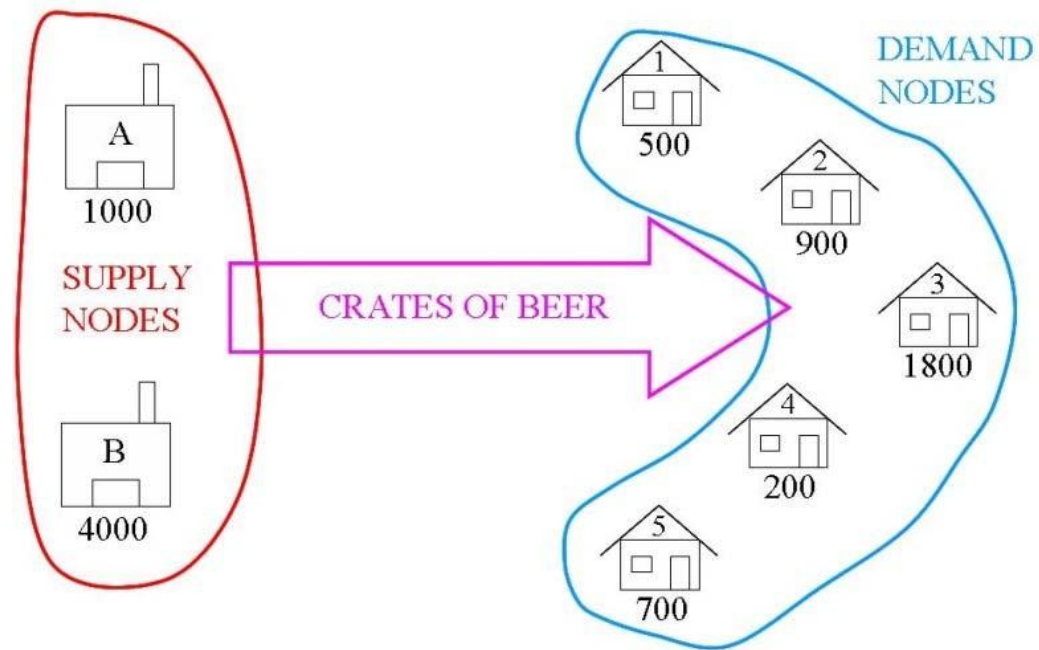


Προβλήματα Μεταφορών



Προβλήματα Μεταφορών

- Αφορούν σε μεταφορά

- Ατόμων
- Αγαθών
- Πληροφοριών
- Υπηρεσιών



- Βασικά Προβλήματα:

- Πρόβλημα Μεταφοράς (Transportation Problem)
- Πρόβλημα Αντιστοίχισης (Assignment Problem)
- Πρόβλημα Διαμετακόμισης (Transshipment Problem)



- Μπορούν να διατυπωθούν και επιλυθούν ως ΠΓΠ

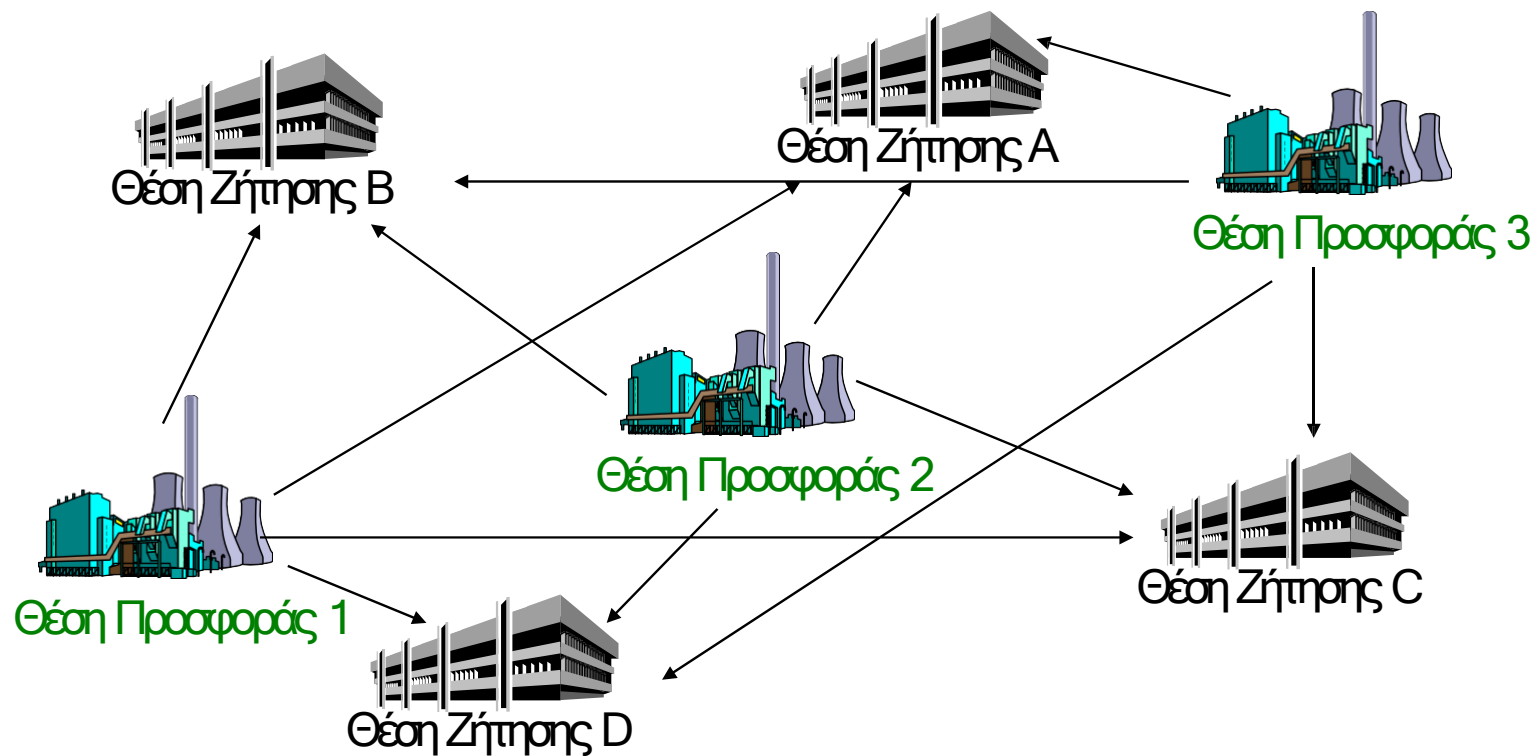
- Ειδικές Τεχνικές επίλυσης
- Γενικοί Επιλυτές (Simplex, Branch-and-Bound)

Πρόβλημα Μεταφοράς

- Πρόβλημα «διανομής» αγαθών (ή υπηρεσιών)
 - Ποσότητες αγαθών σε θέσεις προσφοράς (supply locations)
 - Απαιτήσεις αγαθών σε θέσεις ζήτησης (demand locations)
 - **Βέλτιστη διανομή αγαθών**
- Επιδιωκόμενα Αποτελέσματα
 - Ποσότητες από θέσεις προσφοράς σε θέσεις ζήτησης
 - Συνολικό κόστος διανομής
 - Επιμέρους κόστος διανομής ανά θέση προσφοράς και ζήτησης
- Εφαρμογή
 - Ανάλυση εναλλακτικών θέσεων προσφοράς και ζήτησης.

Πρόβλημα Μεταφοράς

Ελαχιστοποίηση Κόστους Μεταφοράς ανάμεσα σε θέσεις προσφοράς και ζήτησης



Πρόβλημα Μεταφοράς

- Δεδομένα

Μοναδιαίο κόστος μεταφοράς ανάμεσα σε θέσεις προσφοράς και ζήτησης

	Αποθήκη			
Εργοστάσιο	A	B	C	D
1	4	7	7	1
2	12	3	8	8
3	8	10	16	5

Το κόστος μεταφοράς μιας (1) μονάδας από το εργοστάσιο 1 στην αποθήκη B είναι ίσο με 7.

Πρόβλημα Μεταφοράς

- Δεδομένα

Προσφερόμενες ποσότητες αγαθών



Εργοστ.	Προσφορά
1	100
2	200
3	150
Total	450

Απαιτούμενες ποσότητες αγαθών



	Αποθήκη				
	A	B	C	D	Total
Ζήτηση	80	90	120	160	80

Πρόβλημα Μεταφοράς

- Δεδομένα

	Αποθήκη					
Εργοστ.	A	B	C	D	Προσφορ.α	
1	4	7	7	1	100	
2	12	3	8	8	200	Σύνολ.
3	8	10	16	5	150	Προσφ.
Ζήτηση	80	90	120	160		450
			Συνολική Ζήτηση		450	

Πρόβλημα Μεταφοράς

- Ποιες είναι οι μεταβλητές του προβλήματος;
- Ποια η αντικειμενική συνάρτηση;
- Τι περιορισμοί υπάρχουν;

Πρόβλημα μεταφοράς

Θα εξετάσουμε το πρόβλημα μεταφοράς της Foster Generators

Το πρόβλημα αναφέρεται στη μεταφορά προϊόντων από τρία εργοστάσια προς τέσσερα κέντρα διανομής

Η εταιρία κατέχει τρία εργοστάσια, στο Cleveland, στο Bedford και στο York

Η δυναμικότητα παραγωγής ως προς ένα συγκεκριμένο τύπο προϊόντος για το προσεχές τρίμηνο είναι η εξής:

Πηγή	Εργοστάσιο	Δυναμικότητα παραγωγής (μονάδες)
1	Cleveland	5.000
2	Bedford	6.000
3	York	2.500
Σύνολο		13.500

Πρόβλημα μεταφοράς

Η διανομή των προϊόντων πραγματοποιείται από τέσσερα περιφερειακά κέντρα διανομής (Boston, Chicago, St. Louis και Lexington)

Εκτιμάται ότι η ζήτηση ανά κέντρο διανομής για το προσεχές τρίμηνο είναι:

Προορισμός	Κέντρο διανομής	Εκτίμηση ζήτησης (μονάδες)
1	Boston	6.000
2	Chicago	4.000
3	St. Louis	2.000
4	Lexington	1.500
Σύνολο		13.500

Πρόβλημα μεταφοράς

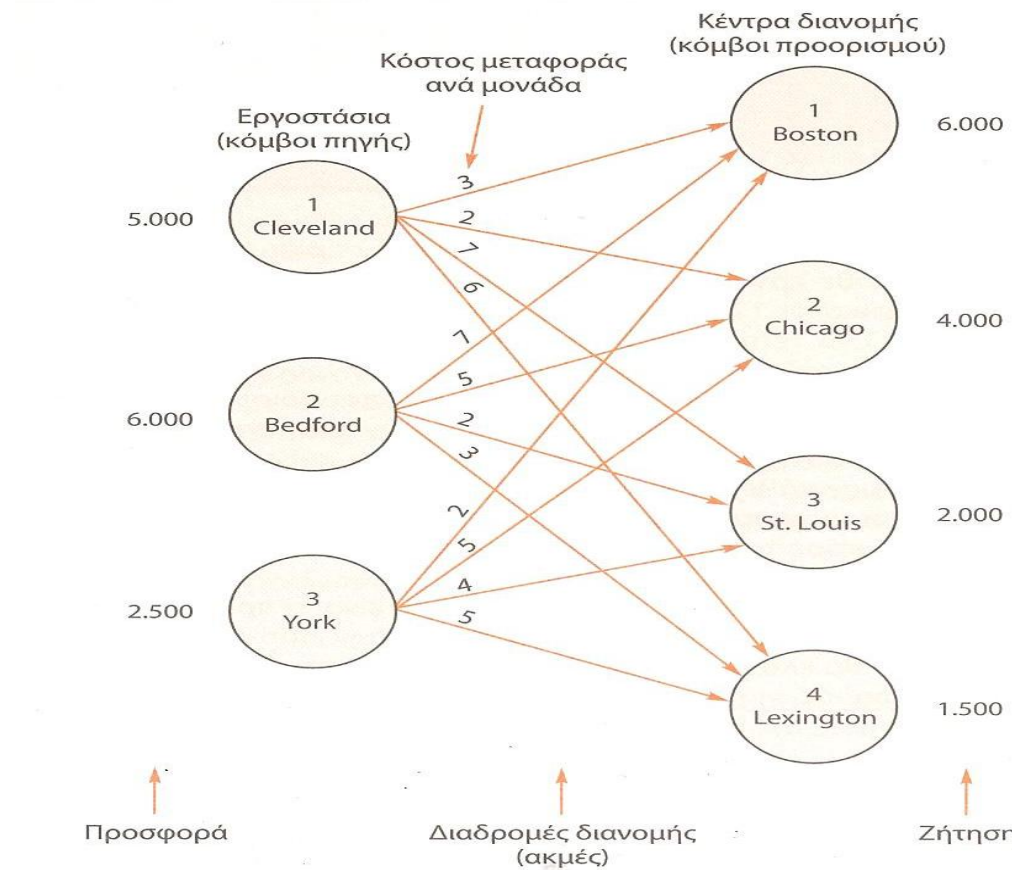
Το κόστος μεταφοράς ανά μονάδα μεταξύ των πηγών και των προορισμών παρουσιάζεται στον παρακάτω Πίνακα

Πηγή	Προορισμός			
	Boston	Chicago	St. Louis	Lexington
Cleveland	3	2	7	6
Bedford	7	5	2	3
York	2	5	4	5

Η διοίκηση της εταιρίας επιθυμεί να προσδιορίσει τον αριθμό των μονάδων που θα μεταφερθούν από κάθε εργοστάσιο προς κάθε κέντρο διανομής

Πρόβλημα μεταφοράς

Το **δίκτυο** του προβλήματος είναι το εξής:



Πρόβλημα μεταφοράς

Σκοπός είναι ο προσδιορισμός των διαδρομών που θα χρησιμοποιηθούν και των ποσοτήτων που θα διακινηθούν μέσω κάθε διαδρομής ώστε να ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος μεταφοράς

Οι μεταβλητές απόφασης θα είναι οι εξής:

- x_{ij} : ο αριθμός των μονάδων που μεταφέρονται από την πηγή i στον προορισμό j ,
 $i=1,2,3$ και $j=1,2,3,4$

Πρόβλημα μεταφοράς

Η αντικειμενική συνάρτηση (που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί) αποτελείται από το άθροισμα των κοστών μεταφοράς από κάθε πηγή σε καθένα από τους τέσσερις προορισμούς

κόστος μεταφοράς των μονάδων από το Cleveland

$$\blacksquare 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14}$$

κόστος μεταφοράς των μονάδων από το Bedford

$$\blacksquare 7x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24}$$

κόστος μεταφοράς των μονάδων από το York

$$\blacksquare 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34}$$

Πρόβλημα μεταφοράς

Περιορισμοί προσφοράς πηγών

1. $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 5.000$

2. $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 6.000$

3. $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 2.500$

Περιορισμοί ζήτησης κέντρων διανομής

1. $x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6.000$

2. $x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4.000$

3. $x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2.000$

4. $x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1.500$

Πρόβλημα μεταφοράς

Το συνολικό μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα της μεταφοράς της Foster Generators

$$\blacksquare \text{Min } 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + 7x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34}$$

$\blacksquare$ subject to

$$\blacksquare x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 5.000$$

$$\blacksquare x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 6.000$$

$$\blacksquare x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 2.500$$

$$\blacksquare x_{11} + x_{21} + x_{31} = 6.000$$

$$\blacksquare x_{12} + x_{22} + x_{32} = 4.000$$

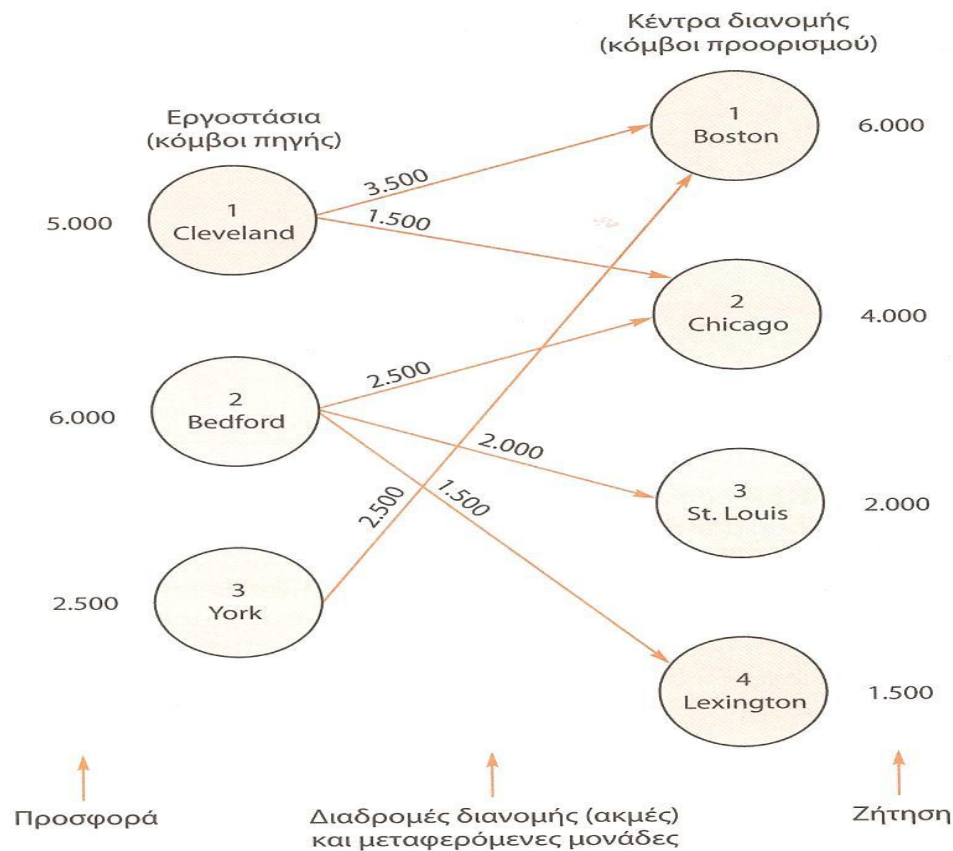
$$\blacksquare x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2.000$$

$$\blacksquare x_{14} + x_{24} + x_{34} = 1.500$$

$$x_{ij} \geq 0, i=1,2,3 \text{ και } j=1,2,3,4$$

Πρόβλημα μεταφοράς

Βέλτιστη λύση για το πρόβλημα μεταφοράς της Foster Generators



Πρόβλημα μεταφοράς – Παραλλαγές

Αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποίησης

- Σε ορισμένες περιπτώσεις προβλημάτων μεταφοράς, ο στόχος είναι ο προσδιορισμός της βέλτιστης λύσης που μεγιστοποιεί τα κέρδη ή τα έσοδα
- Χρησιμοποιώντας τα ανά μονάδα κέρδη ή έσοδα ως συντελεστές της αντικειμενικής συνάρτησης, ουσιαστικά επιλύουμε ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης αντί για ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης
- Οι εν λόγω τροποποιήσεις δεν επηρεάζουν τους ήδη υφιστάμενους περιορισμούς του αρχικού μοντέλου

Πρόβλημα μεταφοράς – Παραλλαγές

Δυναμικότητα διαδρομών ή ελάχιστες ποσότητες διαδρομών

- Υπάρχει η δυνατότητα ενσωμάτωσης στο μοντέλο στοιχείων δυναμικότητας των διαδρομών ή ελάχιστης ποσότητας διαδρομών
- Για παράδειγμα, θεωρείστε ότι στο παράδειγμα της Foster Generators η διαδρομή York-Boston (πηγή 3 – προορισμός 1) έχει δυναμικότητα 1.000 μονάδων, εξαιτίας περιορισμένης χωρητικότητας του μέσου μεταφοράς που χρησιμοποιείται
- Συμβολίζοντας με x_{31} τον αριθμό των μονάδων που μεταφέρονται από το York στο Boston, ο περιορισμός της διαδρομής York-Boston θα είναι:
 - $x_{31} \leq 1.000$

Πρόβλημα μεταφοράς – Παραλλαγές

Δυναμικότητα διαδρομών ή ελάχιστες ποσότητες διαδρομών

- Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε ελάχιστες ποσότητες διαδρομών
- Για παράδειγμα, η σχέση
 - $x_{22} \geq 2.000$
- εξασφαλίζει ότι θα καλυφθεί η δέσμευση της εταιρίας ως προς μια μεταφορά τουλάχιστον 2.000 μονάδων από το Bedford (πηγή 2) προς το Chicago (προορισμός 2)

Πρόβλημα μεταφοράς – Παραλλαγές

Μη αποδεκτές διαδρομές

- Ενδέχεται να μην είναι δυνατή η δημιουργία διαδρομών από κάθε πηγή προς κάθε προορισμό
- Για να διαχειριστούμε αυτή την κατάσταση, διαγράφουμε τη συγκεκριμένη ακμή από το δίκτυο και την αντίστοιχη μεταβλητή από το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού
- Για παράδειγμα, αν η διαδρομή Cleveland-St. Louis (πηγή 1 – προορισμός 3) ήταν μη αποδεκτή ή ήταν αδύνατο να χρησιμοποιηθεί, θα αφαιρούσαμε τη μεταβλητή x_{13} από το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού

Πρόβλημα διανομής

Εταιρεία παραγωγής και διανομής γάλακτος διαθέτει 3 εργοστάσια και 4 πόλεις τις οποίες εξυπηρετεί. Η εταιρεία ενδιαφέρεται να μεταφέρει το προϊόν της στις 4 πόλεις με το ελάχιστο δυνατό κόστος καθημερινά. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι δυνατότητες παραγωγής γάλακτος κάθε εργοστασίου, η ζήτηση κάθε πόλης αλλά και το κόστος μεταφοράς γάλακτος από το κάθε εργοστάσιο στην κάθε πόλη. Λόγω της ευπάθειας του προϊόντος, το εργοστάσιο φροντίζει ώστε η προσφορά είναι ίση με τη ζήτηση. Το προϊόν πρέπει να καταναλώνεται εξ'ολοκλήρου. (κόστος σε ΕΥΡΩ/lt, ποσότητες σε lt/ημέρα)

Να βρεθεί ΠΓΠ που να κατανέμει τις ποσότητες γάλακτος από τα εργοστάσια στις πόλεις με το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Εργοστάσιο/ Πόλη	1	2	3	4	Προσφο ρά
1	0.6	0.7	0.6	0.4	2000
2	0.8	0.4	0.3	0.6	3000
3	0.5	0.5	0.4	0.6	5000
Ζήτηση	1500	2500	3500	2500	10000

Λύση:

στω x_{ij} η ποσότητα γάλακτος που αποστέλλεται από το εργοστάσιο i ($i=1,2,3$) στην πόλη j ($j=1,2,3,4$).

Η αντικειμενική συνάρτηση του ΠΓΠ είναι:

Min

$$z=0.6x_{11}+0.7x_{12}+0.6x_{13}+0.4x_{14}+0.8x_{21}+0.4x_{22}+0.3x_{23}+0.6x_{24}+0.5x_{31}+0.5x_{32}+0.4x_{33}+0.6x_{34}$$

Περιορισμοί προσφοράς:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=2000 \quad (\text{εργοστάσιο 1})$$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=3000 \quad (\text{εργοστάσιο 2})$$

$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=5000 \quad (\text{εργοστάσιο 3})$$

Περιορισμοί ζήτησης:

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=1500 \quad (\text{πόλη 1})$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=2500 \quad (\text{πόλη 2})$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=3500 \quad (\text{πόλη 3})$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=2500 \quad (\text{πόλη 4})$$

$x_{ij} \geq 0$ $i=1,2,3$, $j=1,2,3,4$.

Πρόβλημα Μεταφοράς

Γενική Μαθηματική Διατύπωση

$$\text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \quad (\text{Συνολικό Κόστος Μεταφοράς})$$

$$\text{s.t. } \sum_j x_{ij} \leq s_i \quad \text{για κάθε θέση προσφοράς } i \text{ (περιορισμοί προσφοράς)}$$

$$\sum_i x_{ij} = d_j \quad \text{για κάθε θέση ζήτησης } j \text{ (περιορισμοί ζήτησης)}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{για κάθε } i \text{ και } j \text{ (θετικές τιμές)}$$

Πρόβλημα Μεταφοράς

- Όταν η συνολική προσφορά...

...υπολείπεται της συνολικής ζήτησης => Έλλειμμα

...ισούται με τη συνολική ζήτηση => Ισορροπημένο πρόβλημα

...υπερβαίνει τη συνολική ζήτηση => περίσσεια προσφοράς

Πρόβλημα Αντιστοίχισης

- Ελαχιστοποίηση συνολικού κόστους m εργαζόμενων, μηχανημάτων κλπ σε n εργασίες.
 - Δεδομένη τιμή κόστους c_{ij} εργαζόμενου i που πραγματοποιεί την εργασία j
 - Κάθε εργαζόμενος θα συμμετάσχει σε εργασία (?)
 - Κάθε εργασία θα πραγματοποιηθεί
- Πρόκειται για ειδική περίπτωση του προβλήματος μεταφοράς όπου κάθε θέση προσφοράς και ζήτησης έχει τιμή ίση με 1

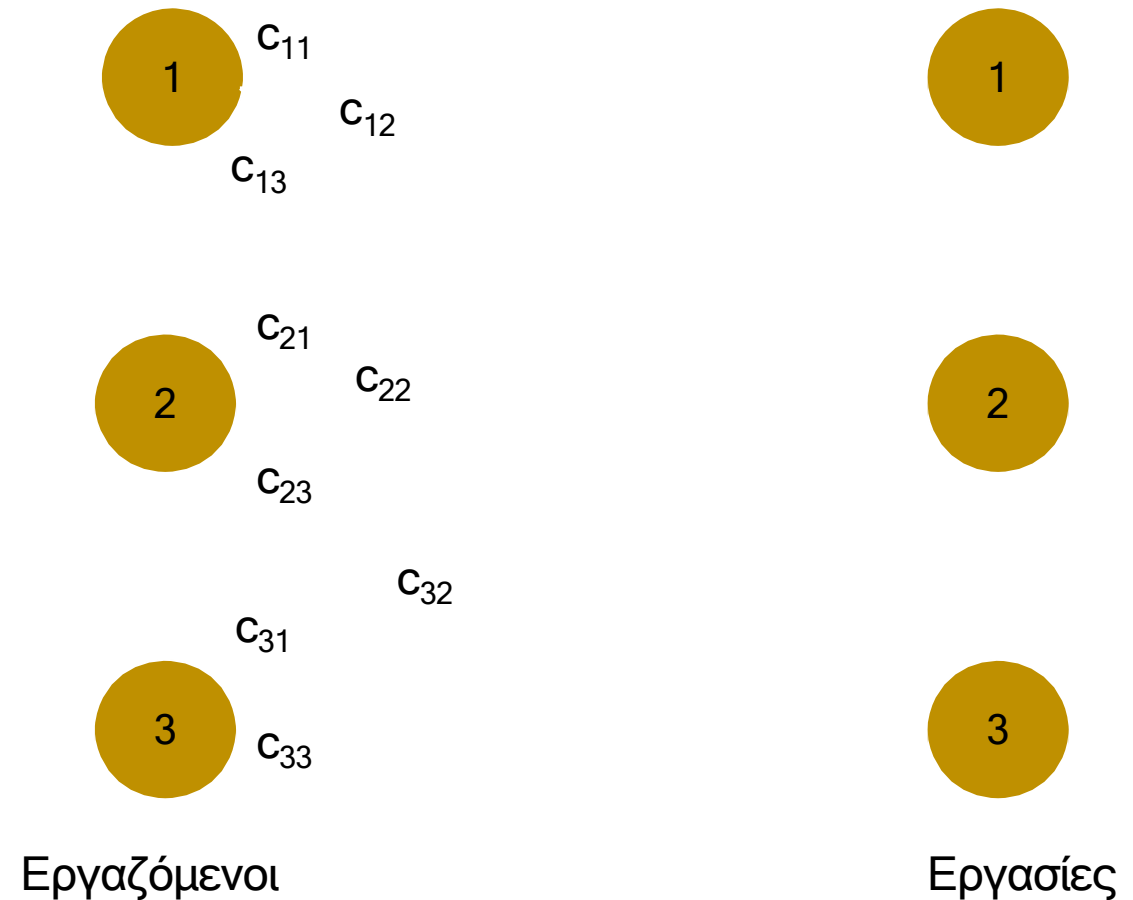
Πρόβλημα Αντιστοίχισης

Παράδειγμα:

Τρεις εργαζόμενοι μιας επιχείρησης πρόκειται αναλάβουν τρεις εργασίες. Στον παρακάτω πίνακα δίνεται ο χρόνος που απαιτείται ώστε ο κάθε εργαζόμενος να ολοκληρώσει μια εργασία.

Να διατυπωθεί π.γ.π. με το οποίο να γίνεται η βέλτιστη αντιστοίχιση.

Εργαζόμενος / Εργασία	1	2	3
1	32	22	11
2	23	44	46
3	48	19	21



Πρόβλημα Αντιστοίχισης

- Γενική Διατύπωση

$$\text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t. } \sum_j x_{ij} = 1 \quad \text{για κάθε εργαζόμενο } i$$

$$\sum_i x_{ij} = 1 \quad \text{για κάθε εργασία } j$$

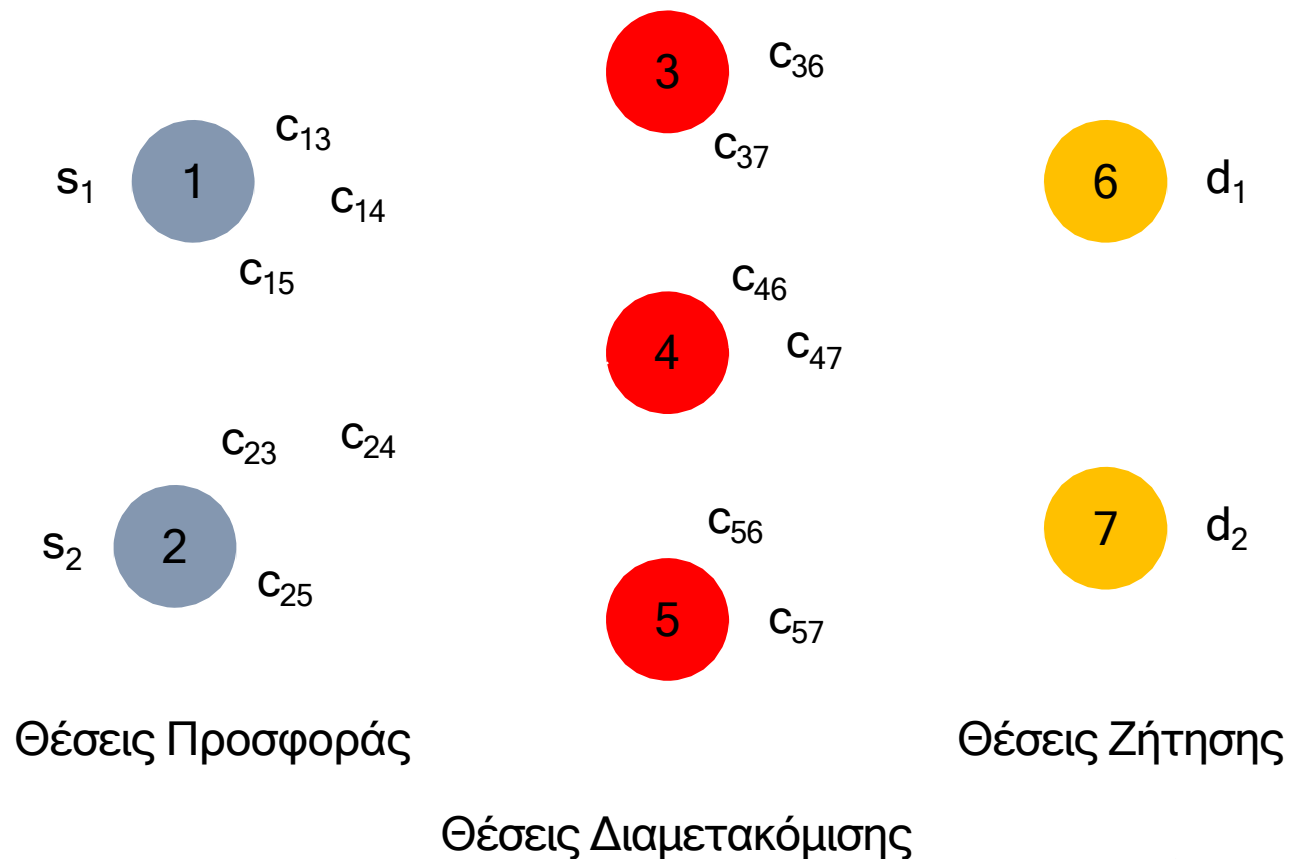
$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad \text{για κάθε } i \text{ \& } j.$$

Πρόβλημα Αντιστοίχισης

- Ειδικές περιπτώσεις
 - Διαφορετικός αριθμός εργαζόμενων/μηχανημάτων και εργασιών
 - Μεγιστοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης
 - Μη αποδεκτή ανάθεση

Πρόβλημα μεταφόρτωσης

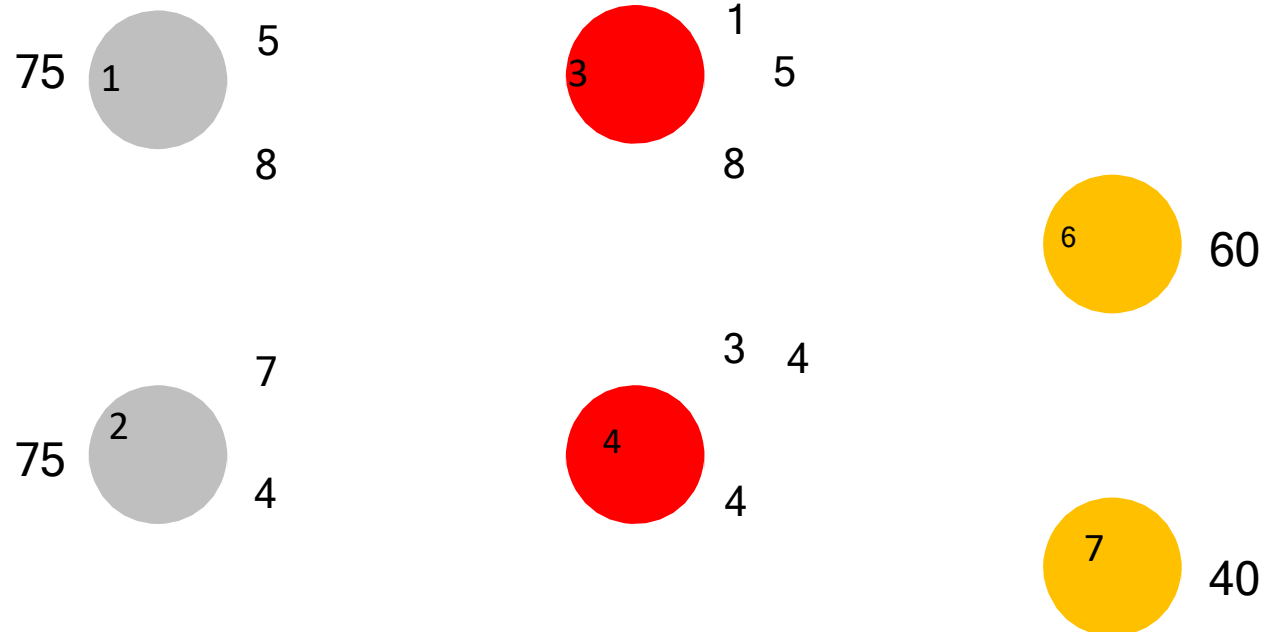
- Πρόβλημα μεταφοράς όπου τα αγαθά διέρχονται από ενδιάμεσες θέσεις πριν καταλήξουν σε θέσεις ζήτησης
 - «Θέσεις διαμετακόμισης»
- Μετατροπή σε μεγαλύτερου μεγέθους προβλήματα μεταφορών
- Απευθείας επίλυση ως πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού



Πρόβλημα μεταφόρτωσης

Παράδειγμα:

Δίνεται το παρακάτω σύστημα διανομής αγαθών. Να διατυπωθεί π.γ.π. για την ελαχιστοποίηση του κόστους διανομής.



Πρόβλημα μεταφόρτωσης

- Γενική Διατύπωση

$$\text{Min } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t. } \sum_j x_{ij} \leq s_i \quad \text{για κάθε θέση προσφοράς } i$$

$$\sum x_{ik} - \sum x_{kj} = 0 \quad \text{για κάθε θέση διαμετακόμισης } k$$

$$\sum_i x_{ij} = d_j \quad \text{για κάθε θέση ζήτησης } j$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{για κάθε } i \text{ και } j$$

Πρόβλημα μεταφόρτωσης (1)

Το **πρόβλημα μεταφόρτωσης** αποτελεί επέκταση του προβλήματος μεταφοράς, με προσθήκη ενδιάμεσων κόμβων (κόμβοι μεταφόρτωσης), οι οποίοι αντιπροσωπεύουν ενδιάμεσους σταθμούς μεταφοράς (π.χ. αποθήκες)

Οι μεταφορές είναι δυνατές μεταξύ κάθε ζεύγους από τα τρία είδη κόμβων:

- από πηγές προς κόμβους μεταφόρτωσης και στη συνέχεια προς προορισμούς
- από μια πηγή προς μια άλλη πηγή
- από ένα σημείο μεταφόρτωσης προς ένα άλλο σημείο μεταφόρτωσης
- από έναν προορισμό προς έναν άλλο προορισμό
- απευθείας από μια πηγή προς έναν προορισμό

Πρόβλημα μεταφόρτωσης (2)

Στόχος είναι ο προσδιορισμός των μονάδων που θα μεταφερθούν σε κάθε ακμή του δικτύου, προκειμένου να καλυφθεί πλήρως η ζήτηση των προορισμών με το ελάχιστο δυνατό κόστος μεταφοράς

Πρόβλημα μεταφόρτωσης (3)

Η εταιρία Ryan Electronics κατασκευάζει προϊόντα πληροφορικής και διαθέτει μονάδες παραγωγής στο Denver και στην Atlanta

Τα έτοιμα προϊόντα των δύο μονάδων αποστέλλονται στις δύο περιφερειακές της εταιρίας στο Kansas City και στο Louisville

Οι αποθήκες προμηθεύουν με προϊόντα τα καταστήματα λιανικής της εταιρίας στο Detroit, στο Miami, στο Dallas και στη New Orleans

Στο δίκτυο του προβλήματος λοιπόν υπάρχουν:

- 2 κόμβοι πηγής
- 2 κόμβοι μεταφόρτωσης
- 4 κόμβοι προορισμού

Πρόβλημα μεταφόρτωσης (4)

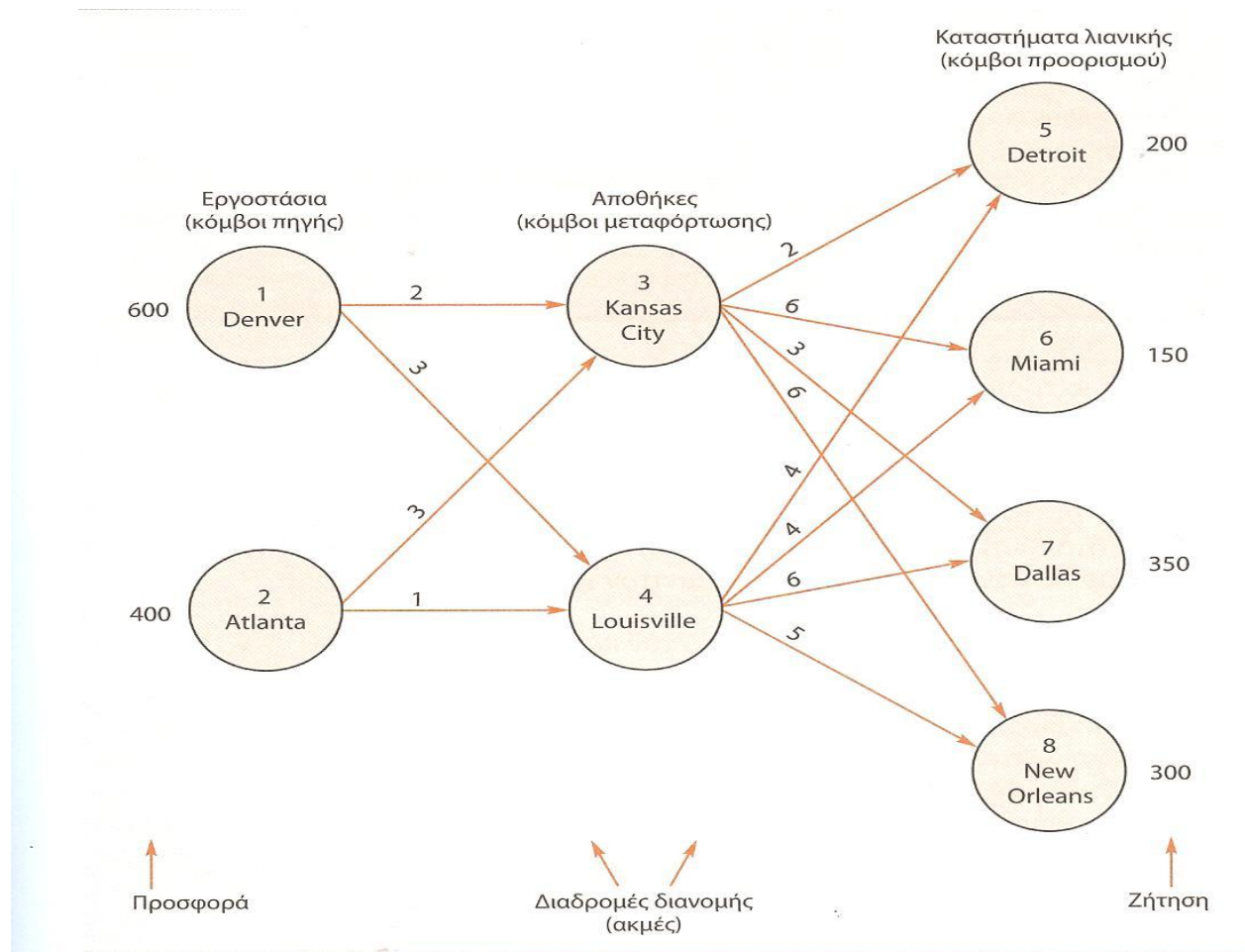
Το ανά μονάδα κόστος μεταφοράς των διαδρομών παρουσιάζεται στους επόμενους Πίνακες

Εργοστάσιο	Αποθήκη	
	Kansas City	Louisville
Denver	2	3
Atlanta	3	1

Αποθήκη	Καταστήματα λιανικής			
	Detroit	Miami	Dallas	New Orleans
Kansas City	2	6	3	6
Louisville	4	4	6	5

Πρόβλημα μεταφόρτωσης (5)

Το **δίκτυο** που προβλήματος είναι το εξής:



Πρόβλημα μεταφόρτωσης (6)

Θα διατυπώσουμε ένα περιορισμό για κάθε κόμβο και μια μεταβλητή για κάθε ακμή x_{ij} : ο αριθμός των μονάδων που θα μεταφερθούν από τον κόμβο i στον κόμβο j

Αντικειμενική συνάρτηση

$$\text{Min } 2x_{13} + 3x_{14} + 3x_{23} + x_{24} + 2x_{35} + 6x_{36} + 3x_{37} + 6x_{38} + 4x_{45} + 4x_{46} + 6x_{47} + 5x_{48}$$

Περιορισμοί κόμβων πηγής

Ο αριθμός των μονάδων που θα μεταφερθεί από το Denver (κόμβος 1) πρέπει να είναι ίσος ή μικρότερος του 600 (προσφορά)

$$x_{13} + x_{14} \leq 600 \quad (\text{Denver})$$

Ο αριθμός των μονάδων που θα μεταφερθεί από την Atlanta (κόμβος 2) πρέπει να είναι ίσος ή μικρότερος του 400 (προσφορά)

$$x_{23} + x_{24} \leq 400 \quad (\text{Atlanta})$$

Πρόβλημα μεταφόρτωσης (7)

Περιορισμοί κόμβων μεταφόρτωσης

Ο αριθμός των μονάδων που εξέρχονται από το Kansas City (κόμβος 3) πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των μονάδων που εισέρχονται σε αυτό

$$x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} = x_{13} + x_{23} \quad (\text{Kansas City})$$

Ο αριθμός των μονάδων που εξέρχονται από το Louisville (κόμβος 4) πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των μονάδων που εισέρχονται σε αυτό

$$x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} = x_{14} + x_{24} \quad (\text{Louisville})$$

Πρόβλημα μεταφόρτωσης (8)

Περιορισμοί κόμβων προορισμού

Ο αριθμός των μονάδων που θα εισέλθουν στο Detroit (κόμβος 5) πρέπει να είναι ίσος με 200 (ζήτηση)

$$x_{35} + x_{45} = 200 \quad (\text{Detroit})$$

Ο αριθμός των μονάδων που θα εισέλθουν στο Miami (κόμβος 6) πρέπει να είναι ίσος με 150 (ζήτηση)

$$x_{36} + x_{46} = 150 \quad (\text{Miami})$$

Ο αριθμός των μονάδων που θα εισέλθουν στο Dallas (κόμβος 7) πρέπει να είναι ίσος με 350 (ζήτηση)

$$x_{37} + x_{47} = 350 \quad (\text{Dallas})$$

Ο αριθμός των μονάδων που θα εισέλθουν στο New Orleans (κόμβος 8) πρέπει να είναι ίσος με 300 (ζήτηση)

$$x_{38} + x_{48} = 300 \quad (\text{New Orleans})$$

Πρόβλημα μεταφόρτωσης (9)

Το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για το πρόβλημα της Ryan Electronics είναι το εξής:

$$\blacksquare \text{Min } 2x_{13} + 3x_{14} + 3x_{23} + x_{24} + 2x_{35} + 6x_{36} + 3x_{37} + 6x_{38} + 4x_{45} + 4x_{46} + 6x_{47} + 5x_{48}$$

subject to

$$\blacksquare x_{13} + x_{14} \leq 600 \quad (\text{Denver})$$

$$\blacksquare x_{23} + x_{24} \leq 400 \quad (\text{Atlanta})$$

$$\blacksquare x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} - x_{13} - x_{23} = 0 \quad (\text{Kansas City})$$

$$\blacksquare x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} - x_{14} - x_{24} = 0 \quad (\text{Louisville})$$

$$\blacksquare x_{35} + x_{45} = 200 \quad (\text{Detroit})$$

$$\blacksquare x_{36} + x_{46} = 150 \quad (\text{Miami})$$

$$\blacksquare x_{37} + x_{47} = 350 \quad (\text{Dallas})$$

$$\blacksquare x_{38} + x_{48} = 300 \quad (\text{New Orleans})$$

$$\blacksquare x_{ij} \geq 0 \text{ για κάθε } i \text{ και } j$$

Πρόβλημα μεταφόρτωσης (10)

Στα προβλήματα μεταφόρτωσης οι ακμές μπορούν να συνδέσουν οποιοδήποτε ζεύγος κόμβων

Στην περίπτωση αυτή, χρησιμοποιούμε πάλι έναν περιορισμό ανά κόμβο, αλλά ο περιορισμός θα περιλαμβάνει μια μεταβλητή για κάθε ακμή που εξέρχεται ή εισέρχεται στο συγκεκριμένο κόμβο για οποιοδήποτε είδος κόμβων

Πρόβλημα μεταφόρτωσης (11)

Για τους κόμβους πηγής

Το άθροισμα των μεταφερόμενων αγαθών που εισέρχονται στον κόμβο μείον το άθροισμα των μεταφερόμενων αγαθών που εξέρχονται από αυτόν θα πρέπει να είναι μικρότερο ή ίσο με την προσφορά του κόμβου

Για τους κόμβους μεταφόρτωσης

Το άθροισμα των μεταφερόμενων αγαθών που εξέρχονται από τον κόμβο θα πρέπει να είναι ίσο με το άθροισμα των μεταφερόμενων αγαθών που εισέρχονται σε αυτόν

Για τους κόμβους προορισμού

Το άθροισμα των μεταφερόμενων αγαθών που εισέρχονται στον κόμβο μείον το άθροισμα των μεταφερόμενων αγαθών που εξέρχονται από αυτόν θα πρέπει να είναι ίσο με τη ζήτηση του κόμβου

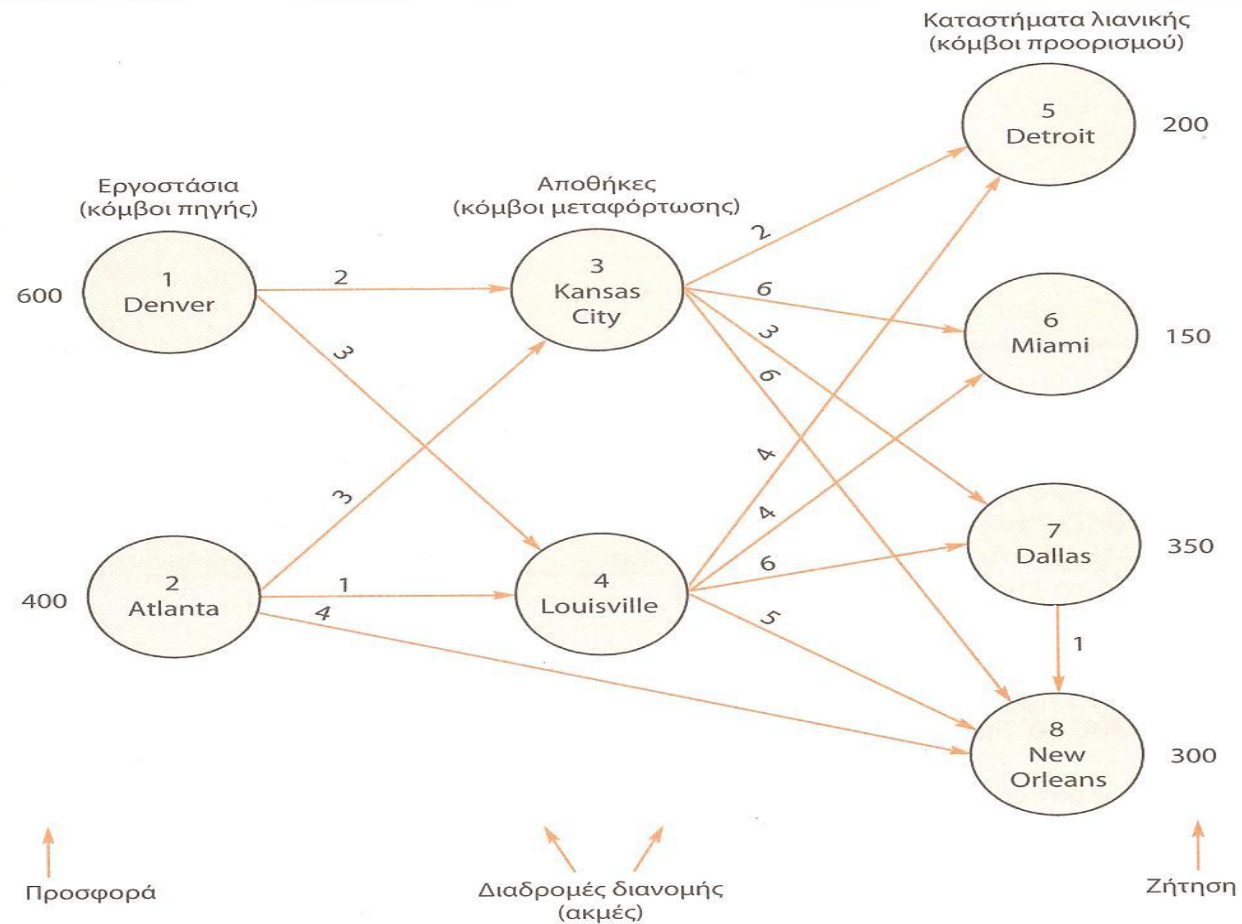
Πρόβλημα μεταφόρτωσης (12)

Έστω ότι **τροποποιούμε** το πρόβλημα της Ryan Electronics

Υποθέτουμε ότι είναι δυνατές οι εξής απευθείας αποστολές προϊόντων
από την Atlanta (κόμβος 2) προς τη New Orleans (κόμβος 8) με κόστος \$4 ανά μονάδα
από το Dallas (κόμβος 7) προς τη New Orleans (κόμβος 8) με κόστος \$1 ανά μονάδα

Πρόβλημα μεταφόρτωσης (13)

Το δίκτυο του **τροποποιημένου προβλήματος** είναι το εξής:



Πρόβλημα μεταφόρτωσης (14)

Το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού για το τροποποιημένο πρόβλημα της Ryan Electronics είναι το εξής:

$$\blacksquare \text{Min } 2x_{13} + 3x_{14} + 3x_{23} + x_{24} + 2x_{35} + 6x_{36} + 3x_{37} + 6x_{38} + 4x_{45} + 4x_{46} + 6x_{47} + 5x_{48} + 4x_{28} + x_{78}$$

subject to

$$\blacksquare x_{13} + x_{14} \leq 600 \quad (\text{Denver})$$

$$\blacksquare x_{23} + x_{24} + x_{28} \leq 400 \quad (\text{Atlanta})$$

$$\blacksquare x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} - x_{13} - x_{23} = 0 \quad (\text{Kansas City})$$

$$\blacksquare x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} - x_{14} - x_{24} = 0 \quad (\text{Louisville})$$

$$\blacksquare x_{35} + x_{45} = 200 \quad (\text{Detroit})$$

$$\blacksquare x_{36} + x_{46} = 150 \quad (\text{Miami})$$

$$\blacksquare x_{37} + x_{47} - x_{78} = 350 \quad (\text{Dallas})$$

$$\blacksquare x_{38} + x_{48} + x_{28} + x_{78} = 300 \quad (\text{New Orleans})$$

$$\blacksquare x_{ij} \geq 0 \text{ για κάθε } i \text{ και } j$$

Πρόβλημα μεταφόρτωσης – Παραλλαγές

Οι παραλλαγές που υπάρχουν είναι οι εξής:

Συνολική ζήτηση διάφορη της συνολικής προσφοράς

Αντικειμενική συνάρτηση μεγιστοποίησης

Δυναμικότητα διαδρομών ή ελάχιστες ποσότητες διαδρομών

Μη αποδεκτές διαδρομές

Οι απαιτούμενες τροποποιήσεις του μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού, για την ενσωμάτωση των ανωτέρω παραλλαγών, είναι όμοιες με αυτές του προβλήματος μεταφοράς