Λήψη Αποφάσεων με Πολλούς Στόχους

Περιεχόμενα

- Προγραμματισμός Στόχων (Goal Programming)
- Πολυκριτηριακός Προγραμματισμός

Προγραμματισμός Στόχων

Στα πλαίσια της λήψης μιας απόφασης, έστω:

- *n* χαρακτηριστικά που καθορίζουν την απόφαση
- $x_i(\alpha)$ η τιμή του χαρακτηριστικού *i* για την εναλλακτική επιλογή *α* στα πλαίσια της απόφασης.

Κάθε επιλογή συνδέεται με μια συνάρτηση αξίας:

- $u=u(x_1(\alpha),\ldots,x_n(\alpha))$
- Προτιμότερη η εναλλακτική α όπου ισχύει max($u(\alpha)$)

Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί συνάρτηση κόστους

- $c=c(x_1(\alpha),\ldots,x_n(\alpha))$
- Προτιμότερη η εναλλακτική α όπου ισχύει min($c(\alpha)$)

Προγραμματισμός Στόχων

Στα πλαίσια της λήψης μιας απόφασης, έστω:

- *n* χαρακτηριστικά που καθορίζουν την απόφαση
- $x_i(\alpha)$ η τιμή του χαρακτηριστικού *i* για την εναλλακτική επιλογή *α* στα πλαίσια της απόφασης.

Κάθε επιλογή συνδέεται με μια συνάρτηση αξίας:

- $u=u(x_1(\alpha),\ldots,x_n(\alpha))$
- Προτιμότερη η εναλλακτική α όπου ισχύει max($u(\alpha)$)

Εναλλακτικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί συνάρτηση κόστους

- $c=c(x_1(\alpha),\ldots,x_n(\alpha))$
- Προτιμότερη η εναλλακτική α όπου ισχύει min($c(\alpha)$)

Προγραμματισμός Στόχων

Μερικοί ορισμοί…

- Ένα χαρακτηριστικό Α είναι **ανεξάρτητα προτιμητέο** (ΑΠ) ως ως προς ένα χαρακτηριστικό Β αν οι προτιμήσεις για τις τιμές του Α δεν εξαρτώνται από την τιμή του Β

Παράδειγμα:

- Η αναζήτηση εργασίας με κριτήριο τον μισθό, ανεξάρτητα από την περιοχή εργασίας (Ναι)
- Η επιλογή τρόπου ψυχαγωγίας σε συνάρτηση με τις καιρικές συνθήκες.

Προγραμματισμός Στόχων

Μερικοί ορισμοί…

- Αν χαρακτηριστικό Α είναι ανεξάρτητα προτιμητέο χαρακτηριστικού Β και αντίστροφα, τότε τα χαρακτηριστικά Α και Β είναι **«αμοιβαία ανεξάρτητα προτιμητέα» (ΑΑΠ)**
- Σύνολο χαρακτηριστικών S είναι **ΑΑΠ** συνόλου S’ αν οι τιμές των χαρακτηριστικών του S’ δεν επηρεάζουν προτιμήσεις για τις τιμές των χαρακτηριστικών S και αντίστροφα.
- Σύνολο χαρακτηριστικών S είναι **ΑΑΠ** αν κάθε υποσύνολο αυτού S1 είναι **ΑΑΠ** από το συμπληρωματικό του S2 (S=S1 U S2)

Προγραμματισμός Στόχων

Αν ένα σύνολο χαρακτηριστικών *n* είναι **ΑΑΠ** ισχύουν τα παρακάτω:

- Η συνάρτηση αξίας $u(x_1,\ldots,x_n)$ είναι αθροιστική αν υπάρχουν συναρτήσεις $u_1(x_1),\ldots,u_n(x_n)$ έτσι ώστε:

$$u(x_1, \ldots, x_1) = u_1(x_1)+u_2(x_2) + \cdots + u_n(x_n)$$

- Η συνάρτηση κόστους $c(x_1,\ldots,x_n)$ είναι αθροιστική αν υπάρχουν συναρτήσεις $c_1(x_1),\ldots,c_n(x_n)$ έτσι ώστε:

$$c(x_1, \ldots, x_1) = c_1(x_1)+c_2(x_2) + \cdots + c_n(x_n)$$

Προγραμματισμός Στόχων

- Όλοι οι περιορισμοί μετατρέπονται σε ισότητες με μεταβλητές παρέκκλισης d^- και d^+.
- Θετική μεταβλητή παρέκκλισης (d^+)
  - ✓ η ποσότητα κατά την οποία ο στόχος υπερβαίνεται
- Αρνητική μεταβλητή παρέκκλισης (d^-):
  - ✓ η ποσότητα κατά την οποία ο στόχος υπολείπεται
- Αντικειμενική συνάρτηση:
  - Ελαχιστοποίηση παρεκκλίσεων με βάση συγκεκριμένες προτεραιότητες

Άσκηση

Η εταιρεία Dewright είναι ένας από τους μεγαλύτερους παραγωγούς ηλεκτρικών εργαλείων στις Ηνωμένες Πολιτείες.

- Η εταιρεία ετοιμάζεται να αντικαταστήσει την τρέχουσα σειρά προϊόντων της με την επόμενη γενιά προϊόντων - τρία νέα ηλεκτρικά εργαλεία.
- Η διοίκηση πρέπει να καθορίσει το μείγμα των τριών νέων προϊόντων της εταιρείας για να ανταποκριθεί καλύτερα στους ακόλουθους τρεις στόχους:
  - 1. Να επιτύχει συνολικό κέρδος (καθαρή παρούσα αξία) τουλάχιστον 125 εκατομμυρίων δολαρίων.
  - 2. Να διατηρήσει το σημερινό εργατικό δυναμικό των 4000 εργαζομένων.
  - 3. Να μην επενδύσει κεφάλαιο αξίας άνω των 55 εκατομμύριων δολαρίων

Άσκηση 1

Η συμβολή κάθε νέου προϊόντος στο κέρδος, στην απασχόληση και το επίπεδο των κεφαλαιακών επενδύσεων είναι ανάλογες με το ρυθμό παραγωγής.

Οι συνεισφορές αυτές ανά μονάδα ρυθμού παραγωγής παρουσιάζονται στον Πίνακα 1

Μοναδιαία συνεισφορά ανά προϊόν

	1	2	3	Στόχος
Συνολικό κέρδος (εκατομμύρια δολάρια)	12	9	15	≥125
Επίπεδο απασχόλησης (εκατοντάδες εργαζόμενοι)	5	3	4	=40
Κεφαλαιακές επενδύσεις (εκατομμύρια δολάρια)	5	7	8	≤55

Ανάθεση ποινών

Στόχος	Παράμετρος	Ποινή απόκλισης
1	Συνολικό κέρδος	5(ανά 1 εκατομμύριο δολάρια κάτω από το στόχο)
2	Επίπεδο απασχόλησης	4 (ανά 100 υπαλλήλους κάτω από το στόχο)
		2 (ανά 100 εργαζόμενους πέρα από τον στόχο)
3	Κεφαλαιακές επενδύσεις	3 (ανά 1 εκατομμύριο δολάρια για το στόχο)

- Έστω Xi = Αριθμός μονάδων προϊόντος i που παράγει ανά ημέρα (i = 1, 2, 3)
- Κάτω από το στόχο i = Ποσό κάτω από τον στόχο i (i = 1, 2, 3) i = 1, 2, 3)
- Min W = 5 (Κάτω από τον στόχο 1) + 2 (Πάνω από τον στόχο 2) + 4 (Κάτω από το στόχο 2) + 3 (Πάνω από τον στόχο 3)

	Επίπεδό επίτευξης	Αποκλίσεις	Στόχος
Στόχος 1	12X1+9X2 + 15X3	- (Πάνω από τον στόχο 1) + (κάτω από τον στόχο 1)	=125
Στόχος 2	5X1 + 3X2 + 4X3	- (Πάνω από τον στόχο 2) + (κάτω από τον στόχο 2)	=40
Στόχος 3	5X1 + 7X2 + 8X3	-(Πάνω από τον στόχο 3) + (κάτω από το στόχο 3)	=55

Xi ≥ 0
κάτω από τον στόχο i ≥ 0
Πάνω από τον στόχο i ≥ 0 (i = 1, 2, 3)

Για να εκφράσουμε αυτόν τον γενικό στόχο μαθηματικά, εισάγουμε ορισμένες βοηθητικές μεταβλητές (επιπλέον μεταβλητές που είναι χρήσιμες για τη διατύπωση του μοντέλου) y1, y2 και y3, που ορίζονται ως εξής:

- y1 =12x1+ 9x2 + 15x3 -125 (κέρδος μείον το στόχο).
- y2 =5x1 + 3x2 + 4x3 -40 (απασχόληση μείον το στόχο).
- y3 =5x1 + 7x2 + 8x3 -55 (επένδυση μείον το στόχο).
- Αντικαθιστούμε το καθένα με τη διαφορά δύο μη αρνητικών μεταβλητών:
  - $y1 = y1^{+} - y1^{-}$, $y1^{+} \geq 0$, $y1^{-} \geq 0$
  - $y2 = y2^{+} - y2^{-}$ $y2^{+} \geq 0$, $y2^{-} \geq 0$
  - $y3 = y3^{+} - y3^{-}$, $y3^{+} \geq 0$, $y3^{-} \geq 0$

Το yj^{+} αντιπροσωπεύει το θετικό τμήμα της μεταβλητής yj και yj^{-} το αρνητικό μέρ

$$y_j^+ = \begin{cases} y_j & \text{if } y_j \geq 0, \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases}$$

$$y_j^- = \begin{cases} |y_j| & \text{if } y_j \leq 0, \\ 0 & \text{otherwise;} \end{cases}$$

Minimize $Z = 5y1^{-} + 2y2^{+} + 4y2^{-} + 3y3^{+}$

- Επειδή δεν υπάρχει ποινή για υπέρβαση του στόχου κέρδους 125 ή υπαγωγή στο επενδυτικό στόχο από 55, τα $y1^{+}$ και $y3^{-}$ δεν εμφανίζονται στην αντικειμενική συνάρτηση που αντιπροσωπεύει το σύνολο ποινών για αποκλίσεις από τους στόχους.

- $y1^{+} - y1^{-} = 12x1 + 9x2 + 15x3 - 125$ $\qquad 12x1 + 9x2 + 15x3 - (y1^{+} - y1^{-}) = 125$

- $y2^{+} - y2^{-} = 5x1 + 3x2 + 4x3 - 40$ $\qquad 5x1 + 3x2 + 4x3 - (y2^{+} - y2^{-}) = 40$

- $y3^{+} - y3^{-} = 5x1 + 7x2 + 8x3 - 55$ $\qquad 5x1 + 7x2 + 8x3 - (y3^{+} - y3^{-}) = 55$

$x_j \geq 0,\ y^{+}_k \geq 0,\qquad y^{-}_k \geq 0 \qquad (j = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3).$

Προγραμματισμός Στόχων

Παράδειγμα βιοτεχνίας κατασκευής κεραμικών:

Η βιοτεχνία θέλει να επιλέξει τον βέλτιστο συνδυασμό μπωλ και κούπες ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος της (40 € ανά μπωλ και 50 € ανά κούπα).

Maximize $Z = 40x_1 + 50x_2$

υ.π.

$1x_1 + 2x_2 \geq 40$ ώρες εργασίας

$4x_1 + 3x_2 \leq 120$ κιλά πηλού

$x_1, x_2 \geq 0$

Όπου: x_1 = πλήθος από μπωλ

x_2 = πλήθος από κούπες

Προγραμματισμός Στόχων

Η βιοτεχνία θέτει επιπλέον στόχους (σε σειρά σημασίας)*:*

1. Τουλάχιστον 40 ώρες εργασίας ανά ημέρα.
2. Κατανάλωση το πολύ 120 kg πηλού ανά ημέρα.
3. Κέρδος τουλάχιστον 1,600 € ανά ημέρα.
4. Ελαχιστοποίηση υπερωριών

Προγραμματισμός Στόχων

Παράδειγμα βιοτεχνίας κατασκευής κεραμικών:

Έστω ότι:

- Κάθε ώρα εργασίας κάτω από 40 ώρες κοστίζει 110 €
- Κάθε επιπλέον kg πηλού κοστίζει 95 €
- Το κέρδος πρέπει να είναι τουλάχιστον 1600 €
- Κάθε υπερωρία κοστίζει 80 €

Προγραμματισμός Στόχων

Παράδειγμα βιοτεχνίας κατασκευής κεραμικών:

Το πρόβλημα μετατρέπεται ως εξής:

min $110d_1^- + 95d_2^+ + d_3^- + 80d_1^+$

υ.π.

$1x_1 + 2x_2 - d_1^- + d_1^+ = 40$

$4x_1 + 3x_2 - d_2^- + d_2^+ = 120$

$40x_1 + 50x_2 - d_3^- + d_3^+ = 1600$

$x_1, x_2, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$

Πολυαντικειμενικός Προγραμματισμός

- Συχνά είναι αναγκαία η βελτιστοποίηση προβλημάτων με πολλούς **ΑΝΤΙΚΡΟΥΟΜΕΝΟΥΣ** στόχους
  - Μεγιστοποίηση απόδοσης
  - Ελαχιστοποίηση κόστους

- Ενίοτε είναι δυνατή η συσχέτιση στόχων, αν μπορούν να περιγραφούν με κοινές μονάδες (πχ χρηματικές μονάδες).
  - Δυνατότητα άθροισης στην αντικειμενική συνάρτηση
  - Χρήση βαρών αν αυτό είναι αναγκαίο.

Πολυαντικειμενικός Προγραμματισμός

Παράδειγμα:

Σε σύστημα αστικών συγκοινωνιών επιδιώκεται η μεγιστοποίηση της ωφέλειας του χρήστη και η ελαχιστοποίηση του κόστους του συστήματος:

- Μεγιστοποίηση ωφέλειας χρήστη
  - ✓ Χρόνος (άρα και κόστος χρόνου - χρήμα)
  - ✓ Εισιτήριο (χρήμα)
- Ελαχιστοποίηση κόστους
  - ✓ Λειτουργικό κόστος (χρήμα)
  - ✓ Κόστος συντήρησης (χρήμα)

Είναι δυνατόν να αθροιστούν; Πώς;

Πολυαντικειμενικός Προγραμματισμός

Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου…

- Δεν μπορούν να συνδεθούν οι αντικρουόμενοι στόχοι…
- Οι αντικρουόμενοι στόχοι αντιπροσωπεύουν διαφορετικές ποσότητες.
- Η βαρύτητα του κάθε στόχου έναντι των άλλων δεν μπορεί να προσδιοριστεί εύκολα
- Οι διαφορές ανάμεσα στους στόχους είναι ποιοτικές

Πολυαντικειμενικός Προγραμματισμός

Παράδειγμα:

- Επιθυμείτε να ταξιδέψετε σε μακρινή απόσταση με αεροπλάνο. Τι θα προτιμήσετε;
  - ✓Το φθηνότερο εισιτήριο με περισσότερη αναμονή και αριθμό πτήσεων;
  - ✓Τη συντομότερη διαδρομή με ακριβότερο εισιτήριο;
- Έστω ότι δεν είναι δυνατός ο καθορισμός του κόστους χρόνου
- Η βαρύτητα του κάθε στόχου δεν είναι σαφής
  - ✓Επαγγελματικό ταξίδι
  - ✓Διαθεσιμότητα χρημάτων

Πολυαντικειμενικός Προγραμματισμός

Παράδειγμα:

Έστω ότι έχουμε τις εξής επιλογές

Διαδρομή	Χρόνος (hrs)	Κόστος ($)
A	10	1700
B	9	2000
C	8	1800
D	7.5	2300
E	6	2200

Πολυαντικειμενικός Προγραμματισμός

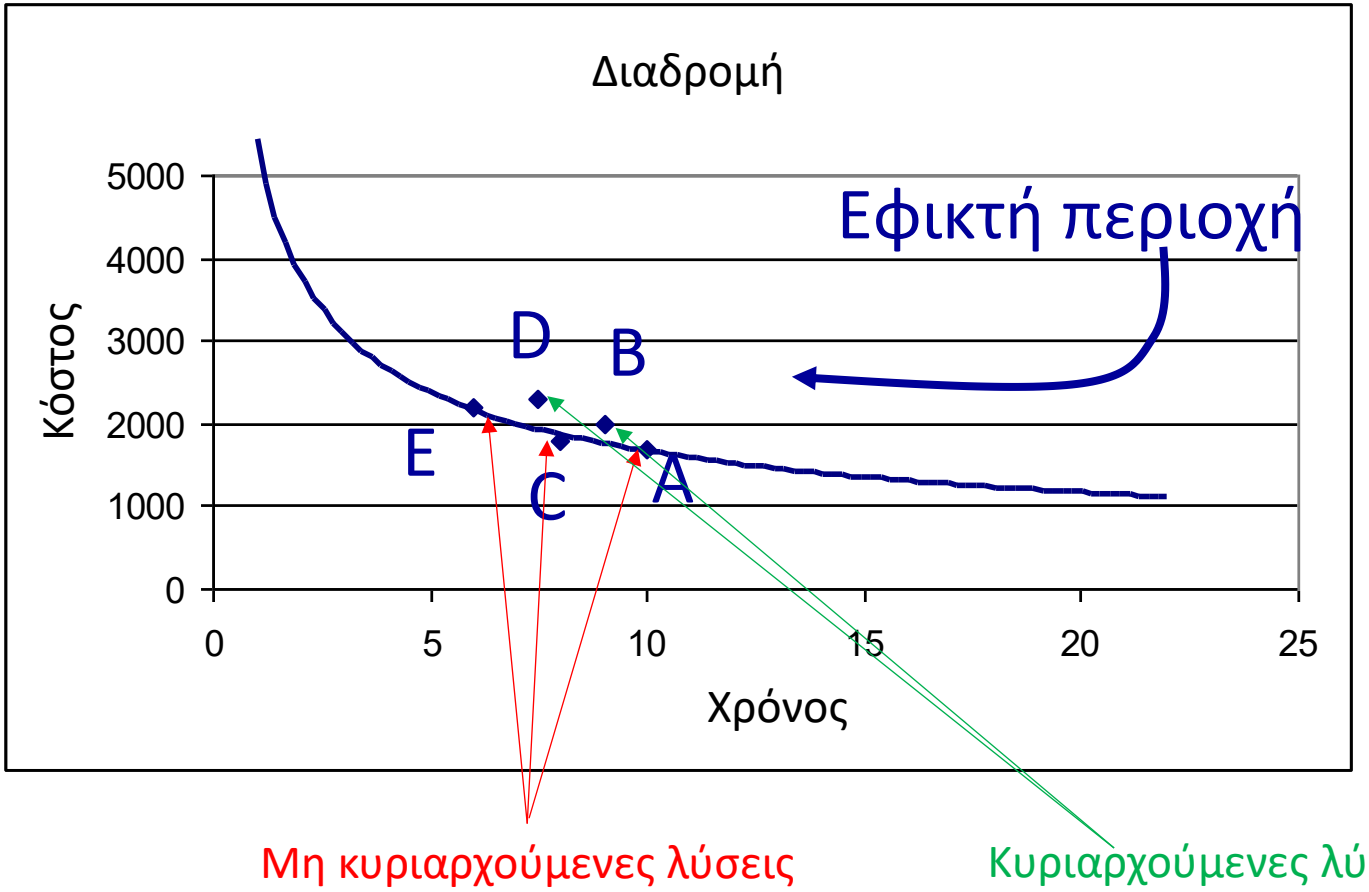
Παράδειγμα:

- Αν συγκρίνουμε τα Α και Β, δεν μπορούμε να πούμε ποιο είναι καλύτερο χωρίς να γνωρίζουμε τη σχετική βαρύτητα ανάμεσα σε χρόνο και κόστος.
- Αν όμως συγκρίνουμε τα Β και C , το C είναι καλύτερο οπότε μπορούμε να πούμε ότι **«κυριαρχεί»** ως προς το Β.
- Αφού η επιλογή C είναι εφικτή, δεν υπάρχει λόγος να διαλέξουμε το Β.
- Αντίστοιχα, το Ε κυριαρχεί έναντι του D
- Στις υπόλοιπες επιλογές, δεν υπάρχει κάποια η οποία να κυριαρχεί κάποιας άλλης.
- Αυτές αποκαλούνται «μη-κυριαρχούμενες» επιλογές

Πολυαντικειμενικός Προγραμματισμός

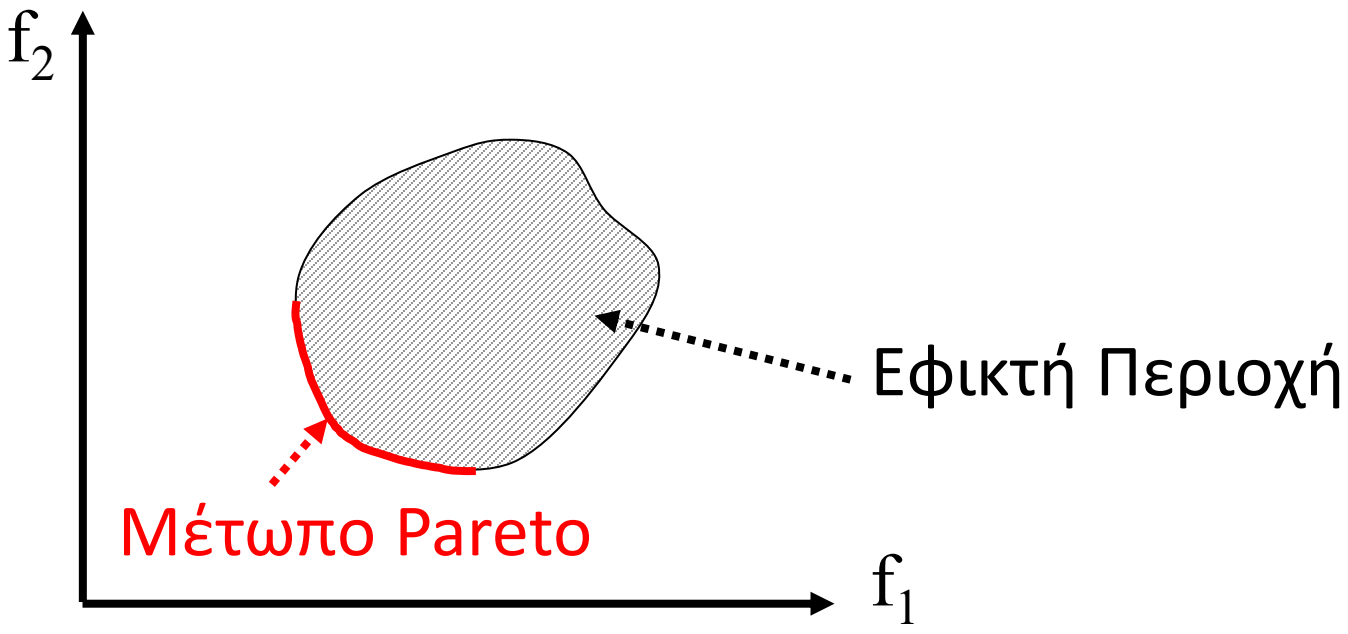
Παράδειγμα:

- Τα παραπάνω μπορούν να απεικονιστούν γραφικά ως εξής:



Πολυαντικειμενικός Προγραμματισμός

Για την παρακάτω εφικτή περιοχή με αντικειμενικές συναρτήσεις f_1 & f_2 οι οποίες ελαχιστοποιούνται, ισχύει ότι:



1. Βελτιστοποίηση f1 μόνο => Εύρεση τιμής f2 για αυτό το f1 (ένα άκρο του μετώπου)
2. Βελτιστοποίηση f1 για καλύτερες τιμές ε ώστε f2<ε (ενδιάμεσα σημεία)
3. Βελτιστοποίηση f2 μόνο => Εύρεση τιμής f1 για αυτό το f2 (άλλο άκρο του μετώπου)

Ορισμός βέλτιστου κατά Pareto

- Για ένα πρόβλημα με *m* αντικειμενικές συναρτήσεις, ένα διάνυσμα μεταβλητών ***x**** θεωρείται βέλτιστο κατά Pareto αν και μόνο αν δεν υπάρχει διάνυσμα ***x*** στον εφικτό χώρο τέτοιο ώστε

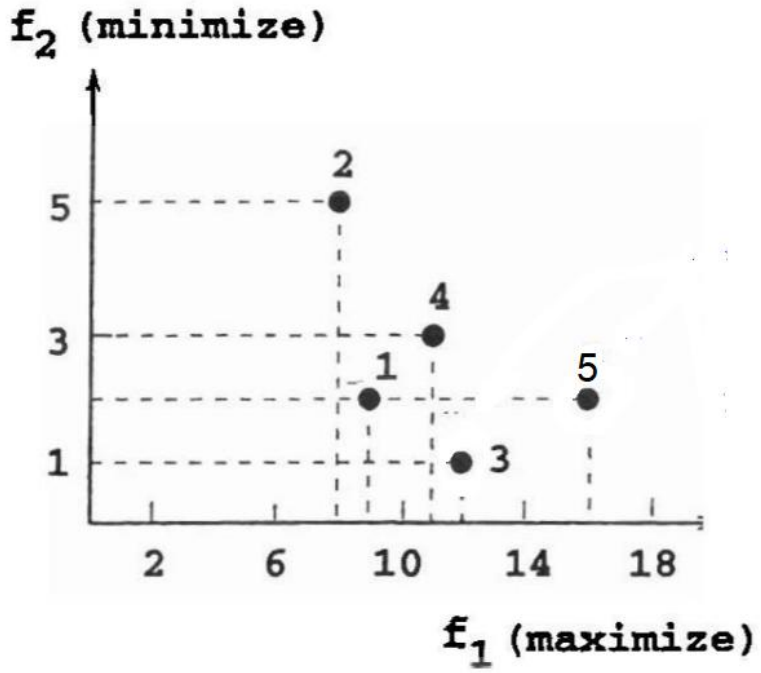
$$f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{x}^*) \quad \text{for all } i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\textit{and}$$

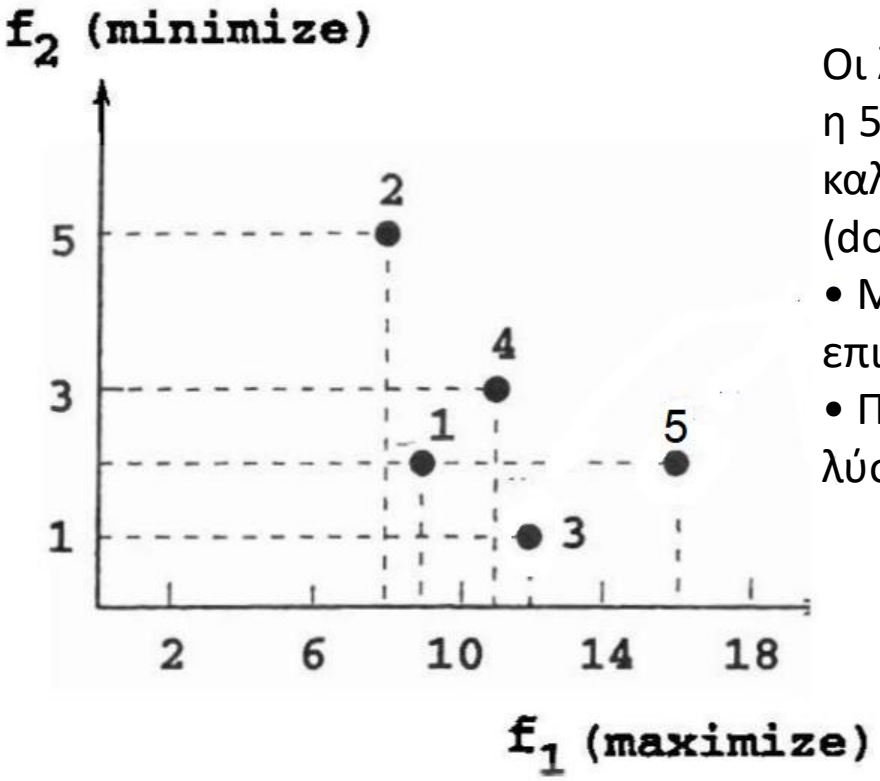
$$f_i(\mathbf{x}) < f_i(\mathbf{x}^*) \quad \text{for at least one } i$$

Επικράτηση λύσεων

- Στο παρακάτω διάγραμμα προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση 2 και να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση 1.



Επικράτηση λύσεων



Οι λύσεις 1 και 5 έχουν την ίδια τιμή F2 , αλλά η 5 έχει μεγαλύτερη τιμή F1. Ποια είναι καλύτερη και γιατί? Ποια είναι υποδεέστερη (dominated)?

- Μεταξύ των λύσεων 1 και 2 τι ισχύει? Ποια επικρατεί?
- Ποια είναι τα σημεία που αντιστοιχούν σε λύσεις μη κυριαρχούμενες?

Επικράτηση λύσεων

- Εμφανώς η λύση 5 επικρατεί της 1 αφού έχουν την ίδια τιμή F2 και η 5 έχει υψηλότερη τιμή F1 και στόχος είναι η μεγιστοποίηση της f1.
- Η 1 επικρατεί της 2 αφού η f2 είναι χαμηλότερη και η f1 υψηλότερη.
- Οι μη κυριαρχούμενες λύσεις είναι οι 3 και 5, αφού έχουν ίσες ή χαμηλότερες τιμές της f2 και ίσες ή μεγαλύτερες τιμές f1 σε σχέση με τις υπόλοιπες.
- Καμία δεν επικρατεί της άλλης μεταξύ τους.

Επιλογή εργασιών

Εργασία	Αμοιβή($)	Χρόνος(min)	Δείκτης διασκέδασης
1	1	3	3
2	1	2	2
3	3	2	1

Στόχος είναι να ελαχιστοποιήσουμε το χρόνο και να μεγιστοποιήσουμε τη διασκέδαση ώστε να συγκεντρώσουμε $100. Προφανώς χρειάζονται από 33.3 ως 100 δραστηριότητες. Ο απαιτούμενος χρόνος είναι από 66.7 μέχρι 300 λεπτά. Ο δείκτης διασκέδασης είναι από 33.3 ως 300.

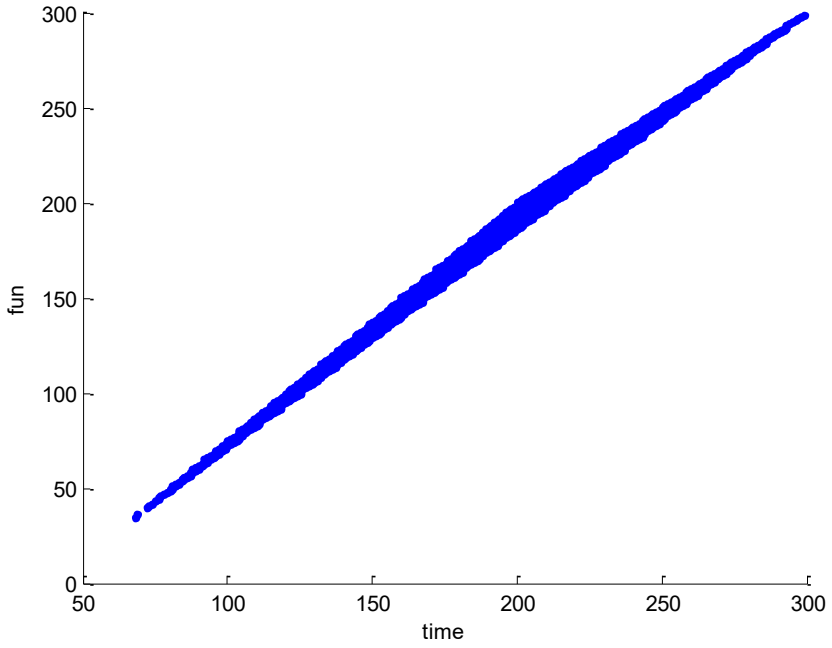
Πολύ-κριτηριακή διατύπωση

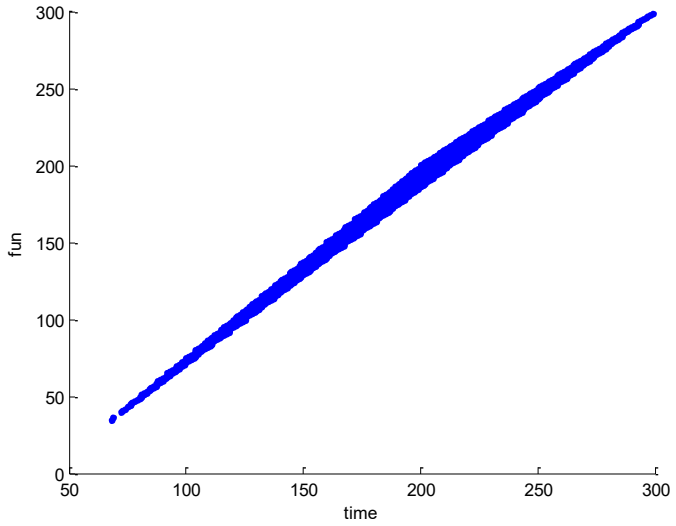
Minimize $time = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3$
και
Maximize $fun = 3x_1 + 2x_2 + x_3$
$\dot{\omega}\sigma\tau\varepsilon\ pay = x_1 + x_2 + 3x_3 = 100$
$x_i \geq 0$
Περιορισμοί κοινής λογικής:
$x_1 \leq 100, x_2 \leq 100, x_3 \leq 33.3$

Εργασία	Αμοιβή($)	Χρόνος(min)	Δείκτης διασκέδασης
1	1	3	3
2	1	2	2
3	3	2	1

Επίλυση με απαρίθμηση

- Στο εύρος των τιμών των 3 μεταβλητών υπολογίζονται όλες οι τιμές χρόνου και διασκέδασης για τους συνδυασμούς που **αποφέρουν ακριβώς $100**.
- Το μέτωπο Pareto είναι σχεδόν μια ευθεία γραμμή.





Κανονικοποίηση αντικειμενικής συνάρτησης

$$Minimize \qquad \frac{time}{66.7} + \frac{300}{fun}$$

- Το σημείο ουτοπίας είναι (66.7,300).
- time=168 minutes, fun=160 ($x_1=0, x_2=76, x_3=8$)