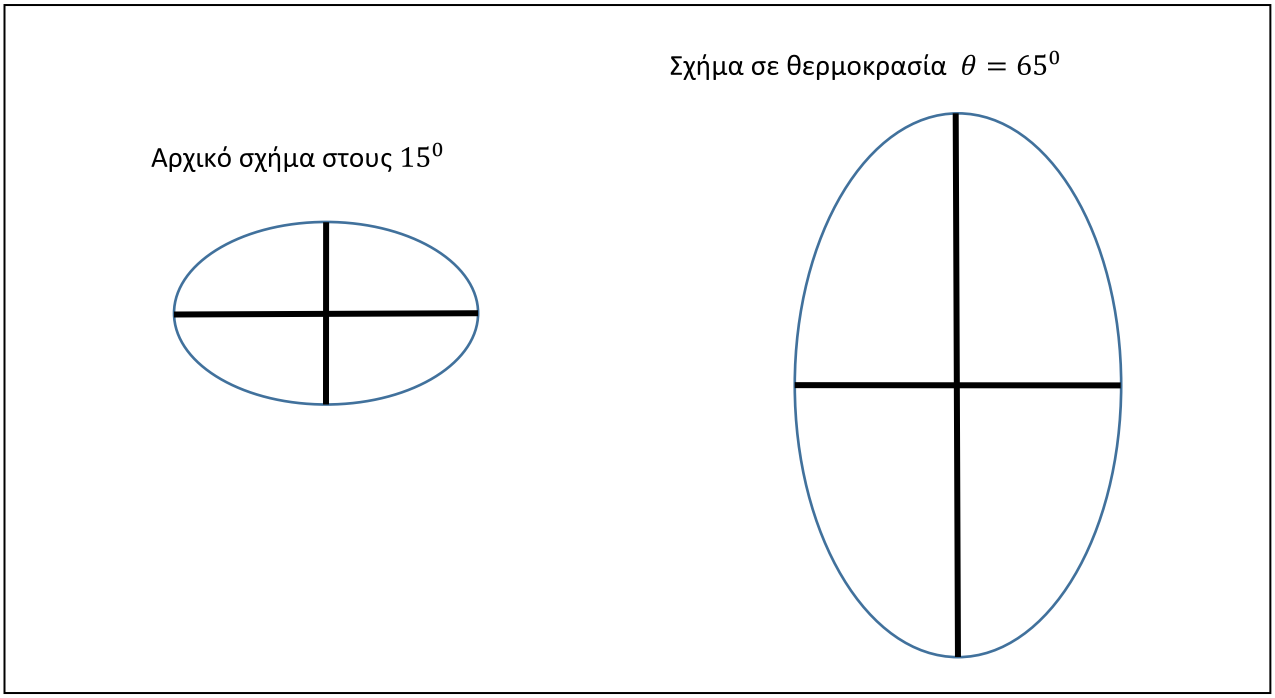
1) Στο παρακάτω σχήμα, ένα πλαίσιο από σύνθετο ελαστικό υλικό με αμελητέο συντελεστή θερμικής διαστολής, έχει στους $15^0\ C$ το σχήμα έλλειψης με λόγο ημιαξόνων $\kappa = 1/(1-x)$ όπου p ένας θετικός αριθμός, επειδή είναι τανυσμένο (τεντωμένο) με τη βοήθεια δυο μεταλλικών ράβδων σε σχήμα σταυρού. Λόγω διαφορετικού συντελεστή θερμικής διαστολής $\alpha_x < \alpha_y$ των δυο ράβδων, η έλλειψη αλλάζει σχήμα κατά τη θέρμανσή της και παρατηρείται ότι στους $65^0\ C$ γίνεται ξανά έλλειψη αλλά με ακριβώς αντίθετο λόγο ημιαξόνων $1/\kappa$. Εάν $\alpha_x = (1-1.98p)\alpha_y$ όπου το p είναι ο προαναφερθέντας αριθμός, να βρεθεί η τιμή του.



Λύση:

Έστω τα αρχικά μήκη των ραβδών στους 15^0 ίσα με L_x το οριζόντιο και L_y το κατακόρυφο με $L_x > L_y$ και $\kappa = L_x/L_y = 1/(1-p)$. Λόγω θερμικής διαστολής τα μήκη αυτά αλλάζουν σε

$$L_y{}' = L_y(65-15)\alpha_y$$

και

$$L_x{}' = L_x(65-15)\alpha_x$$

Από τα δεδομένα $L'_y/L_x{}' = 1/\kappa$. Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\frac{L_y}{L_x} = \frac{L'_x}{L'_y} = \frac{L_x(65-15)\alpha_x}{L_y(65-15)\alpha_y}$$

$$\left(\frac{L_y}{L_x}\right)^2 = \frac{\alpha_x}{\alpha_y}$$

$$(1-p)^2 = 1 - 1.98p$$

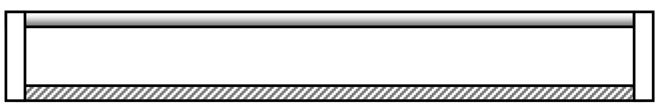
$$1 - 2p + p^2 = 1 - 1.98p$$

$$-0.02p + p^2 = 0$$

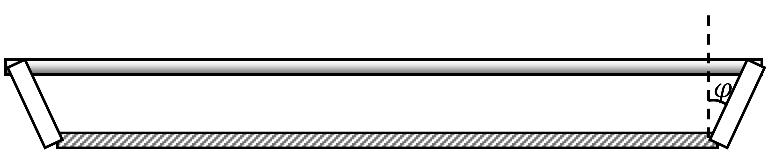
$$p = 0.02$$

2) Στο παρακάτω πλαίσιο ένας φοιτητής κατασκεύασε ένα πλαίσιο από 4 ράβδους, δυο μεταλλικών οριζόντιων με μεγάλους σχετικά συντελεστές θερμικής διαστολής α_1 και α_2 και δυο κατακόρυφων κεραμικών με αμελητέο συντελεστή θερμικής διαστολής. Στους $10^0\ C$ το πλαίσιο έχει ορθογώνιο σχήμα αλλά σε πολύ υψηλότερες θερμοκρασίες παίρνει το σχήμα τραπεζίου με γωνία φ στους $70^0\ C$ και γωνία 2φ σε θερμοκρασία θ. Εάν $cos\varphi = 239/240$, να βρεθεί η θερμοκρασία θ. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $sin\varphi \approx tan\varphi$ για μικρές γωνίες

Αρχικό σχήμα στους 10^0

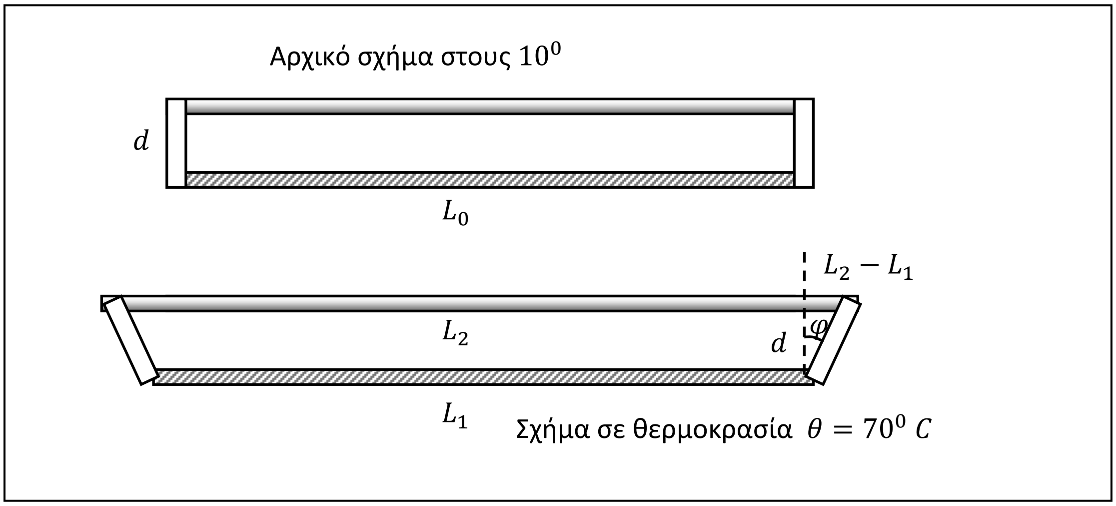


Σχήμα σε θερμοκρασία $\theta = 70^0$



Λύση: Από τριγωνομετρία στο πλαίσιο των $70^0\ C$

$$tan\varphi = \frac{L_2 - L_1}{d}$$



Λόγω θερμικής διαστολής $L_2 = L_0(70-10)\alpha_2$ και $L_1 = L_0(70-10)\alpha_1$ οπότε

$$tan\varphi = \frac{L_0(70-10)(\alpha_2 - a_1)}{d} = \frac{60L_0\Delta\alpha}{d}$$

Ομοίως στη θερμοκρασία θ

$$tan2\varphi = \frac{{L_2}' - {L_1}'}{d} = \frac{L_0(\theta-10)(\alpha_2 - a_1)}{d} = \frac{(\theta-10)L_0\Delta\alpha}{d}$$

Παίρνω λόγους και χρησιμοποιώ την προσέγγιση $sin\varphi \approx tan\varphi$ για μικρές γωνίες:

$$\frac{\theta - 10}{60} = \frac{tan2\varphi}{tan\varphi} \approx \frac{sin2\varphi}{sin\varphi} = \frac{2sin\varphi cos\varphi}{sin\varphi} = 2cos\varphi = \frac{239}{120}$$

$$\theta - 10 = \frac{239}{2} => \theta = 129.5\ C^0$$