ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΚΥΚΛΩΜΑΤΑ

Θα εξετάσουμε
- RC συνεχές
- RC εναλλασ.
- RLC -"-

Αντίσταση

R

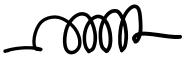
(1) $V_R = IR$

Πυκνωτής

C

(2) $\dfrac{dV_C}{dt} = \pm \dfrac{I}{C}$ + φόρτιση, − εκφόρτιση

Πηνίο

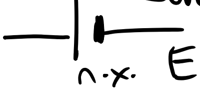


L

(3) $V_L = L\dfrac{dI}{dt}$

Πηγή

Συνεχούς



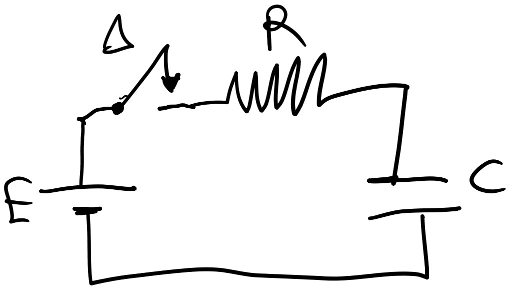
π.χ. $E = 10\ V$

Εναλλασσόμενου

$V = V_0 \sin \omega t$

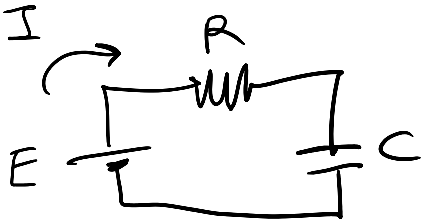
RC συνεχές

$t=0$ κλείνει ο διακόπτης Δ



Για $t<0$ ο πυκνωτής είναι αφόρτιστος

Μόλις κλείσω τον Δ εμφανίζεται ρεύμα I



1ο νόμο Kirchoff, $\Sigma V=0$ σε κλειστό βρόχο

$$E - V_R - V_C = 0 \quad \text{παραγωγίζω } \frac{d}{dt}$$

$$0 - \frac{dV_R}{dt} - \frac{dV_C}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$-R\frac{dI}{dt} - \frac{1}{C}I = 0$$

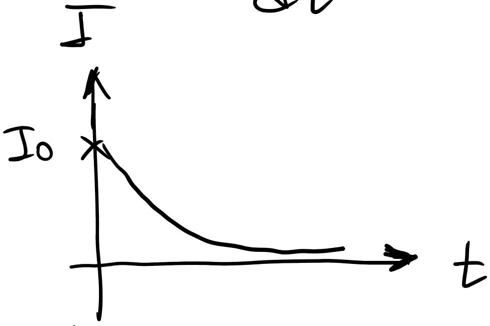
I συνάρτηση t

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC}I$$

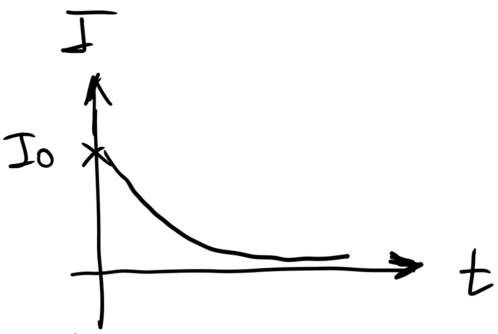
Διαφορική εξίσωση

Λύση

$$\boxed{I = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}$$



$t=0$
κλείνει Δ



t=0
κλείνει Δ

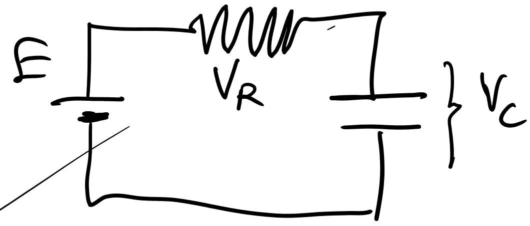
Λύση

$$\boxed{I = I_0 \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}}$$

$V_R = IR = I_0 R e^{-\frac{t}{RC}}$

$t=0 \quad V_{R0} = I_0 R$

Πυκνωτής
$t=0$
$q=0$
Αρχικά αφόρτ.
$V_C = \frac{q}{C}$



$t=0 \quad V_C(0)=0$

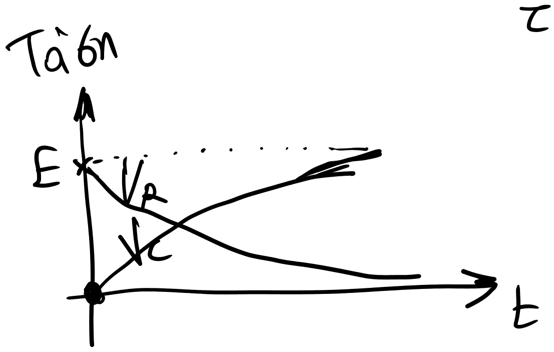
$V_R = V_R(0)\, e^{-t/RC}$ Νόμο Kirchhoff $V_R(0) = E$

$V_R(0) = I_0 R = E \Rightarrow \boxed{I_0 = E/R}$

Για $t>0$ $\quad V_R = E e^{-t/RC}$

$\tau = RC$ διαστάσεις χρόνου

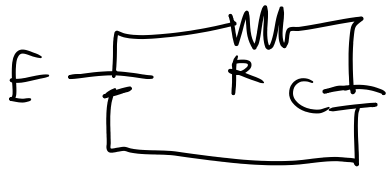
ονομάζεται σταθερά χρόνου



Kirchhoff

$V_R + V_C = E$: σταθερό

$V_C = E - V_R$



$V_C = E(1 - e^{-t/RC})$

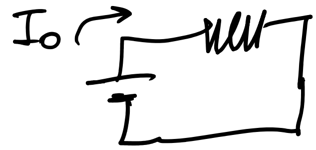
ασυμπτωτικά $\to E$

Άσκηση: Σε κύκλωμα με μπαταρία 5 V συνδέεται στο $t=0$ πυκνωτής χωρητικότητας $2\mu F$ και αντίσταση $0.25\ M\Omega$. Να βρεθούν

(α) Το μέγιστο ρεύμα του κυκλώματος

(β) Η σταθερά του χρόνου

(γ) Ο χρόνος όπου η τάση της R πέφτει στο 13.5% της αρχικής της τιμής



Λύση:

(α) Στο $t=0$ $\quad I_0 = \frac{E}{R} = \frac{5}{\frac{1}{4}\times 10^6} = 20\ \mu A$

$t=0$

(β) $\tau = RC = \frac{1}{4}\times 10^6 \, 2\times 10^{-6} = 0.5$ sec γ) $V_R = E e^{-t/\tau}$

Φυσική σημασία εαν $t = \tau$ $V_c(\tau) = E e^{-1} = 0.37\ E$

λέγεται στο 37%

εαν $t = 2\tau$ $V_c(2\tau) = E e^{-2} = 0.135\ E$

λέγεται στο 13.5%

Απάντηση σε $t = 2\tau = 1$ sec.

Άσκηση: Στην προηγούμενη άσκηση, πόσος χρόνος απαιτείται ώστε η τάση του πυκνωτή να είναι 2 V;

Λύση: $V_C = E(1-e^{-t/\tau})$

$E = 5\ V$

Θέλουμε $V_C = 2\ V$

$$\frac{2}{5} = 1 - e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

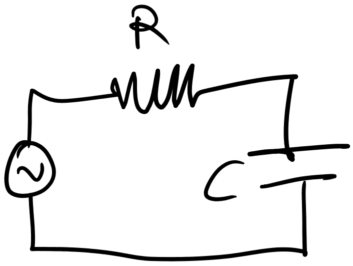
$$e^{-t/\tau} = 0.6 \Rightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln(0.6) = -0.51 \Rightarrow$$

$$t \simeq 0.5\tau = 0.25\ sec$$

Κύκλωμα RC εναλλασσόμενο

όπως προηγουμένως
κανόνας Kirchhoff $\Sigma V = 0$

$V = V_0 \sin\omega t$



$V - V_R - V_C = 0 \Rightarrow$ παραγωγίζω

π.χ. ΔΕΗ

$V_0 = 220\sqrt{2}$ V

$\omega = 2\pi \cdot 50$ Hz

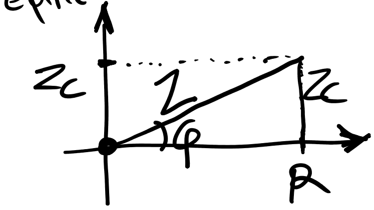
$$\frac{dV}{dt} - \frac{dV_R}{dt} - \frac{dV_C}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \omega V_0 \cos\omega t}$$ Δ.Ε (διαφορική εξίσωση)

Λύση $I = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$

Υπάρχει ένα μαθηματικό τρίγωνο που δίνει εύκολα τα I_0, φ Θέτω $V_{R0} = I_0 R$

$$V_R = I R = I_0 R \sin(\omega t - \varphi) = V_{R0} \sin(\omega t - \varphi)$$



$$Z_C = \frac{1}{\omega C}$$

μονάδες αντίστασης

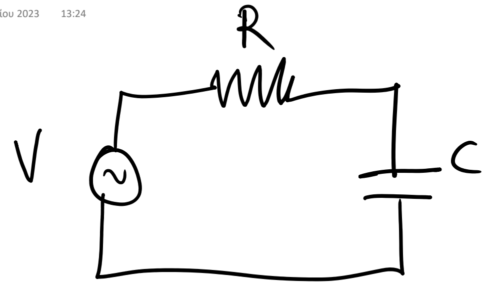
"χωρητική εμπέδηση"

$$\tan\varphi = \frac{Z_C}{R}$$

Πυθαγόρειο $Z = \sqrt{R^2 + Z_C^2}$

$$I_0 = \frac{V_0}{Z}$$

Z: εμπέδηση

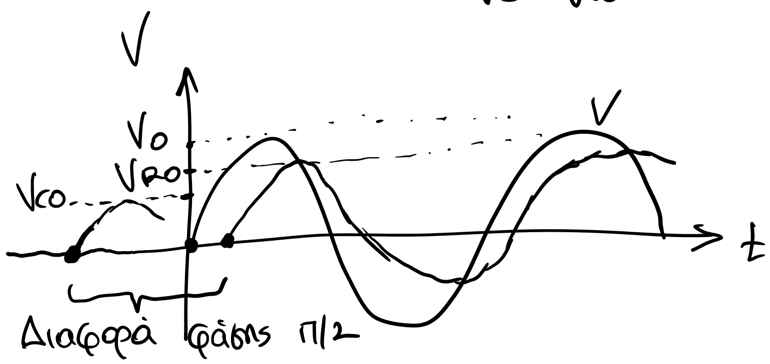


Τάσεις

$$V = V_0 \sin\omega t = I_0 Z \cdot \sin\omega t$$

$$V_R = V_{R0} \sin(\omega t - \varphi) = I_0 R \sin(\omega t - \varphi)$$

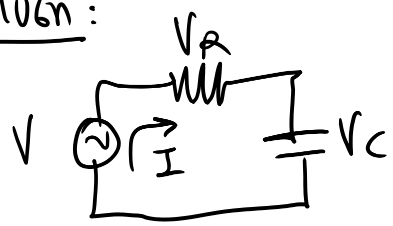
$$V_C = V_{C0} \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = I_0 Z_C \sin\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

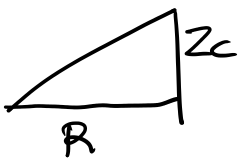


Άσκηση: Στο κύκλωμα της προηγούμενης άσκησης, η συνεχής πηγή αντικαθίσταται με εναλλασσόμενη πλάτους $V_0 = 5V$ και $\omega = 10\,rad/s$. Βρείτε όλες τις τάσεις και το ρεύμα του κυκλώματος.

$R = \frac{1}{4} M\Omega \qquad C = 2\,\mu F$

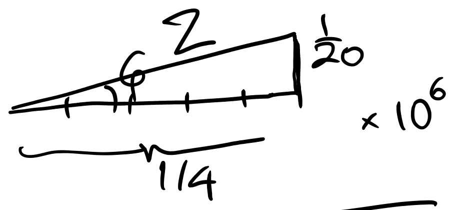
Λύση:





$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10 \cdot 2 \times 10^{-6}} = \frac{1}{20} 10^6 \ \Omega$$

$$R = \frac{1}{4} 10^6 \ \Omega$$



$$\tan\varphi = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{5}$$

$$\varphi = \arctan(0.2) = 11.3^\circ$$

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_C^2} = \sqrt{\frac{1}{4^2} + \frac{1}{20^2}}\ 10^6 =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{1 + \frac{1}{5^2}}\ 10^6 = 0.255 \times 10^6 \ \Omega$$

$$I_0 = \frac{V_0}{Z} = \frac{5}{0.255 \times 10^6} = 19.6 \ \mu A$$

πλάτος

$$V_{R0} = I_0 R = 19.6 \times \cancel{10^{-6}} \times \frac{1}{4} \cancel{10^6} = 4.9 \ V$$

$$V_{C0} = I_0 Z_c = 19.6 \times \cancel{10^{-6}} \times \frac{1}{20} \cancel{10^6} = 0.98 \ V$$

φάση V_R $\varphi = 11.3^\circ$

$V_R = 4.9 \sin(10 \cdot t - 0.19)$

φάση V_C $\varphi_c = 11.3^\circ - 90^\circ = -78.7^\circ =$

$V_C = 0.98 \sin(10t + 1.37)$

σε rad $\varphi = 1.37$

$\varphi_c = -1.37$ rad