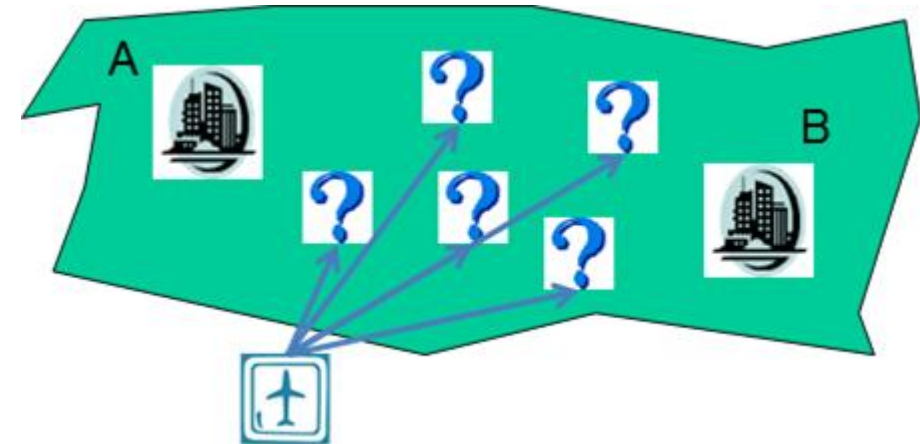


Μοντέλα Χωροθέτησης



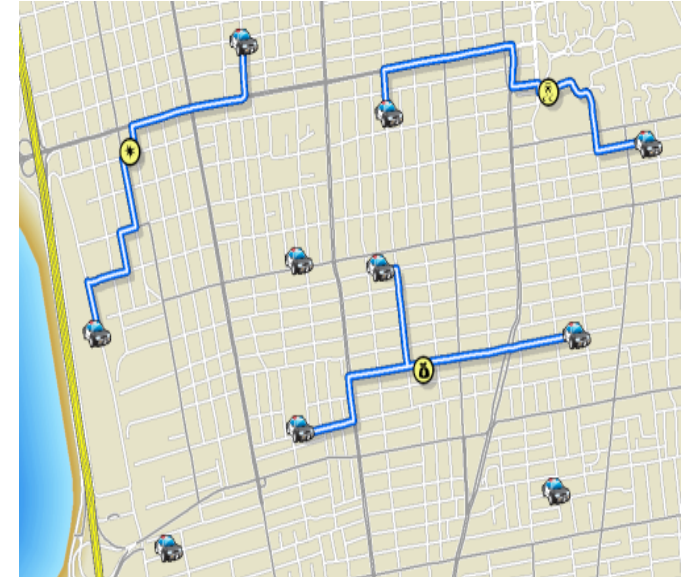
Βασικές έννοιες

- Τα προβλήματα της Χωροθέτησης Κέντρων Παροχής Υπηρεσιών περιλαμβάνουν την τοποθέτηση ενός ή περισσότερων κέντρων παροχής υπηρεσιών σε μια περιοχή όπου υπάρχει ζήτηση
- Σκοπός της Χωροθέτησης Κέντρων Παροχής Υπηρεσιών είναι να βρεθεί η καλύτερη θέση (ή θέσεις) για κάθε κέντρο παροχής υπηρεσιών με βάση τα κριτήρια βελτιστοποίησης
- Τυπικά το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μεταφοράς ή η μεγιστοποίηση της κάλυψης
- Οι χωροθετικές αποφάσεις (location decisions) εμφανίζονται σε μια ποικιλία προβλημάτων του ιδιωτικού και του δημόσιου τομέα
- Συνήθως δύο αποφάσεις:
 - Πού θα τοποθετηθούν τα κέντρα εξυπηρέτησης?
 - Ποιοι πελάτες θα ανατεθούν σε κάθε κέντρο?



Εφαρμογές προτύπων χωροθέτησης

- Η χωροθέτηση αποτελεί σημαντικό στοιχείο για το σχεδιασμό στρατηγικών για ένα γενικό φάσμα των δημόσιων και ιδιωτικών φορέων
- ✓ Προσδιορισμός των θέσεων οχημάτων εκτάκτων αναγκών (ασθενοφόρων, αστυνομικών οχημάτων)
- ✓ Προσδιορισμός των θέσεων αμαξοστασίων, αποθηκών, αεροδρομίων, σχολείων
- ✓ Προσδιορισμός των σημείων πώλησης επιχειρήσεων (retail outlet location)
- ✓ Προσδιορισμός των στάσεων των μέσων συγκοινωνίας

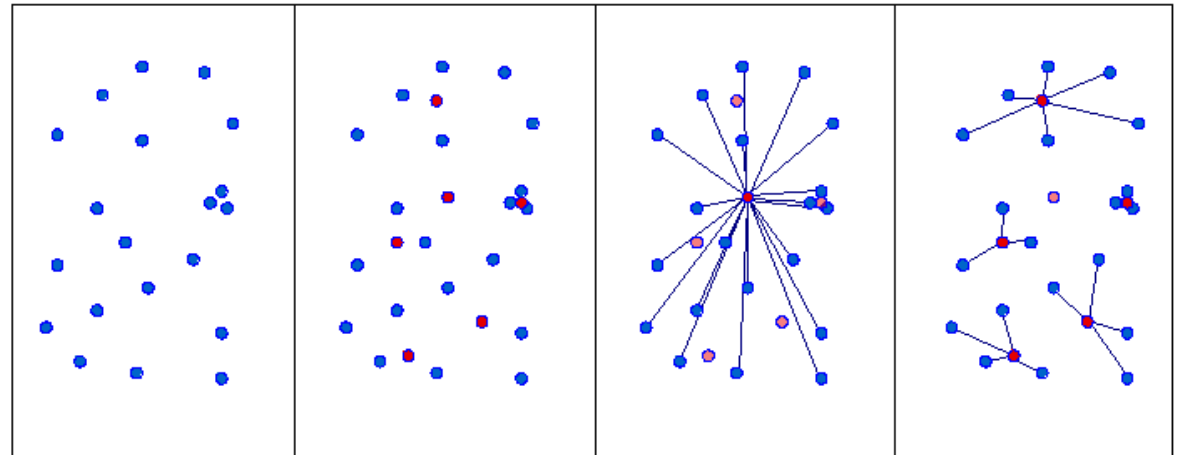


Βασικά πρότυπα χωροθέτησης

Τα βασικά πρότυπα χωροθέτησης, τα οποία χωρίζονται στις εξής τρεις κατηγορίες:

- Πρότυπα Μέγιστης Απόστασης (Maximum Distance Models)
- Το Πρόβλημα p -Διασποράς (The p -Dispersion Problem)
- Πρότυπα Συνολικής ή Μέσης Απόστασης (Total or Average Distance Models).

Όλα τα παραπάνω πρότυπα έχουν ως στόχο τους σε δεδομένο δίκτυο να βρουν κατάλληλες λύσεις χωροθέτησης μονάδων εξυπηρέτησης ανάλογα με τη δεδομένη ζήτηση του δικτύου.



Πρότυπα Μέγιστης Απόστασης (Maximum Distance Models)

- ✓ Το πρότυπο χωροθέτησης καθορισμένης κάλυψης (Set covering location model)
- ✓ Το πρόβλημα χωροθέτησης μέγιστης κάλυψης (maximal covering location problem)
- ✓ Το πρόβλημα χωροθέτησης p -κέντρου (the p -centre problem)

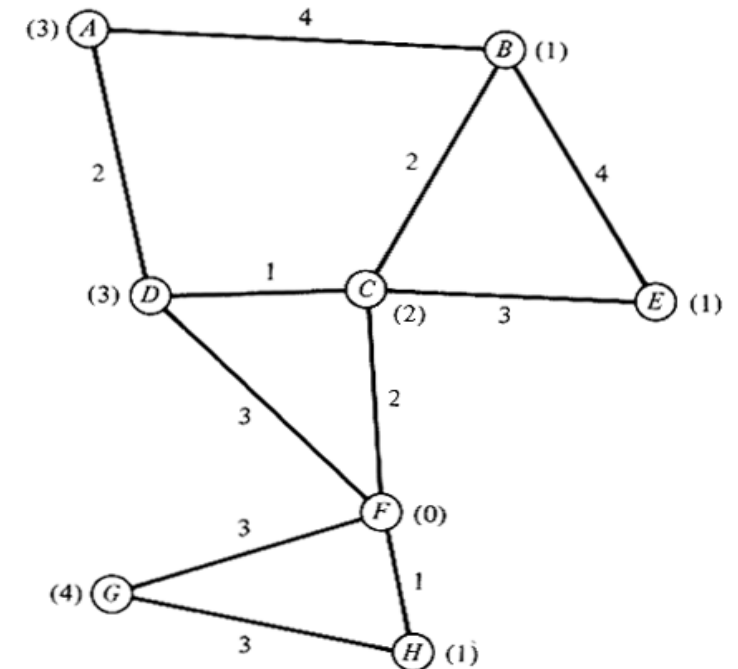


FIGURE 6.36 A network on which a facility must be located.

Πρότυπα μέγιστης απόστασης (Maximum distance models)

- Λαμβάνεται υπόψη εξ αρχής ένας περιορισμός μέγιστης απόστασης μεταξύ δύο εγκαταστάσεων, των οποίων η χωροθέτηση εξετάζεται

Παράδειγμα: Χωροθέτηση σχολικών κτιρίων

- Όσο πιο μικρή είναι η απόσταση μεταξύ τους τόσο πιο μικρή θα είναι η διανυόμενη απόσταση από τους μαθητές.
 - Έτσι μειώνεται ο αριθμός των μαθητών που αναγκάζονται να κινηθούν με μέσα μαζικής μεταφοράς.
- Προκύπτει ζήτημα μέγιστης απόστασης μεταξύ των διαφόρων σχολικών κτιρίων για την καλύτερη εξυπηρέτηση των μαθητών.

Το πρότυπο χωροθέτησης καθορισμένης κάλυψης (Set covering location model)

Στόχος: ο προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης χωροθέτησης του ελάχιστου αριθμού μονάδων παροχής εξυπηρέτησης που είναι σε θέση να καλύψουν δεδομένη ζήτηση εντός ενός δικτύου

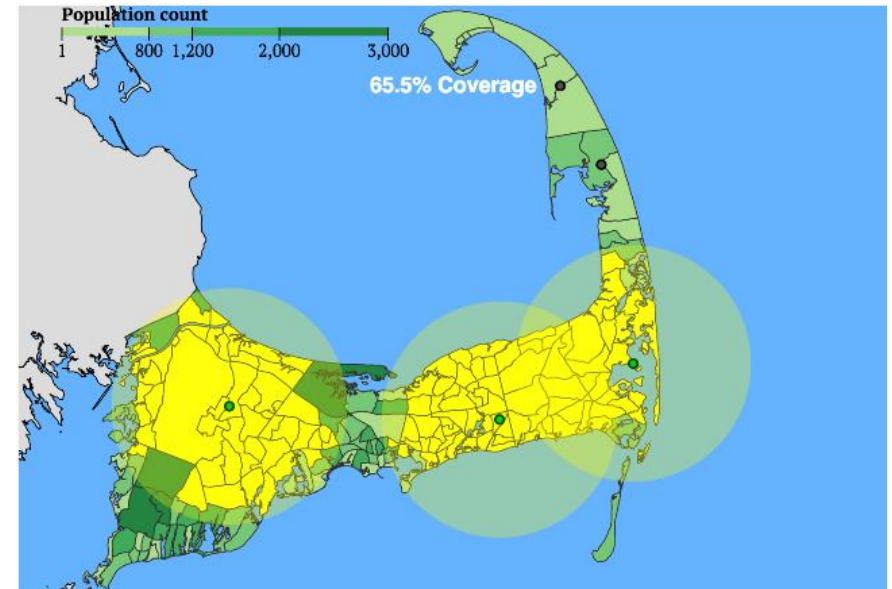
- Προσδιορισμός ελάχιστου αριθμού μονάδων
- Προσδιορισμός θέσεων μονάδων

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι η εξής:

$$\text{Min} \sum_{j \in J} x_j \quad (1)$$

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq 1 \quad \forall i \in I \quad (2)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad \forall j \in J \quad (3)$$



Το πρόβλημα χωροθέτησης μέγιστης κάλυψης (maximal covering location problem)

Στόχος: η χωροθέτηση συγκεκριμένου **αριθμού p κτιρίων** με τέτοιο τρόπο, ώστε να μεγιστοποιηθεί η ζήτηση που τελικά θα καλυφτεί.

- Διατίθεται συγκεκριμένος προϋπολογισμός για τη χωροθέτηση εγκαταστάσεων, ο οποίος καθορίζει τον τελικό αριθμό των μονάδων παροχής εξυπηρέτησης
- Η συγκεκριμένη κατηγορία προβλημάτων χωροθέτησης θεωρεί ότι δεν είναι δυνατή η κάλυψη όλης της ζήτησης εντός ενός δικτύου και προσπαθεί να καλύψει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο μέρος της

Η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος είναι η εξής:

$$\text{Max} \quad \sum_{i \in I} h_i z_i$$

$$\sum_{j \in N_i} x_j \geq z_i, \quad \forall i \in I \quad x_j \in \{0,1\}, \quad \forall j \in J$$

$$\sum_{j \in J} x_j = p \quad z_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I$$

Το παρόν πρότυπο ανήκει στην κατηγορία προβλημάτων ακέραιου προγραμματισμού της μορφής «0-1» και είναι δυνατό να επιλυθεί με προσεγγιστικές μεθόδους.

$$N_i = \{j \in J \mid d_{ij} < S\}$$

d_{ij} η απόσταση ανάμεσα στον κόμβο ζήτησης i και την πιθανή θέση μονάδας παροχής υπηρεσιών j .

Το πρόβλημα χωροθέτησης p -κέντρου (the p -centre problem)

Στόχος: ελαχιστοποίηση της μέγιστης απόστασης που απέχει κάθε κόμβος ζήτησης από την πλησιέστερη μονάδα παροχής εξυπηρέτησης δεδομένου του αριθμού των μονάδων εξυπηρέτησης προς χωροθέτηση

- Ο αριθμός των μονάδων παροχής εξυπηρέτησης p είναι προκαθορισμένος λόγω δεδομένου προϋπολογισμού
- Τίθεται θέμα μέγιστης απόστασης μεταξύ των μονάδων που θα χωροθετηθούν και των κόμβων ζήτησης
- Είναι δυνατόν οι κόμβοι ζήτησης να συμμετέχουν στο πρόβλημα ως σταθμισμένοι παράγοντες
- Δύο μορφές:
 - ✓ πρόβλημα χωροθέτησης p -κέντρου «κορυφής» (the “vertex” p -center problem):
οι μονάδες παροχής εξυπηρέτησης είναι δυνατό να χωροθετηθούν μόνο επί των κόμβων του υπό εξέταση δικτύου
 - ✓ «απόλυτο» πρόβλημα p -κέντρου (the “absolute” p -center problem):
οι πιθανές τοποθεσίες χωροθέτησης μπορεί να βρίσκονται σε οποιοδήποτε σημείο επί των τόξων του δικτύου

Πρότυπα συνολικής ή μέσης απόστασης (total or average distance models)

- Ασχολούνται με τη συνολική απόσταση που πρέπει να διανυθεί ανάμεσα στους κόμβους ζήτησης και τις αντίστοιχες μονάδες παροχής εξυπηρέτησης
 - Η αποτελεσματικότητα ενός συστήματος χωροθετημένων μονάδων εξαρτάται από τη συνολική ή μέση διανυόμενη απόσταση για την πλήρη εξυπηρέτηση της ζήτησης
-
- ✓ Το πρόβλημα p -διάμεσου (the p -median problem)
 - ✓ Το πρόβλημα χωροθέτησης σταθερού κόστους (the fixed charge location problem)
 - ✓ Το πρόβλημα χωροθέτησης πλήμνης (Hub location problem)
 - ✓ Το πρόβλημα χωροθέτησης μέγιστου αθροίσματος (the maximum location problem)

Το πρόβλημα p-διάμεσου (the p-median problem)

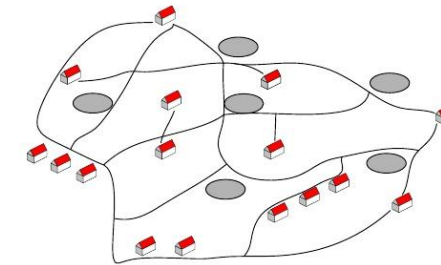
Στόχος: η βέλτιστη χωροθέτηση P μονάδων, ώστε να ελαχιστοποιηθεί η σταθμισμένη διανυόμενη απόσταση μεταξύ των σημείων ζήτησης και των χωροθετημένων μονάδων.

- Οι πιθανές θέσεις τοποθέτησης των μονάδων παροχής εξυπηρέτησης θεωρείται πως βρίσκονται επί των κόμβων του υπό εξέταση δικτύου

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i d_{ij} y_{ij} & x_j & \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J \\ & \sum_{j \in J} x_j = p & y_{ij} & \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J \\ & \sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I & y_{ij} & \leq x_j \quad \forall i \in I, j \in J \end{aligned}$$

The PMP: Applications

- Facility location



- consumer (client)
- possible location of supplier (server)
- supplier (server), e.g. supermarket, bakery, laundry, etc.

Διαφέρει από το πρόβλημα p-κέντρου που ελαχιστοποιεί τη μέγιστη απόσταση μεταξύ των κόμβων ζήτησης και των αντίστοιχων χωροθετημένων μονάδων!

Το πρόβλημα χωροθέτησης σταθερού κόστους (the fixed charge location problem)

Στόχος: ο προσδιορισμός:

- ✓ του βέλτιστου αριθμού μονάδων προς χωροθέτηση
 - ✓ των κατάλληλων τοποθεσιών εγκατάστασης των μονάδων αυτών
 - ✓ της βέλτιστης κατανομής των κόμβων ζήτησης στις διάφορες μονάδες παροχής εξυπηρέτησης για την ελαχιστοποίηση του κόστους χωροθέτησης και μετακίνησης
- Υπάρχει ανώτατο όριο στη ζήτηση που είναι σε θέση να εξυπηρετήσει η κάθε μονάδα
 - ο εκάστοτε κόμβος ζήτησης δεν είναι απαραίτητο ότι θα ανατεθεί στην πλησιέστερη προς αυτόν χωροθετημένη μονάδα

$$\text{Min} \quad \sum_{j \in J} f_j x_j + \alpha \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i d_{ij} y_{ij}$$

Παράδειγμα

- Μια βιομηχανία έχει τρεις επιλογές τοποθεσίας για την κατασκευή εργοστασίου. Τα μεταβλητά και σταθερά κόστη κάθε τοποθεσίας φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Θα κατασκευαστεί τουλάχιστον 1 εργοστάσιο, ενώ η βιομηχανία θέλει να παράγει τουλάχιστον 38000 μονάδες προϊόντος ανά έτος. Να βρεθεί η βέλτιστη λύση.

Τοποθεσία	Ετήσιο σταθερό κόστος	Μοναδιαίο Κόστος	Ετήσια Ικανότητα
A	340.000	32	21000
B	270.000	33	20000
Γ	290.000	30	19000

Επίλυση (1/2)

Ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης:

$$Y1 \quad \left\{ \begin{array}{l} =1 \text{ αν κατασκευαστεί στην θέση A} \\ =0 \text{ αν όχι} \end{array} \right.$$

$$Y2 \quad \left\{ \begin{array}{l} =1 \text{ αν κατασκευαστεί στην θέση B} \\ =0 \text{ αν όχι} \end{array} \right.$$

$$Y3 \quad \left\{ \begin{array}{l} =1 \text{ αν κατασκευαστεί στην θέση B} \\ =0 \text{ αν όχι} \end{array} \right.$$

X1 : ο αριθμός των μονάδων που θα παραχθούν στη θέση A

X2 : ο αριθμός των μονάδων που θα παραχθούν στη θέση B

X3 : ο αριθμός των μονάδων που θα παραχθούν στη θέση Γ

Επίλυση (2/2)

- Το ΠΓΠ είναι:

$$\text{Min } z = 340000Y_1 + 270000Y_2 + 290000Y_3 + 32x_1 + 33x_2 + 30x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + x_3 \geq 38000$$

$$x_1 \leq 21000 Y_1$$

$$x_2 \leq 20000 Y_2$$

$$x_3 \leq 19000 Y_3$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 = 0 \text{ ή } 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ και ακέραιοι}$$

- Η βέλτιστη λύση είναι:
- $Y_1 = 0, Y_2 = 1, Y_3 = 1, x_1 = 0, x_2 = 19000, x_3 = 19000$
- $Z = 1.757.000$

Πρόβλημα Επιλογής Θέσης

ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- n πιθανές τοποθεσίες εγκατάστασης για m πελάτες.
- c_i , $i=1,\dots,n$: κόστος ανοίγματος εγκατάστασης στη θέση i .
- d_{ij} , $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$: κόστος εξυπηρέτησης πελατών i από μια τοποθεσία j .

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΒΕΛΤΙΣΤΗΣ ΛΥΣΗΣ

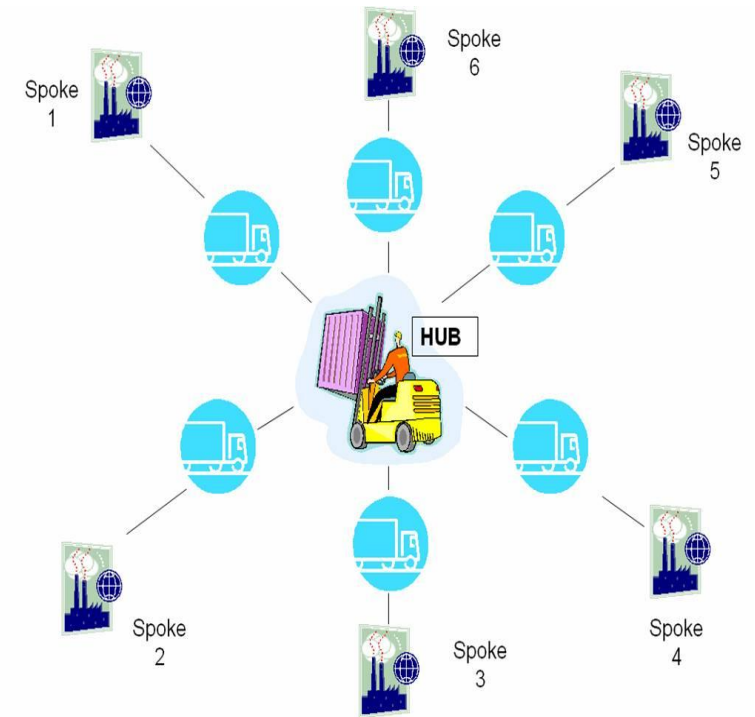
$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n c_j y_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Όπου :

- $y_j = 1$ αν η τοποθεσία j έχει επιλεγεί.
- $x_{ij} = 1$ αν η τοποθεσία i εξυπηρετεί τους πελάτες j .

Σύστημα «πλήμνης και ακτίνας» (hub and spoke system)

- Οι διαδικασίες μεταφοράς των εμπορευμάτων βασίζονται στο λεγόμενο σύστημα «πλήμνης και ακτίνας» (hub and spoke system).
- Τα εμπορεύματα παραλαμβάνονται από τον εκάστοτε πελάτη / αποστολέα και στη συνέχεια μεταφέρονται σε ένα κεντρικό σημείο (hub) από όπου μεταφέρονται στον τελικό τους προορισμό οδικώς ή αεροπορικώς.
- Τα συστήματα είναι σε θέση να μειώνουν αισθητά το κόστος μεταφοράς των εμπορευμάτων και παράλληλα συμβάλλουν στην εξοικονόμηση χρόνου
- Τίθεται το θέμα χωροθέτησης του κέντρου διακίνησης, δηλαδή της «πλήμνης» (hub), αλλά και της διαδρομής που θα ακολουθηθεί για την παραλαβή / διανομή των εμπορευμάτων



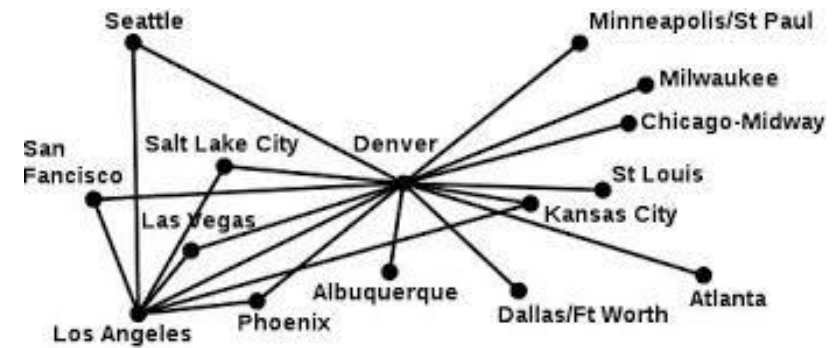
Προβλήματα χωροθέτησης πλήμνης (Hub location problems)

- Η μαθηματική προσέγγιση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι η εξής:

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} h_{ij} \left(\sum_{k \in N} c_{ik} y_{ik} + \sum_{m \in N} c_{jm} y_{jm} + \alpha \sum_{k \in N} \sum_{l \in N} c_{kl} y_{ik} y_{jl} \right)$$

$$\sum_{j \in N} x_j = p \quad y_{ij} \leq x_j \quad \forall i \in I, j \in J$$

$$\sum_{j \in J} y_{ij} = 1 \quad \forall i \in I \quad y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J$$
$$x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J$$



- Το παρόν πρότυπο θεωρεί ότι η μορφή του υπό εξέταση δικτύου είναι τέτοια, ώστε η κάθε διαδρομή που θα ακολουθείται για τη μεταφορά του εμπορεύματος μεταξύ δύο οποιονδήποτε κόμβων i και j θα συναντάει το πολύ δύο διαφορετικά κέντρα διακίνησης
- Η ανάθεση κόμβων στο πλησιέστερο προς αυτούς κέντρο διακίνησης δεν αποτελεί πάντα τη βέλτιστη λύση του προτύπου:
 - ο αντικειμενικός στόχος είναι η μείωση του συνολικού κόστους μετακίνησης που αφορά στη ροή του προϊόντος από κόμβο σε κόμβο και όχι στο κόστος μεταφοράς από τον εκάστοτε κόμβο προς το αντίστοιχο κέντρο διακίνησης.

Το πρόβλημα χωροθέτησης μέγιστου αθροίσματος (the maximum location problem)

Στόχος: η εύρεση της βέλτιστης λύσης σε ότι αφορά στη χωροθέτηση p μονάδων παροχής εξυπηρέτησης, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η μέση σταθμισμένη διανυόμενη απόσταση μεταξύ των σημείων ζήτησης και των χωροθετημένων μονάδων

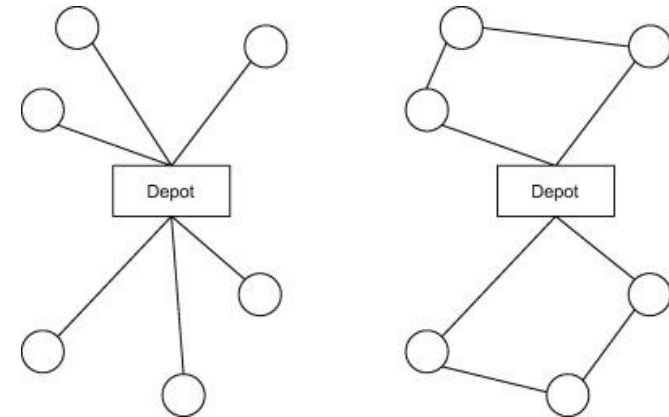
- Σε περιπτώσεις «μη επιθυμητών» εγκαταστάσεων, όπως για παράδειγμα κτίρια φυλακών και χώροι υγειονομικής ταφής, ζητούμενο είναι η χωροθέτησή τους σε όσο το δυνατόν *μεγαλύτερη* απόσταση από τα σημεία ζήτησης
- Το παρόν πρότυπο έχει ως αντικειμενικό στόχο τη *μεγιστοποίηση* της μέσης σταθμισμένης διανυόμενης απόστασης σε αντίθεση με το πρόβλημα p -διάμεσου, το οποίο τείνει να *ελαχιστοποιήσει* την απόσταση αυτή
- Ανατίθενται οι κόμβοι ζήτησης στην πιο *απομακρυσμένη* μονάδα παροχής εξυπηρέτησης και όχι στην πλησιέστερη.

Πρότυπα χωροθέτησης και δρομολόγησης (location-routing models)

- Περιπτώσεις χωροθέτησης όπου η συνολική αποτελεσματικότητα εξαρτάται από
 - την απόσταση μεταξύ των χωροθετημένων μονάδων και των σημείων ζήτησης
 - την αποτελεσματική δρομολόγηση των οχημάτων που εξυπηρετούν τη δεδομένη ζήτηση του δικτύου
- Η εξυπηρέτηση των κόμβων ζήτησης πραγματοποιείται με πολλαπλές διαδρομές οχημάτων και όχι απευθείας μέσω της χωροθετημένης μονάδας

Στόχος:

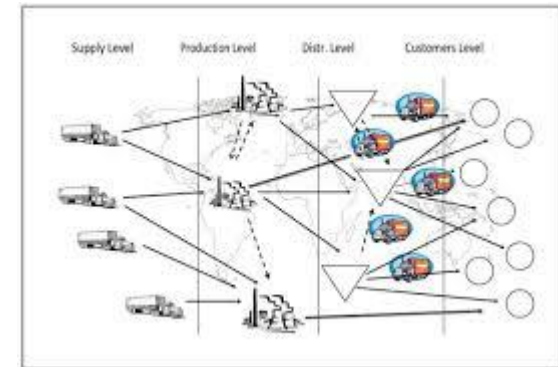
- ✓ βέλτιστη χωροθέτηση των μονάδων παροχής εξυπηρέτησης
- ✓ βέλτιστη ανάθεση των κόμβων ζήτησης στις χωροθετημένες μονάδες
- ✓ βέλτιστη δρομολόγηση των οχημάτων



Πρότυπα χωροθέτησης μονάδων και σχεδιασμός δικτύων (facility location-network design models)

Στόχος:

- ✓ ο βέλτιστος σχεδιασμός του δικτύου
- ✓ η κατάλληλη χωροθέτηση των μονάδων εξυπηρέτησης, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος
- Το δίκτυο, εντός του οποίου εξετάζεται η χωροθέτηση μονάδων παροχής εξυπηρέτησης, δεν είναι δεδομένο. Πρέπει:
 - αρχικά να προσδιοριστεί η τελική μορφή του δικτύου
 - στη συνέχεια να αποφασιστεί σε ποιες θέσεις αυτού θα χωροθετηθούν οι εκάστοτε μονάδες
- Εφαρμογές στο σχεδιασμό:
 - σιδηροδρομικών δικτύων
 - συστημάτων διανομής ηλεκτρισμού
 - υπολογιστικών δικτύων
 - Δικτύων διανομής με κέντρα διακίνησης (hubs)



Πρότυπα χωροθέτησης πολλαπλών στόχων (multi-objective models)

- Χειρίζονται πολλούς αντικειμενικούς στόχους
- Οι στόχοι είναι δυνατόν να είναι αντικρουόμενοι
- Τρόπος προσέγγισης τέτοιων προβλημάτων είναι η ανάλυση των διάφορων στόχων και η ταξινόμησή τους ανάλογα με την σημασία τους
- Η ταξινόμηση αυτή προκύπτει από την κατάλληλη στάθμιση των αντικειμενικών στόχων, βάσει της οποίας θα ακολουθήσει η εύρεση της βέλτιστης λύσης
 - Με βάση τη μέθοδο της στάθμισης δύο αντικειμενικοί στόχοι Z_A και Z_B θα σταθμιστούν ανάλογα με αντικειμενική τους αξία, ενώ το άθροισμα των ειδικών βαρών που θα χρησιμοποιηθούν για τη στάθμιση αυτή θα πρέπει να είναι ίσο με τη μονάδα.
 - Θα προκύψει ένας νέος στόχος Z_C προς επίτευξη, για τον οποίο θα ισχύει:

$$Z_C = \lambda \cdot Z_A + (1 - \lambda) \cdot Z_B, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

Δυναμικά πρότυπα χωροθέτησης (dynamic location models)

- Λαμβάνουν υπόψη τους τον παράγοντα «χρόνο»
- Υπάρχουν δύο διαφορετικές κατηγορίες δυναμικών προτύπων χωροθέτησης:
 - τα «απόλυτα» (implicitly dynamic): θεωρούν ότι η ζήτηση του εκάστοτε δικτύου θα μεταβάλλεται με το πέρασμα του χρόνου, αλλά δεν θα προκύψουν μεταβολές στις χωροθετημένες μονάδες
 - τα «συγκεκριμένα» (explicitly dynamic) : εξετάζουν τόσο την πιθανότητα μη λειτουργίας των ήδη χωροθετημένων μονάδων, αλλά και τη μελλοντική λειτουργία νέων
- Δυναμικές παράμετροι:
 - ✓ οι χρόνοι μετακίνησης
 - ✓ τα κόστη χωροθέτησης και μετακίνησης
 - ✓ τα αντίστοιχα κέρδη
 - ✓ η διαθεσιμότητα των χωροθετημένων μονάδων.

Στοχαστικά πρότυπα χωροθέτησης (stochastic location models)

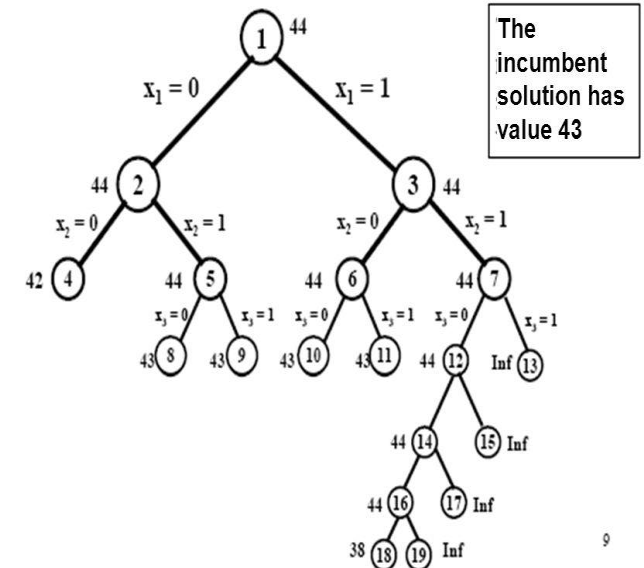
- Εξετάζουν περιπτώσεις, κατά τις οποίες κάποιες ή όλες οι παράμετροι δε θεωρούνται γνωστές και δεν είναι δυνατόν να προβλεφθούν
- Τέτοιες παράμετροι είναι
 - ✓ η ζήτηση του δικτύου
 - ✓ οι χρόνοι μετακίνησης
 - ✓ τα κόστη χωροθέτησης
 - ✓ η διαθεσιμότητα των χωροθετημένων μονάδων
- Ασχολούνται με την ύπαρξη βαθμού αβεβαιότητας στα πραγματικά συστήματα χωροθέτησης

Στόχος: ο προσδιορισμός των κατάλληλων θέσεων τοποθέτησης των μονάδων παροχής εξυπηρέτησης, έτσι ώστε το σύνολο του συστήματος να πληροί τους όρους των περιορισμών του εκάστοτε προτύπου.

Επίλυση των προτύπων χωροθέτησης

- Το πρώτο βήμα επίλυσης των συγκεκριμένων προβλημάτων είναι η διατύπωση του κατάλληλου μαθηματικού προτύπου που θα αντιστοιχεί στην υπό εξέταση περίπτωση.
- Συνήθως τα περισσότερα προβλήματα χωροθέτησης ανήκουν στην κατηγορία των NP- Hard προβλημάτων
- Η προσέγγισή με κάποιες από τις μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού, όπως αυτή του «κλάδου και φράγματος» (branch and bound), αποδεικνύεται επωφελείς μόνο σε περιπτώσεις προβλημάτων περιορισμένου μεγέθους.
- Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι το πρόβλημα χωροθέτησης καθορισμένης κάλυψης (set covering location problem) όπου κατά το 95% των περιπτώσεων οι λύσεις που προκύπτουν με χρήση γραμμικού προγραμματισμού είναι ακέραιες
- Γίνεται χρήση προσεγγιστικών μεθόδων, όπως οι κατασκευαστικές, οι βελτιωτικές, αλλά και οι εξελικτικές μέθοδοι.

Branch and Bound



Επίλυση των προτύπων χωροθέτησης

- Ευριστικές μέθοδοι: βασίζονται στα χαρακτηριστικά του προβλήματος και δεν μπορούν να εγγυηθούν την εύρεση της βέλτιστης λύσης. Είναι όμως πολύ χρήσιμες όταν ζητείται μια απλώς «καλή» λύση.
 - Άπληστες μέθοδοι
 - Τοπική Αναζήτηση
 - Ανταλλακτικές μέθοδοι
 - Κατασκευαστικές μέθοδοι
- Ακριβείς αλγόριθμοι: Οι προσεγγίσεις αυτές βασίζονται στην κατάστρωση των προβλημάτων ως προβλήματα Ακέραιου Προγραμματισμού.
 - Μέθοδος κλάδου και φράγματος (branch and bound)
 - η μέθοδος της απαρίθμησης (enumeration)
 - Χαλάρωση κατά Lagrange
 - Αποσύνθεση κατά Bender (Benders decomposition)
- Μετα-ευριστικές μέθοδοι: Υψηλότερου επιπέδου αλγοριθμικές μέθοδοι που είναι ανεξάρτητες του προβλήματος και περιλαμβάνουν μηχανισμούς για την καθοδήγηση της αναζήτησης στο χώρο των λύσεων.
 - Γενετικοί αλγόριθμοι
 - Αναζήτηση tabu
 - Αναζήτηση μεταβλητής γειτονιάς
 - Αλγόριθμος αποικίας μυρμηγκιών, μελισσών
 - Προσομοιωμένη ανόπτηση

Ασκήσεις

Πρόβλημα χωροθέτησης

Υπάρχουν 6 πόλεις σε μία περιοχή. Η πολιτεία προσπαθεί να αποφασίσει που να εγκαταστήσει πυροσβεστικούς σταθμούς. Στόχος είναι να κατασκευαστεί ο ελάχιστος αριθμός σταθμών με την προϋπόθεση ότι κάθε πόλη δεν απέχει πάνω από 15 λεπτά από κάποιο σταθμό. Δίνονται οι αποστάσεις σε λεπτά :

Από/Προς	1	2	3	4	5	6
1	0	10	20	30	30	20
2	10	0	25	35	20	10
3	20	25	0	15	30	20
4	30	35	15	0	15	25
5	20	20	30	15	0	14
6	20	10	20	25	14	0

Επίλυση

- Ορίζουμε τις μεταβλητές απόφασης:
- $X_i = 1$ αν κατασκευαστεί στην θέση i
- $= 0$ αν όχι
- $i = \{1, \dots, 6\}$

Επίλυση

- Πόλεις που απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από 15 λεπτά :
- City 1 1, 2 (City 1 constraint)
- City 2 1, 2, 6 (City 2 constraint)
- City 3 3, 4
- City 4 3, 4, 5
- City 5 4, 5, 6
- City 6 2, 5, 6

Επίλυση

- Το ΠΓΠ είναι:

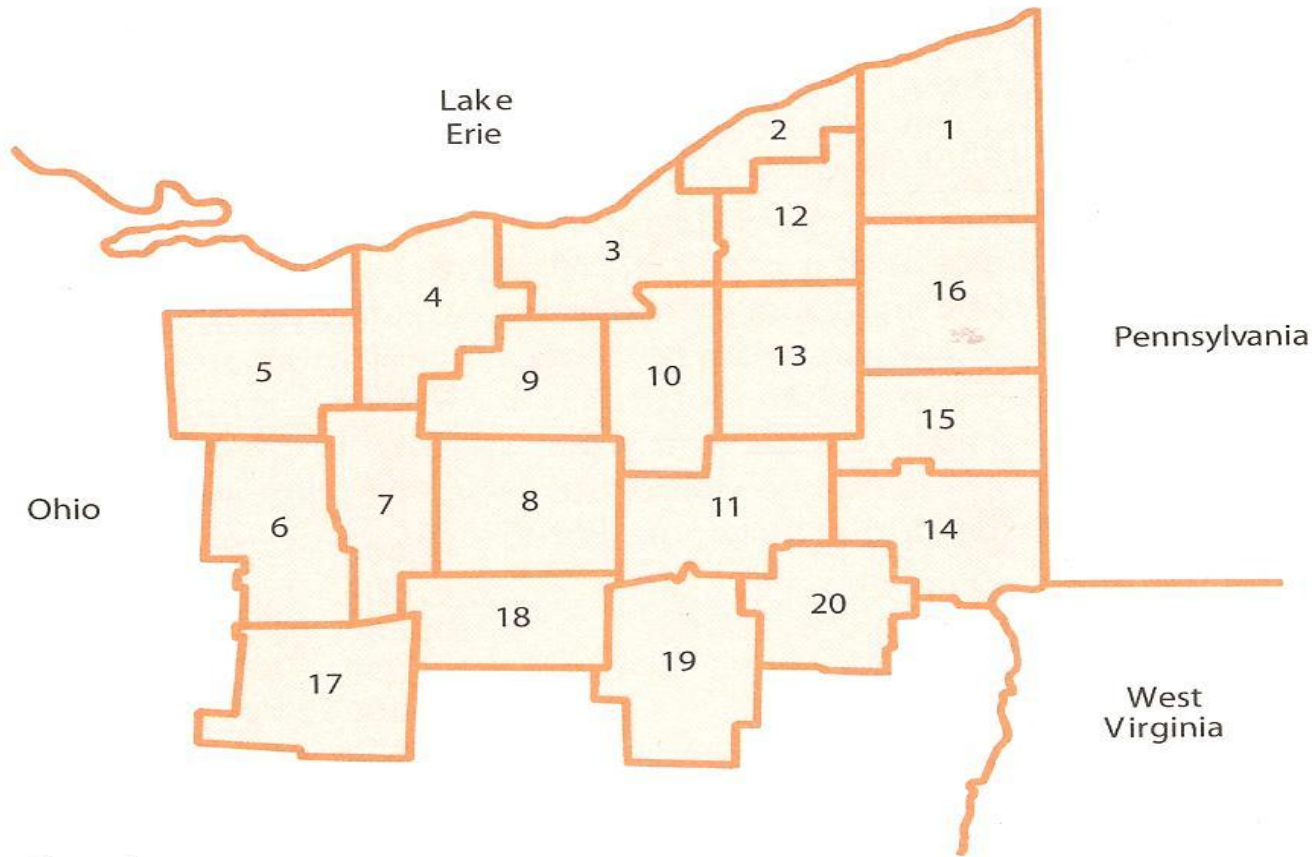
$$\begin{aligned} \text{Min } z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 1 \text{ (city 1)} \\ & x_1 + x_2 + x_6 \geq 1 \text{ (city 2)} \\ & x_3 + x_4 \geq 1 \text{ (City 3)} \\ & x_3 + x_4 + x_5 \geq 1 \text{ (City 4)} \\ & x_4 + x_5 + x_6 \geq 1 \text{ (City 5)} \\ & x_2 + x_5 + x_6 \geq 1 \text{ (City 6)} \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 = 0 \text{ ή } 1 \end{aligned}$$

- Η βέλτιστη λύση είναι:
- $x_2 = x_4 = 1, x_1 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$.
- $Z=2$

Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (1)

- Το τμήμα γεωγραφικής επέκτασης του τραπεζικού οργανισμού Ohio Trust εξετάζει την επέκταση των δραστηριοτήτων του σε μια περιοχή 20 περιφερειών στο βορειο-ανατολικό τμήμα του Ohio
- Η Ohio Trust δεν διαθέτει κεντρικό κατάστημα σε καμία από τις 20 περιφέρειες
- Σύμφωνα με το ισχύον νομικό πλαίσιο, εάν μια τράπεζα εγκαταστήσει κεντρικό κατάστημα σε μία περιφέρεια, έχει τη δυνατότητα εγκατάστασης υποκαταστημάτων στη συγκεκριμένη περιφέρεια, καθώς και σε όλες τις όμορες περιφέρειες
- Όμως για να δημιουργηθεί ένα κεντρικό κατάστημα, η Ohio Trust θα πρέπει να εξασφαλίσει ειδική άδεια από την εποπτική αρχή της πολιτείας του Ohio ή να εξαγοράσει ένα υφιστάμενο κεντρικό κατάστημα άλλου οργανισμού

Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (2)



Περιφέρειες

- | | | | |
|--------------|-------------|----------------|----------------|
| 1. Ashtabula | 6. Richland | 11. Stark | 16. Trumbull |
| 2. Lake | 7. Ashland | 12. Geauga | 17. Knox |
| 3. Cuyahoga | 8. Wayne | 13. Portage | 18. Holmes |
| 4. Lorain | 9. Medina | 14. Columbiana | 19. Tuscarawas |
| 5. Huron | 10. Summit | 15. Mahoning | 20. Carroll |

Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (3)

- Στον Πίνακα της επόμενης διαφάνειας παρουσιάζονται οι εξεταζόμενες 20 περιφέρειες και οι όμορες περιφέρειες
- Για παράδειγμα η περιφέρεια Ashtabula συνορεύει με τις περιφέρειες Lake, Geauga και Trumbull, η περιφέρεια Lake County με τις περιφέρειες Ashtabula, Cuyahoga και Geauga, κ.ο.κ.

Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (4)

Εξεταζόμενες περιφέρειες	Όμορες περιφέρειες (κατά αύξοντα αριθμό)
1. Ashtabula	2, 12, 16
2. Lake	1, 3, 12
3. Cuyahoga	2, 4, 9, 10, 12, 13
4. Lorain	3, 5, 7, 9
5. Huron	4, 6, 7
6. Richland	5, 7, 17
7. Ashland	4, 5, 6, 8, 9, 17, 18
8. Wayne	7, 9, 10, 11, 18
9. Medina	3, 4, 7, 8, 10
10. Summit	3, 8, 9, 11, 12, 13
11. Stark	8, 10, 13, 14, 15, 18, 19, 20
12. Geauga	1, 2, 3, 10, 13, 16
13. Portage	11, 15, 20
14. Columbiana	11, 15, 20
15. Mahoning	11, 13, 14, 16
16. Trumbull	1, 12, 13, 15
17. Knox	6, 7, 18
18. Holmes	7, 8, 11, 17, 19
19. Tuscarawas	11, 18, 20
20. Carroll	11, 14, 19

Εφαρμογές Δυναδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (5)

- Η Ohio Trust επιθυμεί να δραστηριοποιηθεί στο σύνολο των 20 περιφερειών δημιουργώντας όσο το δυνατόν λιγότερα κεντρικά καταστήματα
- Οι μεταβλητές «0-1» που πρέπει να οριστούν είναι οι εξής:
 - $x_i = 1$ εάν εγκατασταθεί κεντρικό κατάστημα στην περιφέρεια i ή 0 εάν δεν εγκατασταθεί κεντρικό κατάστημα σε αυτή ($i = 1, 2, \dots, 20$)
- Η αντικειμενική συνάρτηση που ελαχιστοποιεί τον αριθμό των κεντρικών υποκαταστημάτων που θα απαιτηθούν είναι
 - **$\text{Min } x_1 + x_2 + \dots + x_{20}$**

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (6)

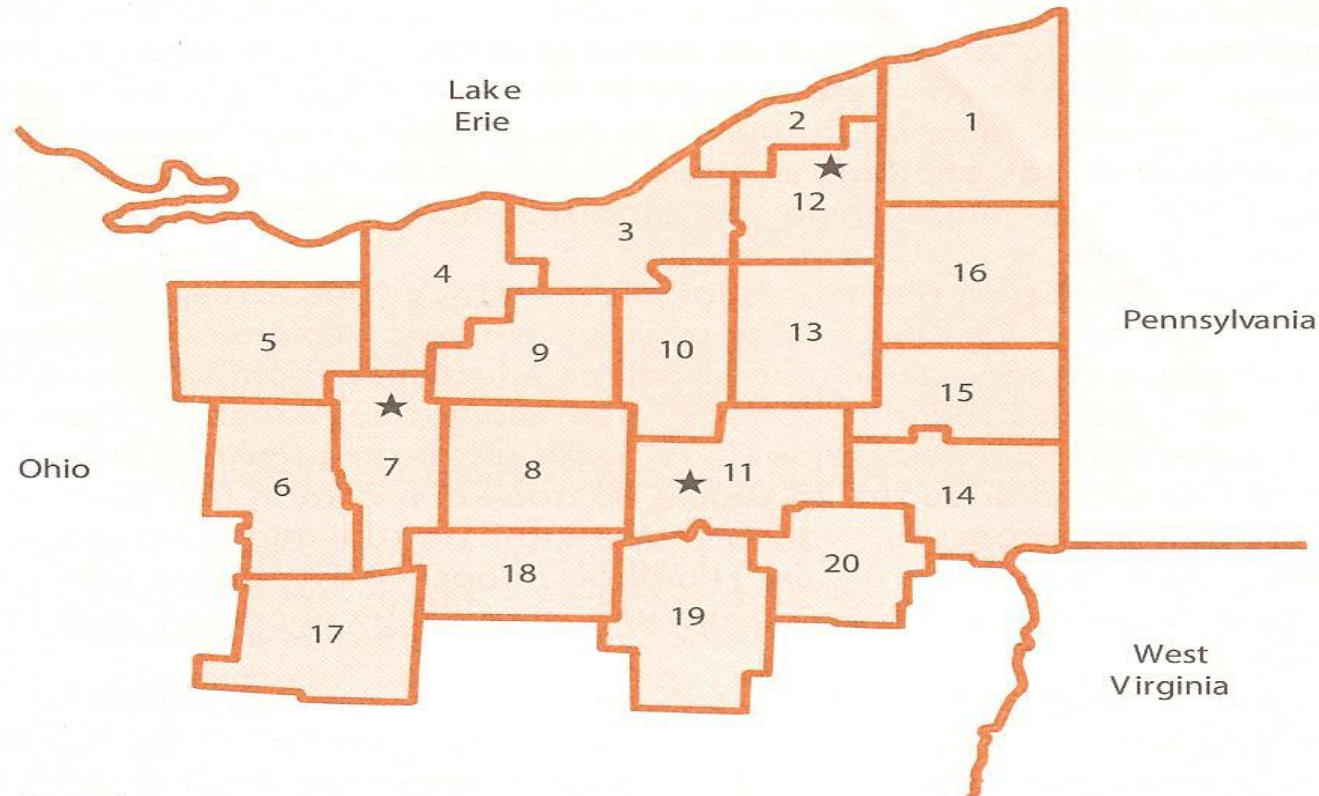
- Υποκατάστημα μπορούν να εγκατασταθούν σε μια περιφέρεια εάν αυτή διαθέτει κεντρικό κατάστημα ή εάν συνορεύει με περιφέρεια που διαθέτει κεντρικό κατάστημα
- Συνεπώς, απαιτείται η διατύπωση ενός περιορισμού για κάθε περιφέρεια
- Για παράδειγμα ο περιορισμός για την περιφέρεια Ashtabula θα είναι
 - $x_1 + x_2 + x_{12} + x_{16} \geq 1$ **(Ashtabula)**
- Η ικανοποίηση του συγκεκριμένου περιορισμού εξασφαλίζει την εγκατάσταση ενός τουλάχιστον υποκαταστήματος στην περιφέρεια Ashtabula ή σε μία ή περισσότερες από τις όμορες προς αυτήν περιφέρειες
- Δηλαδή εξασφαλίζει τη δυνατότητα εγκατάστασης υποκαταστημάτων στην περιφέρεια της Ashtabula

Εφαρμογές Δυαδικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (7)

- Το ολοκληρωμένο μοντέλο για το **πρόβλημα επιλογής θέσης τραπεζικών καταστημάτων** είναι:
 - $\text{Min } x_1 + x_2 + \dots + x_{20}$
 - **subject to**
 - $x_1 + x_2 + x_{12} + x_{16} \geq 1$ (Ashtabula)
 - $x_1 + x_2 + x_3 + x_{12} \geq 1$ (Lake)
 - .
 - .
 - .
 - $x_{11} + x_{14} + x_{19} + x_{20} \geq 1$ (Carroll)
 - $x_i = 0 \text{ ή } 1 \text{ για } i = 1, 2, \dots, 20$

Εφαρμογές Δυναμικών «0-1» μεταβλητών – Επιλογή θέσης εγκατάστασης τραπεζικών καταστημάτων (8)

- Περιφέρειες εγκατάστασης κεντρικών καταστημάτων της Ohio Trust



Περιφέρειες

- | | | | |
|--------------|-------------|----------------|----------------|
| 1. Ashtabula | 6. Richland | 11. Stark | 16. Trumbull |
| 2. Lake | 7. Ashland | 12. Geauga | 17. Knox |
| 3. Cuyahoga | 8. Wayne | 13. Portage | 18. Holmes |
| 4. Lorain | 9. Medina | 14. Columbiana | 19. Tuscarawas |
| 5. Huron | 10. Summit | 15. Mahoning | 20. Carroll |

★ Περιφέρειες στις οποίες
θα πρέπει να εγκατασταθεί
κεντρικό κατάστημα.