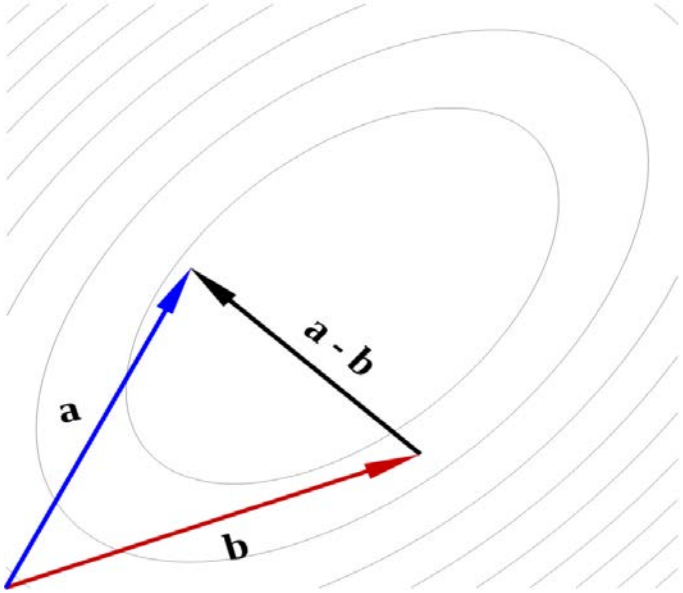
Εξελικτικοί Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης

Μέθοδος Βελτιστοποίησης Διαφορικής Εξέλιξης (Differential Evolution – DE)

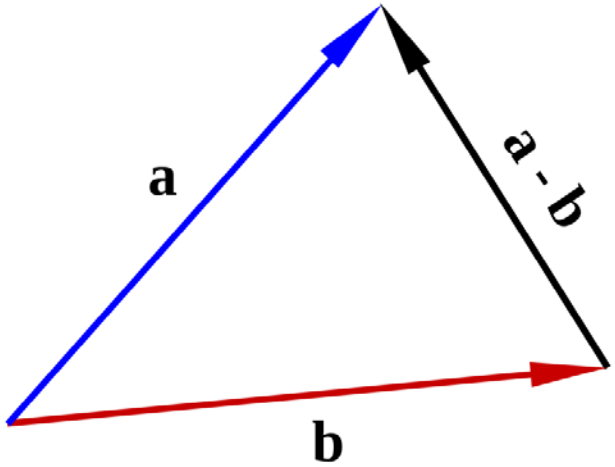


Υπεύθυνος μαθήματος : Αθανάσιος Χασιακός
Επιμέλεια παρουσίασης : Παναγιώτης Τσίκας

Διαφορική Εξέλιξη

Εξέλιξη: οι οργανισμοί που είναι καλύτερα προσαρμοσμένοι στο περιβάλλον μεταβιβάζουν χαρακτηριστικά επιβίωσης στους απογόνους τους περισσότερο αποτελεσματικά σε σχέση με εκείνους που είναι λιγότερο προσαρμοσμένοι.

Διάνυσμα: προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα



Μέθοδος Διαφορικής Εξέλιξης (Differential Evolution)

Ο αλγόριθμος Διαφορικής Εξέλιξης (Differential Evolution) αποτελεί βελτίωση του αλγορίθμου Genetic Annealing εισάγοντας τη διανυσματική διάφορα ως διαταραχή του πληθυσμού με στόχο τη δημιουργία νέων λύσεων.

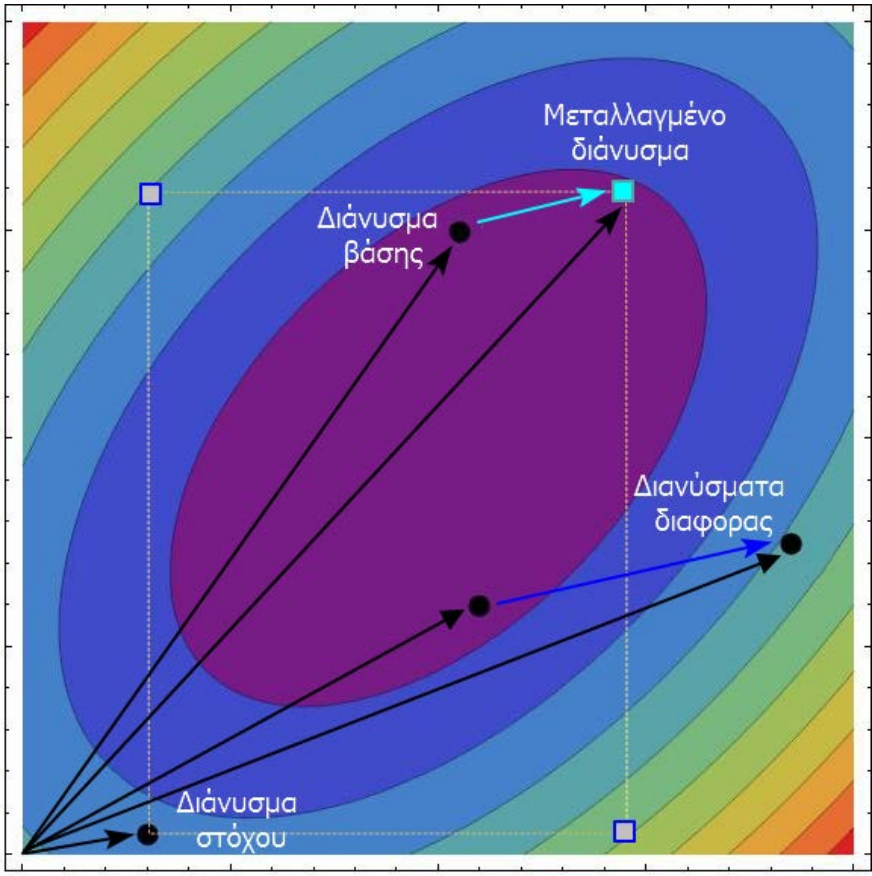
Βασικά σημεία της μεθόδου Διαφορικής Εξέλιξης:

1. Κωδικοποίηση των λύσεων
2. Συνάρτηση καταλληλότητας
3. Αρχικός πληθυσμός λύσεων
4. Διαδικασία επιλογής νέων λύσεων
5. Εφαρμογή γενετικών τελεστών
6. Διαδικασία τερματισμού

Ο αλγόριθμος αναπτύχθηκε από τους R. Storn and K. Price το 1995.

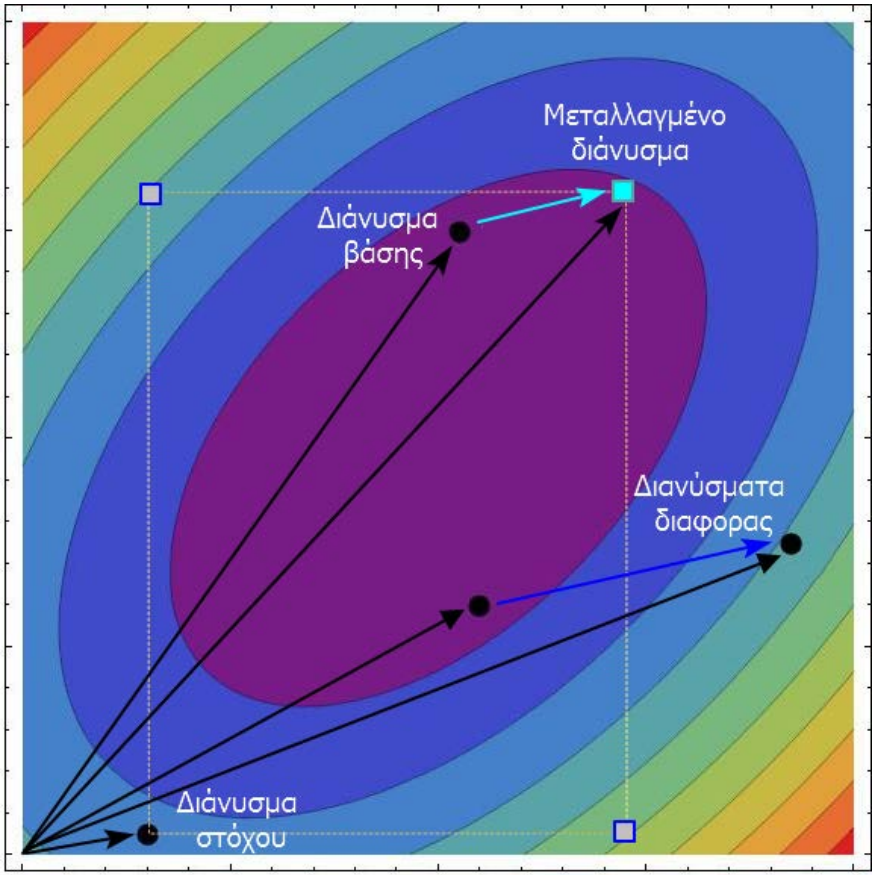
Διαφορική Εξέλιξη (Βήματα μεθόδου)

- Δημιουργούνται τυχαία ένας αριθμός (πληθυσμός) διανυσμάτων (λύσεων) του προβλήματος (δε χρειάζεται να υπάρξει ταξινόμηση τους).
- Σε κάθε φάση υλοποίησης της μεθόδου, επιλέγεται (εκ περιτροπής) κάθε μία από τις λύσεις ως διάνυσμα στόχος.
- Σε κάθε επιλογή διανύσματος στόχου, επιλέγονται τυχαία από τις λύσεις άλλα τρία διαφορετικά διανύσματα, το διάνυσμα βάσης και δύο διανύσματα διαφοράς από τα οποία λαμβάνεται το διανυσματικό μέγεθος της διαφοράς τους.
- Στο διάνυσμα βάσης προστίθεται (τυχαία προκύπτον) τμήμα της διαφοράς των διανυσμάτων διαφοράς που οδηγεί στο μεταλλαγμένο διάνυσμα.



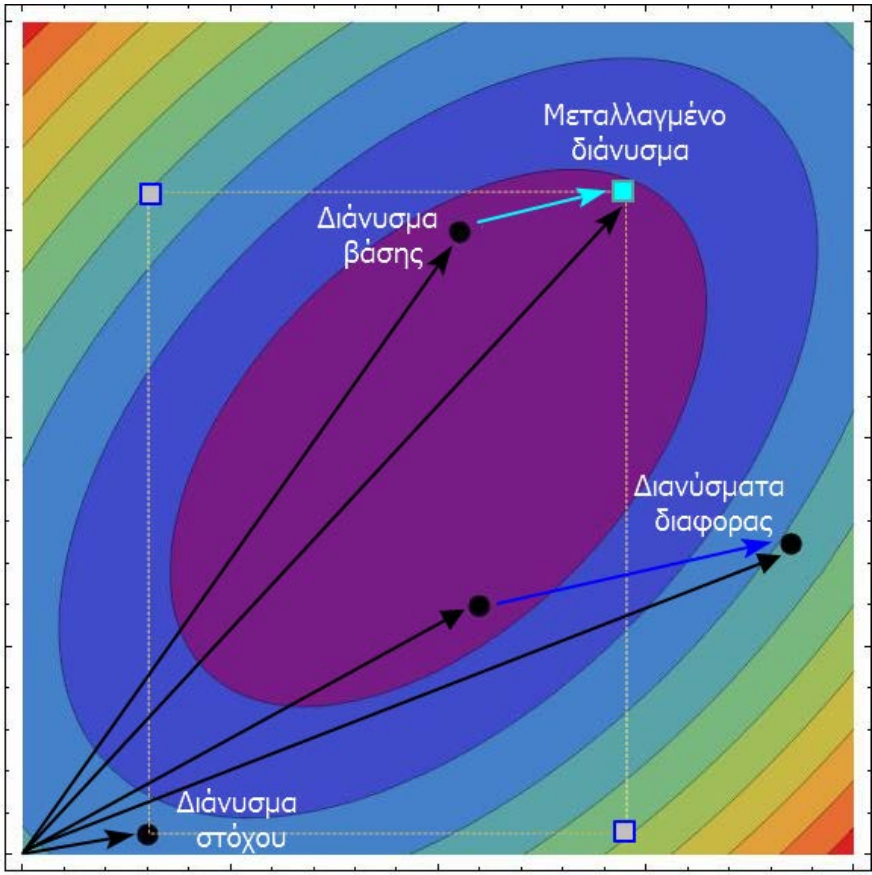
Διαφορική Εξέλιξη (Βήματα μεθόδου-συνέχεια)

- Γίνεται διασταύρωση του διανύσματος στόχου και του μεταλλαγμένου διανύσματος. Η διασταύρωση γίνεται όχι σε προκαθορισμένο σημείου του διανύσματος αλλά για κάθε μεταβλητή ξεχωριστά. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να επιλέγεται ως νέο διάνυσμα (λύση) είτε το διάνυσμα στόχος ή το μεταλλαγμένο διάνυσμα ή μια από τις άλλες κορυφές του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (ορθογωνίου πολυεπιπέδου σε περίπτωση προβλημάτων με πολλές μεταβλητές). Οι άλλες κορυφές του ορθογωνίου προκύπτουν αν επιλεγεί η μία μεταβλητή από το διάνυσμα στόχου και η άλλη από το μεταλλαγμένο διάνυσμα.
- Το προκύπτον (νέο) διάνυσμα συγκρίνεται με το διάνυσμα στόχου, κι αν είναι καλύτερο, το αντικαθιστά, άλλως παραμένει σε ισχύ το διάνυσμα στόχος.

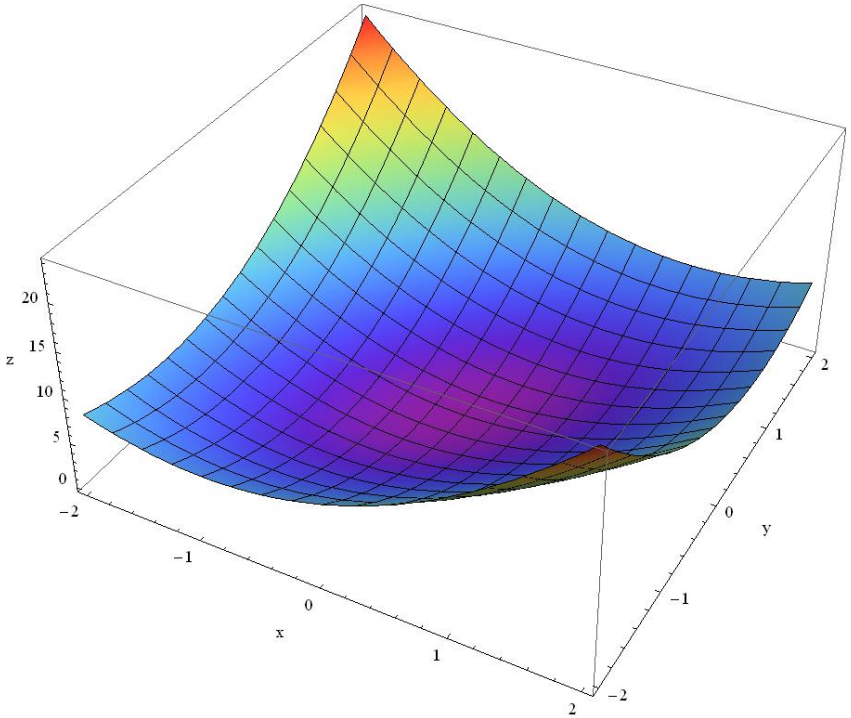


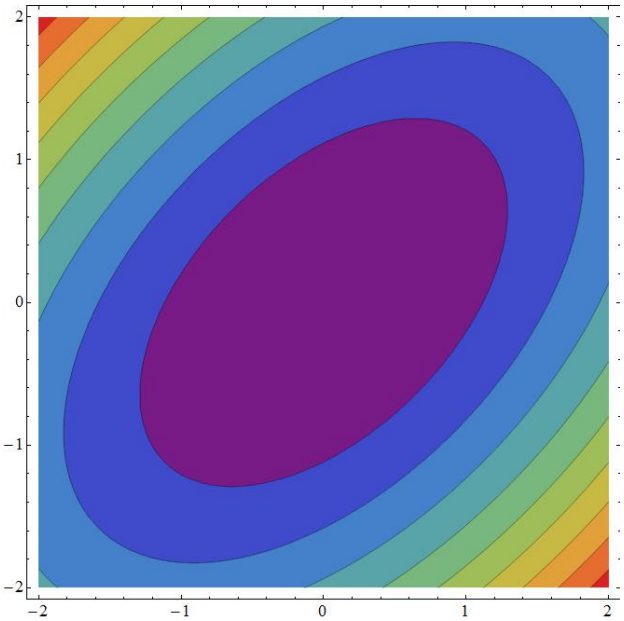
Διαφορική Εξέλιξη (σύγκριση με άλλες μεθόδους)

- Η μέθοδος μοιάζει με την Simulated Annealing γιατί στη διαδικασία δημιουργεί νέες λύσεις από τις υπάρχουσες πριν τη διασταύρωση.
- Μοιάζει επίσης με τους Genetic Algorithms γιατί κάνει διασταύρωση λύσεων.
- Οι βασικές διαφορές της από τους Genetic Algorithms είναι ότι αφενός δημιουργεί νέες λύσεις από τον αρχικό πληθυσμό πριν τη διαδικασία διασταύρωσης κι αφετέρου ότι η διασταύρωση των λύσεων δε γίνεται με προκαθορισμένο τρόπο (π.χ., σε συγκεκριμένες θέσεις του διανύσματος λύσεων) αλλά για κάθε μεταβλητή του διανύσματος λύσεων ξεχωριστά.



Παράδειγμα 1 | Ελαχιστοποίηση συνάρτησης





$$\min f(x,y) = x^2 + y^2 + (y-x)^2 \qquad -2 \le x, y \le 2$$

Βήμα 1: Αρχικός πληθυσμός (πρώτη επανάληψη, t=0)

$$\min f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (y-x)^2 \qquad -2 \le x, y \le 2$$

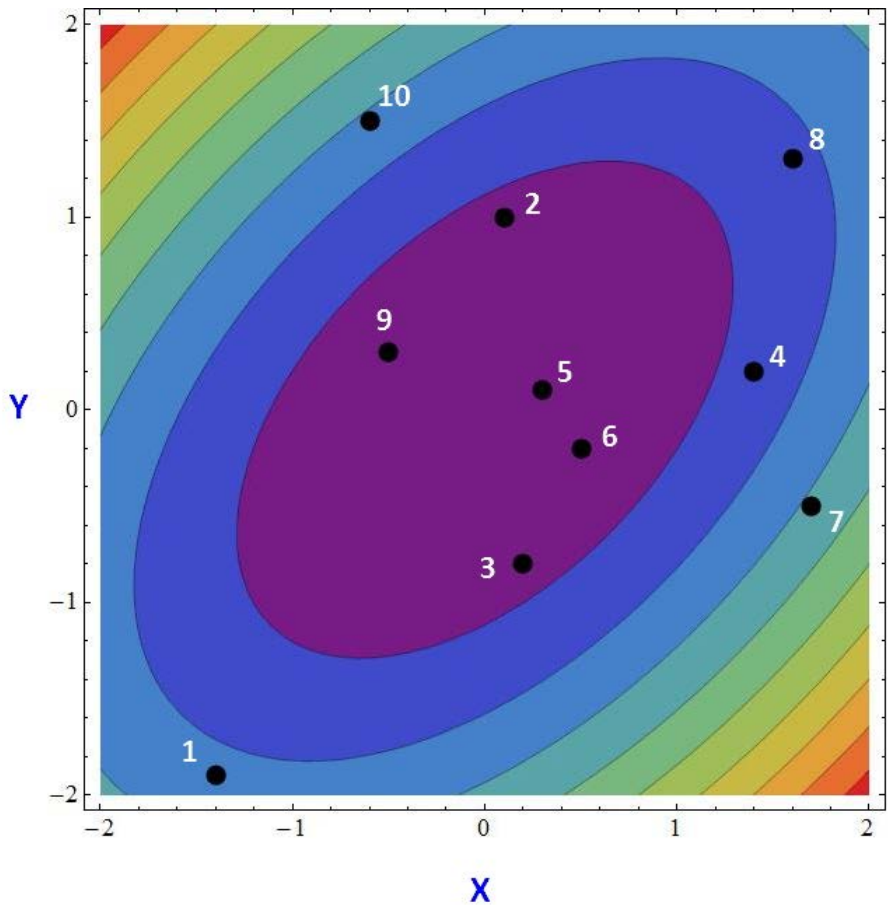
Αρχικός πληθυσμός διανυσμάτων (τυχαίων λύσεων)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-1,4	0,1	0,2	1,4	0,3	0,5	1,7	1,6	-0,5	-0,6
Y	-1,9	1,0	-0,8	0,2	0,1	-0,2	-0,5	1,3	0,3	1,5
	5,8	1,8	1,7	3,4	0,1	0,8	8,0	4,3	1,0	7,0

Βήμα 1: Αρχικός πληθυσμός (t=0)

$$\min f(x,y) = x^2 + y^2 + (y-x)^2 \qquad -2 \le x, y \le 2$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-1,4	0,1	0,2	1,4	0,3	0,5	1,7	1,6	-0,5	-0,6
Y	-1,9	1,0	-0,8	0,2	0,1	-0,2	-0,5	1,3	0,3	1,5
	5,8	1,8	1,7	3,4	0,1	0,8	8,0	4,3	1,0	7,0



Γραφική απεικόνιση θέσης αρχικών λύσεων στο χώρο αναζήτησης

Βήμα 2: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 1 (t=0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-1,4	0,1	0,2	1,4	0,3	0,5	1,7	1,6	-0,5	-0,6
Y	-1,9	1,0	-0,8	0,2	0,1	-0,2	-0,5	1,3	0,3	1,5
	5,8	1,8	1,7	3,4	0,1	0,8	8,0	4,3	1,0	7,0

2α) Επιλογή διανύσματος στόχου

Διάνυσμα 1 (το πρώτο από τα δέκα)

X_1 = (-1.4, -1.9) → f(-1.4, -1.9) = 5.8

2β) Επιλογή διανύσματος βάσης

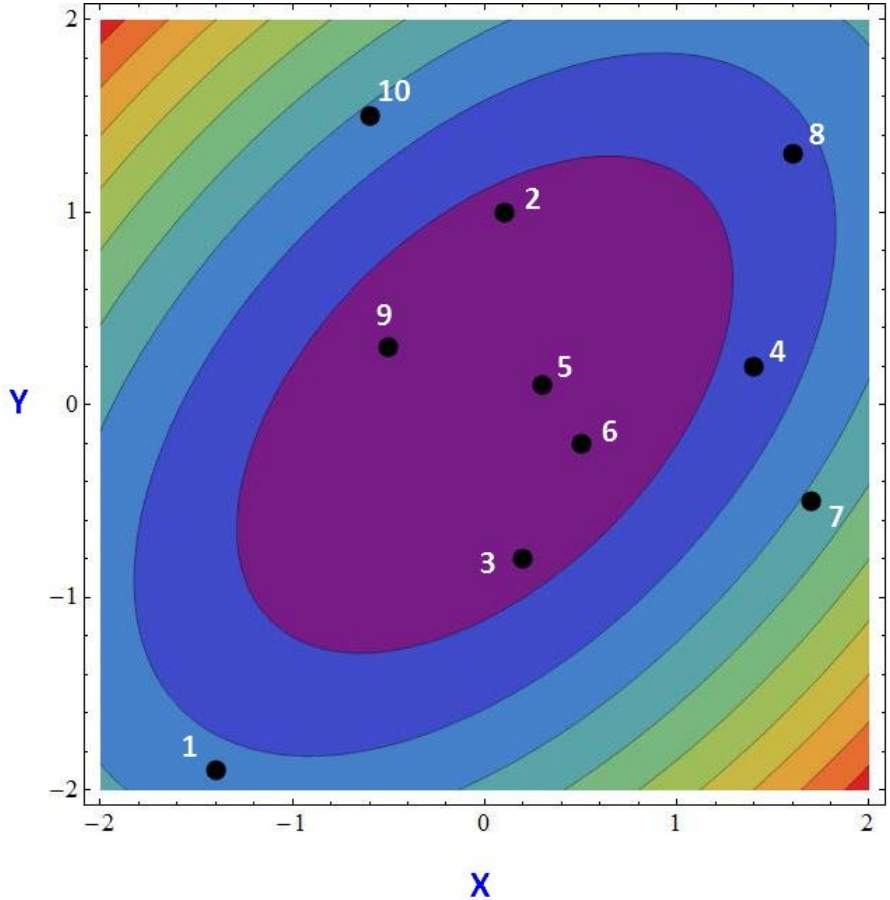
Τυχαία επιλέγω ένα διάνυσμα από 1 έως 10 (εκτός από το διάνυσμα στόχου) | έστω το 2

ή

Με τη μέθοδο του τουρνουά επιλέγω δυο διανύσματα από 1 έως 10 και κρατώ το καλύτερο | έστω 4 και 2 → καλύτερο το 2

2γ) Επιλογή των διανυσμάτων διαφοράς

Τυχαία επιλέγω δυο διανύσματα από 1 έως 10 (εκτός από τα διανύσματα βάσης και στόχου) | έστω 7 και 3



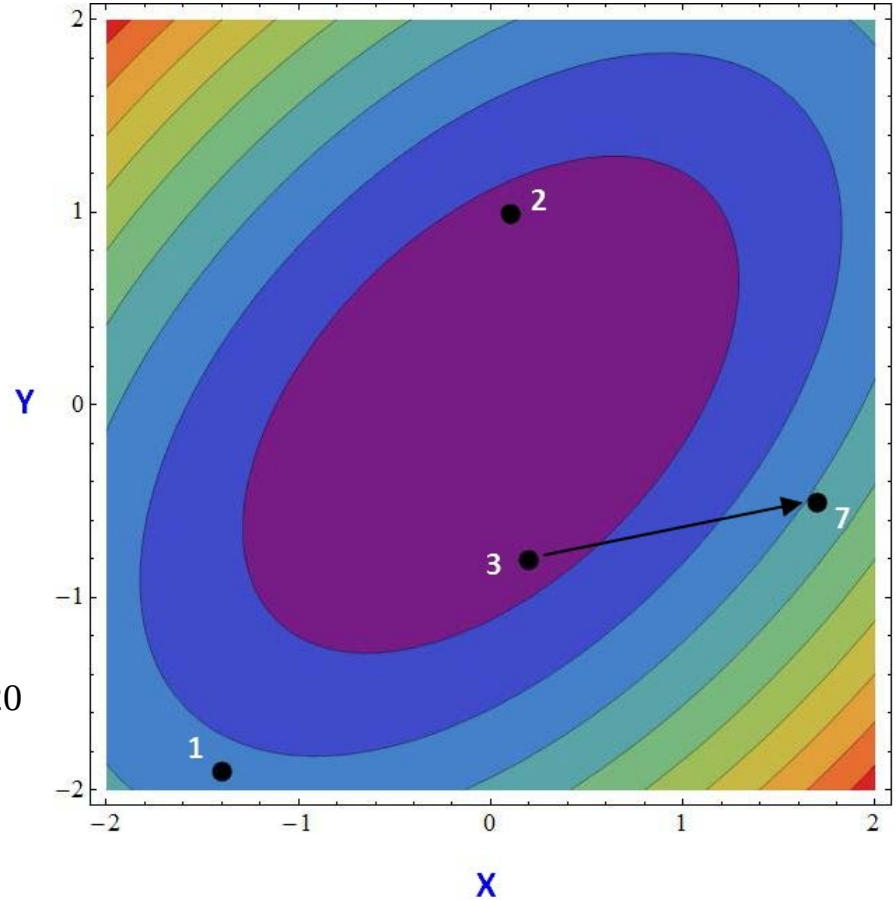
Βήμα 2: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 1 (t=0)

2δ) Διαδικασία μετάλλαξης

$$V_{2,i} = X_{2,i} + F_i \cdot \left(X_{7,i} - X_{3,i}\right)$$

$V_{2,i}$: Νέο διάνυσμα (μετά τη μετάλλαξη)
$X_{2,i}$: Διάνυσμα βάσης
$X_{7,i}$: 7ο διάνυσμα του πληθυσμού
$X_{3,i}$: 3ο διάνυσμα του πληθυσμού
F_i: Συντελεστές κλίμακας [0 – 2]
i: Μεταβλητές προβλήματος (x, y)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-1,4	0,1	0,2	1,4	0,3	0,5	1,7	1,6	-0,5	-0,6
Y	-1,9	1,0	-0,8	0,2	0,1	-0,2	-0,5	1,3	0,3	1,5
	5,8	1,8	1,7	3,4	0,1	0,8	8,0	4,3	1,0	7,0



$X_2 = (0.1,\ 1.0) \rightarrow f(X_2) = 1.82$

$X_7 = (1.7, -0.5)$

$X_3 = (0.2, -0.8)$

$$V_{2,1} = X_{2,1} + F \cdot \left(X_{7,1} - X_{2,1}\right) = 0.1 + 0.20 \cdot (1.7 - 0.2) = 0.40$$

$$V_{2,2} = X_{2,2} + F \cdot \left(X_{7,2} - X_{2,2}\right) = 1.0 + 0.67 \cdot (-0.5 - (-0.8)) = 1.20$$

$V_2 = (0.40, 1.20)$

Βήμα 2: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 1 (t=0)

2ε) Διαδικασία Διασταύρωσης

επιλογή πιθανότητας διασταύρωσης P | έστω P=0.50

$$U_{1,i} = \begin{cases} V_{2,i} & \alpha\nu \quad \delta \le P \\ X_{1,i} & \end{cases}$$

$V_{2,i}$: Διάνυσμα από τη μετάλλαξη

$X_{1,i}$: Διάνυσμα στόχου

$U_{1,i}$: Νέο διάνυσμα (μετά από τη διασταύρωση)

δ: Τυχαίος αριθμός [0 – 1]

P: Πιθανότητα διασταύρωσης

i: Μεταβλητές

Αν κάποια μεταβλητή ($V_{2,i}$) είναι εκτός ορίων, απορρίπτεται οπότε για $U_{1,i}$ επιλέγεται η αντίστοιχη τιμή από το διάνυσμα στόχου ($X_{1,i}$).

V_2 = (0.40, 1.20) → $f(V_2)$= 1.82

X_1 = (-1.40, -1.90) → $f(X_1)$= 5.82

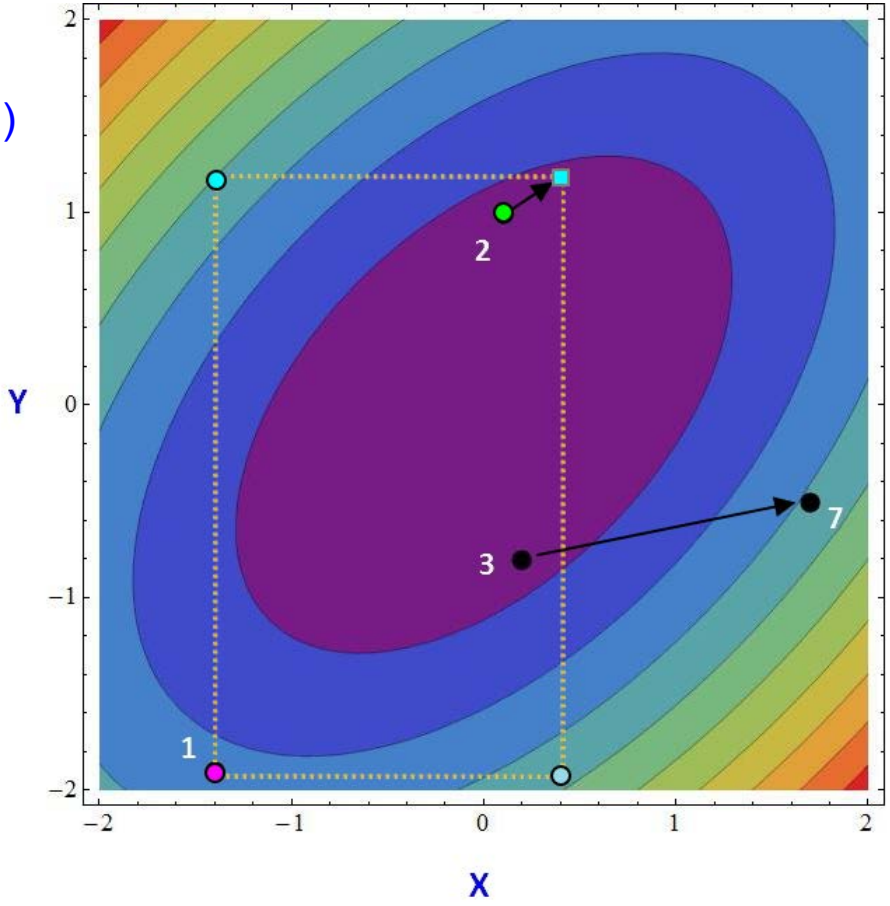
Έστω δ_1=0.76 και δ_2=0.22

Για τη 1η μεταβλητή δ_1= 0.76 ≥ P=0.50 → από X_1

Για τη 2η μεταβλητή δ_2= 0.22 < P=0.50 → από V_2

Το νέο διάνυσμα θα είναι

U_1= (-1.40, 1.20) → f(-1.40,1.20) = 10.16



Βήμα 2: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 1 (t=0)

2ζ) Διαδικασία επιλογής

επιλογή νέας λύσης (διανύσματος)

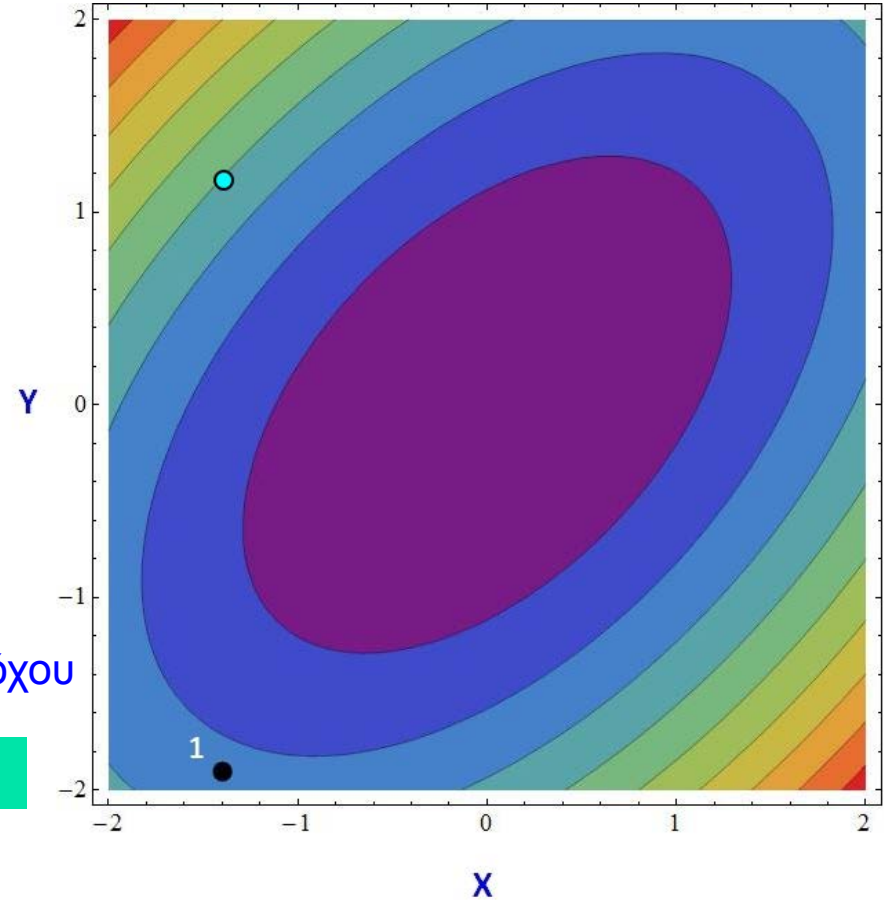
$$X_1(t+1)=\begin{cases} U_1(t) & \alpha\nu \quad f\{U_1(t)\}<f\{X_1(t)\} \\ X_1(t) & \end{cases}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-1,4	0,1	0,2	1,4	0,3	0,5	1,7	1,6	-0,5	-0,6
Y	-1,9	1,0	-0,8	0,2	0,1	-0,2	-0,5	1,3	0,3	1,5
	5,8	1,8	1,7	3,4	0,1	0,8	8,0	4,3	1,0	7,0

U_1: Διάνυσμα μετά από τη διασταύρωση

X_1: Διάνυσμα στόχου

t: Επανάληψη



$X_1(0)$ = (-1.40, -1.90) → f (X_1) = 5.82

$U_1(0)$ = (-1.40, 1.20) → f (U_1) = 10.16

Επειδή f{$X_1(0)$} < f{$U_1(0)$} → 5.82 < 10.16,

η νέα λύση δεν είναι καλύτερη από το διάνυσμα στόχου

$X_1(1)$= $X_1(0)$= (-1.40, -1.90) → f(-1.4, -1.9) = 5.82

Βήμα 3: Δημιουργία νέας λύσης για το διάνυσμα 2 (t=0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-1,4	0,1	0,2	1,4	0,3	0,5	1,7	1,6	-0,5	-0,6
Y	-1,9	1,0	-0,8	0,2	0,1	-0,2	-0,5	1,3	0,3	1,5
	5,8	1,8	1,7	3,4	0,1	0,8	8,0	4,3	1,0	7,0

3α) Επιλογή διανύσματος στόχου

Διάνυσμα 2 (το δεύτερο από τα δέκα)

X_2 = (0.10, 1.00) → f(0.10, 1.00)= 1.82

3β) Επιλογή διανύσματος βάσης

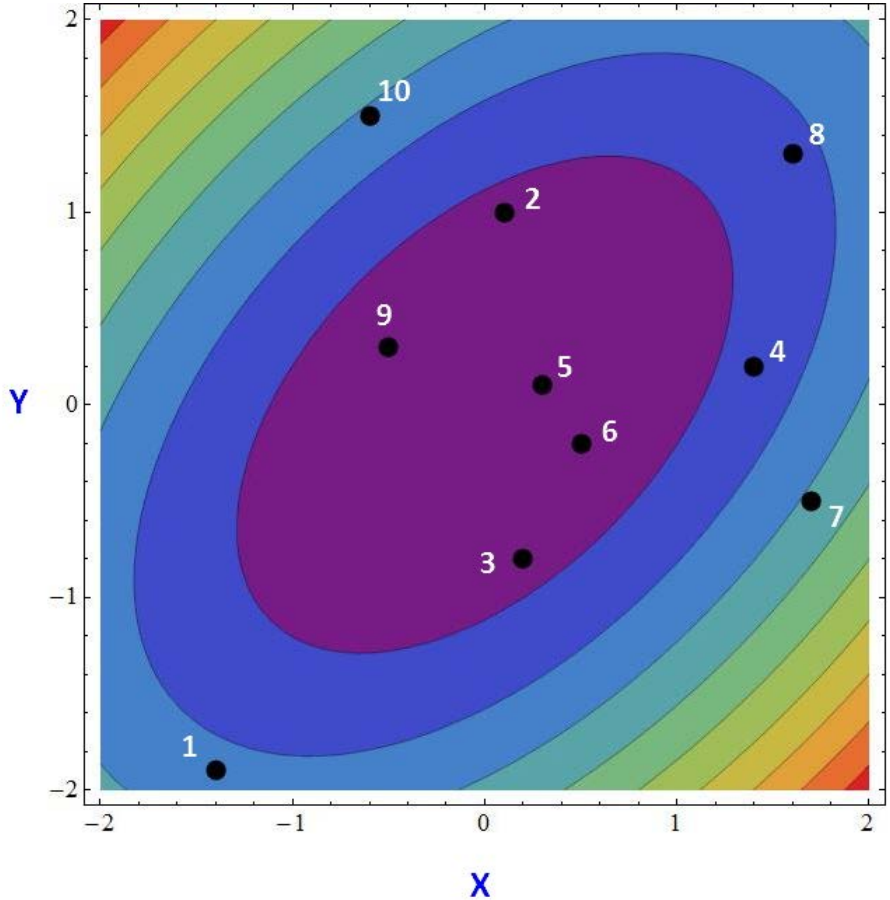
Τυχαία επιλέγω ένα διάνυσμα από 1 έως 10 (εκτός από το διάνυσμα στόχου) | έστω το 5

ή

Με τη μέθοδο τουρνουά επιλέγω δυο διανύσματα από 2 έως 10 | έστω 5 και 6 → καλύτερο το 5

3γ) Επιλογή διανυσμάτων διαφοράς

Τυχαία επιλέγω δυο διανύσματα από 1 έως 10 (εκτός από τα διανύσματα βάσης και στόχου), έστω 2 και 9



Βήμα 4: Δημιουργία νέας λύσης για το διάνυσμα 3 (t=0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-1,4	0,1	0,2	1,4	0,3	0,5	1,7	1,6	-0,5	-0,6
Y	-1,9	1,0	-0,8	0,2	0,1	-0,2	-0,5	1,3	0,3	1,5
	5,8	1,8	1,7	3,4	0,1	0,8	8,0	4,3	1,0	7,0

4α) Επιλογή διανύσματος στόχου

Διάνυσμα 3 (το δεύτερο από τα δέκα)

X_2 = (0.10, 1.00) → f(0.10, 1.00)= 1.82

4β) Επιλογή διανύσματος βάσης

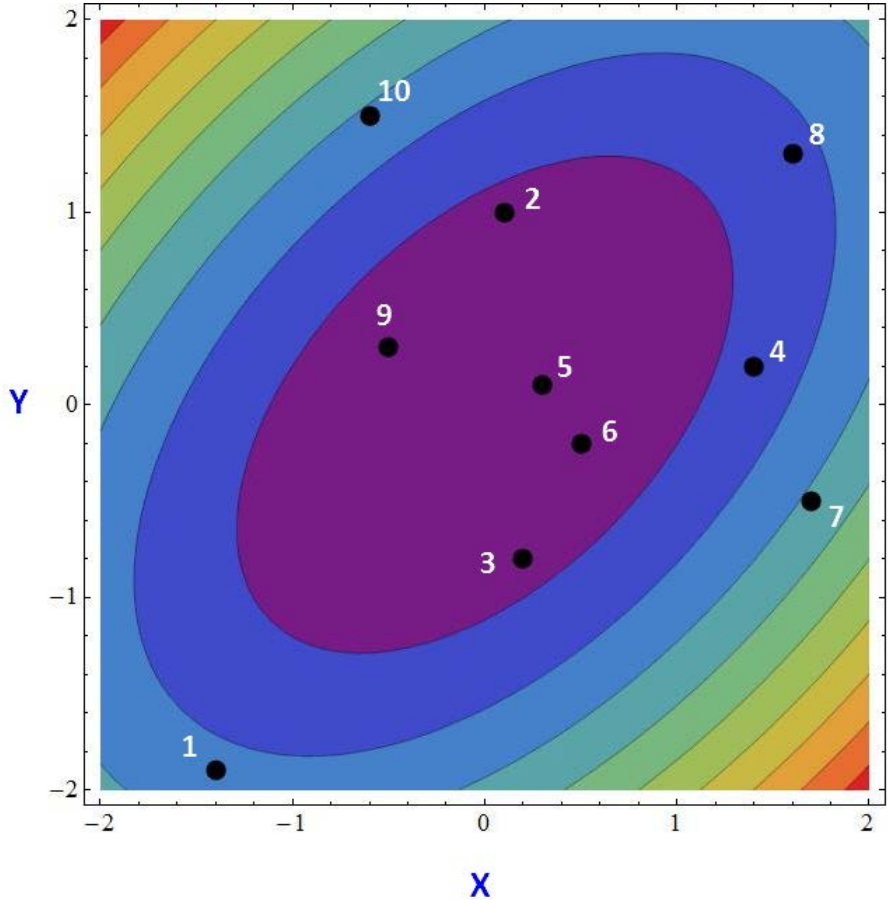
Τυχαία επιλέγω ένα διάνυσμα από 1 έως 10 (εκτός από το διάνυσμα στόχου) | έστω το 4

ή

Με τη μέθοδο τουρνουά επιλέγω δυο διανύσματα από 1 έως 10 | έστω 8 και 4 → καλύτερο το 4

4γ) Επιλογή διανυσμάτων διαφοράς

Τυχαία επιλέγω δυο διανύσματα από 1 έως 10 (εκτός από τα διανύσματα βάσης και στόχου), έστω 9 και 7



Παράδειγμα 1 | Ελαχιστοποίηση συνάρτησης

Αρχικός πληθυσμός διανυσμάτων (t=0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-1,4	0,1	0,2	1,4	0,3	0,5	1,7	1,6	-0,5	-0,6
Y	-1,9	1,0	-0,8	0,2	0,1	-0,2	-0,5	1,3	0,3	1,5
	5,8	1,8	1,7	3,4	0,1	0,8	8,0	4,3	1,0	7,0

Πληθυσμός διανυσμάτων (t=1)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-1,4	0,1	0,2	0,3	0,3	0,5	1,7	1,6	-0,5	-1,8
Y	-1,9	1,0	-0,8	0,2	0,1	-0,2	-0,5	1,3	0,3	-0,7
	5,8	1,8	1,7	0,2	0,1	0,8	8,0	4,3	1,0	4,7

Παράδειγμα 1 | Ελαχιστοποίηση συνάρτησης

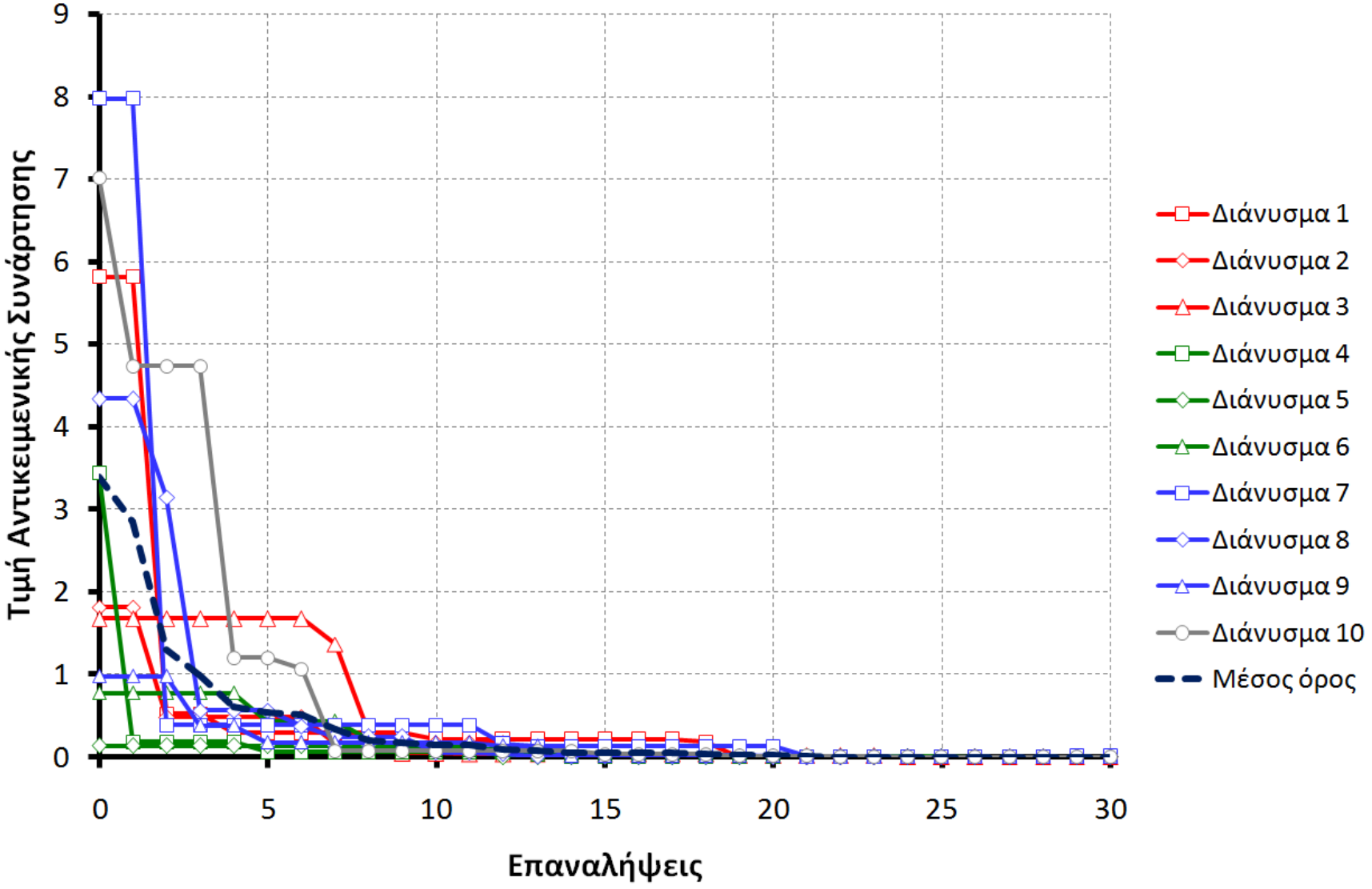
Αρχικός πληθυσμός διανυσμάτων (t=9)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,3	0,1	0,0	0,0	0,3	-0,2	-0,2	-0,4	0,0	0,1
Y	0,4	-0,2	0,1	0,2	0,1	-0,3	-0,5	-0,2	0,3	0,2
	0,3	0,2	0,0	0,1	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2	0,1

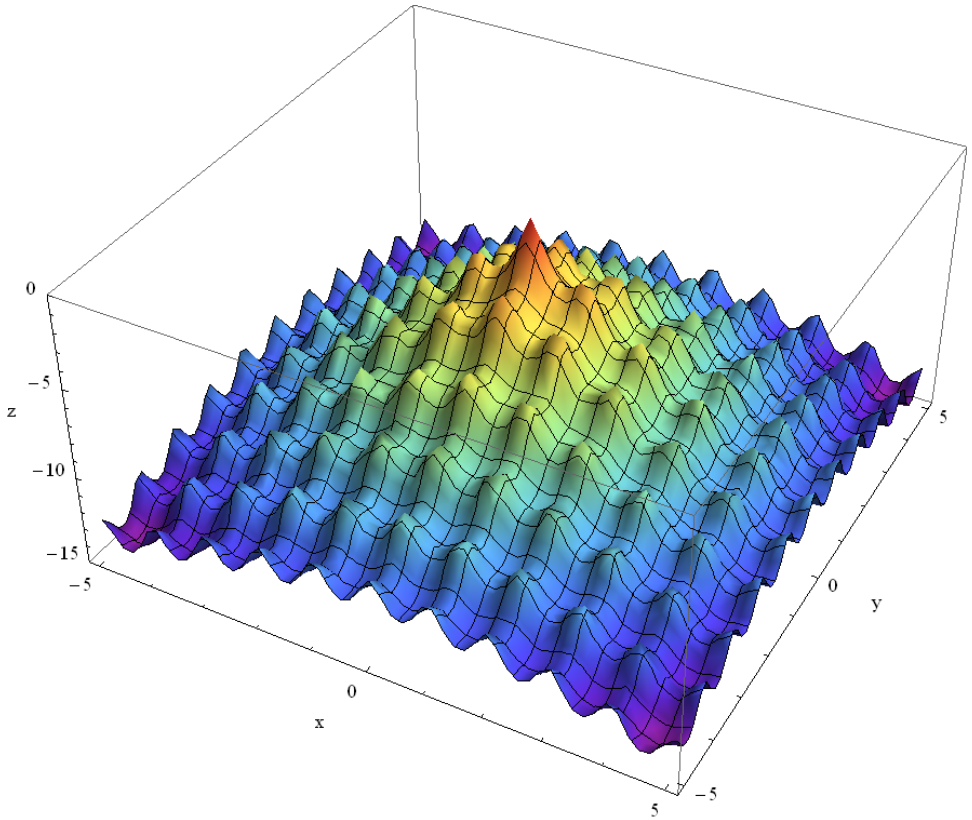
Πληθυσμός διανυσμάτων (t=30)

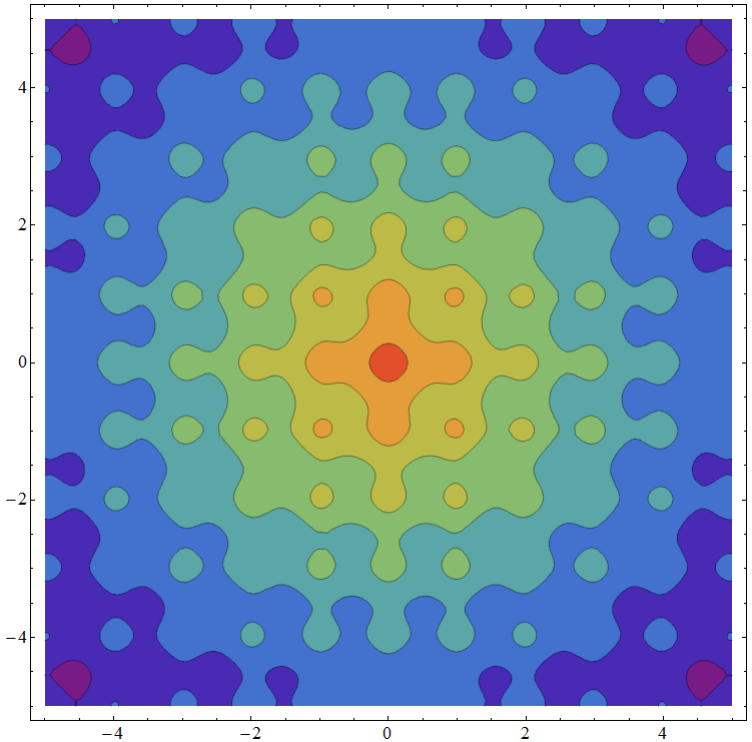
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Y	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Παράδειγμα 1 | Ελαχιστοποίηση συνάρτησης



Παράδειγμα 2 | Μεγιστοποίηση συνάρτησης





$$f(x,y) = 20 \cdot e^{\left(-0.2\sqrt{0.5\left(x^2+y^2\right)}\right)} + e^{0.5\left(\cos(2\pi \cdot \mathrm{x})+\cos(2\pi \cdot \mathrm{y})\right)} - e - 20$$

$$-5 \le x, y \le 5$$

Βήμα 1: Αρχικός πληθυσμός (πρώτη επανάληψη, t=0)

$$f(x,y) = 20 \cdot e^{\left(-0.2\sqrt{0.5\left(x^2+y^2\right)}\right)} + e^{0.5\left(\cos(2\pi \cdot x)+\cos(2\pi \cdot y)\right)} - e - 20 \qquad -5 \le x, y \le 5$$

Αρχικός πληθυσμός διανυσμάτων (τυχαίων λύσεων)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	3,2	-3,6	4,3	3,8	-0,2	-0,6	4,3	-4,4	-3,1	3,9
Y	4,8	3,9	-3,0	-0,4	2,2	0,5	-5,0	0,5	-0,2	1,9
	-12,6	-12,3	-12,0	-10,3	-7,0	-4,4	-13,6	-11,6	-8,1	-9,5

Βήμα 1: Αρχικός πληθυσμός (πρώτη επανάληψη, t=0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	3,2	-3,6	4,3	3,8	-0,2	-0,6	4,3	-4,4	-3,1	3,9
Y	4,8	3,9	-3,0	-0,4	2,2	0,5	-5,0	0,5	-0,2	1,9
	-12,6	-12,3	-12,0	-10,3	-7,0	-4,4	-13,6	-11,6	-8,1	-9,5

2α) Επιλογή διανύσματος στόχου

Διάνυσμα 1 (το πρώτο από τα δέκα)

$X_1 = (3.2, 4.8) \rightarrow f(X_1) = -12.6$

2β) Επιλογή διανύσματος βάσης

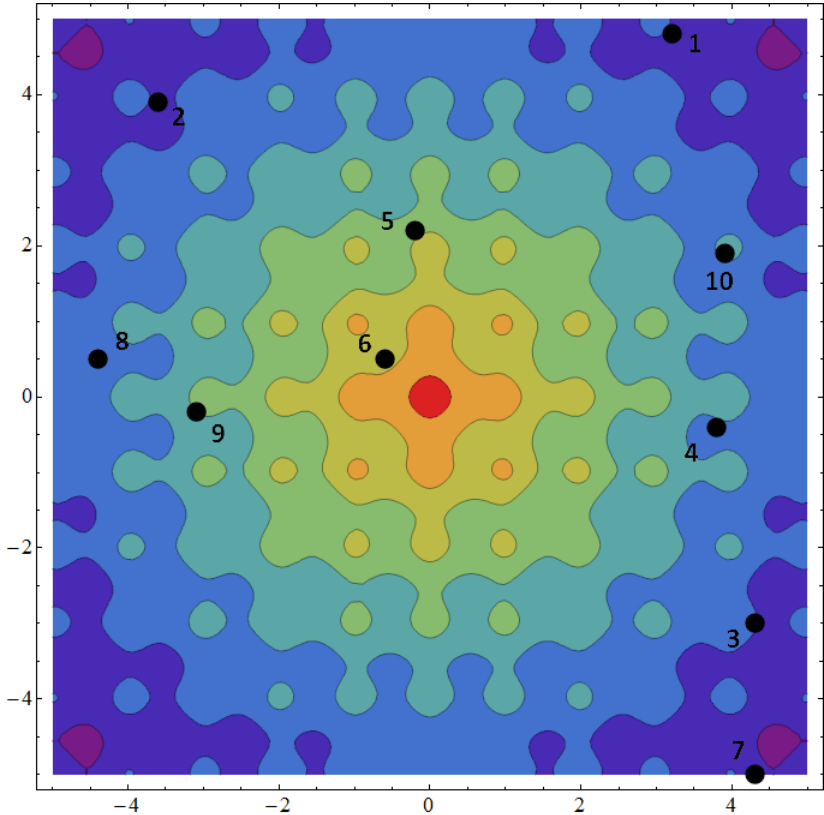
Τυχαία επιλέγω ένα διάνυσμα από 1 έως 10 (εκτός από το διάνυσμα στόχου) | έστω το 5

ή

Με τη μέθοδο τουρνουά επιλέγω δυο διανύσματα από 2 έως 10 | έστω 3 και 5 → καλύτερο το 5

2γ) Επιλογή διανυσμάτων διαφοράς

Τυχαία επιλέγω δυο διανύσματα από 1 έως 10 (εκτός από τα διανύσματα βάσης και στόχου) | έστω 4 και 2



Παράδειγμα 2 | Μεγιστοποίηση συνάρτησης

Αρχικός πληθυσμός διανυσμάτων (t=0)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	3,2	-3,6	4,3	3,8	-0,2	-0,6	4,3	-4,4	-3,1	3,9
Y	4,8	3,9	-3,0	-0,4	2,2	0,5	-5,0	0,5	-0,2	1,9
	-12,6	-12,3	-12,0	-10,3	-7,0	-4,4	-13,6	-11,6	-8,1	-9,5

Πληθυσμός διανυσμάτων (t=1)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-1,5	-3,6	4,3	3,8	-0,2	-0,6	1,9	-4,4	-3,1	3,9
Y	4,8	3,9	-3,0	-0,4	2,2	0,5	-5,0	0,5	-0,2	1,9
	-12,2	-12,3	-12,0	-10,3	-7,0	-4,4	-10,8	-11,6	-8,1	-9,5

Παράδειγμα 2 | Μεγιστοποίηση συνάρτησης

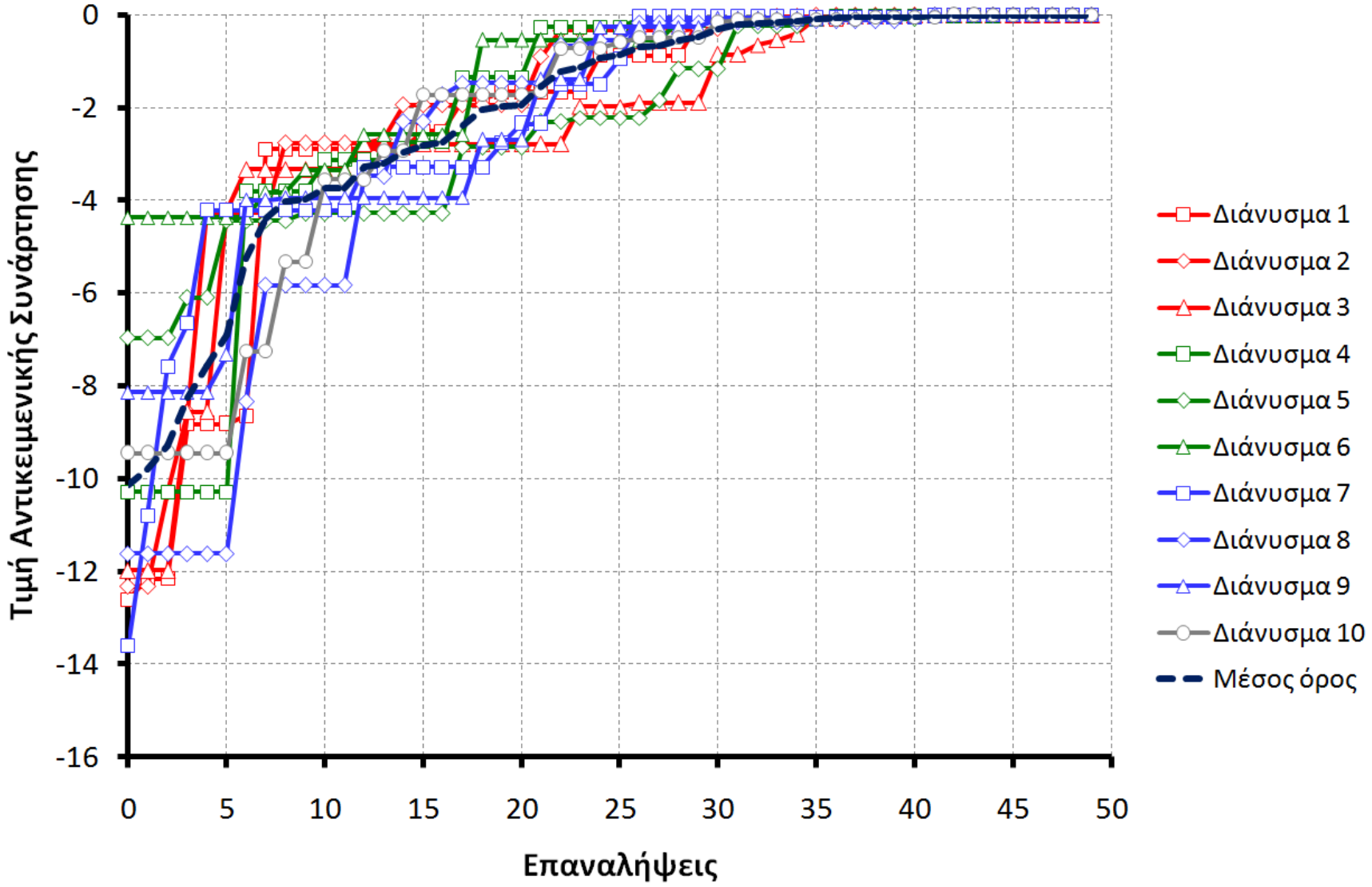
Αρχικός πληθυσμός διανυσμάτων (t=9)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	1,0	0,1	0,7	0,4	0,8	0,1	0,4	0,9	0,3	1,4
Y	-0,1	-0,4	-0,1	-0,4	-0,8	0,7	-0,6	-1,9	0,8	-0,2
	-2,9	-2,8	-3,3	-3,8	-4,3	-3,3	-4,2	-5,8	-3,9	-5,3

Πληθυσμός διανυσμάτων (t=40)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Y	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Παράδειγμα 2 | Μεγιστοποίηση συνάρτησης

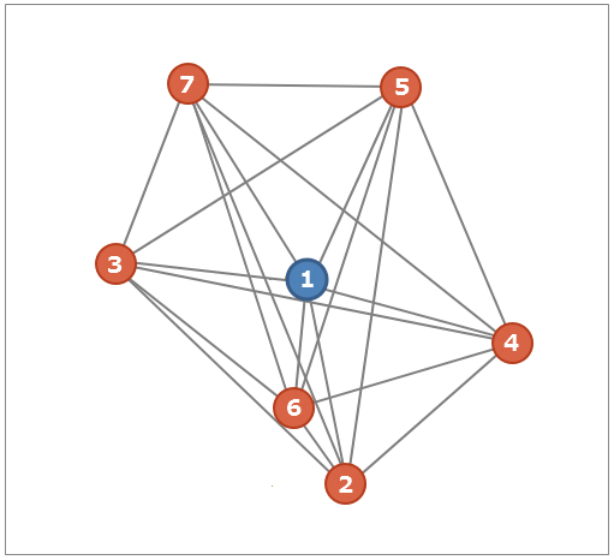


Παράδειγμα 3 | Το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή

Ο πλανόδιος πωλητής πρέπει να περάσει από όλες τις πόλεις του προβλήματος διανύοντας τη μικρότερη δυνατή απόσταση (ή με το μικρότερο δυνατό κόστος) ξεκινώντας και καταλήγοντας στο ίδιο σημείο.

Παράδειγμα TSP

Δίκτυο μεταξύ των πόλεων



Υπολογισμός αποστάσεων μεταξύ των πόλεων

	Σημεία	
	x	y
1	0	0
2	13,56	-79,88
3	-69,73	6,42
4	76,5	-23,6
5	36,41	73,53
6	-5,19	-49,77
7	-44,04	76,3

	Πίνακας Αποστάσεων						
	1	2	3	4	5	6	7
1		81,02	70,02	80,06	82,05	50,04	88,10
2	81,02		119,94	84,43	155,10	35,47	166,46
3	70,02	119,94		149,28	125,58	85,57	74,45
4	80,06	84,43	149,28		105,08	85,78	156,56
5	82,05	155,10	125,58	105,08		130,13	80,50
6	50,04	35,47	85,57	85,78	130,13		131,92
7	88,10	166,46	74,45	156,56	80,50	131,92	

Βήμα 1: Αρχικός πληθυσμός (πρώτη επανάληψη, t=0)

Αρχικός πληθυσμός διανυσμάτων (τυχαίων λύσεων)

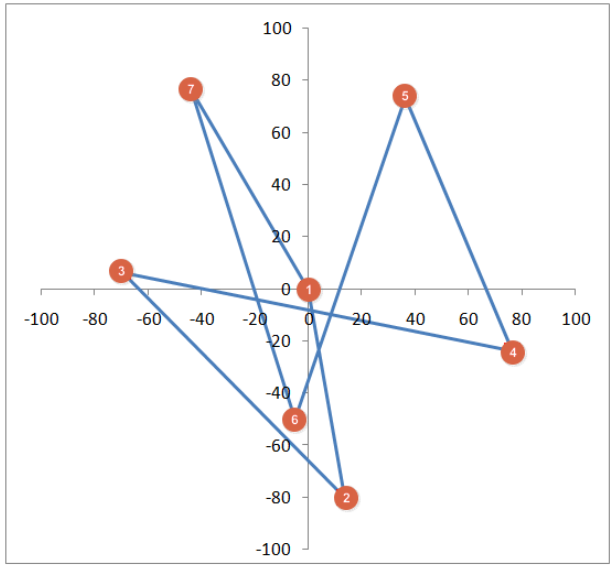
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	4	6	6	6	6	2	6
3	4	6	6	5	5	7	7	7	7
4	6	4	3	2	4	4	4	5	5
5	5	5	7	7	2	2	3	3	3
6	2	7	5	4	7	5	2	6	2
7	7	2	2	3	3	3	5	4	4
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
805	845	674	642	878	681	774	845	705	672

Βήμα 2: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 1 (t=0)

2α) Επιλογή διανύσματος στόχου

Διάνυσμα 1 (το πρώτο από τα δέκα)

X_1 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1} → d = 805



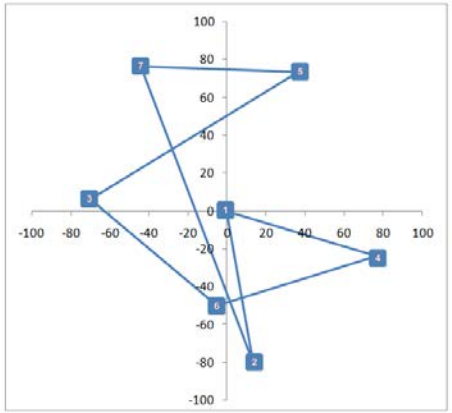
1	2	3	4	5	6	7	1
805	81,0	119,9	149,3	105,1	130,1	131,9	88,1

2β) Επιλογή διανυσμάτων διαφοράς

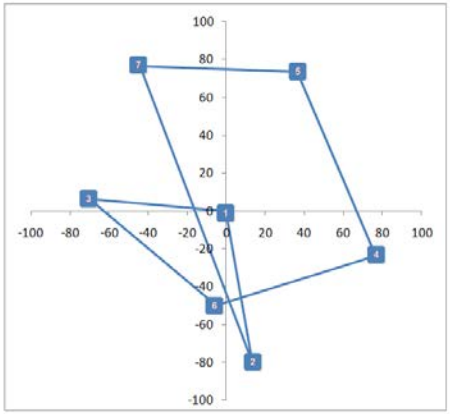
Τυχαία επιλέγω δυο διανύσματα από 1 έως 10 (εκτός από το διάνυσμα στόχου) | έστω 9 και 3

X_9 = {1, 2, 7, 5, 3, 6, 4, 1} → d = 705

X_3 = {1, 3, 6, 4, 5, 7, 2, 1} → d = 674



1	2	7	5	3	6	4	1
705	81,0	166,5	80,5	125,6	85,6	85,8	80,1



1	3	6	4	5	7	2	1
674	70,0	85,6	85,8	105,1	80,5	166,5	81,0

Βήμα 2: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 1 (t=0)

2γ) Διαδικασία μετάλλαξης

$$V_1^{'} = X_1^{'} + F \cdot \left(X_9^{'} - X_3^{'}\right)$$

V_1: Νέο διάνυσμα (μετά τη μετάλλαξη)
X_1: Διάνυσμα στόχου
X_9: 9ο διάνυσμα του πληθυσμού
X_3: 3ο διάνυσμα του πληθυσμού
F: Συντελεστής κλίμακας [0 – 2] | έστω 0.55

Διαιρούμε κάθε τιμή του διανύσματος με την μεγαλύτερη τιμή (7)

$$X_1 = \{2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7\} \rightarrow \{2/7 \quad 3/7 \quad 4/7 \quad 5/7 \quad 6/7 \quad 7/7\}$$
$$X_1^{'} = \{0.29 \quad 0.43 \quad 0.57 \quad 0.71 \quad 0.86 \quad 1.00\}$$

$$X_9 = \{2 \quad 7 \quad 5 \quad 3 \quad 6 \quad 4\} \rightarrow \{2/7 \quad 7/7 \quad 5/7 \quad 3/7 \quad 6/7 \quad 4/7\}$$
$$X_9^{'} = \{0.29 \quad 1.00 \quad 0.71 \quad 0.43 \quad 0.86 \quad 0.57\}$$

$$X_3 = \{3 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \quad 7 \quad 2\} \rightarrow \{3/7 \quad 6/7 \quad 4/7 \quad 5/7 \quad 7/7 \quad 2/7\}$$
$$X_3^{'} = \{0.43 \quad 0.86 \quad 0.57 \quad 0.71 \quad 1.00 \quad 0.29\}$$

$$V_1^{'} = \begin{Bmatrix} 0.29 \\ 0.43 \\ 0.57 \\ 0.71 \\ 0.86 \\ 1.00 \end{Bmatrix} + 0.55 \cdot \left(\begin{Bmatrix} 0.29 \\ 1.00 \\ 0.71 \\ 0.43 \\ 0.86 \\ 0.57 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.43 \\ 0.86 \\ 0.57 \\ 0.71 \\ 1.00 \\ 0.29 \end{Bmatrix} \right) = \begin{Bmatrix} 0.21 \\ 0.51 \\ 0.65 \\ 0.56 \\ 0.78 \\ 1.15 \end{Bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{Bmatrix} \rightarrow d = 737$$

Η σειρά των πόλεων στο V_1 ακολουθεί την αύξουσα σειρά τιμών του διανύσματος V'_1

Βήμα 2: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 1 (t=0)

2δ) Διαδικασία επιλογής

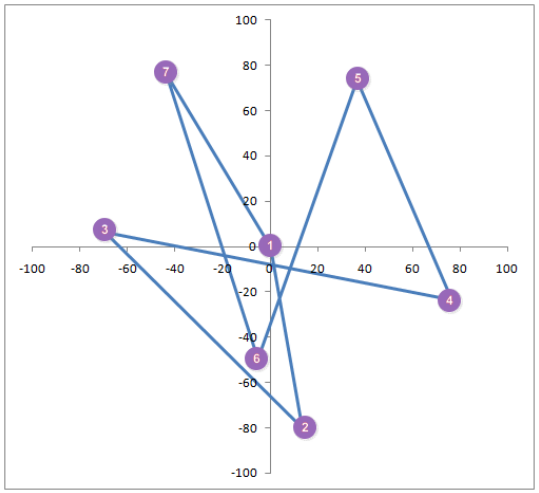
επιλογή νέας λύσης (διανύσματος)

$$X_1(t+1) = \begin{cases} V_1(t) & \alpha\nu \quad d\{V_1(t)\} < d\{X_1(t)\} \\ X_1(t) & \end{cases}$$

V_1: Διάνυσμα μετά από τη μετάλλαξη

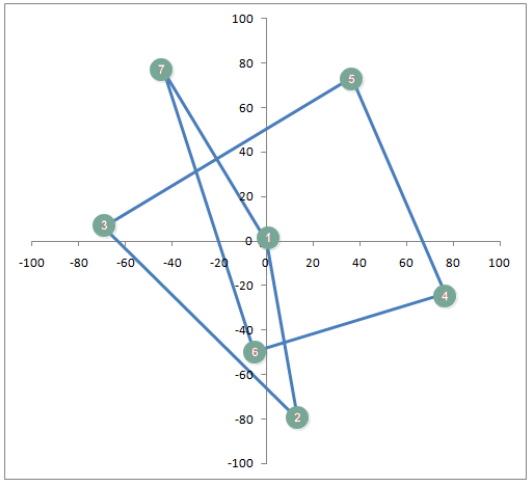
X_1: Διάνυσμα στόχου

t: Επανάληψη



$V_1(0)$ = {1, 2, 3, 5, 4, 6, 7, 1} → d = 737

$X_1(0)$ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 1} → d = 805



Επειδή $d\{V_1(0)\} < d\{X_1(0)\}$ → 737 < 805

Η <u>νέα λύση είναι καλύτερη</u> από το διάνυσμα βάσης οπότε:

$X_1(1) = V_1(0)$ = {1, 2, 3, 5, 4, 6, 7, 1} → d = 737

Βήμα 2: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 2 (t=0)

2α) Επιλογή διανύσματος στόχου

Διάνυσμα 2 (το δεύτερο από τα δέκα)

X_2 = {1, 3, 4, 6, 5, 2, 7, 1} → d = 845

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	3	4	6	6	6	6	2	6
3	4	6	6	5	5	7	7	7	7
4	6	4	3	2	4	4	4	5	5
5	5	5	7	7	2	2	3	3	3
6	2	7	5	4	7	5	2	6	2
7	7	2	2	3	3	3	5	4	4
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
805	845	674	642	878	681	774	845	705	672

2β) Επιλογή διανυσμάτων διαφοράς

Τυχαία επιλέγω δυο διανύσματα από 1 έως 10 (εκτός από το διάνυσμα στόχου) | έστω 4 και 6

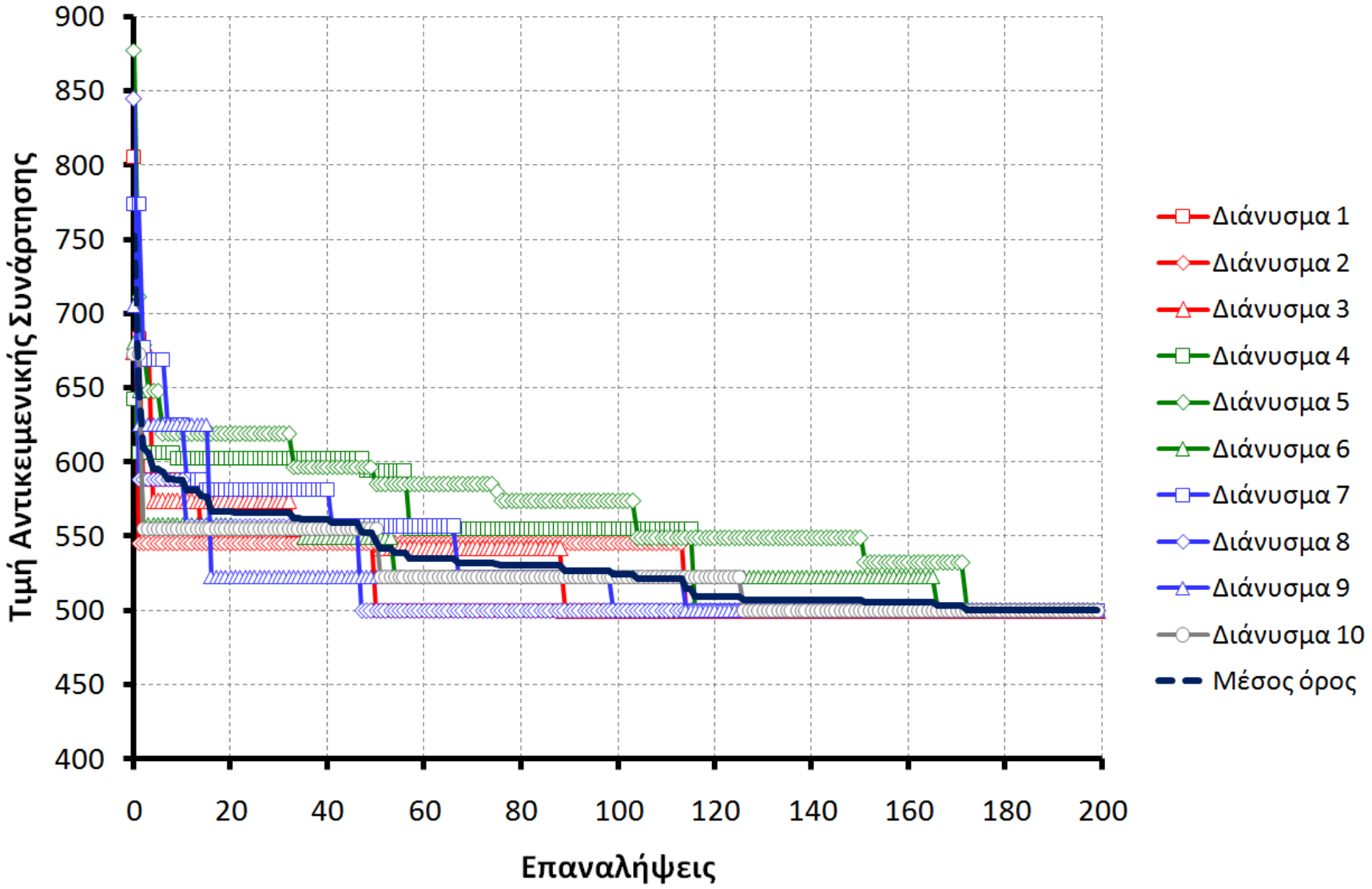
X_4 = {1, 4, 6, 3, 7, 5, 2, 1} → d = 642

X_6 = {1, 6, 5, 4, 2, 7, 3, 1} → d = 681

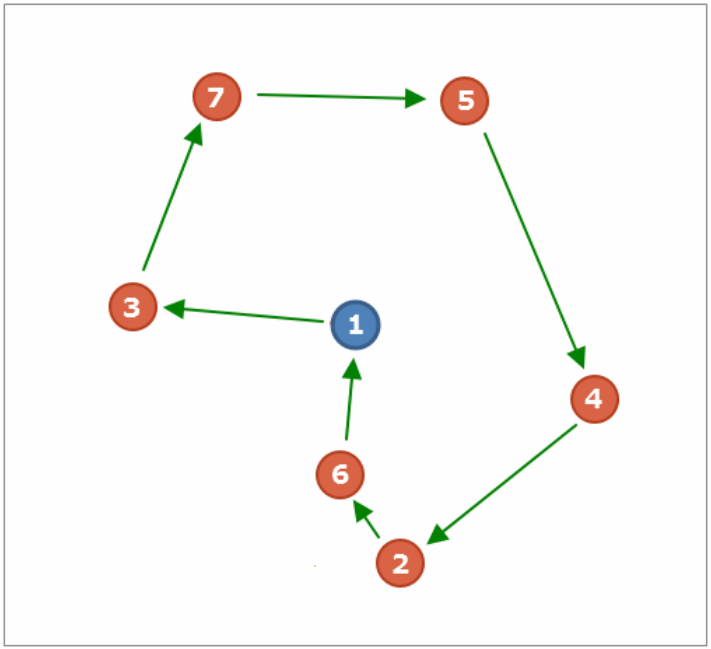
Πληθυσμός διανυσμάτων (t=50)

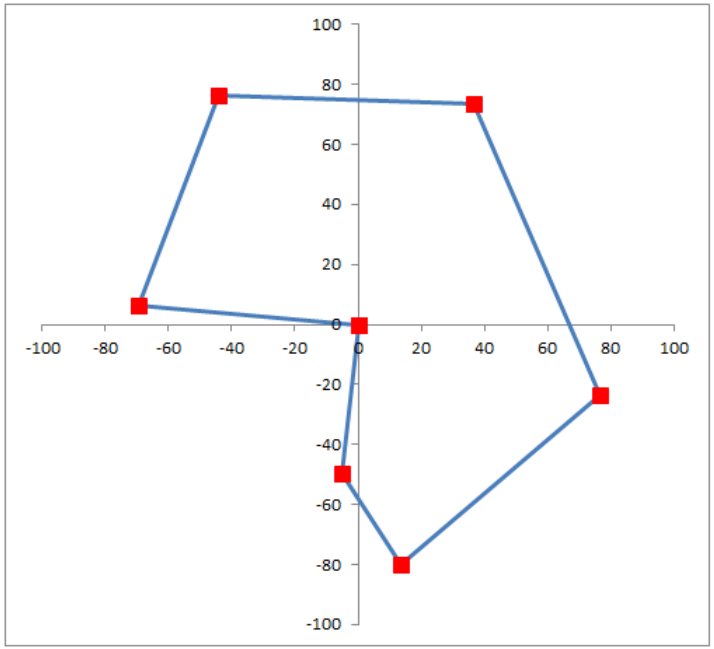
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	4	5	5	2	3	6	6	3	7
6	5	4	7	3	6	2	2	2	3
2	7	2	4	7	2	4	4	6	6
4	3	6	2	5	4	3	5	6	2
5	2	3	6	4	5	7	7	7	4
7	6	7	3	6	7	5	3	5	5
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
549	546	555	595	597	549	556	500	523	555

Παράδειγμα 3 | Το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή



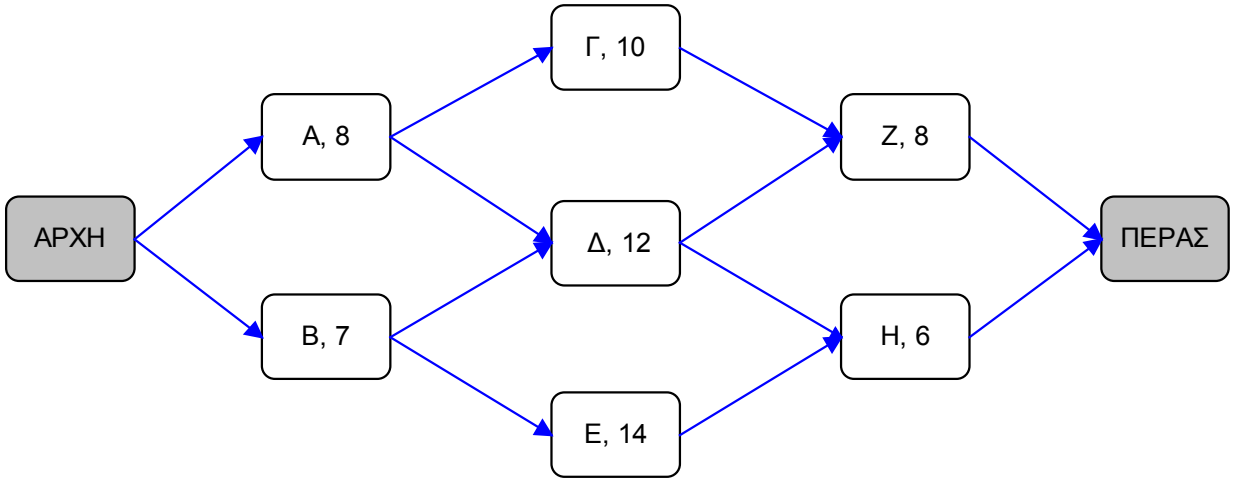
Βέλτιστη Διαδρομή





1	3	7	5	4	2	6	1
500,00	70,02	74,45	80,50	105,08	84,43	35,47	50,04

Παράδειγμα 4 | Βελτιστοποίηση χρόνου - κόστους έργου



Εργασία	Διάρκεια	max d	min d	ΔC
Α	**8**	**8**	**6**	**150**
Β	**7**	**7**	**5**	**250**
Γ	**10**	**10**	**7**	**400**
Δ	**12**	**12**	**8**	**100**
Ε	**14**	**14**	**10**	**350**
Ζ	**8**	**8**	**6**	**300**
Η	**6**	**6**	**4**	**200**
Συνολική Διάρκεια		**28**	**20**	

Κωδικοποίηση προβλήματος

Υπολογισμός πρόσθετου κόστους για συμπίεση εργασιών προς επίτευξη της επιθυμητής διάρκειας :

$\Delta C = \{(8-d_A)ΠΚ_A+(7-d_B)ΠΚ_B+(10-d_Γ)ΠΚ_Γ+(12-d_Δ)ΠΚ_Δ+(14-d_E)ΠΚ_E+(8-d_Z)ΠΚ_Z+(6-d_H)ΠΚ_H\}$

όπου:

d_j: μεταβλητές, διάρκεια δραστηριότητας j (μεταξύ ελάχιστης και μέγιστης διάρκειας),

$ΠΚ_j$: Πρόσθετο Κόστος για χρονική συμπίεση της δραστηριότητας j κατά μια χρονική μονάδα.

Καθορισμός κρίσιμης διαδρομής και υπολογισμός διάρκειας της :

ΚΔ = max{ΑΓΖ, ΑΔΖ, ΑΔΗ, ΒΔΖ, ΒΔΗ, ΒΕΗ} = 28 ημέρες

(ή επιλύοντας το δίκτυο, δραστηριότητα προς δραστηριότητα)

Συνάρτηση καταλληλότητας (αντικειμενική συνάρτηση) προβλήματος:

$$z = \begin{cases} \Delta C & \text{αν} \quad K\Delta \le 24 \\ \Delta C + 1000 \cdot (K\Delta - 24) & \text{αν} \quad K\Delta > 24 \end{cases}$$

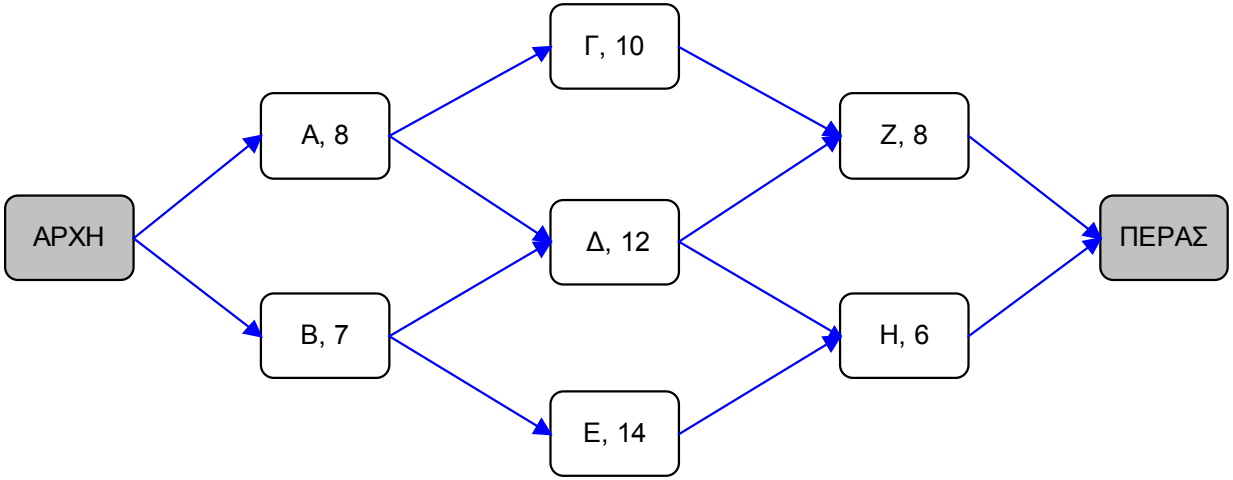
όπου:

ΔC: πρόσθετο κόστος,

ΚΔ: διάρκεια κρίσιμης διαδρομής (ημέρες),

24: επιθυμητή διάρκεια έργου.

Βελτιστοποίηση χρόνου - κόστους έργου



	d	Min	Max	ΔC	Δd	DC
Α	6	6	8	150	2	300
Β	6	5	7	250	1	250
Γ	10	7	10	400	0	0
Δ	10	8	12	100	2	200
Ε	14	10	14	350	0	0
Ζ	8	6	8	300	0	0
Η	4	4	6	200	2	400

ΑΓΖ	24
ΑΔΖ	24
ΑΔΗ	20
ΒΔΖ	24
ΒΔΗ	20
ΒΕΗ	24

Ζ	1150

sum ΔC	1150

ΚΔ	24

Βήμα 1: Αρχικός πληθυσμός (πρώτη επανάληψη, t=0)

Αρχικός πληθυσμός διανυσμάτων (τυχαίων λύσεων)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Α	6	8	7	7	7	8	8	7	8	6
Β	6	5	6	5	7	5	7	7	6	7
Γ	7	9	9	10	8	9	7	9	9	10
Δ	11	8	10	11	12	10	9	9	8	11
Ε	11	12	14	11	11	10	12	14	13	13
Ζ	6	8	7	7	6	7	8	8	7	7
Η	5	6	6	5	5	5	5	6	4	6
ΚΔ	23	25	26	25	25	25	25	27	24	26
ΔC	3700	2000	1300	2300	2800	3000	2400	850	2100	1050
Z	3700	3000	3300	3300	3800	4000	3400	3850	2100	3050

Βήμα 2: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 1 (t=0)

2α) Επιλογή διανύσματος στόχου

Διάνυσμα 1 (το πρώτο από τα δέκα)

X_1 = (6, 6, 7, 11, 11, 6, 5) → ΔC(X_1)=3700

2β) Επιλογή διανύσματος βάσης

Τυχαία επιλέγω ένα διάνυσμα από 1 έως 10 (εκτός από το διάνυσμα στόχου) | έστω 9

ή

Με τη μέθοδο του τουρνουά επιλέγω δυο διανύσματα από 2 έως 10 | έστω 3 και 9 → καλύτερο το 9

2γ) Επιλογή διανυσμάτων διαφοράς

Τυχαία επιλέγω δυο διανύσματα από 1 έως 10 (εκτός από τα διανύσματα βάσης και στόχου), έστω 6 και 4

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Α	6	8	7	7	7	8	8	7	8	6
Β	6	5	6	5	7	5	7	7	6	7
Γ	7	9	9	10	8	9	7	9	9	10
Δ	11	8	10	11	12	10	9	9	8	11
Ε	11	12	14	11	11	10	12	14	13	13
Ζ	6	8	7	7	6	7	8	8	7	7
Η	5	6	6	5	5	5	5	6	4	6
ΚΔ	23	25	26	25	25	25	25	27	24	26
ΔC	3700	2000	1300	2300	2800	3000	2400	850	2100	1050
Ζ	3700	3000	3300	3300	3800	4000	3400	3850	2100	3050

Βήμα 2: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 1 (t=0)

2δ) Διαδικασία μετάλλαξης

$$V_{9,i} = X_{9,i} + w_{9,i} = X_{9,i} + F_i\left(X_{6,i} - X_{4,i}\right)$$

$V_{9,i}$: Διάνυσμα μετά τη μετάλλαξη
$X_{9,i}$: Διάνυσμα βάσης
$X_{6,i}$: 6ο διάνυσμα του πληθυσμού
$X_{4,i}$: 4ο διάνυσμα του πληθυσμού
F: Συντελεστής κλίμακας **[0 – 1]**
i: Μεταβλητές προβλήματος (συμπίεση εργασιών)

X_6 = (8, 5, 9, 10, 10, 7, 5)

X_4 = (7, 5, 10, 11, 11, 7, 5)

$$w_{9,1} = F \cdot \left(X_{6,1} - X_{4,1}\right) = 0.37 \cdot (8-7) = 0.37 \rightarrow w_{9,1} = 0$$

$$w_{9,2} = F \cdot \left(X_{6,2} - X_{4,2}\right) = 0.49 \cdot (5-5) = 0 \rightarrow w_{9,2} = 0$$

$$w_{9,3} = F \cdot \left(X_{6,3} - X_{4,3}\right) = 0.51 \cdot (9-10) = -0.51 \rightarrow w_{9,3} = -1$$

$$w_{9,4} = F \cdot \left(X_{6,4} - X_{4,4}\right) = 0.23 \cdot (10-11) = -0.23 \rightarrow w_{9,4} = 0$$

$$w_{9,5} = F \cdot \left(X_{6,5} - X_{4,5}\right) = 0.24 \cdot (10-11) = -0.24 \rightarrow w_{9,5} = 0$$

$$w_{9,6} = F \cdot \left(X_{6,6} - X_{4,6}\right) = 0.94 \cdot (7-7) = 0 \rightarrow w_{9,6} = 0$$

$$w_{9,7} = F \cdot \left(X_{6,7} - X_{4,7}\right) = 0.04 \cdot (5-5) = 0 \rightarrow w_{9,7} = 0$$

X_9 = (8, 6, 9, 8, 13, 7, 4)

w_9 = (0, 0, -1, 0, 0, 0, 0)

$V_9 = X_9 + w_9 \rightarrow V_1$ = (8, 6, **8**, 8, 13, 7, 4)

Βήμα 2: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 1 (t=0)

2ε) Διαδικασία Διασταύρωσης (εφόσον οι τιμές των μεταβλητών είναι εντός ορίων)
επιλογή πιθανότητας διασταύρωσης P | έστω P=0.80

$$U_{1,i} = \begin{cases} V_{9,i} & \alpha\nu \quad \delta \le P \\ X_{1,i} & \end{cases}$$

$V_{9,i}$: Διάνυσμα μετά από τη μετάλλαξη
$X_{1,i}$: Διάνυσμα στόχου
$U_{1,i}$: νέο Διάνυσμα (μετά από τη διασταύρωση)
δ: Τυχαίος αριθμός [0 – 1]
P: Πιθανότητα διασταύρωσης
i: Μεταβλητές

Αν κάποια μεταβλητή ($V_{9,i}$) είναι εκτός ορίων, απορρίπτεται οπότε για $U_{1,i}$ επιλέγεται η αντίστοιχη τιμή από το διάνυσμα στόχου ($X_{1,i}$).

V_9 = (8, 6, 8, 8, 13, 7, 4)

X_1 = (6, 6, 7, 11, 11, 6, 5)

1η μεταβλητή δ_1= 0.71 ≤ P=0.80 → από V_9 → 8
2η μεταβλητή δ_1= 0.87 > P=0.80 → από X_1 → 6
3η μεταβλητή δ_1= 0.93 > P=0.80 → από X_1 → 7
4η μεταβλητή δ_1= 0.19 ≤ P=0.80 → από V_9 → 8
5η μεταβλητή δ_1= 0.33 ≤ P=0.80 → από V_9 → 13
6η μεταβλητή δ_1= 0.67 ≤ P=0.80 → από V_9 → 7
7η μεταβλητή δ_1= 0.88 > P=0.80 → από X_1 → 5

Το νέο διάνυσμα θα είναι

U_1= (8, 6, 7, 8, 13, 7, 5) → f(U_1) = 2700

Βήμα 2: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 1 (t=0)

2ζ) Διαδικασία επιλογής

επιλογή νέας λύσης (διανύσματος)

$$X_1(t+1) = \begin{cases} U_1(t) & \alpha\nu \quad f\{U_1(t)\} \le f\{X_1(t)\} \\ X_1(t) & \end{cases}$$

U_1: Διάνυσμα μετά από τη διασταύρωση

X_1: Διάνυσμα στόχου

t: Επανάληψη

$U_1(0)$ = (8, 6, 7, 8, 13, 7, 5) → $f(U_1)$ = 2700

$X_1(0)$ = (6, 6, 7, 11, 11, 6, 5) → $f(X_1)$= 3700

Επειδή $f\{U_1(0)\} \le f\{X_1(0)\}$ → 2700 ≤ 3700

Η νέα λύση είναι καλύτερη από το διάνυσμα βάσης

$X_1(1)= U_1(0)$= (8, 6, 7, 8, 13, 7, 5) → f(8, 6, 7, 8, 13, 7, 5) = 2700

Βήμα 3: Δημιουργία νέων λύσεων για το διάνυσμα 2 (t=0)

2α) Επιλογή διανύσματος στόχου

Διάνυσμα 2 (το πρώτο από τα δέκα)

X_1 = (8, 5, 9, 8, 12, 8, 6) → ΔC(X_1) = 3000

2β) Επιλογή διανύσματος βάσης

Τυχαία επιλέγω ένα διάνυσμα από 1 έως 10 (εκτός από το διάνυσμα στόχου) | έστω 3

ή

Με τη μέθοδο του τουρνουά επιλέγω δυο διανύσματα από 2 έως 10 | έστω 3 και 5 → καλύτερο το 3

2γ) Επιλογή διανυσμάτων διαφοράς

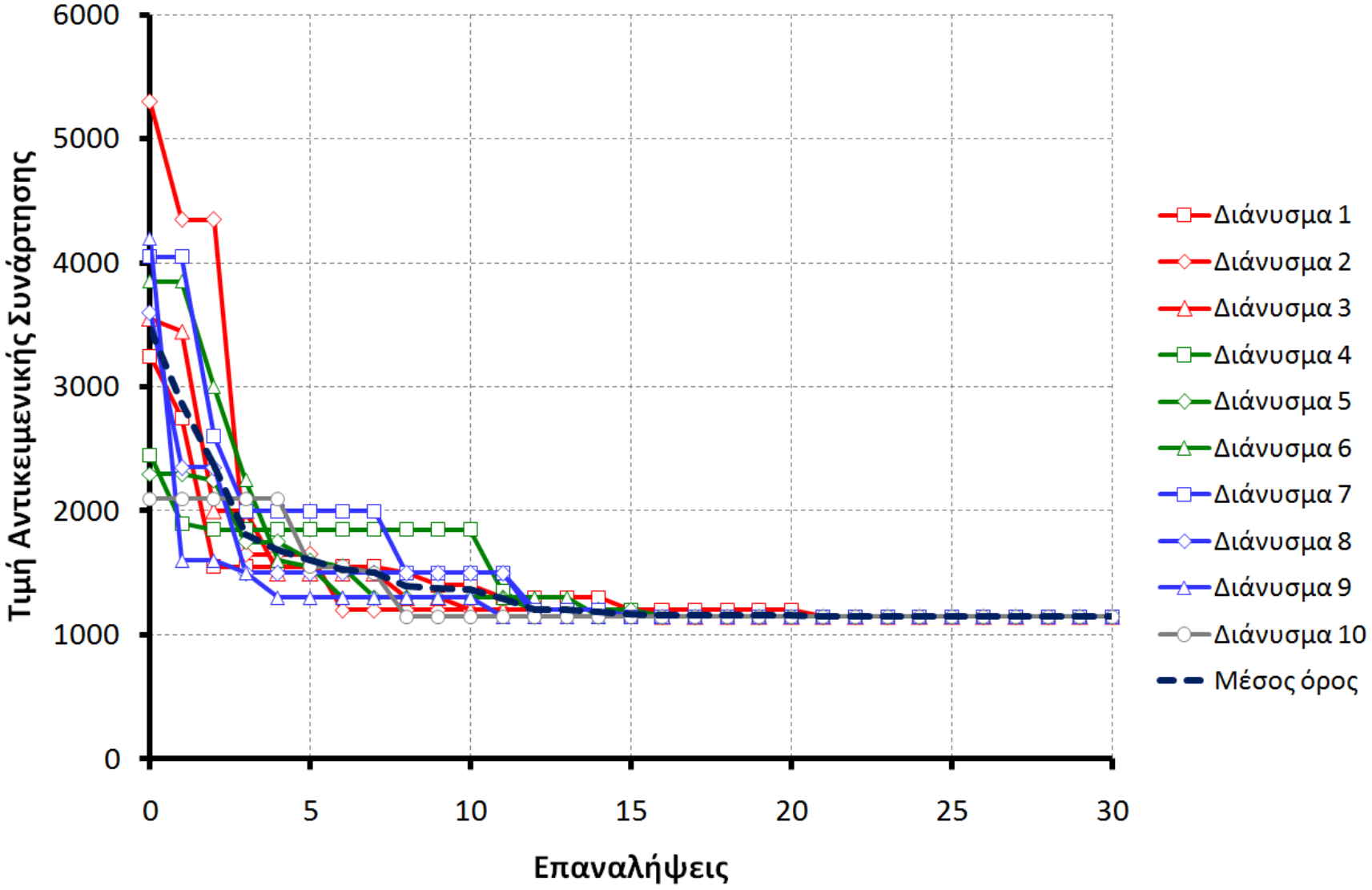
Τυχαία επιλέγω δυο διανύσματα από 1 έως 10 (εκτός από τα διανύσματα βάσης και στόχου), έστω 1 και 7

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Α	6	8	7	7	7	8	8	7	8	6
Β	6	5	6	5	7	5	7	7	6	7
Γ	7	9	9	10	8	9	7	9	9	10
Δ	11	8	10	11	12	10	9	9	8	11
Ε	11	12	14	11	11	10	12	14	13	13
Ζ	6	8	7	7	6	7	8	8	7	7
Η	5	6	6	5	5	5	5	6	4	6
ΚΔ	23	25	26	25	25	25	25	27	24	26
ΔC	3700	2000	1300	2300	2800	3000	2400	850	2100	1050
Ζ	3700	3000	3300	3300	3800	4000	3400	3850	2100	3050

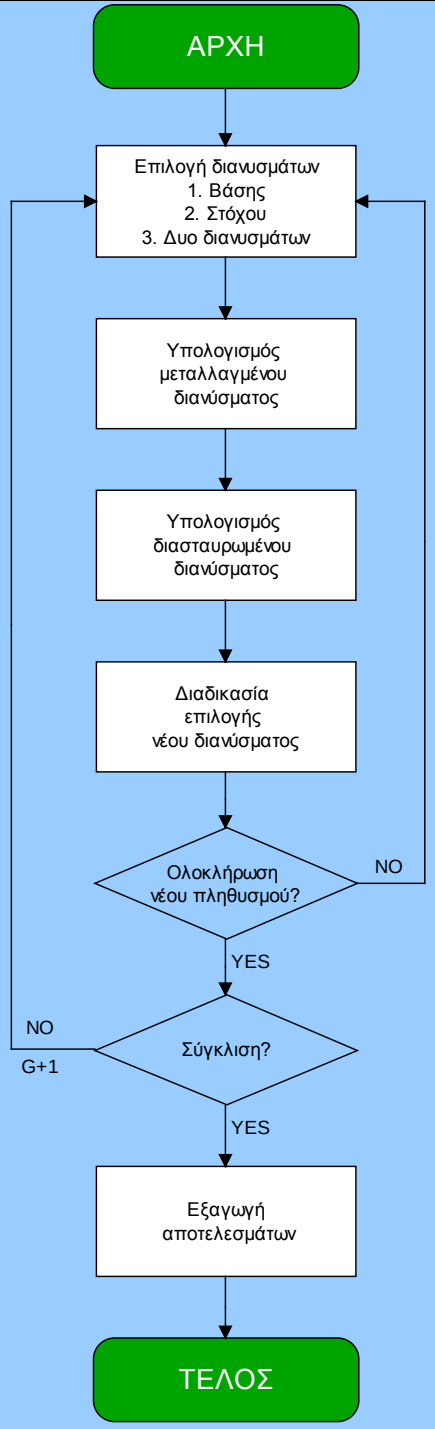
Πληθυσμός διανυσμάτων (t=9)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	6	6	6	7	6	6	6	6	6	6
B	6	5	5	7	6	6	7	6	6	6
Γ	10	10	10	9	10	10	10	10	10	10
Δ	9	10	9	8	10	10	9	10	10	10
E	13	14	14	12	13	13	12	13	13	14
Z	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
H	5	5	5	5	5	5	5	4	5	4
ΚΔ	24	24	24	24	24	24	24	24	24	24
ΔC	1400	1200	1300	1850	1300	1300	1500	1500	1300	1150
Z	1400	1200	1300	1850	1300	1300	1500	1500	1300	1150

Παράδειγμα 4 | Βελτιστοποίηση χρόνου - κόστους έργου



Βελτιστοποίηση με Διαφορική Εξέλιξη



Τέλος παρουσίασης