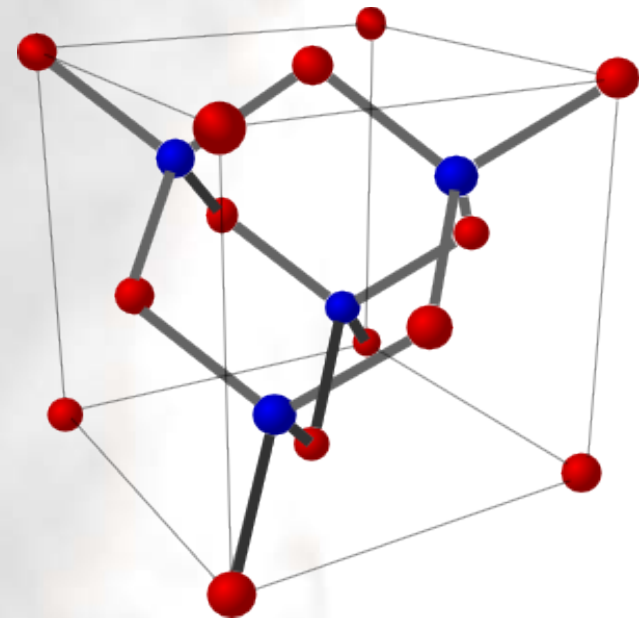


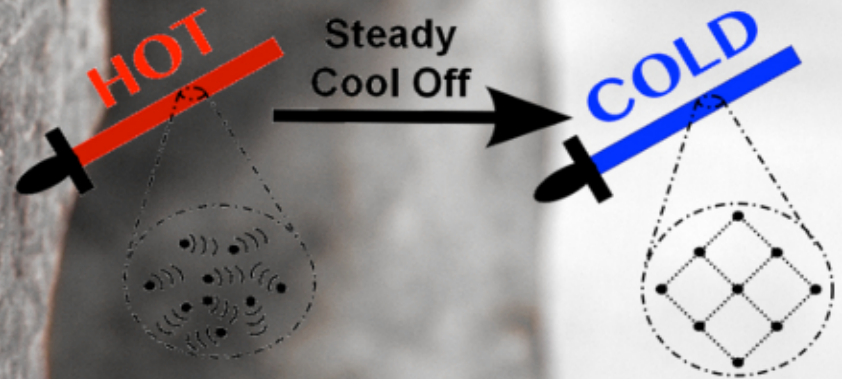
Μέθοδοι Βελτιστοποίησης

Μέθοδος Βελτιστοποίησης Προσομοιωμένης Ανόπτησης (Simulated Annealing – SA)

Υπεύθυνος μαθήματος : Αθανάσιος Χασιακός
Επιμέλεια παρουσίασης : Παναγιώτης Τσίκας



Ανόπτηση



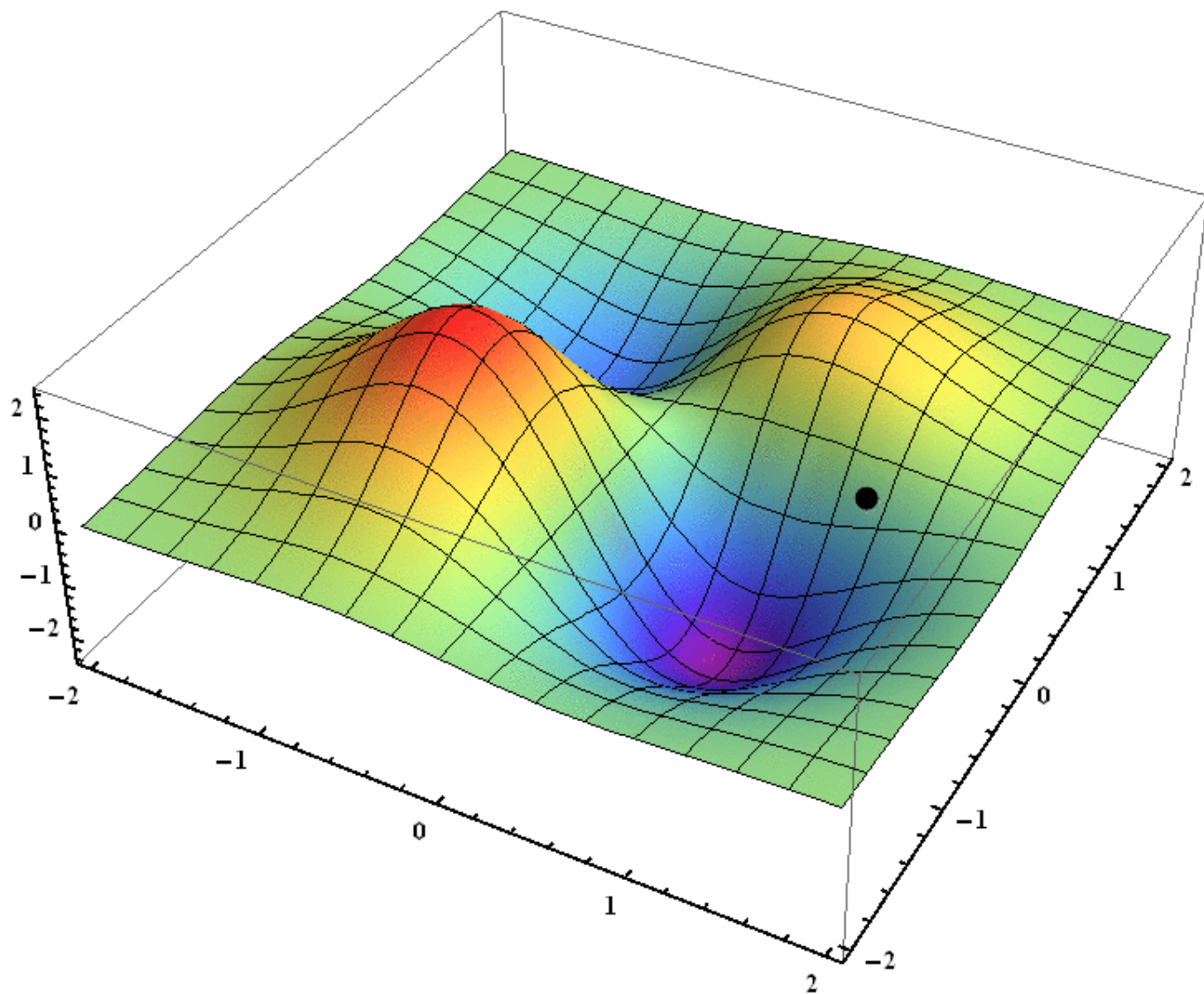
Προσομοιωμένη Ανόπτηση

Βασική ιδέα : Τυχαιοποιημένη επαναληπτική αναζήτηση στο χώρο των εφικτών λύσεων κατά την οποία στην αρχή γίνονται δεκτές με μεγάλη πιθανότητα και λύσεις χαμηλότερης αξίας από την τρέχουσα, προοδευτικά όμως μειώνεται η πιθανότητα αποδοχής υποδεέστερων λύσεων καθώς συγκλίνουμε προς τη βέλτιστη λύση.

Το ισοδύναμο με τη διαδικασία της ανόπτησης στην κατεργασία του μετάλλου (από όπου και το όνομα της μεθόδου) είναι ότι σε μεγάλες θερμοκρασίες, τα άτομα του μετάλλου παρουσιάζουν μεγάλη κινητικότητα (οι εξεταζόμενες λύσεις μπορεί να απέχουν πολύ η μία από την άλλη) ενώ καθώς η θερμοκρασία πέφτει, τα άτομα κάνουν μικρότερες κινήσεις (οι λύσεις που εξετάζονται εστιάζονται στην ίδια περιοχή) μέχρι να καταλάβουν τα άτομα μια σταθερή θέση στο μέταλλο (να προκύψει μια τελική - βέλτιστη λύση).

Θερμοδυναμική	Βελτιστοποίηση
1. Κατάσταση συστήματος	Εφικτή λύση
2. Ενέργεια	Τιμή αντικειμενικής συνάρτησης
3. Αλλαγή κατάστασης	Γειτονική λύση
4. Θερμοκρασία	Παράμετρος σύγκλισης
5. Ψυχρή κατάσταση	Βέλτιστη λύση

Προσομοιωμένη Ανόπτηση



Προσομοιωμένη Ανόπτηση (Βήματα)

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης $\min f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad -10 \leq x, y, z \leq 10$

Βήμα 1. Αρχική κατάσταση (τυχαία λύση) και ενέργεια | $E_0 = f(-4.6, -8.3, -9.3) = 180.3$

Βήμα 2. Αρχική θερμοκρασία | $T_0 = 500$

Βήμα 3. Επιλογή νέας λύσης (στη γειτονική περιοχή της προηγούμενης λύσης (με τυχαία μεταβολή μιας εκ παραμέτρων x, y ή z) | υπολογισμός νέας ενεργείας E_1

Βήμα 4. Αξιολόγηση νέας λύσης

α) αν $\Delta E = E_1 - E_0 < 0$, αποδοχή λύσης και συνέχιση με νέα θερμοκρασία,

β) αν $\Delta E = E_1 - E_0 > 0$, αποδοχή λύσης υπό περιορισμό ικανοποίησης του κριτηρίου *metropolis*, συνέχιση διαδικασίας με νέα θερμοκρασία,

γ) αν $\Delta E = E_1 - E_0 > 0$ και δεν ικανοποιείται το κριτήριο *metropolis*, επιλέγεται νέα λύση (με τυχαία μεταβολή μιας των παραμέτρων x, y ή z) κι εξετάζεται η αποδοχή της (όπως παραπάνω) διατηρώντας την ίδια τιμή θερμοκρασίας (αυτό γίνεται μέχρι να βρεθεί αποδεκτή λύση εντός συγκεκριμένου αριθμού επαναλήψεων, π.χ., 10),

Βήμα 5. Μείωση θερμοκρασίας και επανάληψη βημάτων 3-5 | $T_1 = a T_0, a \approx 1, a < 1$

Αποδοχή λύσης προηγούμενου βήματος και συνέχιση διαδικασίας με νέα θερμοκρασία

Βήμα 6. Διαδικασία τερματισμού

Κριτήριο Metropolis

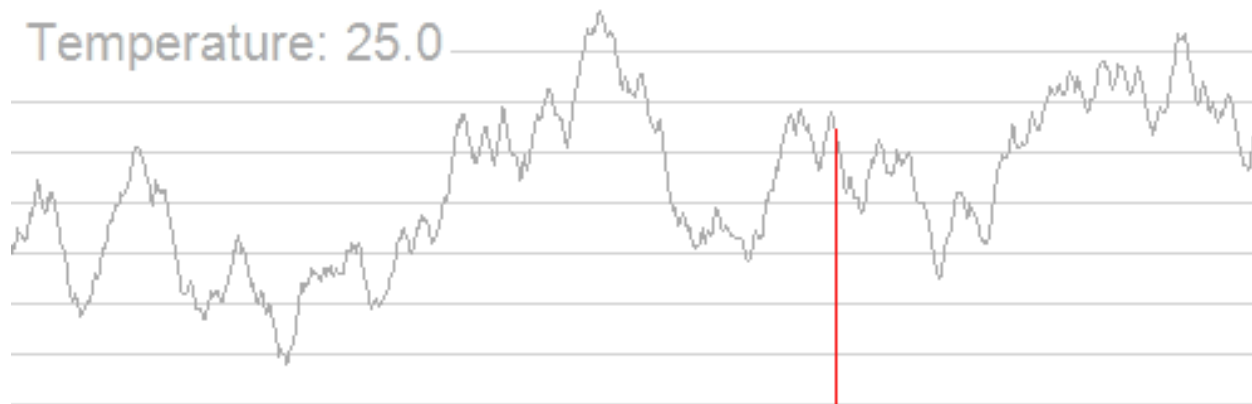
Η κατανομή των ενεργειών των μορίων υπακούει τον νόμο του Boltzmann:

$$P(E) \approx e^{\frac{-\Delta E}{kT}}$$

Κατ' αναλογία χρησιμοποιείται το Κριτήριο Metropolis

$$\delta \leq e^{\frac{-\Delta E}{kT}}$$

όπου k: σταθερά Boltzmann
(στη βελτιστοποίηση λαμβάνεται k=1)



Ελαχιστοποίηση συνάρτησης (t=0)

$$\min f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad -10 \leq x, y, z \leq 10$$

Αρχική κατάσταση | τυχαίοι αριθμοί από -10 έως +10

$$f(1.12, -8.80, 4.04) = 95.72$$

Αρχική θερμοκρασία

$$T_0 = 500$$

Αρχική ενέργεια

$$E_0 = 95.72$$

Κανόνας ενημέρωσης θερμοκρασίας

$$T_i = aT_{i-1} \quad a \approx 1 \quad a < 1$$

κριτήριο **Metropolis**

$$\delta \leq e^{\frac{-\Delta E}{kT}}$$

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης (t=1)

$$\min f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad -10 \leq x, y, z \leq 10$$

Αρχική κατάσταση | τυχαίοι αριθμοί από -10 έως +10

$$f(+1.12, -8.80, -4.04) = 95.72$$

Αρχική θερμοκρασία

$$T_0 = 500$$

Αρχική ενέργεια

$$E_0 = 95.72$$

Νέα κατάσταση | μετάλλαξη μιας μεταβλητής τυχαία | -10 έως +10 | -4.04 → -3.90

$$f(+1.12, -8.80, -3.90) = 94.60$$

Νέα ενέργεια $E_1 = 94.60$

$$\Delta E = 94.61 - 95.70 = -1.09 < 0 \rightarrow \text{αποδεκτή λύση γιατί είναι καλύτερη της προηγούμενης}$$

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης (t=2)

$$\min f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad -10 \leq x, y, z \leq 10$$

Κατάσταση

$$f(+1.12, -8.80, -3.90) = 94.61$$

Θερμοκρασία

$$T_1 = 0.9 \times 500 = 450$$

Ενέργεια

$$E_1 = 94.60$$

Νέα κατάσταση | μετάλλαξη μιας μεταβλητής τυχαία | -10 έως +10 | +1.12 → +7.02

$$f(+7.02, -8.80, -3.90) = 142.64$$

νέα ενέργεια $E_2 = 142.64$

$\Delta E = 142.64 - 94.61 = 48.03 > 0 \rightarrow$ εξετάζεται το κριτήριο Metropolis

κριτήριο
Metropolis $\delta \leq e^{\frac{-\Delta E}{kT}} = e^{\frac{-48.03}{450}} = 0.899$

Λαμβάνεται τυχαίος αριθμός δ ($0 < \delta < 1$),
έστω $\delta = 0.73$.

Είναι $0.73 \leq 0.899 \rightarrow$ αποδεκτή λύση

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης (t=3)

$$\min f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad -10 \leq x, y, z \leq 10$$

Κατάσταση

$$f(+7.02, -8.80, -3.90) = 142.64$$

Θερμοκρασία

$$T_2 = 0.9 \times 450 = 405$$

Ενέργεια

$$E_2 = 142.64$$

Νέα κατάσταση | μετάλλαξη μιας μεταβλητής τυχαία | -10 έως +10 | -3.90 → +5.69

$$f(+7.02, -8.80, +5.69) = 159.80$$

$$\text{νέα ενέργεια} \quad E_3 = 159.80$$

$\Delta E = 159.80 - 142.64 = 17.16 > 0 \rightarrow$ εξετάζεται το κριτήριο Metropolis

κριτήριο
Metropolis $\delta \leq e^{\frac{-\Delta E}{kT}} = e^{\frac{-17.17}{405}} = 0.957$

Λαμβάνεται τυχαίος αριθμός δ ($0 < \delta < 1$),
έστω $\delta = 0.26$.

Είναι $0.26 \leq 0.957 \rightarrow$ αποδεκτή λύση

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης (t=4)

$$\min f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad -10 \leq x, y, z \leq 10$$

Κατάσταση

$$f(+7.02, -8.80, +5.69) = 159.80$$

Θερμοκρασία

$$T_3 = 0.9 \times 405 = 364.5$$

Ενέργεια

$$E_3 = 159.80$$

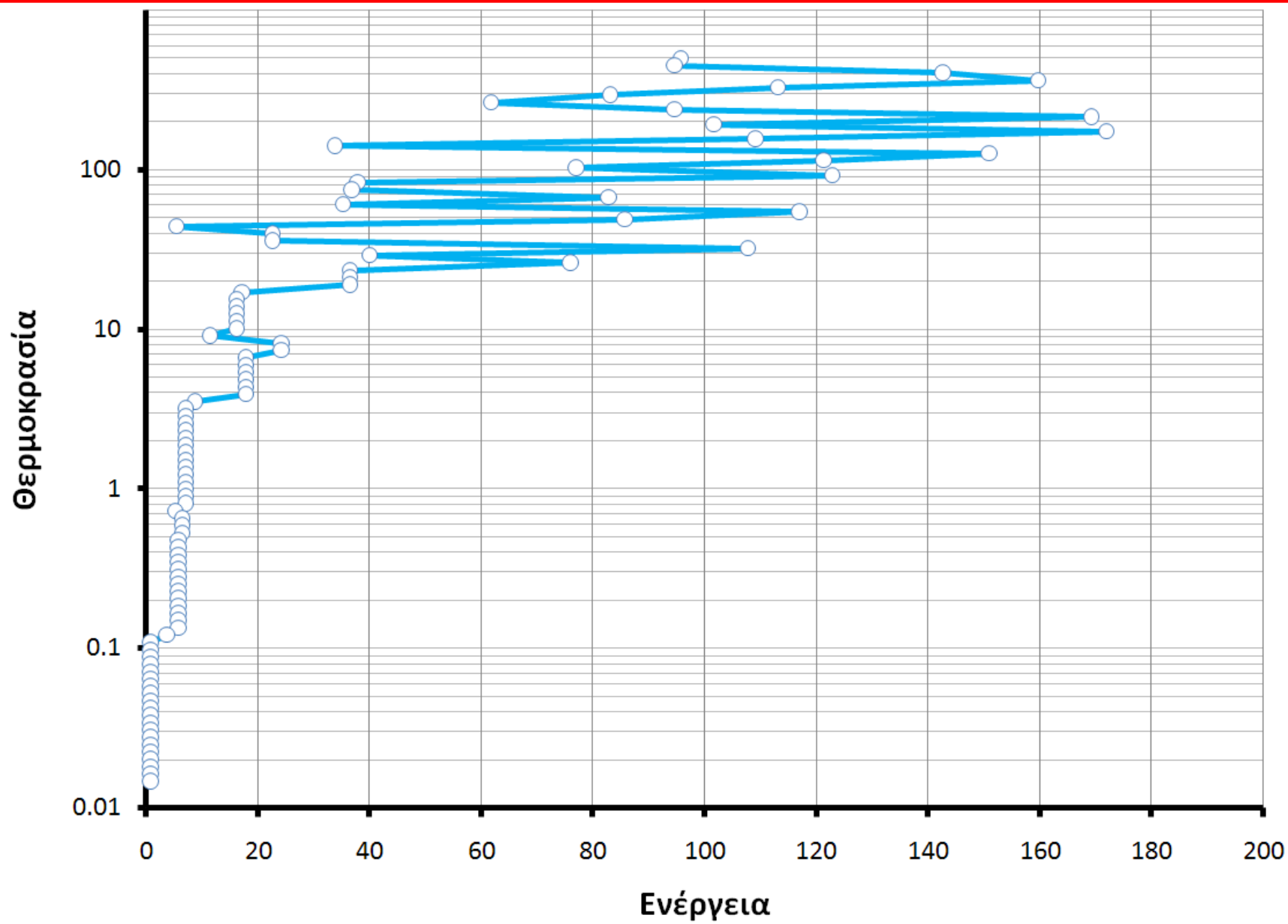
Νέα κατάσταση | μετάλλαξη μιας μεταβλητής τυχαία | -10 έως +10 | -8.80 → +5.61

$$f(+7.02, +5.61, +5.69) = 113.13$$

Νέα ενέργεια $E_4 = 113.13$

$\Delta E = 159.80 - 113.13 = -46.67 < 0 \rightarrow$ αποδεκτή λύση γιατί είναι καλύτερη της προηγούμενης

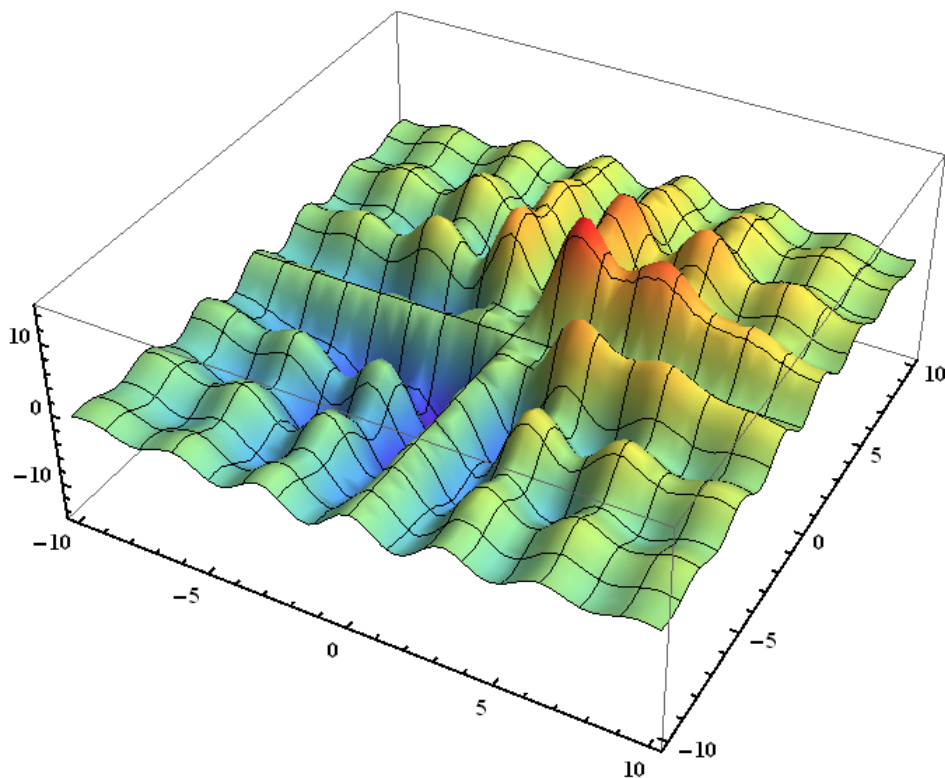
Ελαχιστοποίηση συνάρτησης



Αλγόριθμος Προσομοιωμένης Ανόπτωσης

- **Βήμα 1.** Εύρεση μιας τυχαίας αρχικής λύσης και καθορισμός της αρχικής τιμής της παραμέτρου της θερμοκρασίας.
- **Βήμα 2.** Εύρεση μιας γειτονικής λύσης μέσω μικρής διαταραχής της τρέχουσας λύσης.
- **Βήμα 3.** Αν η νέα λύση είναι καλύτερη της προηγούμενης, γίνεται αποδεκτή. Αν όχι εφαρμόζεται το κριτήριο **Metropolis**, ώστε να αποφασιστεί αν η νέα λύση θα γίνει αποδεκτή ή όχι. Κάθε αποδεκτή λύση αντικαθιστά την προηγούμενη (αποδεκτή) λύση.
- **Βήμα 4.** Αν δεν προκύψει αποδεκτή λύση, (μπορεί να) επαναλαμβάνεται η διαδικασία των **Βημάτων 2** και **3** για συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων (π.χ., 10) και με την ίδια θερμοκρασία (για να αποφευχθεί γρήγορη σύγκλιση σε τοπικό ακρότατο).
- **Βήμα 5.** Η τελευταία αποδεκτή λύση για την τρέχουσα θερμοκρασία αποτελεί την αρχική λύση για το επόμενο στάδιο. Η θερμοκρασία μειώνεται και η διαδικασία επαναλαμβάνεται (ξεκινώντας από το **Βήμα 2**) μέχρι να ικανοποιηθούν τα κριτήρια τερματισμού.

Μεγιστοποίηση συνάρτησης



$$f(x, y) = 10 \cdot [x \cdot \sin^2(y) + y \cdot \cos^2(x)] \cdot e^{-\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3}}$$
$$-10 \leq x, y \leq 10$$

$$\max f(3.029, 1.614) = 14.706$$

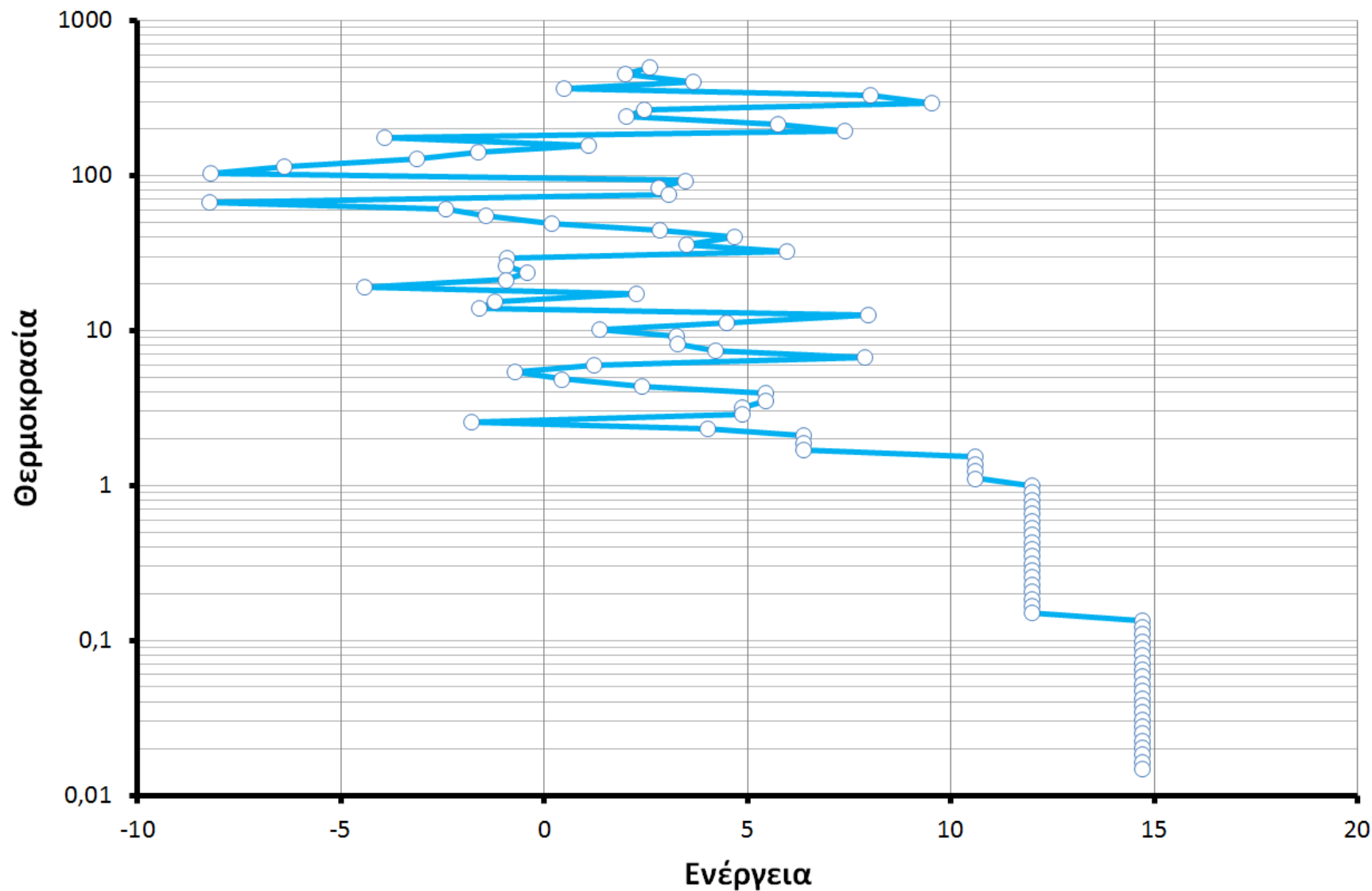
Μεγιστοποίηση συνάρτησης

t	x	y	f(x,y)	E	T	ΔΕ	δ	p
0	4,39	7,58	2,61	-2,61	500,00			
1	7,71	7,58	1,99	-1,99	450,00	0,62	0,99	1,00
2	7,71	4,39	3,65	-3,65	405,00	-1,66		
3	7,71	3,46	0,49	-0,49	364,50	3,16	0,71	0,99
4	3,06	3,46	8,02	-8,02	328,05	-7,52		
5	3,06	2,51	9,52	-9,52	295,25	-1,50		
6	1,74	2,51	2,45	-2,45	265,72	7,07	0,81	0,98
7	1,54	2,51	2,02	-2,02	239,15	0,43	0,29	1,00
8	1,54	-1,96	5,74	-5,74	215,23	-3,71		
9	4,59	-1,96	7,39	-7,39	193,71	-1,65		

Μεγιστοποίηση συνάρτησης

t	x	y	f(x,y)	E	T	ΔE	δ	p
39	-0,84	4,02	3,29	-3,29	8,21			
40	-0,84	2,74	4,20	-4,20	7,39	-0,91		
41	3,21	2,74	7,88	-7,88	6,65	-3,68		
42	-1,13	2,74	1,21	-1,21	5,99	6,67	0,35	0,37
43	-1,13	-9,84	-0,73	0,73	5,39	1,94	0,51	0,72
44	-1,13	8,43	0,43	-0,43	4,85	-1,16		
45	8,58	7,48	2,42	-2,42	4,36	-1,98		
46	2,58	7,48	5,43	-5,43	3,93	-3,02		
47	2,58	7,48	5,43	-5,43	3,53	0,00		
48	5,91	7,75	4,88	-4,88	3,18	0,55	0,19	0,85

Μεγιστοποίηση συνάρτησης

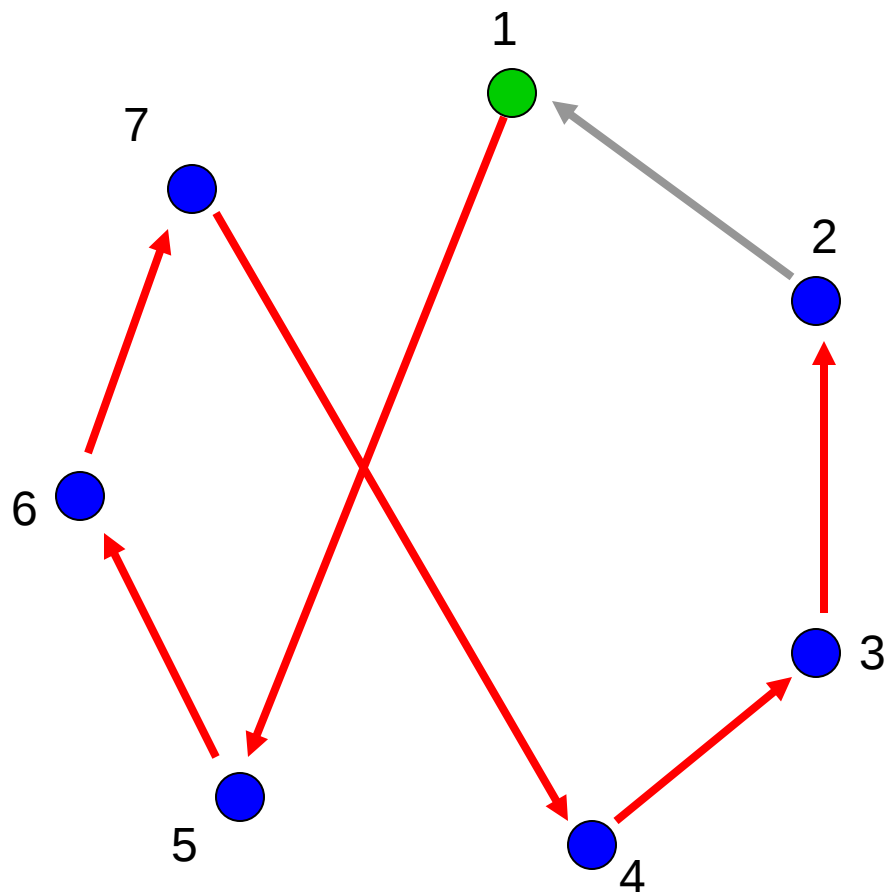


το Πρόβλημα του Πλανόδιου Πωλητή



Ο πλανόδιος πωλητής πρέπει να περάσει από όλες τις πόλεις του προβλήματος διανύοντας τη μικρότερη δυνατή απόσταση (ή με το μικρότερο δυνατό κόστος) ξεκινώντας και καταλήγοντας στο ίδιο σημείο.

Παράδειγμα TSP



1	5	6	7	4	3	2	1
159	22	26	12	23	29	20	27

	1	2	3	4	5	6	7
1	--	26	17	26	22	10	22
2	26	--	12	17	11	21	19
3	17	12	--	23	27	25	18
4	26	17	23	--	23	19	27
5	22	11	27	23	--	29	21
6	10	21	25	19	29	--	20
7	22	19	18	27	21	20	--

Παράδειγμα TSP ($t=0$)

Αρχική κατάσταση | Τυχαία διαδρομή

$$d\{1,5,6,7,4,3,2,1\} = 159$$

Αρχική θερμοκρασία

$$T_0 = 100$$

Αρχική ενέργεια

$$E_0 = 159$$

Κανόνας ενημέρωσης θερμοκρασίας

$$T_i = aT_{i-1} \quad a \approx 1 \quad a < 1$$

κριτήριο **Metropolis**

$$\delta \leq e^{\frac{-\Delta E}{kT}}$$

Παράδειγμα TSP (t=1)

Αρχική κατάσταση | Τυχαία διαδρομή

$$d\{1,5,6,7,4,3,2,1\} = 159$$

Αρχική θερμοκρασία

$$T_0 = 100$$

Αρχική ενέργεια

$$E_0 = 159$$

Νέα κατάσταση | Αντιμετάθεση | η πόλη 6 με την πόλη 4

$$d\{1,5,4,7,6,3,2,1\} = 155$$

νέα ενέργεια

$$E_1 = 155$$

$\Delta E < 0 \rightarrow$ αποδοχή λύση

$$d\{1,5,4,7,6,3,2,1\} = 155$$

Παράδειγμα TSP (t=2)

Κατάσταση

$$d\{1,5,4,7,6,3,2,1\} = 155$$

Θερμοκρασία

$$T_1 = 0.9 \times 100 = 90$$

Ενέργεια

$$E_1 = 155$$

Νέα κατάσταση | Αντιμετάθεση | η πόλη 3 με την πόλη 6

$$d\{1,5,4,7,3,6,2,1\} = 162$$

Νέα ενέργεια

$$E_2 = 162$$

$$\Delta E \geq 0 \rightarrow \text{κριτήριο Metropolis} \quad \delta \leq e^{\frac{-\Delta E}{kT}} = e^{\frac{-7}{90}} = 0.925$$

τυχαίος αριθμός $\delta=0,26$
 $\rightarrow 0,26 \leq 0,925 \rightarrow$ δεκτή λύση

Παράδειγμα TSP (t=3)

Κατάσταση

$$d\{1,5,4,7,3,6,2,1\} = 162$$

Θερμοκρασία

$$T_2 = 0.9 \times 90 = 81$$

Ενέργεια

$$E_2 = 162$$

Νέα κατάσταση | Αντιμετάθεση | η πόλη 4 με την πόλη 5

$$d\{1,4,5,7,3,6,2,1\} = 160$$

Νέα ενέργεια

$$E_3 = 160$$

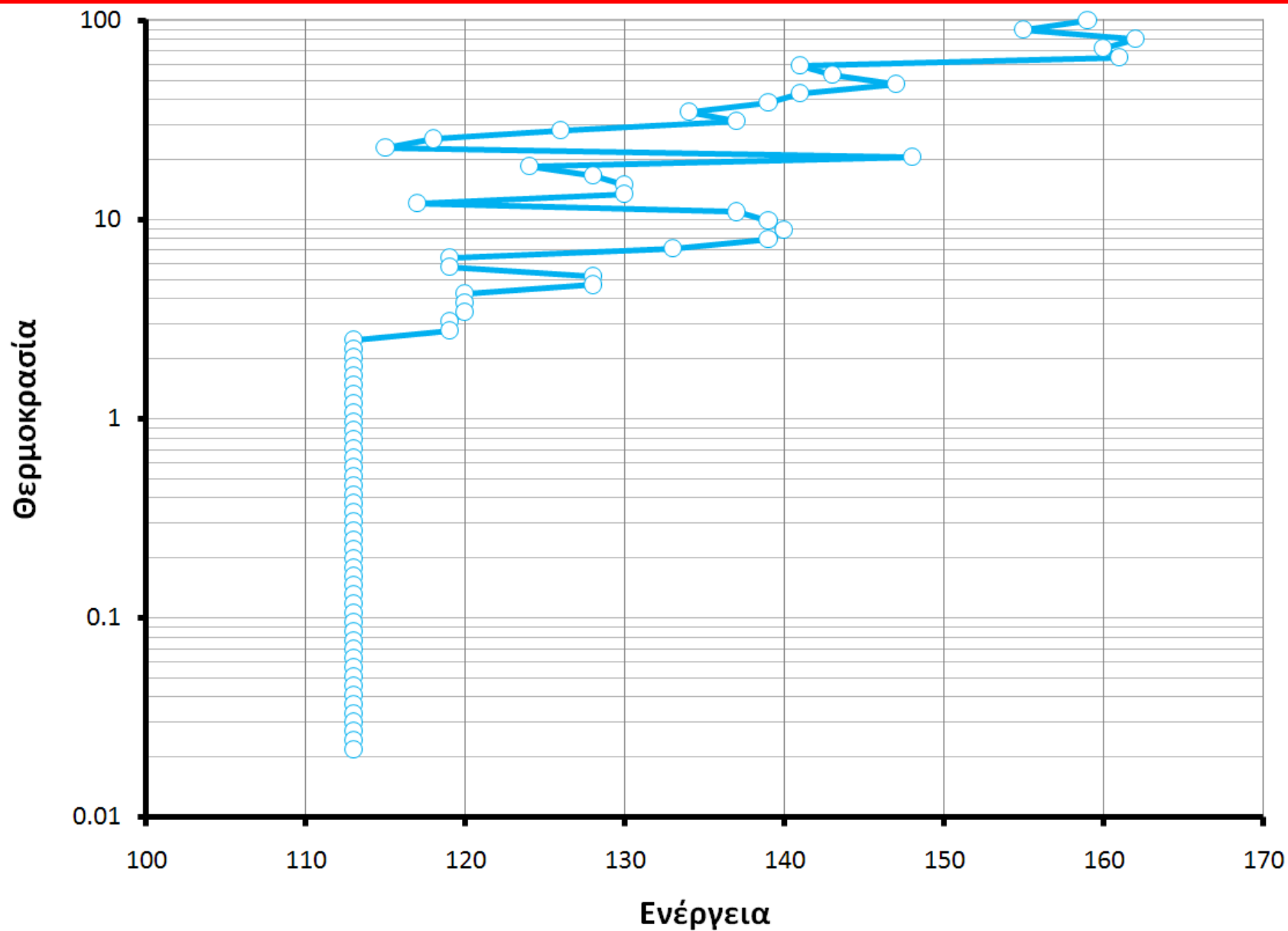
$$\Delta E = 160 - 162 = -2 < 0 \rightarrow \text{αποδοχή λύση}$$

$$d\{1,4,5,7,3,6,2,1\} = 160$$

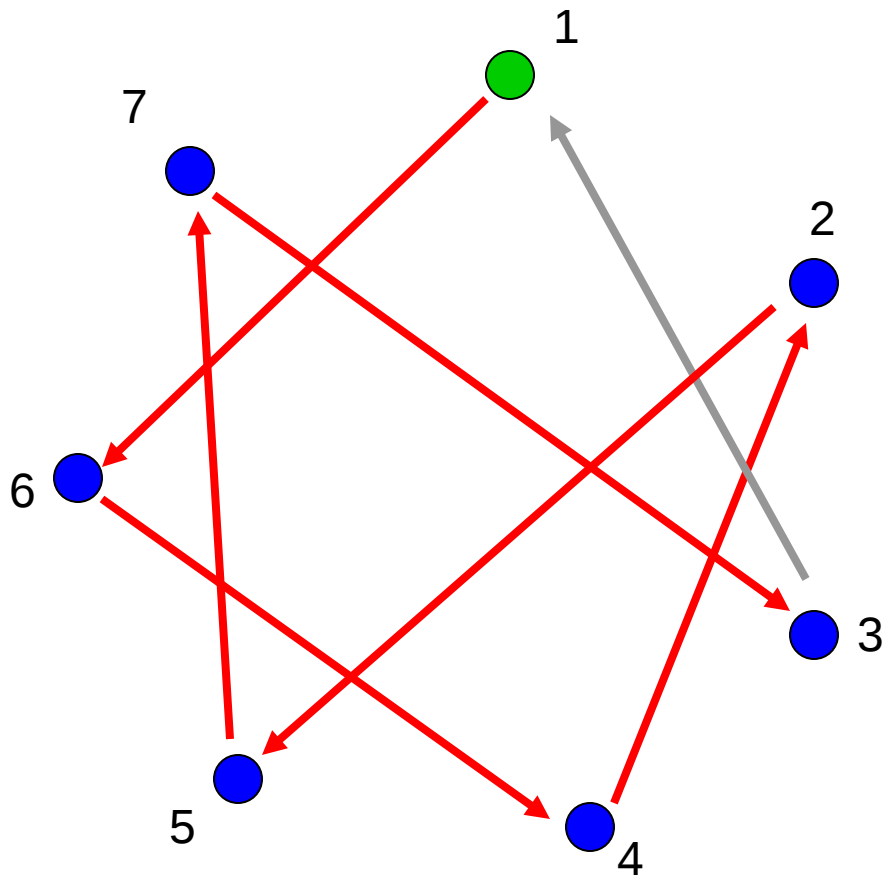
Παράδειγμα TSP

ΕΠΑΝΑΛ. t	ΔΡΟΜΟΛΟΓΙΟ						ΜΗΚΟΣ	ΘΕΡΜΟΚ. T
0	5	6	7	4	3	2	159	100.00
1	5	4	7	6	3	2	155	90.00
2	5	4	7	3	6	2	162	81.00
3	4	5	7	3	6	2	160	72.90
4	4	5	3	7	6	2	161	65.61
5	4	5	2	7	6	3	141	59.05
6	5	4	2	7	6	3	143	53.14
7	3	4	2	7	6	5	147	47.83
8	3	7	2	4	6	5	141	43.05
9	7	3	2	4	6	5	139	38.74
10	6	3	2	4	7	5	134	34.87
11	6	3	4	2	7	5	137	31.38
12	6	4	3	2	7	5	126	28.24
13	6	4	3	2	5	7	118	25.42
14	6	4	5	2	3	7	115	22.88
15	4	2	5	3	6	7	148	20.59
16	3	2	5	4	6	7	124	18.53
17	5	2	3	7	6	4	128	16.68
18	6	4	2	7	5	3	130	15.01
19	6	4	2	7	5	3	130	13.51
20	6	4	7	5	2	3	117	12.16
35	3	7	5	2	4	6	113	2.50

Παράδειγμα TSP



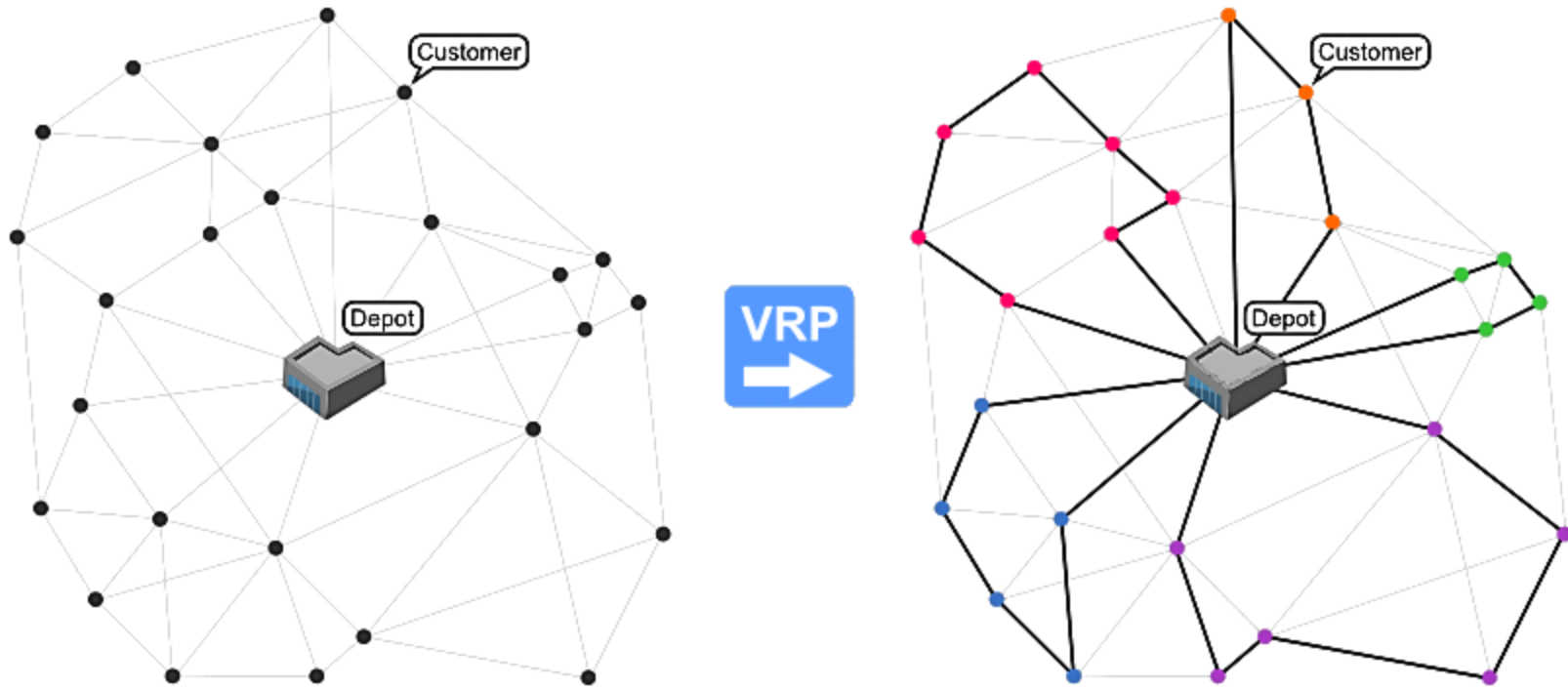
Βέλτιστη Διαδρομή



	1	2	3	4	5	6	7
1	--	26	17	26	22	10	22
2	26	--	12	17	11	21	19
3	17	12	--	23	27	25	18
4	26	17	23	--	23	19	27
5	22	11	27	23	--	29	21
6	10	21	25	19	29	--	20
7	22	19	18	27	21	20	--

1	6	4	2	5	7	3	1
113	10	19	17	11	21	18	17

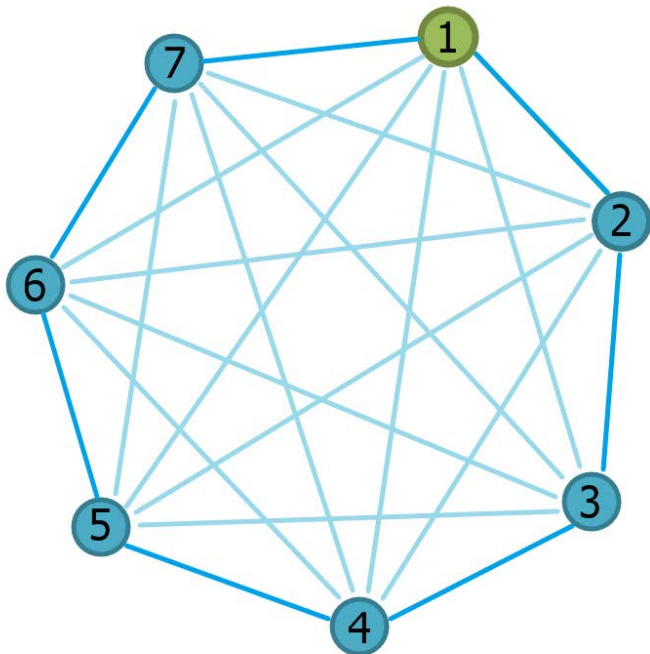
το Πρόβλημα Δρομολόγησης Οχημάτων



Το πρόβλημα Δρομολόγησης Οχημάτων, επιδιώκει την εξυπηρέτηση ενός αριθμού πελατών (κομβοί) με εμπορεύματα (ποσότητα), χρησιμοποιώντας ένα αριθμό οχημάτων συγκεκριμένης χωρητικότητας. Διανύοντας τη μικρότερη απόσταση (για το σύνολο των οχημάτων) κατά την εξυπηρέτηση των πελατών.

το Πρόβλημα Δρομολόγησης Οχημάτων

Δίκτυο
πόλεων



Χωρητικότητα
οχημάτων

25



25



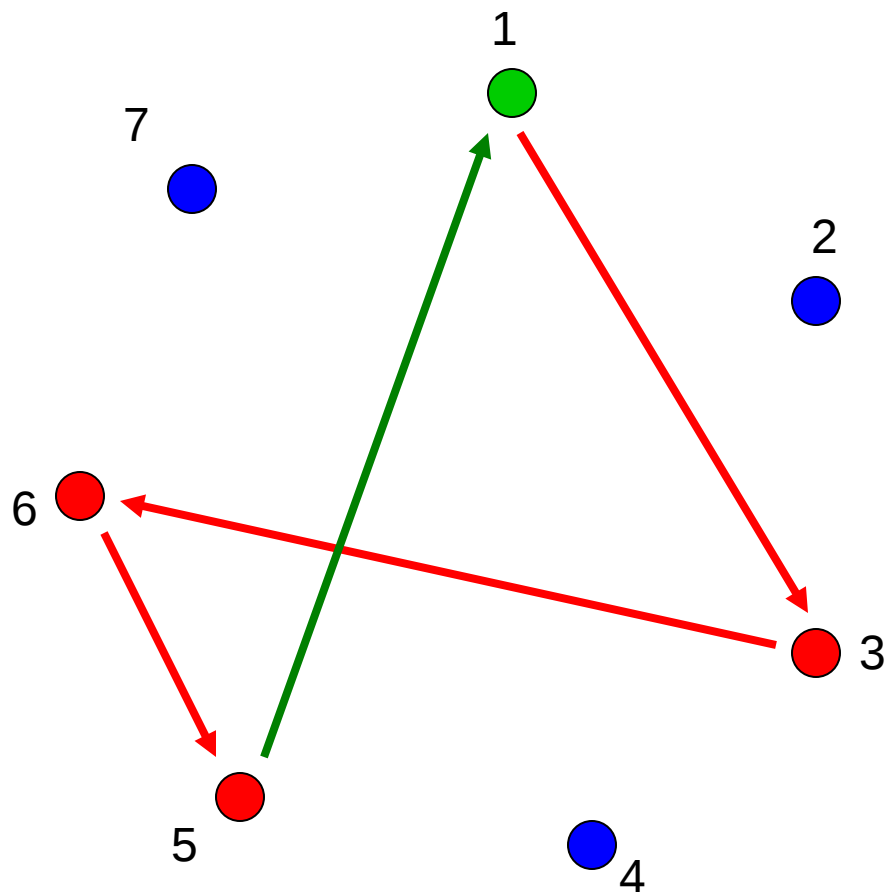
Ζήτηση πόλεων

	2	3	4	5	6	7	
1	45	6	5	7	8	10	9

Αποστάσεις πόλεων

	1	2	3	4	5	6	7
1	--	26	17	26	22	10	22
2	26	--	12	17	11	21	19
3	17	12	--	23	27	25	18
4	26	17	23	--	23	19	27
5	22	11	27	23	--	29	21
6	10	21	25	19	29	--	20
7	22	19	18	27	21	20	--

Παράδειγμα - Vehicle Routing Problem VRP



A

Ζήτηση πόλεων

	2	3	4	5	6	7
45	6	5	7	8	10	9

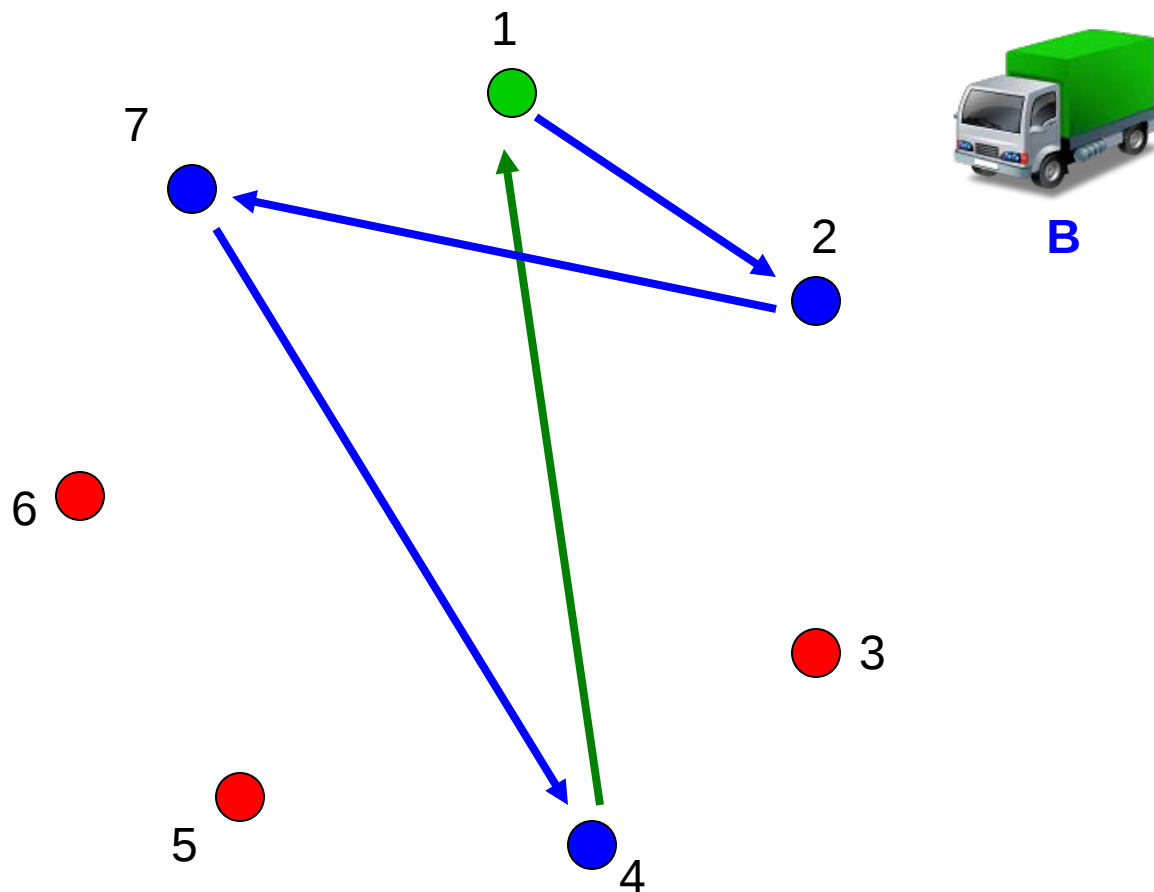
Αποστάσεις πόλεων

	1	2	3	4	5	6	7
1	--	26	17	26	22	10	22
2	26	--	12	17	11	21	19
3	17	12	--	23	27	25	18
4	26	17	23	--	23	19	27
5	22	11	27	23	--	29	21
6	10	21	25	19	29	--	20
7	22	19	18	27	21	20	--

L	1	3	6	5	1
D	93	17	25	29	22
Z	23	5	10	8	

L: διαδρομή
D: απόσταση
Z: ζήτηση

Παράδειγμα - Vehicle Routing Problem VRP



L: διαδρομή
D: απόσταση
Z: ζήτηση

L	1	2	7	4	1
D	98	26	19	27	26
Z	22	6	9	7	

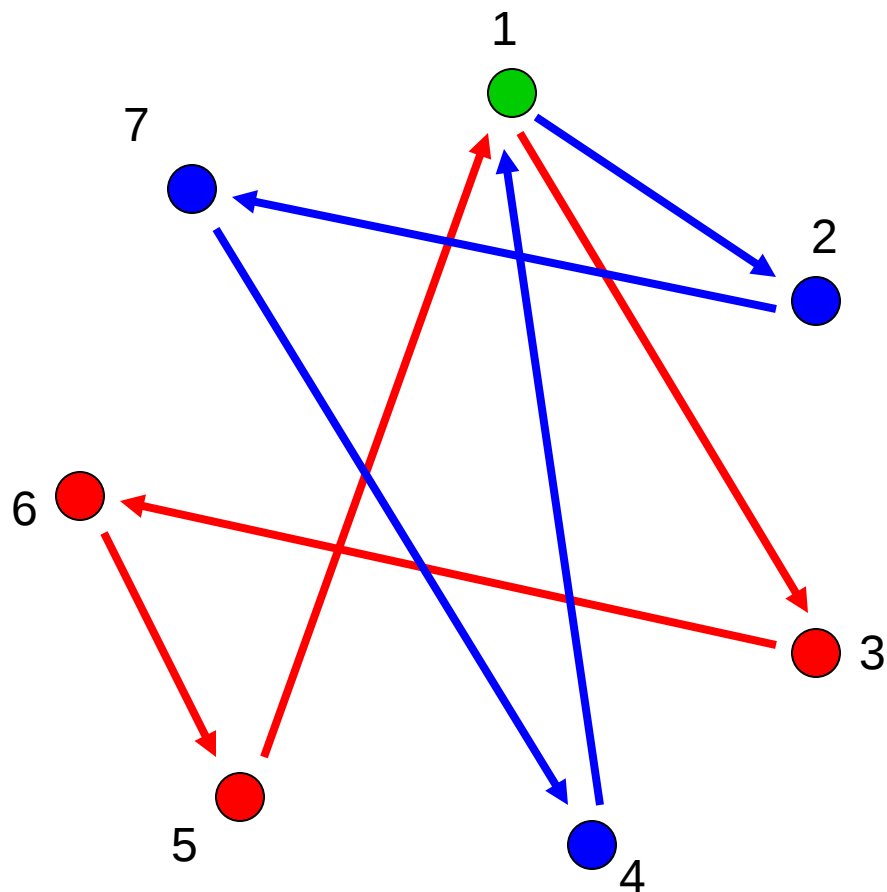
Ζήτηση πόλεων

	2	3	4	5	6	7
45	6	5	7	8	10	9

Αποστάσεις πόλεων

	1	2	3	4	5	6	7
1	--	26	17	26	22	10	22
2	26	--	12	17	11	21	19
3	17	12	--	23	27	25	18
4	26	17	23	--	23	19	27
5	22	11	27	23	--	29	21
6	10	21	25	19	29	--	20
7	22	19	18	27	21	20	--

Παράδειγμα - Vehicle Routing Problem VRP



L

	1	3	6	5	1
D	93	17	25	29	22
Z	23	5	10	8	

L

	1	2	7	4	1
D	98	26	19	27	26
Z	22	6	9	7	

Ζήτηση πόλεων

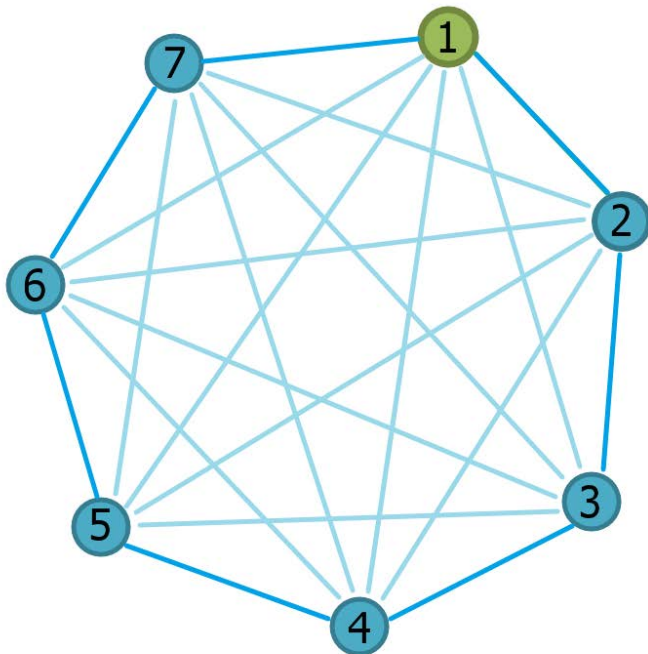
	2	3	4	5	6	7
45	6	5	7	8	10	9

Αποστάσεις πόλεων

	1	2	3	4	5	6	7
1	--	26	17	26	22	10	22
2	26	--	12	17	11	21	19
3	17	12	--	23	27	25	18
4	26	17	23	--	23	19	27
5	22	11	27	23	--	29	21
6	10	21	25	19	29	--	20
7	22	19	18	27	21	20	--

Παράδειγμα VRP (εξετάζονται εφικτές λύσεις)

Δίκτυο
πόλεων



Χωρητικότητα
οχημάτων

25



25



Ζήτηση πόλεων

	2	3	4	5	6	7	
1	45	6	5	7	8	10	9

Αποστάσεις πόλεων

	1	2	3	4	5	6	7
1	--	26	17	26	22	10	22
2	26	--	12	17	11	21	19
3	17	12	--	23	27	25	18
4	26	17	23	--	23	19	27
5	22	11	27	23	--	29	21
6	10	21	25	19	29	--	20
7	22	19	18	27	21	20	--

Παράδειγμα VRP ($t=0$, εξετάζονται εφικτές λύσεις)

Αντικειμενική συνάρτηση συνολικό μήκος | $L = L_A + L_B$

Αρχική κατάσταση | Τυχαία διαδρομή

$$L_A\{1,3,6,5,1\} = 93 \quad , B_A = 23$$

$$L_B\{1,2,7,4,1\} = 98 \quad , B_B = 22$$

$$L = L_A + L_B = 191$$

Αρχική θερμοκρασία

$$T_0 = 100$$

Αρχική ενέργεια

$$E_0 = 191$$

Κανόνας ενημέρωσης θερμοκρασίας

$$T_i = aT_{i-1} \quad a \approx 1 \quad a < 1$$

κριτήριο **Metropolis**

$$\delta \leq e^{\frac{-\Delta E}{kT}}$$

Παράδειγμα VRP (t=1, εξετάζονται εφικτές λύσεις)

Αρχική κατάσταση | Τυχαία διαδρομή

$$L_A \{1,3,6,5,1\} = 93, B_A = 23$$

$$L = L_A + L_B = 191$$

$$L_B \{1,2,7,4,1\} = 98, B_B = 22$$

Αρχική θερμοκρασία

$$T_0 = 100$$

Αρχική ενέργεια

$$E_0 = 191$$

Νέα κατάσταση | Αντιμετάθεση | η πόλη 2 με την πόλη 7,

$$L_A \{1,3,6,5,1\} = 93, B_A = 23$$

$$L = L_A + L_B = 177$$

$$L_B \{1,7,2,4,1\} = 84, B_B = 22$$

Νέα ενέργεια

$$E_1 = 177$$

$\Delta E < 0 \rightarrow$ αποδοχή λύσης

$$L = L_A + L_B = 177$$

Παράδειγμα VRP ($t=2$, εξετάζονται εφικτές λύσεις)

Κατάσταση | Τυχαία διαδρομή

$$L_A\{1,3,6,5,1\} = 93, B_A = 23$$

$$L = L_A + L_B = 177$$

$$L_B\{1,7,2,4,1\} = 84, B_B = 22$$

Θερμοκρασία

$$T_1 = 0.9 \times 100 = 90$$

Ενέργεια

$$E_1 = 177$$

Νέα κατάσταση | Αντιμετάθεση | η πόλη 6 με την πόλη 7,

$$L_A\{1,3,7,5,1\} = 78, B_A = 22$$

$$L = L_A + L_B = 152$$

$$L_B\{1,6,2,4,1\} = 74, B_B = 23$$

Νέα ενέργεια

$$E_1 = 152$$

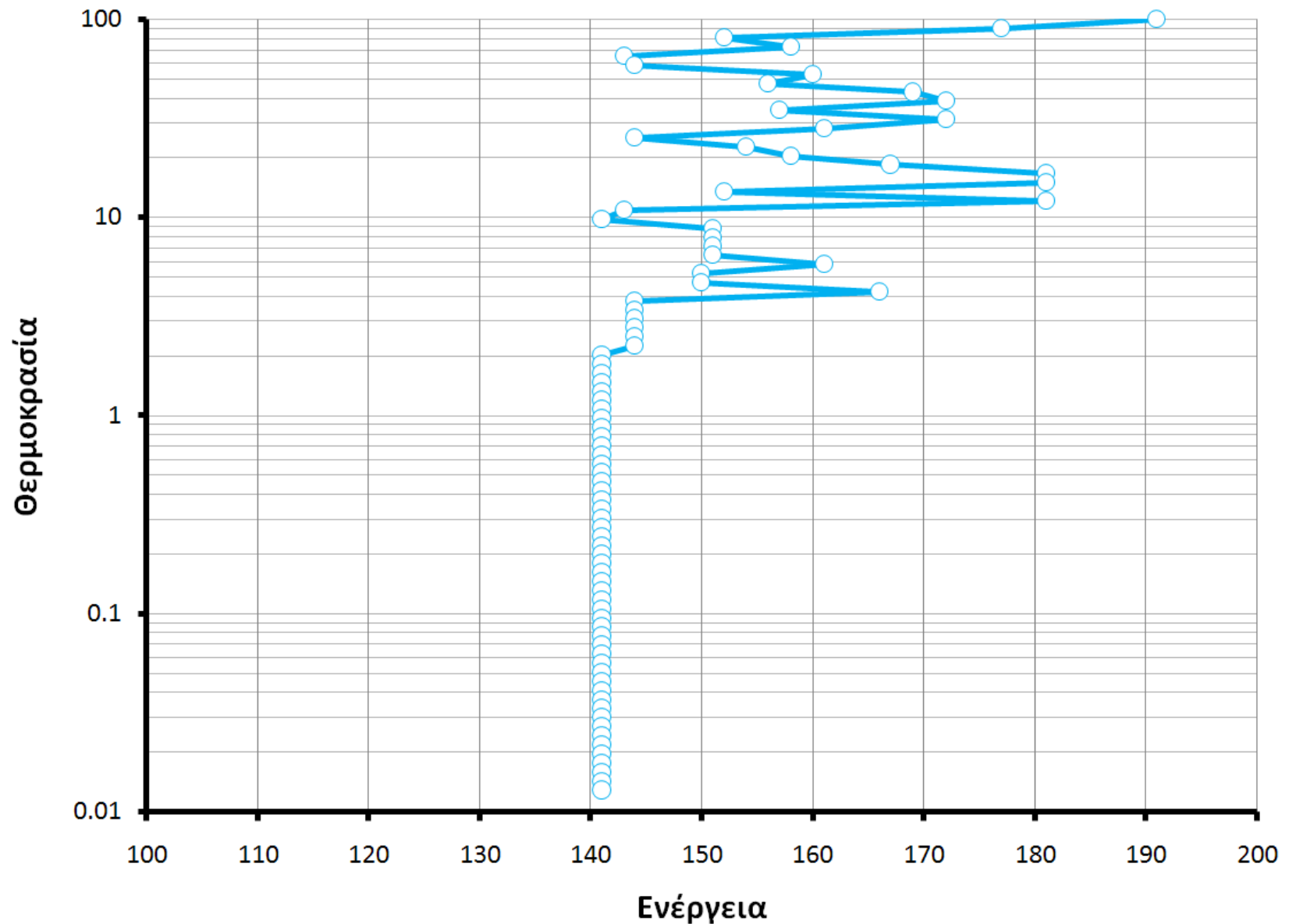
$\Delta E < 0 \rightarrow$ αποδοχή λύσης

$$L = L_A + L_B = 152$$

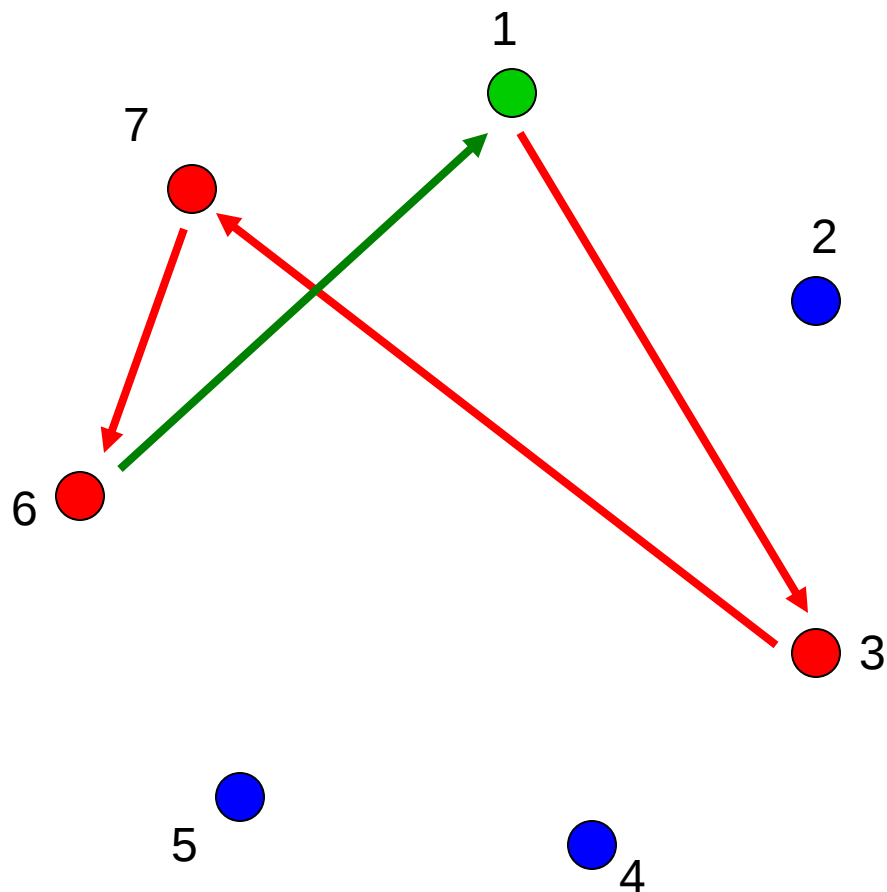
Παράδειγμα - Vehicle Routing Problem VRP

ΕΠΑΝΑΛ.	ΔΡΟΜΟΛΟΓΙΟ Α			ΔΡΟΜΟΛΟΓΙΟ Β			ΜΗΚΟΣ			ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ		ΘΕΡΜΟΚ.
t							A	B	A + B	A	B	T
0	3	6	5	2	7	4	93	98	191	23	22	100.00
1	3	6	5	7	2	4	93	84	177	23	22	90.00
2	3	7	5	6	2	4	78	74	152	22	23	81.00
3	7	2	5	6	3	4	74	84	158	23	22	72.90
4	7	2	5	6	4	3	74	69	143	23	22	65.61
5	7	2	3	6	4	5	70	74	144	20	25	59.05
6	5	2	4	3	6	7	76	84	160	21	24	53.14
7	5	7	4	6	2	3	96	60	156	24	21	47.83
8	5	7	4	6	3	2	96	73	169	24	21	43.05
9	6	3	4	5	7	2	84	88	172	22	23	38.74
10	6	4	3	5	7	2	69	88	157	22	23	34.87
11	6	3	4	5	7	2	84	88	172	22	23	31.38
12	5	3	7	6	4	2	89	72	161	22	23	28.24
13	3	2	7	5	4	6	70	74	144	20	25	25.42
14	2	7	3	5	4	6	80	74	154	20	25	22.88
15	5	2	7	6	3	4	74	84	158	23	22	20.59
16	5	4	7	6	3	2	94	73	167	24	21	18.53
17	2	6	4	5	3	7	92	89	181	23	22	16.68
18	2	6	3	4	5	7	89	92	181	21	24	15.01
19	6	2	3	4	5	7	60	92	152	21	24	13.51
20	2	6	3	4	5	7	89	92	181	21	24	12.16
37	3	7	6	4	2	5	65	76	141	24	21	2.03

Παράδειγμα - Vehicle Routing Problem VRP



Βέλτιστο Δρομολόγιο (Α)



A

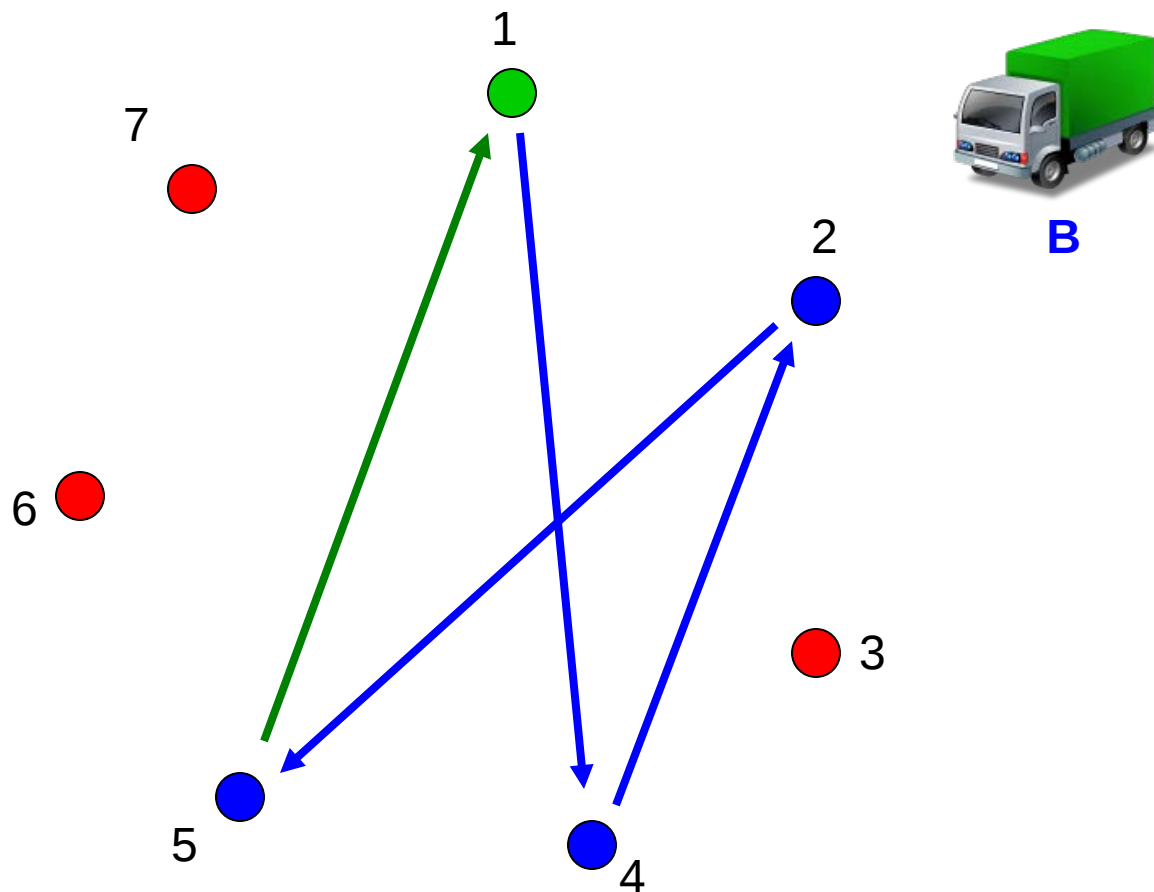
	2	3	4	5	6	7
45	6	5	7	8	10	9

L	1	3	7	6	1
D	65	17	18	20	10
Z	24	5	9	10	

L: διαδρομή
D: απόσταση
Z: ζήτηση

	1	2	3	4	5	6	7
1	--	26	17	26	22	10	22
2	26	--	12	17	11	21	19
3	17	12	--	23	27	25	18
4	26	17	23	--	23	19	27
5	22	11	27	23	--	29	21
6	10	21	25	19	29	--	20
7	22	19	18	27	21	20	--

Βέλτιστο Δρομολόγιο (B)



B

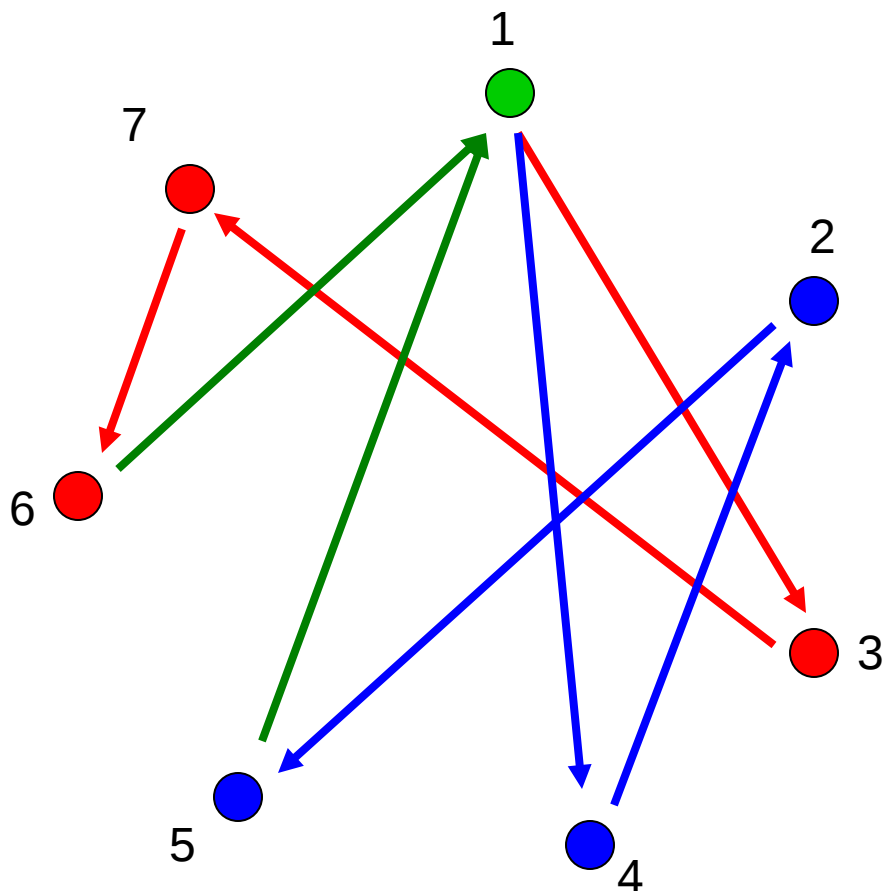
	2	3	4	5	6	7
45	6	5	7	8	10	9

L: διαδρομή
D: απόσταση
Z: ζήτηση

L	1	4	2	5	1
D	76	26	17	11	22
Z	21	7	6	8	

	1	2	3	4	5	6	7
1	--	26	17	26	22	10	22
2	26	--	12	17	11	21	19
3	17	12	--	23	27	25	18
4	26	17	23	--	23	19	27
5	22	11	27	23	--	29	21
6	10	21	25	19	29	--	20
7	22	19	18	27	21	20	--

Βέλτιστο Δρομολόγιο



A,B

	2	3	4	5	6	7
45	6	5	7	8	10	9

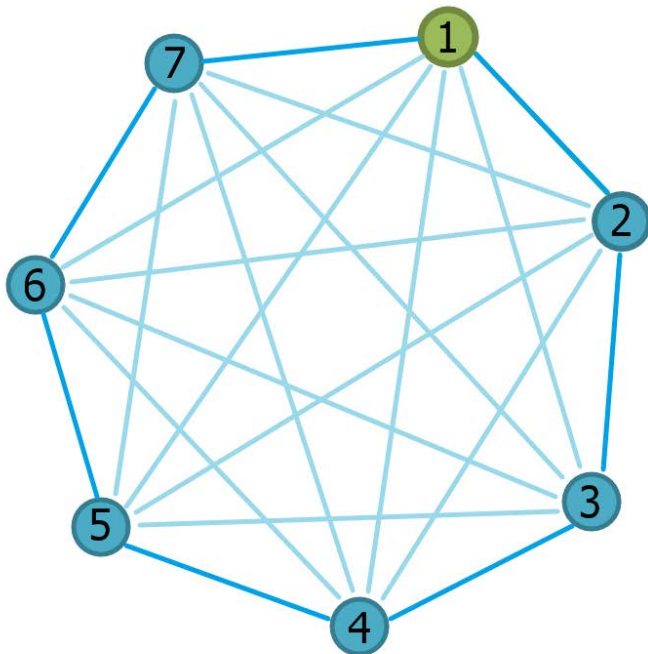
L	1	3	7	6	1
D	65	17	18	20	10
Z	24	5	9	10	

L	1	4	2	5	1
D	76	26	17	11	22
Z	21	7	6	8	

	1	2	3	4	5	6	7
1	--	26	17	26	22	10	22
2	26	--	12	17	11	21	19
3	17	12	--	23	27	25	18
4	26	17	23	--	23	19	27
5	22	11	27	23	--	29	21
6	10	21	25	19	29	--	20
7	22	19	18	27	21	20	--

Παράδειγμα VRP (εξετάζονται και μη εφικτές λύσεις)

Δίκτυο
πόλεων



Χωρητικότητα
οχημάτων

25



25



Ζήτηση πόλεων

	2	3	4	5	6	7	
1	45	6	5	7	8	10	9

Αποστάσεις πόλεων

	1	2	3	4	5	6	7
1	--	26	17	26	22	10	22
2	26	--	12	17	11	21	19
3	17	12	--	23	27	25	18
4	26	17	23	--	23	19	27
5	22	11	27	23	--	29	21
6	10	21	25	19	29	--	20
7	22	19	18	27	21	20	--

ΕΠΑΝΑΛ.	ΔΡΟΜΟΛΟΓΙΟ Α			ΔΡΟΜΟΛΟΓΙΟ Β			ΜΗΚΟΣ			ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ		ΘΕΡΜΟΚ.	ΔΕ	ΠΙΘΑΝΟΤ	$\frac{-\Delta E}{kT}$
t							A	B	A + B	A	B	T			e
0	2	3	7	5	6	4	78	96	174	20	25	100.00			
1	2	3	4	5	6	7	87	93	280	18	27	90.00	106	0.261	0.30800
2	2	5	4	3	6	7	86	84	170	21	24	81.00	-4		
3	2	5	4	6	3	7	86	75	161	21	24	72.90	-9		
4	6	5	4	2	3	7	88	78	166	25	20	65.61	5	0.135	0.92663
5	6	5	7	2	3	4	82	87	269	27	18	59.05	103	0.152	0.17480
6	2	5	7	6	3	4	80	84	164	23	22	53.14	-2		
7	2	5	7	3	6	4	80	87	167	23	22	47.83	3	0.438	0.93921
7	6	5	7	3	2	4	82	72	254	27	18	43.05	87	0.831	0.13254
7	6	7	5	3	2	4	73	72	245	27	18	43.05	78	0.591	0.16338
7	6	2	5	3	7	4	64	88	152	24	21	43.05	-15		
8	3	2	5	6	7	4	62	83	245	19	26	38.75	93	0.634	0.09071
8	3	7	5	6	2	4	78	74	152	22	23	38.75	0		
9	3	7	6	5	2	4	65	76	141	24	21	34.88	-11		

Με μπλε χρώμα είναι η αλλαγή που έχει γίνει σε σχέση με την προηγούμενη λύση.

Με κόκκινο χρώμα είναι η υπέρβαση της χωρητικότητας του οχήματος (>25)

Με κίτρινο χρώμα οι εσωτερικές επαναλήψεις επειδή δεν ικανοποιείται το κριτήριο της καθόδου.

Βασική αντικειμενική συνάρτηση (συνολική διαδρομή, L_A , L_B) $\min L = L_A + L_B$

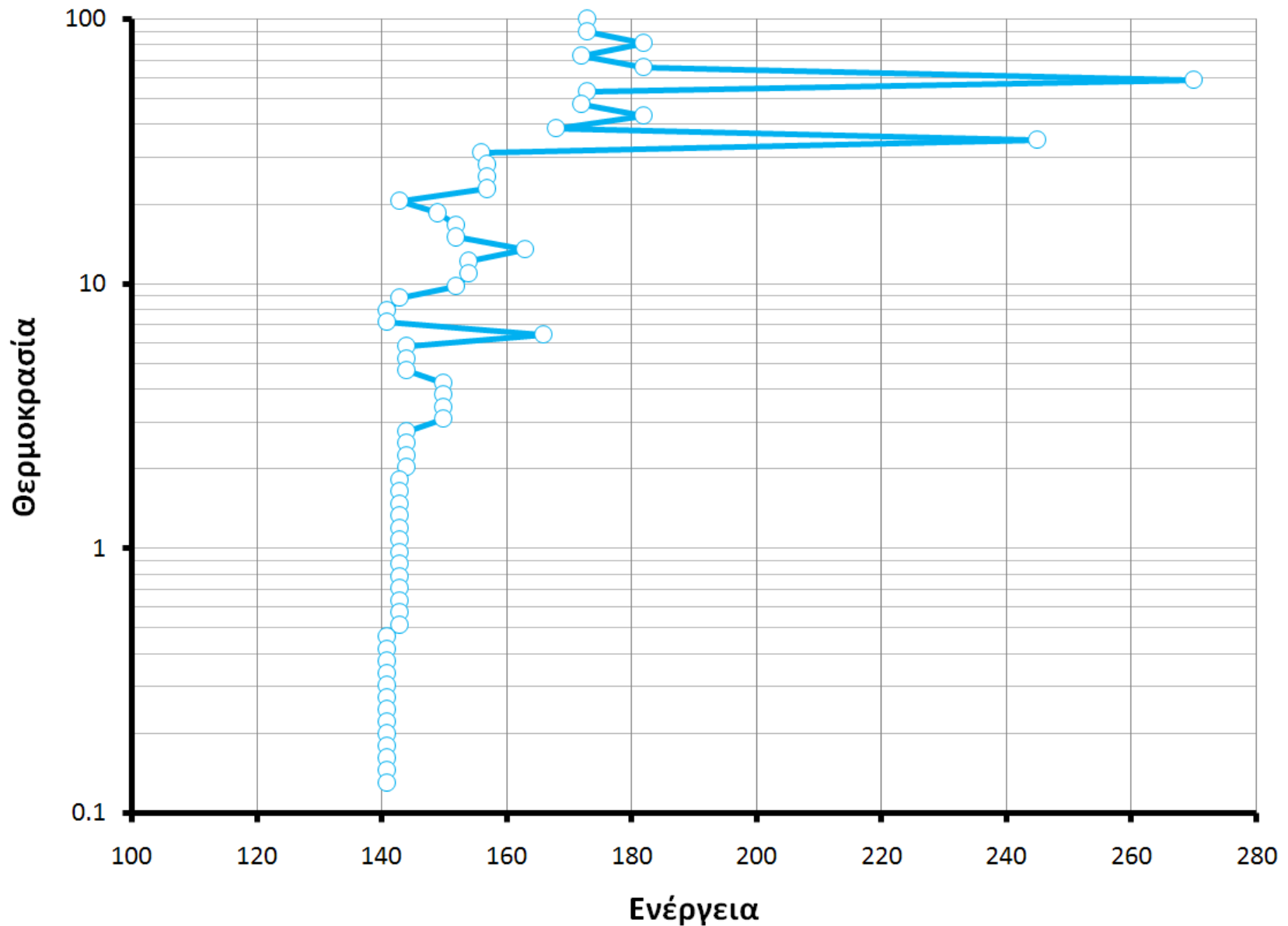
Συνάρτηση καταλληλότητας για βελτιστοποίηση : $L' = L_A + L_B + 100 \cdot x$

όπου x παράμετρος ελέγχου της ζήτησης (B_A , B_B) $\left\{ \begin{array}{ll} x = 1 & \alpha\nu \quad B_A \acute{\eta} B_B > 25 \\ x = 0 & \alpha\nu \quad B_A \kappa\alpha\iota B_B \leq 25 \end{array} \right\}$

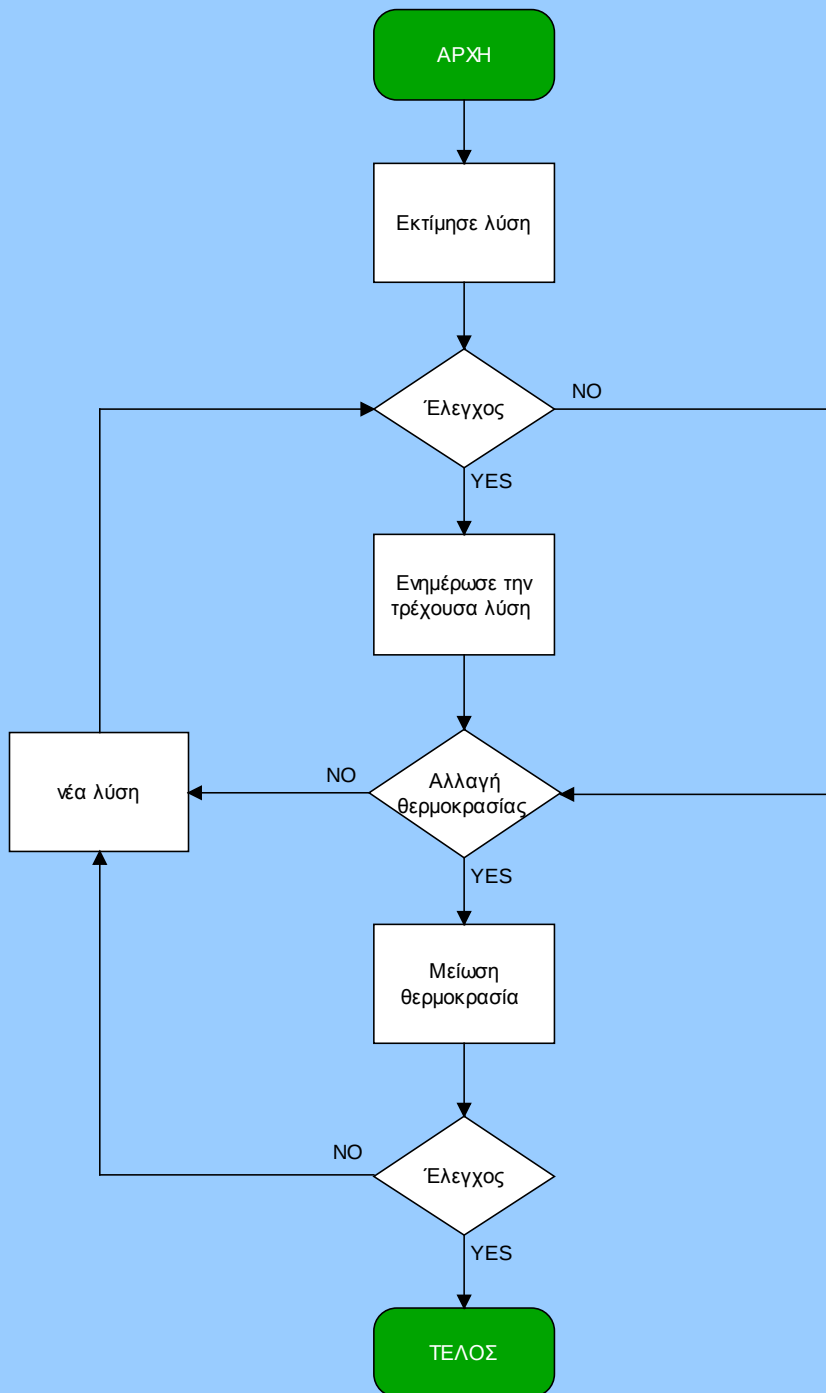
Παράδειγμα VRP (εξετάζονται και μη εφικτές λύσεις)

ΕΠΑΝΑΛ.	ΔΡΟΜΟΛΟΓΙΟ Α			ΔΡΟΜΟΛΟΓΙΟ Β			ΜΗΚΟΣ			ΕΜΠΟΡΕΥΜΑΤΑ		ΘΕΡΜΟΚ.
t							A	B	A+B	A	B	T
0	4	3	5	6	7	2	98	75	173	20	25	100.00
1	4	3	5	6	7	2	98	75	173	20	25	90.00
2	6	3	5	4	7	2	84	98	182	23	22	81.00
3	6	3	4	5	7	2	84	88	172	22	23	72.90
4	6	3	5	4	7	2	84	98	182	23	22	65.61
5	2	3	5	4	7	6	87	83	270	19	26	59.05
6	4	3	5	2	7	6	98	75	173	20	25	53.14
7	4	3	6	2	7	5	84	88	172	22	23	47.83
8	5	3	6	2	7	4	84	98	182	23	22	43.05
9	5	3	6	7	2	4	84	84	168	23	22	38.74
10	4	7	6	3	2	5	83	62	245	26	19	34.87
11	4	7	5	3	2	6	96	60	156	24	21	31.38
12	2	7	5	3	4	6	88	69	157	23	22	28.24
13	5	7	2	3	4	6	88	69	157	23	22	25.42
14	2	7	5	3	4	6	88	69	157	23	22	22.88
15	7	2	5	3	4	6	74	69	143	23	22	20.59
16	7	5	2	3	4	6	80	69	149	23	22	18.53
17	4	5	7	6	2	3	92	60	152	24	21	16.68
18	4	5	7	6	2	3	92	60	152	24	21	15.01
19	6	3	7	2	4	5	75	88	163	24	21	13.51
20	6	2	3	5	4	7	60	94	154	21	24	12.16
21	3	2	6	5	4	7	60	94	154	21	24	10.94
22	3	2	6	4	5	7	60	92	152	21	24	9.85
23	3	4	6	5	2	7	69	74	143	22	23	8.86

Παράδειγμα VRP (εξετάζονται και μη εφικτές λύσεις)



Αλγόριθμος Βελτιστοποίησης με Προσομοιωμένη Ανόπτηση



Παραλλαγές Προσομοιωμένης Ανόπτωσης

Βασική ιδέα : τυχαιοποιημένη αναζήτηση στο χώρο των λύσεων με προσπάθεια αποφυγής εγκλωβισμού σε τοπικό βέλτιστο.

Βασικοί παράμετροι αλγορίθμου,

- Η αρχική θερμοκρασία.
- Το σύστημα ψύξης.
- Ο αριθμός των επαναλήψεων που θα γίνουν σε κάθε κύκλο όταν δεν ικανοποιείται το κριτήριο Metropolis.

Παραλλαγές αλγορίθμου,

- Ανόπτωση **Bolzmnn** κατά την οποία η θερμοκρασία μειώνεται πολύ αργά.
- Αλγόριθμος ταχείας ανόπτωσης (**fast annealing**).
- Υπέρ-ταχεία ανόπτωση (**very fast simulated annealing**) με στόχο την ταχύτερη σύγκλιση του αλγορίθμου.

Παραλλαγές Προσομοιωμένης Ανόπτησης

Μια παραλλαγή της μεθόδου προσομοιωμένης ανόπτησης είναι ο **αλγόριθμος αποδοχής κατώφλιου** (Threshold Accepting Method).

Σε αυτήν, η **θερμοκρασία αντικαθίσταται** από μια παράμετρο που καλείται **κατώφλι αποδοχής** η οποία μειώνεται καθώς κατά την επαναληπτική διαδικασία βελτιστοποίησης (όπως η θερμοκρασία στη μέθοδο προσομοιωμένης ανόπτησης).

Επίσης, το **κριτήριο Metropolis αντικαθίσταται** από ένα απλό έλεγχο κατά πόσο μια (χειρότερη από την προηγούμενη) λύση απέχει από την προηγούμενη της **λιγότερο από το κατώφλι αποδοχής** (οπότε θεωρείται **αποδεκτή**) ή **περισσότερο από το κατώφλι αποδοχής** οπότε θεωρείται **μη αποδεκτή**).

Αλγόριθμος αποδοχής κατωφλίου/Threshold Accepting Method

$$\min f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad -10 \leq x, y, z \leq 10$$

Αρχική κατάσταση | τυχαίοι αριθμοί από -10 έως +10

$$f(1.12, -8.80, 4.04) = 95.72$$

Αρχική Τιμή

$$E_0 = 95.72$$

Κατώφλι Αποδοχής

$$T_0 = 50$$

Ενημέρωση (συνάρτηση μείωσης κατωφλίου)

$$T_i = aT_{i-1} \quad a \approx 1 \quad a < 1$$

Αποδοχή νέας λύσης

1. Αν $\Delta E \leq 0 = (E_{i-1} - E_i) < 0 \rightarrow \text{ok}$
2. Αν $\Delta E > 0$ τότε
 - a) Αν $\Delta E \leq T_i \rightarrow \text{ok}$
 - b) Αν $\Delta E > T_i \rightarrow \text{επανάληψη βήματος (για συγκεκριμένο αριθμό φορών, π.χ., 10)}$

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης (t=0)

$$\min f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad -10 \leq x, y, z \leq 10$$

Αρχική κατάσταση | τυχαίοι αριθμοί από -10 έως +10

$$f(1.12, -8.80, 4.04) = 95.72$$

Αρχική τιμή

$$E_0 = 95.72$$

Κατώφλι αποδοχής

$$T_0 = 50$$

Ενημέρωση (συνάρτηση μείωσης κατωφλίου)

$$T_i = 0.9 \cdot T_{i-1}$$

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης (t=1)

$$\min f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad -10 \leq x, y, z \leq 10$$

Αρχική κατάσταση | τυχαίοι αριθμοί από -10 έως +10

$$f(+1.12, -8.80, -4.04) = 95.72$$

Κατώφλι αποδοχής

$$T_0 = 50$$

Αρχική τιμή

$$E_0 = 95.72$$

Νέα κατάσταση | μετάλλαξη μιας μεταβλητής τυχαία | -10 έως +10 | -4.04 → -3.90

$$f(+1.12, -8.80, -3.90) = 94.60$$

$$\text{Νέα τιμή} \quad E_1 = 94.60$$

$$\Delta E = 94.61 - 95.70 = -1.09 < 0 \rightarrow \text{αποδεκτή λύση} \text{ γιατί είναι καλύτερη της προηγούμενης}$$

Ελαχιστοποίηση συνάρτησης (t=2)

$$\min f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad -10 \leq x, y, z \leq 10$$

Κατάσταση

$$f(+1.12, -8.80, -3.90) = 94.61$$

Κατώφλι αποδοχής

$$T_1 = 0.9 \times 50 = 45$$

Τιμή

$$E_1 = 94.60$$

Νέα κατάσταση | μετάλλαξη μιας μεταβλητής τυχαία | -10 έως +10 | +1.12 → +7.02

$$f(+7.02, -8.80, -3.90) = 142.64$$

νέα ενέργεια $E_2 = 142.64$

$$\Delta E = 142.64 - 94.61 = 48.03 > T_1 \rightarrow \text{επανάληψη βήματος (έως 10 επαναλήψεις)}$$

Τέλος παρουσίασης

