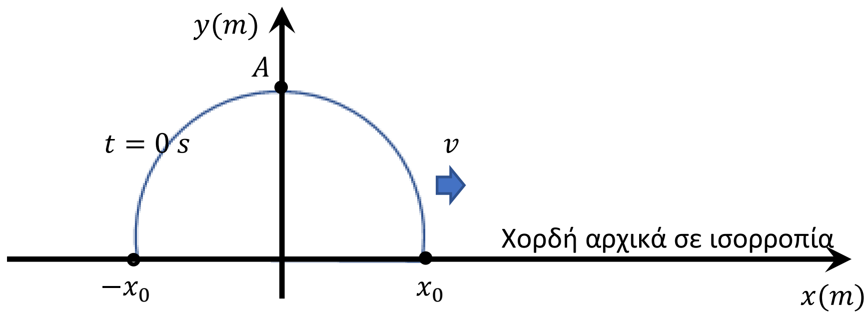
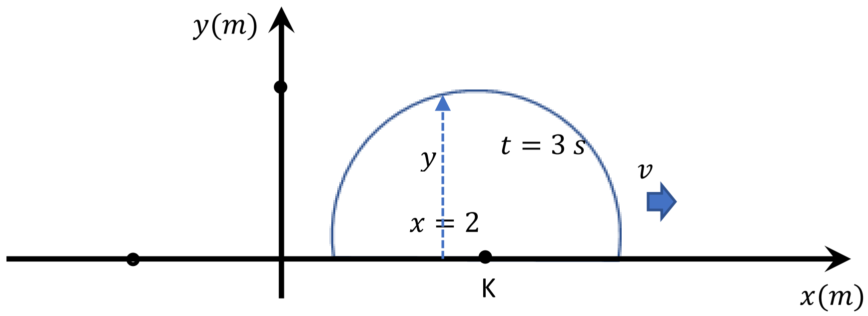
**1.** Λεπτή χορδή απείρου μήκους βρίσκεται τανυσμένη σε ισορροπία επάνω στον άξονα $x$. Ένας εγκάρσιος ημικυκλικός παλμός διέρχεται από αυτήν ο οποίος ταξιδεύει προς τα δεξιά με ταχύτητα ίση με $v = 0.8\ m/s$. Παρακάτω δίνεται το στιγμιότυπο $t = 0$ του παλμού. Εάν η μέγιστη κατακόρυφη απομάκρυνση των μορίων είναι ίση με $A = 0.5\ m$ και το εύρος του παλμού είναι ίσο με $2x_0 = 1\ m$, να βρεθεί η $y$-απομάκρυνση των μορίων της χορδής στο σημείο $x = 2$ κατά την χρονική στιγμή $t = 3\ s$.




Λύση:

Ο παλμός κινείται ως ένα γεωμετρικό σχήμα οπότε το κέντρο του Κ θα φτάσει στο σημείο $x_K = vt = 2.4\ m$ οπότε το υπο-εξέταση σημείο $x = 2$ είναι λίγο πιο αριστερά από αυτό



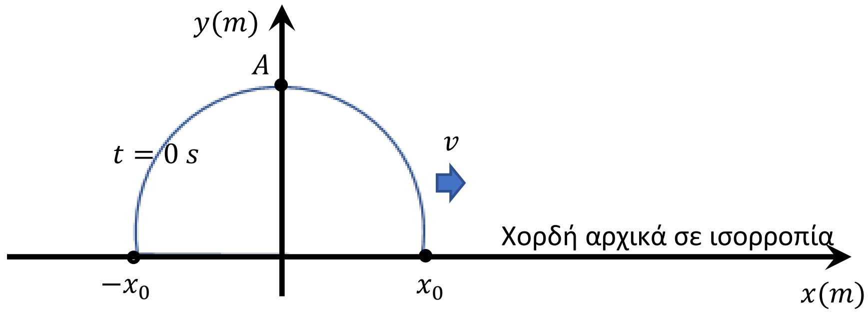

Η εξίσωση του κύκλου είναι εκεί

$$(x - x_K)^2 + y^2 = A^2$$

Για $x = 2$ έχουμε

$$y = \sqrt{A^2 - (x - x_K)^2} = \sqrt{0.5^2 - 0.4^2} = 0.3\ m$$

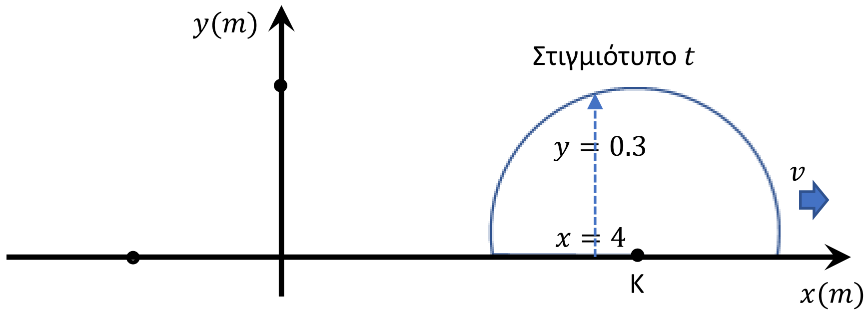
**2.** Στο προηγούμενο πρόβλημα, να βρεθεί σε ποια χρονική στιγμή $t$ η κατακόρυφη απομάκρυνση των μορίων χορδής γίνεται ίση με $y = 0.3\ m$ στο $x = 4\ m$




Λύση:

Είδαμε ότι το κέντρο του Κ θα φτάσει στο σημείο $x_K = vt$ και άρα η εξίσωση του κύκλου είναι

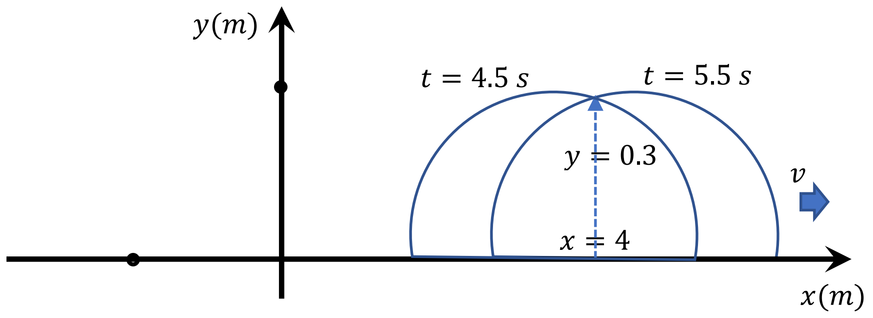
$$(x - vt)^2 + y^2 = A^2$$




Λύνοντας ως προς χρόνο

$$vt = x \pm \sqrt{A^2 - y^2}$$

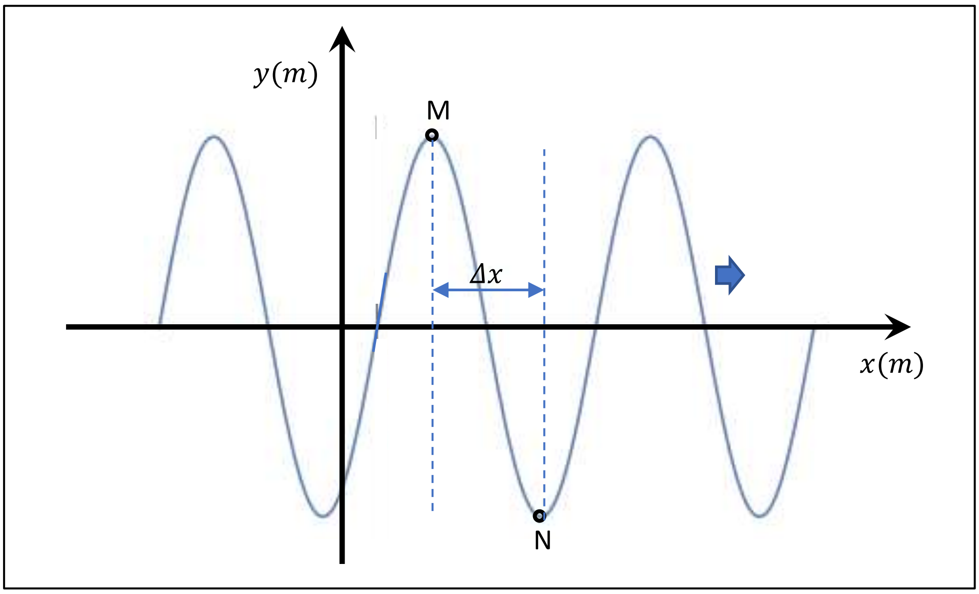
Για $x = 4$ έχουμε $t = 4.5\ s$ ή $t = 5.5\ s$. Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, λόγω της κατακόρυφης συμμετρίας του κύκλου, υπάρχουν δυο στιγμές που $y = 0.3\ m$




**3.** Λεπτή χορδή απείρου μήκους βρίσκεται τανυσμένη σε ισορροπία επάνω στον άξονα $x$. Ένα αρμονικό κύμα διέρχεται από αυτήν το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = Asin\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2} - \frac{t}{4}\right)\right)$$

όπου όλες οι ποσότητες είναι σε μονάδες S.I. Να βρεθεί η οριζόντια απόσταση $\Delta x$ μεταξύ ενός μεγίστου M και του αμέσως επομένου ελαχίστου N




<u>Λύση</u>:

Από την γενική εξίσωση του αρμονικού κύματος

$$y = Asin(kx - \omega t)$$

προκύπτει με σύγκριση

$$k = \frac{\pi}{4}$$

Όμως εξ'ορισμού $k = 2\pi/\lambda$ από όπου λαμβάνουμε ότι

$$\lambda = 8\ m$$

Από μέγιστο στο επόμενο μέγιστο η απόσταση είναι ίση με $\lambda$ και άρα η δεδομένη απόσταση είναι ίση με $\lambda/2$ οπότε

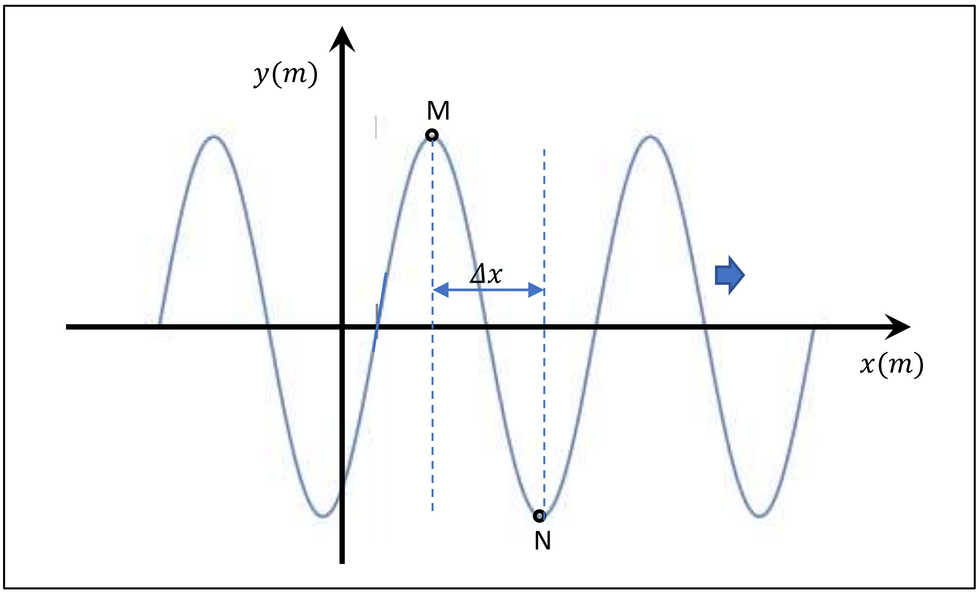
$$\Delta x = 4\ m$$

**4.** Λεπτή χορδή απείρου μήκους βρίσκεται τανυσμένη σε ισορροπία επάνω στον άξονα $x$. Δυο αρμονικά κύματα διέρχονται από αυτήν και περιγράφονται από τις εξισώσεις:

$$y_1 = A_1 sin\left(\frac{\pi}{2}(a_1 x - \beta_1 t)\right)$$

$$y_2 = A_2 sin\left(\frac{\pi}{4}(a_2 x + \beta t)\right)$$

όπου $a_1 = 1\ m^{-1}$, $\beta_1 = 2\ s^{-1}$, $a_2 = 0.5\ m^{-1}$, $A_1 = 0.4\ m$, $A_2 = 0.5\ m$, $\beta$ μια σταθερά σε μονάδες $s^{-1}$, τα $y_1$ και $y_2$ είναι αντίστοιχα η κατακόρυφη απομάκρυνση των μορίων της χορδής από τον άξονα $x$ εάν το καθένα κύμα ήταν μόνο του παρόν στη χορδή, και όλες οι ποσότητες είναι σε μονάδες S.I. Να βρεθεί η κατακόρυφη απομάκρυνση των μορίων της χορδής κατά την χρονική στιγμή $t = 2\ s$ στο $x = 1\ m$




<u>Λύση</u>:

Από την γενική εξίσωση του αρμονικού κύματος

$$y = Asin(kx \pm \omega t)$$

προκύπτει με σύγκριση $k_1 = \pi/2$, $\omega_1 = \pi$, $k_2 = \pi/8$ και $\omega_2 = \beta\pi/4$. Από την αρχή της επαλληλίας

$$y = y_1 + y_2 = A_1 sin\left(\frac{\pi}{2}(x - 2t)\right) + A_2 sin\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{2} + \beta t\right)\right)$$

Πρέπει να βρούμε το $\beta$. Εφόσον τα κύματα διαδίδονται στην ίδια χορδή, πρέπει να έχουν κατ' απόλυτη τιμή την ίδια ταχύτητα. Αφού για αρμονικό κύμα $v = \omega/k$ τότε έχουμε

$$v_1 = v_2$$

η οποία οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$2\beta = 2$$

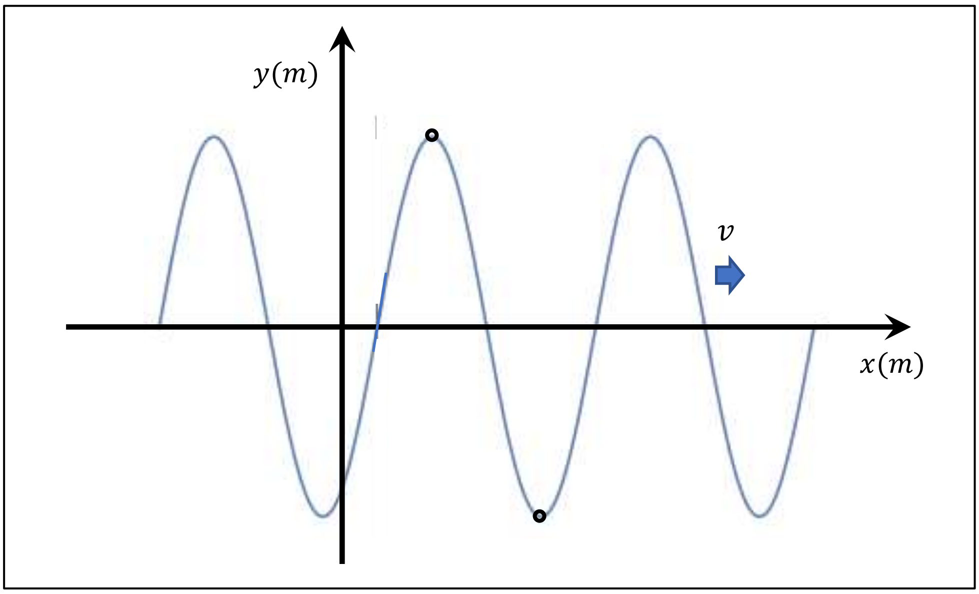
ή $\beta = 1$. Έτσι

$$y = A_1 sin\left(\frac{\pi}{2}(x - 2t)\right) + A_2 sin\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{2} + t\right)\right)$$

Στο $x = 1$ και $t = 2$

$$y = 0.4\ sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - 4)\right) + 0.5\ sin\left(\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2} + 2\right)\right) = 0.862\ m$$

**5.** Λεπτή χορδή απείρου μήκους βρίσκεται τανυσμένη σε ισορροπία επάνω στον άξονα $x$. Ένα αρμονικό κύμα που περιγράφει την κατακόρυφη απομάκρυνση $y$ των μορίων της χορδής από τον άξονα $x$ διέρχεται από αυτήν με ταχύτητα $v = 0.5\ m/s$ προς τα δεξιά έχει πλάτος $4\ cm$ και περίοδο $8\ s$. Εάν στην αρχή των αξόνων ισχύει $y = 0$ όταν $t = 0$, τότε να βρεθεί η κατακόρυφη απομάκρυνση των μορίων της χορδής στο $x = 1\ m$ και $t = 1\ s$




<u>Λύση</u>:

Από την γενική εξίσωση του αρμονικού κύματος

$$y = Asin(kx \pm \omega t)$$

επιλέγουμε το μείον (-) επειδή το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά. Βλέπουμε ότι όντως ισχύει $y = 0$ για $x = 0$ και $t = 0$ (αυτά δίνονται για να αποκλειστεί μια αρχική φάση, δηλαδή θα μπορούσε κάποιος να πάρει την πιο γενική περίπτωση $y = Asin(kx - \omega t + \varphi_0)$ όπου $\varphi_0$ μια σταθερά). Από τα δεδομένα $T = 8\ s$ και άρα $f = 1/8\ Hz$ και

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}\ rad/s$$

Από την θεμελιώδης εξίσωση της κυματικής

$$v = \lambda f$$

βρίσκουμε για το μήκος κύματος

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.5}{1/8} = 4\ m$$

οπότε

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2}\ rad/m$$

Επομένως

$$y = Asin\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}t\right)$$

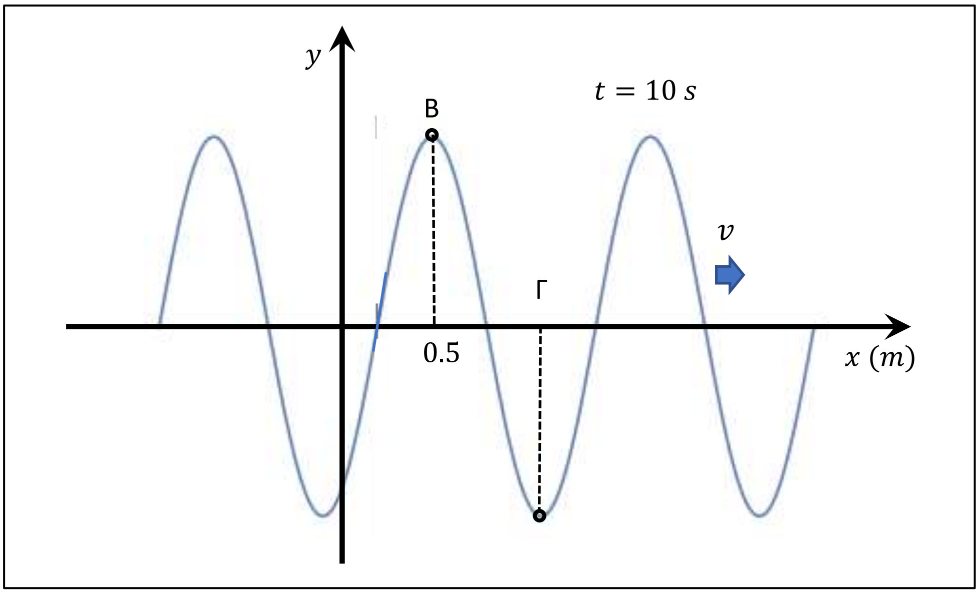
Στο $x = 1\ m$ και $t = 1\ s$

$$y = Asin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = A\frac{\sqrt{2}}{2} = 2.82\ cm$$

**6.** Το παρακάτω σχήμα δείχνει το στιγμιότυπο ενός εγκάρσιου αρμονικού κύματος που διαδίδεται προς τα δεξιά και το οποίο περιγράφεται από την εξίσωση

$$y = Asin(kx - \omega t)$$

Εάν η φάση του σημείου Β είναι ίση με $-3\pi/2$ (στο συγκεκριμένο στιγμιότυπο) και $\omega = \pi/4\ rad/s$, τότε να βρεθεί η συντεταγμένη $x_\Gamma$ του σημείου Γ.




<u>Λύση</u>:

Η φάση ενός αρμονικού κύματος ισούται με

$$\varphi = kx - \omega t$$

Από τα δεδομένα και το σχήμα έχουμε

$$\varphi_B = 0.5k - \frac{\pi}{4}10 = -3\pi/2$$

από όπου παίρνουμε $k = 2\pi$ και άρα το μήκος κύματος είναι ίσο με

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1\ m$$

Αφού στο σχήμα πάμε από ελάχιστο σε μέγιστο, τότε η απόσταση που καλύπτουμε είναι μισό μήκος κύματος και έτσι η συντεταγμένη του Γ ισούται με:

$$x_\Gamma = x_B + \frac{\lambda}{2} = 0.5 + 0.5 = 1\ m$$