12. ΚΥΜΑΤΑ

Εισαγωγή

Τι είναι το κύμα; Μια διαταραχή μιας φυσικής ποσότητας που διαδίδεται στο χώρο. Δείτε για παράδειγμα τα δυο παρακάτω στιγμιότυπα από μια πειραματική συσκευή που εξομοιώνει τα κύματα και εμφανίζεται στον ιστότοπο

http://www.youtube.com/watch?v=jUQkG1A0_Sk

Σε αυτό το βίντεο, ένα σύνολο παράλληλων μεταλλικών ράβδων, ασθενώς συνδεδεμένων μεταξύ τους, μπορούν να ταλαντεύονται πάνω – κάτω. Η κάθε ράβδος παρασέρνει με την κίνησή της την επόμενη, και αυτή με την σειρά της την μεθεπόμενη κ.ό.κ. Η διαταραχή - γνωστή και ως πηγή - σε αυτό το παράδειγμα είναι το χέρι το οποίο κάνει μια απλή κίνηση πάνω και κάτω (χωρίς επανάληψη). Το αίτιο της διαταραχής λέγεται και πηγή όπως το χέρι σε αυτό το παράδειγμα. Με αυτό τον τρόπο δημιουργεί όπως λέμε ένα "παλμό" .

Εικόνα 12.1

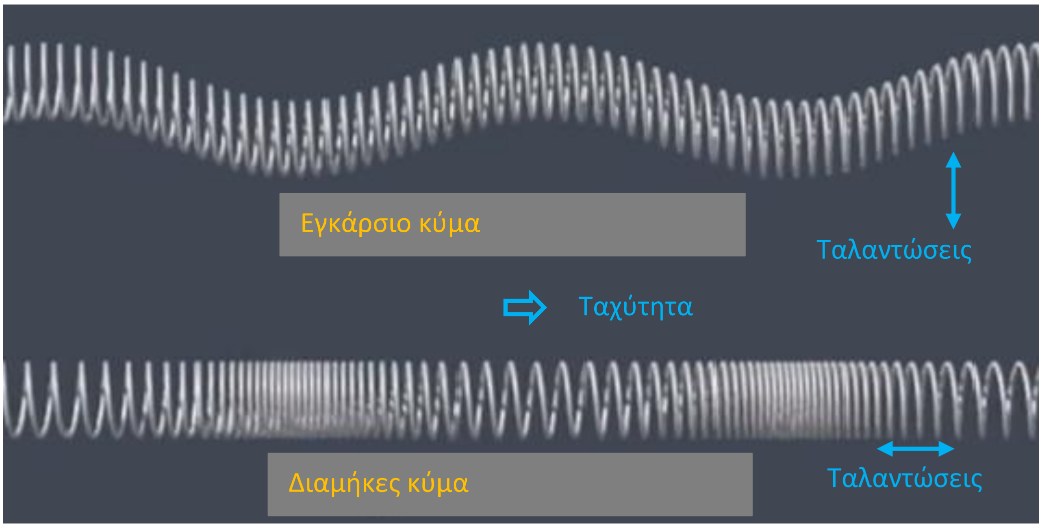
Ο παλμός αυτός διαδίδεται προς τα δεξιά όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. Η διαταραχή δηλαδή δεν μένει στάσιμη αλλά ταξιδεύει στο μέσο το οποίο εδώ είναι το σύνολο των μεταλλικών ράβδων. Προφανώς οι ράβδοι δεν ταξιδεύουν προς τα δεξιά μαζί με το κύμα αλλά απλά ταλαντεύονται πάνω – κάτω, αναπαράγοντας κατά κάποιο τρόπο την κίνηση του χεριού. Άρα στο κύμα δεν έχουμε μεταφορά ύλης αλλά μεταφορά ενέργειας. Κατά μέσο όρο η κάθε ράβδος δεν μετακινείται, απλά εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Εικόνα 12.2

Ποσοτικώς μια πρώτη σημαντική παράμετρος για ένα κύμα είναι η ταχύτητά του v η οποία συνήθως είναι σταθερή και εξαρτάται συνήθως μόνο από το μέσο και το είδος του κύματος. Η κατεύθυνση της κίνησης του κύματος ονομάζεται κατεύθυνση διάδοσης, π.χ. ο άξονας x στο παραπάνω σχήμα. Η άλλη σημαντική κατεύθυνση του κύματος είναι αυτή των ταλαντώσεων όπως ο άξονας y στο παραπάνω σχήμα. Εν σχέση με αυτές τις δυο κατευθύνσεις, ορίζονται δυο σημαντικές κατηγορίες κυμάτων:

<u>Τα εγκάρσια κύματα</u>, όπως στο παραπάνω παράδειγμα όπου οι δυο αυτές κατευθύνσεις είναι κάθετες μεταξύ τους και

<u>Τα διαμήκη κύματα</u> όπου οι δυο αυτές κατευθύνσεις είναι παράλληλες μεταξύ τους όπως στο κάτωθι παράδειγμα όπου και οι δυο είναι κατά μήκος του άξονα x:



Εικόνα 12.2

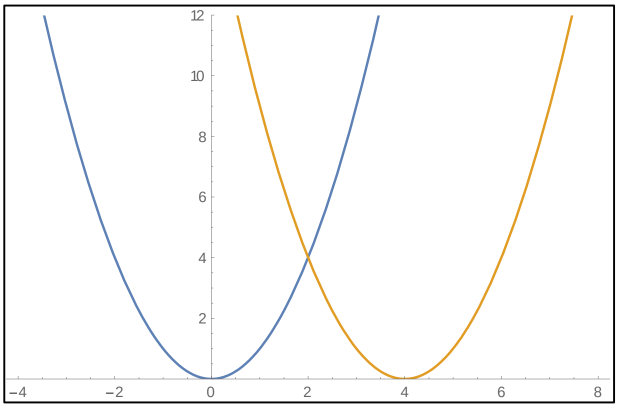
Την παραπάνω εικόνα μπορείτε να την παρακολουθήσετε ζωντανή στο παρακάτω βίντεο:

http://www.youtube.com/watch?v=CswoSQC_NX0&list=PL066B8BEEC8477A6F

Μαθηματική Περιγραφή Κύματος

Όπως προαναφέρθηκε, στο κύμα δεν έχουμε μεταφορά ύλης αλλά παρόλα αυτά βλέπουμε κάτι να κινείται όταν π.χ. παρατηρούμε τα κύματα της θάλασσας. Αυτό το κάτι είναι μια γεωμετρική καμπύλη, η λεγόμενη "κυματομορφή" του κύματος. Εάν γνωρίζουμε την μαθηματική έκφραση της καμπύλης αυτής για $t = 0$ τότε μπορούμε να τη βρούμε για οποιαδήποτε άλλη στιγμή. Πως μπορούμε στα Μαθηματικά να μετατοπίσουμε δυο γραφικές συναρτήσεις κατά τον άξονα x; Θεωρήστε το παρακάτω σχήμα που δείχνει την συνάρτηση $y = x^2$ με μπλε χρώμα συμμετρικά ως προς τον άξονα x και μια άλλη, παρόμοια σε σχήμα με την πρώτη, η οποία είναι μετατοπισμένη κατά 4 μονάδες οριζοντίως.

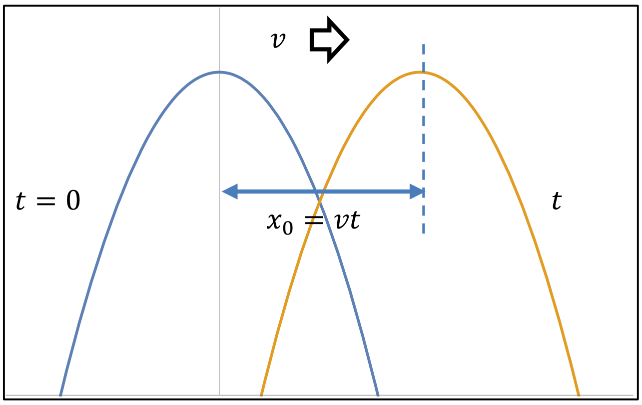
$$y = (x - 4)^2$$



Σχήμα 12.1

Ποια είναι η εξίσωση αυτής της δεύτερης γραφικής παράστασης; Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η εξίσωση αυτή είναι η $y = (x - 4)^2$, π.χ. στο $x = 4$ μηδενίζεται. Έτσι λοιπόν μπορούμε να γενικεύσουμε και να πούμε ότι η γραφική παράσταση της $y = f(x - x_0)$ είναι ίδια με τη γραφική παράσταση της $y = f(x)$ μετατοπισμένη προς τα δεξιά κατά x_0. Ομοίως είναι εύκολο να δούμε ότι η $y = f(x + x_0)$ είναι ίδια με την $y = f(x)$ μετατοπισμένη προς τα αριστερά κατά x_0.

Επιστρέφοντας τώρα στα κύματα, έστω μια κυματομορφή όπως στο παρακάτω σχήμα που κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα v.



Σχήμα 12.2

Έστω ότι η κυματομορφή στα αριστερά είναι αυτή που εμφανίζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ και περιγράφεται από μια μαθηματική εξίσωση $y = f(x)$. Τότε μια επόμενη κυματομορφή σε χρόνο $t > 0$ θα βρίσκεται μετατοπισμένη κατά $x_0 = vt$ ως προς την προηγούμενη κυματομορφή και σύμφωνα με αυτά που είδαμε παραπάνω, θα περιγράφεται από μια μαθηματική εξίσωση $y = f(x - x_0) = f(x - vt)$. Εάν το κύμα κινείται προς τα αριστερά, η αντίστοιχη εξίσωση θα είναι $y = f(x + vt)$.

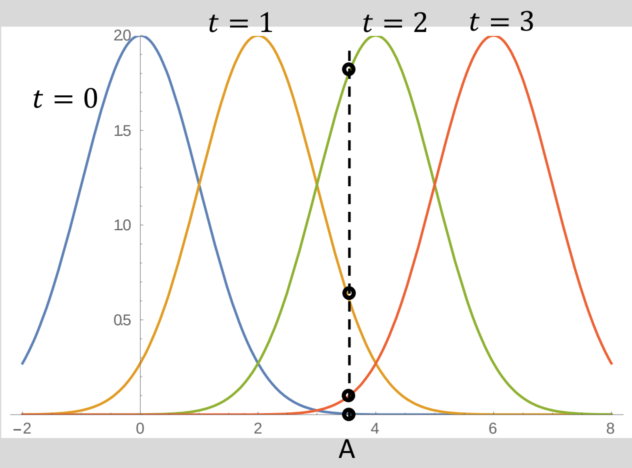
$y = f(x \pm vt)$	ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ	(12.1)

<u>Παράδειγμα 12.1</u>. Κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά με ταχύτητα $v = 2\ m/s$ περιγράφεται στο $t = 0$ από την εξίσωση $y = 2e^{-0.5x^2}$. Να βρεθεί η κατακόρυφη απόσταση ενός σημείου Α που βρίσκεται στο $x = 3.5$ κατά τις χρονικές στιγμές $t = 0, 1,2, 3$ (όλες οι μονάδες σε S.I.).

<u>Λύση</u>: Σύμφωνα με την "συνταγή" της Εξ. 12.1, για να βρούμε την εξίσωση του κύματος αρκεί να αντικαταστήσουμε το x με το $x - vt = x - 2t$: Έτσι

$$y(x,t) = 2e^{-0.5(x-2t)^2}$$

Παρακάτω φαίνονται τα τέσσερα στιγμιότυπα του κύματος για $t = 0,1,2,3$.



Για $t = 0$ στο σημείο Α έχουμε

$$y(3.5,0) = 2e^{-0.5\cdot\times 3.5^2} = 0.004$$

Δηλαδή είναι πολύ μικρή γιατί το κύμα (γαλάζιο χρώμα) δεν έχει φτάσει ακόμα στο Α. Αντιθέτως στο $t = 1$ έχουμε

$$y(3.5,1) = 2e^{-0.5(3.5-2)^2} = 0.65$$

μια σχετικά υψηλή τιμή επειδή η κορυφή του κύματος (πορτοκαλί χρώμα) έχει φτάσει στο $x = vt = 2$ που είναι κοντά στο Α. Στο $t = 2$ έχουμε

$$y(3.5,2) = 2e^{-0.5(3.5-2)^2} = 1.76$$

η υψηλότερη τιμή επειδή η κορυφή του κύματος (λαδί χρώμα) έχει φτάσει στο $x = vt = 4$ που λίγο μετά το Α. Μετά από αυτό το κύμα ξανα-απομακρύνεται από το Α προς τα δεξιά και έτσι στο $t = 3$ (κεραμιδί χρώμα)

$$y(3.5,3) = 2e^{-0.5(3.5-2)^2} = 0.09$$

Περιοδικά - Αρμονικά Κύματα

Ειδική περίπτωση κυμάτων είναι τα περιοδικά κύματα όπου η συνάρτηση f της Εξ. 12.1 είναι μια περιοδική συνάρτηση του x. Ειδική περίπτωση περιοδικής συνάρτησης είναι το ημίτονο

$f(x) = Asinkx$	ΕΞΙΣΩΣΗ ΗΜΙΤΟΝΟΥ	(12.2)

όπου A είναι το πλάτος του ημιτόνου ενώ τη σημασία της σταθεράς k θα τη δούμε παρακάτω. Έστω ότι η Εξ. 12.2 είναι η κυματομορφή ενός κύματος στο $t = 0$. Εάν η ταχύτητα του κύματος είναι v (για ευκολία θα θεωρήσουμε κύμα προς τα δεξιά) τότε σε οποιαδήποτε άλλη χρονική στιγμή t η κυματομορφή θα δίνεται από την

$y(x,t) = Asink(x - vt)$	ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ ΚΥΜΑ	(12.3)

Εάν θέσουμε

$\omega = kv$	ΣΧΕΣΗ ΣΤΑΘΕΡΩΝ	(12.2)

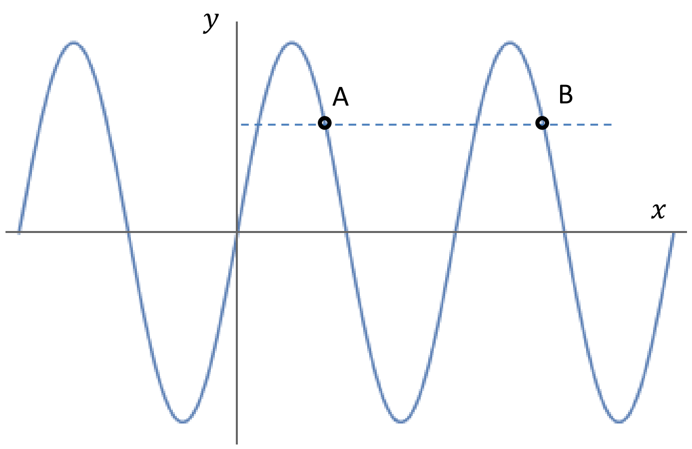
τότε η Εξ. 12.3 γίνεται

$y(x,t) = Asin(kx - \omega t)$	ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ ΚΥΜΑ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ	(12.5)

Η ποσότητα

$\varphi = kx - \omega t$	ΦΑΣΗ	(12.6)

έχει μονάδες γωνίας (πάντα σε ακτίνια). Η φυσική σημασία της φάσης είναι ότι δυο σημεία επάνω στο κύμα όπως τα Α και Β τα οποία διαφέρουν κατά ένα πλήρη κύκλο, διαφέρουν κατά φάση κατά $\varphi_B - \varphi_A = 2\pi$.



Σχήμα 12.3

Η απόσταση μεταξύ των δυο αυτών σημείων $\lambda = x_B - x_A$ ονομάζεται **μήκος κύματος**.

Μήκος κύματος λ ενός αρμονικού κύματος είναι η απόσταση μεταξύ δυο σημείων του κύματος που απέχουν χωρικά κατά ένα πλήρη κύκλο.

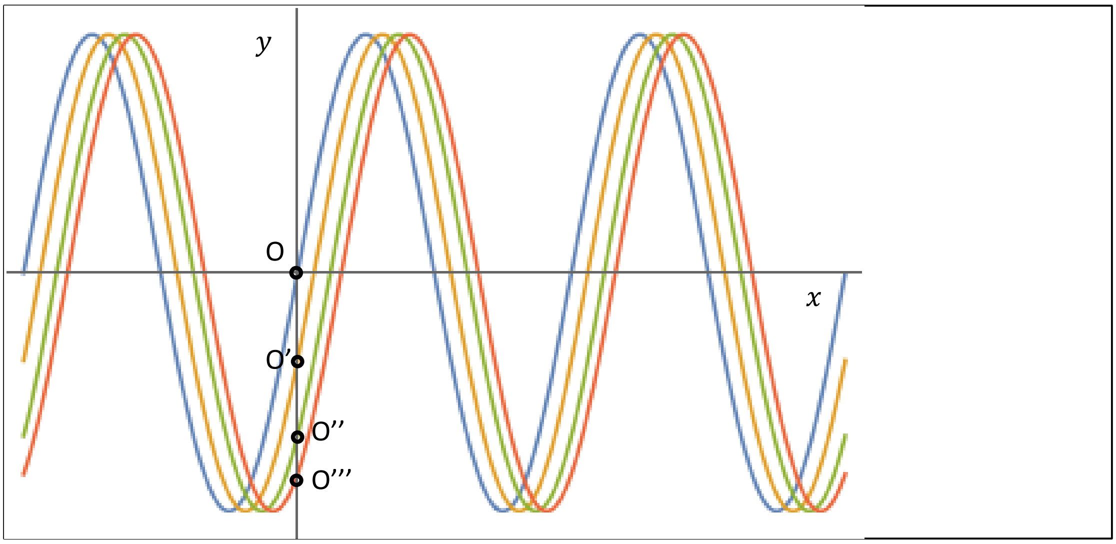
Για να δούμε τη φυσική σημασία της σταθεράς k, η οποία ονομάζεται "κυματάριθμος" παίρνουμε ένα στιγμιότυπο του κύματος με σταθερό χρόνο t όπως στο παραπάνω Σχήμα 12.3. Από τη διαφορά φάσεως των δυο σημείων και την Εξ. 12.6 έχουμε:

$$\varphi_B - \varphi_A = 2\pi \Rightarrow (kx_B - \omega t) - (kx_A - \omega t) = k(x_B - x_A) = 2\pi \Rightarrow k\lambda = 2\pi$$

ή

$k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$	ΚΥΜΑΤΑΡΙΘΜΟΣ	(12.7)

Θα θεωρήσουμε τώρα ένα σημείο με σταθερό x όπως το Ο στο παρακάτω σχήμα με $x = 0$. Όπως το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, το Ο τίθεται σε κίνηση και καταλαμβάνει διαδοχικά τις θέσεις Ο, Ο΄, Ο΄΄, Ο΄΄΄κλπ. Η κίνηση του Ο προς τα κάτω σταματάει μόλις περάσει το επόμενο ελάχιστο από εκεί. Μετά από αυτό, το σημείο αυτό θα συνεχίσει την ανοδική του πορεία προς τα πάνω, όπως ανεβοκατεβαίνουν οι βάρκες όταν περνάν τα κύματα της θάλασσας από κάτω τους.

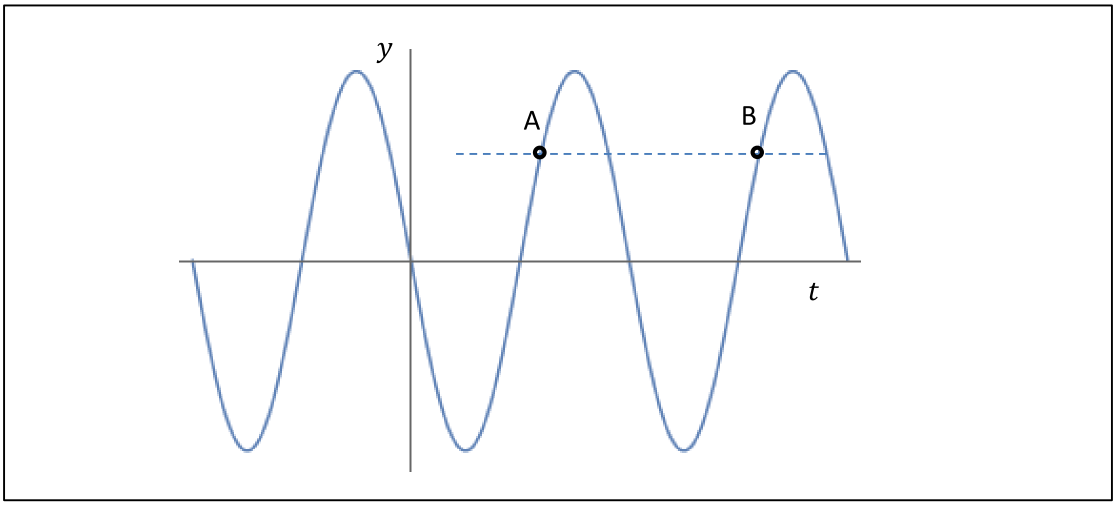


Σχήμα 12.4

Επομένως και το σημείο Ο στο $x = 0$ εκτελεί ταλάντωση με πλάτος A. Αυτό φαίνεται και από την Εξ. 12.5 εάν θέσουμε $x = 0$ παίρνουμε

$y(x,t) = Asin(-\omega t) = -Asin(\omega t)$	ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΕΣ ΚΥΜΑ ΣΤΟ $x = 0$	(12.8)

η γραφική παράσταση της οποίας φαίνεται παρακάτω



Σχήμα 12.5

Προσέξτε ότι τώρα ο οριζόντιος άξονας είναι ο t και όχι ο x που είχαμε προηγουμένως. Στην παραπάνω γραφική παράσταση τα σημεία Α και Β διαφέρουν κατά ένα πλήρη κύκλο και η αντίστοιχη διαφορά χρόνου $T = t_B - t_A$ ονομάζεται **περίοδος**.

Περίοδος T ενός αρμονικού κύματος είναι ο χρόνος μεταξύ δυο σημείων του κύματος που απέχουν χρονικά κατά ένα πλήρη κύκλο.

Όπως και στο Σχήμα 12.3, έτσι και στο 12.5 τα σημεία Α και Β έχουν διαφορά φάσης 2π δηλαδή:

$$\varphi_B - \varphi_A = 2\pi => (k \cdot 0 - \omega t_B) - (k \cdot 0 - \omega t_A) = \omega(t_B - t_A) = 2\pi => \omega T = 2\pi$$

ή

$\omega = \frac{2\pi}{T}$	ΚΥΚΛΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	(12.9)

Αυτή τη σχέση την είχαμε δει και στην κυκλική κίνηση όσο και στις ταλαντώσεις. Θυμηθειτε ότι μια παρόμοια ποσότητα με την ω είναι και η συχνότητα f που δίνεται από την

$f = \frac{1}{T} = \frac{n}{t}$	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ	(12.10)

όπου n είναι ο αριθμός των ταλαντώσεων μέσα σε χρόνο t. Από την Εξ. 12.2 και τους ορισμούς του k και του ω καταλήγουμε στην περιβόητη σχέση μεταξύ των διαφόρων κυματικών μεγεθών:

$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$	ΣΧΕΣΗ ΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ	(12.11)

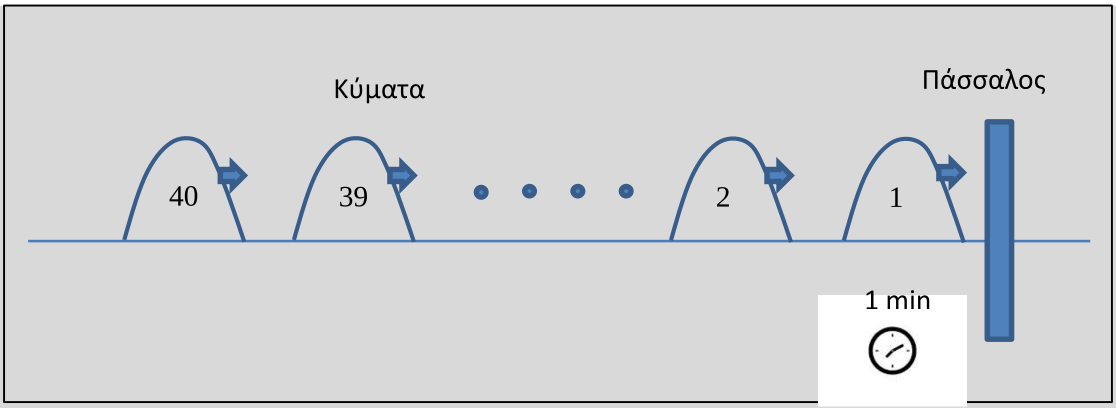
Παράδειγμα 12.2

Ένας ψαράς που στέκεται κοντά στην αποβάθρα παρατηρεί τα κύματα της θάλασσας τα οποία κτυπούν ένα κατακόρυφο πάσσαλο. Παρατηρεί ότι σε ένα λεπτό πέφτουν στον πάσσαλο 40 κύματα. Επίσης παρατηρεί ότι ένα από τα κύματα χρειάστηκε 5 δευτερόλεπτα για να καλύψει την απόσταση από την πλώρη της αγκυροβολημένης βάρκας του έως τον πάσσαλο που γνωρίζει ότι είναι 10 μέτρα. Εάν προσεγγίσουμε το κύμα της θάλασσας με ημιτονοειδή κυματομορφή, ποιο θα είναι το μήκος κύματός της;

Λύση:

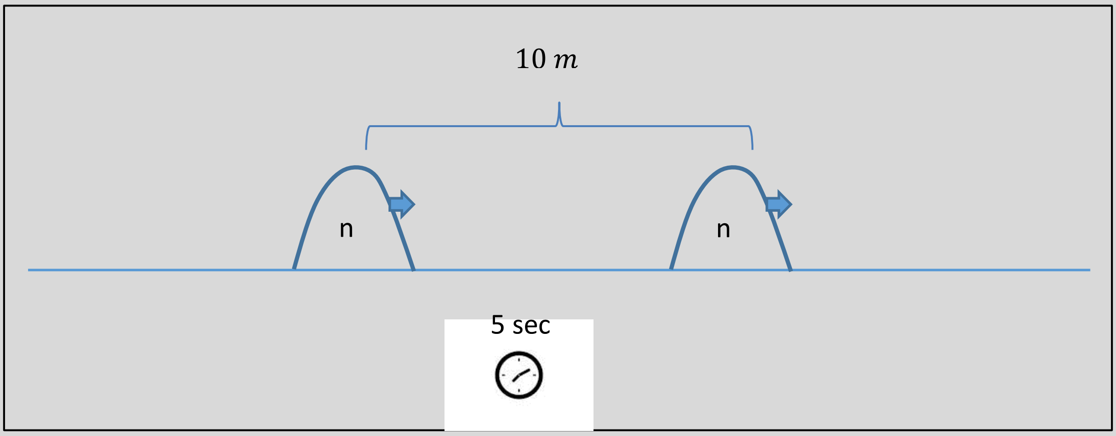
Έχουμε δυο διαφορετικές ομάδες πληροφοριών: Τα $n = 40$ κύματα πέφτουν στον πάσσαλο σε χρόνο $t = 1\ min = 60\ s$. Από την Εξ. 12.10 η συχνότητα ισούται με:

$$f = \frac{n}{t} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}\ Hz$$



Η άλλη ομάδα πληροφορίας είναι ότι το κύμα σε χρόνο $\Delta t = 5\ s$ καλύπτει απόσταση $\Delta x = 10\ m$. Από αυτά μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του κύματος:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10}{5} = 2\ m/s$$



Από την Εξ. 12.11

$$v = \lambda f => \lambda = \frac{v}{f} = \frac{2}{2/3} = 3\ m$$

<u>Παράδειγμα 12.3</u>

Ένα αρμονικό εγκάρσιο κύμα διαδίδεται κατά μήκος μιας χορδής. Σε κάποια χρονική στιγμή t η κατακόρυφη απομάκρυνση ενός σημείου Γ με συντεταγμένη x κατά μήκος της χορδής γίνεται ίση με το πλάτος $3\ m$ του κύματος. Να βρεθεί η κατακόρυφη απομάκρυνση ενός σημείου Δ που βρίσκεται ένα μέτρο δεξιότερα από το Γ ένα δευτερόλεπτο αργότερα. Δίνονται $k = 2/5$ και $\omega = 1/5$ σε μονάδες S.I.

<u>Λύση</u>:

Από την Εξ. 12.5 το σημείο Γ έχει κατακόρυφη απομάκρυνση ίση με

$$y_\Gamma = A sin(kx_\Gamma - \omega t)$$

Από τα δεδομένα $y_\Gamma = A$ και άρα $sin(kx_\Gamma - \omega t) = 1$ που σημαίνει $\varphi_\Gamma = kx_\Gamma - \omega t = 2\nu\pi$ όπου $\nu = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Αντίστοιχα, η φάση του σημείου Δ με συντεταγμένη $x_Δ = x_Γ + 1$ κατά την χρονική στιγμή $t' = t + 1$ ισούται με:

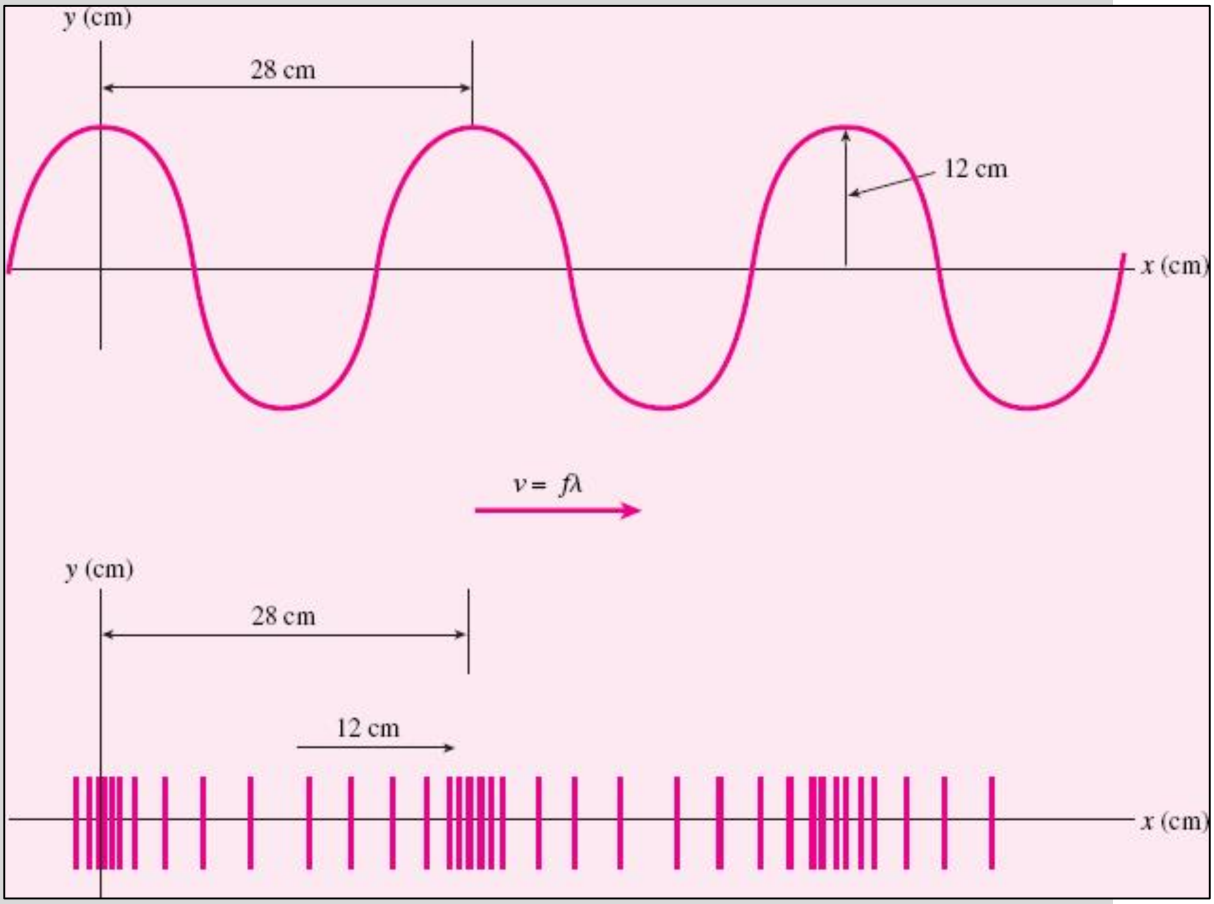
$$\varphi_Δ = kx_Δ - \omega t' = k(x_Γ + 1) - \omega(t + 1) = \varphi_Γ + k - \omega = 2\nu\pi + \pi/2 + 2/5 - 1/5$$
$$= 2\nu\pi + \pi/2 + 1/5$$

Η κατακόρυφη απομάκρυνση του σημείου Δ ισούται με

$$y_Δ = Asin(\varphi_Δ) = Asin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2} + 1/5\right) = Asin\left(\frac{\pi}{2} + 1/5\right) = 3cos(1/5) = 2.94\ m$$

Παράδειγμα 12.4.

Ένα εγκάρσιο κύμα και ένα διαμήκες κύμα φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Βρείτε το πλάτος, το μήκος κύματος, την περίοδο και την ταχύτητα εάν η συχνότητά τους είναι $12\ Hz$ και για τα δυο.



Λύση: Από την γραφική παράσταση βλέπουμε ότι για το εγκάρσιο κύμα το πλάτος είναι

$$A = 12\ cm$$

και το μήκος κύματος είναι

$$\lambda = 28\ cm = 0.28\ m$$

Από τα δεδομένα

$$f = 12\,Hz$$

έτσι βρίσκουμε για την περίοδο

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{12} = 0.083\,s$$

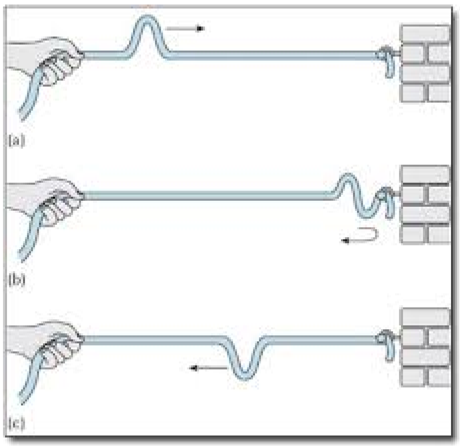
Από την Εξ. 12.11:

$$v = \lambda f = 0.28 \times 12 = 3.36\,m/s$$

Τα αντίστοιχα μεγέθη για το εγκάρσιο κύμα είναι ακριβώς τα ίδια.

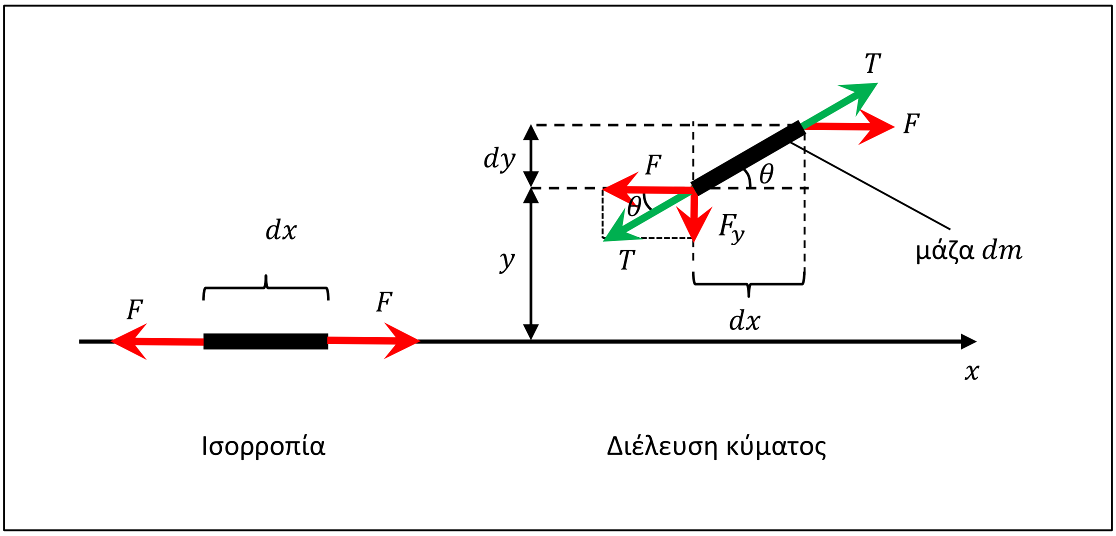
Κύματα σε Χορδές

Ένα από τα πιο εύκολα κύματα που μπορούμε να δημιουργήσουμε, είναι το κύμα επάνω σε μια λεπτή χορδή. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, όπου ένας άνθρωπος δημιουργεί ένα παλμό, τα κύματα αυτά είναι εγκάρσια.



Σχήμα 12.6

Όπως προαναφέρθηκε, η ταχύτητα v ενός κύματος εξαρτάται από το μέσο που εδώ είναι η χορδή. Έστω μια χορδή μήκους L και μάζα m η οποία στην ισορροπία την διατηρούμε σε ένταση επάνω στον άξονα x με την βοήθεια μιας οριζόντιας δύναμης F η οποία εφαρμόζεται στις δυο άκρες της και είναι σταθερή (όπως π.χ. η σταθερή δύναμη που εφαρμόζουμε για να κουρδίσουμε έχορδα μουσικά όργανα). Για να βρούμε την ταχύτητα v, θεωρούμε ένα απειροστό κομμάτι του νήματος μάζας dm όπως στο παρακάτω σχήμα το οποίο στην ισορροπία βρίσκεται επάνω στον άξονα x με μήκος dx. Εφόσον υπάρχει ισορροπία, οι δυνάμεις στις άκρες της dm είναι μεταξύ τους ίσες και φυσικά ίσες με την εφαρμοζόμενη δύναμη F. Όταν διέλθει το κύμα από το σημείο που βρίσκεται η μάζα dm, τότε αυτή ανέρχεται σε κάποιο ύψος y και αποκτάει κάποια κλίση με γωνία θ. Αυτό γίνεται επειδή επιπλέον της οριζόντιας δύναμης F, εφαρμόζονται στην dm και κατακόρυφες δυνάμεις F_y από τα δυο γειτονικά τμήματα του νήματος. Έτσι σε κάθε άκρη του νήματος εφαρμόζεται συνολικά η τάση T η οποία φυσικά είναι κατά μήκος τους νήματος και άρα σχηματίζει και αυτή γωνία θ με τον άξονα x, με συνιστώσες F και F_y.



Σχήμα 12.7

Από την ομοιότητα των τριγώνων

$$tan\theta = \frac{F_y}{F} = \frac{dy}{dx} => F_y = \frac{dy}{dx}F$$

Όπως έχει προαναφερθεί, στα κύματα δεν υπάρχει μετατόπιση της ύλης κατά μήκος της διάδοσης του κύματος που εδώ είναι ο άξονας x, μόνο ταλαντώσεις γύρω από τη θέση ισορροπίας. Αφού το κύμα στην χορδή είναι εγκάρσιο, οι ταλαντώσεις είναι κατά τον άξονα y. Έτσι στο παραπάνω σχήμα οι οριζόντιες συνιστώσες της τάσης T πρέπει να αλληλο-αναιρούνται που σημαίνει ότι η F είναι σταθερή στις δυο άκρες της dm και άρα ανεξάρτητη του x. Αντιθέτως οι εγκάρσιες συνιστώσες της τάσης T πρέπει να προκαλούν ταλάντωση. Εάν οι άκρες του νήματος βρίσκονται στις θέσεις x και $x + dx$, τότε η συνολική στοιχειώδη εγκάρσια δύναμη που δρα στη μάζα dm είναι η

$$dF_y = F_y(x + dx) - F_y(x)$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση που βρήκαμε για την F_y οδηγεί στην

$$dF_y = F\left[\frac{dy(x + dx)}{dx} - \frac{dy(x)}{dx}\right] = F\frac{d^2y}{dx^2}dx$$

Η εγκάρσια επιτάχυνση της μάζας dm είναι $\alpha = d^2y/dt^2$ και έτσι από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε

$$dF_y = adm => F\frac{d^2y}{dx^2}dx = dm\frac{d^2y}{dt^2}$$

Η γραμμική πυκνότητα μ μάζας του νήματος ορίζεται ως

$$\mu = \frac{dm}{dx}$$

Έτσι η παραπάνω διαφορική εξίσωση γίνεται

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda}{F}\frac{d^2y}{dt^2} => \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

όπου θέσαμε $v^2 = F/\lambda$ γιατί όπως θα δούμε το v είναι η ταχύτητα του κύματος. Αυτή η διαφορική εξίσωση επιδέχεται λύσεις κύματος της μορφής $y = f(x \pm vt)$ και για αυτό είναι γνωστή και ως "**Διαφορική Εξίσωση Κύματος**". Όντως εάν θέσουμε $z = x \pm vt$ παίρνουμε με απλό κανόνα αλυσωτής παραγώγισης:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(z)}{dx} = f'(z)\frac{dz}{dx} = f'(z)$$

και

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{df'(z)}{dx} = f''(z)\frac{dz}{dx} = f''(z)$$

Ενώ

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df(z)}{dt} = f'(z)\frac{dz}{dt} = \pm vf'(z)$$

και

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \pm v\frac{df'(z)}{dt} = \pm vf''(z)\frac{dz}{dt} = \pm vf''(z)(\pm v) = v^2f''(z)$$

Στις παραπάνω παραγωγίσεις η ταχύτητα v θεωρείται σταθερά και ο τόνος σημαίνει παραγώγιση ως προς z. Αντικαθιστώντας αυτά τα αποτελέσματα στην παραπάνω διαφορική εξίσωση, οδηγεί ταυτοτικά στο αποτέλεσμα

$$f''(z) = \frac{1}{v^2}v^2f''(z)$$

που αποδεικνύει ότι η $y = f(x \pm vt)$ είναι η λύση της. Συνήθως το νήμα είναι ομοιογενές και έτσι το μ είναι σταθερό. Παίρνοντας απλές αναλογίες της μάζας dm με μήκος dx και του συνολικού νήματος μάζας m και μήκους L οδηγεί στην:

$$\mu = \frac{dm}{dx} = \frac{m}{L}$$

Άρα η ταχύτητα διάδοσης του κύματος σε χορδή ισούται με

$v = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$	Ταχύτητα κύματος σε Χορδή	(12.12)

όπου

$\mu = \frac{m}{L}$	Γραμμική πυκνότητα	(12.13)

<u>Παράδειγμα 12.5.</u>

Ένα μεταλλικό σύρμα μάζας $500\ g$ έχει μήκος $50\ cm$ και βρίσκεται υπό τάση $80\ N$. Ποια είναι η ταχύτητα ενός εγκάρσιου κύματος που διαδίδεται στο σύρμα;

<u>Λύση</u>: Από τα δεδομένα έχουμε μάζα $m = 0.5\ kg$ και μήκος $L = 0.5\ m$ έτσι η γραμμική πυκνότητα ισούται με

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0.5}{0.5} = 1.0\,\frac{kg}{m}$$

Η δύναμη ισούται με $F = 80\ N$ οπότε από την Εξ. 12.12

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{80}{1}} = 8.94\ m/s$$

<u>Παράδειγμα 12.6:</u>

Εάν στο προηγούμενο παράδειγμα το σύρμα κοπεί στη μέση ποια θα είναι η νέα ταχύτητα του κύματος σε ένα από τα τμήματα;

<u>Λύση</u>: Το μισό σύρμα έχει μήκος

$$L' = \frac{L}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25\ m$$

Αλλά και η μάζα του θα είναι η μισή:

$$m' = \frac{m}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25\ kg$$

Επομένως η γραμμική πυκνότητα παραμένει η ίδια

$$\mu' = \frac{m'}{L'} = \frac{0.25}{0.25} = 1.0\,\frac{kg}{m}$$

που σημαίνει ότι και η ταχύτητα του κύματος είναι η ίδια:

$$v = 8.94\ m/s$$

Ταχύτητα Διαφόρων Κυμάτων

Εκτός από κύματα σε χορδή, υπάρχει και μια πληθώρα από άλλα κύματα τόσο στη φύση όσο και στις ανθρώπινες εφαρμογές. Μερικά παραδείγματα φαίνονται στον παρακάτω Πίνακα 12.1:

Είδος κύματος	Παράδειγμα	Πηγή	Μέσο	Κατεύθυνση	Τυπικό v
Μηχανικά κύματα	Κραδασμοί σε κινητήρες, δρόμους, γέφυρες	Κινητήρες, κινούμενα οχήματα, αέρας	Ύλη	Κυρίως εγκάρσια	Μερικά m/s
Σεισμικά		Τεκτονικές πλάκες	Φλοιός της γης	Κυρίως διαμήκη	Μερικά km/h
Ήχος	Ομιλία, Θόρυβος, Μουσική	Φωνητικές Χορδές + γλώσσα, Κίνηση, Μουσικά όργανα	Αέρας	Διαμήκη	330 m/s
Ηλεκτρο-μαγνητικά	Τηλεπικοινωνίες, TV, Ράδιο, Ακτίνες - Χ	Κεραία	Αέρας-Κενό	Εγκάρσια	3×10^8 m/s
Θαλάσσια		Αέρας + Σεισμοί (tsunami!)	Νερό	Κυρίως εγκάρσια	Μερικά m/s

Πίνακας 12.1: Είδη κυμάτων

Εκτός από το φως στο κενό που έχει σταθερή ταχύτητα, τα υπόλοιπα είδη κυμάτων εξαρτούνται από διάφορους παραμέτρους του μέσου όπως φαίνεται και στον παρακάτω Πίνακα 12.2:

Είδος κύματος	Ταχύτητα v	Παράμετροι
Κύμα σε Χορδή	$\sqrt{F/\mu}$	F: Δύναμη, μ: Γραμμική πυκνότητα
Ήχος σε Στερεά	$\sqrt{E/\rho}$	E: Μέτρο ελαστικότητας Young, ρ: Πυκνότητα
Ήχος στον Αέρα	$\sqrt{\gamma/RT}$	γ, R: Θερμοδυναμικές σταθερές, T η θερμοκρασία σε Kelvin
Φως σε κενό ή αέρα	$c = 3 \times 10^8 m/s$	Σταθερή
Φως σε υλικό	c/n	n: Δείκτης διάθλασης του υλικού
Ηλεκτρομαγ. Κύματα	c	Ίδια με την ταχύτητα του φωτός

Πίνακας 12.2: Ταχύτητες διαφόρων κυμάτων

Στην περίπτωση της διάδοσης ηχητικού κύματος διαμέσου κάποιο υλικού, η ταχύτητα εξαρτάται από το **μέτρο ελαστικότητας του Young** E, σε μονάδες 10^9 Pa (γίγα-Pascal), το οποίο είναι μια σταθερά του υλικού με τυπικές τιμές αυτές που φαίνονται στον παρακάτω Πίνακα 12.3. Η φυσική σημασία του E είναι ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή του, τόσο πιο δύσκολη είναι η παραμόρφωση του υλικού. Έτσι δεν είναι τυχαίο ότι το καουτσούκ, τα πολυμερή και τα πλαστικά έχουν τις χαμηλότερες τιμές ενώ το διαμάντι την υψηλότερη.

Υλικό	$E(GPa)$	Υλικό	$E(GPa)$
Καουτσούκ	0.1	Χρυσός	74
Πολυαιθυλένιο	0.8	Ορείχαλκος	100
Πλαστικό	2.3	Χαλκός	117
Nylon	3	Μπρούντζος	120
Ακρυλικά	3.2	Πλαστικό με ϊνες	150
Ξύλο	11	Νικέλιο	170
Μετόν	17	Χάλυβας	200
Κόκκαλο	18	Σίδηρος	210
Κασσίτερος	47	Βολφράμιο (W)	400
Αλουμίνιο	69	Tungsten Carbide (WC)	500
Γυαλί	70	Διαμάντι (C)	1220

Πίνακας 12.3: Μέτρο ελαστικότητας του Young διάφορων υλικών

Μια άλλη χρήσιμη σταθερά υλικού είναι και η πυκνότητα ρ η οποία επίσης εμφανίζεται στην έκφραση της ταχύτητας ενός ηχητικού κύματος διαμέσου στερεού μαζί με την E. Τυπικές τιμές της φαίνονται στον Παρακάτω πίνακα 12.4:

Υλικό - Ουσία	Πυκνότητα (kg/m^3)	Πυκνότητα (g/cm^3)
Αέρας	1.2	0.0012
Αιθανόλη	810	0.810
Πάγος	920	0.920
Νερό	1,000	1.000
Νερό θαλάσσης	1,030	1.030
Αίμα	1,600	1.600
Μπετόν	2,000	2.000
Αλουμίνιο	2,700	2.700
Σίδηρος	7,800	7.800
Χάλυβας	7,800	7.800
Ορείχαλκος	8,600	8.600
Χαλκός	8,900	8.900
Άργυρος	10,500	10.500
Χρυσός	19,300	19.300
Πλατίνα	21,400	21.400

Πίνακας 12.4: Πυκνότητα διάφορων υλικών

Παράδειγμα 12.6

Υπολογίστε την ταχύτητα του ήχου σε ράβδο αλουμινίου.

Λύση: Από τους Πίνακες 12.3 και 12.4 βρίσκουμε για το αλουμίνιο $E = 69\ GPa = 69 \times 10^9 Pa$ (μη ξεχνάτε να μετατρέπετε σε S.I.) και

$$\rho = 2.7\frac{g}{cm^3} = 2.7\frac{\frac{1}{1000}kg}{\left(\frac{1}{100}\right)^3 m^3} = 2700\frac{kg}{m^3}$$

Επομένως η ταχύτητα του ήχου διαμέσου της ράβδου ισούται με

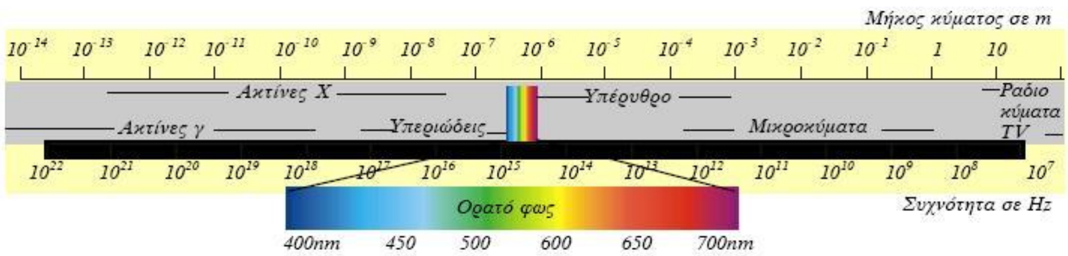
$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{69\times 10^9}{2700}} = 0.505\times 10^4 = 5050\, m/s$$

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Παρατηρήστε στον παραπάνω Πίνακα 12.2 ότι όλα τα ηλεκτρομαγνητικά (σε συντομογραφία Η/Μ) κύματα έχουν την ίδια ταχύτητα, την ταχύτητα του φωτός c, μια σταθερά. Αυτό δεν είναι τυχαίο αφού και το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Η σχέση των κυματικών μεγεθών Εξ. 12.11 στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων γίνεται

$c = \lambda f$	ΣΧΕΣΗ ΜΕΓΕΘΩΝ Η/Μ ΚΥΜΑΤΑ	(12.14)

Παρόλο που υπάρχει μια μεγάλη πληθώρα Η/Μ κυμάτων, στο μόνο που διαφέρουν είναι η συχνότητα f ή, εναλλακτικά από την παραπάνω σχέση, το μήκος κύματος λ. Έτσι τα διάφορα είδη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων περιγράφονται επάνω σε έναν άξονα με τιμές συχνότητας ή μήκους κύματος και ονομάζονται "φάσματα" όπως αυτό που φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 12.8

Ενέργεια Κύματος – Ισχύς Κύματος

Όπως προαναφέρθηκε, σε ένα κύμα δεν υπάρχει μεταφορά μάζας. Για αυτό και ο αέναος κυματισμός της θάλασσας π.χ. δεν έχει σαν αποτέλεσμα την μεταφορά του νερού έξω στην στεριά. Απλά τα μόρια της ύλης ταλαντεύονται γύρω από το σημείο ισορροπίας τους. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε το κύμα ως ένα σύνολο αρμονικών ταλαντωτών και να υπολογίσουμε την ενέργεια του κύματος ως το σύνολο της ενέργειας του κάθε ταλαντωτή. Ο κάθε ταλαντωτής δεν είναι ανεξάρτητος αλλά λόγω των ελαστικών ιδιοτήτων του μέσου συμπαρασύρει και τους γειτονικούς ταλαντωτές και έτσι έχουμε μεταφορά ενέργειας.

Στο κύμα δεν υπάρχει μεταφορά μάζας αλλά μόνο μεταφορά ενέργειας.

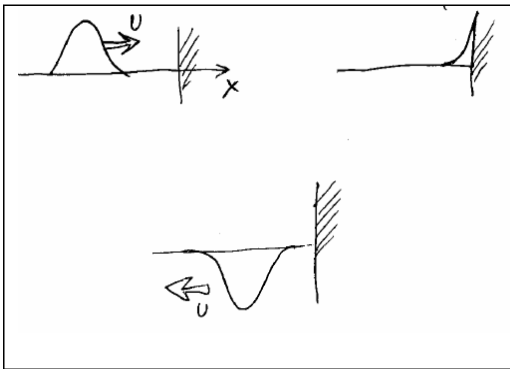
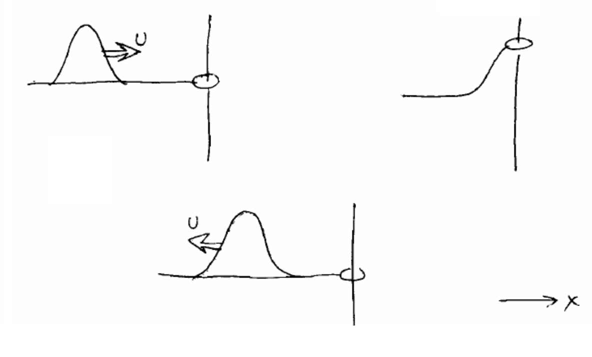
Θα εξετάσουμε την περίπτωση εγκάρσιου κύματος που διαδίδεται σε χορδή επειδή ο υπολογισμός είναι σχετικά εύκολος. Θεωρήστε ότι στο Σχήμα 12.7 διέρχεται ένα αρμονικό κύμα $y = Asin(kx - \omega t)$ από το στοιχειώδες τμήμα της χορδής με μήκος dx και μάζα dm. Θα εξετάσουμε πρώτα το τμήμα εκείνο που βρίσκεται στο $x = 0$. Η εξίσωση του κύματος τότε γίνεται $y = Asin(-\omega t)$ που είναι η εξίσωση αρμονικού ταλαντωτή. Η στοιχειώδης μάζα dm λοιπόν της χορδής πάλλεται με πλάτος A και κυκλική συχνότητα ω και άρα από την Εξ. 11.10 έχει ενέργεια ίση με $dE = 1/2\omega^2 A^2 dm$. Με την βοήθεια της γραμμικής πυκνότητας Εξ. 12.13 αυτή η έκφραση γίνεται $dE = 1/2\omega^2 A^2 \mu dx$. Παρότι που ο υπολογισμός έγινε στο $x = 0$, το κάθε τμήμα της χορδής είναι ισοδύναμο και περιμένουμε το ίδιο αποτέλεσμα για οποιοδήποτε τμήμα. Για παράδειγμα, για ένα άλλο τμήμα σε τυχαίο x, η εξίσωση του κύματος $y = Asin(kx - \omega t)$ μπορεί να γραφεί ως $y = Asin(-\omega t + \varphi)$ όπου το $\varphi = kx$ είναι μια σταθερή φάση στο σημείο x. Έτσι και πάλι έχουμε ένα αρμονικό ταλαντωτή με το ίδιο πλάτος A και κυκλική συχνότητα ω αλλά με μια διαφορά φάσης φ η οποία δεν παίζει κάποιο ρόλο στην ενέργεια. Η ισχύς είναι εξ' ορισμού $p = dE/dt$ από την οποία παίρνουμε

$p = \frac{1}{2}\mu v A^2 \omega^2$	ΙΣΧΥΣ ΚΥΜΑΤΟΣ	(12.14)

όπου αντικαταστήσαμε $v = dx/dt$ την ταχύτητα του κύματος. Παρατηρήστε ότι η ισχύς εξαρτάται τετραγωνικά τόσο από το πλάτος A όσο και από την κυκλική συχνότητα ω. Έτσι εάν θέλουμε να διπλασιάσουμε το πλάτος ενός κύματος, πρέπει να τετραπλασιάσουμε την ισχύ της πηγής.

Ανάκλαση Κυμάτων

Όταν ένα κύμα προσπέσει σε κάποιο εμπόδιο, τότε αυτό ανακλάται. Αυτό σημαίνει ότι το κύμα αλλάζει κατεύθυνση και άρα η ταχύτητά του αλλάζει πρόσημο Ας θεωρήσουμε και πάλι ένα παλμό σε χορδή ο οποίος διαδίδεται προς τον θετικό άξονα x και περιγράφεται γενικά από μια εξίσωση $y = f(x - vt)$. Όπως φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 12.9 υπάρχουν δυο περιπτώσεις, όσον αφορά την άκρη του νήματος που ανακλάται, είτε α) να είναι στερεωμένη σε ακλόνητο σημείο όπως π.χ. τοίχος είτε β) να είναι ελεύθερη όπως π.χ. να είναι δεμένη σε δακτύλιο ο οποίος μπορεί και πάλλεται ελεύθερα πάνω-κάτω σε κατακόρυφο στύλο.

	
α) Στερεωμένη άκρη	β) Ελεύθερη άκρη

Σχήμα 12.9

Στην πρώτη περίπτωση, όταν ο παλμός προσπέσει στον τοίχο, τότε εφαρμόζει μια κατακόρυφη δύναμη σε αυτόν προς τα πάνω. Από τον νόμο δράσης-αντίδρασης του Νεύτωνα, ο τοίχος εφαρμόζει και αυτός μια αντίθετη δύναμη στο νήμα προς τα κάτω. Αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος είναι να λειτουργήσει ο τοίχος ως μια νέα πηγή η οποία δημιουργεί παλμό αντίθετου πλάτους (προς τα κάτω). Επομένως ο ανακλώμενος παλμός περιγράφεται από την εξίσωση $y = -f(x + vt)$. Στην δεύτερη περίπτωση, ο δακτύλιος πάλλεται με την ίδια φορά με τον παλμό και άρα λειτουργεί και αυτός ως μια πηγή αλλά δημιουργεί παλμό ίδιου πλάτους (προς τα πάνω). Επομένως ο ανακλώμενος παλμός τώρα περιγράφεται από την εξίσωση $y = f(x + vt)$. Στην ειδική περίπτωση που το κύμα είναι αρμονικό τότε το προσπίπτον περιγράφεται από την εξίσωση $y = Asin(kx - \omega t)$ ενώ τα ανακλώμενα είναι της μορφής $y = \mp Asin(kx - \omega t)$

Επαλληλία Κυμάτων

Πολλές φορές σε ένα σημείο του χώρου καταφτάνουν περισσότερα του ενός κύματος, π.χ. ένα κύμα y_1 και ένα άλλο y_2. Τότε τα κύματα προστίθενται το ένα με το άλλο και το συνολικό κύμα που παρατηρείται είναι το $y = y_1 + y_2$. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται επαλληλία στη Φυσική. Εν γένει τα δυο κύματα έχουν τυχαία χαρακτηριστικά μεταξύ τους. Όταν τα δυο κύματα είναι αρμονικά, τότε υπάρχουν δυο ειδικές περιπτώσεις που εμφανίζουν ενδιαφέρον, α) το στάσιμα κύματα και β) η συμβολή.

α) Στάσιμα κύματα

Στάσιμο κύμα έχουμε όταν ένα αρμονικό κύμα συμβάλει με το ίδιο ακριβώς κύμα αλλά που κινείται στην αντίθετη φορά το οποίο συνήθως προκύπτει από ανάκλαση σε σταθερό σημείο. Θεωρήστε για παράδειγμα το $y_1 = -Asin(kx - \omega t)$ το οποίο ταξιδεύει προς τα δεξιά. Το μείον διευκολύνει τις πράξεις χωρίς απώλεια της γενικότητας αφού έχει τη μορφή κύματος (απλά διαφέρει κατά 180^0 από την συνήθη έκφραση $Asin(kx - \omega t)$ αλλά και πάλι είναι μια ημιτονοειδής έκφραση κύματος). Εάν το κύμα ανακλάται σε σταθερό σημείο, τότε θα δημιουργηθεί ένα αρμονικό κύμα το οποίο ταξιδεύει προς τα αριστερά $y_2 = Asin(kx + \omega t)$

σύμφωνα με αυτά που είπαμε στην ανάκλαση κυμάτων. Η επαλληλία των δυο κυμάτων περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = y_1 + y_2 = -Asin(kx - \omega t) + Asin(kx + \omega t)$$

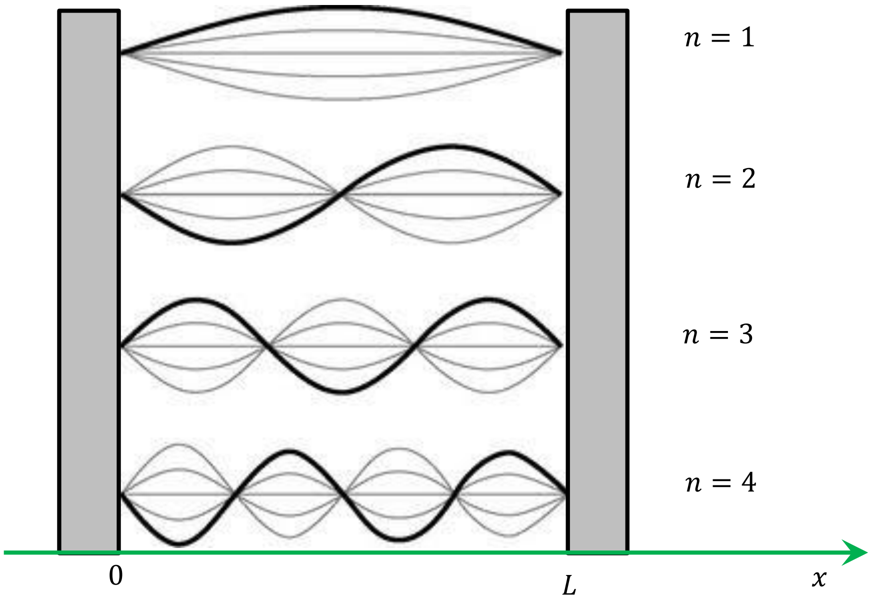
Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση

$$sina - sinb = 2sin(\frac{a-b}{2})cos(\frac{a+b}{2})$$

οδηγεί στην

$y = 2Asin(kx)cos(\omega t)$	ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ	(12.15)

Παρότι που η παραπάνω έκφραση δεν είναι κύμα (δεν έχει τον όρο "$x - vt$"), εντούτοις ονομάζεται **στάσιμο κύμα** για λόγους που θα φανούν παρακάτω. Αντιθέτως μπορούμε να εκλάβουμε την παραπάνω έκφραση ως ένα ταλαντωτή αφού περιέχει τον όρο $\cos(\omega t)$ με πλάτος $A' = 2Asin(kx)$ το οποίο δεν είναι σταθερό αλλά μεταβάλλεται κατά μήκος του άξονα x. Επομένως κάθε σημείο της χορδής πάλλεται πάνω-κάτω με την ίδια κυκλική συχνότητα ω αλλά με διαφορετικό πλάτος. Εφόσον το ημίτονο παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1, κάποια σημεία τυγχάνει να έχουν μέγιστο πλάτος $2A$, γνωστά ως "κοιλίες" ενώ κάποια άλλα τυγχάνει να έχουν ελάχιστο πλάτος 0, γνωστά ως "δεσμοί". Όπως φαίνεται και στο παρακάτω Σχήμα 12.10, συνήθως το στάσιμο κύμα δημιουργείται όταν περιορίζουμε την χορδή μεταξύ δυο ακλόνητων σημείων στο $x = 0$ και στο $x = L$ όπως στα έγχορδα μουσικά όργανα.



Σχήμα 12.10

Τότε οι κοιλίες και οι δεσμοί δημιουργούνται σε καθορισμένες θέσεις. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να εξηγηθεί εύκολα με την βοήθεια της Εξ. 12.15. Στο αριστερό άκρο $x = 0$ έχουμε εξ΄ορισμού κοιλία αφού $sin(0) = 0$. Στο δεξί άκρο $x = L$ όμως έχουμε επίσης κοιλία εφόσον το νήμα είναι προσδεμένο σε ακλόνητο σημείο και έτσι αναγκαστικά $sin(kL) = 0$ που σημαίνει ότι $kL = n\pi$, όπου $n = 1, 2, 3, \ldots$ (η περίπτωση $n = 0$ είναι τετριμμένη αφού οδηγεί παντού σε $y = 0$). Από τον ορισμό του κυματάριθμου $k = 2\pi/\lambda$ παίρνουμε για το αντίστοιχο μήκος κύματος $2\pi L/\lambda = n\pi$ ή

$\lambda_n = \frac{2L}{n} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$	ΣΤΑΣΙΜΟ ΚΥΜΑ	(12.16)

όπου η κάθε τιμή του n ονομάζεται "**αρμονική**", π.χ. 1η αρμονική, 2η αρμονική κ.ό.κ. Στο Σχήμα 12.10 δείχνονται οι τέσσερις πρώτες αρμονικές. Προσέξτε ότι την Εξ. 12.15 μπορούμε να την αποδείξουμε και με καθαρά γεωμετρικά επιχειρήματα, π.χ. στο Σχήμα 12.10 βλέπουμε ότι στην 1η αρμονική που έχει μια μόνο κοιλία, δεν "χωράει" ένα ολόκληρο μήκος κύματος στο μήκος L αλλά μόνο μισό και έτσι $\lambda = L/2$. Αντιθέτως στην 2η αρμονική ένα μήκος κύματος "χωράει" ακριβώς στο μήκος L και έτσι $\lambda = L = 2L/2$. Συνεχίζοντας, μπορούμε να δούμε ότι αναπαράγονται όλες οι τιμές της Εξ. 12.15.

Λόγω των δεσμών στα στάσιμα κύματα οι οποίοι εμφανίζονται σε προκαθορισμένες θέσεις, η ενέργεια εγκλωβίζεται μεταξύ των δεσμών και έτσι δεν αυτή μεταφέρεται, εξού και η ονομασία "στάσιμο", σε αντιπαραβολή με τα "ελεύθερα" κύματα που ταξιδεύουν προς μια μόνο κατεύθυνση και μεταφέρουν μαζί τους ενέργεια. Από την Εξ. 12.12 η ταχύτητα του κύματος σε χορδή είναι ανεξάρτητη από την αρμονική n και εξαρτάται μόνο από τα χαρακτηριστικά του μέσου όπως η γραμμική πυκνότητα της χορδής και η δύναμη που την κρατάει υπό τάση. Αντίθετα, από την Εξ. 12.11, μπορούμε να δούμε ότι η συχνότητα f εξαρτάται από το n αφού $v = \lambda f$ και έτσι

$f_n = n\frac{v}{2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$	ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ	(12.17)

Προσέξτε ότι οι συχνότητες των υψηλότερων αρμονικών $n = 2,3,4 \ldots$ είναι απλά πολλαπλάσια της συχνότητας $f_1 = v/2L$ της 1ης αρμονικής, δηλαδή

$f_n = nf_1 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$	ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ	(12.18)

<u>Παράδειγμα</u>.

Η γραμμική πυκνότητα ενός νήματος μήκους $2\ m$ είναι $0.00086\ kg/m$. Ποια θα πρέπει να είναι η τάση στη χορδή ώστε αυτή η χορδή να πάλλεται με $600\ Hz$ στην 3η αρμονική;

<u>Λύση</u>: Από τα δεδομένα έχουμε $\mu = 8.6 \times 10^{-4}\ kg/m$, $L = 2\ m$, και $f_3 = 600\ Hz$.
Λύνοντας ως προς την πρώτη αρμονική:

$$f_3 = 3f_1 => f_1 = 200\ Hz$$

Από την Εξ. 12.17

$$f_1 = \frac{v}{2L} => v = 2Lf_1 = 2 \times 2 \times 200 => v = 800\, m/s$$

ενώ από την Εξ. 12.12 έχουμε

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} => v^2 = \frac{F}{\mu} => F = \mu v^2 = 8.6 \times 10^{-4} \times 800^2 => F = 550\, N$$

Εναλλακτικά μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα από την Εξ. 12.11:

$$v = \lambda_3 f_3 = \frac{2L}{3} 600 = \frac{2 \times 2}{3} 600 = 800\, m/s$$

β) Συμβολή κυμάτων

Σε ορισμένες περιπτώσεις, δυο ίδια κύματα τα οποία διαφέρουν μόνο κατά μια σταθερή φάση φ, καταφτάνουν σε ένα σημείο. Έτσι έχουμε μια επαλληλία της μορφής:

$$y = Asin(kx - \omega t) + Asin(kx - \omega t + \varphi)$$

Η διαφορά φάσης μπορεί να προκύψει από δυο κύματα που εκπέμπονται από την ίδια πηγή αλλά ακολουθούν διαφορετική διαδρομή. Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση

$$sina + sinb = 2sin(\frac{a+b}{2})cos(\frac{a-b}{2})$$

οδηγεί στην εξίσωση

$y = 2Acos\varphi\ sin(kx - \omega t + \varphi/2)$	ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ	(12.19)

η οποία είναι εξίσωση κύματος με πλάτος $A' = 2Acos\varphi$. Ο όρος $cos\varphi$ είναι πολύ σημαντικός για τον εξής λόγο: Εφόσον το συνημίτονο παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 1, κάποιες φορές τυγχάνει να εμφανίζεται το κύμα με μέγιστο πλάτος $2A$, και μιλούμε για "ενισχυτική συμβολή", ενώ κάποιες άλλες φορές τυγχάνει να εμφανίζεται το κύμα με μηδενικό πλάτος, και οπότε μιλούμε για "καταστροφική συμβολή". Οι τιμές της φ που εμφανίζονται αυτά α φαινόμενα είναι:

$\varphi = n\pi \quad\quad n = 0{,}1{,}2 \ldots$	ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΗ ΣΥΜΒΟΛΗ	(12.20 α)
$\varphi = (2n+1)\frac{\pi}{2} \quad\quad n = 0{,}1{,}2 \ldots$	ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΙΚΗ ΣΥΜΒΟΛΗ	(12.20 β)

Παράδειγμα: Δυο οπτικές ίνες παράλληλες με τον άξονα x που χρησιμοποιούν το ίδιο φως συχνότητας $6 \times 10^{14} Hz$, τοποθετούνται μέσα σε σκοτεινό θάλαμο, πλήρως ευθυγραμμισμένες και κολλητά η μια με την άλλη με τις άκρες τους που εκπέμπουν φως να είναι στο $x = 0$ και να σημαδεύουν ένα σημείο Α στο $x = 1\,m$. Μια από τις δυο ίνες μετατοπίζεται κατά Δx προς τον αρνητικό άξονα x. Να βρεθούν τα πρώτα δυο Δx όπου το φως θα εξαφανισθεί στο σημείο Α.

Λύση: Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα, αρχικά οι δυο ίνες είναι ευθυγραμμισμένες και εκπέμπουν το ίδιο φωτεινό κύμα $y_1 = Asin(kx - \omega t)$ και $y_2 = Asin(kx - \omega t)$ που σημαίνει ότι η συμβολή τους στο σημείο Α

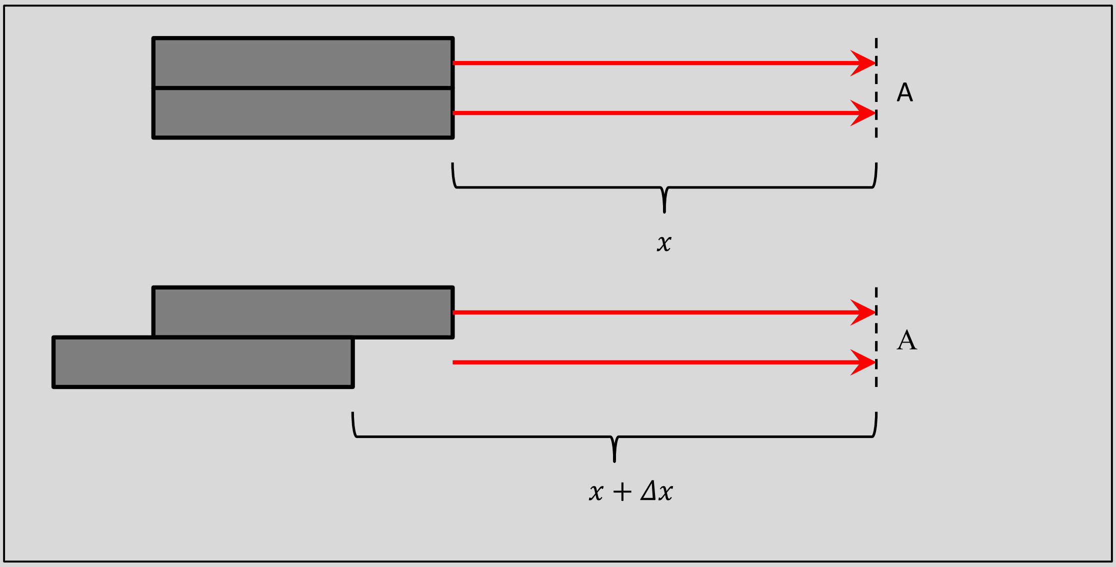
$$y = y_1 + y_2 = 2Asin(kx - \omega t)$$

είναι ενισχυτική με $\varphi = 0$. Όταν η δεύτερη ίνα μετατοπιστεί κατά Δx προς τον αρνητικό άξονα x, η απόστασή της από το σημείο Α αυξάνει από x σε $x + \Delta x$. Επομένως ενώ το κύμα της 1ης ίνας παραμένει το ίδιο $y_1 = Asin(kx - \omega t)$, αυτό της 2ης ίνας αλλάζει σε

$$y_2 = Asin(kx + k\Delta x - \omega t) = Asin(kx - \omega t + \varphi)$$

όπου $\varphi = k\Delta x$. Η επαλληλία των δυο κυμάτων οδηγεί σε συμβολή σύμφωνα με την Εξ. 12.19. Από την Εξ. 12.20 β, η πρώτη καταστροφική συμβολή εμφανίζεται όταν $\varphi = \pi/2$ δηλαδή $k\Delta x = \pi/2 => 2\pi\Delta x/\lambda = \pi/2$ οπότε $\Delta x = \lambda/4$. Από τα δεδομένα $f = 6 \times 10^{14} Hz$ ενώ η ταχύτητα του φωτός είναι $c = 3 \times 10^8 m/s$ και άρα $\lambda = c/f = 0.5 \times 10^{-6} m$ και $\Delta x = \lambda/4 = 0.175\ \mu m$.

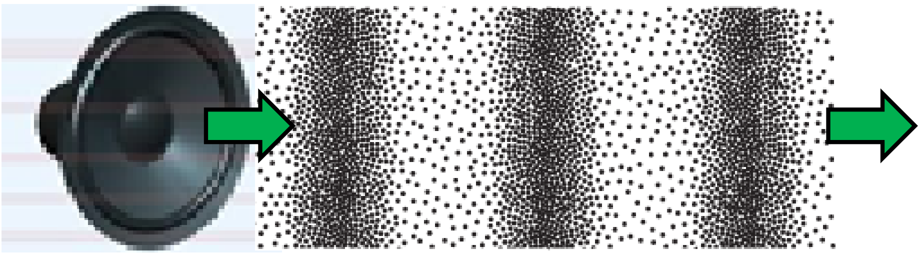
Εάν το Δx συνεχίζει να αυξάνει, η επόμενη καταστροφική συμβολή εμφανίζεται όταν $\varphi = 3\pi/2$ δηλαδή $k\Delta x = 3\pi/2 => \Delta x = 3\lambda/4 = 0.425\ \mu m$.



13. ΗΧΟΣ

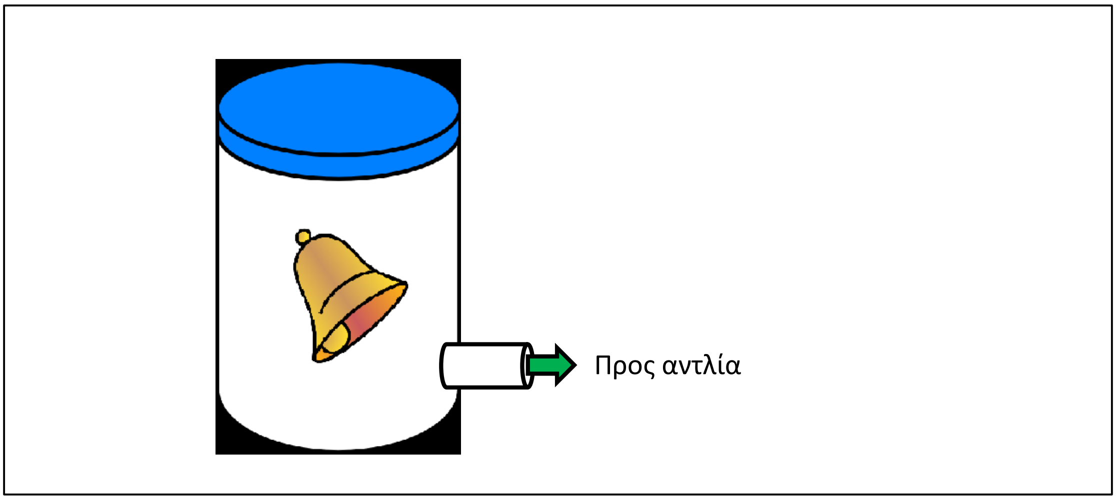
Εισαγωγή - Τι είναι ο Ήχος

Ο ήχος είναι μια περιοδική διαταραχή των μορίων του αέρα η οποία δημιουργείται από μια ταλάντωση ενός μέσου που είναι σε επαφή με τον αέρα, όπως π.χ. η μεμβράνη ενός ηχείου. Η ταλάντωση αυτή διαδίδεται στον αέρα και άρα ο ήχος είναι ένα κύμα. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 13.1, στον αέρα σχηματίζονται διαδοχικά πυκνώματα και αραιώματα τα οποία ταξιδεύουν με την ταχύτητα του ήχου. Κάποια από αυτά τα κύματα φτάνουν στο ανθρώπινο αυτί το οποίο κάνει το αντίθετο από ότι το ηχείο, έχει δηλαδή μια μεμβράνη, το γνωστό μας "τύμπανο του αυτιού", το οποίο διεγείρεται από το κύμα και πάλλεται στην ίδια συχνότητα με αυτό και έτσι ο νους αντιλαμβάνεται τον ήχο.



Σχήμα 13.1

Απόδειξη ότι το μέσο του ηχητικού κύματος είναι ο αέρας είναι το πείραμα που φαίνεται στο Σχήμα 13.2. Κλείνουμε μια πηγή ήχου μέσα σε αεροστεγές δοχείο. Εάν η πηγή είναι ισχυρή, θα ακούγεται και εκτός δοχείου. Εάν όμως αφαιρεθεί ο αέρας του δοχείου με τη βοήθεια μιας αντλίας αέρα, τότε η πηγή δεν ακούγεται, όσο ισχυρή και εάν είναι.

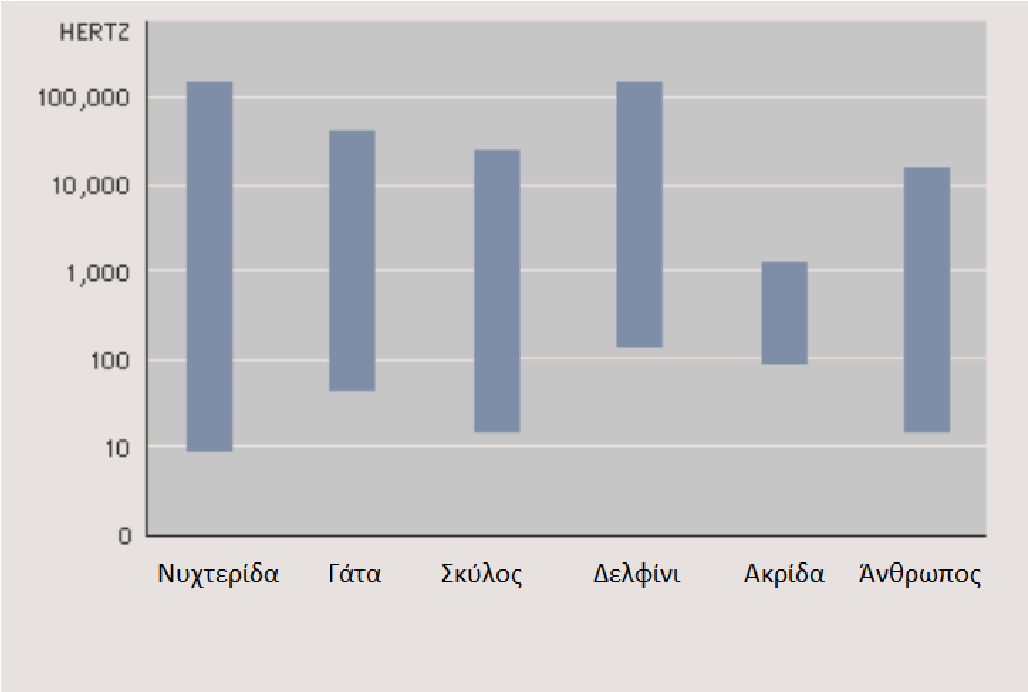


Σχήμα 13.2

Γενικά στα κύματα ισχύει ότι η συχνότητα του κύματος είναι ίση στην ουσία με τη συχνότητα της πηγής. Έτσι διάφορες ταλαντώσεις στην καθημερινή μας ζωή προκαλούν ηχητικά κύματα διαφόρων συχνοτήτων. Μπορεί το αυτί μας να ακούσει όλους αυτούς τους θορύβους; ¨όπως και με την περίπτωση του φωτός όπου το μάτι αντιλαμβάνεται μόνο ένα μέρος του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, έτσι και το αυτί μπορεί να ακούσει μόνο τις συχνότητες f στην εξής περιοχή, γνωστή ως περιοχή των **ακουστικών συχνοτήτων**:

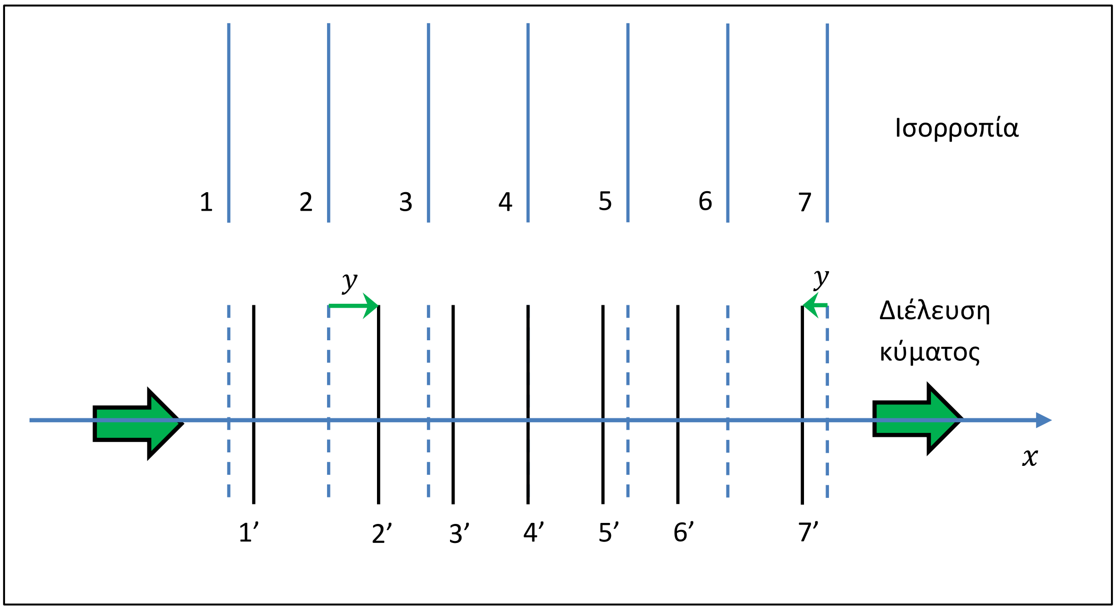
$$20\,Hz < f < 20\,kHz$$

Οι ήχοι κάτω από αυτή την περιοχή ονομάζονται **υπόηχοι** ενώ πάνω από αυτή ονομάζονται **υπέρηχοι**. Στο Σχήμα 13.3 φαίνονται το φάσμα των ακουστικών συχνοτήτων του ανθρώπου καθώς και μερικών ζώων. Η συχνότητα είναι γνωστή και ως "τόνος" στους μουσικούς.



Στο Σχήμα 13.3

Στο Σήμα 13.4 απεικονίζονται επίπεδα με μόρια του αέρα πριν την εμφάνιση του κύματος (πάνω μέρος) και κατά τη διέλευση του κύματος (κάτω μέρος). Τα επίπεδα μετατοπίζονται παράλληλα με την διεύθυνση διάδοσης του κύματος δηλαδή ο ήχος είναι εγκάρσιο κύμα. Ορίζουμε ως y την απομάκρυνση των μορίων από την θέση ισορροπίας τους. Π.χ. στο σχήμα 13.4 στο κάτω μέρος, φαίνεται ένα συγκεκριμένο στιγμιότυπο όπου το επίπεδο 2 έχει μετατοπιστεί στη θέση 2’ και η μετατόπισή του y είναι θετική και μέγιστη. Αντιθέτως το επίπεδο 7’ έχει μικρότερη και αρνητική μετατόπιση γιατί έχει μετακινηθεί προς τα αριστερά εν σχέσει με την αρχική του θέση 7.



Σχήμα 13.4

Εάν το κύμα είναι αρμονικό, τότε η απομάκρυνση των μορίων από την θέση ισορροπίας τους θα δίνεται από την

$y = Asin(kx - \omega t)$	ΑΠΟΜΑΚΡΥΝΣΗ ΜΟΡΙΩΝ ΑΕΡΑ	(13.1)

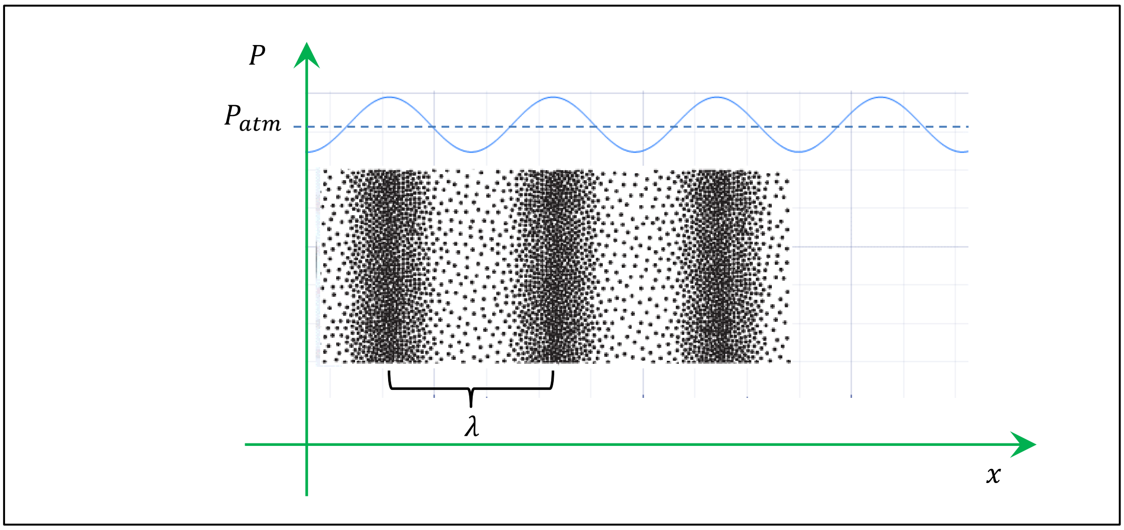
όπου όπως γνωρίζουμε από το προηγούμενο κεφάλαιο, το A είναι το πλάτος (σε μονάδες μήκους), το k ο κυματάριθμος και ω η κυκλική συχνότητα του κύματος. Αυτή η τοπική διαταραχή των μορίων του αέρα έχει σαν αποτέλεσμα την διαταραχή της πυκνότητάς τους. Για παράδειγμα στο στιγμιότυπο του Σχήματος 13.4 βλέπουμε ότι κοντά στη θέση ισορροπίας του επιπέδου 2, η πυκνότητα είναι χαμηλή αφού τα μόρια έχουν μετατοπιστεί κατά το μέγιστο στη θέση 2'. Αντιθέτως, τα μόρια του επιπέδου 4 έχουν παραμείνει στην θέση τους και έτσι η πυκνότητα εκεί είναι μέγιστη. Αυτό σημαίνει ότι τα μέγιστα της απομάκρυνσης αντιστοιχούν σε ελάχιστα της πυκνότητας (και αντιστρόφως). Σε ένα αέριο, η πίεση είναι ανάλογη της πυκνότητας και επομένως μπορούμε να πούμε και το ίδιο και για την πίεση, ότι τα μέγιστα της απομάκρυνσης αντιστοιχούν σε ελάχιστα της πίεσης. Αυτό σημαίνει ότι οι μεταβολές της πίεσης ΔP είναι 90^0 εκτός φάσης εν σχέσει με την απομάκρυνση δηλαδή

$\Delta P = -P_0 cos(kx - \omega t)$	ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΠΙΕΣΗΣ ΑΕΡΑ	(13.2)

(για το μείον δες την απόδειξη παρακάτω) όπου P_0 είναι το πλάτος σε μονάδες πίεσης. Βέβαια οι μεταβολές της πίεσης λόγω ηχητικών κυμάτων είναι πολύ μικρές εν σχέσει με την ατμοσφαιρική πίεση P_{atm} και απλά την διαμορφώνουν ελαφριά, δηλαδή για την συνολική πίεση P ισχύει

$P = P_{atm} - P_0 cos(kx - \omega t)$	ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΠΙΕΣΗΣ ΑΕΡΑ	(13.3)

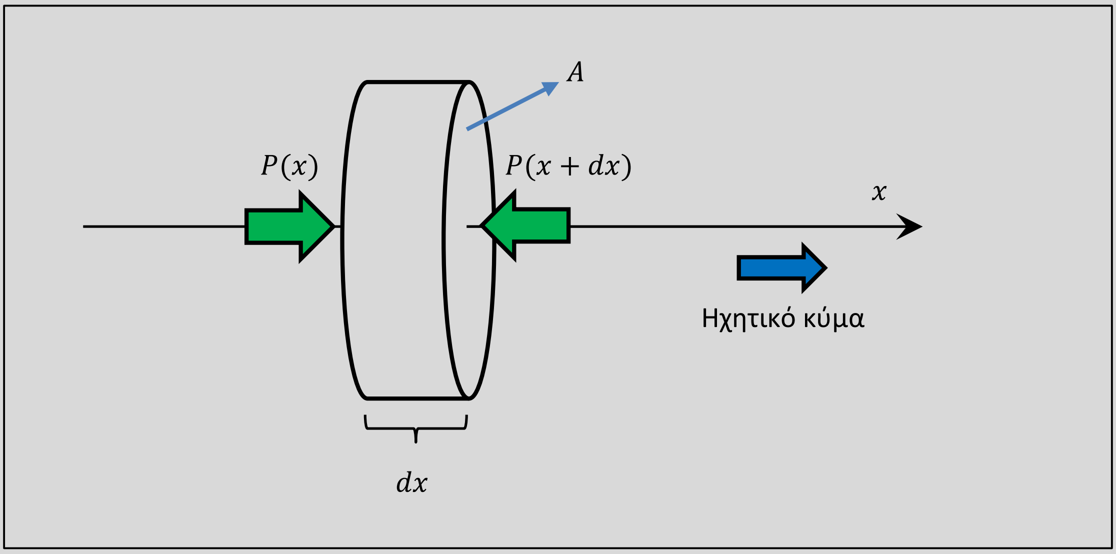
όπου $P_0 \ll P_{atm}$. Το Σχήμα 13.5 απεικονίζει τις μεταβολές αυτές της πίεσης. Βλέπουμε ότι ορίζεται και πάλι το μήκος κύματος λ από ένα μέγιστο της πίεσης έως και το επόμενο μέγιστο.



Σχήμα 13.5

Απόδειξη της Εξ. 13.3. Θεωρήστε στο Σχήμα 13.6 ένα στρώμα αέρα κάθετο στη διάδοση ενός ηχητικού κύματος κατά την κατεύθυνση $+x$, με τις δυο επιφάνειές του στις θέσεις x και $x + dx$ και εμβαδού A η καθεμία. Η πίεση στα αριστερά του στρώματος ισούται με $P(x)$ ενώ από τα δεξιά ισούται με $P(x + dx)$. Εφόσον η δύναμη σε μια επιφάνεια A ισούται με $F = PA$, η συνολική δύναμη στο στρώμα του αέρα ισούται με

$$dF = P(x)A - P(x + dx)A$$



Σχήμα 13.6

Σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα, αυτή δύναμη προκαλεί επιτάχυνση a στο στρώμα που δίνεται από την

$$dF = adm$$

όπου dm είναι η μάζα του στρώματος. Ο όγκος του στρώματος ισούται με Adx και άρα η μάζα του είναι $dm = \rho Adx$ όπου ρ η πυκνότητα του αέρα. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα γίνεται:

$$\frac{P(x) - P(x + dx)}{dx} = a\rho => -\frac{\partial P}{\partial x} = a\rho$$

Εφόσον η οριζόντια μετατόπιση του στρώματος του αέρα ισούται με $y = A\,sin(kx - \omega t)$, τότε η επιτάχυνσή του ισούται με

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -A\,\omega^2 sin(kx - \omega t)$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη έκφραση οδηγεί στην

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho A\,\omega^2 sin(kx - \omega t)$$

Από όπου με ολοκλήρωση ως προς x προκύπτει η

$$P = -\frac{\rho A\omega^2}{k} cos(kx - \omega t) + c$$

Η c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης η οποία ισούται με την ατμοσφαιρική πίεση P_{atm}. Από την κυματική σχέση $v = \omega/k$ παίρνουμε

$$P = P_{atm} - P_0\,cos(kx - \omega t)$$

όπου θέσαμε $P_0 = \rho A\omega v$.

Ταχύτητα του ήχου

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η ταχύτητα του ήχου σε στερεά δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΗΧΟΥ ΣΤΕΡΕΑ	(13.4)

όπου E είναι το Μέτρο Ελαστικότητας του Young και ρ η πυκνότητα (δες πίνακες με τιμές των E και ρ στο προηγούμενο κεφάλαιο). Στα ρευστά (υγρά και αέρια) ισχύει μια παρόμοια σχέση αλλά η παράμετρος E συμβολίζεται ως B η οποία βέβαια έχει την ίδια έννοια με το E, δηλαδή εκφράζει την αντίσταση του ρευστού στην συμπίεση (μεταβολή του όγκου):

$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$	ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΗΧΟΥ ΡΕΥΣΤΑ	(13.5)

Το B ονομάζεται "Μέτρο Ελαστικότητας του ρευστού" και έχει τις ίδιες μονάδες όπως και το E δηλαδή τα $Pascal$. Για τα ιδανικά αέρια αυτή η σχέση οδηγεί στην

$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_A}}$	ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΗΧΟΥ ΙΔΑΝΙΚΟ ΑΕΡΙΟ	(13.6)

όπου γ μια σταθερά που παίρνει τις τιμές $5/3$ για μονοατομικά και $7/5$ για διατομικά αέρια, $R = 8.314\ J/mol \cdot K$ η παγκόσμια σταθερά των αερίων και T η θερμοκρασία σε βαθμούς $Kelvin$ ($T = \theta + 273$ όπου θ η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου). Το M_A είναι το Μοριακό βάρος του αερίου, δηλαδή η μάζα ενός γραμμομορίου (συνήθως σε γραμμάρια αλλά στον παραπάνω τύπο πρέπει να χρησιμοποιηθούν kg). Όπως φαίνεται στον παρακάτω Πίνακα 13.1, ο αέρας που μας περιβάλλει αποτελείται χονδρικά από 80% άζωτο και 20% οξυγόνο συν κάποια μικρά ποσοστά από άλλα αέρια. Επειδή αυτά τα δυο αέρια είναι διατομικά, $\gamma = 7/5$ και από τον πίνακα το μέσο μοριακό βάρος είναι $M_A = 28.97\ g$

Πίνακας 13.1: Σύσταση Αέρα

Συστατικά	%	*M_A (g/mol)*	(Γινόμενο)
Οξυγόνο	21	32.00	6.704
Άζωτο	78	28.02	21.88
Διοξείδιο του Άνθρακα	0.03	44.01	0.013
Υδρογόνο	0.00005	2.02	0
Αργό	1	39.94	0.373
Νέο	0.0018	20.18	0
Ήλιο	0.0005	4.00	0
Κρυπτό	0.0001	83.8	0
Ξένο	$0.09\ 10^{-4}$	131.29	0
Μοριακή μάζα Αέρα– M_A			28.97

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση τις τιμές του αέρα για $\theta = 0^0 => T = 273\ K$ οδηγεί στο αποτέλεσμα

$v = 331\ m/s$	ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΗΧΟΥ στο $\theta = 0^0$	(13.7)

Μια πρακτική σχέση προκύπτει από την Εξ. 13.6 εάν πάρουμε λόγους σε δυο διαφορετικές θερμοκρασίες:

$$\frac{v(\theta)}{v(0)} = \frac{\sqrt{\frac{\gamma R(\theta + 273)}{M_A}}}{\sqrt{\frac{\gamma R \times 273}{M_A}}}$$

δηλαδή

$v(\theta) = 331\sqrt{\frac{\theta + 273}{273}}\ m/s$	ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΗΧΟΥ ΣΕ ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ θ	(13.8)

Παράδειγμα 13.1

Να υπολογισθεί η ταχύτητα του ήχου στους $\theta = 10^0$, 23^0 και 50^0.

Λύση: Από την Εξ. 13.8 έχουμε:

Στους $\theta = 10^0$, $v = 337\ m/s$

στους $\theta = 23^0$, $v = 347\ m/s$

στους $\theta = 50^0$, $v = 360\ m/s$

Παράδειγμα 13.2

Μετατρέψτε τα την ταχύτητα του ήχου στο $\theta = 10^0$ σε km/h

Λύση:

$$331\frac{m}{s} = 331\frac{\frac{1}{1000}km}{\frac{1}{3600}h} = 1190\frac{km}{h}$$

Αυτή είναι μια πολύ μεγάλη ταχύτητα την οποία μόνο υπερσύγχρονα υπερηχητικά αεροσκάφη μπορούν να την ξεπεράσουν! Η ταχύτητα του ήχου είναι γνωστή ως μονάδα με το όνομα “Mach”. Τα υπερηχητικά αεροσκάφη αναπτύσσουν ταχύτητες 2-3 Mach.

Παράδειγμα 13.3,

Ένα ηχητικό κύμα το οποίο εκπέμπεται από ένα πλοίο προς το βυθό της θάλασσας, ανακλάται και επιστρέφει σε $0.6\,s$. Ποιο είναι το βάθος της θάλασσας στο συγκεκριμένο σημείο; Το μέτρο ελαστικότητας του θαλάσσιου νερού είναι $B = 2.1 \times 10^9 Pa$ και η πυκνότητά του $1030\ kg/m^3$

Λύση:

Από τα δεδομένα $t' = 0.6\ s, B = 2.1 \times 10^9 Pa$ και $\rho = 1030\ kg/m^3$ μπορούμε να υπολογίσουμε την ταχύτητα του ήχου στο θαλάσσιο νερό

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} = \sqrt{\frac{2.1 \times 10^9}{1030}} = 1430\ m/s$$

Για να καλύψει ο ήχος το βάθος της θάλασσας χρειάζεται τον μισό χρόνο από τον χρόνο του συνολικού ταξιδιού:

$$t = \frac{0.6}{2} = 0.3\ s$$

Έτσι το βάθος ισούται με

$$h = vt = 1430 \times 0.3 = 429\ m$$

Ένταση του Ήχου

Το αυτί μας αντιλαμβάνεται τις χαμηλές συχνότητες ως βαρύτονους ήχους (μπάσους) ενώ τις υψηλές συχνότητες ως υψίτονες. Εκτός από την συχνότητα, το αυτί αντιλαμβάνεται και το πόσο δυνατός είναι ένας ήχος. Η σχετική φυσική ποσότητα που αντιλαμβάνεται το αυτί ονομάζεται **ένταση του ήχου** και ορίζεται ως η ισχύς p (χρησιμοποιούμε το μικρό γράμμα p για να αποφεύγεται η σύγχυση με την πίεση P) δια της επιφάνειας που διαπερνάει ο ήχος:

$I = \frac{p}{A}$	ΕΝΤΑΣΗ ΤΟΥ ΗΧΟΥ	(13.8)

Θυμηθείτε από το προηγούμενο κεφάλαιο ότι η ισχύς ισούται με την ενέργεια του κύματος ανά μονάδα χρόνου σε μονάδες $Watts$ και έτσι οι μονάδες της έντασης είναι τα W/m^2.

Παράδειγμα 13.4: Ένα στερεοφωνικό σύστημα ήχου αποδίδει 32 W ισχύος σε κάθε ένα από τα δυο του ηχεία. Εάν οι διαστάσεις των ηχείων είναι $30 \times 15\ cm^2$ να βρεθεί η ένταση του ήχου κοντά στα ηχεία.

Λύση:

Το εμβαδό του κάθε ηχείου ισούται με

$$A = 30 \times 15 = 450\ cm^2 = 0.045\ m^2$$

Επομένως η ένταση ισούται με

$$I = \frac{p}{A} = \frac{32}{0.045} = 711\ W/m^2$$

<u>Παράδειγμα 13.5</u>: Τα ακουστικά ενός φορητού υπολογιστή λαμβάνουν συνήθως ισχύ στην περιοχή $10 - 20\, mW$ από τον υπολογιστή. Ποια είναι η αντίστοιχη ένταση που αντιλαμβάνεται ένα μέσο ανδρικό αυτί όταν χρησιμοποιεί τέτοια ακουστικά; Από ανθρωπολογικά δεδομένα γνωρίζουμε ότι οι διαστάσεις ενός μέσου ανδρικού αυτιού είναι $4.5\ cm$ επί $2.5\ cm$.

<u>Λύση</u>: Το εμβαδό του κάθε αυτιού ισούται με

$$A = 4.5 \times 2.5 = 11.25\ cm^2 = 1.125 \times 10^{-3}\ m^2$$

Η αντίστοιχη ένταση σε αυτά τα δυο όρια είναι

$$I_1 = \frac{p_1}{A} = \frac{10 \times 10^{-3}}{1.125 \times 10^{-3}} = 8.9\ W/m^2$$

$$I_2 = \frac{p_2}{A} = \frac{20 \times 10^{-3}}{1.125 \times 10^{-3}} = 17.7\ W/m^2$$

Στον Πίνακα 13.2 εμφανίζονται κάποιες τυπικές τιμές έντασης. Όπως βλέπουμε, η ένταση του ήχου καλύπτει ένα τεράστιο εύρος τιμών. Για τον λόγο αυτό, είναι ευκολότερο να χρησιμοποιούμε λογαρίθμους με βάση το δέκα αφού μετατρέπουν μια πολύ μικρή τιμή η μια πολύ μεγάλη τιμή σε ένα πιο εύχρηστο αριθμό, π.χ. $log(0.0001) = -4$ ενώ $log(1000) = 3$ και έτσι π.χ. και οι δυο αυτές ακραίες τιμές μπορούν να μπουν στην ίδια γραφική παράσταση.

Πίνακας 13.2: Τυπικές τιμές έντασης του ήχου

	$I(W/m^2)$
Όριο Ακοής	10^{-12}
Θρόισμα Φύλλων	10^{-11}
Ψίθυρος	10^{-10}
Ραδιόφωνο κινητό	10^{-8}
Συζήτηση	10^{-6}
Θόρυβος δρόμου	0.0001
Υπόγειος	0.01
Όριο Πόνου	1
Αεριωθούμενος Κινητήρας	100

Όταν χρησιμοποιούνται λογάριθμοι για να περιγράψουν την ένταση του ήχου, τότε η αντίστοιχη κλίμακα ονομάζεται κλίμακα "Decibel" και υπολογίζεται σύμφωνα με τον τύπο:

$\beta = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$	ΚΛΙΜΑΚΑ Decibel	(13.9)

όπου $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ είναι η ένταση που αντιστοιχεί στο όριο ακοής του ανθρώπινου αυτιού. Η ποσότητα β γνωστή και ως "επίπεδο έντασης" παρόλο που είναι αδιάστατη, εντούτοις συνηθίζουμε να μιλάμε για τιμές σε Decibel, ή dB εν συντομία, όταν αναφερόμαστε σε αυτήν.

Παράδειγμα 13.6. Μετατρέψτε τις τιμές της έντασης του Πίνακα 13.2 σε Decibel

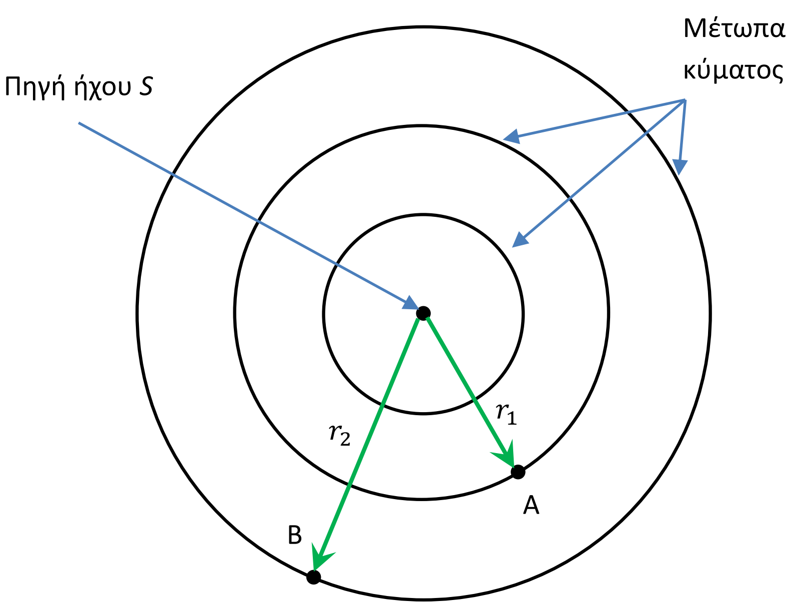
Λύση: Από την Εξ. 13.9 έχουμε τον παρακάτω πίνακα

	$I(W/m^2)$	$\beta = 10 \cdot \log_{10}\dfrac{I}{I_0}$
Όριο Ακοής	10^{-12}	0
Θρόισμα Φύλλων	10^{-11}	10
Ψίθυρος	10^{-10}	20
Ραδιόφωνο κινητό	10^{-8}	40
Συζήτηση	10^{-6}	60
Θόρυβος δρόμου	0.0001	80
Υπόγειος	0.01	100
Όριο Πόνου	1	120
Αεριωθούμενος Κινητήρας	100	140

Έτσι μια τυπική συζήτηση είναι π.χ. στα $60 - 65\ dB$.

Εξάρτηση της Έντασης από την απόσταση

Θεωρήστε την πηγή S στο Σχήμα 13.7 η οποία εκπέμπει ηχητικά κύματα. Ως γνωστό ο ήχος ταξιδεύει προς όλες τις κατευθύνσεις και έτσι τα μέτωπα του κύματος είναι σφαιρικά και αυξάνουν την ακτίνα τους όσο περνάει η ώρα. Εάν η πηγή εκπέμπει με σταθερή ισχύ p τότε ποια είναι η ένταση του ήχου σε δυο διαφορετικά σημεία Α και Β που απέχουν απόσταση r_1 και r_2 αντίστοιχα από την πηγή;



Σχήμα 13.7

Η ισχύς της πηγής κατανέμεται σε όλο το σφαιρικό μέτωπο. Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το εμβαδό μιας σφαίρας ακτίνας r είναι $4\pi r^2$ οπότε η ένταση σε ένα σφαιρικό μέτωπο που απέχει απόσταση r από την πηγή ισούται με:

$I = \dfrac{P}{4\pi r^2}$	ΕΝΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΑΚΗΣ ΠΗΓΗΣ	(13.10)

Βλέπουμε ότι η ένταση φθίνει με την απόσταση από την πηγή όπως γνωρίζουμε και από την καθημερινή μας εμπειρία. Παίρνοντας λόγους, οι εντάσεις στα σημεία Α και Β σχετίζονται μέσω της:

$\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{r_2^2}{r_1^2}$	ΣΧΕΤΙΚΗ ΕΝΤΑΣΗ	(13.11)

Παράδειγμα 13.8.

Ποιο είναι το επίπεδο έντασης μιας πηγής με ένταση 4×10^{25} W/m^2 ?

Λύση:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\frac{I}{I_0} = \beta = 10 \cdot \log_{10}\frac{4 \times 10^{25}}{10^{-12}} = 376\ dB$$

Παράδειγμα 13.9.

Ένας ήχος 60-dB μετριέται σε μια απόσταση από μια σφυρίχτρα. Ποια είναι η έντασή της σε W/m^2?

Λύση:

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\frac{I}{I_0}$$

$$60 = 10 \cdot \log_{10}\frac{I}{I_0}$$

$$6 = \log_{10}\frac{I}{I_0}$$

$$\frac{I}{I_0} = 10^6$$

$$I = 10^6 \times I_0 = 10^6 \times 10^{-12} = 10^{-6}\ W/m^2$$

Παράδειγμα 13.10.

Μια ομοιόμορφη πηγή εκπέμπει ήχους με ισχύ 60 W. Ποιο είναι το επίπεδο έντασης του ήχου στα 4 m από την πηγή;

Λύση:

Από την Εξ. 13.10:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{60}{4\pi \times 4^2} = 0.30\ W/m^2$$

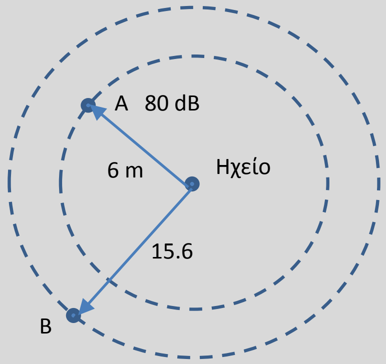
Το επίπεδο έντασης ισούται με

$$\beta = 10 \cdot \log_{10}\frac{I}{I_0} = \beta = 10 \cdot \log_{10}\frac{0.30}{10^{-12}} = 115\ dB$$

Παράδειγμα 13.11.

Το επίπεδο έντασης 6 m από ένα ηχείο είναι 80 dB. Ποιο είναι το επίπεδο έντασης σε απόσταση 15.6 m από το ίδιο ηχείο?

Λύση:



Βήμα 1: Βρείτε την ένταση στο σημείο A:

$$\beta_A = 10 \cdot \log_{10}\frac{I_A}{I_0} => 80 = 10 \cdot \log_{10}\frac{I_A}{10^{-12}} => I_A = 10^{-4}\ W/m^2$$

Βήμα 2: Βρείτε την ένταση στο σημείο B από την Εξ. 13.11:

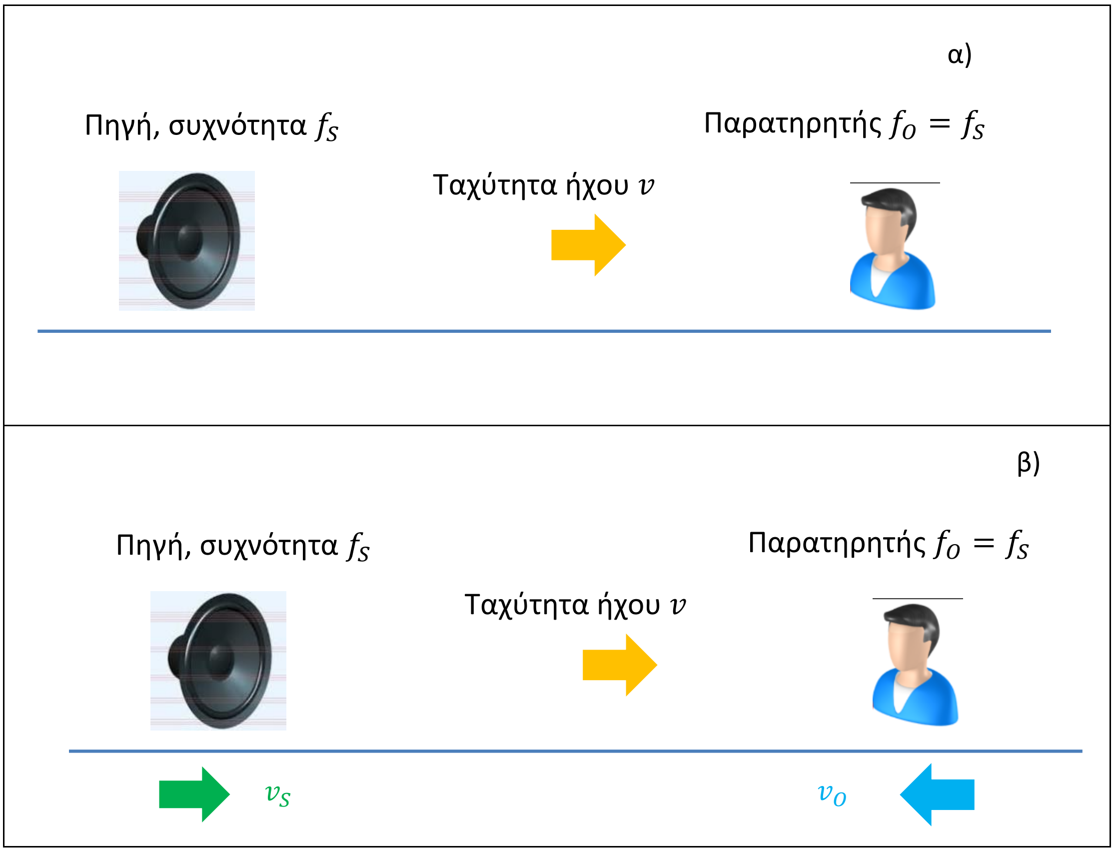
$$\frac{I_B}{I_A} = \frac{r_A^2}{r_B^2} => \frac{I_B}{10^{-4}} = \frac{6^2}{15.6^2} => I_B = 1.47 \times 10^{-5}\ W/m^2$$

Step 3: Βρείτε το β στο σημείο B:

$$\beta_B = 10 \cdot \log_{10}\frac{I_B}{I_0} = \beta = 10 \cdot \log_{10}\frac{0.301.47 \times 10^{-5}}{10^{-12}} = 71\ dB$$

Φαινόμενο Doppler

Θεωρήστε μια πηγή ήχου όπως το ηχείο στο Σχήμα 13.8α που εκπέμπει με συχνότητα f_S και ένα παρατηρητή που δέχεται το ηχητικό κύμα της πηγής. Όπως προαναφέρθηκε, η συχνότητα του κύματος και άρα και αυτή που ακούει ο χρήστης f_O είναι ίδια με την συχνότητα της πηγής δηλαδή $f_O = f_S$. Το ηχητικό κύμα ταξιδεύει με την ταχύτητα του ήχου.



Σχήμα 13.8: Φαινόμενο Doppler α) Ακίνητη πηγή και παρατηρητής και β) Κινούμενη πηγή και παρατηρητής

Τα πράγματα όμως αλλάζουν εάν η πηγή κινείται με ταχύτητα v_S ή/και ο παρατηρητής με ταχύτητα v_O και η συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής δίνεται από την σχέση:

$f_O = \frac{v + v_O}{v - v_S} f_S$	Συχνότητα Doppler	(13.12)

Παρατηρήστε ότι εάν $v_O = v_S = 0$ τότε $f_O = f_S$ όπως αναμένεται. Η σύμβαση των προσήμων στην παραπάνω σχέση δεν είναι αυτή που χρησιμοποιούμε συνήθως (π.χ. θετικές ταχύτητες προς τα δεξιά) αλλά χρησιμοποιείται μια κάπως ιδιαίτερη σύμβαση ως εξής:

Σύμβαση προσήμων στο φαινόμενο Doppler:

$v_S > 0$ όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή

$v_S < 0$ όταν η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή

$v_O > 0$ όταν ο παρατηρητής πλησιάζει την πηγή

$v_O < 0$ όταν ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή

Γενικά μπορούμε να πούμε ότι οι ταχύτητες είναι θετικές όταν προσεγγίζουν την άλλη πλευρά. Στα παρακάτω παραδείγματα θεωρήστε ότι η θερμοκρασία είναι $\theta = 20^0$ οπότε η ταχύτητα του ήχου είναι

$$v = 331\sqrt{\frac{\theta + 273}{273}} = 343\ m/s$$

Παράδειγμα 13.12.

Μια στατική πηγή εκπέμπει σήμα συχνότητας 290 Hz . Ποια είναι η συχνότητα που ακούει ένας παρατηρητής εάν κινείται με ταχύτητα 20 m/s α) προς την πηγή και β) αντίθετα προς την πηγή;

Λύση: Από τα δεδομένα

$$f_S = 290\ Hz$$

Στατική πηγή σημαίνει $v_S = 0$ και έτσι η Εξ. 13.12 γίνεται

$$f_O = \frac{V + v_O}{V} f_S$$

Σύμφωνα με την σύμβαση των προσήμων έχουμε:

α) Ο παρατηρητής πλησιάζει την πηγή: $v_O = +20\ m/s$

$$f_O = \frac{343 + 20}{343} 290 = 307\ Hz$$

β) Ο παρατηρητής απομακρύνεται από την πηγή: $v_O = -20\ m/s$

$$f_O = \frac{343 - 20}{343} 290 = 273\ Hz$$

Παράδειγμα 13.13. Ένας οδηγός σε σταθμευμένο αυτοκίνητο σε κάποιο δρόμο βλέπει ένας φίλο του να περνάει με το αυτοκίνητό του στον ίδιο δρόμο με ταχύτητα $60\,km/h$ και χρησιμοποιεί την $400\,Hz$ κόρνα του για να τον χαιρετίσει. Ποια συχνότητα ακούει ο φίλος του;

Λύση: Επειδή η ταχύτητα του ήχου είναι σε m/s πρέπει να μετατρέψουμε την ταχύτητα του οδηγού στις ίδιες μονάδες:

$$v_O = 60\frac{km}{h} = 60\frac{1000}{3600} = \frac{60}{3.6} = 16.7\frac{m}{s}$$

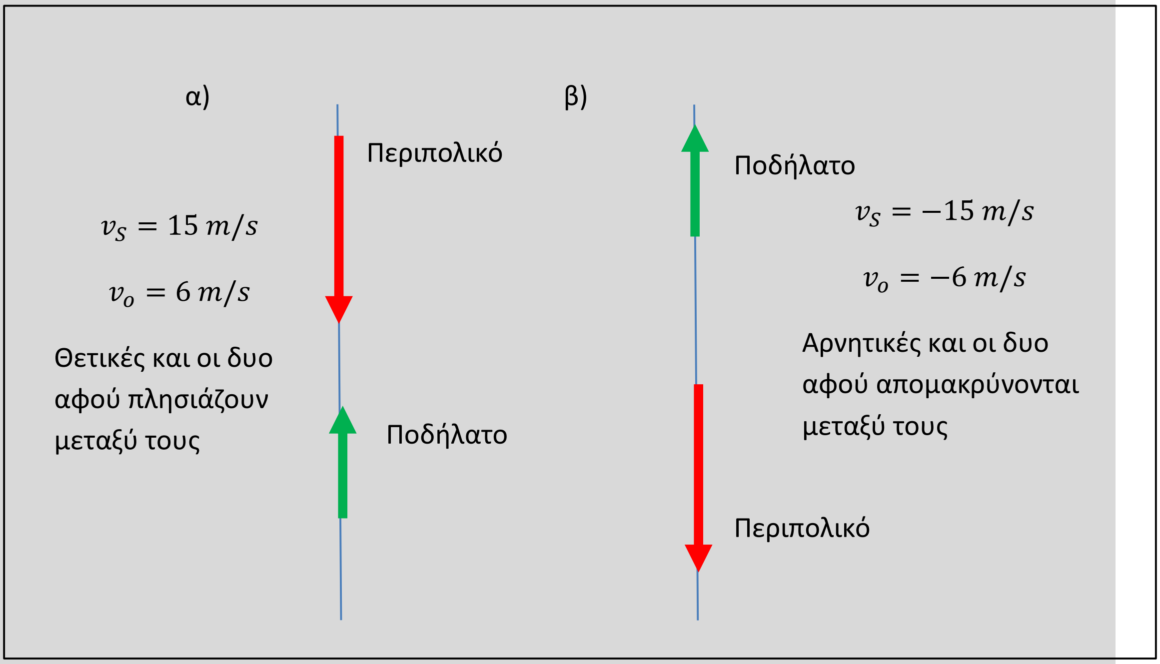
Δεν γνωρίζουμε εάν ο δεύτερος οδηγός, ο οποίος είναι ο παρατηρητής, πλησιάζει ή απομακρύνεται από τον σταθμευμένο οδηγό οπότε πρέπει να πάρουμε και τις δυο περιπτώσεις: Εάν δεν έχει περάσει ακόμα το σταθμευμένο αυτοκίνητο, πλησιάζει προς αυτό και έτσι $v_0 > 0$. Αντίθετα εάν έχει περάσει το σταθμευμένο αυτοκίνητο, απομακρύνεται από αυτό και έτσι $v_0 < 0$: Οι δυο περιπτώσεις οδηγούν στο αποτέλεσμα:

$$f_O = \frac{343 + 16.7}{343}400 = 419\,Hz$$

$$f_O = \frac{343 - 16.7}{343}400 = 381\,Hz$$

Παράδειγμα 13.14. Ένας ποδηλάτης που κινείται βόρεια με $6\,m/s$ ακούει μια σειρήνα περιπολικού που κινείται νότια με $15\,m/s$. Εάν η κόρνα εκπέμπει σήμα $600\,Hz$, ποια είναι η συχνότητα που ακούει ο ποδηλάτης;

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, πρέπει να πάρουμε δυο περιπτώσεις οι οποίες φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



α) Ο ποδηλάτης και το περιπολικό πλησιάζουν μεταξύ τους, δείτε το παραπάνω σχήμα. Τότε και των δυο οι ταχύτητες είναι θετικές σύμφωνα με την σύμβαση της Εξίσωσης 13.12 και έτσι:

$$f_O = \frac{343 + 6}{343 - 15} 600 = 638\,Hz$$

β) Ο ποδηλάτης και το περιπολικό απομακρύνται μεταξύ τους. Τότε και των δυο οι ταχύτητες είναι αρνητικές σύμφωνα με την σύμβαση της Εξίσωσης 13.12 και έτσι:

$$f_O = \frac{343 + (-6)}{343 - (-15)} 600 = 565\,Hz$$

ΤΕΛΟΣ – Δ. Κουζούδης