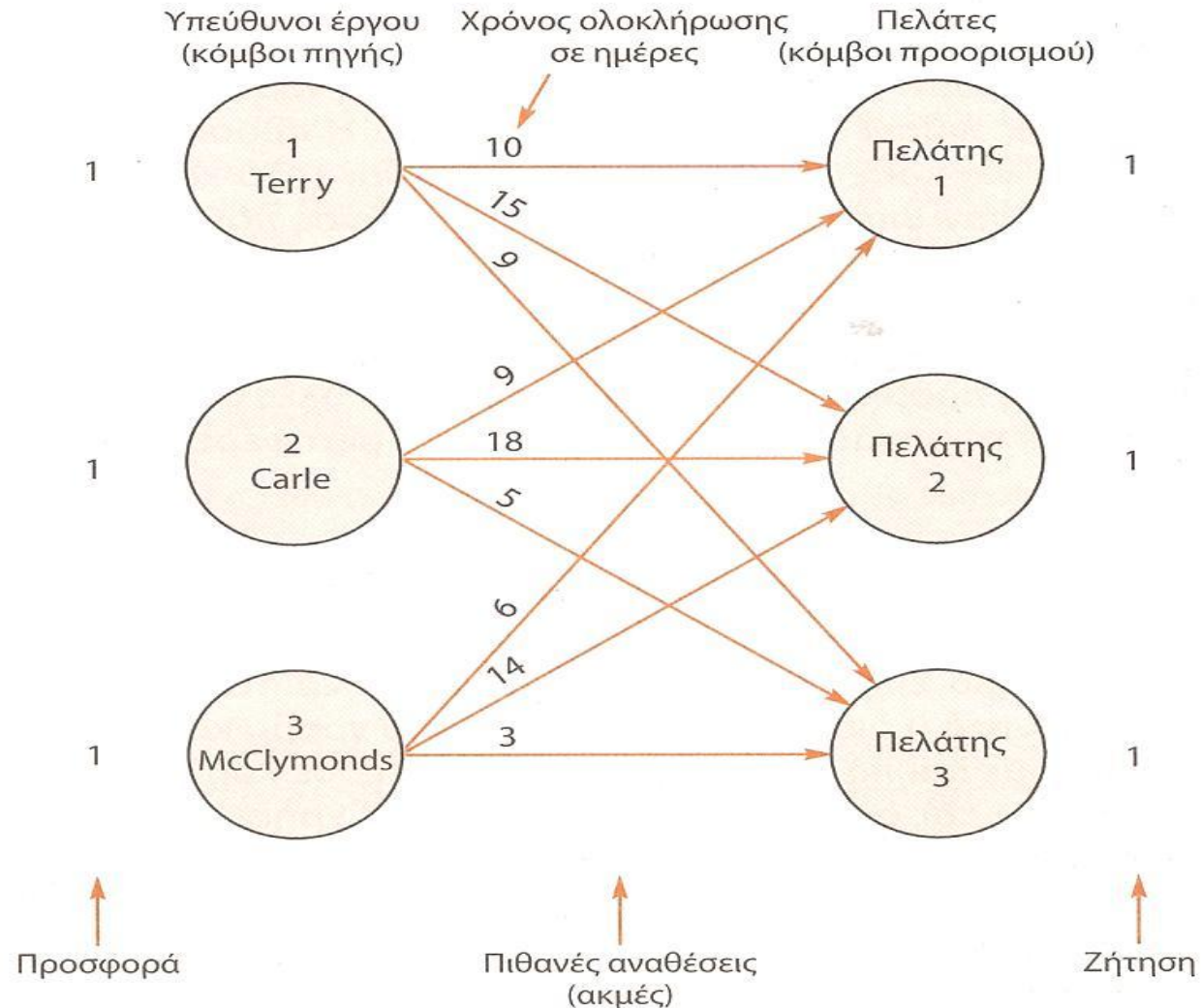
Πρόβλημα ανάθεσης

- Για να απαντηθεί το συγκεκριμένο ερώτημα, θα πρέπει να εξετάσουμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς υπεύθυνου έργου – πελάτη και κατόπιν να εκτιμήσουμε τους αντίστοιχους χρόνους ολοκλήρωσης έργου
- Για τρεις υπεύθυνους έργου και τρεις πελάτες, οι πιθανές εναλλακτικές υποθέσεις είναι εννέα
- Οι εναλλακτικές υποθέσεις και οι αντίστοιχοι χρόνοι ολοκλήρωσης παρουσιάζονται στον ακόλουθο Πίνακα

Υπεύθυνος έργου	Πελάτης		
	1	2	3
Terry	10	15	9
Carle	9	18	5
McClymonds	6	14	3

Πρόβλημα ανάθεσης

- Το **δίκτυο** του προβλήματος είναι το εξής:



Πρόβλημα ανάθεσης

- Το πρόβλημα ανάθεσης αποτελεί **ειδική περίπτωση του προβλήματος μεταφοράς**, όπου όλες οι τιμές προσφοράς και ζήτησης ισούνται με τη μονάδα και η ποσότητα που μεταφέρεται μέσω κάθε ακμής είναι 0 ή 1
- Οι μεταβλητές απόφασης για το πρόβλημα εκχώρησης της Fowle είναι οι εξής:
 - $x_{ij} = 1$ εάν στον υπεύθυνο έργου i ανατεθεί ο πελάτης j ή 0 εάν στον υπεύθυνο έργου i δεν ανατεθεί ο πελάτης j , $i=1,2,3$ και $j=1,2,3$

Πρόβλημα ανάθεσης

- Η αντικειμενική συνάρτηση (που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί) είναι το άθροισμα των χρόνων ολοκλήρωσης κάθε ενός από τα τρία έργα
- Ημέρες που απαιτούνται για την ανάθεση του Terry
 - $10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13}$
- Ημέρες που απαιτούνται για την ανάθεση του Carle
 - $9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23}$
- Ημέρες που απαιτούνται για την ανάθεση του McClymonds
 - $6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33}$

Πρόβλημα ανάθεσης

- Οι περιορισμοί για το πρόβλημα ανάθεσης αποτυπώνουν τις απαιτήσεις του προβλήματος (σε κάθε υπεύθυνο έργου δεν μπορούν να ανατεθούν περισσότεροι από ένας πελάτες και σε κάθε πελάτη αντιστοιχεί μόνο ένας υπεύθυνος έργου)
 - $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1$ (ανάθεση Terry)
 - $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1$ (ανάθεση Carle)
 - $x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1$ (ανάθεση McClymonds)
 - $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$ (πελάτης 1)
 - $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$ (πελάτης 2)
 - $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$ (πελάτης 3)
- Επειδή ο αριθμός των υπεύθυνων έργου ισούται με τον αριθμό των πελατών, όλοι οι περιορισμοί μπορούν να διατυπωθούν ως ισότητες
- Όταν όμως ο αριθμός των υπεύθυνων έργου υπερβαίνει τον αριθμό των πελατών, θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν περιορισμοί της μορφής « $\leq$ » για τους περιορισμούς του υπεύθυνου έργου

Πρόβλημα ανάθεσης

- Το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού της Fowle Marketing Research είναι το ακόλουθο

- $\text{Min } 10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13} + 9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} + 6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33}$

Υπό τους περιορισμούς

- $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1$ (ανάθεση Terry)
- $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1$ (ανάθεση Carle)
- $x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1$ (ανάθεση McClymonds)
- $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1$ (πελάτης 1)
- $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1$ (πελάτης 2)
- $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1$ (πελάτης 3)
- $x_{ij} = \{0,1\}$, $i=1,2,3$ και $j=1,2,3$

Πρόβλημα ανάθεσης

- **Συνολικός αριθμός υπαλλήλων διάφορος του συνολικού αριθμού έργων**
 - Εάν ο αριθμός των υπαλλήλων **υπερβαίνει** τον αριθμό των πελατών, οι επιπλέον υπάλληλοι δε θα αναλάβουν κανένα έργο
 - Εάν ο αριθμός των υπαλλήλων είναι **μικρότερος** από τον αριθμό των πελατών, το μοντέλο του γραμμικού προγραμματισμού δεν έχει εφικτή λύση
 - Στην περίπτωση αυτή μια απλή λύση είναι να προσθέσουμε τόσους **εικονικούς υπεύθυνους έργου**, ώστε ο αριθμός των υπεύθυνων έργου να ισούται με τον αριθμό των πελατών
 - Οι συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης για τους εικονικούς υπεύθυνους έργου θα είναι μηδενικοί, προκειμένου η τιμή της βέλτιστης λύσης να αντιστοιχεί μόνο στο συνολικό αριθμό ημερών που απαιτούνται για τα έργα, τα οποία θα ανατεθούν σε πραγματικούς υπεύθυνους έργων (τα έργα που θα ανατεθούν σε εικονικούς υπεύθυνους έργων δε θα πραγματοποιηθούν)

Πρόβλημα ανάθεσης

- **Αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποίησης**
 - Εάν οι εναλλακτικές επιλογές εκτιμηθούν σε όρους κέρδους ή εσόδων, αντί κόστους ή χρόνου, το μοντέλο μπορεί να επιλυθεί ως πρόβλημα μεγιστοποίησης

Πρόβλημα ανάθεσης

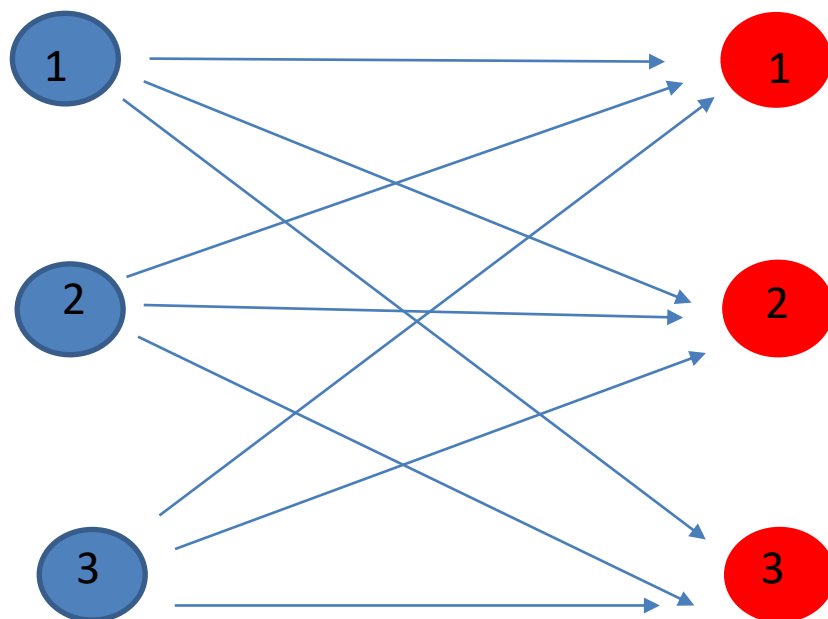
- **Μη αποδεκτές αναθέσεις**

- Εάν μία ή περισσότερες αναθέσεις είναι μη αποδεκτές, θα αφαιρέσουμε τις αντίστοιχες μεταβλητές από μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού
- Μια τέτοια περίπτωση θα μπορούσε να προκύψει εάν ένας υπάλληλος δε διαθέτει την απαιτούμενη εμπειρία (ή τις απαιτούμενες ικανότητες / γνώσεις) για να αναλάβει ένα ή περισσότερα έργα

Πρόβλημα ανάθεσης

- Τρεις εργαζόμενοι μιας επιχείρησης πρόκειται να αναλάβουν τρεις εργασίες.
- Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο χρόνος που απαιτείται ώστε ο κάθε εργαζόμενος να ολοκληρώσει μια εργασία.
- Να διατυπωθεί π.γ.π. με το οποίο να γίνεται η βέλτιστη αντιστοίχιση.

Εργαζόμενος/Εργασία	1	2	3
1	32	22	11
2	29	28	45
3	36	33	34



Επίλυση

Λύση:

Έστω x_{ij} αν ανατεθεί ο εργαζόμενος i ($i=1,2,3$) στην εργασία j ($j=1,2,3$).

Η αντικειμενική συνάρτηση του ΠΓΠ είναι:

$$\text{Min } z = 32x_{11} + 22x_{12} + 11x_{13} + 29x_{21} + 28x_{22} + 45x_{23} + 36x_{31} + 33x_{32} + 34x_{33}$$

Περιορισμοί προσφοράς:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \quad (\text{εργαζόμενος 1})$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \quad (\text{εργαζόμενος 2})$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \quad (\text{εργαζόμενος 3})$$

Περιορισμοί ζήτησης:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \quad (\text{εργασία 1})$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \quad (\text{εργασία 2})$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \quad (\text{εργασία 3})$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3.$$