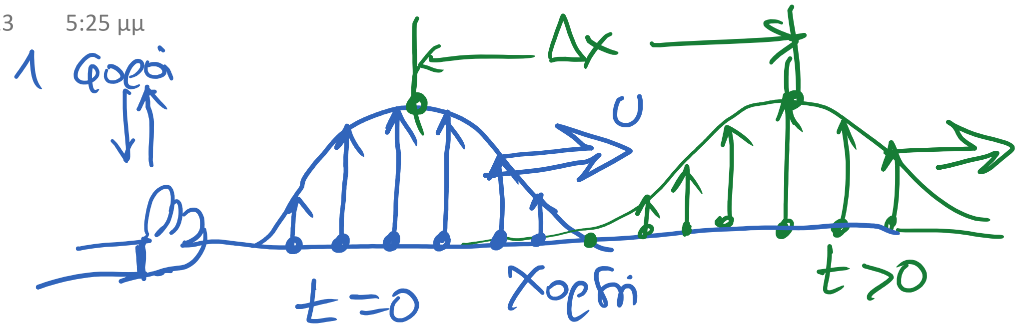
1

Μαθηματική Περιγραφή του Κύματος

Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 5:25 μμ

Κύμα

Παλμός



Συνάρτηση που βλέπω με το μάτι

$y = f(x)$ στο $t=0$ $y = f(x - \Delta x)$

Εκτελεί Ε.Ο.Κ. επειδή η ταχύτητα εξαρτάται μέσο ⇒ ίδια χορδή ⇒ ίδιο υ ⇒ $\Delta x = \upsilon t$

$$\boxed{y(x,t) = f(x - \upsilon t)}$$

περιγραφή κυματομορφής

Σε κάθε x και t, μου δείχνει το y, δηλαδή την κατακόρυφη απομάκρυνση των μορίων

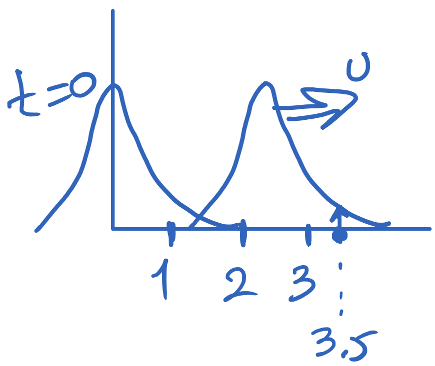
Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 5:31 μμ

$t=0$

$y = 20 e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Παράδειγμα 12.1

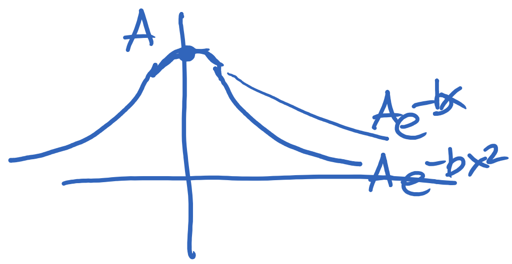
Χορδή βρίσκεται τανυσμένη επάνω στον άξονα x. Ξαφνικά ένα κύμα σε μορφή παλμού διαδίδεται επάνω σε αυτή προς τα δεξιά με ταχύτητα $v = 2\ m/s$ έτσι ώστε τα μόριά της να ταλαντεύονται κατακόρυφα όταν ο παλμός περνάει από αυτά. Εάν στο $t = 0$ ο παλμός περιγράφεται από την εξίσωση $y = 20e^{-0.5x^2}$, να βρεθεί η κατακόρυφη απόσταση από τον άξονα x ενός σημείου της χορδής το οποίο βρίσκεται στο $x = 3.5$ κατά τις χρονικές στιγμές $t = 0, 1, 2, 3$ (όλες οι μονάδες σε S.I.).



Λειμάω στο $t=0$
y στο 3.5 $\simeq 0$

$y = Ae^{-bx^2}$ γνωστή ως Γκαουσιανή

για $x>0$ μοιάζει Ae^{-bx}



Μας ζητάνε το y στο $x=3.5$ m για $t=0,1,2,3$

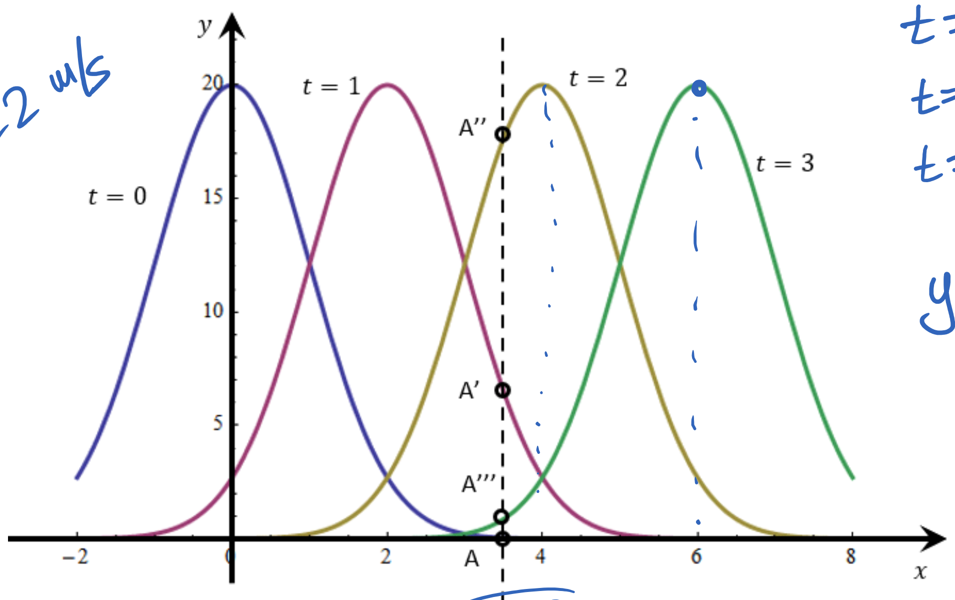
Για $x<0$ συνάρτηση άρτια συμμετρική ως προς y

Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 5:38 μμ

Screen clipping taken: 13/1/2023 5:39 μμ

$y(x,t)$

$v=2$ m/s



$x=3.5$

$t=0$ μωβ
$t=1$ βυσσινί
$t=2$ μουσταρδί
$t=3$ πράσινο

$y(3.5,0) \simeq 0$

$y(x,0) = 20e^{-0.5x^2}$

πως μπορώ να βρω το $y(x,t)=?$

$y=f(x)$; $y(x,t) = f(x-ut)$

$t=0$

εδώ $\boxed{y = 20e^{-0.5(x-ut)^2}}$

Στο $x=3.5$

$t=0$	$y=0.04$
1	6.5
2	17.6
3	0.9

ανέβαινε

έπεσε!!!

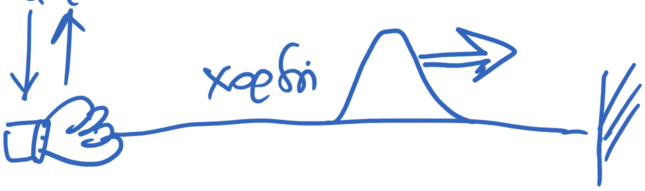
έχει περάσει το κύμα από τη "γειτονιά" του 3.5

4

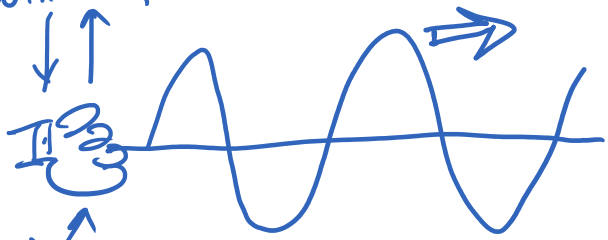
Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 5:47 μμ

Αρμονικά κύματα

1 φορά



συνεχώς
συχνότητα f

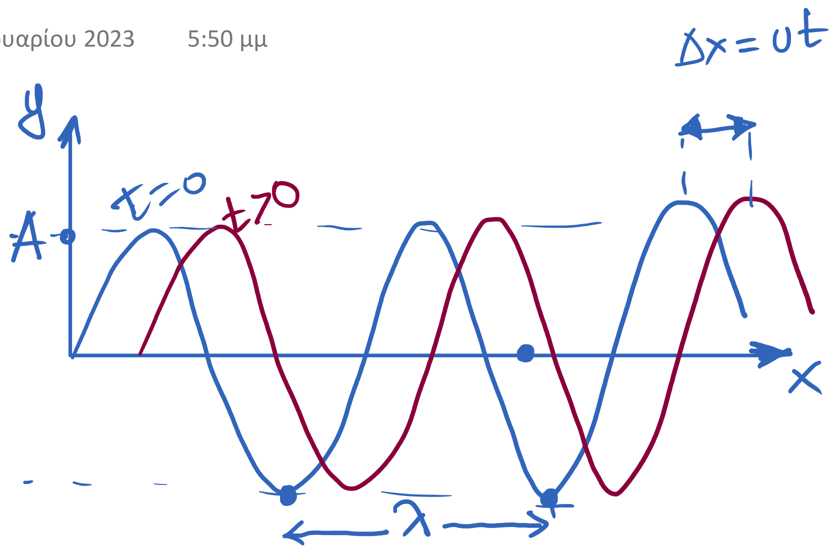


περιοδική
πηγή

ίδια χορδή

↳ Η κυματομορφή είναι ένα ημίτονο ⇒ ΑΡΜΟΝΙΚΟ ΚΥΜΑ

Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 5:50 μμ



$t=0$ $\quad y = A \sin kx$

άγνωστη σταθερά

$t>0$ κύμα

$y = A \sin k(x - \upsilon t) = A \sin(kx - \omega t)$

όπου έθεσα $k\upsilon = \omega$

Αποδεικνύεται $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\quad \lambda$: μήκος κύματος

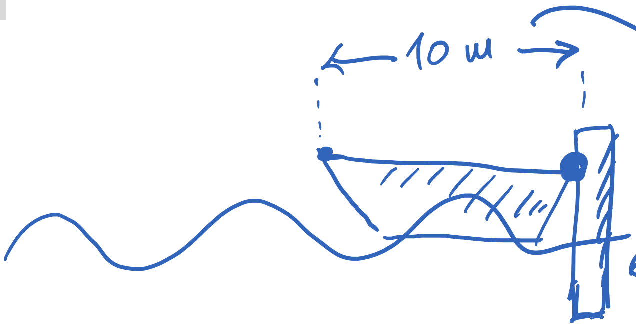
$\omega = \frac{2\pi}{T}$

T: περίοδος της ταλάντωσης των μορίων της χορδής

Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 5:56 μμ

Παράδειγμα 12.3

Ένας ψαράς που στέκεται κοντά στην αποβάθρα παρατηρεί κάποια κύματα της θάλασσας τα οποία κτυπούν ένα κατακόρυφο πάσσαλο. Μετράει ότι σε ένα λεπτό πέφτουν στον πάσσαλο 40 κύματα. Επίσης παρατηρεί ότι ένα από τα κύματα χρειάστηκε 5 δευτερόλεπτα για να καλύψει την απόσταση από την πλώρη της αγκυροβολημένης βάρκας του έως τον πάσσαλο που γνωρίζει ότι είναι ίση με 10 μέτρα. Εάν προσεγγίσουμε το κύμα της θάλασσας με ημιτονοειδή κυματομορφή, ποιο θα είναι το μήκος κύματός της;



1 κύμα 5 sec

$\Rightarrow \upsilon = \frac{10\,m}{5\,s} = 2\,m/s$

στον πάσσαλο 40 κύματα/λεπτό

$f = \frac{40}{min} = \frac{40}{60\,s} = \frac{2}{3}\,Hz$

$y = A\sin(kx - \omega t)$

$\omega = \upsilon k \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \upsilon \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \upsilon T = \upsilon / f}$

βασική (θεμελιώδης)

$\boxed{\upsilon = \lambda f}$

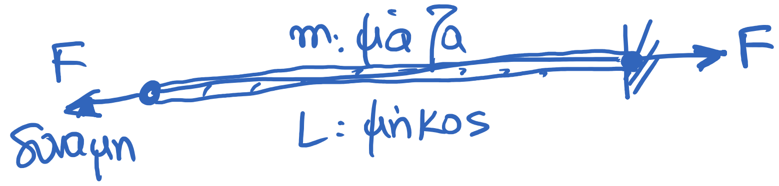
κυματική εξίσωση

$\lambda = \frac{2}{2/3} = 3\ m$

Ταχύτητα κύματος εξαρτάται από το μέσο

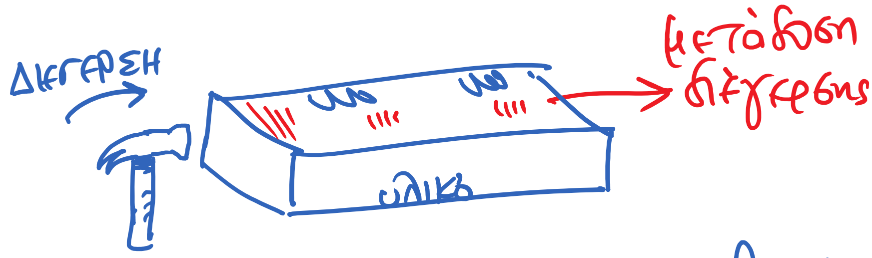
✓ Για χορδή

$$v=\sqrt{\frac{F}{m/L}}$$



$\frac{m}{L}=\mu$ γραμμική πυκνότητα

✓ Για υλικά, μηχανικά κύματα



$$v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$\rho=\frac{m}{V}$ πυκνότητα όγκου

E: σταθερά ελαστικότητας του υλικού

Μεγάλο E ⇒ δύσκαμπτο υλικό πχ. ατσάλι 100 GPa

Μικρό E ⇒ εύκαμπτο πολυμερές 0.1 GPa

Σε GPa

10^9 Pascal

✓ Για ήχο στον αέρα

v ανάλογο $\sqrt{T}$

T θερμοκρασία σε K

λόγος: $\frac{v(\theta)}{v(0)}=\sqrt{\frac{\theta+273}{273}}$ σε °C

$v(\theta)=331\sqrt{\frac{\theta+273}{273}}$ → m/s

✓ Ταχύτητα H/M κυμάτων (φως υπόλοιπα)

Ταχύτητα $c=3\times10^8$ m/s

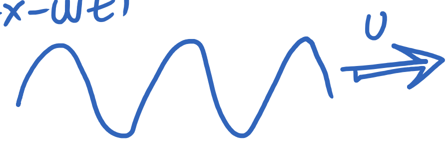
Θεμελιώδης κυματική σχέση

$c=\lambda\cdot f$

Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 6:15 μμ

Ανάκλαση κυμάτων - στάσιμα

$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$



$y_2 = A\sin(kx + \omega t)$

Επιφάνεια

ανακλάται

Όταν έρθουν μαζί τα δύο κύματα
επαλληλία

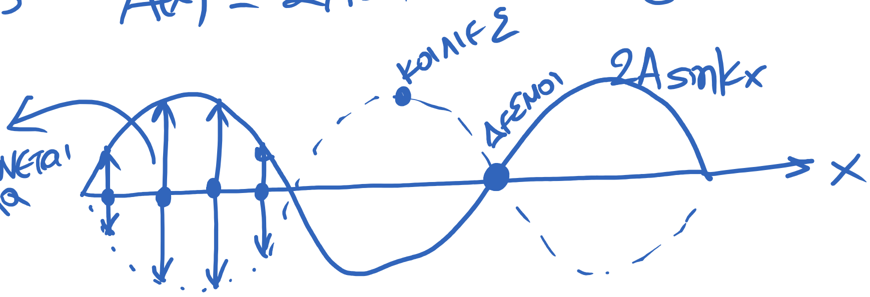
$$y = y_1 + y_2 = 2A\cdot \sin kx \cdot \cos\omega t$$

Στα Μαθηματικά
$\sin a + \sin b =$
$2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Αυτό έχει την μορφή κύματος;
όχι, δεν υπάρχει $x - ut$

Μοιάζει με αρμονικό ταλαντωτή

πλάτος $\tilde{A}(x) = 2A\sin kx$ $\qquad$ $y = \tilde{A}\cos\omega t$



Το κάθε μόριο ταλαντώνεται σε φάση με όλα τα άλλα μόρια πάνω του $\cos\omega t$

αλλά με πλάτος που εξαρτάται από το x

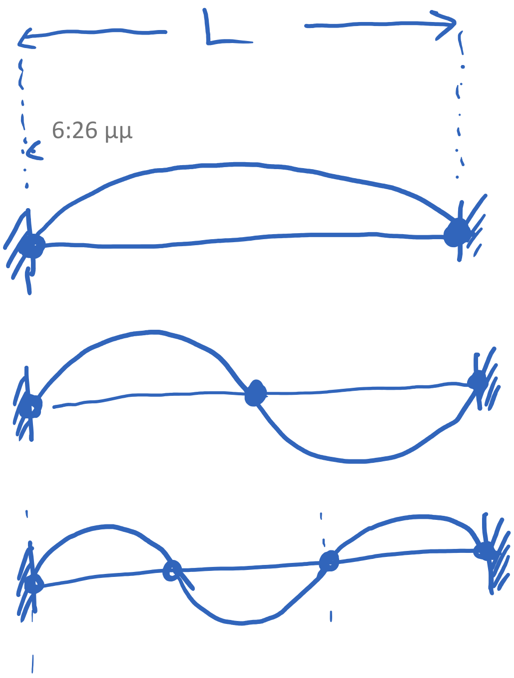
Σε κάποια x, $\tilde{A}(x) = 0 \ \forall t \Rightarrow$ ΔΕΣΜΟΙ

-//- x, $\tilde{A}(x) = 2A$ -//- $\Rightarrow$ ΚΟΙΛΙΕΣ

Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 6:26 μμ

Πιθανοί συντονισμοί

Παλλόμενη χορδή τα άκρα αναγκαστικά δέσμοι



$n=1$ $\lambda = 2L$

$n=2$ $\lambda = L = \frac{2L}{2}$

$n=3$ $\lambda = \frac{2}{3}L$

n: αριθμός κοιλιών

Γενικά $\boxed{\lambda_n = \frac{2L}{n}}$

Θεμελιώδη κυμ. σχέση $\upsilon = \lambda_n f_n \Rightarrow f_n = \frac{\upsilon}{\lambda_n} = \frac{\upsilon}{2L} \cdot n$

Ίδια ταχύτητα επειδή ίδιο μέσο.

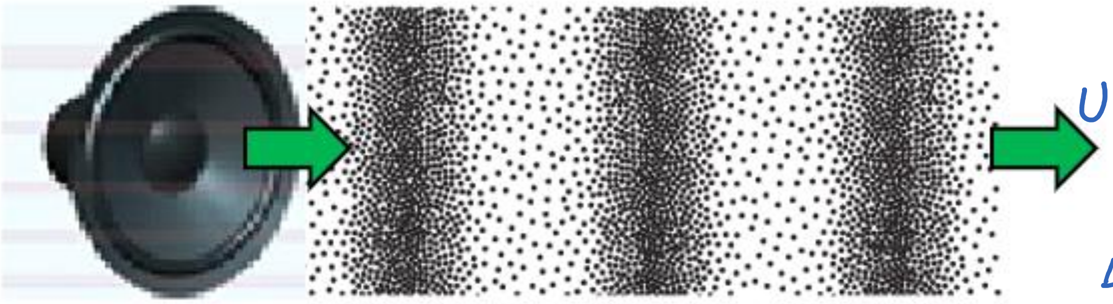
10

Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 6:33 μμ

Κεφ 1Β. ΗΧΟΣ

Πυκνώματα & Αραιώματα του αέρα

Τι είναι ο ήχος;



Screen clipping taken: 13/1/2023 6:34 μμ

ΔΙΑΜΗΚΕΣ ΚΥΜΑ

↔ ταλαντώσεις μορίων

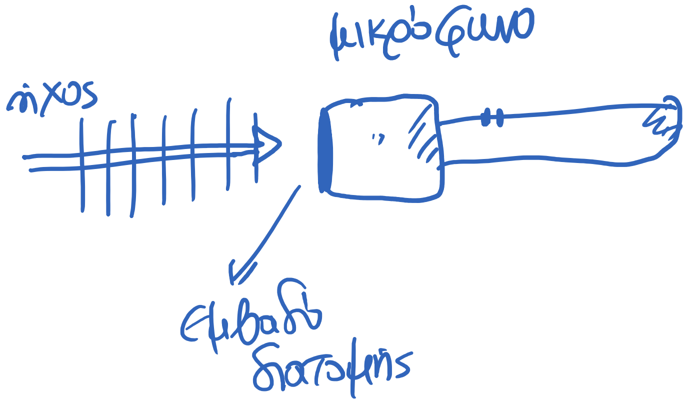
Εάν κενό ⇒ δεν υπάρχει ήχος

Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 6:36 μμ

Ένταση του ήχου

$$I = \frac{P}{A} \qquad \frac{\text{ισχύς ήχου}}{\text{εμβαδό}}$$

$$P = \frac{E}{t} \qquad \frac{\text{ενέργεια}}{\text{χρόνος}}$$

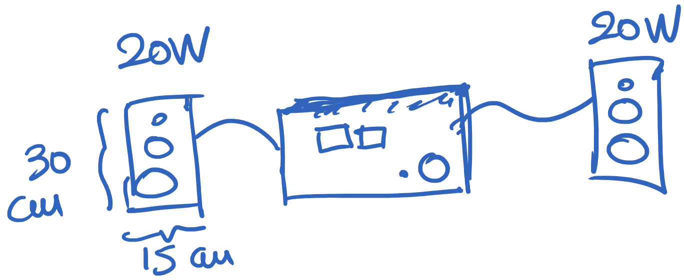


$$\boxed{I = \frac{E}{A \cdot t}}$$

Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 6:44 μμ

Παράδειγμα 13.4

Ένα στερεοφωνικό σύστημα ήχου αποδίδει 20 W ισχύος σε κάθε ένα από τα δυο του ηχεία. Εάν οι διαστάσεις των ηχείων είναι $30 \times 15\ cm^2$ να βρεθεί η ένταση του ήχου κοντά στα ηχεία.



$$I = \frac{E}{t \cdot A} = \frac{P}{A} = \frac{20}{30 \times 15 \times 10^{-4}} = 444\ \frac{W}{m^2}$$

Ένταση έχει τρομερές διακυμάνσεις από 10^{-12} W/m2 όριο ακοής έως και 10^2 κινητήρας αεριωθούμενου !!! Χρησιμοποιούμε τον λογάριθμο $\log_{10} 10^n = n$

Κλίμα Decibel $\beta = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$

επίπεδο έντασης

I_0: όριο ακοής $10^{-12}\ W/m^2$

13

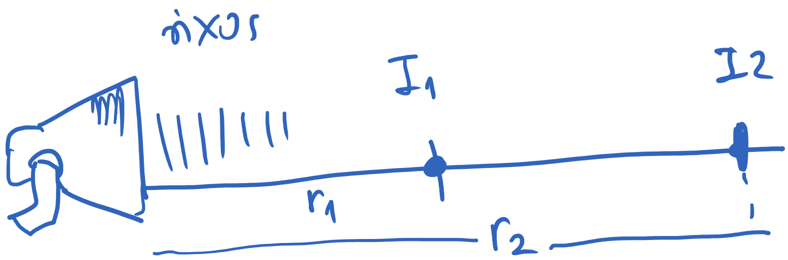
Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 6:49 μμ

Screen clipping taken: 13/1/2023 6:49 μμ

	$I(W/m^2)$	$\beta = 10 \cdot \log_{10} \frac{I}{I_0}$ $= 10 \log I/10^{-12}$
Όριο Ακοής	10^{-12}	0 όριο ακοής
Θρόισμα Φύλλων	10^{-11}	10
Ψίθυρος	10^{-10}	20
Ραδιόφωνο κινητό	10^{-8}	40
Συζήτηση	10^{-6}	60
Θόρυβος δρόμου	0.0001	80
Υπόγειος Σιδηρόδρομος	0.01	100
Όριο Πόνου	1	120 όριο πόνου
Αεριωθούμενος Κινητήρας	100	140

Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 6:51 μμ

Εξάρτηση της έντασης με την απόσταση

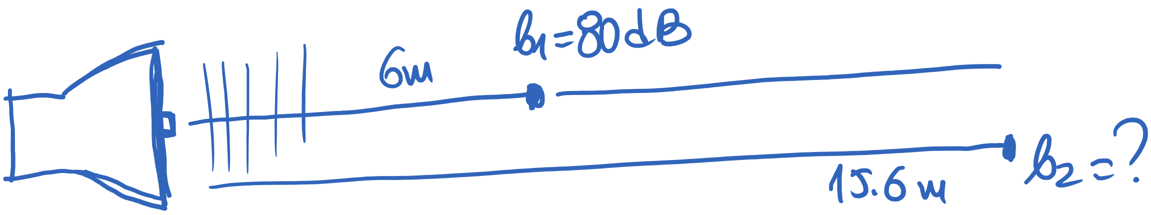


ήχος μειώνεται με την απόσταση

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow I_2 = I_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 < I_1$$

Παράδειγμα 13.10

Το επίπεδο έντασης $6\ m$ από ένα ηχείο είναι $80\ dB$. Ποιο είναι το επίπεδο έντασης σε απόσταση $15.6\ m$ από το ίδιο ηχείο?



Γνωρίζουμε $I_2 = I_1\left(\frac{6}{15.6}\right)^2$ $\quad I_1 = ?$ βρίσκω b_1

$b_1 = 10\log_{10}\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = 80$ από δεδομένα $\Rightarrow$

$$\log_{10}\frac{I_1}{I_0} = 8 \Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 10^8 \Rightarrow I_1 = 10^8 \cdot 10^{-12}\ \frac{W}{m^2}$$

$$\boxed{I_1 = 10^{-4}\ W/m^2}$$

$$I_2 = 10^{-4}\left(\frac{6}{15.6}\right)^2 = 1.47\times10^{-5}\ W/m^2$$

Θέλω επίπεδο έντασης $b_2 = 10\log\frac{I_2}{I_0} = 10\log\left(\frac{1,47\times10^{-5}}{10^{-12}}\right) = 71\ dB$

έπεσε από $80 \rightarrow 71\ dB$

Απορίες;;;

16

Παρασκευή, 13 Ιανουαρίου 2023 7:00 μμ

Τελος ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ !!!

Καλη επιτυχια !!!