
**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΣΕ ΕΙΔΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΓΙΑ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**

Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης

*Ομότιμος Καθηγητής
Πολυτεχνικής Σχολής
Πανεπιστημίου Πατρών*

ΠΑΤΡΑ 2014

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΣΕ ΕΙΔΙΚΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΓΙΑ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**

Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης

Πάτρα, Μάρτιος 2014

Copyright © 2010–2014 Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης

ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Νικόλαο Ι. Ιωακειμίδα

μέσω των ηλεκτρονικών διευθύνσεών του

n.ioakimidis@upatras.gr και n.ioakimidis@otenet.gr

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

• ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	3
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε1: ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΙ ΤΑΝΥΣΤΕΣ	
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 56 σελίδες)</i>	5
E1.1. Στροφή Συστήματος Καρτεσιανών Συντεταγμένων	6
E1.2. Ορισμός του Τανυστή και Ειδικές Περιπτώσεις	15
E1.3. Πράξεις με τους Τανυστές	21
E1.4. Νόμος του Πηλίκου	27
E1.5. Συμμετρικοί, Αντισυμμετρικοί και Ισότροποι Τανυστές	32
E1.6. Παράγωγοι Τανυστών	34
E1.7. Τανυστές Τάσεων, Παραμορφώσεων και Ροπών Αδρανείας	41
E1.8. Διαγωνιοποίηση Συμμετρικού Τανυστή Δευτέρας Τάξεως	48
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε2: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE	
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 8 σελίδες)</i>	61
E2.1. Ασκήσεις στη Μέθοδο του Μετασχηματισμού Laplace	61
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε3: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER	
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 10 σελίδες)</i>	69
E3.1. Ασκήσεις στη Μέθοδο του Μετασχηματισμού Fourier	69
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε4: ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ	
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 16 σελίδες)</i>	79
E4.1. Ασκήσεις στις Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους	79
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε5: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 4 σελίδες)</i>	95
E5.1. Ασκήσεις στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις	95
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε6: ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ	
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 40 σελίδες)</i>	99
E6.1. Εισαγωγή στις Συνοριακές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις	100
E6.2. Εφαρμογή στην Εξίσωση του Laplace	104
E6.3. Εφαρμογή στη Γραμμική Ελαστικότητα	119
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε7: ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ	
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 44 σελίδες)</i>	139
E7.1. Συναρτησιακά και Ελαχιστοποίησή τους	140
E7.2. Η Εξίσωση των Euler-Lagrange	143
E7.3. Εφαρμογή στη Διαφορική Εξίσωση του Καλωδίου	150
E7.4. Εφαρμογή στη Διαφορική Εξίσωση της Δοκού	153
E7.5. Αρχή της Ελάχιστης Δράσεως του Hamilton	156
E7.6. Εφαρμογή σε Ιδεατά Κτίρια Διατμήσεως	161
E7.7. Γενίκευση σε πάνω από μία Ανεξάρτητες Μεταβλητές	165
E7.8. Ελαχιστοποίηση Συναρτησιακών υπό Περιορισμούς	176

• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε8: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ RAYLEIGH-RITZ	
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 16 σελίδες)</i>	183
E8.1. Περιγραφή της Μεθόδου των Rayleigh-Ritz	184
E8.2. Εφαρμογές στο Πρόβλημα της Κάμψεως Δοκού	188
E8.3. Εφαρμογή σε Πρόβλημα Ροής Νευτώνειου Ρευστού	194
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε9: ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ	
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 24 σελίδες)</i>	199
E9.1. Η Μέθοδος του Galerkin	200
E9.2. Η Μέθοδος των Petrov-Galerkin	206
E9.3. Η Μέθοδος του Συντοπισμού	208
E9.4. Η Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων	212
E9.5. Η Μέθοδος του Kantorovich	215
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε10: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN	
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 43 σελίδες)</i>	223
E10.1. Συναρτήσεις Green στη μία Διάσταση	224
E10.2. Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Απόσβεση	236
E10.3. Το Πρόβλημα του Καλωδίου	241
E10.4. Το Πρόβλημα της Δοκού	249
E10.5. Μεταφορά Ρύπου με Διάχυση	254
E10.6. Συναρτήσεις Green σε πάνω από μία Διαστάσεις	258

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε1

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟΙ ΤΑΝΥΣΤΕΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο Κεφάλαιο αυτό Ε1 γίνεται μια πολύ απλή εισαγωγή στους Καρτεσιανούς τανυστές, δηλαδή στους τανυστές σε Καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων. Οι τανυστές μας είναι ήδη γνωστοί από τη Μηχανική των Υλικών. Εκεί είχαμε συναντήσει τον τανυστή των τάσεων σ_{ij} , τον τανυστή των παραμορφώσεων ϵ_{ij} και τον τανυστή των ροπών αδρανείας I_{ij} . Επίσης τανυστές παρουσιάζονται και σε πάρα πολλές άλλες περιοχές του Πολιτικού Μηχανικού. Για παράδειγμα, στην Εδαφομηχανική στο γνωστό φαινόμενο της διηθήσεως έχουμε τον τανυστή διαπερατότητας του εδάφους k_{ij} . Όλα αυτά τα μεγέθη είναι τανυστές δευτέρας τάξεως.

Όπως θα δούμε λεπτομερώς στο κεφάλαιο αυτό, οι τανυστές περιλαμβάνουν τα βαθμωτά μεγέθη, τα διανύσματα (ή διανυσματικά μεγέθη), τους τανυστές δευτέρας τάξεως και τανυστές ακόμη πιο υψηλής τάξεως, π.χ. τρίτης και τετάρτης τάξεως. Στην Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών τανυστής τετάρτης τάξεως είναι ο τανυστής των ελαστικών σταθερών E_{ijkl} που υπεισέρχεται στο γενικευμένο νόμο του Hooke.

Στην πρώτη Ενότητα Ε1.1 αυτού του Κεφαλαίου Ε1 αναφερόμαστε λεπτομερώς στη στροφή συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων στον τριδιάστατο χώρο. Αναφέρουμε επίσης τη σύμβαση αθροίσεως του Einstein και δύο βοηθητικούς τανυστές: το δέλτα του Kronecker δ_{ij} και το σύμβολο του Levi-Civita ϵ_{ijk} . Στη συνέχεια στην κύρια Ενότητα Ε1.2 δίνουμε το γενικό ορισμό του τανυστή n τάξεως και τον εξειδικεύουμε σε απλές περιπτώσεις: $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Στην επόμενη Ενότητα Ε1.3 αναφερόμαστε στις βασικές πράξεις με τους τανυστές. Η Ενότητα Ε1.4 που ακολουθεί είναι αφιερωμένη στο νόμο του πηλίκου: ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για την απόδειξη του τανυστικού χαρακτήρα διαφόρων φυσικών μεγεθών με δεδομένο τον τανυστικό χαρακτήρα δύο άλλων μεγεθών χαμηλότερης τάξεως. Στη συνέχεια στην Ενότητα Ε1.5 αναφερόμαστε στους συμμετρικούς τανυστές, στους αντισυμμετρικούς τανυστές και στους ισότροπους τανυστές.

Πάρα πολύ ενδιαφέρουσα είναι κι η παραγωγή τανυστών. Αυτήν την εξετάζουμε στην Ενότητα Ε1.6: χρονικές και χωρικές παράγωγοι. Οι πρώτες χωρικές παράγωγοι μας δίνουν από τανυστές νέους τανυστές μεγαλύτερης (κατά ένα) τάξεως. Στην ενότητα αυτή με χρήση των χωρικών παραγώγων βαθμωτών μεγεθών (τανυστών μηδενικής τάξεως) και διανυσμάτων (τανυστών πρώτης τάξεως) έχουμε την ευκαιρία να αναφερθούμε στους βασικούς τελεστές της Διανυσματικής Αναλύσεως: στην κλίση (ή βαθμίδα), στην απόκλιση, στο στροβιλισμό (ή στην περιστροφή) και στη Λαπλασιανή. Όλα τούτα τα μεγέθη με ποικίλες εφαρμογές στη Μηχανική των Υλικών, στη Ρευστομηχανική, στην Εδαφομηχανική, κλπ. είναι τανυστές.

Μετά στην Ενότητα Ε1.7 αποδεικνύουμε ότι στη Μηχανική των Υλικών οι τάσεις σ_{ij} , οι παραμορφώσεις ϵ_{ij} και οι ροπές αδρανείας I_{ij} είναι τανυστές δευτέρας τάξεως. Τέλος στην Ενότητα Ε1.8 αναφερόμαστε στο κύριο σύστημα συντεταγμένων, όπου διαγωνιοποιείται ένας συμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξεως.

Το σημαντικό με τους τανυστές είναι ότι η χρήση τους μας βεβαιώνει για την ισχύ ενός φυσικού νόμου σε κάθε σύστημα συντεταγμένων χωρίς καμία απολύτως αλλαγή στη διατύπωσή του. Τέτοιοι φυσικοί νόμοι είναι π.χ. ο νόμος του Hooke, οι εξισώσεις ισορροπίας, η εξίσωση της συνέχειας και ο νόμος του Darcy.

E1.1

E1.1. ΣΤΡΟΦΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

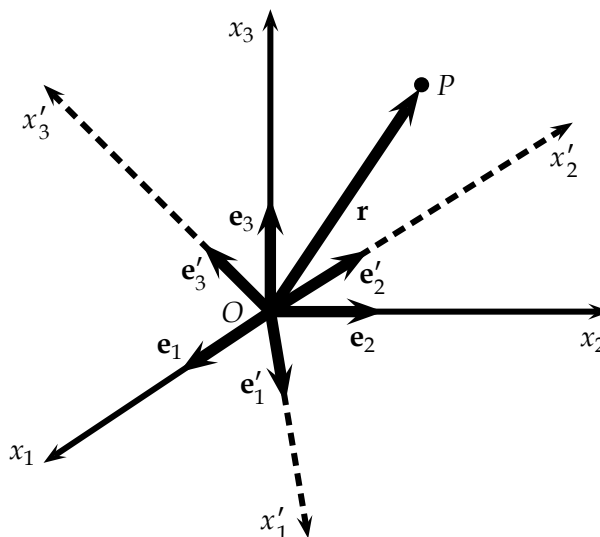
E1.1.1

E1.1.1. Τα βασικά για τη στροφή συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων

Θεωρούμε ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ στον τριδιάστατο χώρο (στις τρεις διαστάσεις) με μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 και \mathbf{e}_3 κατά τους άξονες Ox_1 , Ox_2 και Ox_3 αντίστοιχα (Σχήμα E1.1). Σ' αυτό το συνηθισμένο σύστημα συντεταγμένων ένα διάνυσμα $\mathbf{r} = \overline{OP}$ που συνδέει την αρχή των συντεταγμένων O με το σημείο P του χώρου έχει συνιστώσες x_1 , x_2 και x_3 . Άρα γράφεται στη μορφή

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \quad \text{ή πιο σύντομα} \quad \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i\mathbf{e}_i \quad (1.1.1)$$

με τη χρήση του γνωστού μας συμβόλου της αθροίσεως Σ εδώ με τρεις όρους.



Σχήμα E1.1: Στροφή συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων.

Προχωράμε και θεωρούμε τώρα και ένα δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ που προκύπτει με στροφή του πρώτου συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ (Σχήμα E1.1). Σ' αυτό το νέο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ τα μοναδιαία διανύσματα κατά τους άξονες Ox'_1 , Ox'_2 και Ox'_3 τα δηλώνουμε με \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 και \mathbf{e}'_3 αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι σ' όλο αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιούμε τόνους για κάθε μέγεθος που αναφέρεται στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. Έτσι θα το ξεχωρίζουμε πολύ εύκολα από την περίπτωση όπου το ίδιο μέγεθος αναφέρεται στο αρχικό, στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$, εκεί βέβαια χωρίς τόνους.

Τώρα στο νέο, στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ το ίδιο πιο πάνω διάνυσμα \mathbf{r} θα έχει προφανώς διαφορετικές συνιστώσες x'_1 , x'_2 και x'_3 . Έτσι αυτό παίρνει τώρα τη μορφή

$$\mathbf{r} = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3 \quad \text{ή πιο σύντομα} \quad \mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x'_i\mathbf{e}'_i. \quad (1.1.2)$$

Αλλά φυσικά στην πραγματικότητα εδώ πρόκειται για το ίδιο ακριβώς διάνυσμα: το διάνυσμα \mathbf{r} , όπως ήδη είπαμε, το οποίο είναι το διάνυσμα θέσεως του σημείου P .

Επομένως από τις δύο σχέσεις (1.1.2) και (1.1.1) (και οι δυο τους με το διάνυσμα \mathbf{r} αριστερά) διαπιστώνουμε αμέσως εξισώνοντας και τα δεξιά μέλη τους ότι

$$x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3 = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.1.3)$$

Πάμε τώρα και λίγο παρακάτω. Πολλαπλασιάζουμε αυτήν την τελευταία σχέση εσωτερικά επί το διάνυσμα \mathbf{e}'_1 (εσωτερικό γινόμενο στα διανύσματα). Παίρνουμε επίσης υπόψη μας ότι εργαζόμαστε σε συστήματα Καρτεσιανών συντεταγμένων και επίσης ότι τα τρία διανύσματα \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 και \mathbf{e}_3 στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ είναι όχι μόνο μοναδιαία, αλλά και κάθετα ανά δύο μεταξύ τους. Ανάλογα ισχύουν και για τα διανύσματα \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 και \mathbf{e}'_3 στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. Επομένως ισχύουν οι ακόλουθες έξι σχέσεις στα εσωτερικά γινόμενα των τριών μοναδιαίων διανυσμάτων \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 και \mathbf{e}_3 :

$$\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 = 1 \quad \text{και} \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 = 0 \quad (1.1.4)$$

για το πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. Και ανάλογα

$$\mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_3 \mathbf{e}'_3 = 1 \quad \text{και} \quad \mathbf{e}'_1 \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_2 \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_3 \mathbf{e}'_1 = 0 \quad (1.1.5)$$

για το δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. (Και σ' αυτές εδώ τις σχέσεις θεωρούμε εσωτερικά γινόμενα διανυσμάτων αν και εδώ παραλείπουμε τις τελείες μεταξύ των διανυσμάτων στα εσωτερικά γινόμενα διανυσμάτων.)

Στο σημείο αυτό θυμόμαστε το γνωστό μας ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων \mathbf{A} και \mathbf{B} . Πρόκειται για το εσωτερικό γινόμενο

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv \mathbf{AB} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta \quad \text{με} \quad \theta = \text{γωνία}(\mathbf{A}, \mathbf{B}), \quad (1.1.6)$$

δηλαδή τη γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους τα δύο διανύσματα \mathbf{A} και \mathbf{B} .

Με βάση τα παραπάνω από τη σχέση (1.1.3) με πολλαπλασιασμό της (εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων) επί το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{e}'_1 προκύπτει αμέσως ότι

$$x'_1 = x_1(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}'_1) + x_2(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}'_1) + x_3(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}'_1). \quad (1.1.7)$$

Η σχέση αυτή μας δίνει τη συνιστώσα x'_1 του διανύσματος \mathbf{r} στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ με βάση τις τρεις συνιστώσες του x_1 , x_2 και x_3 στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. Ανάλογα με πολλαπλασιασμό (ξανά εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων) της σχέσεως (1.1.3) επί το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{e}'_2 προκύπτει ότι

$$x'_2 = x_1(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}'_2) + x_2(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}'_2) + x_3(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}'_2). \quad (1.1.8)$$

Τέλος με πολλαπλασιασμό (και πάλι εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων) της ίδιας σχέσεως (1.1.3) επί το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{e}'_3 προκύπτει ότι

$$x'_3 = x_1(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}'_3) + x_2(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}'_3) + x_3(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}'_3). \quad (1.1.9)$$

Με τους τρεις αυτούς τύπους μεταβαίνουμε από τις συνιστώσες x_i του διανύσματος \mathbf{r} στο πρώτο σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ στις νέες συνιστώσες του x'_k στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. Προφανώς οι τρεις πιο πάνω τύποι (1.1.7), (1.1.8) και (1.1.9) μπορούν να γραφούν πιο συνοπτικά στη μορφή

$$x'_k = x_1(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}'_k) + x_2(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}'_k) + x_3(\mathbf{e}_3 \mathbf{e}'_k) = \sum_{i=1}^3 x_i(\mathbf{e}_i \mathbf{e}'_k) \quad \text{με} \quad k = 1, 2, 3. \quad (1.1.10)$$

Εντελώς ανάλογα, αλλά τώρα με πολλαπλασιασμούς (ξανά εσωτερικά γινόμενα διανυσμάτων) της ίδιας σχέσεως (1.1.3) επί τα τρία μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 και \mathbf{e}_3 στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$, προκύπτουν και οι ανάλογοι τρεις τύποι

$$x_i = x'_1(\mathbf{e}'_1\mathbf{e}_i) + x'_2(\mathbf{e}'_2\mathbf{e}_i) + x'_3(\mathbf{e}'_3\mathbf{e}_i) = \sum_{k=1}^3 x'_k(\mathbf{e}'_k\mathbf{e}_i) \quad \text{με } i = 1, 2, 3. \quad (1.1.11)$$

Με τους τρεις αυτούς αυτούς πηγαίνουμε από τις συνιστώσες x'_k του διανύσματος \mathbf{r} στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ στις συνιστώσες του x_i στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. Φυσικά το σύμβολο για ένα δείκτη, είτε ελεύθερο είτε σε άθροισμα, είναι αυθαίρετο και μπορεί να χρησιμοποιηθεί κι οποιοδήποτε άλλο σύμβολο αρκεί βέβαια να μη δημιουργείται σύγχυση.

Και τώρα έχοντας εδώ τα δύο συστήματα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ (το πρώτο) και $Ox'_1x'_2x'_3$ (το δεύτερο), εισάγουμε τις γωνίες θ_{ki} μεταξύ των αξόνων του δεύτερου συστήματος συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ (με τους τόνους) και του πρώτου συστήματος συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ (του αρχικού συστήματος συντεταγμένων) ή απόλυτα ισοδύναμα (έχουμε τις ίδιες ακριβώς γωνίες θ_{ki}) μεταξύ των αντίστοιχων μοναδιαίων διανυσμάτων. Συγκεκριμένα ορίζουμε τις γωνίες

$$\theta_{ki} = \text{γωνία}(Ox'_k, Ox_i) = \text{γωνία}(\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}_i) \quad \text{με } k, i = 1, 2, 3. \quad (1.1.12)$$

Σημειώνουμε μάλιστα ότι για $i \neq k$ γενικά άλλη είναι η γωνία θ_{ki} μεταξύ των αξόνων Ox'_k και Ox_i και άλλη είναι η γωνία θ_{ik} μεταξύ των αξόνων Ox'_i και Ox_k . Αυτό είναι προφανές και από το Σχήμα Ε1.1: άλλοι, εντελώς διαφορετικοί άξονες άρα και άλλες, εντελώς διαφορετικές γωνίες θ_{ki} . Επομένως γενικά

$$\theta_{ki} \neq \theta_{ik} \quad \text{για } k \neq i \quad \text{και με } k, i = 1, 2, 3. \quad (1.1.13)$$

Δηλαδή το μητρώο των γωνιών θ_{ki} γενικά δεν είναι συμμετρικό μητρώο. Δε μας πολυνοιάζουν όμως οι γωνίες θ_{ki} που καθορίζουν τη στροφή του δεύτερου συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ ως προς το πρώτο $Ox_1x_2x_3$ (Σχήμα Ε1.1). Εδώ με βάση τον τύπο (1.1.6) για το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{AB} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos \theta$ δύο διανυσμάτων \mathbf{A} και \mathbf{B} μας ενδιαφέρουν μόνο τα συνημίτονα c_{ki} αυτών των γωνιών θ_{ki} , δηλαδή οι ποσότητες που ορίζονται σαν

$$c_{ki} = \cos \theta_{ki} \quad \text{και φυσικά } c_{ki} = \cos(-\theta_{ki}), \quad \text{μια που } \cos(-\theta) = \cos \theta. \quad (1.1.14)$$

Εδώ στα συνημίτονα c_{ki} , όπως και στις αντίστοιχες γωνίες θ_{ki} , ο πρώτος δείκτης k αναφέρεται στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. Παράπερα ο δεύτερος δείκτης i αναφέρεται στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. Βέβαια αυτήν τη σύμβαση ως προς τους δείκτες εμείς την επιλέξαμε εδώ. Ασφαλώς θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει και την αντίθετη σύμβαση (κι αυτό γίνεται στ' αλήθεια αρκετά συχνά στη βιβλιογραφία).

Προφανώς, αφού γενικά, όπως ήδη είπαμε, $\theta_{ki} \neq \theta_{ik}$ για $k \neq i$, το ίδιο ακριβώς θα ισχύει και για τα αντίστοιχα συνημίτονα $c_{ki} = \cos \theta_{ki}$. Και το δικό τους μητρώο

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1.15)$$

είναι και αυτό ένα μη συμμετρικό μητρώο, δηλαδή γενικά $c_{ki} \neq c_{ik}$ για $k \neq i$. Ενώ αντίθετα τόσα άλλα μητρώα του Πολιτικού Μηχανικού, όπως τα μητρώα μάζας και δυσκαμψίας στη Δυναμική των Κατασκευών ή τα μητρώα των τάσεων, των παραμορφώσεων και των ροιών αδρανείας στη Μηχανική των Υλικών, είναι συμμετρικά μητρώα και το ξέρουμε καλά αυτό. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για το μητρώο διαπερατότητας (των συντελεστών διαπερατότητας) του εδάφους k_{ij} στο φαινόμενο της διηθήσεως στην Εδαφομηχανική. Είναι κι αυτό ένα συμμετρικό μητρώο.

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση Ε1.1:** Εδώ, σ' αυτό το Κεφάλαιο Ε1 για τους Καρτεσιανούς τανυστές συνήθως τους δηλώνουμε με ένα τυπικό στοιχείο τους, π.χ. A_i για ένα διάνυσμα ή A_{ij} για έναν τανυστή δευτέρας τάξεως, όπως θα δούμε παρακάτω. Μερικές φορές όμως υιοθετούμε τον εξής συμβολισμό: πέρα από τα κοινά σύμβολα, π.χ. το x , που τα γράφουμε με πλάγια γράμματα, όπως κάνουμε πάντα, τα διανύσματα, π.χ. το \mathbf{A} , τα γράφουμε με όρθια παχιά γράμματα, πάλι όπως κάνουμε πάντα. Όμως τα μητρώα που δεν είναι απλά διανύσματα, όπως εδώ το \mathbf{C} , και επίσης παρακάτω και τους τανυστές (και δευτέρας τάξεως, αλλά και μεγαλύτερης τάξεως), τα γράφουμε με παχιά ισοπαχή γράμματα (δηλαδή με διαφορετική γραμματοσειρά). Έτσι διακρίνουμε το διάνυσμα \mathbf{A} από το τετραγωνικό μητρώο \mathbf{A} (και σε λίγο και πολύ γενικότερα από τον τανυστή \mathbf{A}). Αυτό δεν το κάναμε στα προπτυχιακά μαθήματα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III, όπου χρησιμοποιούσαμε ανάλογα (δηλαδή της ίδιας γραμματοσειράς) όρθια παχιά γράμματα τόσο για διανύσματα όσο και για τετραγωνικά μητρώα και ούτε βέβαια είναι και αναγκαίο. Πολλές φορές όμως (και εδώ!) χρησιμοποιούμε το σύμβολο \mathbf{A} όχι μόνο για να δηλώσουμε ένα μητρώο ή τανυστή, αλλά και για να δηλώσουμε ένα διάνυσμα, ιδίως όταν μελετάμε τις γενικές ιδιότητες των τανυστών που ισχύουν επίσης και στην ειδική περίπτωση των διανυσμάτων. ▲

Τώρα είμαστε έτοιμοι! Έχουμε εισαγάγει και τα σύμβολα c_{ki} στη σχέση (1.1.14) για να δηλώνουμε τα συνημίτονα $\cos \theta_{ki}$ για τα εσωτερικά γινόμενα $\mathbf{e}'_k \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}'_k$ των μοναδιαίων διανυσμάτων \mathbf{e}'_k και \mathbf{e}_i ή (το ίδιο κάνει!) \mathbf{e}_i και \mathbf{e}'_k . Επομένως θα ισχύει

$$\mathbf{e}'_k \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \mathbf{e}'_k = \cos \theta_{ki} = c_{ki} \quad \text{με } i, k = 1, 2, 3, \quad (1.1.16)$$

αφού τα μέτρα όλων των μοναδιαίων διανυσμάτων είναι ίσα με ένα: $|\mathbf{e}_i| = |\mathbf{e}'_k| = 1$ (με $i, k = 1, 2, 3$). Επομένως οι τύποι (1.1.10) και (1.1.11) για τη μετατροπή των συνιστωσών ενός διανύσματος \mathbf{r} από ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ σε άλλο $Ox'_1x'_2x'_3$ που προκύπτει με στροφή του πρώτου παίρνουν τώρα τις μορφές

$$x'_k = c_{k1}x_1 + c_{k2}x_2 + c_{k3}x_3 = \sum_{i=1}^3 c_{ki}x_i \quad \text{με } k = 1, 2, 3 \quad (1.1.17)$$

και

$$x_i = c_{1i}x'_1 + c_{2i}x'_2 + c_{3i}x'_3 = \sum_{k=1}^3 c_{ki}x'_k \quad \text{με } i = 1, 2, 3. \quad (1.1.18)$$

Κατανοούμε επίσης ότι οι ποσότητες c_{ki} στο πιο πάνω μητρώο συνημιτόνων \mathbf{C} , σχέση (1.1.15), δηλώνουν τα συνημίτονα $c_{ki} = \cos \theta_{ki} = \cos[\text{γωνία}(\mathbf{e}'_k, \mathbf{e}_i)]$, όπως ήδη αναφέραμε. Άρα για τα τρία μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 και \mathbf{e}'_3 στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ (Σχήμα Ε1.1) θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{e}'_k = c_{k1}\mathbf{e}_1 + c_{k2}\mathbf{e}_2 + c_{k3}\mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 c_{ki}\mathbf{e}_i \quad \text{με } k = 1, 2, 3. \quad (1.1.19)$$

Εντελώς ανάλογα και για τα τρία μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 και \mathbf{e}_3 στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ (Σχήμα Ε1.1) θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\mathbf{e}_i = c_{1i}\mathbf{e}'_1 + c_{2i}\mathbf{e}'_2 + c_{3i}\mathbf{e}'_3 = \sum_{k=1}^3 c_{ki}\mathbf{e}'_k \quad \text{με } i = 1, 2, 3. \quad (1.1.20)$$

✎ Άσκηση

Ενότητα Ε1.1

▼ Άσκηση Ε1.1 ■ Στροφή συστήματος συντεταγμένων στο επίπεδο

Εδώ περιοριζόμαστε στο επίπεδο. Θεωρούμε τη στροφή του αρχικού (του πρώτου) συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων Ox_1x_2 κατά γωνία θ . (Θετική τιμή της γωνίας θ δηλώνει στροφή κατά τη θετική φορά, δηλαδή αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού.) Προκύπτει έτσι το νέο (το δεύτερο) σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2$. Ζητούνται: (α) Το σχετικό σχήμα με τη γωνία θ θετική. (β) Να αποδειχθεί ότι τα συνημίτονα c_{ki} (εδώ βέβαια με $k, i = 1, 2$ όχι και 3) παίρνουν τις τιμές

$$c_{11} = c_{22} = \cos \theta, \quad c_{12} = \sin \theta \quad \text{και} \quad c_{21} = -\sin \theta. \quad (1.1.21)$$

(γ) Το σχετικό μητρώο \mathbf{C} . (δ) Οι ειδικές μορφές που παίρνουν εδώ οι τύποι (1.1.17) και (1.1.18) με χρήση των ίδιων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\cos \theta$, $\sin \theta$. ▲

Ε1.1.2

Ε1.1.2. Σύμβαση αθροίσεως του Einstein

Στους τανυστές, αλλά και σε πολλές άλλες περιοχές των μαθηματικών, παρουσιάζονται αθροίσματα με όρους όπου ένας δείκτης εμφανίζεται δύο φορές. Για παράδειγμα, αυτό συμβαίνει στις πιο πάνω σχέσεις (1.1.17) με το δείκτη i στο άθροισμα δεξιά και (1.1.18) με το δείκτη k στο άθροισμα δεξιά. Στις περιπτώσεις αυτές ακολουθούμε σχεδόν πάντα τη σύμβαση αθροίσεως του Einstein. Σύμφωνα με τη σύμβαση αυτή το σύμβολο της αθροίσεως Σ παραλείπεται εντελώς και εννοείται ότι η άθροιση γίνεται ως προς τον επαναλαμβανόμενο (δύο φορές, ακριβώς δύο!) δείκτη, το δείκτη της αθροίσεως. Εδώ μάλιστα, στον τριδιάστατο χώρο, εννοείται ότι το i και το k παίρνουν τιμές από 1 μέχρι 3. Ανάλογα στο διδιάστατο χώρο από 1 μέχρι 2. Σύμφωνα λοιπόν με τη σύμβαση αθροίσεως του Einstein οι δύο πιο πάνω σχέσεις (1.1.17) και (1.1.18) παίρνουν τις πιο απλές στο συμβολισμό μορφές τους

$$x'_k = c_{ki}x_i \quad \text{και} \quad x_i = c_{ki}x'_k \quad (1.1.22)$$

αντίστοιχα. Στην πρώτη σχέση στο δεξιό μέλος της εννοείται ότι η άθροιση γίνεται ως προς i , δηλαδή ο επαναλαμβανόμενος δείκτης (δύο φορές) είναι το i και ο ελεύθερος δείκτης είναι το k . Αντίθετα στη δεύτερη σχέση στο δεξιό μέλος της εννοείται ότι η άθροιση γίνεται ως προς k , δηλαδή ο επαναλαμβανόμενος δείκτης (δύο φορές) είναι το k και ο ελεύθερος δείκτης είναι το i . Και στις δύο περιπτώσεις η άθροιση εννοείται ότι γίνεται από 1 έως 3 στον τριδιάστατο χώρο (εδώ, Σχήμα Ε1.1) και από 1 έως 2 στην ειδική περίπτωση του διδιάστατου χώρου (Άσκηση Ε1.1 λίγο πιο πάνω).

Παραδείγματος χάρη, με βάση αυτήν τη σύμβαση της αθροίσεως του Einstein για ένα τετραγωνικό μητρώο \mathbf{A} διαστάσεων $n \times n$ με στοιχεία A_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) το ίχνος του, δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου του, θα είναι απλά A_{ii} με το σύμβολο αυτό να δηλώνει προφανώς το σχετικό άθροισμα από $i = 1$ έως $i = n$, δηλαδή το άθροισμα $A_{ii} = \sum_{i=1}^n A_{ii}$. Ανάλογα το διάνυσμα θέσεως \mathbf{r} στις σχέσεις (1.1.1) και (1.1.2) μπορεί να γραφεί πιο απλά στη μορφή

$$\mathbf{r} = x_i\mathbf{e}_i = x'_i\mathbf{e}'_i \quad \text{ή} \quad \mathbf{r} = x_k\mathbf{e}_k = x'_k\mathbf{e}'_k \quad \text{κλπ.} \quad (1.1.23)$$

❖ **Παράδειγμα**
Ενότητα Ε1.1

▼ **Παράδειγμα Ε1.1** ■ **Εξίσωση του Laplace**

Σε πάρα πολλά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού, αλλά και του Μηχανικού γενικότερα, παρουσιάζεται ο τελεστής του Laplace ∇^2 . Αυτός εφαρμόζεται σε μια κατάλληλα παραγωγίσιμη συνάρτηση $u = u(x_1, x_2, x_3)$. Στις τρεις διαστάσεις έχουμε

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i}. \quad (1.1.24)$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε πρώτα το σύμβολο της αθροίσεως Σ και στη συνέχεια για να απαλλαγούμε και από αυτό τη σύμβαση αθροίσεως του Einstein για επαναλαμβανόμενο δείκτη, εδώ το δείκτη i . Εντούτοις αυτός ο επαναλαμβανόμενος δείκτης παρουσιάζεται εδώ σε παράγωγο. Αυτό όμως δε μας ενοχλεί καθόλου: η σύμβαση αθροίσεως του Einstein συνεχίζει να ισχύει και σε τέτοιες παράξενες περιπτώσεις. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε1.1

▼ **Άσκηση Ε1.2** ■ **Ρευστομηχανική: ροή ρευστού**

Θεωρούμε τη μόνιμη (σταθερή) τριδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού με διανυσματική ταχύτητα

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.1.25)$$

Ζητούνται: (α) Να γραφεί αυτή η ταχύτητα \mathbf{v} με τη χρήση αθροίσματος και στη συνέχεια με χρήση και της συμβάσεως αθροίσεως του Einstein χωρίς πια το σύμβολο Σ . (β) Να γραφεί ανάλογα (με άθροισμα και τελικά με τη χρήση και της συμβάσεως αθροίσεως του Einstein) η απόκλιση (divergence) της ταχύτητας \mathbf{v} που ορίζεται με βάση τον πολύ γνωστό μας από τη Διανυσματική Ανάλυση σχετικό τύπο

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \quad (1.1.26)$$

(γ) Τι δηλώνει από φυσική άποψη στη Ρευστομηχανική η εξίσωση $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ στην παρούσα άσκηση, όπου έχουμε μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού; ▲

E1.1.3

E1.1.3. Το δέλτα του Kronecker

Ένα πολύ χρήσιμο σύμβολο στους τανυστές είναι το **δέλτα του Kronecker** δ_{ij} εδώ στον τριδιάστατο χώρο με $i, j = 1, 2, 3$. Αυτό το σύμβολο δ_{ij} ορίζεται ως εξής:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{για } i = j, \\ 0 & \text{για } i \neq j. \end{cases} \quad (1.1.27)$$

Το σχετικό συμμετρικό (και διαγώνιο!) μητρώο δ με στοιχεία του τα δ_{ij} είναι το εξής:

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.1.28)$$

Δηλαδή το δέλτα του Kronecker δ_{ij} παίρνει την τιμή 1, όταν οι δύο δείκτες του i και j είναι ίσοι (δηλαδή $i = j$), και την τιμή 0, όταν οι δύο δείκτες του i και j είναι διαφορετικοί (δηλαδή $i \neq j$). Τόσο απλά!

Με τη χρήση του ορισμού (1.1.27) του δέλτα του Kronecker δ_{ij} μπορούμε για παράδειγμα να αποδείξουμε ότι για ένα μέγεθος A_{ij} δευτέρας τάξεως, δηλαδή με δύο δείκτες i και j και $3^2 = 9$ συνιστώσες A_{ij} , ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\delta_{kj}A_{ij} = A_{ik}. \quad (1.1.29)$$

Η σχέση αυτή καλείται *ιδιότητα της αντικαταστάσεως* του δέλτα του Kronecker.

Για την απόδειξή της παρατηρούμε ότι εδώ ο δείκτης j είναι επαναλαμβανόμενος. Άρα έχουμε αριστερά το άθροισμα $\delta_{k1}A_{i1} + \delta_{k2}A_{i2} + \delta_{k3}A_{i3}$. Και τώρα κάνουμε διάκριση τριών περιπτώσεων: Πρώτα, αν $k = 1$, το άθροισμα αυτό μας δίνει A_{i1} με βάση τον ορισμό (1.1.27) του δ_{ij} , επειδή $\delta_{11} = 1$, ενώ $\delta_{12} = \delta_{13} = 0$. Άρα για $k = 1$ ισχύει η προς απόδειξη σχέση (1.1.29). Εντελώς ανάλογα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει για $k = 2$ και για $k = 3$. Επομένως, αφού τα i και k παίρνουν τιμές από 1 έως 3, η πιο πάνω σχέση (1.1.29) ισχύει σε κάθε περίπτωση. Με απόλυτα ανάλογο τρόπο μπορούν να αποδειχθούν και πολλές παρόμοιες σχέσεις, π.χ. η σχέση

$$\delta_{kp}A_{ijkm} = A_{ijpm}. \quad (1.1.30)$$

Δηλαδή κι εδώ ο ελεύθερος δείκτης (εδώ το p) του δ_{kp} αριστερά παίρνει δεξιά τη θέση του δείκτη αθροίσεως, του επαναλαμβανόμενου δείκτη (εδώ του k) στο μέγεθος A_{ijkm} . Και φυσικά το δ_{kp} δεν παρουσιάζεται δεξιά.

Ανάλογα μπορούμε να γράψουμε και άλλες παρόμοιες σχέσεις με την ιδιότητα της αντικαταστάσεως του δέλτα του Kronecker δ_{ij} . Για παράδειγμα, πολύ συχνά χρησιμοποιούμε την απλή και με ανάλογη απόδειξη σχέση

$$\delta_{ij}A_j = A_i \quad \text{ή} \quad \delta_{ij}A_i = A_j. \quad (1.1.31)$$

Παρουσιάζουμε τώρα και μια ακόμη εφαρμογή του δέλτα του Kronecker. Από το μητρώο των συνημιτόνων \mathbf{C} στη σχέση (1.1.15), το επαναλαμβάνουμε κι εδώ αμέσως πιο κάτω, και τις σχέσεις (1.1.19) κατανοούμε ότι η πρώτη γραμμή του μητρώου

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.1.32)$$

δηλαδή η γραμμή $\{c_{11} \ c_{12} \ c_{13}\}$, δηλώνει τις τρεις συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{e}'_1 ως προς το πρώτο σύστημα συντεταγμένων (χωρίς τόνους). Ανάλογα η δεύτερη γραμμή του ίδιου μητρώου \mathbf{C} δηλώνει τις συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{e}'_2 . Τέλος η τρίτη γραμμή και πάλι του ίδιου μητρώου \mathbf{C} δηλώνει τις συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{e}'_3 . Αυτά όμως τα τρία μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 και \mathbf{e}'_3 είναι επίσης κάθετα μεταξύ τους και ισχύουν οι σχέσεις (1.1.5). Τις υπενθυμίζουμε κι αυτές τις έξι σχέσεις

$$\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_3\mathbf{e}'_3 = 1 \quad \text{και} \quad \mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_3\mathbf{e}'_1 = 0. \quad (1.1.33)$$

Με βάση τις αριστερά πιο πάνω σχέσεις πρέπει να ισχύουν και οι τρεις σχέσεις

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 = c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 = c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 = 1, \quad (1.1.34)$$

αφού πρόκειται για τρία μοναδιαία διανύσματα: τα \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 και \mathbf{e}'_3 , σχέσεις (1.1.33). Ανάλογα με βάση τις δεξιά σχέσεις (1.1.33) πρέπει να ισχύουν και οι τρεις σχέσεις


$$c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + c_{13}c_{23} = c_{21}c_{31} + c_{22}c_{32} + c_{23}c_{33} = c_{31}c_{11} + c_{32}c_{12} + c_{33}c_{13} = 0, \quad (1.1.35)$$

επειδή πρόκειται και για κάθετα μεταξύ τους διανύσματα: πάλι τα $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ και \mathbf{e}'_3 .

Πολλές (έξι συνολικά) σχέσεις μαζεύτηκαν. Ας απλοποιήσουμε λίγο την κατάσταση. Με χρήση του δέλτα του Kronecker δ_{ij} καθώς και της συμβάσεως αθροίσεως του Einstein διαπιστώνουμε σχετικά εύκολα ότι και οι έξι αυτές σχέσεις μπορούν να απλοποιηθούν στην εξής ενιαία και ταυτόχρονα πολύ απλή μορφή τους

$$c_{ik}c_{jk} = \delta_{ij}. \tag{1.1.36}$$

Ας μην έχουμε λοιπόν αμφιβολίες: τόσο η σύμβαση της αθροίσεως του Einstein όσο και το δέλτα του Kronecker δ_{ij} μας είναι χρήσιμα εργαλεία στους τανυστές που εξετάζουμε (καλύτερα θα εξετάσουμε) εδώ. Αλλιώς απλά δε θα τα αναφέραμε καθόλου!

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε1.1

▼ **Άσκηση Ε1.3** ■ **Δέλτα του Kronecker**

Με τη χρήση των διανυσμάτων \mathbf{e}_i στο πρώτο (στο αρχικό) σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ να αποδειχθεί λεπτομερώς και η ανάλογη σχέση

$$c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk}. \tag{1.1.37}$$

Και οι δύο σχέσεις (1.1.36) και (1.1.37) είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες και χρήσιμες. Η πρώτη με βάση τα διανύσματα \mathbf{e}'_k , ενώ η δεύτερη με βάση τα διανύσματα \mathbf{e}_i . ▲

E1.1.4

E1.1.4. Το σύμβολο του Levi–Civita

Ένα ακόμη πάρα πολύ χρήσιμο σύμβολο στους τανυστές, ακριβώς όπως το δέλτα του Kronecker δ_{ij} , είναι το **σύμβολο του Levi–Civita** ε_{ijk} , που μερικές φορές καλείται και **μεταθετικό σύμβολο** και λίγο πιο σπάνια **σύμβολο εναλλαγής**. Το σύμβολο αυτό ε_{ijk} ορίζεται ως εξής:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{εάν οι τρεις δείκτες } i, j, k \text{ είναι διαφορετικοί} \\ & \text{και σε κυκλική μετάθεση: } 123, 231 \text{ και } 312. \\ -1, & \text{εάν οι τρεις δείκτες } i, j, k \text{ είναι διαφορετικοί} \\ & \text{και σε αντίστροφη κυκλική μετάθεση: } 321, 213 \text{ και } 132. \\ 0, & \text{εάν οποιοδήποτε δύο από τους τρεις δείκτες } i, j, k \\ & \text{είναι ίσοι μεταξύ τους: } i = j \text{ ή } j = k \text{ ή } k = i \text{ (ή } i = j = k). \end{cases} \tag{1.1.38}$$

Πιο αναλυτικά το σύμβολο του Levi–Civita (ή μεταθετικό σύμβολο) ε_{ijk} παίρνει με βάση τον πιο πάνω ορισμό του (1.1.38) τις ακόλουθες τρεις τιμές:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{123} &= \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ \varepsilon_{321} &= \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = -1, \\ \varepsilon_{ijk} &= 0 \text{ σε κάθε άλλη περίπτωση.} \end{aligned} \tag{1.1.39}$$

Δηλαδή τονίζουμε ότι $\varepsilon_{ijk} = 0$ κάθε φορά που δύο τουλάχιστον από αυτούς τους τρεις δείκτες i, j και k είναι ίσοι μεταξύ τους (ή φυσικά και οι τρεις τους είναι ίσοι).

Είναι πολύ χρήσιμο το σύμβολο του Levi–Civita (ή μεταθετικό σύμβολο) ε_{ijk} . Και πρώτα–πρώτα με τη βοήθειά του μπορούμε να εκφράσουμε το γνωστό μας εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ δύο διανυσμάτων \mathbf{A} και \mathbf{B} . Το γινόμενο αυτό εκφράζεται

με χρήση των συνιστωσών A_i και B_i των διανυσμάτων \mathbf{A} και \mathbf{B} συνοπτικά στη μορφή

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (1.1.40)$$

φυσικά με \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 και \mathbf{e}_3 τα τρία μοναδιαία διανύσματα του συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. Πιο αναλυτικά το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ εκφράζεται με τις τρεις συνιστώσες του

$$C_1 = A_2B_3 - A_3B_2, \quad C_2 = A_3B_1 - A_1B_3 \quad \text{και} \quad C_3 = A_1B_2 - A_2B_1. \quad (1.1.41)$$

Διαπιστώνουμε ότι αυτές οι τρεις συνιστώσες C_i του εξωτερικού γινομένου $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ γράφονται και στη μορφή

$$C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k. \quad (1.1.42)$$

Άσκηση

Ενότητα Ε1.1

▼ Άσκηση Ε1.4 ■ Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Να αποδειχθεί αναλυτικά (για $i = 1, i = 2$ και $i = 3$) η ισχύς του τύπου (1.1.42). ▲

Ανάλογα πάλι με τη βοήθεια του συμβόλου του Levi-Civita (ή μεταθετικού συμβόλου) μπορούμε να εκφράσουμε μια ορίζουσα τρίτης τάξεως, π.χ. την ορίζουσα

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.1.43)$$

Με ανάπτυγμα αυτής της ορίζουσας D διαπιστώνουμε εύκολα ότι εκφράζεται και στη μορφή

$$D = \varepsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}. \quad (1.1.44)$$

Άσκηση

Ενότητα Ε1.1

▼ Άσκηση Ε1.5 ■ Ορίζουσα τρίτης τάξεως

Να αποδειχθεί αναλυτικά η ισχύς του πιο πάνω τύπου (1.1.44) για τον υπολογισμό της ορίζουσας τρίτης τάξεως (1.1.43). ▲

Επίσης για το μικτό γινόμενο $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ τριών διανυσμάτων \mathbf{A} , \mathbf{B} και \mathbf{C} γνωρίζουμε ότι υπολογίζεται τελικά από την ορίζουσα

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k \quad (1.1.45)$$

σύμφωνα με τον τύπο (1.1.44) για τον υπολογισμό μιας ορίζουσας τρίτης τάξεως D . Βέβαια εδώ μπορούμε να επαληθεύσουμε και απευθείας τη δεξιά έκφραση $\varepsilon_{ijk} A_i B_j C_k$ του μικτού γινομένου $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$.

Παρακάτω στην Παράγραφο Ε1.6.4 θα δούμε πώς εκφράζεται και ο στροβιλισμός (ή περιστροφή) $\nabla \times \mathbf{v}$ ή $\text{curl } \mathbf{v}$ ενός διανύσματος (ή διανυσματικού μεγέθους ή διανυσματικού πεδίου) $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$ και πάλι με τη χρήση του συμβόλου ε_{ijk} του Levi-Civita (ή μεταθετικού συμβόλου): τύπος (1.6.19) εκεί.

E1.2

E1.2. ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΤΑΝΥΣΤΗ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

Προχωράμε τώρα στο γενικό ορισμό του τανυστή και έπειτα θα αναφερθούμε σε ορισμένες απλές ειδικές περιπτώσεις του.

E1.2.1

E1.2.1. Ορισμός του τανυστή

Με βάση όσα εκθέσαμε στην προηγούμενη ενότητα είμαστε τώρα έτοιμοι να προχωρήσουμε στην κύρια ενότητα αυτού του κεφαλαίου που αφορά στον ορισμό του τανυστή. Στην επόμενη ενότητα θα αναφερθούμε και σε τέσσερις πράξεις που αφορούν επίσης στους τανυστές.

● ΟΡΙΣΜΟΣ

▼ **ΟΡΙΣΜΟΣ E1.1 (Τανυστής):** Λέμε ότι ένα μέγεθος \mathbf{A} με συνιστώσες $A_{ijk\dots m}$ ή πιο απλά ένα μέγεθος $A_{ijk\dots m}$ είναι **τανυστής** τάξεως n , εάν έχει n ελεύθερους δείκτες i, j, k, \dots, m και επιπλέον, αυτό που είναι το βασικό στον ορισμό του τανυστή, σε στροφή του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων οι νέες συνιστώσες του $A'_{pqr\dots t}$ δίνονται από τις αρχικές συνιστώσες του $A_{ijk\dots m}$ με βάση τον τύπο

$$A'_{pqr\dots t} = c_{pi}c_{qj}c_{rk} \dots c_{tm}A_{ijk\dots m}. \quad (1.2.1)$$

Στον τύπο αυτό οι ποσότητες $c_{\alpha\beta}$ είναι τα συνημίτονα που ορίστηκαν πιο πάνω στις σχέσεις (1.1.14) και σχηματίζουν το σχετικό μητρώο \mathbf{C} στη σχέση (1.1.15). ▲

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση E1.2:** Μπορεί να αποδειχθεί ότι σαν ορισμός του ίδιου τανυστή \mathbf{A} ή ισοδύναμα $A_{ijk\dots m}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η απόλυτα ανάλογη σχέση

$$A_{ijk\dots m} = c_{pi}c_{qj}c_{rk} \dots c_{tm}A'_{pqr\dots t}. \quad (1.2.2)$$

Με αυτήν πηγαίνουμε απλά από το δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων στο πρώτο αντί από το πρώτο στο δεύτερο, όπως έγινε αρχικά στη σχέση (1.2.1). ▲

Σημείωση

● **Σημείωση:** Προφανώς όλοι οι δείκτες ενός τανυστή (και οι n δείκτες του!) παίρνουν τιμές από 1 μέχρι 3 στον τριδιάστατο χώρο και από 1 μέχρι 2 στο διδιάστατο χώρο, π.χ. $i = 1, 2, 3$ και $i = 1, 2$ αντίστοιχα για το δείκτη i .

Βέβαια ο παραπάνω ορισμός (1.2.1) του τανυστή τάξεως n είναι ένας πάρα πολύ γενικός ορισμός που αφορά σε κάθε τάξη n του τανυστή. Ας τον εξειδικεύσουμε τώρα για τάξεις του τανυστή $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$ και $n = 4$.

E1.2.2

E1.2.2. Τανυστές μηδενικής τάξεως: βαθμωτά μεγέθη

Πρόκειται για την απλούστερη περίπτωση, όπου δεν έχουμε κανέναν απολύτως δείκτη στον τανυστή \mathbf{A} ($n = 0$). Εδώ έχουμε απλά ένα **βαθμωτό μέγεθος** A και ο πιο πάνω γενικός ορισμός (1.2.1) του τανυστή παίρνει την τετριμμένη μορφή του

$$A' = A \quad (1.2.3)$$

που δεν έχει κανένα απολύτως συνημίτονο $c_{\alpha\beta}$. Δηλαδή, με πολύ απλά λόγια, το **βαθμωτό μέγεθος** (ή ισοδύναμα ο **τανυστής μηδενικής τάξεως**) δε μεταβάλλεται,

όταν στραφεί το σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων. Αυτό είναι προφανές από τη σχέση (1.2.3), που είναι φυσικά σύμφωνη με το γενικό ορισμό του τανυστή στη σχέση (1.2.1), εδώ βέβαια με $n = 0$ ελεύθερους δείκτες. Είναι εξάλλου προφανές πως εδώ (με $n = 0$) οι δύο σχέσεις (1.2.1) και (1.2.2) συμπίπτουν: $A' = A$ και $A = A'$.

Ξέρουμε πάρα πολλά βαθμωτά φυσικά μεγέθη (τανυστές μηδενικής τάξεως), όπως είναι η απόσταση d δύο σημείων, η μάζα m ενός υλικού σημείου, η ενέργεια E , ο χρόνος t , η πίεση p , η πυκνότητα ρ και πολλά-πολλά άλλα. Δεν υπάρχει κάτι το δύσκολο σ' αυτήν την τόσο απλή περίπτωση του τανυστή μηδενικής τάξεως ($n = 0$).

E1.2.3

E1.2.3. Τανυστές πρώτης τάξεως: διανύσματα

Πρόκειται για την αμέσως πιο δύσκολη, αλλ' εντούτοις αρκετά απλή περίπτωση, που αφορά στα **διανύσματα** ή **διανυσματικά μεγέθη**. Ένα τέτοιο μέγεθος \mathbf{A} με συνιστώσες A_i έχει ένα μόνο ελεύθερο δείκτη και ο πιο πάνω γενικός ορισμός (1.2.1) του τανυστή που αφορά στη στροφή του συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων παίρνει την πολύ απλή μορφή

$$A'_p = c_{pi}A_i \quad (1.2.4)$$

που έχει ένα μόνο συνημίτονο: το c_{pi} . Δηλαδή, πάλι με απλά λόγια, οι συνιστώσες A_i του **διανύσματος** ή **διανυσματικού μεγέθους** (ή ισοδύναμα **τανυστή πρώτης τάξεως**) \mathbf{A} μεταβάλλονται, όταν στραφεί το σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων σύμφωνα με τον τύπο (1.2.4). Αυτός ο τύπος είναι φυσικά σύμφωνος με το γενικό ορισμό του τανυστή στη σχέση (1.2.1), εδώ βέβαια με έναν ελεύθερο δείκτη.

Γνωρίζουμε πάρα πολλά διανύσματα ή διανυσματικά μεγέθη (τανυστές πρώτης τάξεως), όπως είναι το διάνυσμα θέσεως \mathbf{r} στο χώρο, η ταχύτητα \mathbf{v} , η επιτάχυνση \mathbf{a} , η δύναμη \mathbf{F} , η διανυσματική γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ (όχι απλά το μέτρο της ω) και πολλά-πολλά άλλα. Και αυτή εδώ η περίπτωση (η περίπτωση των διανυσμάτων) μας είναι ήδη γνωστή και δεν παρουσιάζει καμία ιδιαίτερη δυσκολία.

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι για ένα διάνυσμα \mathbf{A} (ή πιο απλά A_i) ο πιο πάνω τύπος (1.2.4) συμπίπτει ουσιαστικά με τον πρώτο τύπο (1.1.22) της προηγούμενης Ενότητας E1.1 για τις συνιστώσες του διανύσματος θέσεως \mathbf{r} , εκεί όμως με x αντί για A και με k αντί για p .

❖ Παράδειγμα

Ενότητα E1.2

▼ Παράδειγμα E1.2 ■ Διανύσματα

Να αποδειχθεί ότι η σχέση ορισμού (1.2.4) του διανύσματος A_i μας οδηγεί στην αντίστοιχη σχέση ορισμού του

$$A_i = c_{pi}A'_p \quad (1.2.5)$$

που προκύπτει στη συγκεκριμένη απλή περίπτωση (με $n = 1$) από τη σχέση (1.2.2).

Λύση

⇔ **Λύση:** Απλά εδώ οφείλουμε να αποδείξουμε ότι η σχέση (1.2.4) μας οδηγεί στη σχέση (1.2.5), στην εναλλακτική σχέση ορισμού ενός διανύσματος. Προς το σκοπό αυτό πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (1.2.4) επί c_{pj} μη λησιμονώντας βέβαια την τώρα πια γνωστή μας σύμβαση αθροίσεως του Einstein. Έτσι παίρνουμε

$$c_{pj}A'_p = c_{pj}c_{pi}A_i. \quad (1.2.6)$$

Αλλ' από τη γνωστή μας και ιδιαίτερα χρήσιμη σχέση (1.1.37), τη σχέση $c_{ij}c_{ik} = \delta_{jk}$, προκύπτει εδώ ότι

$$c_{pj}c_{pi} = \delta_{ji} = \delta_{ij}, \quad \text{αφού} \quad \delta_{ji} = \delta_{ij}. \quad (1.2.7)$$

Κατά συνέπεια η σχέση (1.2.6) παίρνει τώρα την απλοποιημένη μορφή της

$$c_{pj}A'_p = \delta_{ij}A_i. \quad (1.2.8)$$

Γνωρίζουμε όμως από τη σχέση (1.1.31) (την ιδιότητα της αντικαταστάσεως του δέλτα του Kronecker δ_{ij}) ότι

$$\delta_{ij}A_i = A_j. \quad (1.2.9)$$

Επομένως η παραπάνω σχέση (1.2.8) παίρνει την ακόμη πιο απλή μορφή της

$$c_{pj}A'_p = A_j. \quad (1.2.10)$$

Αυτή φυσικά συμπίπτει με τη σχέση (1.2.5) που θέλαμε να αποδείξουμε απλά αλλά λάζοντας μεταξύ τους τα σύμβολα των δεικτών i και j και επίσης χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ισότητας ότι $a = b$ συνεπάγεται $b = a$. (Και έχουμε το δικαίωμα να αλλάζουμε τα σύμβολα σε δείκτες, αρκεί να μην προκαλείται καμία σύγχυση!) ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε1.2

▼ Άσκηση Ε1.6 ■ Διανύσματα

Να αποδειχθεί ανάλογα ότι η σχέση (1.2.5) (δεύτερος ορισμός του διανύσματος A_i) οδηγεί στη σχέση (1.2.4) (πρώτος, βασικός ορισμός του ίδιου διανύσματος A_i). ▲

E1.2.4

E1.2.4. Τανυστές δευτέρας τάξεως

Εδώ πρόκειται βέβαια για την πρώτη ιδιαίτερα σημαντική περίπτωση τανυστών πέρα από τα βαθμωτά μεγέθη και τα διανύσματα (ή διανυσματικά μεγέθη). Εδώ οι συνιστώσες A_{ij} του τανυστή \mathbf{A} έχουν δύο ελεύθερους δείκτες: το i και το j . Άρα πρόκειται για τανυστή δευτέρας τάξεως (με τάξη $n = 2$). Στην περίπτωση αυτή (με δύο ελεύθερους δείκτες) ο γενικός ορισμός (1.2.1) του τανυστή, που αφορά στην αλλαγή συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων, παίρνει τη λίγο πιο πολύπλοκη (σχετικά με τα διανύσματα) μορφή του

$$A'_{pq} = c_{pi}c_{qj}A_{ij}, \quad (1.2.11)$$

που έχει δύο συνημίτονα: το c_{pi} και το c_{qj} . Δηλαδή, πάλι με απλά λόγια, οι συνιστώσες A_{ij} του τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{A} μεταβάλλονται, όταν στραφεί το σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων, σύμφωνα με τον τύπο (1.2.11). Αυτός εδώ ο τύπος είναι φυσικά σύμφωνος με το γενικό ορισμό του τανυστή στη σχέση (1.2.1), εδώ βέβαια με δύο ($n = 2$) ελεύθερους δείκτες: τανυστής δευτέρας τάξεως. Σημειώνουμε επίσης ότι εδώ στο δεξιό μέλος αυτής της σχέσεως ορισμού (1.2.11) του τανυστή δευτέρας τάξεως έχουμε σύμφωνα με τη σύμβαση αθροίσεως του Einstein διπλό άθροισμα. Αυτό συμβαίνει, επειδή έχουμε δύο επαναλαμβανόμενους δείκτες: τους i και j .

Γνωρίζουμε ήδη μερικούς (αν και όχι και πολλούς!) τανυστές δευτέρας τάξεως κυρίως από τη Μηχανική των Υλικών: αυτοί είναι ο τανυστής των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$ (ή πιο απλά σ_{ij}), ο τανυστής των παραμορφώσεων $\boldsymbol{\epsilon}$ (ή πιο απλά ϵ_{ij}) και ο τανυστής των ροπών αδρανείας \mathbf{I} (ή πιο απλά I_{ij}). Επίσης αυτή η περίπτωση των τανυστών δευτέρας τάξεως είναι πιο δύσκολη από την προηγούμενη περίπτωση των διανυσμάτων (τανυστών πρώτης τάξεως) και θα της δώσουμε εδώ κάπως μεγαλύτερη βαρύτητα.

❖ Παράδειγμα

Ενότητα Ε1.2

▼ Παράδειγμα Ε1.3 ■ Τανυστές δευτέρας τάξεως

Να αποδειχθεί ότι ένα μέγεθος δευτέρας τάξεως \mathbf{A} (ή πιο απλά A_{ij}) που οι συνιστώσες

του επαληθεύουν τις σχέσεις

$$A_{ij} = c_{pi}c_{qj}A'_{pq} \quad (1.2.12)$$

στη στροφή του συστήματος των Καρτεσιανών συντεταγμένων είναι ένας τανυστής δευτέρας τάξεως. Σημειώνουμε ότι οι σχέσεις αυτές προέρχονται από το δεύτερο ορισμό (1.2.2) του γενικού τανυστή n τάξεως (εδώ απλά με $n = 2$).

Λύση

⇒ **Λύση:** Απλά εδώ έχουμε την υποχρέωση να αποδείξουμε ότι η σχέση (1.2.12) μας οδηγεί στη σχέση (1.2.11) ορισμού του τανυστή δευτέρας τάξεως (με $n = 2$). Προς το σκοπό αυτό πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (1.2.12) επί $c_{ri}c_{sj}$ μη λησιμονώντας βέβαια την τώρα πια τόσο γνωστή μας σύμβαση αθροίσεως του Einstein. Έτσι παίρνουμε

$$c_{ri}c_{sj}A_{ij} = c_{ri}c_{sj}c_{pi}c_{qj}A'_{pq}. \quad (1.2.13)$$

Φέρνοντας τώρα το αριστερό μέλος στο δεξιό ή αντίστροφα και αλλάζοντας επίσης τη σειρά του όρου c_{pi} στο καινούργιο αριστερό μέλος, παίρνουμε

$$(c_{ri}c_{pi})(c_{sj}c_{qj})A'_{pq} = c_{ri}c_{sj}A_{ij}. \quad (1.2.14)$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας το βασικό τύπο (1.1.36) για τα συνημίτονα $c_{\alpha\beta}$, δηλαδή τον τύπο $c_{ik}c_{jk} = \delta_{ij}$, στην περίπτωση μας διαπιστώνουμε ότι στο αριστερό μέλος της σχέσεως (1.2.14)

$$c_{ri}c_{pi} = \delta_{rp} \quad \text{και επίσης ότι} \quad c_{sj}c_{qj} = \delta_{sq}. \quad (1.2.15)$$

Επομένως η πιο πάνω σχέση (1.2.14) απλοποιείται τώρα στη μορφή

$$\delta_{rp}\delta_{sq}A'_{pq} = c_{ri}c_{sj}A_{ij}. \quad (1.2.16)$$

Με βάση όμως τη γνωστή ιδιότητα της αντικαταστάσεως (1.1.29) του δέλτα του Kronecker δ_{ij} είναι σαφές ότι

$$\delta_{sq}A'_{pq} = A'_{ps}. \quad (1.2.17)$$

Επομένως η παραπάνω σχέση (1.2.16) παίρνει την ακόμη πιο απλή μορφή της

$$\delta_{rp}A'_{ps} = c_{ri}c_{sj}A_{ij}. \quad (1.2.18)$$

Και τώρα με μια δεύτερη χρήση της ίδιας και τόσο χρήσιμης ιδιότητας της αντικαταστάσεως (1.1.29), εδώ στη λίγο διαφορετική μορφή της (με διαφορετικούς δείκτες)

$$\delta_{rp}A'_{ps} = A'_{rs} \quad (1.2.19)$$

(θυμόμαστε βέβαια ότι $\delta_{ij} = \delta_{ji}$) η σχέση (1.2.18) γράφεται τελικά στη μορφή


$$A'_{rs} = c_{ri}c_{sj}A_{ij}. \quad (1.2.20)$$

Άρα αποδείχθηκε έτσι ότι ισχύει ο ορισμός του τανυστή δευτέρας τάξεως (1.2.11), ο οποίος προέκυψε βέβαια από το γενικό ορισμό του τανυστή (1.2.1) για $n = 2$. Απλά εδώ προέκυψαν οι διαφορετικοί δείκτες r και s αντί για τους δείκτες p και q στον ορισμό (1.2.11) του τανυστή δευτέρας τάξεως A_{ij} . Όμως τα σύμβολα στους δείκτες δεν έχουν καμία απολύτως ουσιαστική σημασία. Επομένως ναι, αν ένα μέγεθος A_{ij} δευτέρας τάξεως (με $n = 2$) επαληθεύει τις σχέσεις (1.2.12), τότε είναι πραγματικά τανυστής δευτέρας τάξεως, επειδή επαληθεύει και τις σχέσεις (1.2.11) ορισμού του τανυστή δευτέρας τάξεως. Άρα οι σχέσεις (1.2.12) μπορούν θαυμάσια να θεωρούνται και να χρησιμοποιούνται σαν δεύτερος ορισμός του τανυστή δευτέρας τάξεως. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε1.2

▼ **Άσκηση Ε1.7** ■ **Τανυστές δευτέρας τάξεως**

Να αποδειχθεί ότι ένας τανυστής δευτέρας τάξεως \mathbf{A} (ή ισοδύναμα A_{ij}) επαληθεύει τις σχέσεις (1.2.12). Πρόκειται φυσικά για την αντίστροφη διαδικασία και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της ισοδυναμίας των σχέσεων (1.2.11) και (1.2.12). Άρα μπορούν και οι δύο αυτές σχέσεις να χρησιμοποιούνται εξίσου καλά σαν ορισμοί ενός τανυστή δευτέρας τάξεως, αφού η καθεμιά τους έχει σαν συνέπεια την άλλη. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε1.2

▼ **Άσκηση Ε1.8** ■ **Δέλτα του Kronecker**

Για το δέλτα του Kronecker δ_{ij} που ορίζεται με βάση τη σχέση (1.1.27) (σε κάθε σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$) (α) να αποδειχθεί ότι είναι τανυστής δευτέρας τάξεως, δηλαδή ότι ισχύει η σχέση (1.2.11), προφανώς εδώ στη μορφή

$$\delta'_{pq} = c_{pi}c_{qj}\delta_{ij}. \quad (1.2.21)$$

(β) Με βάση αυτήν τη σχέση να επαληθευθεί ότι $\delta'_{pq} = \delta_{pq}$, δηλαδή οι συνιστώσες του δέλτα του Kronecker δε μεταβάλλονται με τη στροφή του συστήματος συντεταγμένων. Άρα, όπως θα δούμε στην Ενότητα Ε1.5, πρόκειται για ισότροπο τανυστή. ▲

E1.2.5

E1.2.5. Τανυστές τρίτης τάξεως

Απόλυτα ανάλογα ισχύουν και για τανυστές τρίτης τάξεως (με $n = 3$). Εδώ οι συνιστώσες A_{ijk} του τανυστή \mathbf{A} έχουν τρεις ελεύθερους δείκτες: το i , το j και το k και πρόκειται για τανυστή τρίτης τάξεως. Στην περίπτωση αυτή (με τρεις ελεύθερους δείκτες) ο παραπάνω ορισμός (1.2.1) του τανυστή, που αφορά στην αλλαγή συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων, παίρνει την ακόμη πιο πολύπλοκη (σχετικά με τους τανυστές δευτέρας τάξεως: με $n = 2$) μορφή του

$$A'_{pqr} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}A_{ijk}, \quad (1.2.22)$$

που έχει τώρα τρία συννημίτονα: το c_{pi} , το c_{qj} και το c_{rk} . Δηλαδή, ξανά με απλά λόγια, οι συνιστώσες A_{ijk} του **τανυστή τρίτης τάξεως** \mathbf{A} μεταβάλλονται, όταν στραφεί το σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων, σύμφωνα με τον τύπο (1.2.22). Αυτός ο τύπος είναι ασφαλώς σύμφωνος με το γενικό ορισμό του τανυστή στη σχέση (1.2.1), εδώ βέβαια με τρεις ($n = 3$) ελεύθερους δείκτες: τανυστής τρίτης τάξεως. Σημειώνουμε επίσης ότι εδώ στο δεξιό μέλος αυτής της σχέσεως ορισμού (1.2.22) έχουμε (σε συμφωνία με τη σύμβαση αθροίσεως του Einstein) ένα τριπλό άθροισμα. Αυτό συμβαίνει, επειδή έχουμε τρεις επαναλαμβανόμενους δείκτες: τους δείκτες i, j και k .

Δεν ξέρουμε συγκεκριμένους τανυστές τρίτης τάξεως (αντίθετα με τους τανυστές δευτέρας τάξεως). Απλά σημειώνουμε ότι το τόσο χρήσιμο σύμβολο του Levi-Civita (ή μεταθετικό σύμβολο) ε_{ijk} που εισαγάγαμε στην Παράγραφο Ε1.1.4 είναι τανυστής τρίτης τάξεως. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί με βάση τον ορισμό του (1.1.38) σε συνδυασμό με τον πιο πάνω τύπο (1.2.22), αλλά θα παραλείψουμε τη σχετική απόδειξη.

E1.2.6

E1.2.6. Τανυστές τετάρτης τάξεως

Ανάλογα ισχύουν παραπέρα και για τανυστές τετάρτης τάξεως (με $n = 4$). Εδώ οι $3^4 = 81$ συνιστώσες A_{ijkl} του τανυστή \mathbf{A} τετάρτης τάξεως έχουν τέσσερις ελεύθερους

δείκτες: τους i, j, k και l . Έτσι πρόκειται για τανυστή τετάρτης τάξεως. Στην περίπτωση αυτή (με τέσσερις ελεύθερους δείκτες) ο γενικός ορισμός (1.2.1) του τανυστή, που αφορά στην αλλαγή συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων, παίρνει την ακόμη πιο πολύπλοκη (σχετικά με τους τανυστές χαμηλότερης τάξεως n) μορφή

$$A'_{pqrs} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}A_{ijkl}. \quad (1.2.23)$$

Σ' αυτήν εδώ τη μορφή παρουσιάζονται τέσσερα συνημίτονα: το c_{pi} , το c_{qj} , το c_{rk} και το c_{sl} . Και εύλογα δεξιά πρόκειται για τετραπλό άθροισμα, επειδή έχουμε τέσσερις επαναλαμβανόμενους δείκτες: τους δείκτες i, j, k και l . Τετραπλό άθροισμα! Φοβερό!

Και μάλιστα ξέρουμε λίγο (όχι πολύ, μη λέμε ψέματα!) έναν τανυστή τετάρτης τάξεως πάλι από τη Μηχανική των Υλικών. Πρόκειται για το γνωστό μας *τανυστή των ελαστικών σταθερών*, δηλαδή απλά για τον *τανυστή ελαστικότητας* \mathbf{E} και πιο απλά E_{ijkl} . Οι ίδιες οι συνιστώσες του τανυστή ελαστικότητας \mathbf{E} είναι οι *ελαστικές σταθερές* E_{ijkl} του γενικά ανισότροπου ελαστικού υλικού. Αυτές εδώ οι ελαστικές σταθερές E_{ijkl} υπεισέρχονται στις σχέσεις που ισχύουν ανάμεσα στις τάσεις σ_{ij} και στις παραμορφώσεις ε_{ij} , δηλαδή στο γενικευμένο *νόμο του Hooke*, που καλύπτει και τα πιο γενικά ανισότροπα υλικά. Ο γενικευμένος νόμος του Hooke έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{και σε μορφή με δείκτες} \quad \sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (1.2.24)$$

Εδώ $\boldsymbol{\sigma}$ (ή ισοδύναμα σ_{ij}) είναι ο τανυστής των τάσεων και $\boldsymbol{\varepsilon}$ (ή ισοδύναμα ε_{ij}) είναι ο τανυστής των παραμορφώσεων.

Και αντίστροφα υπάρχει και ο τανυστής \mathbf{F} των *ελαστικών συντελεστών ενδοτικότητας* F_{ijkl} , που είναι επίσης τετάρτης τάξεως και που δίνει τις παραμορφώσεις ε_{ij} από τις τάσεις σ_{ij} με βάση τις απόλυτα ανάλογες γραμμικές σχέσεις

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{F}\boldsymbol{\sigma} \quad \text{και σε μορφή με δείκτες} \quad \varepsilon_{ij} = F_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (1.2.25)$$

Αργότερα, πιο κάτω, θα έχουμε την ευκαιρία να αναφερθούμε πιο εκτενώς στους τανυστές των τάσεων σ_{ij} , των παραμορφώσεων ε_{ij} και των ελαστικών σταθερών E_{ijkl} . Προς το παρόν απλά κάνουμε υπομονή μέχρι να προχωρήσουμε στις πράξεις με τους τανυστές καθώς και στον τόσο χρήσιμο νόμο του πηλίκου πάλι στους τανυστές.

E1.2.7

E1.2.7. Ισότητα τανυστών

Η ισότητα δύο τανυστών \mathbf{A} και \mathbf{B} είναι μάλλον προφανής και ορίζεται ως εξής:

● ΟΡΙΣΜΟΣ

▼ **ΟΡΙΣΜΟΣ E1.2 (Ισότητα τανυστών):** Δύο τανυστές \mathbf{A} και \mathbf{B} της ίδιας ακριβώς τάξεως n καλούνται ίσοι, εάν και μόνο εάν όλες οι αντίστοιχες συνιστώσες τους είναι ίσες μεταξύ τους, δηλαδή εάν και μόνο εάν

$$A_{ijk\dots m} = B_{ijk\dots m} \quad (1.2.26)$$

για όλες τις τιμές όλων των δεικτών i, j, k, \dots, m (n δείκτες) στις συνιστώσες αυτές. ▲

Για παράδειγμα, οι δύο τανυστές A_{ij} και B_{ij} είναι ίσοι, εάν και μόνο εάν $A_{ij} = B_{ij}$ για κάθε τιμή των δεικτών τους i και j , που στον τριδιάστατο χώρο παίρνουν τις τρεις τιμές 1, 2 και 3. Ανάλογα στο διδιάστατο χώρο παίρνουν τις δύο τιμές 1 και 2.

Ε1.3

Ε1.3. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΤΑΝΥΣΤΕΣ

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε τις τέσσερις βασικές πράξεις με τους τανυστές: (α) τον *πολλαπλασιασμό τανυστή επί πραγματικό αριθμό*, (β) την *πρόσθεση τανυστών*, (γ) τον *πολλαπλασιασμό τανυστών* και (δ) τη *συστολή τανυστή*.

Ε1.3.1

Ε1.3.1. Πολλαπλασιασμός τανυστή επί πραγματικό αριθμό

● ΟΡΙΣΜΟΣ

▼ **ΟΡΙΣΜΟΣ Ε1.3 (Πολλαπλασιασμός τανυστή επί πραγματικό αριθμό):** Το γινόμενο ενός τανυστή \mathbf{A} τάξεως n επί έναν πραγματικό αριθμό c είναι το μέγεθος \mathbf{B} πάλι τάξεως n με συνιστώσες

$$B_{ij\dots m} = cA_{ij\dots m}. \quad (1.3.1)$$

Αποδεικνύεται μάλιστα ότι αυτό το μέγεθος \mathbf{B} είναι επίσης τανυστής τάξεως n . ▲

✎ Άσκηση

Ενότητα Ε1.3

▼ **Άσκηση Ε1.9** ■ Πολλαπλασιασμός τανυστή επί πραγματικό αριθμό

Για τον τανυστή τετάρτης τάξεως A_{ijkl} να αποδειχθεί (φυσικά με βάση τον ορισμό των τανυστών) ότι το μέγεθος τετάρτης τάξεως B_{ijkl} με συνιστώσες $B_{ijkl} = cA_{ijkl}$, όπου το c είναι ένας πραγματικός αριθμός, είναι επίσης τανυστής τετάρτης τάξεως. ▲

Ε1.3.2

Ε1.3.2. Πρόσθεση τανυστών

● ΟΡΙΣΜΟΣ

▼ **ΟΡΙΣΜΟΣ Ε1.4 (Πρόσθεση τανυστών):** Το άθροισμα δύο τανυστών \mathbf{A} και \mathbf{B} της ίδιας ακριβώς τάξεως n ορίζεται σαν το μέγεθος \mathbf{C} πάλι τάξεως n με συνιστώσες

$$C_{ij\dots m} = A_{ij\dots m} + B_{ij\dots m}. \quad (1.3.2)$$

Αποδεικνύεται μάλιστα ότι αυτό το μέγεθος \mathbf{C} είναι επίσης τανυστής τάξεως n . ▲

❖ Παράδειγμα

Ενότητα Ε1.3

▼ **Παράδειγμα Ε1.4** ■ Πρόσθεση τανυστών

Ζητείται να αποδειχθεί ότι το άθροισμα C_{ijkl} των δύο τανυστών τετάρτης τάξεως A_{ijkl} και B_{ijkl} είναι επίσης τανυστής τετάρτης τάξεως (με $n = 4$).

⇒ **Απόδειξη:** Τα δύο μεγέθη A_{ijkl} και B_{ijkl} είναι τανυστές τετάρτης τάξεως (με $n = 4$). Επομένως γι' αυτά θα ισχύει ο ορισμός του τανυστή (1.2.1) και ειδικότερα ο ορισμός του τανυστή τετάρτης τάξεως (1.2.23) για τη μετατροπή των συνιστωσών τους από το αρχικό σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων στο νέο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων. Συγκεκριμένα γι' αυτούς τους δύο τανυστές A_{ijkl} και B_{ijkl} θα έχουμε

$$A'_{pqrs} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}A_{ijkl} \quad \text{και} \quad B'_{pqrs} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}B_{ijkl}. \quad (1.3.3)$$

Απλά τώρα προσθέτουμε κατά μέλη αυτές τις δύο σχέσεις και παίρνουμε

$$A'_{pqrs} + B'_{pqrs} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}A_{ijkl} + c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}B_{ijkl} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}(A_{ijkl} + B_{ijkl}). \quad (1.3.4)$$

Απόδειξη

Αλλ' αφού το μέγεθος C_{ijkl} ορίζεται (εννοείται και στο πρώτο και στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων) σαν το άθροισμα των δύο τανυστών A_{ijkl} και B_{ijkl} , θα ισχύουν προφανώς οι δύο σχέσεις

$$C_{ijkl} = A_{ijkl} + B_{ijkl} \quad \text{και επίσης} \quad C'_{pqrs} = A'_{pqrs} + B'_{pqrs}. \quad (1.3.5)$$

Εδώ πήραμε μάλιστα το θάρρος να επιλέξουμε κατάλληλα τους δείκτες στη δεύτερη σχέση. Έτσι κι αλλιώς, επαναλαμβάνουμε, το ποιους δείκτες χρησιμοποιούμε δεν έχει καμία ουσιαστική, μαθηματική σημασία. Εμείς τους επιλέγουμε.

Και τώρα με βάση τις σχέσεις (1.3.5) από τις σχέσεις (1.3.4) συμπεραίνουμε ότι

$$C'_{pqrs} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}C_{ijkl}. \quad (1.3.6)$$

Αλλά τούτη εδώ η σχέση απλά συμπίπτει με τη σχέση (1.2.23), εδώ όμως με C αντί για A . Άρα το μέγεθος C_{ijkl} , το άθροισμα των δύο τανυστών τετάρτης τάξεως A_{ijkl} και B_{ijkl} , είναι κι αυτό τανυστής τετάρτης τάξεως (με $n = 4$). Πάρα πολύ ωραία! ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε1.3

▼ Άσκηση Ε1.10 ■ Γραμμικός συνδυασμός τανυστών

Ζητείται να αποδειχθεί ότι ο γραμμικός συνδυασμός

$$C_{ij} = aA_{ij} + bB_{ij} \quad (1.3.7)$$

δύο τανυστών δευτέρας τάξεως (με $n = 2$), των τανυστών A_{ij} και B_{ij} , με τα a και b δύο πραγματικούς αριθμούς είναι επίσης τανυστής δευτέρας τάξεως. *Υπόδειξη:* Προφανώς πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο γενικός ορισμός (1.2.1) του τανυστή και καλύτερα ο ορισμός (1.2.11) του τανυστή δευτέρας τάξεως, που είναι απλά ειδική περίπτωση (για $n = 2$) του γενικού ορισμού (1.2.1) του τανυστή. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε1.3

▼ Άσκηση Ε1.11 ■ Μηχανική των Υλικών: τάσεις

Ένα γραμμικά ελαστικό μέσον καταπονείται ταυτόχρονα από τρία φορτία (ή καλύτερα φορτίσεις). Το πρώτο φορτίο προκαλεί στο ελαστικό μέσον τις τάσεις σ_{ij} , το δεύτερο τις τάσεις s_{ij} και το τρίτο τις τάσεις τ_{ij} . Γνωρίζουμε (ή μάλλον θα αποδείξουμε αργότερα) ότι οι τάσεις σ_{ij} , s_{ij} και τ_{ij} είναι τανυστές δευτέρας τάξεως. Ζητούνται: (α) Με εκτέλεση των σχετικών υπολογισμών να αποδειχθεί ότι η συνολική τάση

$$S_{ij} = \sigma_{ij} + s_{ij} + \tau_{ij} \quad (1.3.8)$$

είναι κι αυτή τανυστής δευτέρας τάξεως. (β) Για ποιο λόγο υποθέσαμε το ελαστικό μέσον μας ότι είναι και γραμμικό; (γ) Να εξηγηθεί εάν υπάρχει ή όχι και μη γραμμική Ελαστικότητα πέρα από τη γραμμική Ελαστικότητα με την αναφορά μάλιστα και του κλασικού σχετικού παραδείγματος στον απλό εφελκυσμό ράβδου. ▲

E1.3.3

E1.3.3. Πολλαπλασιασμός τανυστών

● ΟΡΙΣΜΟΣ

▼ **ΟΡΙΣΜΟΣ Ε1.5 (Πολλαπλασιασμός τανυστών):** Το γινόμενο δύο τανυστών \mathbf{A} (τάξεως n_1) και \mathbf{B} (τάξεως n_2) ορίζεται σαν το μέγεθος \mathbf{C} τάξεως $n = n_1 + n_2$ με συνιστώσες

$$C_{ij\dots t} = A_{ij\dots m}B_{pq\dots t}. \quad (1.3.9)$$

Αποδεικνύεται μάλιστα ότι αυτό το μέγεθος **C** είναι επίσης τανυστής προφανώς τάξεως $n = n_1 + n_2$ ίσης με το άθροισμα των τάξεων των δύο τανυστών **A** και **B**. ▲

● **Σημείωση:** Ασφαλώς στην ειδική περίπτωση όπου ο ένας τανυστής (είτε ο **A** είτε ο **B**) είναι βαθμωτό μέγεθος (τανυστής μηδενικής τάξεως) εδώ έχουμε απλά τον πολλαπλασιασμό τανυστή επί πραγματικό αριθμό (Ορισμός Ε1.3).

Σημείωση

❖ Παράδειγμα
Ενότητα Ε1.3

▼ Παράδειγμα Ε1.5 ■ Πολλαπλασιασμός τανυστών

Να αποδειχθεί ότι το γινόμενο C_{ijklm} των τανυστών A_{ij} (δευτέρας τάξεως, με δύο ελεύθερους δείκτες: $n_1 = 2$) και B_{klm} (τρίτης τάξεως, με τρεις ελεύθερους δείκτες: $n_2 = 3$) είναι επίσης τανυστής, τώρα πέμπτης τάξεως (με $n = n_1 + n_2 = 2 + 3 = 5$ ελεύθερους δείκτες).

⇒ **Απόδειξη:** Τα δύο μεγέθη A_{ij} και B_{klm} είναι τανυστές (δευτέρας και τρίτης τάξεως αντίστοιχα). Άρα γι' αυτά θα ισχύει ο γενικός ορισμός του τανυστή (1.2.1) και ειδικότερα οι ορισμοί των τανυστών δευτέρας τάξεως (1.2.11) και τρίτης τάξεως (1.2.22) αντίστοιχα. Έτσι οι συνιστώσες τους μετατρέπονται από το αρχικό (το πρώτο) σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ στο νέο (στο δεύτερο) σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ (Σχήμα Ε1.1). Συγκεκριμένα με βάση αυτούς τους τύπους (1.2.11) και (1.2.22) για τους δύο τανυστές A_{ij} και B_{klm} που πολλαπλασιάζουμε θα έχουμε

Απόδειξη

$$A'_{pq} = c_{pi}c_{qj}A_{ij} \quad \text{και} \quad B'_{rst} = c_{rk}c_{sl}c_{tm}B_{klm}. \quad (1.3.10)$$

Τώρα με βάση τον ορισμό (1.3.9) του γινομένου **C** δύο τανυστών **A** και **B**, που φυσικά ισχύει σε κάθε σύστημα συντεταγμένων, δηλαδή και στο αρχικό (στο πρώτο) και στο νέο (στο δεύτερο) που προκύπτει με στροφή του πρώτου, θα έχουμε

$$C_{ijklm} = A_{ij}B_{klm} \quad \text{και επίσης} \quad C'_{pqrst} = A'_{pq}B'_{rst}. \quad (1.3.11)$$

Εδώ πήραμε ξανά το θάρρος (και έχουμε το σχετικό δικαίωμα!) να χρησιμοποιήσουμε τους δείκτες που μας διευκολύνουν, δηλαδή εδώ ταιριάζουν με τους δείκτες στις σχέσεις (1.3.10) και έτσι μας εξυπηρετούν πολύ στους υπολογισμούς μας.

Και τώρα αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των συνιστωσών A'_{pq} και B'_{rst} των δύο τανυστών **A** και **B** αντίστοιχα από τις σχέσεις (1.3.10) στη δεύτερη σχέση (1.3.11), παίρνουμε αμέσως το αποτέλεσμα

$$C'_{pqrst} = (c_{pi}c_{qj}A_{ij})(c_{rk}c_{sl}c_{tm}B_{klm}) = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}c_{tm}A_{ij}B_{klm}. \quad (1.3.12)$$

Ένα βηματάκι μας απέμεινε ακόμη: να πάρουμε υπόψη και την πρώτη σχέση (1.3.11). (Τη δεύτερη την πήραμε ήδη προ ολίγου!) Τότε η πιο πάνω σχέση (1.3.12) παίρνει την τελική της μορφή

$$C'_{pqrst} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}c_{tm}C_{ijklm}. \quad (1.3.13)$$

Η σχέση αυτή απλά μας βεβαιώνει σύμφωνα με το γενικό τύπο (1.2.1) ορισμού του τανυστή ότι το μέγεθος C_{ijklm} είναι πραγματικά τανυστής. Και φυσικά είναι τανυστής πέμπτης τάξεως ($n = 5$), επειδή έχει πέντε (δύο συν τρεις) ελεύθερους δείκτες.

Ισχύει βέβαια και η αντίστοιχη σχέση

$$C_{ijklm} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}c_{tm}C'_{pqrst} \quad (1.3.14)$$

που προκύπτει από τη σχέση (1.2.2) και αποτελεί ένα δεύτερο γενικό ορισμό του τανυστή πέμπτης τάξεως. Δηλαδή, αντί να αποδείξουμε τη σχέση (1.3.13), όπως ήδη κάναμε για τον τανυστή \mathbf{C} , θα μπορούσαμε εναλλακτικά να είχαμε αποδείξει τη σχέση (1.3.14). Το ίδιο κάνει: τι από το πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ στο δεύτερο $Ox'_1x'_2x'_3$ τι από το δεύτερο στο πρώτο; Το ίδιο κάνει! ▲

✎ Άσκηση

Ενότητα Ε1.3

▼ Άσκηση Ε1.12 ■ Πολλαπλασιασμός τανυστών

Με χρήση του τύπου (1.2.1) ορισμού του τανυστή να αποδειχθεί ότι το γινόμενο

$$C_{ijk} = A_{ij}B_k \quad (1.3.15)$$

των δύο τανυστών A_{ij} (δευτέρας τάξεως: $n_1 = 2$) και B_k (πρώτης τάξεως: $n_2 = 1$) είναι τανυστής τρίτης τάξεως ($n = n_1 + n_2 = 2 + 1 = 3$). ▲

Ε1.3.4

Ε1.3.4. Συστολή τανυστή

Πρόκειται για μια φαινομενικά λίγο παράξενη, αλλ' ουσιαστικά ενδιαφέρουσα και πολύ χρήσιμη πράξη στους τανυστές. Συγκεκριμένα σε έναν τανυστή n τάξεως (με n ελεύθερους δείκτες), έστω στον τανυστή $A_{ijk\dots lm}$, λέμε ότι κάνουμε συστολή του, όταν αντικαταστήσουμε ένα δείκτη (ας πούμε εδώ το δείκτη j) με έναν άλλο δείκτη (ας πούμε εδώ το δείκτη m). Τότε προκύπτει ένα άλλο μέγεθος, εδώ το μέγεθος $A_{imk\dots lm}$. Αυτό το μέγεθος συνεχίζει βέβαια να έχει n δείκτες, αλλά τώρα ο ένας δείκτης είναι επαναλαμβανόμενος, εδώ ο δείκτης m : παρουσιάζεται δύο φορές. Μια φορά από την αρχή και μια φορά που πήρε τη θέση του δείκτη j (που αντικατέστησε το δείκτη j). Με τον τρόπο αυτό από τους αρχικά n αυτούς δείκτες μόνο οι $n - 2$ (εδώ οι $n - 2$ δείκτες i, k, \dots, l) είναι ελεύθεροι δείκτες. Τώρα οι άλλοι δύο δείκτες είναι απλά ο επαναλαμβανόμενος δείκτης m (δύο φορές). Ξέρουμε όμως ότι ένας επαναλαμβανόμενος δείκτης (που πρέπει να παρουσιάζεται ακριβώς δύο φορές!) δηλώνει άθροιση. Τότε ισχύει μάλιστα η σύμβαση αθροίσεως του Einstein. Άρα από τους n δείκτες μόνο οι $n - 2$ είναι ελεύθεροι δείκτες. Επομένως από το μέγεθος n τάξεως, τον τανυστή μας $A_{ijk\dots lm}$, μεταπέσαμε τώρα σ' ένα μέγεθος $n - 2$ τάξεως, στο μέγεθος

$$B_{ik\dots l} = A_{imk\dots lm} \quad (1.3.16)$$

(Φυσικά στο δεξιό μέλος έχουμε άθροιση ως προς το δείκτη m .) Η πράξη αυτή σε έναν τανυστή καλείται **συστολή τανυστή** και δίνει ένα μέγεθος τάξεως μειωμένης κατά δύο. Αποδεικνύεται μάλιστα ότι το νέο μέγεθος που προκύπτει, ας πούμε εδώ το μέγεθος $B_{ik\dots l}$, είναι κι αυτό τανυστής (αλλ' είπαμε τάξεως $n - 2$, όχι πια τάξεως n).

● ΟΡΙΣΜΟΣ

▼ **ΟΡΙΣΜΟΣ Ε1.6 (Συστολή τανυστή):** Σαν συστολή τανυστή $A_{ijk\dots lm}$ τάξεως n (με $n \geq 2$) ορίζεται απλά η αντικατάσταση του συμβόλου ενός ελεύθερου δείκτη του με το σύμβολο ενός άλλου ελεύθερου δείκτη του. Τότε ο αριθμός των ελεύθερων δεικτών του μειώνεται κατά δύο. Αποδεικνύεται μάλιστα ότι το μέγεθος που προκύπτει είναι επίσης τανυστής, αλλά τώρα τάξεως $n - 2$. Φυσικά στη συνέχεια μπορεί να γίνει και δεύτερη συστολή στον ίδιο τανυστή ως προς κάποιον άλλο ελεύθερο δείκτη (όχι βέβαια ως προς τον επαναλαμβανόμενο δείκτη!), εφόσον βέβαια υπάρχουν ακόμη δύο ελεύθεροι δείκτες. Τότε θα προκύψει τανυστής τάξεως $n - 4$. ▲

❖ **Παράδειγμα**
Ενότητα Ε1.3

▼ **Παράδειγμα Ε1.6** ■ **Συστολή τανυστή**

Για τον τανυστή πέμπτης τάξεως A_{ijklm} να αποδειχθεί ότι με συστολή του ως προς τους δύο δείκτες m και j , εδώ θέτοντας $j = m$, προκύπτει ο τανυστής τρίτης τάξεως

$$B_{ikl} = A_{imklm}. \quad (1.3.17)$$

⇒ **Απόδειξη:** Απλά οφείλουμε να αποδείξουμε ότι το μέγεθος τρίτης τάξεως B_{ikl} είναι τανυστής. Άρα θα πρέπει να αποδείξουμε τη σχέση

$$B'_{prs} = c_{pi}c_{rk}c_{sl}B_{ikl}. \quad (1.3.18)$$

Η σχέση αυτή προκύπτει στην παρούσα περίπτωση από το γενικό ορισμό του τανυστή (1.2.1) ή από την ειδική περίπτωση του (1.2.22) για τανυστές τρίτης τάξεως (εδώ βέβαια με B αντί για A και με μια σχετικά κατάλληλη επιλογή των δεικτών).

Δεν είναι τίποτε, παιχνίδι είναι κι αυτή η απόδειξη. Αφού υποθέσαμε το μέγεθος A_{ijklm} ότι είναι τανυστής πέμπτης τάξεως, σύμφωνα με το γενικό ορισμό (1.2.1) του τανυστή εδώ θα ισχύει

$$A'_{pqrst} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}c_{tm}A_{ijklm}. \quad (1.3.19)$$

Επίσης ξαναγράφουμε τον ορισμό (1.3.17) του μεγέθους B_{ikl} που προέκυψε από τη συστολή του τανυστή A_{ijklm} στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$

$$B'_{ikl} = A'_{imklm} \quad \text{και καλύτερα} \quad B'_{prs} = A'_{ptrst}, \quad (1.3.20)$$

ώστε να μην μπερδεύουμε τους δείκτες ανάμεσα στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ και στο δεύτερο $Ox'_1x'_2x'_3$.

Τώρα για να δημιουργήσουμε τον όρο A'_{ptrst} δεξιά σ' αυτήν εδώ τη σχέση (1.3.20) απλά θέτουμε $q = t$ στη σχέση (1.3.19), οπότε βέβαια προκύπτει άθροιση ως προς τον επαναλαμβανόμενο δείκτη t . Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε από τη σχέση (1.3.19)

$$A'_{ptrst} = c_{pi}c_{tj}c_{rk}c_{sl}c_{tm}A_{ijklm} = (c_{pi}c_{rk}c_{sl})(c_{tj}c_{tm})A_{ijklm}. \quad (1.3.21)$$

Αλλ' από τη σχέση (1.1.37) για τα συνημίτονα $c_{\alpha\beta}$ γνωρίζουμε ότι

$$c_{tj}c_{tm} = \delta_{jm} \quad (1.3.22)$$

με δ_{jm} το γνωστό μας δέλτα του Kronecker. Επομένως τώρα η σχέση μας (1.3.21) απλοποιείται στη μορφή

$$A'_{ptrst} = (c_{pi}c_{rk}c_{sl})(\delta_{jm}A_{ijklm}). \quad (1.3.23)$$

Και τώρα από τη γνωστή ιδιότητα της αντικαταστάσεως του δέλτα του Kronecker, σχέση (1.1.29) και τις ανάλογες σχέσεις (1.1.30) και (1.1.31), συνάγουμε εύκολα ότι

$$\delta_{jm}A_{ijklm} = A_{imklm}. \quad (1.3.24)$$

Κατά συνέπεια η σχέση μας (1.3.23) απλοποιείται τώρα κι άλλο παίρνοντας την τελική της μορφή

$$A'_{ptrst} = c_{pi}c_{rk}c_{sl}A_{imklm}. \quad (1.3.25)$$

Τώρα πια παρατηρούμε τον επαναλαμβανόμενο δείκτη t αριστερά και τον επαναλαμβανόμενο δείκτη m δεξιά. Βέβαια δεξιά και οι τρεις δείκτες i , k και l είναι

και αυτοί επαναλαμβανόμενοι δείκτες: έχουμε ένα τετραπλό άθροισμα δεξιά. Τέλος πάντων, ας μη μακρηγορούμε. Παίρνουμε τώρα υπόψη τον ορισμό του μεγέθους B_{ikl} (το οποίο προέκυψε, επαναλαμβάνουμε, από τη συστολή του τανυστή A_{ijklm} με $j = m$) στις σχέσεις (1.3.17) (στο πρώτο σύστημα συντεταγμένων) και (1.3.20) (στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων). Με τον τρόπο αυτό παρατηρούμε ότι η τελευταία σχέση μας (1.3.25) είναι ακριβώς η σχέση (1.3.18) που επιδιώκουμε να αποδείξουμε, ώστε να βεβαιώσουμε ότι το μέγεθος B_{ikl} που προέκυψε με συστολή του τανυστή A_{ijklm} είναι και αυτό τανυστής, όμως με τάξη μειωμένη κατά δύο. Δηλαδή υπήρξε μείωση της τάξεως από πέντε σε τρία με τη συστολή του τανυστή A_{ijklm} με $j = m$. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε1.3

▼ Άσκηση Ε1.13 ■ Μηχανική των Υλικών: παραμορφώσεις

Για τον τανυστή των παραμορφώσεων ε_{ij} να αποδειχθεί με υπολογισμούς ότι με τη συστολή του $j = i$ προκύπτει το βαθμωτό μέγεθος (τανυστής μηδενικής τάξεως)

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon_{ii} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}. \quad (1.3.26)$$

Υπόδειξη: Σύμφωνα με τη σχέση (1.2.3), δηλαδή με τη σχέση $A' = A$, για βαθμωτά μεγέθη (τανυστές μηδενικής τάξεως) θα πρέπει να αποδειχθεί ότι $\hat{\varepsilon}' = \hat{\varepsilon}$, δηλαδή ότι το μέγεθος $\hat{\varepsilon}$ δε μεταβάλλεται με τη στροφή του συστήματος συντεταγμένων. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε1.3

▼ Άσκηση Ε1.14 ■ Μηχανική των Υλικών: νόμος του Hooke

Στη γραμμική Ελαστικότητα υποθέτουμε ότι ξέρουμε από πριν πως οι τάσεις σ_{ij} και οι ελαστικοί συντελεστές ενδοτικότητας F_{klmn} είναι τανυστές (δευτέρης και τέταρτης τάξεως αντίστοιχα). Ζητούνται: (α) Να αποδειχθεί ότι το μέγεθος

$$a_{ijklmn} = F_{klmn} \sigma_{ij} \quad (1.3.27)$$

είναι τανυστής έκτης τάξεως. (β) Έπειτα να αποδειχθεί (μετά από συστολή ως προς τους δύο δείκτες i και m με $m = i$) ότι το μέγεθος

$$\beta_{jklm} = a_{ijklm} \quad (1.3.28)$$

είναι τανυστής τετάρτης τάξεως. (γ) Στη συνέχεια να αποδειχθεί (μετά από συστολή ως προς τους δύο δείκτες j και n με $n = j$) ότι το μέγεθος

$$\gamma_{kl} = \beta_{jklj} = a_{ijklj} = F_{klij} \sigma_{ij} \quad (1.3.29)$$

είναι τανυστής δευτέρας τάξεως. (δ) Ποιος πολύ γνωστός μας τανυστής είναι αυτός; (Αν και δεν αποδείξαμε γι' αυτόν ότι είναι τανυστής με τον κανονικό τρόπο. Αυτήν τη σημαντική απόδειξη θα την κάνουμε παρακάτω στην Παράγραφο Ε1.7.2.) ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε1.3

▼ Άσκηση Ε1.15 ■ Μηχανική των Υλικών: ενέργεια παραμορφώσεως

Στην Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών θεωρούμε εδώ τους τανυστές των τάσεων σ_{ij} και των παραμορφώσεων ε_{ij} . (Οι αποδείξεις πως είναι πραγματικά τανυστές θα γίνουν στις Παραγράφους Ε1.7.1 και Ε1.7.2 αντίστοιχα.) Με την κατευθείαν χρήση θεωρημάτων που ήδη αποδείχθηκαν ζητούνται: (α) Να αποδειχθεί ότι το μέγεθος τετάρτης τάξεως $v_{ijkl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{kl}$ είναι τανυστής τετάρτης τάξεως. (β) Επίσης ότι το μέγεθος $w = v_{ijij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$ είναι βαθμωτό μέγεθος (τανυστής μηδενικής τάξεως).

(γ) Τι παριστάνει αυτό το μέγεθος w ; Υπόδειξη: Την ενέργεια παραμορφώσεως (εννοείται ανά μονάδα όγκου: την πυκνότητα ενέργειας παραμορφώσεως) στο ελαστικό μέσον. (δ) Να ελεγχθεί το μέγεθος w από απόψεως διαστάσεων. ▲

E1.4

E1.4. ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΠΗΛΙΚΟΥ

Ο νόμος του πηλίκου αποτελεί μια πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα των τανυστών που μας επιτρέπει σε αρκετές περιπτώσεις να αποφαινόμεσθε αν ένα μέγεθος είναι ή δεν είναι τανυστής. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το θεώρημα

ΘΕΩΡΗΜΑ

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ E1.1 (Νόμος του πηλίκου):** Εάν για τα τρία μεγέθη A_j , B_i και C_{ij} οι συνιστώσες τους (με τα ίδια σύμβολα) συνδέονται με τη σχέση

$$B_i = C_{ij}A_j \quad (1.4.1)$$

και τα μεγέθη A_j και B_i είναι τανυστές πρώτης τάξεως (δηλαδή διανύσματα), τότε το μέγεθος C_{ij} είναι και αυτό τανυστής και προφανώς τανυστής δευτέρας τάξεως.

Εδώ, αφού $B_i = C_{ij}A_j$, είναι σαν το C_{ij} να είναι ένα είδος «πηλίκου» των B_i και A_j , δηλαδή B_i δια A_j . Φυσικά δεν πρόκειται για αληθινό πηλίκο: μας θυμίζει πηλίκο.

Απόδειξη

⇒ **Απόδειξη:** Εδώ θέλουμε να αποδείξουμε ότι το μέγεθος C_{ij} είναι τανυστής δευτέρας τάξεως. Επομένως θα πρέπει να αποδείξουμε ότι στην αλλαγή συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων ισχύει ένας από τους δύο τύπους (1.2.11) και (1.2.12)

$$C'_{pq} = c_{pi}c_{qj}C_{ij} \quad \text{ή} \quad C_{ij} = c_{pi}c_{qj}C'_{pq} \quad (1.4.2)$$

ορισμού του τανυστή δευτέρας τάξεως. Φυσικά εδώ τα $c_{\alpha\beta}$ είναι τα σχετικά συνημίτονα στο μητρώο \mathbf{C} των συνημιτόνων c_{ij} , δηλαδή στο μητρώο στροφής (1.1.15).

Για την απόδειξή μας ξεκινάμε από τη σχέση (1.4.1), που ορίζει το διάνυσμα B_i σαν το γινόμενο του μεγέθους C_{ij} και του διανύσματος A_j . Αυτά ισχύουν στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. Ανάλογος θα είναι βέβαια κι ο ορισμός του B'_p στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. Επομένως στο δεύτερο αυτό σύστημα η αρχική σχέση μας (1.4.1) παίρνει την ανάλογη μορφή

$$B'_p = C'_{pq}A'_q. \quad (1.4.3)$$

Εδώ μάλιστα αλλάξαμε τα σύμβολα των δεικτών (τώρα χρησιμοποιούμε τα p και q), έτσι ώστε να μην έχουμε καμία σύγχυση συμβόλων στους υπολογισμούς μας.

Και τώρα για το διάνυσμα A_j παίρνουμε υπόψη μας τον τύπο (1.2.4) (αλλ' εδώ με δείκτες q και j αντί για p και i αντιστοίχα) αλλαγής από τις συνιστώσες του A_j στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ στις νέες συνιστώσες του A'_q στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. Ανάλογα ενεργούμε και για το διάνυσμα B_i . Με τον τρόπο αυτό έχουμε τους δύο τύπους

$$B'_p = c_{pi}B_i \quad \text{και} \quad A'_q = c_{qj}A_j. \quad (1.4.4)$$

Εισάγοντας αυτές τις δύο εκφράσεις (των B'_p και A'_q) στη σχέση (1.4.3), προκύπτει

$$c_{pi}B_i = C'_{pq}c_{qj}A_j \quad \text{ή} \quad \text{καλύτερα} \quad c_{pi}B_i = c_{qj}C'_{pq}A_j. \quad (1.4.5)$$

Αλλ' εμείς ξέρουμε από την πρώτη μας σχέση (1.4.1) ότι $B_i = C_{ij}A_j$. Επομένως η παραπάνω σχέση (1.4.5) δεξιά παίρνει τη μορφή

$$c_{pi}C_{ij}A_j = c_{qj}C'_{pq}A_j. \quad (1.4.6)$$

Αυτή γράφεται πολύ εύκολα παραπέρα και στην τελική της μορφή

$$(c_{pi}C_{ij} - c_{qj}C'_{pq})A_j = 0. \quad (1.4.7)$$

Είναι τώρα πια προφανές ότι για να καταλήξουμε σιγά-σιγά σε μία από τις δύο σχέσεις (1.4.2) που οφείλουμε να αποδείξουμε, δηλαδή ή στην πρώτη ή στη δεύτερη, είναι σκόπιμο να πολλαπλασιάσουμε τη σχέση (1.4.7) επί c_{pk} . Έτσι προκύπτει ότι

$$(c_{pk}c_{pi}C_{ij} - c_{pk}c_{qj}C'_{pq})A_j = 0. \quad (1.4.8)$$

Αλλ' από σχέση (1.1.37) ξέρουμε ότι $c_{pk}c_{pi} = \delta_{ki}$, οπότε η προηγούμενη σχέση απλοποιείται λίγο στη μορφή

$$(\delta_{ki}C_{ij} - c_{pk}c_{qj}C'_{pq})A_j = 0. \quad (1.4.9)$$

Και τώρα, αφού $\delta_{ki}C_{ij} = C_{kj}$ σύμφωνα με την ιδιότητα της αντικαταστάσεως (1.1.29), προκύπτει

$$(C_{kj} - c_{pk}c_{qj}C'_{pq})A_j = 0. \quad (1.4.10)$$

Αυτή όμως η σχέση πρέπει να ισχύει για οποιοδήποτε διάνυσμα A_j . Επομένως ο όρος μέσα στις παρενθέσεις πρέπει να είναι ίσος με το μηδέν. Δηλαδή έχουμε

$$C_{kj} - c_{pk}c_{qj}C'_{pq} = 0 \quad \text{και ισοδύναμα} \quad C_{ij} = c_{pi}c_{qj}C'_{pq} \quad (1.4.11)$$

έχοντας θέσει στο τέλος i αντί για k . Αυτή όμως είναι η δεύτερη σχέση (1.4.2), δηλαδή ο εναλλακτικός ορισμός (1.2.12) του τανυστή δευτέρας τάξεως, εδώ του τανυστή C_{ij} . Επομένως εδώ το μέγεθος C_{ij} , δηλαδή το «πηλίκιο» (μέσα σε εισαγωγικά) των δύο διανυσμάτων B_i δια A_j , είναι πραγματικά ένας τανυστής δευτέρας τάξεως.

Φυσικά με κάπως διαφορετική απόδειξη θα μπορούσαμε να είχαμε καταλήξει και στον πρώτο ορισμό (1.2.11) του τανυστή δευτέρας τάξεως για το ίδιο μέγεθος C_{ij} (ή ισοδύναμα στην πρώτη σχέση (1.4.2)) αντί για το δεύτερο (τον εναλλακτικό) ορισμό του (1.2.12). Αυτό υποδεικνύουμε να γίνει, αλλά σε μια πιο απλή περίπτωση, στην αμέσως παρακάτω άσκηση. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε1.4

▼ Άσκηση Ε1.16 ■ Ρευστομηχανική: παροχή ρευστού

Στη Ρευστομηχανική σ' ένα πεπερασμένο πεδίο ροής V θεωρούμε την επιφανειακή πυκνότητα παροχής του ρευστού q στα σημεία της επιφάνειάς του S που την υποθέτουμε εδώ λεία. Δηλαδή θεωρούμε τη στοιχειώδη παροχή του ρευστού dQ δια της στοιχειώδους επιφάνειας dS συγκεκριμένα $q = dQ/dS$. Η πυκνότητα παροχής q δίνεται από τον τύπο

$$q = v_i n_i \quad (1.4.12)$$


(εννοείται δεξιά με τη σύμβαση αθροίσεως του Einstein: $q = v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 = v_i n_i$) με v_i τις συνιστώσες της ταχύτητας \mathbf{v} του ρευστού και n_i τις συνιστώσες του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στη λεία επιφάνεια S , δηλαδή στο σύνορο του πεδίου ροής V .

Εδώ υποθέτουμε ότι η πυκνότητα παροχής q είναι βαθμωτό μέγεθος, $q = q'$ σε αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων από $Ox_1x_2x_3$ σε $Ox'_1x'_2x'_3$. Υποθέτουμε επίσης

ότι το κάθετο διάνυσμα n είναι διανυσματικό μέγεθος, $n_i = c_{pi}n'_p$ εδώ επιλέγοντας να χρησιμοποιήσουμε τον εναλλακτικό ορισμό (1.2.5) διανύσματος: $A_i = c_{pi}A'_p$. Επίσης λαμβάνουμε υπόψη ότι η πιο πάνω σχέση $q = v_i n_i$ ισχύει και στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων: $q' = v'_p n'_p$. Με βάση όλα αυτά τα στοιχεία, τα επαναλαμβάνουμε

$$q = q', \quad q = v_i n_i, \quad q' = v'_p n'_p, \quad n_i = c_{pi} n'_p \quad (1.4.13)$$

ζητείται να αποδειχθεί ότι ισχύει $v'_p = c_{pi} v_i$, δηλαδή ότι η ταχύτητα του ρευστού \mathbf{v} είναι διάνυσμα (τανυστής πρώτης τάξεως), κάτι που ήταν ασφαλώς αναμενόμενο. Φυσικά και εδώ διαπιστώνουμε την ισχύ του *νόμου του πηλίκου* σε μια περίπτωση ακόμη πιο απλή από εκείνη που ήδη αποδείχθηκε πιο πάνω στο Θεώρημα Ε1.1. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε1.4

▼ Άσκηση Ε1.17 ■ Εδαφομηχανική: διήθηση

Στην Εδαφομηχανική στο ενδιαφέρον φαινόμενο της διηθήσεως στην υπόγεια ροή νερού σε πορώδες έδαφος (ουσιαστικά στους πόρους του εδάφους) ισχύει ο *νόμος του Darcy* (1856). Σε γενικά ανισότροπο έδαφος ο νόμος του Darcy έχει τη μορφή

$$v_i = k_{ij} i_j. \quad (1.4.14)$$

Εδώ v_i είναι οι συνιστώσες της *ταχύτητας Darcy* του νερού \mathbf{v} (μέση ταχύτητα όχι αληθινή ταχύτητα!), k_{ij} είναι οι *συντελεστές διαπερατότητας του εδάφους* και i_j είναι οι συνιστώσες της *υδραυλικής κλίσεως* \mathbf{i} . Παρενθετικά σημειώνεται επίσης ότι $\mathbf{i} = \text{grad } h$ με h το *υδραυλικό φορτίο* (ή τη *διαφορά πιεζομετρικής στάθμης*).

Λαμβάνουμε υπόψη μας ότι τόσο η ταχύτητα του νερού \mathbf{v} όσο και η υδραυλική κλίση \mathbf{i} είναι διανύσματα (τανυστές πρώτης τάξεως). Με πλήρη εκτέλεση των σχετικών υπολογισμών (όχι με κατευθείαν χρήση του Θεωρήματος Ε1.1) ζητείται να αποδειχθεί ότι οι συντελεστές διαπερατότητας του εδάφους k_{ij} αποτελούν τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{k} . Αυτός ο τανυστής \mathbf{k} είναι ο *τανυστής των συντελεστών διαπερατότητας του εδάφους* και καλύτερα *τανυστής διαπερατότητας του εδάφους*. ▲

Ο νόμος του πηλίκου ισχύει γενικά και σε κάθε παρόμοια περίπτωση τανυστών με $\mathbf{B} = \mathbf{CA}$, όπου τα μεγέθη \mathbf{A} και \mathbf{B} είναι τανυστές, οπότε και το μέγεθος \mathbf{C} προκύπτει να είναι τανυστής. Εμάς εδώ μας ενδιαφέρει αρχικά η περίπτωση που ήδη εξετάσαμε, όπου τα μεγέθη \mathbf{A} και \mathbf{B} είναι τανυστές πρώτης τάξεως (διανύσματα), οπότε το μέγεθος \mathbf{C} προκύπτει να είναι τανυστής δευτέρας τάξεως. Στη συνέχεια όμως μας ενδιαφέρει και η περίπτωση όπου τα δύο μεγέθη \mathbf{A} και \mathbf{B} είναι τανυστές δευτέρας τάξεως. Τότε το μέγεθος \mathbf{C} προκύπτει ότι είναι τανυστής τετάρτης τάξεως.

Για τη μελέτη και αυτής της χρήσιμης περιπτώσεως θα αναφερθούμε συγκεκριμένα στο ενδιαφέρον πρόβλημα της Μηχανικής των Υλικών με τους τανυστές των τάσεων σ_{ij} και των παραμορφώσεων ε_{ij} . (Το ότι και οι δυο τους είναι τανυστές θα το αποδείξουμε παρακάτω στην Ενότητα Ε1.7.) Εδώ μπορούμε απλά να αποδείξουμε ότι το μέγεθος των *ελαστικών σταθερών* E_{ijkl} που υπεισέρχονται στο *νόμο του Hooke* είναι επίσης τανυστής και προφανώς τανυστής τετάρτης τάξεως (με $n = 4$).

❖ **Εφαρμογή**
Ενότητα Ε1.4

▼ Εφαρμογή Ε1.1 ■ Ελαστικότητα: νόμος του Hooke

Στη γραμμική Ελαστικότητα και με γνωστό ότι τόσο οι τάσεις σ_{ij} όσο και οι παραμορφώσεις ε_{ij} είναι τανυστές δευτέρας τάξεως να αποδειχθεί ότι και οι ελαστικές σταθερές E_{ijkl} είναι κι αυτές τανυστής και προφανώς τετάρτης τάξεως. Σημειώνεται

βέβαια ότι εδώ ισχύει ο γενικευμένος νόμος του Hooke

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (1.4.15)$$

Αυτός ο νόμος του Hooke συνδέει τον τανυστή των τάσεων σ_{ij} με τον τανυστή των παραμορφώσεων ε_{kl} μέσω του τανυστή των ελαστικών σταθερών E_{ijkl} .

Απόδειξη

⇒ **Απόδειξη:** Προφανώς πρόκειται για απόδειξη ουσιαστικά ανάλογη με εκείνη που έγινε πιο πάνω στο Θεώρημα E1.1 για το νόμο του πηλίκου αρχικά για διανύσματα A_j και B_i και τανυστή δεύτερας τάξεως C_{ij} . Αυτήν την απόδειξη τη γενικεύουμε εδώ στην παρούσα εφαρμογή στην Ελαστικότητα με ελαφρά αλλαγμένη διατύπωση. Καταρχήν σημειώνουμε ότι οι τανυστικές εξισώσεις ισχύουν σε κάθε σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων. Άρα εννοείται ότι και ο γενικευμένος νόμος του Hooke (1.4.15) ισχύει σε κάθε σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. Επομένως σε ένα δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ θα ισχύει

$$\sigma'_{pq} = E'_{pqrs}\varepsilon'_{rs} \quad (1.4.16)$$

με βάση τις καινούργιες τάσεις σ'_{pq} , τις καινούργιες παραμορφώσεις ε'_{rs} και φυσικά και τις καινούργιες ελαστικές σταθερές E'_{pqrs} .

Πολύ ωραία ως εδώ! Όμως τόσο οι τάσεις σ_{ij} όσο και οι παραμορφώσεις ε_{ij} είναι τανυστές δεύτερας τάξεως. (Το έχουμε δεχθεί αυτό και θα το αποδείξουμε παρακάτω στην Ενότητα E1.7.) Επομένως σύμφωνα με τον τύπο (1.2.11) θα ισχύουν οι ακόλουθοι τύποι μετασχηματισμού των συνιστωσών τους από το πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ στο δεύτερο $Ox'_1x'_2x'_3$:

$$\sigma'_{pq} = c_{pi}c_{qj}\sigma_{ij} \quad \text{και} \quad \varepsilon'_{rs} = c_{rk}c_{sl}\varepsilon_{kl}. \quad (1.4.17)$$

Εμείς θέλουμε τώρα να αποδείξουμε ότι και οι ελαστικές σταθερές E_{ijkl} του υλικού του ελαστικού μέσου (που γενικά είναι ανισότροπο υλικό) αποτελούν έναν τανυστή εννοείται τανυστή τετάρτης τάξεως, επειδή έχουμε σ' αυτές τέσσερις ελεύθερους δείκτες: τους δείκτες i, j, k και l . Άρα θα πρέπει να αποδείξουμε ότι ισχύει ο ένας από τους δύο τύπους ορισμού του τανυστή τετάρτης τάξεως

$$E'_{pqrs} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}E_{ijkl} \quad \text{ή εναλλακτικά} \quad E_{ijkl} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}E'_{pqrs}. \quad (1.4.18)$$

Δηλαδή εδώ θα πρέπει να ισχύει είτε ο τύπος (1.2.1) εδώ για $n = 4$, συγκεκριμένα ο τύπος (1.2.23), είτε ο εναλλακτικός του τύπος (1.2.2) εδώ πάλι για $n = 4$.

Για την απόδειξη αυτή αρχικά απλά αντικαθιστούμε τις εκφράσεις (1.4.17) των τάσεων σ'_{pq} και των παραμορφώσεων ε'_{rs} στο γενικευμένο νόμο του Hooke (1.4.16) στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. Έτσι παίρνουμε

$$c_{pi}c_{qj}\sigma_{ij} = E'_{pqrs}c_{rk}c_{sl}\varepsilon_{kl} \quad \text{ή καλύτερα} \quad c_{pi}c_{qj}\sigma_{ij} = c_{rk}c_{sl}E'_{pqrs}\varepsilon_{kl}. \quad (1.4.19)$$

Εδώ μάλιστα οι τάσεις σ_{ij} συνδέονται με τις παραμορφώσεις ε_{kl} στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων πάλι με το γενικευμένο νόμο του Hooke, εδώ με το νόμο (1.4.15). Επομένως η πιο πάνω σχέση (1.4.19) μπορεί να γραφεί αποκλειστικά με τις παραμορφώσεις ε_{kl} στο πρώτο σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ ως εξής:

$$c_{pi}c_{qj}E_{ijkl}\varepsilon_{kl} = c_{rk}c_{sl}E'_{pqrs}\varepsilon_{kl}. \quad (1.4.20)$$

Η σχέση αυτή γράφεται μάλιστα και λίγο πιο συνεπτυγμένα στη μορφή

$$(c_{pi}c_{qj}E_{ijkl} - c_{rk}c_{sl}E'_{pqrs})\varepsilon_{kl} = 0. \quad (1.4.21)$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε τούτη εδώ τη σχέση επί $c_{pm}c_{qn}$. Έτσι παίρνουμε

$$(c_{pm}c_{qn}c_{pi}c_{qj}E_{ijkl} - c_{pm}c_{qn}c_{rk}c_{sl}E'_{pqrs})\varepsilon_{kl} = 0. \quad (1.4.22)$$

(Δεν ξεχνάμε βέβαια ποτέ πως επαναλαμβανόμενοι δείκτες στους τανυστές δηλώνουν αθροίσεις σύμφωνα με τη σύμβαση του Einstein.) Αριστερά όμως στη σχέση αυτή (1.4.22) ξέρουμε ήδη από τη σχέση (1.1.37) για τα συνημίτονα $c_{\alpha\beta}$ ότι

$$c_{pm}c_{pi} = \delta_{mi} \quad \text{και επίσης ότι} \quad c_{qn}c_{qj} = \delta_{nj} \quad (1.4.23)$$

φυσικά κι εδώ με δ_{ij} το γνωστό μας δέλτα του Kronecker. Επομένως διαπιστώνουμε αρκετά εύκολα ότι η ίδια σχέση (1.4.22) παίρνει τώρα τη λίγο πιο απλή μορφή της

$$(\delta_{mi}\delta_{nj}E_{ijkl} - c_{pm}c_{qn}c_{rk}c_{sl}E'_{pqrs})\varepsilon_{kl} = 0. \quad (1.4.24)$$

Και τώρα σύμφωνα με την ιδιότητα της αντικαταστάσεως (1.1.29) στο δέλτα του Kronecker δ_{ij} (που την εφαρμόζουμε εδώ δύο φορές) ισχύει ότι

$$\delta_{mi}\delta_{nj}E_{ijkl} = \delta_{mi}(\delta_{nj}E_{ijkl}) = \delta_{mi}E_{inkl} = E_{mnkl}. \quad (1.4.25)$$

Επομένως η προπροηγούμενη σχέση (1.4.24) παίρνει τώρα την τελική μορφή της


$$(E_{mnkl} - c_{pm}c_{qn}c_{rk}c_{sl}E'_{pqrs})\varepsilon_{kl} = 0. \quad (1.4.26)$$

Και τώρα παίρνουμε υπόψη ότι αυτή η σχέση πρέπει να ισχύει για οποιοσδήποτε παραμορφώσεις ε_{kl} ανεξάρτητα από τις ελαστικές σταθερές E_{mnkl} του ελαστικού μέσου (που απλά είναι ιδιότητες του υλικού του είτε ισότροπου είτε γενικά ανισότροπου). Επομένως θα πρέπει ο όρος μέσα στις παρενθέσεις να είναι ίσος με το μηδέν. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει

$$E_{mnkl} - c_{pm}c_{qn}c_{rk}c_{sl}E'_{pqrs} = 0 \quad \text{και ισοδύναμα} \quad E_{ijkl} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}E'_{pqrs} \quad (1.4.27)$$

έχοντας θέσει και αριστερά και δεξιά i αντί για m και j αντί για n .

Επομένως αποδείξαμε πως ισχύει ο δεύτερος τύπος (1.4.18) και κατά συνέπεια οι ελαστικές σταθερές E_{ijkl} στο γενικευμένο νόμο του Hooke (1.4.15) στην Ελαστικότητα αποτελούν τανυστή τετάρτης τάξεως. Προφανώς με ανάλογη απόδειξη με εργασία με αντίστροφο τρόπο ως προς τα δύο συστήματα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ και $Ox'_1x'_2x'_3$ θα μπορούσαμε να είχαμε αποδείξει τον ισοδύναμο πρώτο τύπο (1.4.18). Και αυτός ο τύπος μας βεβαιώνει εξίσου καλά ότι οι ελαστικές σταθερές E_{ijkl} του ελαστικού μέσου αποτελούν τανυστή τετάρτης τάξεως. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε1.4

▼ Άσκηση Ε1.18 ■ Ελαστικότητα: νόμος του Hooke

Στην Ελαστικότητα, όπως θα αποδειχθεί παρακάτω στην Ενότητα Ε1.7, οι τάσεις σ_{ij} και οι παραμορφώσεις ε_{ij} είναι και οι δυο τους τανυστές δευτέρας τάξεως. Εδώ ζητείται να αποδειχθεί με τη λεπτομερή εκτέλεση όλων των αναγκαίων υπολογισμών ότι οι **ελαστικοί συντελεστές ενδοτικότητας** F_{ijkl} στο γενικευμένο νόμο του Hooke

$$\varepsilon_{ij} = F_{ijkl}\sigma_{kl} \quad (1.4.28)$$

αποτελούν κι αυτοί έναν τανυστή που προφανώς είναι τετάρτης τάξεως ($n = 4$). Φυσικά η πιο πάνω μορφή (1.4.28) του γενικευμένου νόμου του Hooke μας δίνει τώρα στο ελαστικό μέσον τις παραμορφώσεις ε_{ij} από τις τάσεις σ_{ij} . Αντίθετα η αρχική μορφή του (1.4.15) μας έδινε τις τάσεις σ_{ij} από τις παραμορφώσεις ε_{ij} . ▲

E1.5

E1.5. ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ, ΑΝΤΙΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ ΚΑΙ ΙΣΟΤΡΟΠΟΙ ΤΑΝΥΣΤΕΣ

Ένας τανυστής καλείται *συμμετρικός* ως προς δύο δείκτες του, π.χ. το δείκτη i και το δείκτη j , όταν η εναλλαγή τους δεν οδηγεί σε μεταβολή της σχετικής συνιστώσας του τανυστή. Για παράδειγμα ο τανυστής \mathbf{A} με $A_{ijkl} = A_{jikl}$ είναι συμμετρικός ως προς τους δύο πρώτους δείκτες του: τους δείκτες i και j .

Ανάλογα ένας τανυστής καλείται *αντισυμμετρικός* ως προς δύο δείκτες του, π.χ. το δείκτη i και το δείκτη j , όταν η εναλλαγή τους οδηγεί στην αντίθετη τιμή (με μείον) της σχετικής συνιστώσας του τανυστή. Για παράδειγμα ο τανυστής \mathbf{A} με $A_{ijkl} = -A_{jikl}$ είναι αντισυμμετρικός ως προς τους δύο πρώτους δείκτες του i και j .

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι οι γνωστοί μας από τη Μηχανική των Υλικών τανυστές των τάσεων σ_{ij} , των παραμορφώσεων ε_{ij} και των ροπών αδρανείας I_{ij} είναι και οι τρεις τους συμμετρικοί ως προς τους δύο δείκτες τους i και j , δηλαδή ισχύει

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad \text{και} \quad I_{ij} = I_{ji}. \quad (1.5.1)$$

❖ Παράδειγμα Ενότητα E1.5

▼ Παράδειγμα E1.7 ■ Συμμετρικοί τανυστές

Για ένα συμμετρικό τανυστή \mathbf{A} τετάρτης τάξεως ως προς τους δύο πρώτους δείκτες του, δηλαδή με

$$A_{ijkl} = A_{jikl} \quad (1.5.2)$$

να αποδειχθεί ότι η συμμετρία του διατηρείται και στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ (μετά από στροφή του πρώτου συστήματος συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$). Δηλαδή εδώ ζητείται να αποδειχθεί ότι με τους αντίστοιχους δείκτες

$$A'_{pqrs} = A'_{qprs}. \quad (1.5.3)$$

Απόδειξη

⇒ **Απόδειξη:** Φυσικά, λαμβάνοντας υπόψη μας το γεγονός ότι εδώ έχουμε τανυστή τετάρτης τάξεως (με $n = 4$), με βάση τον ορισμό του (1.2.23) θα ισχύει η σχέση

$$A'_{pqrs} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}A_{ijkl} = c_{pi}c_{qj}c_{rk}c_{sl}A_{jikl} = c_{qj}c_{pi}c_{rk}c_{sl}A_{jikl} = A'_{qprs}. \quad (1.5.4)$$

Αυτό συμβαίνει, επειδή ισχύει η σχέση (1.5.2) (η συμμετρία του τανυστή στο πρώτο σύστημα συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$) και επίσης επειδή

$$A'_{qprs} = c_{qj}c_{pi}c_{rk}c_{sl}A_{jikl}. \quad (1.5.5)$$

Αυτό είναι προφανές από τον ίδιο τύπο (1.2.23) ορισμού ενός τανυστή τετάρτης τάξεως (με $n = 4$), τώρα όμως με διαφορετικούς δείκτες. Άρα αποδείχθηκε ότι

$$A'_{pqrs} = A'_{qprs}. \quad (1.5.6)$$

Επομένως η συμμετρία αυτού του τανυστή A_{ijkl} ως προς τους δύο πρώτους δείκτες του i και j διατηρείται και στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. ▲

✎ Άσκηση

Ενότητα E1.5

▼ Άσκηση E1.19 ■ Αντισυμμετρικοί τανυστές

Για έναν αντισυμμετρικό τανυστή \mathbf{A} τετάρτης τάξεως ως προς τους δύο τελευταίους δείκτες του, δηλαδή με

$$A_{ijkl} = -A_{ijlk} \quad (1.5.7)$$

να αποδειχθεί ότι η αντισυμμετρία του διατηρείται και στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$, δηλαδή ότι

$$A'_{pqrs} = -A'_{pqsr}. \quad (1.5.8)$$

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε1.5

▼ **Άσκηση Ε1.20** ■ **Μηχανική των Υλικών: Ελαστικότητα**

Για τον τανυστή των τάσεων σ_{ij} που έχουμε αναφέρει ότι είναι συμμετρικός τανυστής, δηλαδή ότι $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, να αποδειχθεί ότι η συμμετρία του εξακολουθεί να ισχύει και σ' ένα δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων, δηλαδή ότι $\sigma'_{pq} = \sigma'_{qp}$. ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ Ε1.2 (Ανάλυση τανυστή δευτέρας τάξεως σε συμμετρικό και σε αντισυμμετρικό μέρος):** Ένας τανυστής δευτέρας τάξεως A_{ij} μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ενός συμμετρικού τανυστή δευτέρας τάξεως B_{ij} και ενός αντισυμμετρικού τανυστή πάλι δευτέρας τάξεως C_{ij} , δηλαδή

$$A_{ij} = B_{ij} + C_{ij} \quad \text{με} \quad B_{ij} = \frac{A_{ij} + A_{ji}}{2} \quad \text{και} \quad \text{με} \quad C_{ij} = \frac{A_{ij} - A_{ji}}{2}. \quad (1.5.9)$$

⇒ **Απόδειξη:** Καταρχήν παρατηρούμε ότι $B_{ij} + C_{ij} = A_{ij}$. Και τώρα προφανώς με βάση τη σχέση ορισμού (1.2.11) του τανυστή δευτέρας τάξεως ισχύουν οι σχέσεις

Απόδειξη

$$A'_{pq} = c_{pi}c_{qj}A_{ij} \quad \text{και} \quad A'_{qp} = c_{qj}c_{pi}A_{ji} = c_{pi}c_{qj}A_{ji}, \quad \text{αφού} \quad c_{qj}c_{pi} = c_{pi}c_{qj} \quad (1.5.10)$$

και επειδή το μέγεθος A_{ij} είναι τανυστής δευτέρας τάξεως. (Η δεύτερη σχέση προκύπτει από την πρώτη με αλλαγή των δεικτών.) Με πολλαπλασιασμό τους επί 1/2 και με πρόσθεσή τους καθώς και αφαίρεσή τους κατά μέλη προκύπτουν και οι σχέσεις

$$\frac{A'_{pq} \pm A'_{qp}}{2} = c_{pi}c_{qj} \frac{A_{ij} \pm A_{ji}}{2}. \quad (1.5.11)$$

Επομένως

$$B'_{pq} = c_{pi}c_{qj}B_{ij} \quad \text{και} \quad C'_{pq} = c_{pi}c_{qj}C_{ij} \quad (1.5.12)$$

λόγω των σχέσεων (1.5.9). Άρα τα μεγέθη B_{ij} και C_{ij} είναι τανυστές δευτέρας τάξεως. Από τους ορισμούς τους (1.5.9) είναι επίσης προφανές ότι ο πρώτος είναι συμμετρικός τανυστής, ενώ αντίθετα ο δεύτερος είναι αντισυμμετρικός τανυστής. ▲

Ένας ακόμη πολύ ενδιαφέρων χαρακτηρισμός ενός τανυστή είναι αν είναι ή όχι **ισότροπος** τανυστής. Ένας τανυστής καλείται **ισότροπος** απλά εάν οι συνιστώσες του δε μεταβάλλονται με την αλλαγή (με τη στροφή) του συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων. Για παράδειγμα, το γνωστό μας δέλτα του Kronecker δ_{ij} αποδεικνύεται (σχετική είναι η Άσκηση Ε1.8) ότι είναι τανυστής δευτέρας τάξεως. Επίσης με βάση τον τύπο (1.1.28) προφανώς είναι και συμμετρικός τανυστής. Επιπλέον όμως είναι και ισότροπος τανυστής. Αυτό συμβαίνει, επειδή $\delta'_{pq} = \delta_{pq}$, δηλαδή

$$\delta'_{11} = \delta_{11} = 1, \quad \delta'_{22} = \delta_{22} = 1, \quad \delta'_{33} = \delta_{33} = 1, \quad \delta'_{12} = \delta'_{21} = 0, \quad \text{κλπ.} \quad (1.5.13)$$

Ανάλογα ισχύουν και για το σύμβολο του Levi-Civita (ή μεταθετικό σύμβολο) ε_{ijk} που μελετήθηκε στην Παράγραφο Ε1.1.4. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι και αυτό το σύμβολο ε_{ijk} είναι τανυστής (και προφανώς τρίτης τάξεως, αφού έχει τρεις ελεύθερους δείκτες). Τώρα με βάση τον ορισμό του (1.1.38), που είναι ανεξάρτητος από το σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων, είναι και ισότροπος τανυστής. Επιπλέον μπορεί να αποδειχθεί πως είναι και ο μοναδικός ισότροπος τανυστής τρίτης τάξεως (με $n = 3$) μαζί βέβαια και με όλα τα πολλαπλάσιά του επί σταθερά c .

E1.6

E1.6. ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΤΑΝΥΣΤΩΝ

Πάρα πολύ συχνά φυσικά μεγέθη που εκφράζονται με τανυστές είναι συναρτήσεις με μεταβλητές το χρόνο t ή τη θέση (x_1, x_2, x_3) κι εξίσου συχνά οι τανυστές αυτοί παρουσιάζονται με παραγώγους τους σε φυσικούς νόμους. Τονίζουμε ότι η χρήση των τανυστών μας επιτρέπει την έκφραση ενός φυσικού νόμου με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όταν αλλάξει (στραφεί) το σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων. Σ' αυτήν εδώ την ενότητα θα ασχοληθούμε με τις παραγώγους τανυστών, χρονικές και χωρικές, και θα αποδείξουμε ότι κι αυτές συνεχίζουν να είναι τανυστές.

E1.6.1

E1.6.1. Χρονικές παράγωγοι τανυστών

Ξεκινάμε με τις χρονικές παραγώγους που είναι πιο εύκολες. Ισχύει το θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ E1.3 (Χρονικές παράγωγοι τανυστών):** Οι χρονικές παράγωγοι τανυστή $A_{ijk\dots m}$ τάξεως n με συνιστώσες που είναι συναρτήσεις του χρόνου t , δηλαδή με $A_{ijk\dots m} = A_{ijk\dots m}(t)$ συνεχίζουν να είναι τανυστές και μάλιστα της ίδιας ακριβώς τάξεως n βέβαια υπό την προϋπόθεση ότι αυτές οι χρονικές παράγωγοι υπάρχουν.

Απόδειξη

⇒ **Απόδειξη:** Πρόκειται για πολύ απλή απόδειξη. Στην αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων με βάση το γενικό ορισμό (1.2.1) του τανυστή τάξεως n θα έχουμε

$$A_{pqr\dots u}(t)' = c_{pi}c_{qj}c_{rk} \dots c_{um}A_{ijk\dots m}(t), \quad (1.6.1)$$

επειδή τώρα οι συνιστώσες του τανυστή μας είναι συναρτήσεις του χρόνου t . Αλλ' όμως τα συνημίτονα $c_{\alpha\beta}$ για την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων είναι ανεξάρτητα από το χρόνο t . (Υποθέτουμε ότι τα συστήματα συντεταγμένων δε στρέφονται με το χρόνο t .) Επομένως, παραγωγίζοντας τη σχέση (1.6.1) ως προς το χρόνο t , παίρνουμε την ανάλογη σχέση

$$\frac{dA_{pqr\dots u}(t)'}{dt} = c_{pi}c_{qj}c_{rk} \dots c_{um} \frac{dA_{ijk\dots m}(t)}{dt}. \quad (1.6.2)$$

Η σχέση αυτή απλά μας αποκαλύπτει ότι η χρονική παράγωγος του τανυστή μας $A_{ijk\dots m}(t)$ συνεχίζει να είναι τανυστής και μάλιστα της ίδιας τάξεως n . Αυτό συμβαίνει, επειδή πληροί και αυτή τον ορισμό (1.2.1) του τανυστή, όπως φαίνεται από τη σχέση (1.6.2). Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο (παραγωγίζεις ως προς το χρόνο t), διαπιστώνουμε ότι όλες οι χρονικές παράγωγοι που προκύπτουν, εφόσον βέβαια υπάρχουν, είναι επίσης τανυστές της ίδιας ακριβώς τάξεως n με την τάξη του τανυστή $A_{ijk\dots m}(t)$. Εδώ να σημειώσουμε βέβαια ότι, επειδή χρησιμοποιούμε (κι εδώ!) τους τόνους για τις συνιστώσες ενός τανυστή στο δεύτερο (μετά τη στροφή) σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$, τις χρονικές παραγώγους τις δηλώσαμε απλά με d/dt . ▲

Άσκηση

Ενότητα E1.6

▼ Άσκηση E1.21 ■ Δυναμική

Με τη θέση $x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) ενός υλικού σημείου P να είναι διάνυσμα (τανυστής πρώτης τάξεως) να αποδειχθεί με την εκτέλεση των σχετικών απλών υπολογισμών (όχι με το αμέσως πιο πάνω Θεώρημα E1.3) ότι τόσο η ταχύτητά του $v_i(t) = dx_i(t)/dt$ όσο και η επιτάχυνσή του $a_i(t) = dv_i(t)/dt = d^2x_i(t)/dt^2$ είναι επίσης διανύσματα. ▲

Ε1.6.2

Ε1.6.2. Χωρικές μερικές παράγωγοι βαθμωτών μεγεθών

Προχωράμε από 'δώ και πέρα στις χωρικές μερικές παραγώγους ως προς τις Καρτεσιανές συντεταγμένες x_i (x_1, x_2, x_3) για βαθμωτά μεγέθη φ . Ισχύει το θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ Ε1.4 (Τανυστικός χαρακτήρας της κλίσεως βαθμωτού μεγέθους):**

Εδώ θεωρούμε το βαθμωτό μέγεθος (τανυστή μηδενικής τάξεως) $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) και τις χωρικές μερικές παραγώγους του

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \equiv \varphi_{,i} \quad (1.6.3)$$

που τις υποθέτουμε βέβαια ότι υπάρχουν. Σημειώνουμε ότι στους τανυστές (και όχι μόνο!) πολύ συχνά δηλώνουμε την παράγωγο ως προς x_i με κόμμα και μετά i σαν δεικτη. Το μέγεθος αυτό $u_i = \varphi_{,i}$ είναι ένα διάνυσμα (τανυστής πρώτης τάξεως). Σημειώνουμε επίσης ότι αυτό το διάνυσμα $u_i = \varphi_{,i}$ καλείται *κλίση* (ή *βαθμίδα*) του βαθμωτού μεγέθους φ και συμβολίζεται με $\nabla \varphi$ ή με $\text{grad } \varphi$. (Και φυσικά είναι πολύ χρήσιμο για τον Πολιτικό Μηχανικό.)

Απόδειξη

⇒ **Απόδειξη:** Θα αποδείξουμε ότι πραγματικά το μέγεθος $u_i = \varphi_{,i}$ είναι διάνυσμα (τανυστής πρώτης τάξεως). Για το μέγεθος φ υποθέσαμε ήδη ότι είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, δηλαδή $\varphi' = \varphi$ στην αλλαγή συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων. Τώρα με βάση τον κανόνα της αλυσίδας στις παραγώγους (ή πιο επίσημα τον κανόνα της αλληλουχίας των παραγώγων) θα έχουμε με την αλλαγή συντεταγμένων από (x_1, x_2, x_3) στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων σε (x'_1, x'_2, x'_3) τώρα στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'_p} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_p} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_p} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_p} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x'_p} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_p} \quad \text{με } \varphi' = \varphi. \quad (1.6.4)$$

(Είναι προφανές, αλλ' ας το υπενθυμίσουμε και πάλι, ότι προς το τέλος αυτής της σχέσεως ο επαναλαμβανόμενος δεικτης i δηλώνει άθροιση ως προς i .)

Προχωρήσαμε ήδη αρκετά! Τώρα θυμόμαστε τη δεύτερη σχέση (1.1.22), τη σχέση $x_i = c_{ki}x'_k$ για την αλλαγή συστήματος συντεταγμένων. Από αυτήν, εδώ με p αντί k , δηλαδή $x_i = c_{pi}x'_p$, παίρνουμε

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_p} = c_{pi}. \quad (1.6.5)$$

Πραγματικά τόσο απλά! Άρα αντικαθιστώντας αυτές τις απλές μερικές παραγώγους στην παραπάνω σχέση (1.6.4) στο άθροισμα δεξιά, προκύπτει αμέσως ότι

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'_p} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} c_{pi} = c_{pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad \text{ή πιο απλά } \varphi'_{,p} = c_{pi} \varphi_{,i} \quad \text{ή τέλος } u'_p = c_{pi} u_i. \quad (1.6.6)$$

Άρα σύμφωνα με τον ορισμό του διανύσματος (τανυστή πρώτης τάξεως) (1.2.4) το μέγεθος $u_i = \varphi_{,i}$, δηλαδή η κλίση $\nabla \varphi$ βαθμωτού μεγέθους (τανυστή μηδενικής τάξεως), είναι διάνυσμα (τανυστής πρώτης τάξεως). Αποδείχθηκε έτσι το θεώρημα. ▲

✎ Άσκηση

Ενότητα Ε1.6

▼ **Άσκηση Ε1.22** ■ **Ρευστομηχανική**

Θεωρούμε τη μόνιμη (σταθερή) τριδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού που προκύπτει από ένα δυναμικό ταχύτητας $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3)$. Η ταχύτητα \mathbf{v} του ρευστού είναι

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \equiv \text{grad } \Phi \quad \text{με συνιστώσες } v_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \equiv \Phi_{,i}. \quad (1.6.7)$$

Με εκτέλεση των υπολογισμών (όχι με τη χρήση του πιο πάνω Θεωρήματος E1.4) να αποδειχθεί ότι αυτή η ταχύτητα \mathbf{v} είναι διάνυσμα (τανυστής πρώτης τάξεως). ▲

E1.6.3

E1.6.3. Χωρικές μερικές παράγωγοι διανυσμάτων

Και τώρα που πήραμε ήδη φόρα με τις χωρικές μερικές παραγώγους βαθμωτών μεγεθών (τανυστών μηδενικής τάξεως), ας προχωρήσουμε και στις χωρικές μερικές παραγώγους διανυσμάτων (τανυστών πρώτης τάξεως) προφανώς βέβαια ως προς τις Καρτεσιανές συντεταγμένες x_i , δηλαδή (x_1, x_2, x_3) στο χώρο. Ισχύει το θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ E1.5 (Τανυστικός χαρακτήρας της κλίσεως διανύσματος):** Εδώ θεωρούμε σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) το διάνυσμα (τανυστή πρώτης τάξεως) $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ ή ισοδύναμα (με τις συνιστώσες του) $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ και τις χωρικές μερικές παραγώγους των συνιστωσών του

$$v_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \equiv u_{i,j} \quad (1.6.8)$$

που τις υποθέτουμε κι εδώ ότι υπάρχουν. Σημειώνουμε και πάλι ότι στους τανυστές (και όχι μόνο!) πολύ συχνά δηλώνουμε τις παραγώγους ως προς x_j , κλπ. με κόμμα και μετά το j , κλπ. σαν δείκτες. Αυτό το μέγεθος $v_{ij} = u_{i,j}$ είναι τανυστής δευτέρας τάξεως. Σημειώνουμε επίσης ότι αυτός ο τανυστής $v_{ij} = u_{i,j}$ καλείται μερικές φορές **κλίση** (ή **βαθμίδα**) του διανύσματος u_i και συμβολίζεται με $\nabla \mathbf{u}$ ή με $\text{grad } \mathbf{u}$. (Και φυσικά παρουσιάζει κι αυτός ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό.)

Απόδειξη

⇒ **Απόδειξη:** Θα αποδείξουμε πως πραγματικά το μέγεθος $v_{ij} = u_{i,j}$ είναι τανυστής δευτέρας τάξεως. Ο τρόπος εργασίας μας είναι απόλυτα ανάλογος με εκείνον που ήδη ακολουθήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο αυτής της ενότητας για την απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος για βαθμωτά μεγέθη που η κλίση τους είναι διάνυσμα (Θεώρημα E1.4). Εδώ βέβαια έχουμε το διάνυσμα u_i αντί για το βαθμωτό μέγεθος φ . Για το διάνυσμα u_i με βάση τον πρώτο ορισμό του διανύσματος (1.2.4) θα ισχύει στην αλλαγή (στη στροφή) του πρώτου συστήματος συντεταγμένων ο τύπος

$$u'_p = c_{pi} u_i. \quad (1.6.9)$$

Και τώρα ασφαλώς θα χρησιμοποιήσουμε ξανά τον κανόνα της αλυσίδας στις παραγώγους (ή κανόνα της αλληλουχίας των παραγώγων) για τις παραγωγίσεις μας: αλλαγή συντεταγμένων από (x_1, x_2, x_3) στο πρώτο σύστημα συντεταγμένων σε (x'_1, x'_2, x'_3) στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων. Έτσι με τη χρήση τώρα και του τύπου (1.6.9) παίρνουμε για τις μερικές παραγώγους $v_{ij} = u_{i,j}$ που μας ενδιαφέρουν

$$\frac{\partial u'_p}{\partial x'_q} = c_{pi} \frac{\partial u_i}{\partial x'_q} = c_{pi} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_q} + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_q} + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial x'_q} \right) = c_{pi} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_q}. \quad (1.6.10)$$

(Είναι και εδώ προφανές ότι στο τέλος αυτής της σχέσεως ο επαναλαμβανόμενος δείκτης j δηλώνει άθροιση ως προς j : σύμβαση αθροίσεως του Einstein.)

Προχωρήσαμε ήδη αρκετά! Και τώρα απλά χρησιμοποιούμε, ακριβώς όπως και στο προηγούμενο Θεώρημα E1.4, τον τύπο (1.6.5), δηλαδή στην περίπτωση μας

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_q} = c_{qj} \quad (1.6.11)$$

και αντικαθιστούμε αυτές τις μερικές παραγώγους στην παραπάνω σχέση (1.6.10) στο άθροισμα δεξιά. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει τελικά ότι

$$\frac{\partial u'_p}{\partial x'_q} = c_{pi} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} c_{qj} = c_{pi} c_{qj} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{ή απλά} \quad u'_{p,q} = c_{pi} c_{qj} u_{i,j} \quad \text{ή τέλος} \quad v'_{pq} = c_{pi} c_{qj} v_{ij} \quad (1.6.12)$$

λόγω και της σχέσεως (1.6.8). Άρα σύμφωνα με τον ορισμό του τανυστή δευτέρας τάξεως (1.2.11) το μέγεθος $v_{ij} = u_{i,j}$, δηλαδή η κλίση $\nabla \mathbf{u}$ ή $\text{grad } \mathbf{u}$ του διανύσματος (τανυστή πρώτης τάξεως) \mathbf{u} είναι τανυστής δευτέρας τάξεως \mathbf{v} . Αποδείχθηκε, πάει έτσι κι αυτό το θεώρημα. ▲

Ανάλογα μπορούμε να αποδείξουμε πως το μέγεθος $\partial u_{ij} / \partial x_k$ που προκύπτει με μερική παραγωγή (εδώ ως προς x_k) του τανυστή δευτέρας τάξεως u_{ij} είναι ένας τανυστής τρίτης τάξεως w_{ijk} . Και ακόμη παραπέρα ανάλογα ισχύουν και για τις μερικές παραγωγίσεις τανυστών μεγαλύτερης τάξεως.

Με βάση το προηγούμενο Θεώρημα Ε1.5 προκύπτει εύκολα και το θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ Ε1.6 (Απόκλιση διανύσματος):** Η απόκλιση (divergence) $\nabla \cdot \mathbf{u}$ ή $\text{div } \mathbf{u}$ διανύσματος \mathbf{u} (που την υποθέτουμε εδώ ότι υπάρχει) είναι βαθμωτό μέγεθος.

⇒ **Απόδειξη:** Για την απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{u}$ ή $\text{div } \mathbf{u}$ διανύσματος \mathbf{u} με συνιστώσες u_i ξέρουμε ότι αυτή δίνεται σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) από τον τύπο

Απόδειξη

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = u_{i,i} \quad (1.6.13)$$

δεξιά με τη σύμβαση αθροίσεως του Einstein. Αλλ' εμείς γνωρίζουμε από το προηγούμενο Θεώρημα Ε1.5 ότι για ένα διάνυσμα u_i το μέγεθος $v_{ij} \equiv \partial u_i / \partial x_j$ είναι τανυστής δευτέρας τάξεως. Γνωρίζουμε επίσης ότι το μέγεθος που προκύπτει με τη συστολή ενός τανυστή ως προς δύο ελεύθερους δείκτες του είναι κι αυτό τανυστής. Άρα και το μέγεθος $u_{i,i}$ που προκύπτει με συστολή του τανυστή δευτέρας τάξεως $u_{i,j}$ με $j = i$ (συστολή ως προς τους δείκτες i και j) είναι και αυτό τανυστής εδώ βέβαια μηδενικής τάξεως, δηλαδή είναι βαθμωτό μέγεθος. Άρα η απόκλιση $\text{div } \mathbf{u} = u_{i,i}$ στο παρόν θεώρημα είναι βαθμωτό μέγεθος. Και με απλά λόγια η τιμή της αποκλίσεως $\nabla \cdot \mathbf{u}$ ή $\text{div } \mathbf{u}$ δε μεταβάλλεται καθόλου, όταν στραφεί το σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. ▲

▼ **Άσκηση Ε1.23** ■ **Ρευστομηχανική: εξίσωση της συνέχειας**

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε1.6

Στη Ρευστομηχανική για τη μόνιμη (σταθερή) τριδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού ζητούνται: (α) Ποιες είναι οι τρεις ιδιότητες του ιδεατού ρευστού; (β) Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση της συνέχειας σε μια τέτοια ροή

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad \text{ή πιο απλά} \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.6.14)$$

με \mathbf{v} την ταχύτητα του ρευστού (που είναι διάνυσμα) συνεχίζει να ισχύει και όταν στραφεί το σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. *Υπόδειξη:* Για το μέγεθος $\varphi = \partial v_i / \partial x_i = \text{div } \mathbf{v}$ να αποδειχθεί με βάση το προηγούμενο Θεώρημα Ε1.6 ότι είναι βαθμωτό μέγεθος. Αλλά το μέγεθος αυτό είναι μηδέν, $\varphi = 0$, σύμφωνα με τη σχέση (1.6.14). Άρα ... ▲

 **Άσκηση**

Ενότητα Ε1.6

▼ **Άσκηση Ε1.24 ■ Μηχανική των Υλικών: Ελαστικότητα**

Θεωρούμε και πάλι τον τόσο γνωστό μας από τη Μηχανική των Υλικών τανυστή των τάσεων σ_{ij} . (α) Πρώτα-πρώτα ζητείται να αποδειχθεί ότι το μέγεθος

$$s_{ijk} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_k} \equiv \sigma_{ij,k} \quad (1.6.15)$$

είναι τανυστής τρίτης τάξεως. Και τώρα ας θυμηθούμε λίγο τις τρεις εξισώσεις ισοροπίας (εδώ χωρίς δυνάμεις μάζας ή καθολικές δυνάμεις) σε ένα ελαστικό μέσον

$$\frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_3} = 0 \quad \text{ή πιο απλά} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{με } j = 1, 2, 3. \quad (1.6.16)$$

Ζητούνται: (β) Να αποδειχθεί ότι το μέγεθος $f_j = \partial \sigma_{ij} / \partial x_i$ δεξιά σ' αυτές εδώ τις εξισώσεις είναι διάνυσμα. Εδώ μάλιστα πρόκειται για το μηδενικό διάνυσμα, αφού $f_j = 0$ για $j = 1, 2, 3$. *Υπόδειξη:* Να γίνει κατάλληλη συστολή στον τανυστή τρίτης τάξεως s_{ijk} του πρώτου ερωτήματος ως προς δύο από τους τρεις δείκτες του (ανάλογα με το προηγούμενο Θεώρημα Ε1.6, αλλ' εκεί σε τανυστή δευτέρας τάξεως). (γ) Και τώρα να αποδειχθεί ότι αν αυτές οι εξισώσεις ισοροπίας ισχύουν σε ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων, τότε θα ισχύουν και σε κάθε άλλο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων. *Υπόδειξη:* Να γίνει αλλαγή συντεταγμένων στο μηδενικό διάνυσμα $f_j = \partial \sigma_{ij} / \partial x_i$, οπότε προφανώς θα προκύψει ξανά μηδενικό διάνυσμα.

Δηλαδή εδώ βλέπουμε καθαρά πώς ένας φυσικός νόμος (εδώ οι τρεις εξισώσεις ισοροπίας) διατηρεί την ισχύ του και όταν στραφεί το σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων. Βλέπουμε λοιπόν τη διατήρηση της ισχύος των φυσικών νόμων με την αλλαγή του συστήματος συντεταγμένων. Και αυτό είναι το πλεονέκτημα που μας προσφέρουν οι τανυστές ή πιο επίσημα ο Τανυστικός Λογισμός. ▲

E1.6.4

E1.6.4. Στροβιλισμός διανύσματος

Πέρα από την κλίση βαθμωτού μεγέθους ή και διανύσματος (διανυσματικού μεγέθους) και την απόκλιση διανύσματος, που είδαμε ήδη ότι είναι τανυστές, στη Διανυσματική Ανάλυση ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο στροβιλισμός (ή η περιστροφή) $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} \equiv \text{curl } \mathbf{v}$ διανύσματος $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$. Αυτός ο στροβιλισμός υπολογίζεται από τη συμβολική ορίζουσα

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} \equiv \text{curl } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \quad (1.6.17)$$

Εδώ αυτό το διανυσματικό μέγεθος $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} \equiv \text{curl } \mathbf{v}$, δηλαδή ο στροβιλισμός (ή η περιστροφή) του διανύσματος $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)$, έχει τις τρεις συνιστώσες

$$w_1 = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \quad w_2 = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \quad \text{και} \quad w_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \quad (1.6.18)$$

Τώρα με τη χρήση του γνωστού μας συμβόλου του Levi-Civita (ή μεταθετικού συμβόλου) ε_{ijk} οι τρεις συνιστώσες w_i του στροβιλισμού $\text{curl } \mathbf{v}$ γράφονται στη μορφή

$$w_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \quad \text{και πιο σύντομα} \quad w_i = \varepsilon_{ijk} v_{k,j}. \quad (1.6.19)$$

Προφανώς και εδώ ο δείκτης j μετά το κόμμα στο σύμβολο $v_{k,j}$ δηλώνει τη μερική παραγωγή ως προς x_j . Αυτός ο τύπος (1.6.19) είναι βέβαια σύμφωνος και με τον τύπο (1.1.42) για τις συνιστώσες C_i του εξωτερικού γινομένου $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ δύο διανυσμάτων \mathbf{A} και \mathbf{B} . Μόνο που εδώ το πρώτο διάνυσμα \mathbf{A} στο εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, εδώ στο στροβιλισμό (ή στην περιστροφή) $\nabla \times \mathbf{v}$ ή $\text{curl } \mathbf{v}$, είναι το συμβολικό (όχι αληθινό) διάνυσμα (ο τελεστής παραγωγίσεων) ∇ (το ανάδελτα) ή ισοδύναμα το συμβολικό (όχι αληθινό) διάνυσμα $\partial/\partial x_j$.

 **Άσκηση**

Ενότητα Ε1.6

▼ **Άσκηση Ε1.25 ■ Στροβιλισμός διανύσματος**

Να επαληθευθεί ότι ο τύπος (1.6.19) για τις συνιστώσες του στροβιλισμού (ή της περιστροφής) $\nabla \times \mathbf{v}$ ή $\text{curl } \mathbf{v}$ είναι σύμφωνος με τους αναλυτικούς τύπους (1.6.18). ▲

Είναι μάλλον εύλογο για το στροβιλισμό (ή την περιστροφή) $\nabla \times \mathbf{v}$ ή $\text{curl } \mathbf{v}$ ενός διανύσματος \mathbf{v} να ισχύει το θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ Ε1.7 (Στροβιλισμός διανύσματος):** Ο στροβιλισμός (ή περιστροφή) $\nabla \times \mathbf{v}$ ή $\text{curl } \mathbf{v}$ διανύσματος \mathbf{v} (που τον υποθέτουμε εδώ ότι υπάρχει με κατάλληλα παραγωγίσιμες τις συνιστώσες v_i του διανύσματος \mathbf{v}) είναι επίσης διάνυσμα.

Απόδειξη

⇒ **Απόδειξη:** Για τις συνιστώσες w_i του στροβιλισμού $\text{curl } \mathbf{v}$ ισχύει ο τύπος (1.6.19). Σ' αυτόν όμως το μέγεθος $u_{jk} = v_{k,j}$ είναι τανυστής δευτέρας τάξεως, επειδή είναι η κλίση του διανύσματος v_k , και αυτό το γνωρίζουμε από το Θεώρημα Ε1.5 της Παραγράφου Ε1.6.3 αυτής της ενότητας. Επίσης γνωρίζουμε (αν και δεν το αποδείξαμε) ότι το σύμβολο του Levi-Civita ϵ_{ijk} είναι τανυστής τρίτης τάξεως. Άρα το μέγεθος $s_{ijklm} = \epsilon_{ijk} u_{lm} = \epsilon_{ijk} v_{m,l}$ είναι τανυστής πέμπτης τάξεως. Και με δύο συστολές στους δείκτες του: $l = j$ και $m = k$ προκύπτει το μέγεθος $w_i = \epsilon_{ijk} u_{jk} = \epsilon_{ijk} v_{k,j}$, δηλαδή ο στροβιλισμός $\mathbf{w} = \text{curl } \mathbf{v}$. Αυτός είναι προφανώς τανυστής πρώτης τάξεως (εδώ $5 - 2 - 2 = 1$), αφού η συστολή τανυστή δίνει και πάλι τανυστή με τάξη μικρότερη κατά δύο. (Εδώ βέβαια κάναμε δύο συστολές στον τανυστή $s_{ijklm} = \epsilon_{ijk} u_{lm}$: τις συστολές $l = j$ και $m = k$). ▲

E1.6.5

E1.6.5. Λαπλασιανή βαθμωτού μεγέθους

Πάρα πολύ συχνά συναντάμε επίσης και τη Λαπλασιανή βαθμωτού μεγέθους $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$. Αυτή ορίζεται σαν

$$\nabla^2 \varphi \equiv \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i} = \varphi_{,ii} \tag{1.6.20}$$

υιοθετώντας κι εδώ τη σύμβαση της αθροίσεως του Einstein. Ισχύει το θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ Ε1.8 (Λαπλασιανή βαθμωτού μεγέθους):** Η Λαπλασιανή $\nabla^2 \varphi$ ή $\Delta \varphi$ βαθμωτού μεγέθους φ (που την υποθέτουμε εδώ ότι υπάρχει με κατάλληλα παραγωγίσιμο το βαθμωτό μέγεθος φ) είναι επίσης βαθμωτό μέγεθος (τανυστής μηδενικής τάξεως).

Απόδειξη

⇒ **Απόδειξη:** Πρέπει να αποδείξουμε ότι πρόκειται για τανυστή μηδενικής τάξεως. Καταρχήν διαπιστώνουμε ότι η Λαπλασιανή $\nabla^2 \varphi$ ή $\Delta \varphi$ προκύπτει και από τον τύπο

$$\nabla^2 \varphi = \text{div}(\text{grad } \varphi). \tag{1.6.21}$$

Αυτό συμβαίνει, επειδή το $\text{grad } \varphi$ έχει συνιστώσες $\varphi_{,i}$. Άρα η απόκλιση $\text{div}(\text{grad } \varphi)$ της κλίσεως $\text{grad } \varphi$ βαθμωτού μεγέθους φ είναι $(\partial/\partial x_i)(\partial\varphi/\partial x_i) = \partial^2\varphi/(\partial x_i \partial x_i) = \varphi_{,ii}$ συμφωνώντας έτσι με τον ορισμό (1.6.20) της Λαπλασιανής $\nabla^2\varphi$ ή $\Delta\varphi$.

Αλλά με το φ βαθμωτό μέγεθος (τανυστή μηδενικής τάξεως) έχουμε ήδη δει στο Θεώρημα E1.4 της Παραγράφου E1.6.2 αυτής της ενότητας ότι η κλίση του $\text{grad } \varphi$ με συνιστώσες της $u_i = \partial\varphi/\partial x_i = \varphi_{,i}$ είναι διάνυσμα (τανυστής πρώτης τάξεως). Και είδαμε επίσης στο Θεώρημα E1.6 της Παραγράφου E1.6.3 πάλι αυτής της ενότητας ότι η απόκλιση διανύσματος (εδώ του $u_i = \partial\varphi/\partial x_i = \varphi_{,i}$) είναι βαθμωτό μέγεθος (τανυστής μηδενικής τάξεως). Επομένως, αφού η Λαπλασιανή είναι απλά η απόκλιση της κλίσεως $\nabla\varphi$ ή $\text{grad } \varphi$ βαθμωτού μεγέθους φ σύμφωνα με τον πιο πάνω τύπο (1.6.21), θα είναι ένα βαθμωτό μέγεθος (τανυστής μηδενικής τάξεως). ▲

Γνωρίζουμε ήδη πως η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (ή μερική διαφορική εξίσωση)

$$\nabla^2\varphi = 0 \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \Delta\varphi = 0 \quad (1.6.22)$$

που περιέχει τη Λαπλασιανή $\nabla^2\varphi$ ή $\Delta\varphi$ καλείται **εξίσωση του Laplace**.

Άσκηση

Ενότητα E1.6

▼ Άσκηση E1.26 ■ Εξίσωση του Laplace

Ζητούνται: (α) Να αναφερθούν δύο ποσότητες στη Ρευστομηχανική και άλλες δύο στη Μηχανική των Υλικών που να επαληθεύουν την εξίσωση του Laplace. (β) Επίσης να αναφερθούν και οι μονάδες της καθεμιάς τους. (γ) Να αποδειχθεί ότι αν μια ποσότητα φ επαληθεύει την εξίσωση του Laplace σε ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$, τότε θα την επαληθεύει και σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. Υπόδειξη: Να ληφθεί υπόψη ότι σύμφωνα με το πιο πάνω Θεώρημα E1.8 η Λαπλασιανή $\nabla^2\varphi$ είναι βαθμωτό μέγεθος (τανυστής μηδενικής τάξεως). Κατά συνέπεια συμπεραίνουμε ότι ένας φυσικός νόμος που εκφράζεται με την εξίσωση του Laplace $\nabla^2\varphi = 0$ ισχύει σε κάθε σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων. Κι αυτό συμβαίνει παρόλο που οι ίδιες οι συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) και (x'_1, x'_2, x'_3) αλλάζουν από το ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ στο άλλο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. ▲

Τέλεια λοιπόν: η κλίση (ή βαθμίδα) βαθμωτού μεγέθους, η απόκλιση διανύσματος, ο στροβιλισμός (ή περιστροφή) διανύσματος και η Λαπλασιανή βαθμωτού μεγέθους είναι όλα τανυστές είτε μηδενικής τάξεως είτε πρώτης τάξεως. Αντίθετα η κλίση (ή βαθμίδα) διανύσματος είναι τανυστής δευτέρας τάξεως.

Άσκηση

Ενότητα E1.6

▼ Άσκηση E1.27 ■ Εξίσωση της διαχύσεως

Θεωρούμε την τριδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u \quad \text{ή} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Du_{,ii} \quad \text{με} \quad u = u(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.6.23)$$

την άγνωστη συνάρτηση και D το **συντελεστή διαχύσεως**. Και τα δύο αυτά μεγέθη u και D είναι βαθμωτά μεγέθη και ο χώρος όπου γίνεται η διάχυση της ποσότητας u θεωρείται εδώ ισότροπος. Γι' αυτόν το λόγο το D είναι απλά βαθμωτό μέγεθος.

Η εξίσωση της διαχύσεως είναι μια πολύ γνωστή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Παρουσιάζεται καταρχήν στη Μετάδοση Θερμότητας ή Διάδοση

Θερμότητας (με βάση το νόμο του Fourier, 1822) με u τη *θερμοκρασία* και $D = \kappa$ το *συντελεστή θερμικής διαχύσεως*. Παρουσιάζεται επίσης στην Εδαφομηχανική στη στερεοποίηση στρώματος (ή στρώσεως) αργίλου στο έδαφος (με βάση τη θεωρία του Terzaghi, 1923) με u την *πρόσθετη υδροστατική πίεση* (ή *υπερπίεση του νερού των πόρων*) και $D = c_v$ το *συντελεστή στερεοποίησης*. Παρουσιάζεται ακόμη στην Περιβαλλοντική Υδραυλική στη μοριακή διάχυση ρύπου (με βάση το νόμο του Fick, 1855) με $u = c$ τη *συγκέντρωση του ρύπου* και D το *συντελεστή μοριακής διαχύσεως*. Παρουσιάζεται επίσης στην Υδρολογία και συγκεκριμένα στην υπόγεια ροή νερού σε πορώδες έδαφος με $u = h$ το *υδραυλικό φορτίο* και $D = a$ το *συντελεστή υδραυλικής διαχύσεως* με $a = k/S_s$ με k το συντελεστή διαπερατότητας (ή υδραυλική αγωγιμότητα) του εδάφους και S_s την ειδική αποθηκευτικότητα του.

Εδώ με χρήση των Θεωρημάτων Ε1.3 και Ε1.8 ζητείται απλά να αποδειχθεί ότι η εξίσωση της διαχύσεως (1.6.23) διατηρεί την ισχύ της στο φυσικό πρόβλημα στο οποίο αναφέρεται (όπως στα τρία παραπάνω προβλήματα) σε περίπτωση αλλαγής του συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων από $Ox_1x_2x_3$ σε $Ox'_1x'_2x'_3$. ▲

E1.7

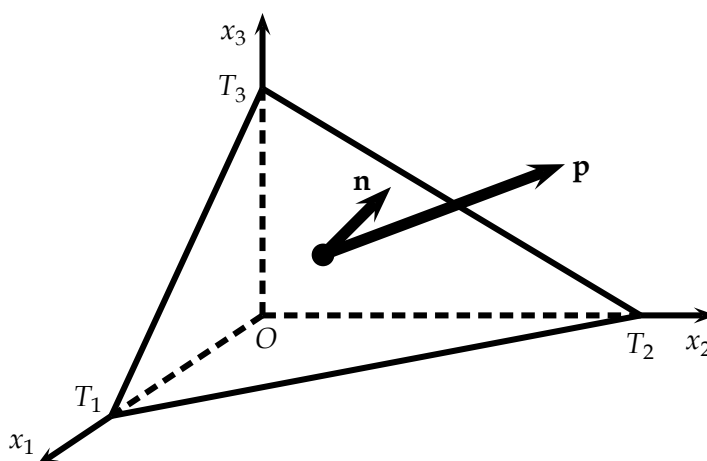
E1.7. ΤΑΝΥΣΤΕΣ ΤΑΣΕΩΝ, ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΡΟΠΩΝ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Στη Μηχανική των Υλικών έχουμε ήδη συναντήσει τους τανυστές των τάσεων σ_{ij} (ή πιο απλά $\boldsymbol{\sigma}$), των παραμορφώσεων ε_{ij} (ή πιο απλά $\boldsymbol{\varepsilon}$) και των ροπών αδρανείας I_{ij} (ή πιο απλά \mathbf{I}). Και οι τρεις τους είναι τανυστές δευτέρας τάξεως (με $n = 2$). Σ' αυτήν εδώ την ενότητα θα αποδείξουμε επίσημα ότι πρόκειται για τανυστές με βάση τις γνώσεις που έχουμε ήδη αποκτήσει στις προηγούμενες ενότητες.

E1.7.1

E1.7.1. Ο τανυστής των τάσεων

Ξεκινάμε με τον *τανυστή των τάσεων* σ_{ij} σε ένα ελαστικό μέσον. Στο παρακάτω σχήμα δείχνουμε ένα απειροστό τετράεδρο $OT_1T_2T_3$ στο μέσον αυτό με τους τρεις άξονες Ox_1 , Ox_2 και Ox_3 κάθετους μεταξύ τους και την έδρα του $T_1T_2T_3$ πλάγια.



Σχήμα Ε1.2: Απειροστό τετράεδρο σε ελαστικό μέσον.

Στην πλάγια έδρα $T_1T_2T_3$ του τετραέδρου θεωρούμε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} (εννοείται προς τα έξω του τετραέδρου) με συνιστώσες n_i . Στην ίδια έδρα θεωρούμε και το διάνυσμα των τάσεων \mathbf{p} , δηλαδή το διάνυσμα της δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας που ασκείται από το υπόλοιπο ελαστικό μέσον πάνω στην έδρα αυτή του τετραέδρου που έχουμε «αποκόψει». Τονίζουμε ότι εδώ πρόκειται για το

διάνυσμα των τάσεων \mathbf{p} , που είναι τανυστής πρώτης τάξεως, και όχι για τις ίδιες τις τάσεις σ_{ij} , που είναι τανυστής δευτέρας τάξεως, όπως θα αποδείξουμε σε λίγο.

Στο τετράεδρο αυτό $OT_1T_2T_3$ αποδεικνύεται σχετικά εύκολα από τη Γεωμετρία ότι αν ΔE είναι το εμβαδόν της πλάγιας τριγωνικής έδρας $T_1T_2T_3$ του τετραέδρου, τότε τα εμβαδά $\Delta E_1 = (OT_2T_3)$, $\Delta E_2 = (OT_3T_1)$ και $\Delta E_3 = (OT_1T_2)$ των άλλων τριών τριγωνικών εδρών του τετραέδρου $OT_1T_2T_3$ θα δίνονται από τους απλούς τύπους

$$\Delta E_1 = (OT_2T_3) = n_1 \Delta E, \quad \Delta E_2 = (OT_3T_1) = n_2 \Delta E, \quad \Delta E_3 = (OT_1T_2) = n_3 \Delta E. \quad (1.7.1)$$

Δηλαδή με δείκτες

$$\Delta E_i = n_i \Delta E \quad \text{με} \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.7.2)$$

Υπενθυμίζεται ότι n_i είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου διανύσματος \mathbf{n} στην πλάγια τριγωνική έδρα $T_1T_2T_3$ του τετραέδρου $OT_1T_2T_3$ του Σχήματος E1.2.

Και τώρα θα εξετάσουμε την ισορροπία αυτού εδώ του απειροστού τετραέδρου $OT_1T_2T_3$ μέσα στο ελαστικό μέσον μας ως προς τις συνολικές δυνάμεις οι οποίες ασκούνται πάνω του από το υπόλοιπο ελαστικό μέσον κατά τις διευθύνσεις των τριών καθέτων μεταξύ τους αξόνων Ox_1 , Ox_2 και Ox_3 . Ξεκινάμε πρώτα-πρώτα με την ισορροπία δυνάμεων κατά τη διεύθυνση του πρώτου άξονα Ox_1 .

Με σ_{ij} τις τάσεις στο απειροστό τετράεδρο $OT_1T_2T_3$ (Σχήμα E1.2) στο τρίγωνο OT_2T_3 θα έχουμε δύναμη $\Delta F_1 = \sigma_{11} \Delta E_1$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1 με σ_{11} την ορθή τάση κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1 . Βέβαια η δύναμη ΔF_1 θα είναι προς τον αρνητικό άξονα Ox_1 , αν η ορθή τάση σ_{11} είναι θετική. Μετά στο τρίγωνο OT_3T_1 θα έχουμε δύναμη $\Delta F_2 = \sigma_{21} \Delta E_2$ πάλι κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1 με σ_{21} τη διατμητική τάση κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1 . Προφανώς η δύναμη ΔF_2 θα είναι προς τον αρνητικό άξονα Ox_1 , αν η διατμητική τάση σ_{21} είναι θετική. Έπειτα στο τρίγωνο OT_1T_2 θα έχουμε δύναμη $\Delta F_3 = \sigma_{31} \Delta E_3$ ξανά κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1 με σ_{31} τη διατμητική τάση κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1 . Ασφαλώς η δύναμη ΔF_3 θα είναι προς τον αρνητικό άξονα Ox_1 , αν η διατμητική τάση σ_{31} είναι θετική. Τέλος στο τρίγωνο $T_1T_2T_3$ (στην πλάγια έδρα του τετραέδρου) κατά τη διεύθυνση του ίδιου άξονα Ox_1 θα έχουμε δύναμη $\Delta F = p_1 \Delta E$ με p_1 τη συνιστώσα του διανύσματος των τάσεων \mathbf{p} στην έδρα αυτή κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1 .

Η ισορροπία δυνάμεων κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_1 μας οδηγεί αμέσως στο συμπέρασμα ότι

$$\Delta F = \Delta F_1 + \Delta F_2 + \Delta F_3 \quad (1.7.3)$$

και παραπέρα με τις παραπάνω εκφράσεις αυτών των στοιχειωδών δυνάμεων

$$p_1 \Delta E = \sigma_{11} \Delta E_1 + \sigma_{21} \Delta E_2 + \sigma_{31} \Delta E_3. \quad (1.7.4)$$

Παίρνουμε τώρα υπόψη μας και τις εκφράσεις (1.7.1) ή (1.7.2) για τα στοιχειώδη εμβαδά ΔE_i . Έτσι προκύπτει αμέσως ότι

$$p_1 \Delta E = \sigma_{11} n_1 \Delta E + \sigma_{21} n_2 \Delta E + \sigma_{31} n_3 \Delta E. \quad (1.7.5)$$

Με απλοποίηση μάλιστα και του κοινού παράγοντα ΔE παίρνουμε

$$p_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3 = \sum_{j=1}^3 \sigma_{j1} n_j. \quad (1.7.6)$$

Χρησιμοποιώντας τέλος και την ήδη γνωστή μας σύμβαση αθροίσεως του Einstein, γράφουμε αυτό το τελικό αποτέλεσμα μας στη μορφή

$$p_1 = \sigma_{j1} n_j \quad (\text{κατά τη διεύθυνση του άξονα } Ox_1). \quad (1.7.7)$$

Εντελώς ανάλογα εργαζόμαστε και για την ισορροπία δυνάμεων κατά τις διευθύνσεις των αξόνων Ox_2 και Ox_3 πάλι στο στοιχειώδες τετράεδρο μας $OT_1T_2T_3$ του πιο πάνω Σχήματος Ε1.2. Έτσι προκύπτουν και οι άλλες δύο εξισώσεις ισορροπίας

$$p_2 = \sigma_{j2}n_j \quad (\text{κατά τη διεύθυνση του άξονα } Ox_2), \quad (1.7.8)$$

$$p_3 = \sigma_{j3}n_j \quad (\text{κατά τη διεύθυνση του άξονα } Ox_3). \quad (1.7.9)$$


Και προφανώς και οι τρεις αυτές εξισώσεις ισορροπίας (εδώ μόνο των δυνάμεων) κατά τις διευθύνσεις των τριών αξόνων Ox_i γράφονται και στην ενιαία μορφή τους

$$p_i = \sigma_{ji}n_j \quad \text{με } i = 1, 2, 3. \quad (1.7.10)$$

Υπενθυμίζεται και πάλι ότι n_j είναι οι συνιστώσες του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{n} στην πλάγια έδρα $T_1T_2T_3$ του στοιχειώδους τετραέδρου μας $OT_1T_2T_3$.


Δουλέψαμε με το στοιχειώδες τετράεδρο μας στο Σχήμα Ε1.2 στην ισορροπία των δυνάμεων που ασκούνται σ' αυτό κατά τις διευθύνσεις των αξόνων Ox_i και καμαρώνουμε τώρα που φθάσαμε στο τελικό αποτέλεσμά μας (1.7.10). Εδώ, όπως είπαμε, p_i είναι οι συνιστώσες του διανύσματος των τάσεων (δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας) που ασκείται πάνω στην πλάγια έδρα $T_1T_2T_3$ του τετραέδρου $OT_1T_2T_3$ από το ελαστικό μέσον μας. Επίσης, το είπαμε κι αυτό, n_j είναι οι συνιστώσες του μοναδιαίου κάθετου (και προς τα έξω) διανύσματος \mathbf{n} πάνω στην ίδια έδρα $T_1T_2T_3$ του τετραέδρου $OT_1T_2T_3$. Επίσης, είναι προφανές αυτό, στο αποτέλεσμά μας (1.7.10) δεξιά έχουμε άθροιση ως προς τον επαναλαμβανόμενο δείκτη j (σύμφωνα με την τόσο γνωστή μας πια σύμβαση αθροίσεως του Einstein).

Και τώρα απλά χρησιμοποιούμε το νόμο του ηπλίκου στους τανυστές που ήδη το γνωρίζουμε από την Ενότητα Ε1.4 και ειδικότερα από το Θεώρημα Ε1.1 εκεί. Έτσι διαπιστώνουμε ότι το μέγεθος σ_{ij} είναι τανυστής δευτέρας τάξεως, αφού και τα δύο μεγέθη p_i και n_j στον τύπο (1.7.10) είναι διανύσματα (τανυστές πρώτης τάξεως). Είναι λοιπόν πάρα πολύ χρήσιμος ο νόμος του ηπλίκου στη Μηχανική των Υλικών.

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε1.7

▼ Άσκηση Ε1.28 ■ Τανυστής των τάσεων

Με τα δύο μεγέθη p_i και n_j διανύσματα και τη σχέση (1.7.10) γνωστή να γίνουν από την αρχή όλοι οι υπολογισμοί στο νόμο του ηπλίκου (με τον παρόντα συμβολισμό) και να αποδειχθεί ότι πράγματι το μέγεθος σ_{ij} είναι τανυστής δευτέρας τάξεως. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε1.7

▼ Άσκηση Ε1.29 ■ Τανυστής των τάσεων

Να αποδειχθεί από την αρχή ο τύπος (1.7.10), $p_i = \sigma_{ji}n_j$, στην ειδική περίπτωση των δύο διαστάσεων με σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων Ox_1x_2 . Εδώ βέβαια θα έχουμε απλά τρίγωνο OT_1T_2 αντί για τετράεδρο $OT_1T_2T_3$ και επίσης δύο μόνο εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων: κατά τις διευθύνσεις των αξόνων Ox_1 και Ox_2 . ▲

► **Παρατήρηση**

▼ **Παρατήρηση Ε1.3:** Τελειώνοντας, ας σημειώσουμε ότι με ισορροπία ροπών σε ένα στοιχειώδες ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του ελαστικού μέσου μας μπορεί να αποδειχθεί ότι $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ και επομένως ο τανυστής των τάσεων είναι συμμετρικός τανυστής. Αυτήν τη σχέση $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ τη γνωρίζουμε ήδη από τη Μηχανική των Υλικών και παραλείπουμε εδώ τη γνωστή μας σχετική απόδειξη. ▲

E1.7.2

E1.7.2. Ο τανυστής των παραμορφώσεων

Ευτυχώς αρκετά πιο εύκολη είναι η κατάσταση με τον *τανυστή των παραμορφώσεων* ε_{ij} στο ίδιο ελαστικό μέσον μας. Δε θα μας κουράσει καθόλου η σχετική απόδειξη και φυσικά στις παραμορφώσεις ε_{ij} δε χρησιμοποιούμε εξισώσεις ισορροπίας δυνάμεων που μας ταλαιπώρησαν κάπως στις τάσεις σ_{ij} στην προηγούμενη Παράγραφο E1.7.1. Εδώ εννοούμε βέβαια μικρές παραμορφώσεις ε_{ij} σαν κι αυτές που υποθέτουμε γενικά στην Ελαστικότητα. Φλυαρήσαμε. Ξεκινάμε!

Γνωρίζουμε ήδη από τη Μηχανική των Υλικών ότι στην Ελαστικότητα οι (μικρές επαναλαμβάνουμε) παραμορφώσεις ε_{ij} ορίζονται μέσω των μετατοπίσεων u_i , πολύ καλύτερα μέσω του διανύσματος των μετατοπίσεων \mathbf{u} (με συνιστώσες u_1, u_2 και u_3), στο ελαστικό μέσον. Οι τύποι ορισμού τους είναι

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \text{και} \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (1.7.11)$$

για τις ορθές παραμορφώσεις ε_{ij} με $i = j$ και

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)$$

$$\text{και} \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \quad (1.7.12)$$

για τις διατμητικές παραμορφώσεις ε_{ij} με $i \neq j$. Πάρα πολύ εύκολα παρατηρούμε ότι όλοι αυτοί οι τύποι μπορούν να γραφούν και στην ακόλουθη ενιαία μορφή τους:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.7.13)$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε δεξιά και το συμβολισμό των παραγώγων με δείκτες μετά από κόμμα. Και από αυτήν τη μορφή (1.7.13) είναι απόλυτα σαφές ότι το μέγεθος δευτέρας τάξεως ε_{ij} είναι συμμετρικό, δηλαδή ότι $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Ωραία! Θα δείξουμε τώρα ότι το μέγεθος δευτέρας τάξεως ε_{ij} είναι και τανυστής. Προς το σκοπό αυτό θυμόμαστε ασφαλώς ότι, όπως ήδη είπαμε, u_i (ή ισοδύναμα \mathbf{u}) είναι το διάνυσμα των μετατοπίσεων εννοείται των σημείων (x_1, x_2, x_3) του ελαστικού μέσου μας. Αλλ' από το Θεώρημα E1.5 της Παραγράφου E1.6.3, σχέση (1.6.8), γνωρίζουμε ήδη ότι το μέγεθος $v_{ij} = \partial u_i / \partial x_j \equiv u_{i,j}$ είναι τανυστής δευτέρας τάξεως. Άρα και οι δύο ποσότητες $u_{i,j}$ και $u_{j,i}$ (στη δεύτερη απλά κάνουμε εναλλαγή των συμβόλων των δεκτών: j αντί για i και i αντί για j) είναι τανυστές δευτέρας τάξεως. Επομένως το ίδιο θα ισχύει και για το άθροισμά τους $u_{i,j} + u_{j,i}$, όπως ήδη γνωρίζουμε από την Παράγραφο E1.3.2 για την πρόσθεση τανυστών. (Κι αυτό είναι τανυστής δευτέρας τάξεως!) Τέλος και ο πολλαπλασιασμός επί 1/2 δεν αλλάζει τον τανυστικό χαρακτήρα του μεγέθους $u_{i,j} + u_{j,i}$, όπως ήδη γνωρίζουμε καλά από την παράγραφο E1.3.1 για τον πολλαπλασιασμό τανυστή επί πραγματικό αριθμό. Κατά συνέπεια με βάση τον τύπο (1.7.13) οι παραμορφώσεις ε_{ij} (ή ισοδύναμα $\boldsymbol{\varepsilon}$) σε ελαστικό μέσον αποτελούν έναν τανυστή δευτέρας τάξεως. Και βέβαια συμμετρικό τανυστή, όπως ήδη αναφέραμε, με βάση τον ίδιο ακριβώς τύπο (1.7.13). Τέλεια!

Άσκηση

Ενότητα E1.7

▼ Άσκηση E1.30 ■ Ο τανυστής των στροφών

Ξανά στη Μηχανική των Υλικών με βάση τις μετατοπίσεις u_i του ελαστικού μέσου πέρα από τον τανυστή των παραμορφώσεων ε_{ij} , που ορίστηκε με τον τύπο (1.7.13),

ορίζεται ανάλογα και ο τανυστής των στροφών ω_{ij} , αλλά τώρα με μείον αντί για συν στον ίδιο τύπο (1.7.13). Συγκεκριμένα για τις στροφές ω_{ij} ισχύει ο τύπος

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}). \quad (1.7.14)$$

Βέβαια σε αντίθεση με τον τανυστή των παραμορφώσεων ε_{ij} αυτός ο τανυστής των στροφών ω_{ij} δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στη Μηχανική των Υλικών.

Ζητούνται: (α) Να αποδειχθεί ότι αυτό το μέγεθος ω_{ij} είναι επίσης τανυστής: τανυστής των στροφών. (β) Να αποδειχθεί ότι είναι επιπλέον και αντισυμμετρικός τανυστής. (γ) Να διαπιστωθεί τέλος ότι ο συμμετρικός τανυστής των παραμορφώσεων ε_{ij} και ο αντισυμμετρικός τανυστής των στροφών ω_{ij} επιτρέπουν την ανάλυση του τανυστή των παραγώγων $v_{ij} = \partial u_i / \partial x_j \equiv u_{i,j}$ των μετατοπίσεων u_i σε συμμετρικό και σε αντισυμμετρικό μέρος σύμφωνα με το Θεώρημα Ε1.2 στην Ενότητα Ε1.5. ▲

E1.7.3

E1.7.3. Ο τανυστής των ροπών αδρανείας

Προχωράμε τώρα στον τρίτο (και τελευταίο) σημαντικό τανυστή της Μηχανικής των Υλικών: στον *τανυστή των ροπών αδρανείας* I_{ij} . Χρειάζεται όμως κάποια εργασία, ώστε με την ευκαιρία να εξηγήσουμε και την έννοια αυτού του τανυστή.

Θεωρούμε την περιστροφική κίνηση ενός στερεού σώματος γύρω από σταθερό σημείο O . Το σώμα αυτό καταλαμβάνει την περιοχή V στον τριδιάστατο χώρο και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$, που εδώ είναι ένα διάνυσμα. Δηλώνουμε με \mathbf{r} το διάνυσμα θέσεως των σημείων του στερεού μας στο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων του ίδιου του στερεού που είναι προσαρτημένο στο στερεό. Τότε για την ταχύτητα \mathbf{v} των σημείων του στερεού ισχύει ο γνωστός τύπος

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \quad (1.7.15)$$

Τώρα θεωρούμε τη στροφορμή \mathbf{L} του στερεού. Υπενθυμίζεται ότι ένα υλικό σημείο μάζας m στη θέση \mathbf{r} και με ταχύτητα \mathbf{v} έχει στροφορμή $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times (\mathbf{v}m)$. (Δηλαδή η στροφορμή \mathbf{L} είναι η ροπή της ορμής $m\mathbf{v}$.) Τώρα για το στερεό μας για κάθε στοιχειώδη μάζα του Δm η αντίστοιχη στοιχειώδης στροφορμή $\Delta \mathbf{L}$ θα είναι

$$\Delta \mathbf{L} = \mathbf{r} \times (\mathbf{v}\Delta m) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\Delta m = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\rho\Delta V \quad (1.7.16)$$

με ρ τη συνηθισμένη πυκνότητα του στερεού, οπότε $\Delta m = \rho\Delta V$. Άρα για ολόκληρο το στερεό για να υπολογισθεί η συνολική στροφορμή του \mathbf{L} , θα πρέπει να γίνει μια ολοκλήρωση πάνω στον όγκο V του στερεού. Έτσι προκύπτει ότι

$$\mathbf{L} = \iiint_V \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\rho dV = \iiint_V \rho \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) dV \quad (1.7.17)$$

αλλάζοντας τη θέση της πυκνότητας ρ στην ολοκληρωτέα συνάρτηση και επίσης δηλώνοντας τώρα με dV (αντί για ΔV πριν) το στοιχείο όγκου του στερεού.

Γνωρίζουμε όμως ότι για το διπλό εξωτερικό γινόμενο τριών διανυσμάτων \mathbf{A} , \mathbf{B} και \mathbf{C} ισχύει ο τύπος

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (1.7.18)$$

με την τελεία να δηλώνει το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων. Επομένως εδώ (με $\mathbf{A} = \mathbf{r}$, $\mathbf{B} = \boldsymbol{\omega}$ και $\mathbf{C} = \mathbf{r}$ και πάλι) το ολοκλήρωμα (1.7.17) παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{L} = \iiint_V \rho [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{r}] dV. \quad (1.7.19)$$

Δηλώνοντας τώρα με x_i τις συνιστώσες του διανύσματος θέσεως \mathbf{r} , το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ γράφεται εύκολα σαν $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_i x_i = x_j x_j = x_k x_k$ (φυσικά με σύμβαση αθροίσεως δεξιά). Επίσης δηλώνοντας με ω_i τις συνιστώσες του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}$, το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega}$ γράφεται εύκολα σαν $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega} = x_j \omega_j$. Υπό αυτές τις συνθήκες το πιο πάνω ολοκλήρωμα (1.7.19) για τη στροφορμή \mathbf{L} του στερεού παίρνει τη μορφή με δείκτες

$$L_i = \iiint_V \rho [(x_k x_k) \omega_i - (x_j \omega_j) x_i] dV, \quad (1.7.20)$$

όπου βέβαια L_i είναι οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος της στροφορμής \mathbf{L} . (Εννοείται βέβαια ότι οι παρενθέσεις στους όρους $(x_k x_k)$ και $(x_j \omega_j)$ δεν είναι απαραίτητες. Παίρνοντας υπόψη μας και την ιδιότητα της αντικαταστάσεως στο δέλτα του Kronecker, εδώ $\delta_{ij} \omega_j = \omega_i$, μπορούμε να ξαναγράψουμε τον τύπο (1.7.20) στη μορφή

$$L_i = \iiint_V \rho (x_k x_k \delta_{ij} \omega_j - x_i x_j \omega_j) dV = \iiint_V \rho (x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j) \omega_j dV. \quad (1.7.21)$$

Στο τέλος μάλιστα στην ολοκληρωτέα συνάρτηση βγάλαμε κοινό παράγοντα το ω_j (τη σχετική συνιστώσα της γωνιακής ταχύτητας $\boldsymbol{\omega}$ του στερεού).

Ο Πολιτικός Μηχανικός υποθέτει επίσης την πυκνότητα ρ του στερεού ότι είναι σταθερή ποσότητα. Επιπλέον οι συνιστώσες ω_j του διανύσματος $\boldsymbol{\omega}$ της γωνιακής ταχύτητας του στερεού είναι ανεξάρτητες από τη θέση \mathbf{r} των σημείων του στερεού, είναι οι ίδιες για όλα τα σημεία του στερεού. Άρα οι πιο πάνω συνιστώσες L_i του διανύσματος \mathbf{L} της στροφορμής του στερεού μπορούν να γραφούν και στη μορφή

$$L_i = \rho \left[\iiint_V (x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j) dV \right] \omega_j. \quad (1.7.22)$$

Και τώρα εύλογα εισάγουμε τον **τανυστή των ροπών αδρανείας \mathbf{I}** που χρησιμοποιεί ο Πολιτικός Μηχανικός (πιο σωστά τον **τανυστή των γεωμετρικών ροπών αδρανείας \mathbf{I}**) μέσω των εννέα συνιστωσών του

$$I_{ij} = \iiint_V (x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j) dV. \quad (1.7.23)$$

Αυτόν ακριβώς τον ορισμό μας υποδεικνύει ο τελικός τύπος (1.7.22) για τη στροφορμή \mathbf{L} του στερεού. Κι έτσι αυτή η στροφορμή \mathbf{L} γράφεται απλά-απλά στη μορφή

$$L_i = \rho I_{ij} \omega_j. \quad (1.7.24)$$

Κουραστήκαμε λίγο, αλλ' είμαστε χαρούμενοι. Κι αυτό συμβαίνει, επειδή γνωρίζουμε ότι τόσο η γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ όσο και η στροφορμή \mathbf{L} είναι διανύσματα (τανυστές πρώτης τάξεως). Επομένως με άμεση χρήση του νόμου του πηλίκου και συγκεκριμένα του Θεωρήματος E1.1 της Ενότητας E1.4 διαπιστώνουμε κι εδώ άμεσα ότι το μέγεθος δευτέρας τάξεως \mathbf{I} με συνιστώσες I_{ij} είναι τανυστής και φυσικά δευτέρας τάξεως. (Ασφαλώς το βαθμωτό μέγεθος ρ , η πυκνότητα του στερεού στο δεξιό μέλος του τύπου (1.7.24), δεν αλλάζει σε τίποτε την κατάσταση.) Δηλαδή η ροπή αδρανείας \mathbf{I} είναι στ' αλήθεια τανυστής ή ισοδύναμα οι συνιστώσες της I_{ij} που ορίστηκαν στον τύπο (1.7.23) αποτελούν έναν τανυστή \mathbf{I} , τον **τανυστή των ροπών αδρανείας**. Πρόκειται μάλιστα για συμμετρικό τανυστή, αφού με βάση τον ίδιο τύπο (1.7.23)

$$I_{ji} = \iiint_V (x_k x_k \delta_{ji} - x_j x_i) dV = \iiint_V (x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j) dV = I_{ij}, \quad (1.7.25)$$

επειδή $\delta_{ji} = \delta_{ij}$ και επίσης προφανώς $x_j x_i = x_i x_j$ (αντιμεταθετική ιδιότητα).

Φυσικά, αφού μάλιστα $x_k x_k = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, μας είναι πολύ εύκολο να γράψουμε αναλυτικά όλες τις συνιστώσες I_{ij} του τανυστή των ροπών αδρανείας \mathbf{I} με βάση τον τύπο ορισμού τους (1.7.23). Έτσι διαπιστώνουμε αρκετά εύκολα ότι

$$I_{11} = \iiint_V (x_2^2 + x_3^2) dV, \quad I_{22} = \iiint_V (x_3^2 + x_1^2) dV, \quad I_{33} = \iiint_V (x_1^2 + x_2^2) dV \quad (1.7.26)$$

και επίσης ανάλογα ότι

$$I_{12} = I_{21} = - \iiint_V x_1 x_2 dV, \quad I_{23} = I_{32} = - \iiint_V x_2 x_3 dV, \quad I_{31} = I_{13} = - \iiint_V x_3 x_1 dV. \quad (1.7.27)$$

Ας σημειώσουμε στο σημείο αυτό πως στον τανυστή \mathbf{I} των ροπών αδρανείας I_{ij} οι μη διαγώνιες συνιστώσες του I_{ij} (με $i \neq j$) στην παράστασή του με ένα μητρώο (μάλιστα μερικές φορές χωρίς το μείον), δηλαδή οι ποσότητες $I_{12} = I_{21}$, $I_{23} = I_{32}$ και $I_{31} = I_{13}$ στους τελευταίους τρεις τύπους, δηλαδή στους τρεις τύπους (1.7.27), καλούνται *γινόμενα αδρανείας* ή *φυγόκεντρες ροπές αδρανείας*.

Και έτσι συμπληρώσαμε τις αποδείξεις μας πως στη Μηχανική των Υλικών οι τάσεις σ_{ij} , οι παραμορφώσεις ε_{ij} και οι ροπές αδρανείας I_{ij} αποτελούν και οι τρεις τους τανυστές δευτέρας τάξεως. Εύκολη ήταν η απόδειξη για τις παραμορφώσεις ε_{ij} . Αντίθετα οι τάσεις σ_{ij} και οι ροπές αδρανείας I_{ij} μας κούρασαν λίγο: ήσαν στρυφνές.

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση Ε1.4:** Κι όμως τον τανυστή των ροπών αδρανείας I_{ij} θα μπορούσαμε να τον είχαμε εισαγάγει και τυπικά (δίχως καμία άλλη προηγούμενη φυσική σκέψη!) απλά από τη σχέση (1.7.23) όπου καταλήξαμε. Την υπενθυμίζουμε κι εδώ

$$I_{ij} = \iiint_V (x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j) dV. \quad (1.7.28)$$

Τώρα για να αποδείξουμε ότι πρόκειται για τανυστή σκεφτόμαστε απλά, πολύ απλά ως εξής: Οι συνιστώσες x_i του διανύσματος θέσεως \mathbf{r} είναι τανυστής πρώτης τάξεως. Άρα το μέγεθος $x_i x_j$ είναι τανυστής δευτέρας τάξεως. (Το ίδιο και με μείον: $-x_i x_j$.) Με συστολή $j = i$ του $x_i x_j$ παίρνουμε το βαθμωτό μέγεθος $x_i x_i = x_k x_k$. Επίσης το δέλτα του Kronecker δ_{ij} είναι τανυστής δευτέρας τάξεως, όπως ξέρουμε από την Άσκηση Ε1.8 της Ενότητας Ε1.2. Κατά συνέπεια το μέγεθος $x_k x_k \delta_{ij}$ είναι και αυτό τανυστής δευτέρας τάξεως σαν το γινόμενο τανυστή δευτέρας τάξεως (εδώ του δ_{ij}) επί έναν πραγματικό αριθμό (το βαθμωτό μέγεθος $x_k x_k$).

Άρα τελικά και το άθροισμα $x_k x_k \delta_{ij}$ συν $-x_i x_j$, δηλαδή όλη μαζί η ολοκληρωτέα συνάρτηση στη σχέση (1.7.28) ορισμού του τανυστή των ροπών αδρανείας \mathbf{I} , είναι και αυτό τανυστής δευτέρας τάξεως. Άρα με βάση τον ορισμό του τανυστή δευτέρας τάξεως (1.2.11) στην Παράγραφο Ε1.2.4 το ίδιο ισχύει και για το ολοκλήρωμα I_{ij} στη σχέση (1.7.28), μια που το ολοκλήρωμα δεν έχει ούτε δείκτες ούτε και καμία σχέση με στροφή του συστήματος συντεταγμένων και με το σχετικό μητρώο \mathbf{C} των συνημιτόνων $c_{\alpha\beta}$ στη σχέση (1.1.15).

Παρά ταύτα πολύ καλύτερη είναι η παραπάνω αρχική απόδειξη με χρήση του νόμου του πηλίκου. Αυτή βασίζεται στη γωνιακή ταχύτητα $\boldsymbol{\omega}$ και στη στροφορμή \mathbf{L} του στερεού που εξετάζουμε και πραγματικά μας ενημερώνει και μας οδηγεί φυσιο-λογικά στη σχέση (1.7.28) αντί να την πάρουμε έτοιμη σαν ορισμό του τανυστή των ροπών αδρανείας \mathbf{I} . Και βέβαια εδώ στη Μηχανική των Υλικών εννοούμε πάντα τανυστή γεωμετρικών ροπών αδρανείας και όχι φυσικών ροπών αδρανείας, όπως συμβαίνει αντίθετα στη Δυναμική. ▲

E1.8

E1.8. ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΥ ΤΑΝΥΣΤΗ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

E1.8.1

E1.8.1. Εισαγωγή στη διαγωνιοποίηση

Στην προηγούμενη Ενότητα E1.7 αναφερθήκαμε στους τρεις βασικούς τανυστές της Μηχανικής των Υλικών (και όχι μόνο!), δηλαδή στον τανυστή των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$ (με συνιστώσες σ_{ij}), στον τανυστή των παραμορφώσεων $\boldsymbol{\epsilon}$ (με συνιστώσες ϵ_{ij}) και στον τανυστή των ροπών αδρανείας \mathbf{I} (με συνιστώσες I_{ij}). Και τα τρία αυτά μεγέθη $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ και \mathbf{I} είναι τανυστές δευτέρας τάξεως. Είναι επίσης και συμμετρικοί τανυστές.

Χρησιμοποιώντας ενιαίο συμβολισμό, ας θεωρήσουμε γενικά ένα συμμετρικό τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{A} (με συνιστώσες A_{ij}). Τις συνιστώσες του A_{ij} τις θεωρούμε βέβαια πραγματικούς αριθμούς, όπως κάναμε και σ' όλους τους τανυστές αυτού του Κεφαλαίου E1. Ασφαλώς ένας τανυστής δευτέρας τάξεως \mathbf{A} μπορεί να παρασταθεί με μητρώο διαστάσεων 3×3 στις τρεις διαστάσεις και με μητρώο διαστάσεων 2×2 στις δύο διαστάσεις. Εδώ μάλιστα όπου υποθέτουμε πως ο τανυστής \mathbf{A} είναι ένας συμμετρικός τανυστής, δηλαδή για τις συνιστώσες του A_{ij} ισχύει ότι (Ενότητα E1.5)

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad (1.8.1)$$

θα έχουμε το μητρώο

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.8.2)$$

Σε αυτό το μητρώο πήραμε φυσικά υπόψη μας τη συμμετρία του τανυστή \mathbf{A} .

Σε αυτήν εδώ την ενότητα περιοριζόμαστε μόνο σε συμμετρικούς τανυστές \mathbf{A} δευτέρας τάξεως. Στόχος μας είναι απλά να δείξουμε πως με κατάλληλη στροφή του πρώτου συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ μπορούμε να μεταβούμε σ' ένα δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ (Σχήμα E1.1), όπου ο ίδιος τανυστής να παριστάνεται τώρα με διαγώνιο μητρώο \mathbf{A}' . Δηλαδή στο δεύτερο αυτό σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ θέλουμε να ισχύει

$$A'_{ij} = 0, \quad \text{εάν } i \neq j. \quad (1.8.3)$$

Άρα το σχετικό μητρώο \mathbf{A}' στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ θα είναι το διαγώνιο μητρώο

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} A'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A'_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.8.4)$$

Αυτή η εργασία καλείται *διαγωνιοποίηση* του συμμετρικού τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{A} και ήδη τη γνωρίζουμε από τη Μηχανική των Υλικών στις δύο διαστάσεις. Εκεί τη συναντήσαμε στους τανυστές των τάσεων, των παραμορφώσεων καθώς και των ροπών αδρανείας. Εδώ την αναφέρουμε πιο επίσημα και στις τρεις διαστάσεις.

E1.8.2

E1.8.2. Διαγωνιοποίηση συμμετρικού μητρώου στη Γραμμική Άλγεβρα

Ο τρόπος εργασίας μας είναι απλά, πολύ απλά να χρησιμοποιήσουμε τις διαθέσιμες γνώσεις μας για τη διαγωνιοποίηση ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου

που τις αποκτήσαμε στη Γραμμική Άλγεβρα¹ χωρίς σημαντικό επιπλέον κόπο. Για το σκοπό αυτό αναγκαζόμαστε να ξεφύγουμε από το συμβολισμό του παρόντος κεφαλαίου, όπου ουσιαστικά δε χρησιμοποιήσαμε μητρώα για την παράσταση τανυστών δευτέρας τάξεως. Τώρα αλλάζουμε συμβολισμό και χρησιμοποιούμε μητρώα με σκοπό να χρησιμοποιήσουμε άμεσα τις γνώσεις μας από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Τονίζουμε με έμφαση ότι εδώ περιορίζουμε την προσοχή μας σε συμμετρικούς τανυστές \mathbf{A} δευτέρας τάξεως στις τρεις διαστάσεις με συνιστώσες A_{ij} πραγματικούς αριθμούς, όπως είναι, επαναλαμβάνουμε, ο τανυστής των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$, ο τανυστής των παραμορφώσεων $\boldsymbol{\epsilon}$ και ο τανυστής των ροπών αδρανείας \mathbf{I} . (Φυσικά ανάλογα μπορούμε να εργασθούμε και στις δύο διαστάσεις.) Ωραία, πολύ ωραία! Και μετά; Μετά χρησιμοποιούμε τις έτοιμες γνώσεις μας από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Συγκεκριμένα για ένα τετραγωνικό μητρώο \mathbf{A} (εδώ για τον τανυστή \mathbf{A}) ξέρουμε να υπολογίζουμε τις *ιδιοτιμές* (ή *χαρακτηριστικές τιμές*) του λ_k από την εξίσωση

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \quad (1.8.5)$$

με \mathbf{I} το αντίστοιχο μοναδιαίο μητρώο. Το πολυώνυμο $\pi(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ στο αριστερό μέλος είναι το σχετικό *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* κι η αντίστοιχη εξίσωση $\pi(\lambda) = 0$ ή $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ είναι η σχετική *χαρακτηριστική εξίσωση*. Εδώ που είμαστε στις τρεις διαστάσεις πρόκειται βέβαια για ένα τριτοβάθμιο πολυώνυμο, δηλαδή για πολυώνυμο τρίτου βαθμού. Άρα αυτό το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\pi(\lambda)$ έχει τρεις ρίζες λ_1, λ_2 και λ_3 που για ευκολία τις υποθέτουμε εδώ απλές. Στη συνέχεια για κάθε ιδιοτιμή λ_k (με $k = 1, 2, 3$), δηλαδή για κάθε ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\pi(\lambda)$, προσδιορίζουμε το αντίστοιχο *ιδιοδιάνυσμα* (ή *χαρακτηριστικό διάνυσμα*) $\boldsymbol{\delta}_k$ που το κανονικοποιούμε μάλιστα, ώστε να έχει μέτρο ίσο με τη μονάδα: $|\boldsymbol{\delta}_k| = 1$. Αυτό το πετυχαίνουμε πολύ εύκολα απλά διαιρώντας το στην αρχική μορφή του με το μέτρο του. Έτσι το μέτρο του στην τελική μορφή του γίνεται ίσο με τη μονάδα. Και σημειώνουμε ότι ναι, εδώ πρέπει να την κάνουμε αυτήν την κανονικοποίηση. Αλλού δεν είναι υποχρεωτική. Εδώ όμως είναι, μας χρειάζεται η κανονικοποίηση!

Στην περίπτωση μας πραγματικών συμμετρικών μητρώων \mathbf{A} ισχύει το θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ Ε1.9 (Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα πραγματικών συμμετρικών μητρώων):** Όλες οι ιδιοτιμές λ_k ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου \mathbf{A} είναι πραγματικές. Άρα και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\delta}_k$ είναι και αυτά πραγματικά, επειδή το μητρώο \mathbf{A} είναι πραγματικό. Εδώ τα υποθέσαμε και μοναδιαία μετά από κανονικοποίησή τους. Επιπλέον τα δύο ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\delta}_l$ και $\boldsymbol{\delta}_m$ που αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές ιδιοτιμές λ_l και λ_m είναι κάθετα μεταξύ τους. Εδώ θεωρούμε την περίπτωση συμμετρικού τανυστή \mathbf{A} δευτέρας τάξεως με τρεις απλές (διακεκριμένες) ιδιοτιμές λ_k . Θεωρούμε και τα τρία αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\delta}_k$, που εδώ τα υποθέσαμε και μοναδιαία μετά από κανονικοποίησή τους και είναι και κάθετα μεταξύ τους, όπως ήδη αναφέρθηκε. Τότε αυτά τα τρία ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\delta}_k$ μπορούν να θεωρηθούν ότι είναι τα μοναδιαία διανύσματα ενός νέου συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. Για να είναι δεξιόστροφο το σύστημα αυτό, οπότε ισχύει $\boldsymbol{\delta}_1 \times \boldsymbol{\delta}_2 = \boldsymbol{\delta}_3$, $\boldsymbol{\delta}_2 \times \boldsymbol{\delta}_3 = \boldsymbol{\delta}_1$ και $\boldsymbol{\delta}_3 \times \boldsymbol{\delta}_1 = \boldsymbol{\delta}_2$, χρειάζεται μερικές φορές να αλλάξουμε τη φορά ενός ιδιοδιανύσματος $\boldsymbol{\delta}_k$ πολλαπλασιάζοντάς το επί -1 . ▲

¹Βλέπε, για παράδειγμα, το άριστο σύγγραμμα: Μάρκελλος, Β. Β. (2013), *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Κεφάλαιο 8: *Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα*, Ενότητα 8.3: *Ομοιότητα και διαγωνιοποίηση* και εκεί *Διαγωνιοποίηση συμμετρικού πίνακα*. Gotsis Εκδόσεις, Πάτρα.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το θεωρούμε γνωστό αυτό το θεώρημα με βάση τις γνώσεις που ήδη έχουμε αποκτήσει από τη Γραμμική Άλγεβρα. Επίσης από τη διαγωνιοποίηση πραγματικών συμμετρικών μητρώων στη Γραμμική Άλγεβρα μας είναι γνωστό και το θεώρημα:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ Ε1.10 (Διαγωνιοποίηση πραγματικών συμμετρικών μητρώων):**

Εάν οι ιδιοτιμές λ_k ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου \mathbf{A} είναι απλές, τότε το μητρώο αυτό \mathbf{A} διαγωνιοποιείται με βάση τον τύπο

$$\mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \quad (1.8.6)$$

με \mathbf{T} το μητρώο με στήλες του τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα $\mathbf{\delta}_k$ του πραγματικού συμμετρικού μητρώου \mathbf{A} , \mathbf{T}^T το ανάστροφο μητρώο του μητρώου \mathbf{T} και $\mathbf{\Lambda}$ το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών λ_k του ίδιου μητρώου \mathbf{A} . Προφανώς στην περίπτωση μας του συμμετρικού τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{A} στις τρεις διαστάσεις αυτά τα τέσσερα μητρώα \mathbf{A} , \mathbf{T} , \mathbf{T}^T και $\mathbf{\Lambda}$ είναι όλα τους διαστάσεων 3×3 . ▲

Συνοψίζουμε: Εμείς εδώ για το συμμετρικό τανυστή μας δευτέρας τάξεως \mathbf{A} στον τριδιάστατο χώρο, ο οποίος προφανώς μπορεί να παρασταθεί και με μητρώο \mathbf{A} διαστάσεων 3×3 (ή 2×2 εάν ήμασταν στις δύο διαστάσεις), εργαζόμαστε ως εξής:

1. Προσδιορίζουμε τις τρεις ιδιοτιμές του λ_k υποθέτοντάς τις απλές, διακεκριμένες μεταξύ τους, κάτι που γενικά ισχύει.
2. Έπειτα προσδιορίζουμε και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{\delta}_k$, που είναι και κάθετα μεταξύ τους, κανονικοποιώντας τα, ώστε να είναι μοναδιαία και να ισχύουν οι σχέσεις $\mathbf{\delta}_1 \times \mathbf{\delta}_2 = \mathbf{\delta}_3$, $\mathbf{\delta}_2 \times \mathbf{\delta}_3 = \mathbf{\delta}_1$ και $\mathbf{\delta}_3 \times \mathbf{\delta}_1 = \mathbf{\delta}_2$. Έτσι αυτά καθορίζουν ένα νέο δεξιόστροφο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$.
3. Με βάση αυτά τα τρία μοναδιαία ιδιοδιανύσματα $\mathbf{\delta}_k$ σχηματίζουμε αμέσως το μητρώο \mathbf{T} που τα έχει σαν στήλες του, δηλαδή $\mathbf{T} = [\mathbf{\delta}_1 \ \mathbf{\delta}_2 \ \mathbf{\delta}_3]$.
4. Τέλος διαγωνιοποιούμε το μητρώο \mathbf{A} με βάση τη σχέση (1.8.6), $\mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{\Lambda}$ με δεξιό μέλος το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών λ_k , δηλαδή $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Πολύ ωραία όλα αυτά και με κάποια μέτρια εξάσκηση στη Γραμμική Άλγεβρα μπορούμε να τα εφαρμόσουμε χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία με το χέρι ή καλύτερα με τη βοήθεια του υπολογιστή, π.χ. της *Mathematica*. Και για να είμαστε ειλικρινείς παραπλήσια διαδικασία χρησιμοποιήσαμε και στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II στη μέθοδο της διαγωνιοποίησης σε συστήματα συζευγμένων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων (*Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς*, Τεύχος 1, Κεφάλαιο A12, Ενότητα A12.9). Με τον τρόπο αυτό πετύχαμε εκεί την αποσύζευξη των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Και μάλιστα εκεί δε χρειάστηκε να κανονικοποιήσουμε τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{\delta}_k$ (ενώ εδώ χρειάζεται!). Και φυσικά αναφέραμε και εκεί (με κάπως διαφορετικό τρόπο) τα δύο πιο πάνω θεωρήματα για πραγματικά συμμετρικά μητρώα. Επομένως το πιο πάνω θέμα που θέσαμε μας είναι οικείο όχι μόνο από τη Γραμμική Άλγεβρα, αλλά και από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II.

Εντούτοις εδώ κάτι δε μας αρέσει, κάτι κάπου μας ξεφεύγει. Δεν είμαστε ακόμη απόλυτα ευχαριστημένοι με τη δουλειά μας. Αυτό συμβαίνει απλά, επειδή εμείς εδώ περιοριστήκαμε στη διαγωνιοποίηση πραγματικών συμμετρικών μητρώων στη Γραμμική Άλγεβρα. Δηλαδή σ' αυτήν την παράγραφο ουσιαστικά αγνοήσαμε μέχρι τώρα τους τανυστές και ειδικότερα τον ορισμό (1.2.11) του τανυστή δευτέρας τάξεως που τον εκφράζουμε μέσω των συνιστωσών του A_{ij} με δείκτες και όχι με μητρώα. Αυτή ήταν μια παράλειψή μας που τη διορθώνουμε όμως αμέσως παρακάτω.

E1.8.3

E1.8.3. Διαγωνιοποίηση συμμετρικού τανυστή δεύτερας τάξεως

Σ' αυτήν εδώ την παράγραφο επιστρέφουμε λίγο-λίγο στη συνηθισμένη σ' αυτό το κεφάλαιο εργασία μας στους τανυστές χρησιμοποιώντας δείκτες και όχι πια μητρώα. Εντούτοις θα βασισθούμε στα τόσο ενδιαφέροντα αποτελέσματα που ήδη αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο για τα πραγματικά συμμετρικά μητρώα. Ειδικότερα εδώ θα βασισθούμε στο Θεώρημα E1.10 για τη διαγωνιοποίηση ενός πραγματικού συμμετρικού μητρώου \mathbf{A} με τη χρήση των ιδιοτιμών του λ_k και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων του δ_k .

Γ' αυτήν τη σύνδεση του συμβολισμού με μητρώα (στην προηγούμενη παράγραφο) και του συμβολισμού με δείκτες (εδώ) απλά υπενθυμίζουμε τον τύπο για τα στοιχεία f_{ij} του γινομένου $\mathbf{F} = \mathbf{AB}$ δύο μητρώων \mathbf{A} και \mathbf{B} (εδώ μας αρκεί τετραγωνικών μητρώων 3×3 ή 2×2 , τίποτε άλλο!) με στοιχεία A_{ij} και B_{ij} αντίστοιχα. (Παρατηρούμε ότι σ' ένα μητρώο \mathbf{A} αναφερόμαστε συνήθως στα στοιχεία του A_{ij} , ενώ στον αντίστοιχο τανυστή \mathbf{A} αναφερόμαστε στις συνιστώσες του A_{ij} . Αυτό όμως δεν είναι κάτι το σημαντικό!) Από τη Γραμμική Άλγεβρα και συγκεκριμένα από τον πολλαπλασιασμό μητρώων γνωρίζουμε ότι αν $\mathbf{F} = \mathbf{AB}$ (δηλαδή πολλαπλασιασμός δύο μητρώων) με τα μητρώα \mathbf{A} και \mathbf{B} τετραγωνικά και διαστάσεων $n \times n$, τότε

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj} \quad \text{κι εδώ με } n = 3 \quad f_{ij} = \sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj}. \quad (1.8.7)$$

Βέβαια εδώ δεξιά έγινε χρήση του συμβολισμού του Einstein για επαναλαμβανόμενο δείκτη (εδώ το δείκτη k). Φυσικά είμαστε ήδη πλήρως εξοικειωμένοι μ' αυτόν το συμβολισμό! Επαναλαμβάνουμε επίσης ότι εδώ $n = 3$ (στις τρεις διαστάσεις που δουλεύουμε: τριδιάστατος χώρος, Σχήμα E1.1 στην Ενότητα E1.1) ή $n = 2$ (στην ειδική περίπτωση των δύο διαστάσεων: διδιάστατος χώρος, που μας ενδιαφέρει λίγο κι αυτός). Υπενθυμίζουμε τέλος ότι ο πιο πάνω τύπος (1.8.7) είναι απλά η επίσημη έκφραση του κανόνα ότι το στοιχείο f_{ij} του μητρώου $\mathbf{F} = \mathbf{AB}$ προκύπτει απλά σαν το εσωτερικό γινόμενο του i διανύσματος-γραμμής του πρώτου μητρώου \mathbf{A} επί το j διάνυσμα-στήλη του δεύτερου μητρώου \mathbf{B} . Δηλαδή κάνουμε πολλαπλασιασμούς των αντίστοιχων στοιχείων τους και αθροίζουμε τα αποτελέσματα, ακριβώς όπως φαίνεται καθαρά και στον πιο πάνω τύπο (1.8.7). Τόσο απλά!

Πολύ ωραία! Έχουμε όμως εισαγάγει κι εμείς ένα μητρώο εδώ στους τανυστές που μάλιστα δεν είναι τανυστής, είναι απλό μητρώο. Πρόκειται για το μητρώο \mathbf{C} των συνημιτόνων c_{ij} των γωνιών στροφής θ_{ij} από το αρχικό, το πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ στο Σχήμα E1.1 στο νέο, στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ ξανά στο ίδιο σχήμα. Ας το θυμίσουμε κι εδώ αυτό το μητρώο \mathbf{C} επαναλαμβάνοντας τον τύπο του (1.1.15) στην Ενότητα E1.1

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.8.8)$$

Παραμένουμε στην Ενότητα E1.1 και ειδικότερα στο Σχήμα E1.1. Θυμόμαστε και το επαναλαμβάνουμε κι εδώ ότι η k γραμμή στο μητρώο \mathbf{C} εκφράζει τις συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{e}'_k (Σχήμα E1.1) του δεύτερου συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. Κατά συνέπεια, αν εμείς τώρα θεωρήσουμε το ανάστροφο μητρώο \mathbf{C}^T του μητρώου \mathbf{C} , δηλαδή με τις γραμμές του αρχικού μητρώου \mathbf{C} να γίνονται στήλες του

ανάστροφο του μητρώου \mathbf{C}^T και αντίστροφα, θα έχουμε το ανάστροφο μητρώο

$$\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.8.9)$$

Και βέβαια εδώ οι συνιστώσες του ίδιου μοναδιαίου διανύσματος \mathbf{e}'_k του δεύτερου συστήματος συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ θα αποτελούν την k στήλη του ανάστροφου μητρώου των συνημιτόνων \mathbf{C}^T στη σχέση (1.8.9) αντί για την k γραμμή του αρχικού μας μητρώου των συνημιτόνων \mathbf{C} στη σχέση (1.8.8) στη στροφή του συστήματος των Καρτεσιανών συντεταγμένων από $Ox_1x_2x_3$ σε $Ox'_1x'_2x'_3$. Είναι προφανές αυτό.

Και τώρα προχωράμε στη σύνδεση με την προηγούμενη παράγραφο, που αφορούσε στα πραγματικά συμμετρικά μητρώα στη Γραμμική Άλγεβρα και στη διαγωνιοποίησή τους. Εδώ απλά θεωρούμε το συμμετρικό τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{A} , ο οποίος παριστάνεται με το αντίστοιχο μητρώο \mathbf{A} , τις τρεις ιδιοτιμές του λ_k (στον τριδιάστατο χώρο και με $k = 1, 2, 3$) και τα τρία κανονικοποιημένα και τώρα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα του \mathbf{d}_k . Αυτά τα τρία ιδιοδιανύσματα \mathbf{d}_k , όπως ήδη αναφέραμε στο Θεώρημα E1.9, είναι κάθετα (ορθογώνια) μεταξύ τους. Αυτά ακριβώς τα τρία ιδιοδιανύσματα του συμμετρικού μητρώου \mathbf{A} τα θεωρούμε σαν τα μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}'_k του δεύτερου συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ στο Σχήμα E1.1 της Ενότητας E1.1. Αυτό το σύστημα έχει προκύψει με τη στροφή του πρώτου συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ στο ίδιο σχήμα. Ναι, τα τρία μοναδιαία (και κάθετα μεταξύ τους) ιδιοδιανύσματα \mathbf{d}_k τα πήραμε σαν μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}'_k στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. Έτσι είναι!

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση E1.5:** Όχι, δεν είναι ακριβώς έτσι! Όπως ήδη αναφέραμε και στο Θεώρημα E1.9, για να έχουμε δεξιόστροφο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ εμείς θέλουμε να ισχύουν επιπλέον και οι τρεις σχέσεις $\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_3$, $\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1$ και $\mathbf{d}_3 \times \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2$ ή απόλυτα ισοδύναμα $\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_3$, $\mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_1$ και $\mathbf{e}'_3 \times \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_2$, μια που πήραμε εδώ $\mathbf{e}'_k = \mathbf{d}_k$. Για το σκοπό αυτό χρειάζεται μερικές φορές να αλλάξουμε τη φορά ενός μοναδιαίου ιδιοδιανύσματος \mathbf{d}_k πολλαπλασιάζοντάς το επί -1 , οπότε βέβαια παραμένει μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα. Για παράδειγμα, αυτό χρειάζεται να γίνει (και πραγματικά γίνεται με ένα ιδιοδιάνυσμα!) και στο σχετικό Παράδειγμα E1.8 λίγο παρακάτω σ' αυτήν εδώ την παράγραφο. ▲

Επομένως το μητρώο \mathbf{T} αυτών των τριών ιδιοδιανυσμάτων \mathbf{d}_k που εισαγάγαμε στο Θεώρημα E1.10 της προηγούμενης παραγράφου (μη συμμετρικό μητρώο και με στήλες του τα ιδιοδιανύσματα \mathbf{d}_k) είναι τώρα πια το μητρώο μας \mathbf{C}^T (και προφανώς επίσης μη συμμετρικό μητρώο) στη σχέση (1.8.9). Σαν στήλες του έχει τα τρία μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}'_k (με $\mathbf{e}'_k = \mathbf{d}_k$) στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ του Σχήματος E1.1. Δηλαδή, έτσι όπως δουλεύουμε, ισχύει η σχέση

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}^T \quad \text{και επομένως με αναστροφή μητρώων} \quad \mathbf{T}^T = \mathbf{C}. \quad (1.8.10)$$

Καλά τα πάμε ως εδώ. Πάμε τώρα παρακάτω ... Ναι, παρακάτω χρησιμοποιούμε το θεμελιώδη τύπο (1.8.6) του Θεωρήματος E1.10 της Παραγράφου E1.8.2 που αφορά στη διαγωνιοποίηση πραγματικού συμμετρικού μητρώου \mathbf{A} . Τον υπενθυμίζουμε

$$\mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{\Lambda} \quad (1.8.11)$$

και στη συνέχεια με βάση τις σχέσεις (1.8.10) τον ξαναγράφουμε τώρα με τη χρήση του μητρώου των συνημιτόνων \mathbf{C} στη σχέση (1.8.8) στη λίγο πιο οικεία μας μορφή

$$\mathbf{CAC}^T = \mathbf{\Lambda} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{CAC}^T. \quad (1.8.12)$$

Και τώρα θα κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς μητρώων στο γινόμενο \mathbf{CAC}^T χρησιμοποιώντας δείκτες για τα στοιχεία των τριών μητρώων \mathbf{C} , \mathbf{A} και \mathbf{C}^T . Στόχος μας είναι να φθάσουμε τελικά στον ορισμό του τανυστή δευτέρας τάξεως (1.2.11), ο οποίος αφορά βέβαια στη στροφή του συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων. Ε δεν είναι δα και καμιά ιδιαίτερα δύσκολη δουλειά. Ρουτίνα είναι! Ξεκινάμε ...

Το (μη συμμετρικό επαναλαμβάνουμε) μητρώο \mathbf{C} έχει σαν εννέα στοιχεία του τα συνημίτονα $c_{ij} = \cos \theta_{ij} = \mathbf{e}'_i \mathbf{e}_j$ στο Σχήμα Ε1.1. (Και δε λησμονούμε βέβαια ότι τα μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}'_i είναι τα κανονικοποιημένα και κάθετα μεταξύ τους ιδιοδιανύσματα $\mathbf{\delta}_k$ του συμμετρικού μητρώου \mathbf{A} , το οποίο παριστάνει το συμμετρικό τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{A} , π.χ. τον τανυστή των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$, τον τανυστή των παραμορφώσεων $\boldsymbol{\epsilon}$ ή τον τανυστή των ροπών αδρανείας \mathbf{I}). Επομένως το ανάστροφο μητρώο \mathbf{C}^T στη σχέση (1.8.9) του μητρώου \mathbf{C} στη σχέση (1.8.8) θα έχει στοιχεία c_{ji} στη θέση των c_{ij} . Άρα με βάση τον τύπο (1.8.7) για τον πολλαπλασιασμό δύο μητρώων εδώ θα έχουμε για τα στοιχεία f_{ij} του γινομένου

$$\mathbf{F} = \mathbf{AC}^T \quad (1.8.13)$$

των δύο μητρώων \mathbf{A} (συμμετρικού και με στοιχεία A_{ij}) και \mathbf{C}^T (μη συμμετρικού και με στοιχεία c_{ji})

$$f_{ij} = A_{ik}c_{jk}. \quad (1.8.14)$$

Ναι, εδώ αντίθετα με τον τύπο (1.8.7) δε βάλουμε δεξιά c_{kj} , αλλά βάλουμε c_{jk} , γιατί εργαζόμαστε με το ανάστροφο μητρώο \mathbf{C}^T και όχι με το αρχικό μας μητρώο \mathbf{C} των συνημιτόνων c_{ij} . Το εξηγήσαμε αυτό. Επίσης θα μπορούσαμε να είχαμε θέσει a_{ij} αντί για A_{ij} για τα στοιχεία του μητρώου \mathbf{A} ή τις συνιστώσες του τανυστή \mathbf{A} , ο οποίος παριστάνεται από το μητρώο αυτό. Ουσιαστικά το ίδιο κάνει. Απλά διατηρήσαμε κι εδώ το συμβολισμό A_{ij} για τις συνιστώσες ενός τανυστή \mathbf{A} .

Και τώρα σχηματίζουμε το δεύτερο γινόμενο μητρώων

$$\mathbf{G} = \mathbf{CF} = \mathbf{C(AC}^T) = \mathbf{CAC}^T, \quad (1.8.15)$$

μια που ισχύει πάντα η προσεταιριστική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό μητρώων. Χρησιμοποιούμε και πάλι το θεμελιώδη τύπο (1.8.7) για τα στοιχεία του γινομένου δύο μητρώων. Έτσι για τα στοιχεία g_{ij} του νέου μητρώου \mathbf{G} βρίσκουμε αμέσως ότι

$$g_{ij} = c_{il}f_{lj}. \quad (1.8.16)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα και τον τύπο (1.8.14) για τα στοιχεία f_{lj} του μητρώου \mathbf{F} , αλλ' εδώ με πρώτο δείκτη l αντί για i , παίρνουμε τελικά

$$g_{ij} = c_{il}f_{lj} = c_{il}A_{lk}c_{jk} = c_{il}c_{jk}A_{lk}, \quad (1.8.17)$$

αφού βέβαια ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα στον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών. Και φυσικά εννοείται ότι δεξιά έχουμε διπλό άθροισμα (στον τριδιάστατο χώρο με $n = 3$, ενώ στο διδιάστατο χώρο με $n = 2$): και ως προς l και ως προς k . Αυτοί οι δύο δείκτες l και k είναι οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες: σ' αυτούς οφείλεται το διπλό άθροισμα.

Να 'τα, τα βρήκαμε λοιπόν τα στοιχεία g_{ij} του πιο πάνω γινομένου $\mathbf{G} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^T$. Κι αν δε μας πολυαρέσουν οι δείκτες σ' αυτόν τον τύπο (1.8.17), τους αλλάζουμε ως εξής: $i \rightarrow p, j \rightarrow q, l \rightarrow i$ και $k \rightarrow j$ με τα βέλη να δηλώνουν ανεξάρτητες μεταξύ τους αντικαταστάσεις σ' αυτόν τον τύπο (1.8.17). Εάν μάλιστα χρησιμοποιήσουμε επιπλέον και το σύμβολο \mathbf{A}' για το μητρώο \mathbf{G} , τότε ο ίδιος τύπος (1.8.17) παίρνει την τελική του μορφή

$$A'_{pq} = c_{pi}c_{qj}A_{ij}. \quad (1.8.18)$$

Ναι, αυτός εδώ ο τελευταίος τύπος είναι απλά ο πολύ γνωστός μας τύπος (1.2.11) για τις συνιστώσες A'_{pq} ενός τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{A} , όταν στραφεί το σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων από $Ox_1x_2x_3$ σε $Ox'_1x'_2x'_3$. Είναι ο ορισμός του τανυστή δευτέρας τάξεως. Πολύ καλά τα πήγαμε ως εδώ. Χρησιμοποιήσαμε στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων σαν μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}'_k τα μοναδιαία κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα \mathbf{d}_k του συμμετρικού μητρώου \mathbf{A} που παριστάνει το συμμετρικό τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{A} και φθάσαμε τελικά στον τύπο (1.8.18).

Είμαστε χαρούμενοι! Και να ήταν μόνο αυτό; Εδώ έτσι όπως εργασθήκαμε με τις σχέσεις (1.8.10), δηλαδή με $\mathbf{T} = \mathbf{C}^T$ και επομένως με αναστροφή μητρώων $\mathbf{T}^T = \mathbf{C}$, το πιο πάνω γινόμενο $\mathbf{A}' = \mathbf{G} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^T$ στη σχέση (1.8.15) είναι απλά το γινόμενο $\mathbf{A}' = \mathbf{G} = \mathbf{T}^T\mathbf{A}\mathbf{T}$. Κατά συνέπεια σύμφωνα με το Θεώρημα Ε1.10 της προηγούμενης Παραγράφου Ε1.8.2 αυτό το γινόμενο \mathbf{A}' ή \mathbf{G} είναι απλά το διαγώνιο μητρώο

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (1.8.19)$$

των ιδιοτιμών λ_k του μητρώου \mathbf{A} , εδώ που δουλεύουμε με πραγματικό συμμετρικό μητρώο \mathbf{A} που παριστάνει τον εξίσου συμμετρικό τανυστή \mathbf{A} . Σημειώνεται ότι οι ιδιοτιμές λ_k είναι φυσικά τρεις στον τριδιάστατο χώρο και δύο στο διδιάστατο χώρο. Υπενθυμίζεται επίσης ότι στο Θεώρημα Ε1.10 αυτές τις ιδιοτιμές λ_k τις υποθέσαμε απλές, κάτι που συνήθως (αν και όχι πάντοτε) ισχύει. Επίσης είπαμε πάρα πολλές φορές ότι ο τανυστής \mathbf{A} είναι εδώ συμμετρικός, όπως είναι βέβαια και το μητρώο \mathbf{A} που τον παριστάνει. Επομένως συνοπτικά έχουμε

$$\mathbf{A}' = \mathbf{G} = \mathbf{A}. \quad (1.8.20)$$

Ναι, με τις παρούσες υποθέσεις και με τη χρήση των Θεωρημάτων Ε1.9 και Ε1.10 ο συμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξεως \mathbf{A} παίρνει διαγώνιο μορφή στο νέο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ που καθορίζουν οι διευθύνσεις των ιδιοδιανυσμάτων του. Δηλαδή παριστάνεται σ' αυτό το δεύτερο σύστημα συντεταγμένων από το διαγώνιο μητρώο \mathbf{A}' στη σχέση (1.8.4). Και μάλιστα με βάση τον τύπο (1.8.20), δηλαδή $\mathbf{A}' = \mathbf{A}$, και το Θεώρημα Ε1.10 τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι ιδιοτιμές λ_k του συμμετρικού μητρώου \mathbf{A} . Δηλαδή τελικά ο τύπος (1.8.18) για τις συνιστώσες A'_{pq} στο δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ παίρνει τη μορφή

$$A'_{pq} = \begin{cases} \lambda_p, & \text{εάν } p = q, \\ 0, & \text{εάν } p \neq q. \end{cases} \quad (1.8.21)$$

Κι έτσι τελειώσαμε επιτυχώς και αυτήν την προσπάθεια της διαγωνιοποίησης ενός συμμετρικού τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{A} . Το δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων, όπου καταφέραμε να έχουμε διαγώνιο μητρώο \mathbf{A}' να παριστάνει

το συμμετρικό τανυστή \mathbf{A} ή πιο απλά να ισχύουν οι σχέσεις (1.8.21) για τις συνιστώσες του A'_{pq} καλείται (πολύ σωστά!) *κύριο σύστημα συντεταγμένων*. Κι εκεί, επαναλαμβάνουμε, ο συμμετρικός τανυστής μας \mathbf{A} παίρνει διαγώνιο μορφή. Δηλαδή στο κύριο σύστημα συντεταγμένων δεν υπάρχουν διατμητικές τάσεις ούτε διατμητικές παραμορφώσεις ούτε βέβαια γινόμενα αδρανείας. Πάνε, δεν υπάρχουν πια όλα αυτά στα κύρια συστήματα συντεταγμένων για τους συμμετρικούς τανυστές μας δευτέρας τάξεως: τον τανυστή των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$, τον τανυστή των παραμορφώσεων $\boldsymbol{\epsilon}$ και τον τανυστή των ροπών αδρανείας \mathbf{I} . Και προφανώς γενικά πρόκειται για τρία εντελώς διαφορετικά μεταξύ τους κύρια συστήματα συντεταγμένων.

Επίσης στο *κύριο σύστημα συντεταγμένων* οι συνιστώσες A'_{pq} εδώ με $p = q$ που απομένουν είναι οι *κύριες τιμές* του συμμετρικού τανυστή δευτέρας τάξεως. Και σύμφωνα με τα παραπάνω αυτές είναι απλά οι ιδιοτιμές λ_k του μητρώου \mathbf{A} που παριστάνει τον τανυστή \mathbf{A} . (Χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο, αλλά δεν υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως!) Δηλαδή εδώ για τον τανυστή των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$ έχουμε τις *κύριες τάσεις*, για τον τανυστή των παραμορφώσεων $\boldsymbol{\epsilon}$ έχουμε τις *κύριες παραμορφώσεις* και για τον τανυστή των ροπών αδρανείας \mathbf{I} έχουμε τις *κύριες ροπές αδρανείας*. Ωραία είναι, μας διευκολύνει να δουλεύουμε σε κύριο σύστημα συντεταγμένων για ένα συμμετρικό τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{A} είτε στις τρεις διαστάσεις είτε στις δύο.

❖ Παράδειγμα Ενότητα Ε1.8

▼ Παράδειγμα Ε1.8 ■ Διαγωνιοποίηση συμμετρικού τανυστή

Σαν ένα παράδειγμα της παραπάνω διαδικασίας διαγωνιοποίησης θεωρούμε εδώ το συμμετρικό τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{A} που παριστάνεται στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ του Σχήματος Ε1.1 με το μητρώο 3×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}. \quad (1.8.22)$$

Σύμφωνα με τα πιο πάνω το νέο, δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$, όπου ο τανυστής \mathbf{A} θα διαγωνιοποιείται παίρνοντας τη μορφή (1.8.4), δηλαδή τη μορφή

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} A'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A'_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.8.23)$$

θα καθορίζεται απλά από τα τρία μοναδιαία (φυσικά μετά από κανονικοποίηση) ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\delta}_1 = \mathbf{e}'_1$, $\boldsymbol{\delta}_2 = \mathbf{e}'_2$ και $\boldsymbol{\delta}_3 = \mathbf{e}'_3$ του μητρώου \mathbf{A} . Οι σχετικές συνιστώσες του A'_{11} , A'_{22} και A'_{33} θα είναι απλά οι ιδιοτιμές λ_k του μητρώου \mathbf{A} στη σχέση (1.8.22).

Για διευκόλυνσή μας στους υπολογισμούς χρησιμοποιήσαμε εδώ τη *Mathematica* και συγκεκριμένα τις δύο εντολές της *Eigenvalues* για τις ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές) λ_k και *Eigenvectors* για τα ιδιοδιανύσματα (ή χαρακτηριστικά διανύσματα) $\boldsymbol{\delta}_k$ του μητρώου \mathbf{A} . Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την εντολή *Eigensystem*, ώστε να πάρουμε ταυτόχρονα και τις ιδιοτιμές λ_k και τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\delta}_k$. Σημειώνουμε όμως ότι στη *Mathematica* τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\delta}_k$ δεν είναι κανονικοποιημένα ώστε να έχουν μέτρο μονάδα. (Αλλιώς κανονικοποιούνται εκεί!) Αυτήν την κανονικοποίηση την κάνουμε διαιρώντας τις τρεις συνιστώσες του κάθε ιδιοδιανύσματος με το μέτρο του. Συγκεκριμένα (με τη *Mathematica*) πήραμε τις τρεις πραγματικές ιδιοτιμές του πραγματικού και συμμετρικού μητρώου \mathbf{A}

$$\lambda_1 = A'_{11} \approx 10.2322, \quad \lambda_2 = A'_{22} \approx 2.54697, \quad \lambda_3 = A'_{33} \approx 4.22086. \quad (1.8.24)$$

Από τεχνική άποψη χρησιμοποιήσαμε επίσης τις εντολές **N** για αριθμητικές προσεγγίσεις και **Chop** για την εξάλειψη των πάρα πολύ μικρών φανταστικών μερών που έδωσαν σ' αυτές τις ιδιοτιμές λ_k οι αριθμητικές προσεγγίσεις με την εντολή **N**. Ξέρουμε ήδη από το Θεώρημα E1.9 ότι οι ιδιοτιμές πραγματικού συμμετρικού μητρώου, όπως είναι εδώ το μητρώο **A**, είναι πραγματικές. Και έτσι οι πραγματικές ιδιοτιμές λ_k στις σχέσεις (1.8.24) επαληθεύουν στο παράδειγμά μας αυτό το γεγονός για το πραγματικό συμμετρικό μητρώο **A** που παριστάνει το συμμετρικό τανυστή **A** στο πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. Επίσης να μη λησμονείται ότι αυτές οι ιδιοτιμές λ_k είναι ταυτόχρονα και οι *κύριες τιμές* του τανυστή **A**, τις οποίες παίρνουν οι διαγώνιες συνιστώσες του A'_{11} , A'_{22} και A'_{33} στο δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$. Εκεί ο τανυστής **A** διαγωνιοποιείται και παριστάνεται πια από το διαγώνιο μητρώο **A'** στη σχέση (1.8.23). Το τονίσαμε ήδη αυτό το γεγονός (και πολύ σωστά κάναμε!) στις σχέσεις (1.8.24) γράφοντας εκεί ρητά $\lambda_1 = A'_{11}$, $\lambda_2 = A'_{22}$ και $\lambda_3 = A'_{33}$.

Ωραία λοιπόν με τις τρεις ιδιοτιμές λ_k στις σχέσεις (1.8.24). Πάμε τώρα και στα ιδιοδιανύσματα \mathbf{d}_k , όπου εδώ $\mathbf{d}_k = \mathbf{e}'_k$. Μετά την κανονικοποίηση των ιδιοδιανυσμάτων \mathbf{d}_k , έτσι ώστε να είναι μοναδιαίου μέτρου, $|\mathbf{d}_k| = |\mathbf{e}'_k| = 1$, έχουμε τα εξής μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 και \mathbf{e}'_3 του δευτέρου συστήματος συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$:

$$\mathbf{e}'_1 \approx \begin{Bmatrix} -0.695945 \\ -0.643721 \\ 0.318250 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}'_2 \approx \begin{Bmatrix} -0.281219 \\ 0.652106 \\ 0.704041 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}'_3 \approx \begin{Bmatrix} -0.660739 \\ 0.400477 \\ -0.634856 \end{Bmatrix}. \quad (1.8.25)$$

Ειδικά εδώ χρειάστηκε να αλλάξουμε τη φορά του διανύσματος $\mathbf{d}_3 = \mathbf{e}'_3$, δηλαδή να το πολλαπλασιάσουμε επί -1 . Αυτό ήταν αναγκαίο, ώστε το δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ στο Σχήμα E1.1 της Ενότητας E1.1 που σχηματίζουν αυτά τα τρία μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους διανύσματα \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 και \mathbf{e}'_3 να είναι δεξιόστροφο. Δηλαδή τώρα ισχύουν και οι έξι σχέσεις

$$\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}'_1 = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_3, \quad \mathbf{e}'_2 \times \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_1, \quad \mathbf{e}'_3 \times \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_2. \quad (1.8.26)$$

Λοιπόν δεν υπάρχει πλέον κανένα απολύτως πρόβλημα. Το νέο, το δεύτερο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ στο Σχήμα E1.1, το *κύριο σύστημα συντεταγμένων* έχει καθορισθεί πλήρως με τα μοναδιαία διανύσματά του \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 και \mathbf{e}'_3 με βάση τις σχέσεις (1.8.25). Επίσης και οι τρεις *κύριες τιμές* A'_{11} , A'_{22} και A'_{33} του συμμετρικού τανυστή δευτέρας τάξεως **A** που έχουμε εδώ είναι και αυτές καθορισμένες με βάση τις σχέσεις (1.8.24). Κατά συνέπεια ολόκληρο το πρόβλημα της διαγωνιοποίησης του συμμετρικού τανυστή **A** και επομένως και του καθορισμού του *κύριου συστήματος συντεταγμένων* του $Ox'_1x'_2x'_3$ έχει τώρα επιλυθεί πλήρως.

Σημειώνουμε επίσης ότι και το μητρώο **C** των εννέα συνημιτόνων $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ των γωνιών στροφής θ_{ij} από το πρώτο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$ στο δεύτερο σύστημα $Ox'_1x'_2x'_3$ προκύπτει και αυτό άμεσα από τα τρία μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}'_k σ' αυτό το δεύτερο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ στη μορφή

$$\mathbf{C} \approx \begin{bmatrix} -0.695945 & -0.643721 & 0.318250 \\ -0.281219 & 0.652106 & 0.704041 \\ -0.660739 & 0.400477 & -0.634856 \end{bmatrix}. \quad (1.8.27)$$

Εδώ βέβαια στην πρώτη γραμμή είναι το διάνυσμα \mathbf{e}'_1 , στη δεύτερη το διάνυσμα \mathbf{e}'_2 και στην τρίτη το διάνυσμα \mathbf{e}'_3 .

Σαν επαλήθευση μπορούμε βέβαια να χρησιμοποιήσουμε τα στοιχεία αυτού του μητρώου \mathbf{C} των συννημιτόνων $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ των γωνιών στροφής θ_{ij} σε συνδυασμό με τον τόσο γνωστό μας πια τύπο (1.2.11) της Παραγράφου Ε1.2.4


$$A'_{pq} = c_{pi}c_{qj}A_{ij}, \quad (1.8.28)$$

που τον αναφέραμε πριν λίγο κι εδώ: τύπος (1.8.18). Αυτός ο τύπος μας δίνει τις συνιστώσες A'_{pq} τανυστή \mathbf{A} (εδώ συμμετρικού τανυστή δευτέρας τάξεως) στο δεύτερο, στο νέο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2x'_3$ με βάση τις συνιστώσες του A_{ij} στο πρώτο, στο αρχικό σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$.

Πραγματικά με χρήση των στοιχείων c_{ij} του μητρώου \mathbf{C} στη σχέση (1.8.27) καθώς και των συνιστωσών A_{ij} του συμμετρικού τανυστή \mathbf{A} στη σχέση (1.8.22) από τον πιο πάνω τύπο (1.8.28) προκύπτει το μητρώο

$$\mathbf{A}' \approx \begin{bmatrix} 10.2322 & 0 & 0 \\ 0 & 2.54697 & 0 \\ 0 & 0 & 4.22086 \end{bmatrix}. \quad (1.8.29)$$

Δηλαδή προκύπτει το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών λ_k του συμμετρικού τανυστή \mathbf{A} και του αντίστοιχου μητρώου \mathbf{A} . (Αυτές οι ιδιοτιμές λ_k προσδιορίστηκαν και δίνονται στις σχέσεις (1.8.24).) Άρα διαγωνιοποιήθηκε ο συμμετρικός τανυστής \mathbf{A} και επαληθεύθηκε η ισχύς του Θεωρήματος Ε1.10 της Παραγράφου Ε1.8.2. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε1.8

▼ Άσκηση Ε1.31 ■ Μηχανική των Υλικών

Εδώ θεωρούμε το συμμετρικό τανυστή των τάσεων

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 5.4 & 4.8 & -3.9 \\ 4.8 & -6.2 & 7.2 \\ -3.9 & 7.2 & 9.1 \end{bmatrix} \quad (1.8.30)$$

σ' ένα σημείο P τριδιάστατου ελαστικού μέσου. Με χρήση της *Mathematica* ή άλλου προγράμματος και με ακρίβεια περίπου έξι σημαντικών ψηφίων ζητούνται: (α) Οι κύριες τάσεις σ'_{11} , σ'_{22} και σ'_{33} στο **κύριο σύστημα συντεταγμένων**. Εκεί βέβαια δεν υπάρχουν πια διατμητικές τάσεις. (β) Τα τρία μοναδιαία διανύσματα \mathbf{e}'_1 , \mathbf{e}'_2 και \mathbf{e}'_3 που καθορίζουν το κύριο σύστημα συντεταγμένων. (γ) Με χρήση του τύπου (1.8.28) η επαλήθευση των προηγούμενων αριθμητικών αποτελεσμάτων. (δ) Θα μπορούσαν ή όχι και γιατί τα προηγούμενα αποτελέσματα να θεωρηθούν ότι αναφέρονται στον τανυστή των παραμορφώσεων; (ε) Στον τανυστή των ροπών αδρανείας; *Υπόδειξη*: Στο πιο πάνω μητρώο $\boldsymbol{\sigma}$ το στοιχείο του $\sigma_{22} = -6.2$ είναι αρνητικός αριθμός και στον τανυστή των ροπών αδρανείας ισχύουν οι τύποι (1.7.26) της Παραγράφου Ε1.7.3 με προφανώς θετικά αποτελέσματα για τις συνιστώσες του I_{11} , I_{22} και I_{33} . Αντίθετα τα γινόμενα αδρανείας στους τύπους (1.7.27) της ίδιας Παραγράφου Ε1.7.3 μπορούν να είναι και αρνητικοί αριθμοί και πραγματικά συχνά συμβαίνει αυτό. ▲

E1.8.4

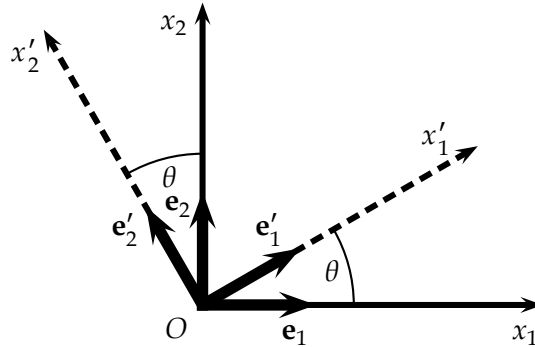
E1.8.4. Διαγωνιοποίηση συμμετρικού τανυστή στις δύο διαστάσεις

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε απλά την ειδική περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου όπου εργαζόμαστε στις δύο διαστάσεις με σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων Ox_1x_2 αντί στις τρεις διαστάσεις με σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$, όπου είχαμε εργασθεί στην προηγούμενη Παράγραφο Ε1.8.3.

Εδώ ο συμμετρικός τανυστής μας δευτέρας τάξεως \mathbf{A} (με $A_{12} = A_{21}$) παριστάνεται με μητρώο 2×2 και έχει τη γενική μορφή

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (1.8.31)$$

αντί για τη μορφή (1.8.2) στις τρεις διαστάσεις. Τώρα τα πράγματα είναι πιο εύκολα. Μπορούμε φυσικά να ακολουθήσουμε την επίσημη διαδικασία της προηγούμενης παραγράφου με τις ιδιοτιμές λ_k και τα ιδιοδιανύσματα \mathbf{d}_k . Αναφέρουμε όμως εδώ και έναν πιο εύκολο και πιο προσιτό τρόπο διαγωνιοποίησης, έναν εναλλακτικό τρόπο εργασίας: τον τρόπο που ήδη γνωρίζουμε από τη Μηχανική των Υλικών.



Σχήμα E1.3: Στροφή συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων στις δύο διαστάσεις (στο επίπεδο) κατά γωνία θ εδώ με $\theta > 0$.

Καταρχήν έχουμε το αρχικό σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων, το σύστημα Ox_1x_2 (Σχήμα E1.3), όπου ο συμμετρικός τανυστής μας \mathbf{A} στη σχέση (1.8.31), εδώ επαναλαμβάνουμε στις δύο διαστάσεις, δεν είναι διαγώνιος, δηλαδή $A_{12} = A_{21} \neq 0$. Θέλουμε τώρα να μεταβούμε στο νέο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2$ (πάλι Σχήμα E1.3) με τον ίδιο τανυστή \mathbf{A} να είναι διαγώνιος, δηλαδή $A'_{12} = A'_{21} = 0$. Το νέο σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox'_1x'_2$ προκύπτει από το αρχικό σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων Ox_1x_2 απλά με στροφή του κατά γωνία θ (ξανά Σχήμα E1.3). Φυσιολογικό είναι αυτό: στις δύο διαστάσεις είμαστε! Τότε ο τανυστής μας \mathbf{A} θα παριστάνεται από το διαγώνιο μητρώο

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} A'_{11} & 0 \\ 0 & A'_{22} \end{bmatrix} \quad (1.8.32)$$

απόλυτα ανάλογα με το διαγώνιο μητρώο (1.8.23) στην προηγούμενη παράγραφο εκεί βέβαια στις τρεις διαστάσεις.

Τώρα με τον εναλλακτικό, το δεύτερο τρόπο εργασίας σ' αυτήν την παράγραφο χρησιμοποιούμε απλά τον ορισμό του τανυστή δευτέρας τάξεως (1.2.11) ή (1.8.18) ή (1.8.28) που τον αναφέρουμε κι εδώ για άλλη μια φορά. Συγκεκριμένα έχουμε

$$A'_{pq} = c_{pi}c_{qj}A_{ij} \quad (1.8.33)$$

εδώ βέβαια στις δύο διαστάσεις. Θυμόμαστε επίσης από την πρώτη μας Άσκηση E1.1 στην Ενότητα E1.1 ότι στην περίπτωση απλής στροφής του συστήματος συντεταγμένων Ox_1x_2 κατά γωνία θ (κατά την ανθρωπολογική φορά εάν $\theta > 0$, Σχήμα E1.3), ώστε να προκύψει το σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2$, έχουμε τα εξής συνημίτονα:

$$c_{11} = c_{22} = \cos \theta, \quad c_{12} = \sin \theta \quad \text{και} \quad c_{21} = -\sin \theta. \quad (1.8.34)$$

Πρόκειται για τις σχέσεις (1.1.21) στην Άσκηση E1.1 που τις επαναλάβαμε κι εδώ.

Επομένως τώρα με βάση τον τύπο (1.8.33), εκεί εκτελώντας τη διπλή άθροιση (και ως προς το δείκτη i και ως προς το δείκτη j), βρίσκουμε εύκολα ότι

$$A'_{11} = A_{11} \cos^2 \theta + 2A_{12} \cos \theta \sin \theta + A_{22} \sin^2 \theta, \quad (1.8.35)$$

$$A'_{12} = A'_{21} = -A_{11} \cos \theta \sin \theta + A_{12}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + A_{22} \cos \theta \sin \theta, \quad (1.8.36)$$

$$A'_{22} = A_{11} \sin^2 \theta - 2A_{12} \cos \theta \sin \theta + A_{22} \cos^2 \theta. \quad (1.8.37)$$

Δε μας πολυαρέσουν αυτές οι μορφές των συνιστωσών A'_{ij} του συμμετρικού τανυστή μας \mathbf{A} στο νέο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2$. Παίρνουμε τώρα υπόψη μας και τις εξής τρεις πολύ γνωστές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \text{και} \quad \cos \theta \sin \theta = \frac{\sin 2\theta}{2} \quad (1.8.38)$$

και τις ξαναγράφουμε στις απόλυτα ισοδύναμες και λίγο πιο απλές μορφές τους

$$A'_{11} = \frac{A_{11} + A_{22}}{2} + \frac{A_{11} - A_{22}}{2} \cos 2\theta + A_{12} \sin 2\theta, \quad (1.8.39)$$

$$A'_{12} = A'_{21} = -\frac{A_{11} - A_{22}}{2} \sin 2\theta + A_{12} \cos 2\theta, \quad (1.8.40)$$

$$A'_{22} = \frac{A_{11} + A_{22}}{2} - \frac{A_{11} - A_{22}}{2} \cos 2\theta - A_{12} \sin 2\theta. \quad (1.8.41)$$

Δεν τα πήγαμε και τόσο άσχημα! Κι αυτό που θέλουμε τώρα είναι ο συμμετρικός τανυστής \mathbf{A} στο νέο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2$ να παίρνει διαγώνιο μορφή, δηλαδή να έχει τη μορφή (1.8.32). Για το σκοπό αυτό απλά πρέπει να ισχύει

$$A'_{12} = A'_{21} = 0, \quad \text{οπότε} \quad -\frac{A_{11} - A_{22}}{2} \sin 2\theta + A_{12} \cos 2\theta = 0 \quad (1.8.42)$$

και τελικά

$$\tan 2\theta = \frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{2A_{12}}{A_{11} - A_{22}} \right). \quad (1.8.43)$$

Εδώ $\tan^{-1} \equiv \arctan$ είναι το σύμβολο του τόξου εφαιπομένης, βέβαια όχι αναγκαστικά η πρωτεύουσα τιμή του: οποιαδήποτε τιμή του. Και φυσικά θυμόμαστε αυτούς όλους τους τύπους από τη Μηχανική των Υλικών. Εκεί τους είχαμε χρησιμοποιήσει στους τανυστές των τάσεων, των παραμορφώσεων και των ροπών αδρανείας.

Και τώρα χρησιμοποιούμε τη γωνία θ που προσδιορίζουμε από τον τύπο (1.8.43) (για την ακρίβεια μία από τις γωνίες θ που επαληθεύουν αυτόν τον τύπο). Είμαστε έτσι σίγουροι από τον τύπο (1.8.40) ότι $A'_{12} = A'_{21} = 0$. (Υπενθυμίζουμε ότι εργαζόμαστε με συμμετρικό τανυστή \mathbf{A} .) Και στη συνέχεια προσδιορίζουμε τις μη μηδενικές διαγώνιες συνιστώσες του A'_{11} και A'_{22} στο νέο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2$ με βάση τους τύπους (1.8.39) και (1.8.41) αντίστοιχα. Έτσι προσδιορίσαμε το νέο σύστημα συντεταγμένων που είναι το **κύριο σύστημα συντεταγμένων**. Οι διευθύνσεις των αξόνων του Ox'_1 και Ox'_2 (που καθορίζει η γωνία θ , Σχήμα Ε1.3) είναι οι **κύριες διευθύνσεις**. Κι ανάλογα με το πού αναφέρεται ο συμμετρικός τανυστής \mathbf{A} έχουμε τις κύριες τάσεις (αν αναφέρεται σε τάσεις), τις κύριες παραμορφώσεις (αν αναφέρεται σε παραμορφώσεις), τις κύριες ροπές αδρανείας (αν αναφέρεται σε ροπές αδρανείας), κλπ. Αυτές είναι οι μη μηδενικές συνιστώσες A'_{11} και A'_{22} του συμμετρικού τανυστή \mathbf{A} στην παράστασή του \mathbf{A}' με διαγώνιο μητρώο στη σχέση (1.8.32), που ήδη τις προσδιορίσαμε από τις σχέσεις (1.8.39) και (1.8.41) αντίστοιχα. Κι έτσι λύσαμε το πρόβλημα της διαγωνιοποίησης τανυστή δευτέρας τάξεως \mathbf{A} στις δύο διαστάσεις χωρίς να χρησιμοποιήσουμε καθόλου ιδιοτιμές λ_k και ιδιοδιανύσματα δ_k ,

δηλαδή με έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο από εκείνο που χρησιμοποιήσαμε στις τρεις διαστάσεις. Προφανώς βέβαια κι εκείνος ο τρόπος, ο τρόπος με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα, είναι πλήρως εφαρμόσιμος κι εδώ, εάν τον προτιμήσουμε.

Για παράδειγμα και σαν επαλήθευση των αποτελεσμάτων μας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κι εδώ τη χαρακτηριστική εξίσωση (1.8.5), δηλαδή την εξίσωση $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ ή $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$. Αυτή παίρνει εδώ στις δύο διαστάσεις τη μορφή

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \lambda & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1.8.44)$$

Υπολογίζοντας την ορίζουσα στο αριστερό μέλος, βρίσκουμε πολύ εύκολα ότι

$$\lambda^2 - (A_{11} + A_{22})\lambda + A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = 0. \quad (1.8.45)$$

Λύνοντας αυτήν τη δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση, βρίσκουμε χωρίς δυσκολία τις δύο ιδιοτιμές λ_1 και λ_2 του πραγματικού συμμετρικού μητρώου \mathbf{A} . Αυτές είναι

$$\lambda_{1,2} = \frac{A_{11} + A_{22} \pm \sqrt{(A_{11} + A_{22})^2 - 4(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}}{2}. \quad (1.8.46)$$

Με απλοποίηση της διακρίνουσας παρατηρούμε ότι αυτές οι ιδιοτιμές γράφονται και λίγο πιο απλά με τον τύπο

$$\lambda_{1,2} = \frac{A_{11} + A_{22} \pm \sqrt{(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}^2}}{2}. \quad (1.8.47)$$

Αυτές εδώ οι δύο ιδιοτιμές $\lambda_{1,2}$ είναι και οι **κύριες τιμές** $A'_{11} = \lambda_1$ και $A'_{22} = \lambda_2$ (ή αντίστροφα $A'_{11} = \lambda_2$ και $A'_{22} = \lambda_1$) του συμμετρικού τανυστή \mathbf{A} στο νέο σύστημα συντεταγμένων $Ox'_1x'_2$, δηλαδή στο κύριο σύστημα συντεταγμένων, όπου διαγωνιοποιείται ο τανυστής \mathbf{A} . (Σημειώνουμε βέβαια ότι στις τρεις διαστάσεις η αντιστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση ήταν τρίτου βαθμού και όχι δευτέρου βαθμού όπως εδώ.) Επομένως, αν εργασθήκαμε σωστά, και με τον προηγούμενο τρόπο και με τον τρόπο αυτό θα πρέπει να καταλήξουμε στις ίδιες τιμές A'_{11} και A'_{22} . Κι αυτή είναι μια πάρα πολύ καλή επαλήθευση των αποτελεσμάτων μας, η οποία δεν αφορά μόνο σ' αυτές τις **κύριες τιμές** του συμμετρικού τανυστή \mathbf{A} . Αφορά και στη γωνία στροφής θ του συστήματος συντεταγμένων, που υπεισέρχεται στους τύπους (1.8.39) έως (1.8.41).

Άσκηση

Ενότητα Ε1.8

▼ Άσκηση Ε1.32 ■ Εδαφομηχανική: διήθηση

Στην Εδαφομηχανική σε πορώδες στρώμα εδάφους θεωρούμε κι εδώ, όπως και στην Άσκηση Ε1.17 της Ενότητας Ε1.4, το **νόμο του Darcy** (1856). Σ' αυτόν το θεμελιώδη νόμο υπεισέρχεται ο **τανυστής διαπερατότητας του εδάφους** \mathbf{k} , που είναι ένας συμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξεως με συνιστώσες k_{ij} : τους **συντελεστές διαπερατότητας του εδάφους**. Αυτός ο τανυστής \mathbf{k} καλείται επίσης **τανυστής υδραυλικής αγωγιμότητας του εδάφους**. Εδώ υποθέτουμε ότι το έδαφος είναι ανισότροπο και εργαζόμαστε στις δύο διαστάσεις με σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων Ox_1x_2 . Σ' αυτό το σύστημα Ox_1x_2 οι συντελεστές διαπερατότητας έχουν τις τιμές $k_{11} = 7.8$, $k_{12} = k_{21} = 1.2$ και $k_{22} = 3.5$. Ζητούνται: (α) Οι **κύριες διευθύνσεις ανισοτροπίας** του πορώδους εδάφους. *Υπόδειξη:* Με βάση τον τύπο (1.8.43). (β) Οι **κύριοι συντελεστές διαπερατότητας** k'_{11} και k'_{22} στο σύστημα $Ox'_1x'_2$ των κυρίων διευθύνσεων ανισοτροπίας. *Υπόδειξη:* Με βάση τους τύπους (1.8.39) και (1.8.41). (γ) Να επαληθευθεί ότι σ' αυτό το σύστημα ισχύει $k'_{12} = k'_{21} = 0$. *Υπόδειξη:* Με βάση τον τύπο (1.8.40). ▲

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε2

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο Κεφάλαιο αυτό Ε2 αναφέρονται μερικές ασκήσεις που μπορούν να λυθούν με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και γενικά αφορούν στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

Στην Ενότητα Ε2.1 αναφέρονται ασκήσεις με χρήση του μετασχηματισμού Laplace σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, ενώ στην Ενότητα Ε2.2 αναφέρονται ασκήσεις πάλι με χρήση του μετασχηματισμού Laplace σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ή μερικές διαφορικές εξισώσεις).

E2.1

E2.1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

E2.1.1

E2.1.1. Ασκήσεις σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε2.1

▼ Άσκηση Ε2.1 ■ Μηχανική των Υλικών: Δοκοί: Συναρτήσεις Macaulay

Θεωρούμε συνήθη πρόβολο μήκους $L = 2a$ (με $0 \leq x \leq 2a$) και δυσκαμψίας EI με την πάκτωση στο αριστερό άκρο του $x = 0$. Ο πρόβολος καταπονείται από ομοιόμορφη (σταθερή) κατανεμημένη φόρτιση p_0 σε όλο το μήκος του και επίσης από συγκεκριμένο φορτίο P στο μέσον του $x = a$. Ζητούνται: (α:2) Απλά η παράσταση της συνολικής φορτίσεως του $p(x)$ με τη χρήση *συναρτήσεως* ή *συναρτήσεων Macaulay* (ή *συναρτήσεων ιδιομορφίας*). (β:2) Από τη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως για το βέλος κάμψεως $v(x)$ του προβόλου και με γνωστές την αντίδραση Q_0 και τη ροπή πακτώσεως M_0 στην πάκτωση $x = 0$ ζητείται ο μετασχηματισμός Laplace $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$ και από αυτόν (γ:3) το βέλος κάμψεως $v(x)$ του προβόλου. (δ:1) Τέλος απλά από τη φόρτιση του προβόλου να υπολογισθούν οι δύο ποσότητες Q_0 και M_0 στην πάκτωση $x = 0$. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε2.1

▼ Άσκηση Ε2.2 ■ Μηχανική των Υλικών: Δοκοί: Συναρτήσεις Macaulay

Θεωρούμε συνήθη πρόβολο μήκους $2L$ και δυσκαμψίας EI πακτωμένο στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και επομένως ελεύθερο στο δεξιό άκρο του $x = 2L$ με μόνη εξωτερική φόρτιση μια συγκεντρωμένη δύναμη P στο μέσον του $x = L$. Για το άγνωστο βέλος

κάμψεως $v = v(x)$ του προβόλου που σχηματίζει την ελαστική γραμμή του, ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση, μία μόνο και τετάρτης τάξεως, και (β:1) οι αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες (δηλαδή το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών) υπό τη φόρτιση P που προαναφέρθηκε. (γ:2) Ο μετασχηματισμός Laplace $V(s)$ της άγνωστης συναρτήσεως $v(x)$ με τις παραγώγους της $v''(0)$ και $v'''(0)$ (που δεν είναι άμεσα διαθέσιμες) να παραμένουν σ' αυτόν. (δ:2) Συνεχίζοντας, με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace $V(s)$ η εύρεση της άγνωστης συναρτήσεως (του βέλους κάμψεως) $v(x)$ πάλι σαν συνάρτηση των ποσοτήτων $v''(0)$ και $v'''(0)$. (ε:2) Τέλος το ξαναγράψιμο του προηγούμενου αποτελέσματος $v(x)$, τώρα όμως με διάκριση δύο περιπτώσεων: (i) $0 \leq x \leq L$ και (ii) $L \leq x \leq 2L$. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε2.1

▼ Άσκηση Ε2.3 ■ Μηχανική των Υλικών: Δοκοί: Συναρτήσεις Macaulay

Θεωρούμε ένα συνήθη πρόβολο μήκους $L = 5a$ (με $0 \leq x \leq 5a$) και δυσκαμψίας EI με πάκτωση στο αριστερό άκρο του $x = 0$. Η φόρτιση $p(x)$ του προβόλου συνίσταται: (i) Σε ομοιόμορφο (σταθερό) κατανεμημένο φορτίο p_0 στο διάστημα $[a, 2a]$, (ii) σε συγκεντρωμένο φορτίο P στη θέση $x = 3a$ και (iii) σε καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) M_b στη θέση $x = 4a$. Στην πάκτωση $x = 0$ του προβόλου η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) M_0 και η τέμνουσα δύναμη Q_0 θεωρούνται προς το παρόν δύο γνωστές ποσότητες. Ζητούνται: (α:1) Η παράσταση της συνολικής σχετικής φορτίσεως $p(x)$ (σαν να ήτανε όλη κατανεμημένη φόρτιση) με τη χρήση συναρτήσεων Macaulay. Με τη χρήση της σχετικής διαφορικής εξισώσεως τετάρτης τάξεως ως προς το βέλος κάμψεως $v(x)$ του προβόλου, της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace και της συνεχούς χρήσεως συναρτήσεων Macaulay (ακόμη και για το ίδιο το άκρο $x = 0$): (β:1) ο μετασχηματισμός Laplace $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$, (γ:1) με αντιστροφή του το ίδιο το βέλος κάμψεως $v(x)$, (δ:1) η γωνία κλίσεως (ή γωνία στροφής ή απλά στροφή) $\theta(x)$, (ε:1) η καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως) $M(x)$ και (στ:1) η τέμνουσα δύναμη $Q(x)$. Τέλος ζητούνται οι τιμές της καμπτικής ροπής M_0 και της τέμνουσας δύναμης Q_0 στην πάκτωση $x = 0$ (ζ:1) με τη χρήση των εξισώσεων ισορροπίας και (η:1) με τη χρήση της πιο πάνω λύσεως $v(x)$ και των συνοριακών συνθηκών για $x = L$. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε2.1

▼ Άσκηση Ε2.4 ■ Μηχανική των Υλικών: Λυγισμός

Στο πρόβλημα του λυγισμού συνήθους στύλου (ή ράβδου ή υποστυλώματος) ελάχιστης δυσκαμψίας EI και υπό αξονικό θλιπτικό φορτίο P προκύπτει η γενική διαφορική εξίσωση

$$v''''(x) + k^2 v''(x) = 0 \quad \text{με τη σταθερά} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}},$$

με x τη θέση και με $v(x)$ την κάθετη μετατόπιση των σημείων του στύλου. Ζητούνται: (α:1) Ειδικά για άρθρωση στο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου (όμως με μη καθορισμένη τη στήριξη στο πάνω άκρο του $x = L$) ο μετασχηματισμός Laplace $V(s)$ της άγνωστης συναρτήσεως $v(x)$ με παρούσες σ' αυτόν τις δύο μη καθορισμένες αρχικές συνθήκες για $x = 0$ που υπολείπονται. (β:3) Με χρήση του αλγεβρικού τύπου

$$\frac{1}{s^2(s^2 + k^2)} = \frac{1}{k^2 s^2} - \frac{1}{k^2(s^2 + k^2)}$$

η λύση $v(x)$ της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως. (Επαναλαμβάνεται ότι έχει υποθεθεί άρθρωση στο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου.) (γ:1) Πόσες σταθερές περιλαμβάνει αυτή και γιατί; (δ:1) Η επαλήθευση της διαφορικής εξισώσεως από τη λύση αυτή.

(ε:1) Η επαλήθευση των συνθηκών αρθρώσεως στο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου.
 (στ:1) Η λεπτομερής καταγραφή των από φυσικής απόψεως αποδεκτών συνηθισμένων συνοριακών συνθηκών στο πάνω άκρο $x = L$ του στύλου (δύο περιπτώσεις!). ▲


 **Άσκηση**
Ενότητα Ε2.1

▼ Άσκηση Ε2.5 ■ Μηχανική των Υλικών: Λυγισμός

Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα του λυγισμού αμφιαρθρωτού στύλου (ή υποστυλώματος ή απλά ράβδου) ύψους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI για το λυγισμό. Στον αμφιαρθρωτό αυτό στύλο εφαρμόζεται θλιπτικό αξονικό φορτίο P (με $P > 0$). Στο πρόβλημα αυτό λυγισμού ισχύει η διαφορική εξίσωση

$$v''(x) + k^2 v(x) = 0 \quad \text{με τη σταθερά} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}}$$

για το βέλος κάμψεως (την κάθετη μετατόπιση των σημείων) του στύλου. Ζητούνται: (α:1) Με βάση σχετικό σχήμα να αποδειχθεί η ισχύς της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (Η σχετική εξίσωση για την κάμψη συνήθους δοκού θεωρείται γνωστή!) (β:1) Με αυθαίρετες αρχικές συνθήκες $v(0) = v_0$ και $v'(0) = \theta_0$ στο κάτω άκρο $x = 0$ του στύλου και υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace $V_g(s)$ της γενικής λύσεως $v_g(x)$ της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης και στη συνέχεια (γ:1) και η ίδια η γενική αυτή λύση $v_g(x)$. (δ:1) Με τη βοήθεια μόνο των δύο γεωμετρικών (κινηματικών) συνοριακών συνθηκών στα δύο άκρα του στύλου $x = 0$ και $x = L$ να προσδιορισθεί η λύση $v_p(x)$ του σχετικού προβλήματος αρχικών τιμών σε περίπτωση λυγισμού του στύλου. (ε:1) Να γίνει η πλήρης επαλήθευση της λύσεως αυτής $v_p(x)$. (στ:1) Να προσδιορισθούν τα φορτία λυγισμού P_n ($n = 1, 2, \dots$) του αμφιαρθρωτού στύλου και ειδικότερα το κρίσιμο φορτίο λυγισμού $P_1 = P_{cr}$; (ζ:1) Ποια είναι τα αντίστοιχα σχήματα $v_n(x)$ του στύλου που λύγισε, τα οποία καλούνται και κανονικές μορφές λυγισμού (ή ιδιομορφές λυγισμού); (η:1) Να σχεδιασθούν πρόχειρα (σε χωριστά σχήματα, αλλά το ένα δίπλα στο άλλο) οι τρεις πρώτες κανονικές μορφές λυγισμού (ή ιδιομορφές λυγισμού). ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε2.1

▼ Άσκηση Ε2.6 ■ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Ασθενή Απόσβεση

Θεωρούμε το κλασικό τριπαραμετρικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με γνωστές τις σταθερές m (μάζα), ω_0 (κυκλική συχνότητα του αντίστοιχου χωρίς απόσβεση συστήματος) και ξ (λόγο αποσβέσεως) υπό ωστική (ή κρουστική) φόρτιση $\delta(t - \tau)$ τη χρονική στιγμή τ (με $\tau \geq 0$): ανηγμένη στη μάζα φόρτιση $\delta(t - \tau)/m$. Αγνωστη είναι εδώ η μετατόπιση $u(t)$ της μάζας m ως προς τη θέση ισορροπίας της. Οι δύο αρχικές συνθήκες είναι οι $u(0) = u_0$ και $\dot{u}(0) = v_0$. Ζητούνται: Στο μετασχηματισμό Laplace η απόδειξη (α:1) του τύπου

$$\mathcal{L}\{e^{-at} u(t)\} = U(s + a) \quad \text{με} \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

και (β:1) του τύπου

$$\mathcal{L}\{u(t - \tau)H(t - \tau)\} = e^{-\tau s} U(s) \quad \text{με} \quad \tau \geq 0 \quad \text{και} \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}.$$

(γ:3) Η λύση $u(t)$ του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών με ασθενή απόσβεση (ή υποκρίσιμη απόσβεση) με τη χρήση και του συμβόλου $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$. (δ:1) Η ειδική περίπτωση $u_{p0}(t)$ της λύσεως αυτής για μηδενικές αρχικές συνθήκες: $u(0) = 0$ και $\dot{u}(0) = 0$. (ε:2) Από τη λύση αυτή $u_{p0}(t)$ με πρακτικό τρόπο (όχι αυστηρά) ο ολοκληρωτικός τύπος του Duhamel (εδώ απλά το ολοκλήρωμα Duhamel) για μηδενικές αρχικές συνθήκες και αυθαίρετη (αλλά τμηματικά συνεχή) φόρτιση $p(t)$. ▲

 **Άσκηση**

Ενότητα Ε2.1

▼ **Άσκηση Ε2.7 ■ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση**

Θεωρούμε τον κλασικό αρμονικό ταλαντωτή (σύστημα υλικού σημείου M μάζας m και ελατηρίου S σταθεράς k και των δύο προφανώς θετικών) χωρίς αποσβεστήρα (με $\xi = 0$). Αυτός αποτελεί ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα με άγνωστη συνάρτηση (το μοναδικό βαθμό ελευθερίας του) τη θέση $u = u(t)$ του υλικού σημείου M που κινείται πάνω στον άξονα Ox . Σε εξαναγκασμένη ταλάντωση του υλικού σημείου M και με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην κλασική Μηχανική προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + ku(t) = p(t) \quad \text{με } t \geq 0,$$

με $p(t)$ τη φόρτιση (εδώ την εξωτερική δύναμη) που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο M . Στην παρούσα άσκηση αυτή η φόρτιση $p(t)$ θεωρείται της ωστικής μορφής

$$p(t) = m\Omega\delta(t)$$

με το Ω σταθερά και $\delta(t)$ την ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση δέλτα του Dirac. Πρόκειται δηλαδή για ωστική (ή κρουστική) φόρτιση που ασκείται ουσιαστικά μόνο τη χρονική στιγμή $t = 0$. Με τη χρήση του βοηθητικού συμβόλου $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ και με αρχικές συνθήκες (για $t = 0^-$) για το υλικό σημείο τις $u(0) = u_0$ (αρχική θέση) και $\dot{u}(0) = v_0$ (αρχική ταχύτητα) ζητούνται: (α:3) Η επίλυση του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (β:1) Η επαλήθευση της λύσεως $u(t)$ που βρέθηκε στο παρόν πρόβλημα αρχικών τιμών και (γ:2) οι πρέπουσες διευκρινίσεις (με βάση έννοιες της Μηχανικής, κυρίως την έννοια της ορμής) για την απότομη μεταβολή της αρχικής ταχύτητας v_0 του υλικού σημείου M εξαιτίας της ωστικής (ή κρουστικής) φορτίσεως $p(t)$ που ασκήθηκε τη χρονική στιγμή $t = 0$. (δ:1) Συμφωνεί η λύση $u(t)$ που βρέθηκε στο παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών με τις διευκρινίσεις αυτές ως προς την ταχύτητα $\dot{u}(t) = v(t)$ για $t = 0^+$; (ε:1) Ποια είναι η αρχική επιτάχυνση $a(0)$ (για $t = 0^+$) του υλικού σημείου M ; ▲

 **Άσκηση**

Ενότητα Ε2.1

▼ **Άσκηση Ε2.8 ■ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις: Συντονισμός**

Σε πρόβλημα ταλαντώσεων μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος για τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου του ισχύει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = \frac{p_0}{m} t \sin \omega_0 t.$$

Ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομέρειες για το μηχανικό σύστημα, τις σταθερές ω_0 , p_0 και m και τους χαρακτηρισμούς των ταλαντώσεων αυτών. (β:1) Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace της συναρτήσεως $\sin \omega_0 t$ με γνωστό το μετασχηματισμό Laplace της εκθετικής συναρτήσεως $e^{i\omega_0 t}$. (γ:1) Στο μετασχηματισμό Laplace η απόδειξη της ιδιότητας

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s) \quad \text{με } F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

(δ:1) Ο μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως $t \sin \omega_0 t$. (ε:2) Υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες ο μετασχηματισμός Laplace $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ της λύσεως $u(t)$ της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως. (στ:1) Υπό τις ίδιες συνθήκες και χωρίς άλλους υπολογισμούς μια πρώτη εκτίμηση για τη μεταβολή της λύσεως $u(t)$ με το χρόνο t (για μεγάλες τιμές του t) και η σχετική γραφική παράσταση. (ζ:1) Άρα πώς μεταβάλλεται το εύρος των ταλαντώσεων με το χρόνο t (πάλι για μεγάλες τιμές του t); ▲

▼ Άσκηση Ε2.9 ■ Ελεύθερες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση

Στις Ταλαντώσεις, που είναι ασφαλώς ένα πολύ ενδιαφέρον πεδίο της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού, παρουσιάζονται συχνά συστήματα μαζών και απλών γραμμικών ελατηρίων. Σε ένα τέτοιο απλό σύστημα δύο μαζών και τριών ελατηρίων κατά μήκος οριζόντιας ευθείας γραμμής προκύπτει το σύστημα των συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}.$$

Εδώ τα σύμβολα \mathbf{M} και \mathbf{K} δηλώνουν τα συμμετρικά μητρώα μάζας και στιβαρότητας αντίστοιχα. Επίσης το σύμβολο $\mathbf{u}(t)$ δηλώνει το σχετικό διάνυσμα των οριζοντίων μετατοπίσεων των δύο μαζών του πιο πάνω μηχανικού συστήματος στις Ταλαντώσεις (με $u_1(t)$ να δηλώνει την μετατόπιση της πρώτης μάζας και $u_2(t)$ την μετατόπιση της δεύτερης μάζας). Τα σύμβολα αυτά στο παρόν διβάθμιο απλό μηχανικό σύστημα έχουν τις εξής συγκεκριμένες εκφράσεις:

$$\mathbf{M} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

με τα m και k γνωστές θετικές σταθερές, χωρίς εξωτερικές δυνάμεις και με μηδενικό το μητρώο αποσβέσεως \mathbf{C} των ταλαντώσεων. Ζητούνται: (α:3) Η επίλυση του παραπάνω συστήματος διαφορικών εξισώσεων με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace και υπό τις αρχικές συνθήκες

$$u_k(0) = u_{k0}, \quad \dot{u}_k(0) = v_{k0} \quad \text{με} \quad k = 1, 2$$

μέχρι τον πλήρη προσδιορισμό των μετασχηματισμών Laplace $U_{1,2}(s) = \mathcal{L}\{u_{1,2}(t)\}$ των αγνώστων συναρτήσεων (μετατοπίσεων) $u_{1,2}(t)$. Δηλαδή δε ζητείται η αντιστροφή αυτών των μετασχηματισμών Laplace. (β:3) Η απόδειξη (μαθηματικά βέβαια και με βάση τους μετασχηματισμούς Laplace $U_{1,2}(s)$ που ήδη βρέθηκαν) ότι οι αγνώστες μετατοπίσεις $u_{1,2}(t)$ είναι τριγωνομετρικής και όχι υπερβολικής (ισοδύναμα πραγματικής εκθετικής) μορφής στο παρόν πρόβλημα. (γ:2) Είναι η διαπίστωση αυτή σωστή (και αναμενόμενη) και από της φυσικής απόψεως του Πολιτικού Μηχανικού (που ασφαλώς δεν πρέπει να παραβλέπεται) ή όχι; Γιατί ακριβώς; Ποια θεμελιώδης αρχή της Μηχανικής θα παραβιαζόταν στην αντίθετη περίπτωση; ▲

▼ Άσκηση Ε2.10 ■ Δυναμική των Κατασκευών: Υδατόπυργοι

Εδώ θεωρούμε υδατόπυργο, δηλαδή δεξαμενή για νερό όγκου V που στηρίζεται στο πάνω άκρο κατακόρυφου υποστυλώματος (ή στύλου) ύψους h και δυσκαμψίας EI με πάκτωση στη γη στο κάτω άκρο του. Ο υδατόπυργος αυτός προσεγγίζεται από μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας $m + M$ (με m τη μάζα της δεξαμενής και M τη μάζα του νερού σ' αυτήν με $0 \leq M \leq M_0$ και $M_0 = \rho V$ τη μέγιστη μάζα νερού με ρ την πυκνότητά του) και σταθεράς του υποστυλώματος $k = 12EI/h^3$. Το υποστυλώμα θεωρείται εδώ προσεγγιστικά αβαρές. Για οριζόντια κίνηση του εδάφους με επιτάχυνση $a_g(t) \equiv \ddot{u}_g(t)$ (που μετριέται με επιταχυνσιόμετρο), π.χ. σε σεισμό ή σε κραδασμούς του εδάφους από διάφορες αιτίες, ζητούνται: (α:1) Να αποδειχθεί η ισχύς της διαφορικής εξισώσεως

$$\frac{d^2 u_r(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u_r(t) = -a_g(t) \quad \text{με} \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m + M}}$$

εδώ ειδικά με $u_r(t)$ τη σχετική μετατόπιση της δεξαμενής του υδατόπυργου ως προς το έδαφος. Στο μετασχηματισμό Laplace (β:1) να αποδειχθεί ο τύπος

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = -U'(s) \quad \text{με} \quad U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\}$$

και με χρήση του οι τύποι

$$(\gamma:1) \quad \mathcal{L}\{t \cos \omega_0 t\} = \frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2} \quad \text{και} \quad (\delta:1) \quad \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t - \omega_0 t \cos \omega_0 t\} = \frac{2\omega_0^3}{(s^2 + \omega_0^2)^2}.$$

(ε:2) Τώρα στην περίπτωση που

$$a_g(t) = A \sin \omega_0 t$$

να βρεθεί με χρήση του προηγούμενου τύπου η λύση $u_r(t)$ της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες. (στ:2) Τέλος με γνωστά τον όγκο V της δεξαμενής του υδατόπυργου και την πυκνότητα του νερού ρ (οπότε $M_0 = \rho V$: γνωστή μάζα) καθώς και τις ιδιοσυχνότητες του υδατόπυργου (i) ω_1 (με άδεια τη δεξαμενή του: μάζα m) και (ii) ω_2 (με γεμάτη τη δεξαμενή του: μάζα $m + M_0$), ποια είναι (πολύ προσεγγιστικά βέβαια) η μάζα m της ίδιας της δεξαμενής; ▲

E2.1.2

E2.1.2. Ασκήσεις με διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους

Ασκήση

Ενότητα E2.1

▼ Ασκήση E2.11 ■ Περιβαλλοντική Υδραυλική

Θεωρούμε τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με την ισχύ της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad \text{με} \quad x > 0, \quad t > 0, \quad c = c(x, t)$$

τη συγκέντρωση του ρύπου και τις σταθερές V και k γνωστές. Ισχύουν επίσης οι δύο συνθήκες

$$c(x, 0) = 0 \quad \text{για} \quad x \geq 0 \quad (\text{χρονική αρχική συνθήκη})$$

και επίσης

$$c(0, t) = c_0 \quad \text{για} \quad t > 0 \quad (\text{χωρική αρχική συνθήκη}).$$

Ζητούνται: (α:1) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace εδώ ως προς το χρόνο t να αναχθεί η πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση και (β:1) να βρεθεί η λύση της $C(x, s) = \mathcal{L}\{c(x, t)\}$ που να πληροί και τις πιο πάνω συνθήκες. (γ:2) Με αντιστροφή κατά Laplace και με χρήση και της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside να βρεθεί η λύση $c(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(x, s)\}$ του αρχικού προβλήματος μεταφοράς ρύπου. (δ:1) Η ίδια λύση να γραφεί και σε μορφή με δύο χωριστούς τύπους, τώρα χωρίς τη χρήση της συναρτήσεως του Heaviside. (ε:1) Να εξηγηθεί με φυσικό τρόπο η λύση του προηγούμενου ερωτήματος. ▲

Ασκήση

Ενότητα E2.1

▼ Ασκήση E2.12 ■ Περιβαλλοντική Υδραυλική


Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με x τη θέση: $x \geq 0$ και t το χρόνο: $t \geq 0$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad \text{με} \quad c = c(x, t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0$$

και τα D , V και k τρεις σταθερές. Θεωρούμε γνωστές και τις τρεις συνθήκες (για $t = 0$ και $x = 0$)

$$c(x, 0) = c_0(x), \quad c(0, t) = f(t), \quad \text{και} \quad \frac{\partial c}{\partial x}(0, t) = g(t)$$

με τις τρεις συναρτήσεις $c_0(x)$, $f(t)$ και $g(t)$ γνωστές. Ζητούνται: Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο t (όχι ως προς τη θέση x) (α:5) η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (β:2) Οι δύο αρχικές συνθήκες (για $x = 0$) που τη συνοδεύουν. (γ:1) Με ποιες μεθόδους μπορεί να λυθεί το σχετικό πρόβλημα; ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε2.1

▼ Άσκηση Ε2.13 ■ Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος


Ζητούνται: (α:1) Με γνωστό ότι

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}} \quad \text{ο μετασχηματισμός Laplace} \quad \mathcal{L}\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\}.$$

(β:1) Πρόχειρες γραφικές παραστάσεις (στο ίδιο σχήμα) των συναρτήσεων $\operatorname{erf}(x)$ και $\operatorname{erfc}(x)$ και οι τιμές τους για $x = 0$ και $x \rightarrow \infty$. Τώρα σε ένα πρόβλημα μονοδιάστατης μεταφοράς ρύπου στο έδαφος με $x \geq 0$ και $t \geq 0$ παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \text{με} \quad c(x, 0) = c_1 \quad \text{και} \quad c(0, t) = c_2$$

με $c = c(x, t)$ τη συγκέντρωση του ρύπου, R και D δύο γνωστές σταθερές και c_1 και c_2 επίσης δύο γνωστές σταθερές. Ζητούνται επίσης: (γ:2) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο t η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (δ:1) Η γενική λύση της τελευταίας, (ε:1) η αντίστοιχη από φυσικής απόψεως αποδεκτή λύση και (στ:1) η λύση που πληροί και τη συνοριακή συνθήκη $c(0, t) = c_2$. (ζ:2) Αντιστρέφοντας κατά Laplace, η λύση $c(x, t)$ του πιο πάνω προβλήματος. (η:1) Τέλος η εύρεση των τιμών της $c(x, 0)$, $c(0, t)$, $c(x, \infty)$ και $c(\infty, t)$. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε2.1

▼ Άσκηση Ε2.14 ■ Ατμοσφαιρική Ρύπανση

Στην Περιβαλλοντική Μηχανική θεωρούμε το πρόβλημα της διασποράς ρύπου στην ατμόσφαιρα από σημειακό ρυπαντή στη θέση $(0, 0)$. Στη μόνιμη κατάσταση ισχύει η διαφορική εξίσωση

$$V \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad \text{με} \quad x \geq 0 \quad \text{και} \quad y \geq 0$$

με άγνωστη συνάρτηση τη συγκέντρωση $c = c(x, y)$ του ρύπου στην ατμόσφαιρα (x είναι ο οριζόντιος άξονας και y ο κατακόρυφος) και V και D γνωστές σταθερές. Αυτή η διαφορική εξίσωση συνοδεύεται από τις δύο συνοριακές συνθήκες

$$c(0, y) = c_0 \quad \text{και} \quad c(x, 0) = \frac{c_0}{2}$$

(με το c_0 γνωστή σταθερά) ζητούνται: (α:1) Η αναγωγή της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace ως προς τη μεταβλητή x . (β:2) Η λύση της συνήθους διαφορικής

εξισώσεως που προέκυψε χωρίς όμως απειρισμούς για $y \rightarrow \infty$. (γ:5) Με τη χρήση του τύπου

$$\mathcal{L} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{a}{2\sqrt{x}} \right) \right\} = \frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$$

και με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace η λύση $c(x, y)$ του παρόντος προβλήματος μεταφοράς. ▲

✎ Άσκηση

Ενότητα Ε2.1

▼ Άσκηση Ε2.15 ■ Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί

Θεωρούμε μια συνήθη δοκό μήκους L , γραμμικής πυκνότητας ρA και δυσκαμψίας EI σε ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις με άγνωστη συνάρτηση το βέλος κάμψεως $v = v(x, t)$ της δοκού με x τη θέση και t το χρόνο. Οι δύο αρχικές συνθήκες είναι

$$v(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

με τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ γνωστές. Ζητούνται: (α:1) Ο έλεγχος από απόψεως διαστάσεων της σχετικής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους. (β:1) Είναι δυνατή από φυσικής απόψεως ελεύθερη καμπτική ταλάντωση δοκού; Γιατί; (γ:2) Η αναγωγή της ίδιας εξισώσεως (μαζί με τις αρχικές συνθήκες) σε συνήθη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο t ($t \geq 0$). (δ:2) Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς συνήθους διαφορικής εξισώσεως με τη γραφή του συμβόλου s παντού όπου παρουσιάζεται. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το βοηθητικό σύμβολο

$$\gamma(s) = \sqrt[4]{\frac{\rho A s^2}{EI}}.$$

(Πάντως δε ζητείται ο σχετικός αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace!) (ε:2) Ποιες είναι οι δύο βασικές υπολογιστικές δυσκολίες (με λεπτομέρειες) που αντιμετωπίζει ο Πολιτικός Μηχανικός στην επίλυση αυτού του προβλήματος δοκού με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace; ▲

✎ Άσκηση

Ενότητα Ε2.1

▼ Άσκηση Ε2.16 ■ Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί

Στη Δυναμική των Κατασκευών θεωρούμε τις ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA υπό σταθερή αξονική φόρτιση N (θετική, όταν είναι εφελκυστική). Προκύπτει η εξής ομογενής διαφορική εξίσωση:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{με} \quad v = v(x, t)$$

το βέλος κάμψεως της δοκού. Ζητούνται: (α:2) Η απόδειξη της με βάση την αντίστοιχη εξίσωση χωρίς αξονική φόρτιση: με $N = 0$. (β:4) Απλά η αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο t με αρχικές συνθήκες

$$v(x, 0) = v_1 x + v_2 \quad (\text{με τα } v_{1,2} \text{ γνωστές σταθερές}) \quad \text{και} \quad \dot{v}(x, 0) = 0$$

(με την τελεία να δηλώνει χρονική μερική παράγωγο). (γ:2) Η εύρεση μιας μερικής λύσεως (ή ειδικής λύσεως) $V_p^*(x) := V_p(x, s)$ αυτής της συνήθους διαφορικής εξισώσεως. ▲

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε3

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο Κεφάλαιο αυτό Ε3 αναφέρονται μερικές ασκήσεις που μπορούν να λυθούν με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier και γενικά αφορούν στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

Στην Ενότητα Ε3.1 αναφέρονται ασκήσεις με χρήση του μετασχηματισμού Fourier σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, ενώ στην Ενότητα Ε3.2 αναφέρονται ασκήσεις πάλι με χρήση του μετασχηματισμού Fourier σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ή μερικές διαφορικές εξισώσεις).

Ε3.1

Ε3.1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

Ε3.1.1

Ε3.1.1. Ασκήσεις σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε3.1

▼ Άσκηση Ε3.1 ■ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις

Εξετάζουμε το κλασικό μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου M μάζας m , ελατηρίου σταθεράς k και αποσβεστήρα σταθεράς c (με $c > 0$) είτε με ασθενή (υποκρίσιμη) είτε με ισχυρή (υπερκρίσιμη) απόσβεση. Αυτό το σύστημα διέπεται από την τόσο γνωστή μας συνήθη διαφορική εξίσωση

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + c \frac{du}{dt} + ku = p(t), \quad t \geq 0,$$

με t το χρόνο, $u = u(t)$ την άγνωστη συνάρτηση (τη μετατόπιση του υλικού σημείου M ως προς τη θέση ισορροπίας του $u = 0$) και $p(t)$ την εξωτερική δύναμη (τη φόρτιση) που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο M στην παρούσα εξαναγκασμένη ταλάντωσή του. Χρησιμοποιούμε και τη σταθερά ω_0 (τη φυσική κυκλική συχνότητα ταλαντώσεων του παρόντος μηχανικού συστήματος χωρίς όμως τον αποσβεστήρα) καθώς και το λόγο αποσβέσεως των ταλαντώσεων ξ με

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{και} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0}.$$

Μπορούμε έτσι άμεσα (διαιρώντας με τη μάζα m) να φέρουμε την πιο πάνω συνήθη διαφορική εξίσωση στην τόσο κλασική για τον Πολιτικό Μηχανικό μορφή

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = p^*(t) \quad \text{με} \quad u = u(t), \quad p^*(t) := \frac{1}{m} p(t) \quad \text{και} \quad t \geq 0.$$

Η νέα συνάρτηση $p^*(t) := p(t)/m$ είναι προφανώς η ανηγμένη στη μάζα m φόρτιση. Ζητούνται:

(α) Σε περίπτωση μη περιοδικής εξωτερικής δυνάμεως $p(t)$ (χωρίς περίοδο T) η εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier για την αναγωγή της πιο πάνω γραμμικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως σε πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς το μετασχηματισμό Fourier $U(\omega)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (Στην εξίσωση αυτή υπεισέρχεται βέβαια και ο μετασχηματισμός Fourier $P(\omega)$ της εξωτερικής δυνάμεως $p(t)$.) Ποια είναι η λύση $U(\omega)$ της πρωτοβάθμιας αλγεβρικής εξισώσεως που προκύπτει; Πώς ορίζεται η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως (στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας ω) $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$), αν δεν υπάρχει κανένας κίνδυνος συγχύσεως με τη βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(t)$, εδώ όμως υπάρχει στο επόμενο ερώτημα!) και πώς υπεισέρχεται στη λύση που προαναφέρθηκε; Επομένως ποια είναι η μερική λύση $u(t)$ της πιο πάνω συνήθους διαφορικής εξισώσεως με τη χρήση του ολοκληρωτικού τύπου αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier;

(β) Τι ισχύει τώρα στην ειδική περίπτωση της εξωτερικής δυνάμεως (φορτίσεως) $p(t) = \delta(t)$ με $\delta(t)$ τη γνωστή ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση δέλτα του Dirac; Στην περίπτωση που $p(t) = H(t)$ με $H(t)$ τη βηματική συνάρτηση του Heaviside; Τέλος πώς ακριβώς σχετίζεται η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως $G(\omega)$ με την ωστική απόκριση $g(t)$ του παρόντος μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος; ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε3.1

▼ Άσκηση Ε3.2 ■ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση

Στις εξαναγκασμένες χωρίς απόσβεση ταλαντώσεις με διαφορική εξίσωση τη γνωστή εξίσωση

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ζητούνται τώρα στο άπειρο χρονικό διάστημα $-\infty < t < \infty$: (α:2) Ο μετασχηματισμός Fourier $U(\omega)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (Ο μετασχηματισμός Fourier $P(\omega)$ της γνωστής συναρτήσεως $p(t)$ θεωρείται και αυτός, όπως και η συνάρτηση $p(t)$, γνωστός.) (β:1) Χωρίς απόδειξη υπό ποιες ακριβώς συνθήκες για $t \rightarrow \pm\infty$ ισχύει το αποτέλεσμα του προηγούμενου ερωτήματος; (γ:2) Η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως (εννοείται στο πεδίο της συχνότητας ω) για το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα που εξετάζεται υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier. (δ:3) Η ίδια ακριβώς συνάρτηση αποκρίσεως, τώρα όμως υποχρεωτικά χωρίς καθόλου τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε3.1

▼ Άσκηση Ε3.3 ■ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Απόσβεση

Σε πρόβλημα ταλαντώσεων μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα για τη μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{du(t)}{dt} + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad \text{με} \quad -\infty < t < \infty$$

και $p(t)$ τη φόρτιση του υλικού σημείου (μάζας m). Αυτή θεωρείται εδώ αυθαίρετη (όχι καθορισμένη) συνάρτηση. Ζητούνται: (α:1) Η λεπτομερής εύρεση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με βάση το γνωστό δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. (β:2) Ο μετασχηματισμός Fourier $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ της λύσεως της $u(t)$ και από αυτόν (γ:2) η σχετική **μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως** $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$) στο πεδίο της συχνότητας ω . (δ:2) Με τη συνάρτηση $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}$ (ή $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$) γνωστή η εύρεση του τύπου για τη λύση $u(t)$ της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης και (ε:1) σχετικό λεπτομερές σχόλιο για το πάνω όριο ολοκληρώσεως. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε3.1

▼ Άσκηση Ε3.4 ■ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Απόσβεση

Θεωρούμε το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου μάζας m , ελατηρίου σταθεράς k και αποσβεστήρα σταθεράς c σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, αλλά με μη περιοδική (όχι με περιοδική!) φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t)$ η οποία ασκείται πάνω στο υλικό σημείο. Άγνωστη συνάρτηση είναι η μετατόπιση $u(t)$ του υλικού σημείου με t το χρόνο: $-\infty < t < \infty$. Ζητούνται: (α:2) Η εύρεση του τύπου για το μετασχηματισμό Fourier της δευτέρας παραγώγου $\ddot{u}(t)$ μιας συναρτήσεως $u(t)$ με αναφορά και των σχετικών υποθέσεων. (β:2) Με βάση τη σχετική διαφορική εξίσωση ο μετασχηματισμός Fourier $U(\omega)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (γ:2) Η μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$) στο πεδίο της συχνότητας ω . (δ:2) Με την αντίστροφη της κατά Fourier συνάρτηση $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}$ (ή $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$) να θεωρείται γνωστή συνάρτηση από ποιον ολοκληρωτικό τύπο θα μπορούσε να υπολογισθεί η άγνωστη συνάρτηση $u(t)$ για αυθαίρετη (αλλά γνωστή) φόρτιση $p(t)$;

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε3.1

▼ Άσκηση Ε3.5 ■ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις με Απόσβεση

Θεωρούμε ένα συνηθισμένο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου M (μάζας m), ελατηρίου S (σταθεράς k) και αποσβεστήρα D (σταθεράς c) σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις υπό μη περιοδική φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t)$. Ζητούνται: (α:1) Να αναφερθεί η σχετική διαφορική εξίσωση με χρήση και των ποσοτήτων ξ και ω_0 . (β:3) Για ωστική (ή κρουστική) φόρτιση του συστήματός μας, δηλαδή για $p(t) = \delta(t)$, η εύρεση του μετασχηματισμού Fourier $U(\omega)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (γ:1) Η σχετική μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$) στο πεδίο της συχνότητας. (δ:3) Υποθέτοντας τώρα ότι είναι γνωστή η αντίστροφη της κατά Fourier συνάρτηση $g(t)$ (ή $h(t)$), να μη γίνει όμως η αντίστροφη αυτή!, η λύση $u(t)$ της αρχικής διαφορικής εξίσωσης για αυθαίρετη (οποιαδήποτε, όχι συγκεκριμένη) μη περιοδική φόρτιση $p(t)$. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε3.1

▼ Άσκηση Ε3.6 ■ Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις χωρίς Απόσβεση

Θεωρούμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας m και ελατηρίου (απλού ταλαντωτή). Καταρχήν στο μετασχηματισμό Fourier ζητούνται: (α:1) Με πλήρη απόδειξη, αν είναι γνωστός ο μετασχηματισμός Fourier $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ της συναρτήσεως $u(t)$, να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συναρτήσεως $u(t + c)$ με το c σταθερά. (β:1) Χωρίς απόδειξη να διατυπωθεί μαθηματικά και με λόγια το θεώρημα της συνελιξεως στο μετασχηματισμό Fourier. Θεωρούμε τώρα τον απλό ταλαντωτή της προηγούμενης ασκήσεως, αλλά με γνωστή μη περιοδική ανηγμένη φόρτιση $p(t)/m$. Με χρήση και του συμβόλου m (για τη μάζα: δηλαδή εδώ $p(t)/m$) ζητούνται: (γ:1) Με τη μέθοδο του

μετασχηματισμού Fourier η αναγωγή της διαφορικής εξίσωσης σε γραμμική αλγεβρική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση το μετασχηματισμό Fourier $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ και η λύση της $U(\omega)$. (δ:1) Η σχετική συνάρτηση αποκρίσεως στο πεδίο της συχνότητας $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$). (ε:1) Η απόκριση $u(t)$ του απλού αυτού ταλαντωτή με τη χρήση των συναρτήσεων $P(\omega) = \mathcal{F}\{p(t)\}$ (όχι $\mathcal{F}\{p^*(t)\}$) και $G(\omega)$ (ή $H(\omega)$). (στ:1) Η ίδια απόκριση με τη χρήση των συναρτήσεων $p(t)$ και

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\}.$$

Η συνάρτηση $g(t)$ (ή $h(t)$) θεωρείται εδώ γνωστή. Μαθηματικά γιατί ισχύει ο τύπος που ζητείται στο ερώτημα αυτό; (ζ:1) Για ποιο φυσικό λόγο το διάστημα ολοκλήρωσης είναι τελικά $(-\infty, t]$ τη χρονική στιγμή t ; (η:1) Να ερμηνευθεί με φυσικό-εχνικό τρόπο (όχι μαθηματικά!) ο ίδιος τύπος. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε3.1

▼ Άσκηση Ε3.7 ■ Δυναμική των Κατασκευών, Διώροφα Κτίρια

Θεωρούμε διώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως που προσεγγίζεται από αντίστοιχο πλαίσιο χωρίς απόσβεση αλλ' ούτε και φόρτιση $\mathbf{p}(t)$. Προκύπτει το εξής σύστημα των δύο ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}.$$

Οι μάζες των ορόφων (που θεωρούνται συγκεντρωμένες στα ύψη των πλακών) είναι $m_1 = 3m$ και $m_2 = 2m$. Το μητρώο δυσκαμψίας \mathbf{K} είναι συμμετρικό με στοιχεία

$$k_{11} = k_1 + k_2, \quad k_{12} = -k_2, \quad k_{22} = k_2 \quad \text{με} \quad k_1 = 2k \quad \text{και} \quad k_2 = k.$$

Οι δύο ποσότητες m και k είναι γνωστές θετικές σταθερές. Ζητούνται: (α:1) Καταρχήν με γνωστό το μετασχηματισμό Fourier $U(\omega)$ συναρτήσεως $u(t)$ ζητείται ο μετασχηματισμός Fourier της συναρτήσεως $e^{-i\omega_0 t} u(t)$ με το ω_0 γνωστή θετική σταθερά. Ζητούνται επίσης: (β:1) Το σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων χωρίς τη χρήση μητρώων για το διώροφο κτίριο διατμήσεως που εξετάζεται (χωρίς απόσβεση), αλλά τώρα με εξωτερικές φορτίσεις $p_1(t)$ και $p_2(t)$ για τις πλάκες των δύο ορόφων. (Να παραμείνουν τα σύμβολα m και k .) (γ:2) Με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier η αναγωγή του σε σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (χωρίς να λυθεί αυτό). (δ:2) Ο παρονομαστής $D_F(\omega)$ στη λύση $U_1(\omega)$ και $U_2(\omega)$ και (ε:2) Οι ιδιοσυχνότητες του κτιρίου ω_1 και ω_2 . Στα δύο τελευταία ερωτήματα να χρησιμοποιηθεί και το βοηθητικό σύμβολο $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. ▲

Άσκηση


Ενότητα Ε3.1

▼ Άσκηση Ε3.8 ■ Δυναμική των Κατασκευών: Κτίρια

Σε ένα σημείο M κατασκευής (ας υποθέσουμε κτιρίου) ασκείται σταθερή φόρτιση (εξωτερική δύναμη) $p(t) = p_0$ από τη χρονική στιγμή t_1 μέχρι και τη χρονική στιγμή t_2 (με $t_1 < t_2$) μόνο. Εδώ ζητούνται: (α:4) Ο μετασχηματισμός Fourier $P(\omega)$ της σταθερής αυτής φορτίσεως p_0 . (β:4) Η λεπτομερής προσέγγιση του μετασχηματισμού Fourier $P(\omega)$, αλλά για αυθαίρετη (μεταβλητή, όχι πια σταθερή) φόρτιση $p(t)$ στο ίδιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα $[t_1, t_2]$ υποχρεωτικά με τη χρήση του κανόνα του τραπεζιού και με $N + 1$ συνολικά όρους στο τελικό άθροισμα. ▲

Ε3.1.2

Ε3.1.2. Ασκήσεις σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε3.1

▼ **Άσκηση Ε3.9** ■ Περιβαλλοντική Υδραυλική

Εξετάζουμε τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με το νερό να ρέει με σταθερή ταχύτητα V ($V > 0$). Η συγκέντρωση του ρύπου $c = c(x, t)$ με x τη θέση ($-\infty < x < \infty$) και t το χρόνο ($t \geq 0$) είναι η άγνωστη συνάρτηση. Ο ρύπος μεταφέρεται τόσο (i) με μεταγωγή (λόγω της ταχύτητας V του νερού στο υδατόρρευμα) όσο και (ii) με μοριακή διάχυση με σταθερά μοριακής διαχύσεως D ($D > 0$). Την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ η συγκέντρωση του ρύπου είναι $c(x, 0) = g(x)$ με τη $g(x)$ κατάλληλη γνωστή συνάρτηση. Ζητούνται: (α:1) Η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που ισχύει στο συγκεκριμένο πρόβλημα και οι ειδικές περιπτώσεις της (i) για απλή μεταγωγή του ρύπου και (ii) για απλή μοριακή διάχυση του ρύπου. (β:1) Η εύρεση του τύπου της διαφορικής εξισώσεως της μεταγωγής-διάχυσεως, στην οποία αναφερόμαστε εδώ. (γ:1) Επτά χαρακτηρισμοί της ίδιας διαφορικής εξισώσεως. (δ:1) Χωρίς καμία, απολύτως καμία αλλαγή μεταβλητής και υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier (ως προς t ή ως προς x και γιατί;) η αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (ε:1) Ποιες ακριβώς υποθέσεις έχουν γίνει για $x \rightarrow \pm\infty$; (στ:2) Η εύρεση της λύσεως $C(\omega, t)$ της συνήθους διαφορικής εξισώσεως χωρίς να λησμονηθεί η αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$. (ζ:1) Η εύρεση της συγκεκριμένης $c(x, t)$ του ρύπου (σε κατά το δυνατόν απλοποιημένη μορφή) απλά με τη χρήση του γενικού ολοκληρωτικού τύπου για την αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε3.1

▼ **Άσκηση Ε3.10** ■ Περιβαλλοντική Υδραυλική

Θεωρούμε τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με την ισχύ της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad \text{με} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad c = c(x, t)$$

τη συγκέντρωση του ρύπου και τις σταθερές D , V και k γνωστές. Ισχύει επίσης η αρχική συνθήκη

$$c(x, 0) = b(x) \quad \text{με} \quad -\infty < x < \infty.$$

Οι συνοριακές συνθήκες για $x \rightarrow \pm\infty$ θεωρούνται μηδενικές. Ζητούνται: (α:1) Οι περιβαλλοντικές (όχι οι μαθηματικές) ονομασίες και των τεσσάρων όρων της παραπάνω διαφορικής εξισώσεως. (β:1) Πότε ακριβώς θα μπορούσε η σταθερά k να πάρει αρνητική τιμή, δηλαδή η $-k$ θετική; (γ:2) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier να αναχθεί η πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση και (δ:2) να βρεθεί η λύση της $C(\omega, t) = \mathcal{F}\{c(x, t)\}$ που να πληροί βέβαια και την πιο πάνω αρχική συνθήκη. (ε:2) Με αντιστροφή κατά Fourier και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$g(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-(D\omega^2 + iV\omega + k)t} \right\}$$

να θεωρείται γνωστός να βρεθεί η λύση $c(x, t)$ του πιο πάνω προβλήματος αρχικής τιμής. ▲

 **Άσκηση**

Ενότητα Ε3.1

▼ **Άσκηση Ε3.11 ■ Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος**

Θεωρούμε τη μονοδιάστατη μεταφορά ρύπου στο έδαφος (κατά τη διεύθυνση x με $-\infty < x < \infty$) αποκλειστικά με διάχυσή του στο νερό μέσα στο έδαφος. Προκύπτει έτσι η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως ως προς τη συγκέντρωση $c(x, t)$ του ρύπου (με x τη θέση και t το χρόνο) με γνωστό συντελεστή διαχύσεως D . Σαν αρχική συνθήκη (για $t = 0$) έχουμε τη συνθήκη

$$c(x, 0) = M^* \delta(x)$$

με M^* γνωστή ανηγμένη μάζα και $\delta(x)$ τη συνάρτηση δέλτα του Dirac. Ζητούνται: (α:3) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier η αναγωγή της εξίσωσης της διαχύσεως που προαναφέρθηκε και της αρχικής συνθήκης της σε συνήθη διαφορική εξίσωση και αρχική συνθήκη. (β:2) Η επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης μαζί με την αρχική συνθήκη της. (γ:3) Η λύση $c(x, t)$ της αρχικής διαφορικής εξίσωσης παίρνοντας υπόψη και τον τύπο

$$\mathcal{F} \left\{ \exp \left(-\frac{x^2}{b^2} \right) \right\} = \sqrt{\pi} b \exp \left(-\frac{b^2 \omega^2}{4} \right) \quad \text{με } b > 0.$$

 **Άσκηση**

Ενότητα Ε3.1

▼ **Άσκηση Ε3.12 ■ Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος**

Σε μονοδιάστατη μεταφορά ρύπου στο έδαφος με μεταγωγή, διάχυση και διασπορά του ρύπου, αλλά και ταυτόχρονη αποδόμησή του πρώτης τάξεως, προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = E_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad \text{με } -\infty < x < \infty \quad \text{και } 0 < t < \infty.$$

με $c(x, t)$ τη συγκέντρωση του ρύπου. Στην εξίσωση αυτή οι σταθερές R , E_x , V_x και k είναι γνωστές θετικές σταθερές. Πιο συγκεκριμένα: R είναι ο *συντελεστής καθυστέρησης* (ή *παράγοντας καθυστέρησης*), E_x ο ενιαίος *συντελεστής διαμήκους διαχύσεως και διασποράς*, V_x η *διαμήκης ταχύτητα* του νερού που ρέει διά μέσου των πόρων του εδάφους και που μεταφέρει το ρύπο και k η *σταθερά του ρυθμού αποδομής πρώτης τάξεως*, την οποία έχουμε υποθέσει εδώ (όχι δευτέρας ή άλλης τάξεως) για την αποδόμηση του ρύπου. Ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της διαφορικής εξίσωσης. (β:1) Η εξήγηση για το ποιοι ακριβώς όροι εκφράζουν: (i) τη μεταγωγή, (ii) τη διάχυση και τη διασπορά (*πρόκειται για εντελώς διαφορετικά φαινόμενα από φυσικής απόψεως, αλλά και πολύ συγγενή από μαθηματικής απόψεως στη μοντελοποίησή τους!*) και (iii) την αποδόμηση του ρύπου. (γ:2) Υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (δ:1) Υπό ποιες συννοριακές συνθήκες στο άπειρο (για $x = \pm\infty$) ισχύει η αναγωγή αυτή; (ε:1) Η γενική λύση της συνήθους αυτής διαφορικής εξίσωσης. (στ:1) Η μερική (ή ειδική) λύση της ίδιας εξίσωσης με αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$. (ζ:1) Η αντίστοιχη μερική λύση $c(x, t)$ σε ολοκληρωτική μορφή (με ολοκλήρωμα) απλά με χρήση του γενικού τύπου του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε3.1

▼ **Άσκηση Ε3.13** ■ **Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος**

Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση με την ίδια διαφορική εξίσωση και την ίδια αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$. Ζητούνται επίσης: (α:3) Η εύρεση της ίδιας ακριβώς γενικής (χωρίς την αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$) λύσεως (όπως αρχικά και με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier), εδώ όμως με την κάπως πιο απλή μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως συμπεριλαμβάνοντας εξαρχής και τη φανταστική μονάδα $i = \sqrt{-1}$ σ' αυτήν και με τη χρονική σταθερά να δηλώνεται (καλύτερα) με το σύμβολο ω αντί με το σύμβολο λ ή το μ . (β:3) Ένας τρίτος τρόπος τώρα: υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace η αναγωγή της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (γ:2) Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς συνήθους διαφορικής εξισώσεως με σαφή δήλωση σ' αυτήν της μεταβλητής s του μετασχηματισμού Laplace οπουδήποτε και αν παρουσιάζεται η μεταβλητή αυτή. ▲

▼ **Άσκηση Ε3.14** ■ **Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος**

Για την εξίσωση της προπροηγούμενης ασκήσεως, αλλ' εδώ με $R = 1$, $V = 0$ και τώρα $-\infty < x < \infty$, ενώ πάλι $t > 0$, ζητούνται: (α:2) Η αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier, (β:2) Η γενική λύση αυτής της συνήθους διαφορικής εξισώσεως και (γ:2) Η μερική λύση που πληροί τη γενικότερη αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$. (δ:2) Με τη χρήση και του τύπου

$$\mathcal{F}^{-1} \{e^{-D\omega^2 t}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$$

η λύση $c(x, t)$ του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής με τη μορφή ολοκληρωτικού τύπου. ▲

▼ **Άσκηση Ε3.15** ■ **Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος**

Σε ένα πρόβλημα μονοδιάστατης μεταφοράς ρύπου στο έδαφος με $-\infty < x < \infty$ και $t \geq 0$ παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc$$

με $c = c(x, t)$ τη συγκέντρωση του ρύπου και R , D , V και k τέσσερις γνωστές σταθερές. Η αρχική συνθήκη είναι $c(x, 0) = c_0(x)$ με τη $c_0(x)$ μια γνωστή συνάρτηση. Ζητούνται: (α:1) Οι ονομασίες των τεσσάρων όρων της εξισώσεως αυτής. (β:1) Η εύρεση του τύπου της και οι λειπομερείς χαρακτηρισμοί της. (γ:1) Η απλοποίησή της με αλλαγή άγνωστης συναρτήσεως της μορφής

$$c(x, t) = c^*(x, t)e^{-kt/R}.$$

(δ:1) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier η αναγωγή της αρχικής διαφορικής εξισώσεως (όχι της απλοποιημένης διαφορικής εξισώσεως) σε συνήθη διαφορική εξίσωση και (ε:1) η λύση της τελευταίας που να πληροί και την αρχική συνθήκη. (στ:2) Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$G(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \{e^{-(D\omega^2 + iV\omega + k)t/R}\}$$

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε3.1

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε3.1

γνωστό η τελική λύση $c(x, t)$ του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής. (ζ:1) Η ίδια λύση κατευθείαν με τη χρήση του τύπου αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier. (η:1) Η μερική λύση (ή ειδική λύση) $c_m(x, t)$ για

$$c_0(x) = m\delta(x - x_0)$$

με τα m και x_0 γνωστές σταθερές και (θ:1) η λεπτομερής φυσική ερμηνεία της. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε3.1

▼ Άσκηση Ε3.16 ■ Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος

Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση για την ίδια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, τώρα όμως με $-\infty < x < \infty$ και πάλι $t \geq 0$. Ζητούνται: (α:1) Η επίλυσή της με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης με φανταστικές σταθερές $i\lambda$ και $i\mu$ στον εκθέτη και χωρίς τετραγωνικές ρίζες. (β:1) Η επαλήθευση της λύσεως και (γ:1) η γενίκευσή της σε ολοκληρωτικό τύπο. Τώρα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier (δ:1) η αναγωγή της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση και (ε:2) η λύση της που να πληροί και την αρχική συνθήκη $c(x, 0) = c_0(x)$ με $-\infty < x < \infty$. (στ:1) Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$G(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \{ e^{-(D\omega^2 + iV\omega)t/R} \}$$

γνωστό η τελική λύση $c(x, t)$ του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής. (ζ:1) Η ίδια λύση κατευθείαν με τη χρήση του τύπου αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier. (η:1) Η μερική λύση (ή ειδική λύση) $c_m(x, t)$ για

$$c_0(x) = m\delta(x - x_0)$$

με τα m και x_0 γνωστές σταθερές. (θ:1) Τέλος η λεπτομερής φυσική ερμηνεία της. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε3.1

▼ Άσκηση Ε3.17 ■ Περιβαλλοντική Μηχανική: Ατμοσφαιρική Ρύπανση

Στην Περιβαλλοντική Μηχανική θεωρούμε το πρόβλημα της διασποράς ρύπου στην ατμόσφαιρα από σημειακό ρυπαντή στη θέση $(0, 0)$. Στη μόνιμη κατάσταση ισχύει η διαφορική εξίσωση

$$V \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad \text{με} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{και} \quad -\infty < y < \infty,$$

με άγνωστη συνάρτηση τη συγκέντρωση $c = c(x, y)$ του ρύπου στην ατμόσφαιρα (x είναι ο οριζόντιος άξονας και y ο κατακόρυφος) και V και D γνωστές σταθερές. Με τη συνθήκη

$$c(0, y) = m\delta(y)$$

(με το m σταθερά και δ τη συνάρτηση δέλτα του Dirac) να ισχύει ζητούνται: (α:2) Με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier ως προς y η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (β:1) Η εύρεση της γενικής και (γ:1) της μερικής λύσεως της συνήθους διαφορικής εξισώσεως που αντιστοιχεί στην πιο πάνω συνθήκη $c(0, y) = m\delta(y)$. (δ:4) Με τη χρήση του γνωστού μετασχηματισμού Fourier

$$\mathcal{F} \{ e^{-a^2 y^2} \} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\omega^2/(4a^2)}$$

η εύρεση της λύσεως $c(x, y)$ του παρόντος προβλήματος (μαζί με τη συνθήκη $c(0, y) = m\delta(y)$) στο πεδίο των αρχικών μεταβλητών (x, y) (φυσικά με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier από ω σε y). ▲


 **Άσκηση**
Ενότητα Ε3.1

▼ **Άσκηση Ε3.18** ■ **Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι**

Θεωρούμε τις ελεύθερες αξονικές (ή διαμήκεις) ταλαντώσεις προσεγγιστικά άπειρης ράβδου (με $-\infty < x < \infty$ και $0 < t < \infty$) δυστένειας EA και γραμμικής πυκνότητας ρA . Οι συνοριακές συνθήκες για $x \rightarrow \pm\infty$ θεωρούνται πλήρως μηδενικές. Οι αρχικές συνθήκες (για $t = 0$) είναι οι εξής:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \dot{u}(x, 0) := \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

με τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ γνωστές. Ζητούνται: (α:1) Απλά να γραφεί η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με την εισαγωγή και κατάλληλου συμβόλου c . (β:1) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση, (γ:2) η γενική λύση της και (δ:2) η μερική λύση της που να πληροί και τις δύο αρχικές συνθήκες. (ε:2) Τέλος με τη χρήση του τύπου αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier η λύση $u(x, t)$ του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε3.1

▼ **Άσκηση Ε3.19** ■ **Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί**


Στη Δυναμική των Κατασκευών θεωρούμε τις ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις συνηθούς δοκού δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA υπό σταθερή αξονική φόρτιση N (θετική, όταν είναι εφελκυστική). Προκύπτει η εξής ομογενής διαφορική εξίσωση:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{με} \quad v = v(x, t)$$

το βέλος κάμψης της δοκού. Ζητούνται: (α:2) Η απόδειξη της με βάση την αντίστοιχη εξίσωση χωρίς αξονική φόρτιση: με $N = 0$. Με τη χρήση μετασχηματισμού Fourier ως προς τη θέση x (όχι ως προς το χρόνο t) ζητούνται: (α:4) Η αναγωγή της ίδιας εξίσωσης σε συνήθη διαφορική εξίσωση και (β:4) η γενική λύση της τελευταίας με τη χρήση του βοηθητικού συμβόλου

$$b(\omega) = \sqrt{\frac{EI\omega^4 + N\omega^2}{\rho A}}$$

και της μεταβλητής ω οπουδήποτε αυτή παρουσιάζεται. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε3.1

▼ **Άσκηση Ε3.20** ■ **Δυναμική των Κατασκευών, Δοκοί σε Ελαστική Βάση**

Θεωρούμε τις ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις (και ιδιοταλαντώσεις) απειρομήκους (απείρου μήκους: με $-\infty < x < \infty$) δοκού σε ελαστική βάση, ελαστικού υποστρώματος (ίσως απλά πεδιλοδοκού) μήκους L , γραμμικής πυκνότητας ρA και σταθερής δυσκαμψίας EI . Προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + kv + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \tag{3.1.1}$$

με $v = v(x, t)$ το βέλος κάμψεως της δοκού (που σχηματίζει την ελαστική γραμμή της) και k γνωστή σταθερά του συστήματος εδάφουςδοκού σε ελαστική βάση. Εδώ ζητείται η χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier με

$$\mathcal{F}\{v(x, t)\} = V(\omega, t).$$

Δυστυχώς εδώ το σύμβολο ω σαν μεταβλητή του μετασχηματισμού Fourier ως προς τη θέση x δεν έχει καμία απολύτως σχέση με κυκλική συχνότητα! Τι να κάνουμε; Εναλλακτικά θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί το σύμβολο ξ αντί για το σύμβολο ω ! Ζητούνται: (α:4) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier και με την υποχρεωτική χρήση και του βοηθητικού συμβόλου

$$b(\omega) = \sqrt{\frac{EI\omega^4 + k}{\rho A}}$$

η αναγωγή της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς το χρόνο t . (β:2) Λεπτομερές σχόλιο για όλες τις υποθέσεις που πρέπει να έχουν γίνει στο άπειρο: για $x \rightarrow \pm\infty$. (γ:2) Η εύρεση της γενικής λύσεως $V(\omega, t)$ της συνήθους διαφορικής εξίσωσης με τη ρητή εμφάνιση της μεταβλητής ω του μετασχηματισμού Fourier οπουδήποτε (προσοχή παρακαλώ σε τούτη τη λέξη!) αυτή εμφανίζεται. ▲

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε4

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο Κεφάλαιο αυτό Ε4, Ενότητα Ε4.1 αναφέρονται μερικές ασκήσεις που αναφέρονται στις Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους και μπορούν να λυθούν είτε με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών είτε με άλλες μεθόδους και γενικά αφορούν στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.


Συγκεκριμένα στην Παράγραφο Ε4.1.1 αναφέρονται ασκήσεις στην Περιβαλλοντική Μηχανική. Στην Παράγραφο Ε4.1.2 αναφέρονται ασκήσεις στην Ρευστομηχανική. Στην Παράγραφο Ε4.1.3 αναφέρονται ασκήσεις στην Εδαφομηχανική. Τέλος στην Παράγραφο Ε4.1.4 αναφέρονται ασκήσεις στη Μηχανική των Υλικών και Δυναμική των Κατασκευών.

E4.1

E4.1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

E4.1.1

E4.1.1. Ασκήσεις στην Περιβαλλοντική Μηχανική

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.1 ■ Περιβαλλοντική Υδραυλική

Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική και στη ροή νερού (με ρύπους A_k) κατά μήκος υδατορρέυματος θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad \text{με} \quad c = c(x, t)$$

για τη συγκέντρωση συγκεκριμένου ρύπου A_1 στο νερό με x τη θέση και t το χρόνο. Ζητούνται: (α:1) Πώς καλούνται ένας-ένας οι όροι στη διαφορική αυτή εξίσωση; (β:1) Να βρεθεί ο τύπος της ίδιας διαφορικής εξίσωσης. (γ:1) Να αναφερθούν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (δ:1) Απλά να ελεγχθεί αν ή όχι είναι διαχωρίσιμη, δηλαδή αν ή όχι είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. (ε:3) Με την αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών

$$\xi = x - Vt \quad \text{και} \quad \tau = t$$

να αναχθεί σε απλούστερη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. (στ:1) Ποιος όρος (με λέξεις, όχι με σύμβολα) δεν είναι πια παρών; Τώρα με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (να υπάρχει και το $i = \sqrt{-1}$ στον εκθέτη) να προσδιορισθούν (ζ:2) μια μερική λύση της και (η:2) η γενική λύση της. (θ:1) Να επαληθευθεί η γενική αυτή λύση. (ι:1) Από ποια ολοκληρωτική εξίσωση μπορεί να προσδιορισθεί η αυθαίρετη συνάρτηση στη γενική λύση με γνωστή την αρχική συνθήκη $c(x, 0) = c_0(x)$ για τη συγκέντρωση του ρύπου A_1 στο νερό του υδατορρέυματος; (ια:2) Τέλος ζητείται η λύση της πιο πάνω ολοκληρωτικής εξισώσεως με τις ήδη διαθέσιμες γνώσεις από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II. (Δεν είναι δα και τόσο δύσκολη η λύση!) ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.2 ■ Περιβαλλοντική Υδραυλική

Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική θεωρούμε τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με μεταγωγή και διάχυση (καλύτερος όρος μοριακή διάχυση). Υφίσταται επίσης και αποδόμηση του ρύπου πρώτης τάξεως. Προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc$$

με άγνωστη συνάρτηση τη συγκέντρωση $c = c(x, t)$ του ρύπου στο νερό του υδατορρέυματος. Οι ποσότητες V, D και k είναι γνωστές σταθερές. Ζητούνται: (α:1) Ποιος ακριβώς όρος αφορά: (i) στη μεταγωγή, (ii) στη διάχυση και (iii) την αποδόμηση του ρύπου; (β:3) Με κατάλληλη αλλαγή των ανεξάρτητων μεταβλητών (συγκεκριμένα με κίνηση του παρατηρητή μαζί με το νερό στο υδατόρρευμα) η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους σε απλούστερη εξίσωση τώρα χωρίς τον όρο της μεταγωγής του ρύπου. (γ:3) Στη συνέχεια κάνουμε κατάλληλη αλλαγή της άγνωστης συναρτήσεως (της εξαρτημένης μεταβλητής) από $\hat{c}(\xi, \tau) \equiv c(x, t)$ σε $c^*(\xi, \tau)$ συγκεκριμένα με

$$\hat{c}(\xi, \tau) = c^*(\xi, \tau)e^{-k\tau}.$$

Δηλαδή βγάζουμε έξω από την άγνωστη συνάρτηση τον παράγοντα $e^{-k\tau}$, ο οποίος έχει σχέση με την αποδόμηση του ρύπου, ζητείται κι η παραπέρα απλοποίηση της διαφορικής εξισώσεως του παρόντος φαινομένου με εξάλειψη και του όρου της αποδομήσεως του ρύπου. (δ:1) Τέλος να αναφερθούν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της τελικής μας και τόσο γνωστής διαφορικής εξισώσεως. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.3 ■ Περιβαλλοντική Υδραυλική

Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική εξετάζεται το πρόβλημα της μεταφοράς ρύπου σε άπειρο υδατόρρευμα τόσο με μεταγωγή: με ταχύτητα του νερού V , όσο και με διάχυση: με συντελεστή μοριακής διαχύσεως D . Άγνωστη είναι η συγκέντρωση $c(x, t)$ του ρύπου στο υδατόρρευμα. Ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους καθώς και η ονομασία της. (β:1) Οι ειδικές περιπτώσεις της: (i) μόνο για μεταγωγή και (ii) μόνο για διάχυση του ρύπου. (γ:1) Επανερχόμαστε στην αρχική διαφορική εξίσωση, όπου υπάρχει τόσο μεταγωγή όσο και διάχυση του ρύπου. Ποιος είναι ο τύπος της με τον υπολογισμό της σχετικής διακρίνουσας Δ ; (δ:1) Η αναγωγή αυτής (της αρχικής) διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους υποχρεωτικά με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και η επίλυση (ε:1) και της μιας (στ:1) και της άλλης (γενικές λύσεις χωρίς καμία συνθήκη). (ζ:1) Τελικά η έκφραση της γενικής λύσεως $c(x, t)$ υπό τη μορφή κατάλληλου ολοκληρωτικού τύπου βέβαια χωρίς συνοριακές συνθήκες. (η:1) Ποια είναι η άγνωστη συνάρτηση στον ολοκληρωτικό αυτό τύπο και ποια

φυσική συνάρτηση θα χρειαζότανε να ξέρουμε από μετρήσεις για το μαθηματικό προσδιορισμό της; ▲

▼ Άσκηση Ε4.4 ■ Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος

Στην Περιβαλλοντική Μηχανική κατά τη μονοδιάστατη μεταφορά ρύπου A στο έδαφος με μεταγωγή-διάχυση παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = -V \frac{\partial c}{\partial x} + D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \text{με } c = c(x, t)$$

τη συγκέντρωση του ρύπου και R , V και D κατάλληλες θετικές σταθερές. Ζητούνται: (α:4) Ο έλεγχος αν ή όχι η εξίσωση αυτή είναι διαχωρίσιμη, δηλαδή αν ή όχι είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί σ' αυτήν η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. ▲

▼ Άσκηση Ε4.5 ■ Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος

Συνεχίζουμε το πρώτο ερώτημα της προηγούμενης ασκήσεως. Θεωρούμε τώρα στο δεξιό μέλος και επιπλέον όρο $+r(x, t)$ ρυθμού παραγωγής (ή αποδομήσεως) του ρύπου A . Αυτόν τον όρο τον υποθέτουμε εδώ γνωστή συνάρτηση και μάλιστα με γνωστό ανάπτυγμα

$$r(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) X_n(x)$$

στις ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$ του προβλήματός μας. Αυτές περιλαμβάνουν και τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα του μονοδιάστατου πεδίου υδατικής ροής που έχουμε και υποτίθενται εδώ ότι είναι γνωστές συναρτήσεις ορθογώνιες μεταξύ τους. Ζητούνται: (α:2) Η μετατροπή της μη ομογενούς εξίσωσης που περιγράφηκε σε κατάλληλη σειρά με τη μέθοδο του αναπτύγματος στις γνωστές ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$. (β:3) Η απαλοιφή των χωρικών (ως προς τη θέση) παραγώγων στη σειρά αυτή. (γ:3) Από την τελευταία σειρά οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τον προσδιορισμό των άγνωστων χρονικών συναρτήσεων $q_n(t)$ της λύσεως $c(x, t)$ που ζητάμε να βρούμε. (Όλες οι σειρές εδώ θεωρούνται ότι συγκλίνουν.) ▲

▼ Άσκηση Ε4.6 ■ Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος

Σε πρόβλημα μονοδιάστατης μεταφοράς ρύπου στο έδαφος με $0 \leq x \leq L$ και $t \geq 0$ παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x}$$

με $c = c(x, t)$ τη συγκέντρωση του ρύπου και R , D και V γνωστές σταθερές. Η αρχική συνθήκη είναι


$$c(x, 0) = c_0(x) \quad \text{με } 0 \leq x \leq L$$


και με τη $c_0(x)$ γνωστή συνάρτηση. Ζητούνται: (α:1) Η εύρεση του τύπου κι όλοι οι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. Για τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$c(0, t) = C_0 \quad \text{και} \quad c(L, t) = C_L$$

(με τις δύο ποσότητες C_0 και C_L γνωστές σταθερές) η αναγωγή του σχετικού προβλήματος σε πρόβλημα με ομογενείς συνοριακές συνθήκες με (β:3) πλήρη εύρεση της

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

σχετικής βοηθητικής συναρτήσεως και (γ:2) επαλήθευσή της ως προς τις συνοριακές συνθήκες. (δ:2) Η επιβεβαίωση ότι πραγματικά ισχύει αμετάβλητη η παραπάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και για τη νέα άγνωστη συνάρτηση $c_t(x, t)$. (ε:2) Η εύρεση της τροποποιημένης τώρα αρχικής συνθήκης του προβλήματος (με ομογενείς συνοριακές συνθήκες) για τη νέα άγνωστη συνάρτηση $c_t(x, t)$. ▲

E4.1.2

E4.1.2. Ασκήσεις στη Ρευστομηχανική

Ασκήση

Ενότητα E4.1

▼ Ασκήση E4.7 ■ Διδιάστατη Ροή

Σε πρόβλημα μόνιμης (σταθερής), διδιάστατης (επίπεδης) και αστρόβιλης ροής ιδεατού ρευστού το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ επαληθεύει τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Σε περίπτωση κυκλικής συμμετρίας (ή συμμετρίας γύρω από τον άξονα Oz) έχουμε απλά $\Phi(x, y) = \varphi(r)$ με r την πολική ακτίνα και (προφανώς) με ανεξαρτησία από την πολική γωνία θ . Ζητούνται: (α:1) Η εξίσωση του Laplace σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) για το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$. (β:7) Με τη δέουσα προσοχή η λεπτομερής αναγωγή της (χωρίς έτοιμους τύπους!) σε συνήθη διαφορική εξίσωση (με αλλαγή μεταβλητών: δηλαδή από (x, y) σε r , το r αρκεί εδώ λόγω της συμμετρίας!) τώρα όμως με άγνωστη συνάρτηση τη $\varphi(r)$. ▲

Ασκήση

Ενότητα E4.1

▼ Ασκήση E4.8 ■ Διδιάστατη Ροή

Θεωρούμε τη διδιάστατη (επίπεδη) μόνιμη (σταθερή) αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού στο επίπεδο Oxy που παρεμποδίζεται από σταθερό στερεό κυκλικό κύλινδρο ακτίνας a με κέντρο την αρχή των αξόνων $O = (0, 0)$. Υπενθυμίζεται η λύση της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace $\nabla^2 u = 0$ σε πολικές συντεταγμένες (r, θ)

$$u(r, \theta) = (C_0 + D_0 \ln r)A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

με τα A_n, B_n, C_n και D_n σταθερές. Η ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο είναι V_0 (με $V_0 > 0$) και παράλληλη στον άξονα Oy (προς τα πάνω). Ζητούνται: (α:1) Να αποδειχθεί ότι η ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής) $\Psi(r, \theta)$ στο άπειρο (δηλαδή για $r \rightarrow \infty$) έχει τη μορφή

$$\Psi(r, \theta) \Big|_{r \rightarrow \infty} = -V_0 r \cos \theta.$$

(β:2) Να υπολογισθεί πλήρως η ροϊκή συνάρτηση $\Psi(r, \theta)$: σε όλο το πεδίο ροής. (γ:2) Με βάση τους τύπους

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad \text{και} \quad v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

να υπολογισθούν οι συνιστώσες v_r και v_θ της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού σε πολικές συντεταγμένες. (δ:1) Πόση είναι η απόλυτα μέγιστη ταχύτητα του ρευστού στην περιφέρεια $r = a$ της κυκλικής τομής του κυλίνδρου και πού παρουσιάζεται; (ε:2) Ποια είναι τα σημεία ανακοπής της ροής; ▲

Ασκήση

Ενότητα E4.1

▼ Ασκήση E4.9 ■ Διδιάστατη Ροή

Θεωρούμε τη μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού στις δύο διαστάσεις (x, y) . Με u και v τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y)

ζητούνται: (α:1) Απλά να αναφερθεί η εξίσωση της συνεχείας. (β:1) Να υπολογισθεί διανυσματικά ο στροβιλισμός της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού και με βάση αυτόν (γ:1) να αναφερθεί η βαθμωτή (μη διανυσματική) εξίσωση για το αστρόβιλο της ροής αυτής. Με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, y)$ να αποδειχθεί (δ:1) η αυτόματη πλήρωση της εξισώσεως του αστρόβιλου της ροής και (ε:1) ότι το δυναμικό αυτό $\Phi(x, y)$ πληροί τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Με τη χρήση της ροϊκής συναρτήσεως (ή συναρτήσεως ροής) $\Psi(x, y)$ να αποδειχθεί (στ:1) η αυτόματη πλήρωση της εξισώσεως της συνεχείας και (ζ:1) ότι η ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής) $\Psi(x, y)$ πληροί και αυτή τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace. (η:1) Λοιπόν τι πετυχαίνουμε με τη χρήση της συναρτήσεως $\Phi(x, y)$ ή της συναρτήσεως $\Psi(x, y)$ στο παρόν αρχικό σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους; (θ:1) Ποιοι χαρακτηρισμοί μπορούν να δοθούν γι' αυτό; (ι:1) Ποιες είναι οι ιδιότητες του ιδεατού ρευστού που υποθέσαμε εδώ; Τις έχει το νερό (το βασικό ρευστό του Πολιτικού Μηχανικού τόσο στην Υδραυλική όσο και στην Υδρομηχανική) προσεγγιστικά τουλάχιστον ή όχι ή έχει μόνο τη μία; ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.10 ■ Τριδιάστατη Ροή

Στη Ρευστομηχανική εξετάζουμε την τριδιάστατη μόνιμη αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού. Ζητούνται: (α:1) Πότε ένα ρευστό καλείται ιδεατό; (β:1) Στην πιο πάνω ροή με γνωστό το δυναμικό ταχύτητας $\Phi = \Phi(x, y, z)$ από ποιον τύπο της Διανυσματικής Αναλύσεως προσδιορίζεται η ταχύτητα $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z)$ του ρευστού; (γ:1) Από τον τύπο αυτό πώς υπολογίζονται αναλυτικότερα οι τρεις συνιστώσες

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z) \quad \text{και} \quad w = w(x, y, z)$$

της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού; (δ:1) Να ελεγχθεί ότι με χρήση του δυναμικού ταχύτητας Φ πράγματι προκύπτει αστρόβιλη ροή: ο στροβιλισμός είναι ίσος με μηδέν. (ε:1) Ποια είναι η εξίσωση της συνεχείας στο παρόν πρόβλημα και ποια μορφή παίρνει αυτή, εάν χρησιμοποιηθεί το δυναμικό ταχύτητας Φ ; Στην τελευταία εξίσωση να εφαρμοσθεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών

$$\Phi(x, y, z) = X(x)F(y, z)$$

με αναγωγή της σε δύο διαφορικές εξισώσεις: (στ:1) τη μία συνήθη ως προς $X(x)$ (χωρίς τις μεταβλητές y και z) και (ζ:2) την άλλη με μερικές παραγώγους ως προς $F(y, z)$ (χωρίς τη μεταβλητή x). ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.11 ■ Τριδιάστατη Ροή

Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Για τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ζητούνται

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - p^2 F = 0 \quad \text{με} \quad F = F(y, z)$$

και το p γνωστή σταθερά: (α:1) Η εύρεση του τύπου της. (β:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (γ:1) Απόπειρα επιλύσεώς της με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξισώσεως με βάση συνάρτηση της μορφής $\varphi(y + \mu z)$ και τελικά (δ:1) Η εξήγηση αν η μέθοδος αυτή είναι εφαρμόσιμη ή όχι. (ε:2) Η εύρεση μιας μερικής λύσεώς της $F_\lambda(y, z)$, τώρα όμως με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (αλλά χωρίς κανένα $i = \sqrt{-1}$ στον εκθέτη!) και στη συνέχεια (στ:2) της γενικής λύσεώς της $F(y, z)$. ▲

 **Άσκηση**

Ενότητα Ε4.1

▼ **Άσκηση Ε4.12 ■ Τριδιάστατη Ροή**

Στη Ρευστομηχανική θεωρούμε τη μόνιμη (σταθερή) τριδιάστατη αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού. Δηλώνοντας με u, v και w τις τρεις συνιστώσες της διανυσματικής ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού (κατά τους άξονες Ox, Oy και Oz αντίστοιχα), ζητούνται: (α:1) Ο υπολογισμός του στροβιλισμού (σχεδόν ισοδύναμα της περιστροφής) της ταχύτητας \mathbf{V} μέσω των συνιστωσών της u, v και w . (β:1) Για αστρόβιλη ροή, που την υποθέτουμε εδώ, οι σχετικές τρεις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. (γ:2) Με χρήση του δυναμικού ταχύτητας $\Phi = \Phi(x, y, z)$ η απόδειξη πληρώσεως και των τριών αυτών διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή η εξασφάλιση του ότι η ροή είναι αστρόβιλη (εξασφάλιση του αστρόβιλου της ροής). (δ:1) Απομένει η εξίσωση της συνεχείας. Ποια είναι αυτή και ποια μορφή παίρνει τώρα με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας Φ στο πρόβλημα που εξετάζουμε; (ε:1) Να δοθούν επτά χαρακτηρισμοί για την τελική εξίσωση αυτή. (στ:1) Τι πετύχαμε τελικά από μαθηματικής απόψεως στο πρόβλημά μας με την εισαγωγή του δυναμικού ταχύτητας Φ και με ποιο κόστος; (ζ:1) Θα ήταν χρήσιμο το δυναμικό αυτό Φ και σε μη αστρόβιλη ροή; ▲

 **Άσκηση**

Ενότητα Ε4.1

▼ **Άσκηση Ε4.13 ■ Τριδιάστατη Ροή**

Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση με τις ίδιες υποθέσεις για τη ροή. Εδώ θεωρούμε το δυναμικό ταχύτητας

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{με} \quad x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$$

ή

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\rho} \quad \text{με} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$$

σε Καρτεσιανές συντεταγμένες x, y και z . Ζητούνται: (α:2) Να υπολογισθούν και οι τρεις συνιστώσες u, v και w της ταχύτητας \mathbf{V} του ιδεατού ρευστού. (β:3) Για τις συνιστώσες αυτές (εδώ, όχι γενικά) να επαληθευθούν και οι τρεις εξισώσεις που δηλώνουν το αστρόβιλο της ροής. (γ:3) Να επαληθευθεί άμεσα ότι πραγματικά το πιο πάνω δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y, z)$ είναι, όπως πρέπει, αρμονική συνάρτηση. ▲

 **Άσκηση**

Ενότητα Ε4.1

▼ **Άσκηση Ε4.14 ■ Τριδιάστατη Ροή**

Θεωρούμε τη μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού στις τρεις διαστάσεις (x, y, z) . Με u, v, w τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) ζητούνται: (α:1) Να αναφερθεί η εξίσωση της συνεχείας. (β:1) Να υπολογισθεί ο στροβιλισμός της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού και με βάση αυτόν (γ:1) να αναφερθούν οι τρεις βαθμωτές (μη διανυσματικές) εξισώσεις για το αστρόβιλο της ροής αυτής. Με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, y, z)$ να αποδειχθούν (δ:1) η αυτόματη πλήρωση των εξισώσεων του αστρόβιλου της ροής και (ε:1) ότι το δυναμικό αυτό $\Phi(x, y, z)$ πληροί την τριδιάστατη εξίσωση του Laplace. (στ:2) Για την εξίσωση αυτή να αποδειχθεί ότι είναι διαχωρίσιμη εδώ με

$$\Phi(x, y, z) = F(x, y)Z(z)$$

και με σταθερά διαχωρισμού λ_1 . (ζ:2) Στη συνέχεια με

$$F(x, y) = X(x)Y(y)$$

να αποδειχθεί ότι είναι εφικτός και δεύτερος χωρισμός των μεταβλητών (τώρα των x και y) με σταθερά διαχωρισμού λ_2 . (η:1) Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, να γραφούν και οι τρεις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις τρεις άγνωστες συναρτήσεις $X(x)$, $Y(y)$ και $Z(z)$ χωριστά. ▲

E4.1.3

E4.1.3. Ασκήσεις στην Εδαφομηχανική

 **Άσκηση**
Ενότητα E4.1

▼ Άσκηση E4.15 ■ Διήθηση

Στην Εδαφομηχανική θεωρούμε τη διδιάστατη διήθηση του νερού μέσα σε ανισότροπο (όχι ισότροπο) έδαφος. Για το υδραυλικό φορτίο (ή διαφορά πιεζομετρικής στάθμης) $h = h(x, z)$ προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \text{με} \quad h = h(x, z), \quad k_x > 0, \quad k_z > 0,$$

x τη θέση στο οριζόντιο επίπεδο και z το βάθος μέσα στο έδαφος. Τα σύμβολα k_x και k_z δηλώνουν τους συντελεστές διαπερατότητας του εδάφους κατά τις διευθύνσεις x και z αντίστοιχα, που είναι θετικοί αριθμοί: $k_x, k_z > 0$. Ζητούνται: (α:1) Η εύρεση του τύπου της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (β:2) Η γενική λύση της με τη χρήση δοκιμαστικής συναρτήσεως της μορφής $\varphi(x + \mu z)$ και της σχετικής χαρακτηριστικής εξίσωσης. Πότε ακριβώς η λύση αυτή είναι πραγματική; (γ:1) Η επαλήθευση της γενικής αυτής λύσεως. (δ:2) Με την απλή αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής

$$\xi = x \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}$$

ποια μορφή παίρνει η πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους; (ε:1) Τι εξίσωση προέκυψε και τι εξίσωση ισχύει για ισότροπο έδαφος, όπου $k_x = k_z = k$ (με $k > 0$); (στ:1) Τι πετύχαμε επομένως με την πιο πάνω αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής (από x σε ξ) ιδίως από μαθηματικής απόψεως; ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα E4.1

▼ Άσκηση E4.16 ■ Διήθηση

Στο ενδιαφέρον φαινόμενο της διηθήσεως στην Εδαφομηχανική μέσα σε ένα ανισότροπο (ως προς τη διήθηση) έδαφος προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \text{με} \quad h = h(x, y), \quad k_x > 0, \quad k_y > 0$$

με x τη θέση στον οριζόντιο άξονα και y στον κατακόρυφο. Άγνωστη συνάρτηση είναι το υδραυλικό φορτίο $h(x, y)$. Οι σταθερές k_x και k_y είναι οι συντελεστές διαπερατότητας του εδάφους. Ζητούνται: (α:2) Με την αλλαγή μεταβλητής

$$\xi = x \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}$$

η απλοποίηση της πιο πάνω εξίσωσης της διηθήσεως. (β:2) Με τις αλλαγές μεταβλητής

$$z = \xi + iy \quad \text{και} \quad \bar{z} = \xi - iy \quad \text{με} \quad i = \sqrt{-1}$$

τη φανταστική μονάδα η παραπέρα απλοποίηση της εξισώσεως του ερωτήματος (α). (γ:1) Η πιο γενική δυνατή λύση της εξισώσεως του ερωτήματος (β) και μετά (δ:1) η επιστροφή στις αρχικές μεταβλητές x και y . (ε:2) Η άμεση εύρεση της ίδιας γενικής λύσεως κατευθείαν από την αρχική εξίσωση της διηθήσεως και ο έλεγχος συμφωνίας των αποτελεσμάτων. ▲

✎ Άσκηση

Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.17 ■ Διήθηση

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

με άγνωστη συνάρτηση την $h = h(x, z)$ και με τα k_x και k_z γνωστές θετικές σταθερές. Ζητούνται: (α:1) Υποχρεωτικά με τη χρήση του συμβόλου $\tau = \sqrt{k_z/k_x}$ και της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών απευθείας στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (όχι με μετασχηματισμό της στην εξίσωση του Laplace!) η αναγωγή της σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με άγνωστες συναρτήσεις τις $X(x)$ και $Z(z)$. (β:2) Τώρα σε μια ορθογωνική περιοχή $D = [0, a] \times [0, b]$ και με συνοριακές συνθήκες στην περίμετρό της C

$$h(x, 0) = 0, \quad h(x, b) = 0, \quad h(0, z) = 0, \quad h(a, z) = f(z)$$

και με τη συνάρτηση $f(z)$ γνωστή ποιες είναι οι ιδιοσυναρτήσεις $Z_n(z)$ στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών; (γ:2) Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$ με πλήρωση και της τρίτης συνοριακής συνθήκης; (δ:2) Ποια είναι η πλήρης λύση του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών λαμβάνοντας τώρα υπόψη και την τέταρτη συνοριακή συνθήκη $h(a, z) = f(z)$; (ε:1) Ανεξάρτητα από το πιο πάνω κάπως τεχνητό πρόβλημα συνοριακών τιμών σε ποιο ακριβώς πραγματικά ενδιαφέρον πρόβλημα της Εδαφομηχανικής παρουσιάζεται η παραπάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους; Πώς καλούνται οι δύο θετικές σταθερές k_x και k_z ; Σε ποια περίπτωση ισχύει η ισότητα $k_x = k_z$; Πώς καλείται η άγνωστη συνάρτηση $h(x, z)$; ▲

✎ Άσκηση

Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.18 ■ Στερεοποίηση

Στη θεωρία της μονοδιάστατης στερεοποίησης (consolidation) του Karl Terzaghi (1923)² προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{με} \quad u = u(z, t), \quad c_v > 0 \quad \text{γνωστή σταθερά,}$$

z το βάθος μέσα στο έδαφος και t το χρόνο ($t \geq 0$). Ζητούνται: (α:1) Σε ποια άλλα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζεται ουσιαστικά η ίδια διαφορική εξίσωση; (β:1) Πώς καλείται εδώ ο συντελεστής c_v και ποιες είναι οι μονάδες του με εύρεσή τους από την ίδια την πιο πάνω διαφορική εξίσωση; Θεωρούμε τώρα στρώμα (ή στρώση, layer) εδάφους όπου λαμβάνει χώρα το φαινόμενο της στερεοποίησης με $0 \leq z \leq 2d$, με μηδενικές συνοριακές συνθήκες: $u(0, t) = u(2d, t) = 0$ και με γνωστή αρχική συνθήκη $u(z, 0) = u_0(z)$. Στο πρόβλημα αυτό ζητούνται: (γ:1) Να εφαρμοσθεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση. (δ:1) Στη συνέχεια να προσδιορισθούν οι ιδιοσυναρτήσεις $Z_n(z)$ (χωρίς αυθαίρετες σταθερές) και (ε:1) οι αντίστοιχες συναρτήσεις $T_n(t)$ (αυτές με αυθαίρετες

²Βλέπε: Terzaghi, K. (1943), *Theoretical Soil Mechanics*. John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Ενότητα 99, σ. 271.

σταθερές C_n). (στ:1) Ποια είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης μαζί με τις συνοριακές συνθήκες, αλλά χωρίς την αρχική συνθήκη, και (ζ:1) με την αρχική συνθήκη να έχει ληφθεί επίσης υπόψη και οι συντελεστές να έχουν προσδιορισθεί; (η:1) Σε ποιο ακριβώς (διαφορετικό) πρόβλημα η ίδια ουσιαστικά διαφορική εξίσωση καταλήγει σε συνημιτονική (όχι ημιτονική) σειρά Fourier και γιατί; ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.19 ■ Στερεοποίηση

Στο ενδιαφέρον φαινόμενο της στερεοποίησης στην Εδαφομηχανική παρουσιάζεται στη μονοδιάστατη περίπτωση σύμφωνα με τη θεωρία του Karl Terzaghi (1923), που έχει αποκληθεί και «πατέρας» της Εδαφομηχανικής, η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{με} \quad u = u(z, t),$$

z το βάθος και t το χρόνο. Ζητούνται: (α:1) Σε ποια δύο διαφορετικά προβλήματα παρουσιάζεται ουσιαστικά η ίδια διαφορική εξίσωση; (β:1) Πώς καλούνται η άγνωστη συνάρτηση $u = u(z, t)$ και η σταθερά c_v ; (γ:1) Από την ίδια τη διαφορική εξίσωση να προσδιορισθεί κατάλληλη μονάδα της σταθεράς c_v . (δ:1) Να βρεθεί ο τύπος της διαφορικής εξίσωσης. (ε:1) Απλά να αναφερθούν οι χαρακτηρισμοί της. (στ:1) Να επαληθευθεί στην ίδια εξίσωση η αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) δύο λύσεων. (ζ:1) Να εξηγηθεί εάν ή όχι μπορεί να γίνει δεκτή λύση της μορφής

$$u(z, t) = \varphi(z + \mu t).$$

(η:1) Να βρεθεί μερική μιγαδική λύση της με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (με μιγαδικές σταθερές $i\lambda$ και $i\mu$). (θ:1) Να επαληθευθεί η λύση αυτή. (ι:1) Να γενικευθεί η ίδια λύση σε ολοκληρωτικό τύπο που να αποτελεί και αυτός λύση της διαφορικής εξίσωσης της στερεοποίησης. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.20 ■ Στερεοποίηση

Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση για τη στερεοποίηση εδάφους. Ζητούνται επίσης: Σ' ένα στρώμα (ή μια στρώση) εδάφους πάχους h ισχύουν οι δύο συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = u(h, t) = 0 \quad \text{και} \quad u(z, 0) = u_i \quad \text{με} \quad t \geq 0, \quad 0 \leq z \leq h$$

και την ποσότητα u_i γνωστή σταθερά. Ζητούνται: Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών ο προσδιορισμός (α:2) των χωρικών ιδιοσυναρτήσεων $Z_n(z)$, (β:2) των χρονικών ιδιοσυναρτήσεων $T_n(t)$ και (γ:2) της ίδιας της λύσεως $u(z, t)$ σε μορφή σειράς χωρίς όμως την πλήρωση της αρχικής συνθήκης $u(z, 0) = u_i$. (δ:2) Ο προσδιορισμός όλων των σταθερών της σειράς αυτής στην απλούστερη δυνατή μορφή τους (με αναλυτικό υπολογισμό των σχετικών ολοκληρωμάτων), έτσι ώστε να πληρούνται και η αρχική συνθήκη, με κατάλληλη διάκριση περιπτώσεων, εφόσον απαιτείται κάτι τέτοιο. (ε:2) Υπάρχουν συντελεστές της σειράς που να μηδενίζονται και, εάν ναι, ποιοι είναι; ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.21 ■ Στερεοποίηση

Θεωρούμε ξανά το ενδιαφέρον φαινόμενο της στερεοποίησης (consolidation) του

εδάφους υποθέτοντας τη ροή του νερού (του ύδατος) μόνο ακτινικά. Γίνεται επίσης δεκτή η θεωρία του Karl Terzaghi (1923). Στο παρόν πρόβλημα ισχύει η εξής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της στερεοποίησης:³

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Άγνωστη συνάρτηση $u = u(r, t)$ είναι η πίεση του ύδατος πόρων και c_v ο συντελεστής στερεοποίησης (με $c_v > 0$). Ζητούνται: (α:1) Η ονομασία της και έξι χαρακτηρισμοί της διαφορικής εξίσωσης. (β:2) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της εξίσωσης αυτής σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. (γ:2) Η επίλυση της χρονικής διαφορικής εξίσωσης: γενική λύση. (δ:3) Όμοια και της χωρικής διαφορικής εξίσωσης: πάλι γενική λύση. ▲

Ε4.1.4

Ε4.1.4. Ασκήσεις στη Μηχανική των Υλικών και στη Δυναμική των Κατασκευών

Ασκήση

Ενότητα Ε4.1

▼ Ασκήση Ε4.22 ■ Ελαστικότητα: Στρέψη

Για τη διδιάστατη εξίσωση του Poisson ζητούνται: (α:1) Ποια είναι η γενική μορφή της καθώς και η ειδική μορφή της στο πρόβλημα της στρέψεως συνήθους ράβδου μέτρου διατμήσεως G και γωνίας στρέψεως (ή γωνία στροφής) ανά μονάδα μήκους θ ; (β:1) Ο τύπος της με υπολογισμό της σχετικής διακρίνουσας Δ . (γ:1) Οι πλήρεις χαρακτηρισμοί της. (δ:2) Σε κατάλληλη τριγωνική περιοχή για ισόπλευρο τρίγωνο ύψους a δίνεται η συνάρτηση

$$\varphi(x, y) = -G\theta \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2a} (x^3 - 3xy^2) - \frac{2}{27} a^2 \right].$$

Να ελεγχθεί ότι πρόκειται πραγματικά για μια τασική συνάρτηση του Prandtl σε πρόβλημα στρέψεως ράβδου ισόπλευρης τριγωνικής διατομής μόνο ως προς την επαλήθευση της σχετικής εξίσωσης του Poisson (όχι και της συνοριακής συνθήκης!). (ε:2) Να υπολογισθούν οι δύο διατμητικές τάσεις

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{και} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

οι οποίες είναι και οι μόνες μη μηδενικές τάσεις στο παρόν πρόβλημα στρέψεως. (στ:1) Να επαληθευθεί η εξίσωση ισοροπίας

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0.$$

Αυτή είναι και η μόνη εξίσωση ισοροπίας που δεν πληρούται εκ ταυτότητας στο ίδιο πρόβλημα στρέψεως. ▲

Ασκήση

Ενότητα Ε4.1

▼ Ασκήση Ε4.23 ■ Ορθογωνικές Πλάκες, Μέθοδος του Navier

Θεωρούμε μια συνήθη ορθογωνική πλάκα $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ δυσκαμψίας D στο επίπεδο Oxy με απλή στήριξη (έδραση) σε ολόκληρο το σύνορό της $C \equiv \partial\Pi$. Για την πλάκα αυτή ζητούνται: (α:1) Ο τύπος υπολογισμού της δυσκαμψίας της D κι η

³Karl Terzaghi (1943), *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, London, Εδύφιο 106, σ. 291, εξίσωση [4].

σχετική συνήθης μονάδα. (β:2) Για τη διααρμονική εξίσωση στο επίπεδο Oxy να ελεγχθεί αν ή όχι είναι *διαχωρίσιμη*, δηλαδή αν ή όχι μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο του *χωρισμού των μεταβλητών*. (γ:4) Στην πιο πάνω πλάκα Π θεωρούμε ότι εφαρμόζεται σταθερή κάθετη καταναμημένη φόρτιση p_0 . Για υπολογιστική διευκόλυνσή μας υποθέτουμε εδώ τη σχετική διπλή ημιτονική σειρά Fourier γνωστή, συγκεκριμένα

$$p_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{με συντελεστές} \quad a_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn}$$

με $m, n = 1, 3, 5, \dots$. Ζητείται ο έλεγχος εάν η συνάρτηση

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad \text{πάλι με} \quad m, n = 1, 3, 5 \dots$$

αποτελεί ή δεν αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους για το βέλος κάμψεως (την κάθετη μετατόπιση, τη βύθιση) της πλάκας. (δ:1) Τέλος να ελεγχθεί εάν η ίδια συνάρτηση $w(x, y)$ επαληθεύει τη μία (την *ευκολότερη!*) από τις δύο συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ισχύουν σ' ολόκληρο το σύνορο C της παρούσας ορθογωνικής πλάκας Π (όχι μόνο στις κορυφές της!). Πρόκειται για τη μέθοδο του Navier επιλύσεως προβλημάτων ορθογωνικών πλακών. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

▼ **Άσκηση Ε4.24 ■ Ορθογωνικές Πλάκες: Μέθοδος του Lévy**

Θεωρούμε συνήθη ορθογωνική πλάκα $P = [0, a] \times [0, b]$ στο επίπεδο Oxy δυσκαμψίας D , με απλή στήριξη στο σύνορό της και υπό ομοιόμορφη (σταθερή) καταναμημένη κάθετη φόρτιση p_0 . Ζητούνται: (α:3) Να βρεθεί μια μερική λύση $w_p(x)$ (με μεταβλητή μόνο το x) της σχετικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους για το βέλος κάμψεως (τη βύθιση) της πλάκας $w(x, y)$ που να πληροί όμως και τις συνοριακές συνθήκες (πάλι ως προς x μόνο, όχι κι ως προς y). Για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση (χωρίς δεξιό μέλος) να υποτεθεί τώρα λύση της μορφής

$$w_h(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} .$$

Με βάση τη λύση αυτή $w_h(x, y)$ (β:1) να επαληθευθούν όλες οι συνοριακές συνθήκες ως προς x : για $x = 0$ και $x = a$. Τέλος να προσδιορισθούν (γ:2) οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις άγνωστες συναρτήσεις $Y_n(y)$ κι οι γενικές λύσεις τους (δ:1) σε εκθετική μορφή και (ε:1) σε υπερβολική μορφή. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

▼ **Άσκηση Ε4.25 ■ Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι**

Θεωρούμε εδώ το πρόβλημα των αξονικών (ή διαμήκων) εξαναγκασμένων και χωρίς απόσβεση ταλαντώσεων συνήθους ράβδου γραμμικής πυκνότητας ρA , δυστένειας EA και μήκους L με $0 \leq x \leq L$ για τη θέση x και $t \geq 0$ για το χρόνο t . Η ράβδος θεωρείται ότι είναι στερεωμένη (εδώ πακτωμένη) και στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$. Στο πρόβλημα αυτό άγνωστη συνάρτηση είναι η αξονική (ή διαμήκης) μετατόπιση $u = u(x, t)$ των σημείων της ράβδου. Οι αρχικές αξονικές μετατοπίσεις των σημείων της ράβδου είναι $u(x, 0) = g(x)$ με $0 \leq x \leq L$ και με τη συνάρτηση $g(x)$ γνωστή συνάρτηση. Οι αντίστοιχες αρχικές ταχύτητες θεωρούνται μηδενικές,

δηλαδή $(\partial u / \partial t)(x, 0) = 0$. Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους έχει την εξής μορφή:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

με $f(x, t)$ την κατανεμημένη αξονική φόρτιση της ράβδου, η οποία θεωρείται γνωστή. Ζητούνται: (α:1) Με τη χρήση διακρίνουσας Δ ο προσδιορισμός του τύπου της εξισώσεως αυτής και επτά χαρακτηρισμοί της. (β:5) Με την κατευθείαν χρήση των σχετικών ιδιομορφών ταλαντώσεως

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L},$$

που θεωρούνται γνωστές, η αναγωγή του όλου προβλήματος σε άπειρες ασύζευκτες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με άγνωστες συναρτήσεις τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$. (γ:2) Ο λεπτομερής καθορισμός των αρχικών συνθηκών $q_n(0)$ και $\dot{q}_n(0)$ γι' αυτές τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. (Εντούτοις δε ζητείται η επίλυσή τους!) ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.26 ■ Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \quad u = u(x, t),$$

x τη θέση και t το χρόνο. Ζητούνται: (α:1) Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα της Δυναμικής των Κατασκευών παρουσιάζεται; (β:1) Τι παριστάνουν (πώς καλούνται) τα σταθερά γινόμενα EA και ρA ; (γ:1) Να βρεθεί ο τύπος της διαφορικής αυτής εξισώσεως με μερικές παραγώγους. (δ:1) Και τώρα απλά να αναφερθούν κι οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (ε:4) Με συνοριακές συνθήκες τις

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \varepsilon_0 \quad \text{και} \quad u(L, t) = u_L$$

με τις ποσότητες ε_0 και u_L γνωστές σταθερές και με διατήρηση των συμβόλων EA και ρA να αναχθεί το σχετικό πρόβλημα σε πρόβλημα ομογενών συνοριακών συνθηκών για μια νέα άγνωστη συνάρτηση: τη $u_t(x, t)$. (στ:2) Πώς μετασχηματίζονται (αν μετασχηματίζονται) οι δύο αρχικές συνθήκες

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

για τη νέα άγνωστη συνάρτηση $u_t(x, t)$ με τις δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ γνωστές συναρτήσεις; ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.27 ■ Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί

Μελετάμε ένα συνήθη πρόβολο μήκους L , γραμμικής πυκνότητας ρA και δυσκαμψίας EI σε ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα σε ελεύθερες ταλαντώσεις. Αυτός ο πρόβολος είναι στηριγμένος στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και ελεύθερος στο δεξιό $x = L$. Εδώ ζητούνται: (α:1) Η εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών και η εύρεση των δύο σχετικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων με τη χρήση (όπου είναι δυνατόν) και της βοηθητικής σταθεράς β με

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}.$$

(Το σύμβολο ω δηλώνει την κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων.) (β:1) Να εξηγηθεί λεπτομερώς η επιλογή της σταθεράς διαχωρισμού λ σαν θετικής ή αρνητικής με δύο εντελώς διαφορετικούς τρόπους. (γ:1) Υποχρεωτικά με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως να βρεθεί η γενική λύση της χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης τελικά με χρήση μόνο τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων. (δ:2) Χωρίς τη χρήση ορίζουσας τετάρτης τάξεως (μόνο δευτέρας τάξεως ή και καθόλου ορίζουσας) να βρεθεί η *χαρακτηριστική εξίσωση* ή *εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων* ω_n , εδώ όμως ως προς τη σταθερά β , δηλαδή για τις ιδιοτιμές β_n και όχι τις ιδιοσυχνότητες ω_n . (ε:1) Από αυτήν να υπολογισθούν προσεγγιστικά οι ιδιοτιμές β_n (για $n \geq 5$, περίπου 5) και στη συνέχεια (στ:1) οι αντίστοιχες ιδιοτιμές ω_n . (ζ:1) Να βρεθεί ποια είναι η ορίζουσα τετάρτης τάξεως (χωρίς όμως τον κάπως κουραστικό υπολογισμό της) για τον προσδιορισμό των ίδιων ιδιοτιμών β_n . ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

▼ **Άσκηση Ε4.28** ■ **Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί**

Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Θεωρούμε τον ίδιο πρόβολο, αλλά τώρα με «αναχαίτηση» (ας μας επιτραπεί τούτη η λέξη!) της κάμψεώς του (του βέλους κάμψεώς του) στο δεξιό άκρο του $x = L$ (μόνο εκεί!) μέσω συνήθους ελατηρίου σταθεράς k_R . Από τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες η μόνη που αλλάζει είναι η συνθήκη

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L, t) = 0.$$

Αυτή παίρνει τώρα τη δυσκολότερη μορφή

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L, t) = k_R v(L, t).$$

Ζητούνται: (α:1) Η λεπτομερής τεχνική εξήγηση της πιο πάνω τροποποιημένης συνοριακής συνθήκης. (β:4) Ο λεπτομερής υπολογιστικός έλεγχος εάν ή όχι συνεχίζει να ισχύει η ορθογωνιότητα (ή ορθογωνικότητα) των ιδιομορφών ταλαντώσεως. (γ:3) Ο έλεγχος της ισχύος του πιθανού τύπου

$$\omega_n^2 = \frac{EI \int_0^L X_n''^2(x) dx + k_R X_n^2(L)}{\rho A \int_0^L X_n^2(x) dx}$$

για το καλούμενο *πηλίκο του Rayleigh*. Αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη Δυναμική των Κατασκευών για τον προσεγγιστικό υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων ω_n με τη χρήση του. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

▼ **Άσκηση Ε4.29** ■ **Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί**

Θεωρούμε τις καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους αμφίρειστης δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$), δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA υπό την επίδραση και σταθερού αξονικού φορτίου N . Η κάθετη φόρτιση της δοκού είναι $p(x, t)$. Η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους για το βέλος κάμψεως $v = v(x, t)$ της δοκού έχει τη μορφή

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t).$$

Ζητούνται πρώτα για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση: με $p(x, t) \equiv 0$: (α:1) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών να αναχθεί σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. (β:1) Με χρήση της κυκλικής συχνότητας ω να βρεθεί η γενική λύση $T(t)$ της χρονικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης. (γ:1) Να επαληθευθεί ότι οι ιδιομορφές $X_n(x)$ των καμπτικών ταλαντώσεων έχουν την απλή μορφή

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots$$

(δ:1) Να υπολογισθούν οι ιδιοσυχνότητες ω_n των ταλαντώσεων της δοκού. Προχωράμε τώρα στην αρχική μη ομογενή εξίσωση: με $p(x, t) \neq 0$. Ζητείται: (ε:4) Με τη μέθοδο του αναπτύγματος στις ιδιομορφές $X_n(x)$ και τη χρήση και κατάλληλων γενικευμένων φορτίσεων $P_n(t)$ να προσδιορισθούν οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$ της δοκού (χωρίς επίλυσή τους). ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.30 ■ Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί

Θεωρούμε δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) με μεταβλητές κατά μήκος της τη δυσκαμψία $EI(x)$ και τη γραμμική πυκνότητα $\rho A(x)$. Το άκρο $x = 0$ (όπως και το άλλο άκρο $x = L$) της δοκού μπορεί να είναι πακτωμένο, αρθρωμένο ή ελεύθερο. Σε καμπτικές ιδιοταλαντώσεις της δοκού προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

για το βέλος κάμψεως $v = v(x, t)$. Η ροπή κάμψεως (ή καμπτική ροπή) $M(x, t)$ και η τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) $Q(x, t)$ δίνονται από τους τύπους

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}$$

και

$$Q(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right].$$

αντίστοιχα. Ζητούνται: (α:1) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η συνήθης διαφορική εξίσωση για τις ιδιομορφές $X_n(x)$ (χωρίς παραγωγή του γινομένου). (β:7) Οι αποδείξεις των τύπων ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας)

$$\int_0^L \rho A(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0,$$

$$\int_0^L EI(x) X_m''(x) X_n''(x) dx = 0$$

με $m, n = 1, 2, \dots$ και $m \neq n$. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.31 ■ Δυναμική Κατασκευών: Δοκοί σε Ελαστική Βάση


Θεωρούμε τις ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις (και ιδιοταλαντώσεις) δοκού σε ελαστική βάση, ελαστικού υποστρώματος (ίσως απλά πεδιλοδοκού) μήκους L , γραμμικής πυκνότητας ρA και σταθερής δυσκαμψίας EI . Προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + kv + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1.1)$$

με $v = v(x, t)$ το βέλος κάμψεως της δοκού (που σχηματίζει την ελαστική γραμμή της) και k γνωστή σταθερά του συστήματος εδάφους-δοκού επί ελαστικής βάσεως.

Ζητούνται: (α:2) Οι συνήθεις μονάδες των επτά μεγεθών: E , I , EI , ρ , A , ρA και k . (β:2) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (με άγνωστες συναρτήσεις τις $X(x)$: χωρική συνάρτηση, και $T(t)$: χρονική συνάρτηση), η δεύτερη με μία μόνο παράμετρο: τη $-\omega^2$ (καμία άλλη!). (γ:2) Να βρεθεί η γενική λύση $T(t)$ της χρονικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης. (δ:2) Ανάλογα και η γενική λύση $X(x)$ της χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης με τη χρήση και του συμβόλου

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2 - k}{EI}}.$$


 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.32 ■ Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί Timoshenko

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (ή μερική διαφορική εξίσωση)

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - F \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + H \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0 \quad \text{με} \quad v = v(x, t)$$

και με τα EI , ρA , F και H θετικές σταθερές. Η εξίσωση αυτή απαντάται στο πρόβλημα καμπτικών ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων καμπτικών ταλαντώσεων δοκού σύμφωνα με τη θεωρία του Timoshenko. Αυτή είναι σίγουρα πιο ακριβής από τη θεωρία των Euler-Bernoulli, επειδή λαμβάνει υπόψη την παραμόρφωση από διάτμηση και την αδράνεια περιστροφής. Στην πιο πάνω εξίσωση $v = v(x, t)$ είναι το βέλος κάμψης της δοκού (με x τη θέση και t το χρόνο) και όλοι οι συντελεστές είναι γνωστές σταθερές: EI η δυσκαμψία, ρA η γραμμική πυκνότητα και F και H δύο πιο πολύπλοκες θετικές σταθερές. Εδώ ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (β:7) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier ως προς το χρόνο t η λεπτομερής αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση (χωρίς επίλυσή της!). Τέλος ζητείται (γ:8) η ίδια εργασία με το ερώτημα (β), αλλά τώρα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace με γνωστές τις αρχικές συνθήκες (χωρίς επίλυσή της!). ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.33 ■ Δυναμική των Κατασκευών: Πλάκες

Στο επίπεδο πλάκας δίνεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \text{με} \quad w = w(x, y, t)$$

το δυναμικό βέλος κάμψης της πλάκας και τις σταθερές να έχουν ορισθεί στην προηγούμενη άσκηση. Η πλάκα φορτίζεται μόνο με ροπές στο σύνορό της. Ζητούνται: (α:2) Με το χωρισμό των μεταβλητών

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cos(\omega t - a)$$

(τριγωνομετρική αντικατάσταση) να προσδιορισθεί η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη χωρική συνάρτηση $W(x, y)$. (β:2) Να διερευνηθεί σε όσο βαθμό χρειάζεται, εάν ή όχι η δεύτερη διαφορική αυτή εξίσωση (ως προς $W(x, y)$) είναι διαχωρίσιμη. (γ:2) Για την ίδια εξίσωση (ως προς $W(x, y)$) να διερευνηθεί επίσης εάν ή όχι είναι δυνατή η χρήση της μεθόδου επιλύσεως που βασίζεται σε συνάρτηση-λύση της μορφής

$$W_0(x, y) = \varphi(x + \mu y)$$

και στη σχετική χαρακτηριστική εξίσωση. (δ:2) Για την ίδια εξίσωση (επαναλαμβάνεται ως προς $W(x, y)$) να διευρευνηθεί τέλος εάν ή όχι είναι δυνατή η χρήση της μεθόδου της εκθετικής αντικαταστάσεως. Εάν είναι, να προσδιορισθεί και μία μερική λύση της. ▲

✎ Άσκηση

Ενότητα Ε4.1

▼ Άσκηση Ε4.34 ■ Δυναμική των Κατασκευών: Πλάκες

Θεωρούμε τις ιδιοταλαντώσεις συνήθους κυκλικής πλάκας δυσκαμψίας D και επιφανειακής πυκνότητας ρh . Εδώ ζητούνται: (α:1) Η εύρεση της διαφορικής εξίσωσης για το βέλος κάμψεως $w(x, y, t)$ της πλάκας με βάση την αντίστοιχη εξίσωση για το στατικό πρόβλημα. (β:1) Τώρα στις ιδιοταλαντώσεις της κυκλικής πλάκας με την απευθείας χρήση κατάλληλης χρονικής συναρτήσεως $T(t)$ η εύρεση της χωρικής διαφορικής εξίσωσης ως προς το χωρικό παράγοντα $W(x, y)$ των ιδιοταλαντώσεων της πλάκας με χρήση βοηθητικής σταθεράς β . Στο σημείο αυτό θεωρούμε γνωστά ότι

$$\nabla^4 - \beta^4 = (\nabla^2 + \beta^2)(\nabla^2 - \beta^2)$$

και επίσης ότι

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . (γ:2) Για την εξίσωση

$$(\nabla^2 - \beta^2)W(r, \theta) = 0$$

με χωρισμό των μεταβλητών να βρεθούν οι σχετικές δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ως προς r και ως προς θ) και (δ:2) για τη δεύτερη από αυτές (ως προς θ) να βρεθεί η αποδεκτή από φυσικής απόψεως γενική λύση της. Τελικά για το χωρικό μέρος $W(r, \theta)$ του βέλους κάμψεως $w(r, \theta, t)$ της παρούσας κυκλικής πλάκας προκύπτουν συναρτήσεις της μορφής

$$W_n(r, \theta) = [A_n J_n(\beta r) + C_n I_n(\beta r)] \sin n\theta + [E_n J_n(\beta r) + G_n I_n(\beta r)] \cos n\theta \quad \text{με } n = 1, 2, \dots$$

(ε:1) Για ποιο λόγο είναι αυτές τόσο απλές, δηλαδή δεν περιέχουν τις συναρτήσεις Bessel δευτέρου είδους $Y_n(\beta r)$ (συνήθης συνάρτηση Bessel) και $K_n(\beta r)$ (τροποποιημένη συνάρτηση Bessel), που δυστυχώς απειρίζονται για $r \rightarrow 0$; (στ:1) Τι θα συνέβαινε αντίθετα σε δακτυλιοειδή πλάκα; (ζ:2) Πάλι για κυκλική πλάκα με πάκτωση ή απλή στήριξη σε όλη την περιφέρειά της $r = a$ ποια αρκετά απλούστερη μορφή $W_n^*(r, \theta)$ παίρνουν οι πιο πάνω συναρτήσεις $W_n(r, \theta)$ καθ' οδόν (μετά και άλλο πολύ μακρύ δρόμο ...) προς τις ιδιομορφές ταλαντώσεως $W_{mn}(r, \theta)$ της κυκλικής πλάκας που μελετάμε; ▲

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε5

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο Κεφάλαιο αυτό Ε5, Ενότητα Ε5.1 αναφέρονται μερικές ασκήσεις Ολοκληρωτικών Εξισώσεων που αφορούν στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.


Συγκεκριμένα την Παράγραφο Ε5.1.1 αναφέρεται μία άσκηση Περιβαλλοντικής Μηχανικής. Στην Παράγραφο Ε5.1.2 αναφέρεται μία άσκηση Ταλαντώσεων. Στην Παράγραφο Ε5.1.3 αναφέρεται μία άσκηση Μηχανικής των Υλικών. Τέλος στην Παράγραφο Ε5.1.4 αναφέρονται τρεις ασκήσεις Ιξοελαστικότητας.

Ε5.1

Ε5.1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ε5.1.1

Ε5.1.1. Άσκηση στην Περιβαλλοντική Μηχανική

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε5.1

▼ Άσκηση Ε5.1 ■ Περιβαλλοντική Μηχανική

Στην αποδόμηση ρύπου Α πρώτης τάξεως στην Περιβαλλοντική Μηχανική προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση

$$c(t) = c_0 - k \int_0^t c(\tau) d\tau$$

με τα c_0 και k γνωστές θετικές σταθερές. Ζητούνται: (α:1) Η αναγωγή της σε ισοδύναμο πρόβλημα αρχικής τιμής, η λύση της με επίλυση του προβλήματος αρχικής τιμής κι η επαλήθευση της λύσεως αυτής της παραπάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης. (β:1) Η κατευθείαν επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (γ:1) Με τη χρήση της γνωστής μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων και με αρχική προσέγγιση τη σταθερή συνάρτηση

$$c_0(t) = c_0$$

η εύρεση των επόμενων προσεγγίσεων $c_1(t)$ και $c_2(t)$. (δ:1) Η θεωρητική εξήγηση εάν ή όχι συγκλίνει εδώ η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων. (ε:3) Στη συνέχεια η πολύ λεπτομερής μαθηματική απόδειξη με τη μέθοδο της επαγωγής (επαγωγική

απόδειξη) ότι η n -τάξεως προσέγγιση της λύσεως $c(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$c_n(t) = c_0 \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{k^m t^m}{m!}.$$

(στ:1) Από τον τύπο αυτό για $n \rightarrow \infty$ να υπολογισθεί η λύση $c_\infty(t)$ της παραπάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης σε κλειστή μορφή (με επεξηγήσεις) και υποχρεωτικά χωρίς τη χρήση δυναμοσειράς. ▲

E5.1.2

E5.1.2. Άσκηση στις Ταλαντώσεις

Άσκηση

Ενότητα E5.1

▼ Άσκηση E5.2 ■ Ταλαντώσεις

Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0$$

με άγνωστη συνάρτηση τη $u(t)$ και τις ποσότητες ξ (με $0 < \xi < 1$), ω_0 (με $\omega_0 > 0$), u_0 και v_0 γνωστές σταθερές. Ζητούνται: (α:2) Χωρίς καμία αλλαγή της άγνωστης συνάρτησεως $u(t)$ και με διαδοχικές ολοκληρώσεις να μετατραπεί το πρόβλημα αυτό σε ισοδύναμη ολοκληρωτική εξίσωση. (β:1) Να δοθούν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος. (γ:1) Ποια ή ποιες μέθοδοι είναι εφαρμόσιμες για την επίλυση της και γιατί; Επίσης ποια ή ποιες μέθοδοι δεν είναι εφαρμόσιμες και γιατί; Δίνεται η ολοκληρωτική εξίσωση

$$u(t) + 2\xi\omega_0 \int_0^t u(\tau) d\tau + \omega_0^2 \int_0^t (t-\tau)u(\tau) d\tau = u_0 + (v_0 + 2\xi\omega_0 u_0)t.$$

Ζητούνται (δ:2) Η λεπτομερής αναγωγή της σε ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών τιμών. (ε:2) Η λύση της (σε πραγματική εκθετική-τριγωνομετρική μορφή) με επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών του προηγούμενου ερωτήματος με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως. (στ:4) Η άμεση εύρεση του μετασχηματισμού Laplace

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (ζ:4) Η επαλήθευση του ίδιου μετασχηματισμού Laplace $U(s)$, τώρα όμως με την εύρεσή του μέσω του ισοδύναμου προβλήματος αρχικών τιμών, το οποίο ήδη προσδιορίστηκε στο ερώτημα (δ). ▲

E5.1.3

E5.1.3. Άσκηση στη Μηχανική των Υλικών

Άσκηση

Ενότητα E5.1

▼ Άσκηση E5.3 ■ Μηχανική των Υλικών: δοκοί


Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$v(x) = v_0 + \theta_0 x + \frac{M_0}{2EI} x^2 + \frac{Q_0}{6EI} x^3 + \frac{1}{6EI} \int_0^x (x-\xi)^3 p(\xi) d\xi$$

με $v_0 = v(0)$, $\theta_0 = v'(0)$, $M_0 = EIv''(0)$ και $Q_0 = EIv'''(0)$ και άγνωστη συνάρτηση την $p(x)$. Ζητείται η λύση της $p(x)$ (α:5) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και (β:5) με κάποια άλλη μέθοδο. ▲

Ε5.1.4

Ε5.1.4. Ασκήσεις στην Ιξοελαστικότητα

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε5.1

▼ **Άσκηση Ε5.4** ■ **Ιξοελαστικότητα**

Σε μονοαξονική καταπόνηση γραμμικά ιξοελαστικού υλικού ισχύει η ολοκληρωτική εξίσωση

$$\varepsilon(t) = J(0) \sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau$$


(όπου J είναι η συνήθης χρονική παράγωγος της συναρτήσεως J) με $\varepsilon(t)$ την παραμόρφωση, $\sigma(t)$ την τάση και $J(t)$ την ενδοτικότητα σε ερπυσμό, που θεωρείται γνωστή. Εδώ υποθέτουμε την παραμόρφωση $\varepsilon(t)$ ίση με $\varepsilon_0 t$ (με το ε_0 σταθερά). Θεωρούμε επίσης ένα ιξοελαστικό υλικό Kelvin (ή Voigt) με

$$J(t) = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{q_0}, \quad \text{όπου} \quad \lambda = \frac{q_0}{q_1}$$

(δύο γνωστές σταθερές: q_0 και q_1 σ' ένα υλικό Kelvin ή Voigt). Υπό όλες αυτές τις συνθήκες ζητούνται: (α:1) Πώς μπορεί να προσδιορισθεί πειραματικά η συνάρτηση $J(t)$; Τι εξοπλισμός χρειάζεται; (β:1) Τι φαινόμενο θα είχαμε στο παρόν πρόβλημα, εάν ήταν

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0.$$

(γ:1) Έξι χαρακτηρισμοί της πιο πάνω ολοκληρωτικής εξισώσεως. (δ:3) Η επίλυση της υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (ε:2) Η επαλήθευση της λύσεως αυτής. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε5.1

▼ **Άσκηση Ε5.5** ■ **Ιξοελαστικότητα**

Σε μονοαξονική καταπόνηση γραμμικά ιξοελαστικού υλικού ισχύει η εξίσωση

$$\varepsilon(t) = J(t) \sigma(0) + \int_0^t J(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (5.1.1)$$

καθώς και η εξίσωση

$$\varepsilon(t) = J(0) \sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (5.1.2)$$

Σημειώνεται ότι η μία εξίσωση προκύπτει από την άλλη με παραγοντική ολοκλήρωση. Και στις δύο η τελεία ($\dot{\sigma}$ ή \dot{J}) δηλώνει χρονική παράγωγο. Οι συναρτήσεις $\varepsilon(t)$ και $\sigma(t)$ είναι η παραμόρφωση και η τάση αντίστοιχα στο παρόν μονοαξονικό πρόβλημα και φυσικά εδώ είναι χρονικά μεταβλητές. Η συνάρτηση $J(t)$ είναι η ενδοτικότητα σε ερπυσμό και θεωρείται γνωστή για συγκεκριμένο ιξοελαστικό υλικό. Υπάρχει επίσης και το αντίστοιχο μέτρο χαλαρώσεως $Y(t)$. Μεταξύ των μετασχηματισμών Laplace τους $J_L(s) = \mathcal{L}\{J(t)\}$ και $Y_L(s) = \mathcal{L}\{Y(t)\}$ ισχύει ο τύπος

$$J_L(s) Y_L(s) = \frac{1}{s^2} \quad (5.1.3)$$

που θεωρείται γνωστός. Με βάση το μέτρο χαλαρώσεως $Y(t)$ ισχύει η εξίσωση

$$\sigma(t) = Y(t) \varepsilon(0) + \int_0^t Y(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (5.1.4)$$

Ζητούνται: (α:1) Πώς προσδιορίζονται πειραματικά οι συναρτήσεις $J(t)$ και $Y(t)$; (β:4) Με γνωστή συνάρτηση τη συνάρτηση $\varepsilon(t)$ και άγνωστη τη $\sigma(t)$ να λυθούν και

οι δύο εξισώσεις (5.1.1) και (5.1.2) υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, αλλά χωρίς το τελικό βήμα της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace $\sigma_L(s)$. Συμφωνούν τα αποτελέσματα; (γ:1) Με χρήση της εξίσωσης (5.1.4) να υπολογισθεί ο ίδιος μετασχηματισμός Laplace $\sigma_L(s)$. (δ:1) Με γνωστές ασφαλώς τις συναρτήσεις $J(t)$ και $Y(t)$ ποια είναι η λύση των εξισώσεων (5.1.1) και (5.1.2) ως προς $\sigma(t)$ και (ε:1) της εξίσωσης (5.1.4) ως προς $\varepsilon(t)$;

Συνεχίζουμε τώρα θεωρώντας σταθερή και γνωστή την παραμόρφωση

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0$$

και άγνωστη την αντίστοιχη τάση $\sigma(t)$ σε ιζοελαστικό υλικό Maxwell με

$$J(t) = \frac{p+t}{q}$$

και τις σταθερές p και q γνωστές. Ζητούνται επίσης: (στ:1) Έξι χαρακτηρισμοί της εξίσωσης (5.1.2), που είναι εδώ ολοκληρωτική εξίσωση. (ζ:1) Επίλυση της ίδιας εξίσωσης με αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (η:1) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και στη συνέχεια (θ:1) επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε. (ι:2) Με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων (ξεκινώντας από τη μηδενική συνάρτηση) τάξεως μέχρι και $n = 3$. (ια:2) Η λεπτομερής σύγκριση των αποτελεσμάτων των μεθόδων του μετασχηματισμού Laplace και των διαδοχικών προσεγγίσεων. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε5.1

▼ Άσκηση Ε5.6 ■ Ιζοελαστικότητα

Σε μονοαξονική καταπόνηση γραμμικά ιζοελαστικού υλικού προκύπτει η ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση (με την τελεία να δηλώνει συνεχώς χρονική παράγωγο)

$$\varepsilon(t) = \sigma(0)J(t) + \int_0^t J(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad \text{με} \quad t \geq 0.$$

Η συνάρτηση $\varepsilon(t)$ δηλώνει την εδώ γνωστή παραμόρφωση κι η συνάρτηση $\sigma(t)$ την εδώ άγνωστη τάση. Τέλος η συνάρτηση $J(t)$ δηλώνει την ενδοτικότητα σε ερπισμό του ιζοελαστικού υλικού. Ζητούνται: (α:2) Η απόδειξη της ισοδυναμίας της με την ολοκληρωτική εξίσωση (με προσοχή στα πρόσημα!)

$$\varepsilon(t) = J(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau \quad \text{με} \quad \dot{J}(t-\tau) := \left. \frac{dJ(t^*)}{dt^*} \right|_{t^*=t-\tau}$$

και (β:1) οι χαρακτηρισμοί της τελευταίας. Με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace και ειδικότερα των συμβόλων

$$E(s) := \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\}, \quad \Sigma(s) := \mathcal{L}\{\sigma(t)\} \quad \text{και} \quad J_L(s) := \mathcal{L}\{J(t)\}$$

ζητούνται: (γ:2) Η απόδειξη ότι

$$\Sigma(s) = sY_L(s)E(s) \quad \text{με} \quad Y_L(s) := \frac{1}{s^2 J_L(s)}.$$

(δ:3) Με χρήση και της συναρτήσεως

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_L(s)\}$$

η λύση $\sigma(t)$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης. ▲

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε6

ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο παρόν Κεφάλαιο Ε6 αναφερόμαστε και πάλι στις ολοκληρωτικές εξισώσεις. Σε αυτές είχαμε αφιερώσει το Μέρος Γ των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς με τίτλο Εφαρμοσμένες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς. Εκεί είχαμε αναφερθεί σε όλα τα βασικά θέματα για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις, κυρίως στις βασικές μεθόδους επίλυσής τους, καθώς και σε εφαρμογές τους στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Από αυτές οι κυριότερες αφορούσαν στις συναρτήσεις επιρροής και στη γραμμική Ιξοελαστικότητα. Στην τελευταία ενότητα είχαμε επίσης αναφερθεί πάρα πολύ σύντομα και στη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση που ισχύει για την εξίσωση του Laplace. Επιπλέον στο προηγούμενο Κεφάλαιο Ε5 παραθέσαμε μερικές εφαρμοσμένες ασκήσεις ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Σε αυτό το Κεφάλαιο Ε6 περιορίζουμε την προσοχή μας στις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Αυτές πραγματικά αποτελούν την πιο ενδιαφέρουσα εφαρμογή των ολοκληρωτικών εξισώσεων στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού αλλά και σε πολλές ακόμη περιοχές της επιστήμης. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι έχουμε να επιλύσουμε μια γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (ή ένα αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων) σε μια περιοχή V (είτε τριδιάστατη είτε διδιάστατη) με διαθέσιμες τις αναγκαίες συνοριακές συνθήκες στο σύνορό της S (είτε διδιάστατο είτε μονοδιάστατο). Τότε με τη μέθοδο των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων μπορούμε να αναγάγουμε αυτό εδώ το πρόβλημα σε μια ολοκληρωτική εξίσωση πάνω μόνο στο σύνορο S της περιοχής V . Αυτό σημαίνει ότι μειώνουμε τη διάσταση του προβλήματος από τριδιάστατο σε διδιάστατο, όταν αναφερόμαστε σε τριδιάστατη περιοχή, και από διδιάστατο σε μονοδιάστατο, όταν αναφερόμαστε σε διδιάστατη περιοχή. Και αυτό είναι μια μεγάλη επιτυχία της μεθόδου των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων, επειδή έτσι μειώνεται έντονα και το υπολογιστικό κόστος για την επίλυση ενός προβλήματος σε σύγκριση με τις ανταγωνιστικές μεθόδους. Αυτές είναι κυρίως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων και η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών. Και είναι βέβαια σαφές ότι σχεδόν όλα τα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού απαιτούν για την επίλυσή τους υψηλό υπολογιστικό κόστος.

Φυσικά στο υπολογιστικό μέρος της η μέθοδος των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων επικουρείται από κάποια αριθμητική μέθοδο. Σαν τέτοια μέθοδος επιλέγεται σχεδόν πάντοτε (αλλά όχι αναγκαστικά) η μέθοδος των συνοριακών στοιχείων, που διακριτοποιεί το σύνορο S της περιοχής. Εναλλακτικά βέβαια μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες κλασικές μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης. Εντούτοις εδώ δε θα αναφερθούμε στην αριθμητική μέθοδο των συνοριακών στοιχείων ή σε άλλες αριθμητικές μεθόδους περιορίζοντας την προσοχή μας αποκλειστικά στην κατασκευή των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Πιο συγκεκριμένα σε αυτό το Κεφάλαιο Ε6 μετά από μια μικρή εισαγωγή στις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις θα μελετήσουμε με προσοχή την εφαρμογή τους στην εξίσωση του Laplace (είτε στις τρεις είτε στις δύο διαστάσεις), που παρουσιάζεται π.χ. στη Ρευστομηχανική ιδεατού ρευστού. Στη συνέχεια με λιγότερες λεπτομέρειες θα αναφερθούμε στις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις ενός πιο δύσκολου προβλήματος: του προβλήματος της γραμμικής Ελαστικότητας (πάλι είτε στις τρεις είτε στις δύο διαστάσεις).

E6.1

E6.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

E6.1.1

E6.1.1. Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Τα βασικά για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις τα γνωρίζουμε ήδη από το Μέρος Γ στα *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς*, Τεύχος 1, που έχει τίτλο *Εφαρμοσμένες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς*. Εκεί μάλιστα στην τελευταία Ενότητα Γ3.8 αναφερθήκαμε πάρα πολύ σύντομα στη **συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση** για την εξίσωση του Laplace σε μια διδιάστατη περιοχή D του επιπέδου Oxy . Σε αυτό το Κεφάλαιο Ε6 θα αναφερθούμε εκτενέστερα στην ίδια συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση για την εξίσωση του Laplace, αλλά τώρα με αναφορά μας και στο αντίστοιχο τριδιάστατο πρόβλημα. Επίσης και όχι πια μόνο με απλή αναφορά του σχετικού συνοριακού ολοκληρωτικού τύπου και της αντίστοιχης συνοριακής ολοκληρωτικής εξισώσεως, αλλά και με τη μαθηματική εύρεσή τους αν και χωρίς την παράθεση όλων των αναγκαίων μαθηματικών αποδείξεων.

Οι συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις (και οι αντίστοιχοι ολοκληρωτικοί τύποι βέβαια) δεν παρουσιάζονται ασφαλώς μόνο στην εξίσωση του Laplace. Παρουσιάζονται και σε μεγάλη ποικιλία προβλημάτων του Πολιτικού Μηχανικού (και όχι μόνο ...) που μοντελοποιούνται με τη χρήση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους συνήθως σε στατικά προβλήματα στο χώρο, αλλά και σε δυναμικά προβλήματα που περιλαμβάνουν και το χρόνο. Από όλα αυτά τα προβλήματα εμείς εδώ θα αναφερθούμε αρχικά, όπως ήδη αναφέραμε, στην εξίσωση του Laplace, που την εξετάζουμε γενικά στις τρεις διαστάσεις (με ειδική περίπτωση της τις δύο διαστάσεις), και στη σχετική εξίσωση του Poisson. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε επίσης και στις αντίστοιχες εξισώσεις της γραμμικής τριδιάστατης Ελαστικότητας (με ειδική περίπτωση της τη γραμμική διδιάστατη Ελαστικότητα).

E6.1.2

E6.1.2. Πλεονεκτήματα των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων

Το πιο ενδιαφέρον σημείο στις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις, το βασικό πλεονέκτημά τους είναι το εξής:

- Μετατρέπουν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους σε μια περιοχή V του τριδιάστατου ή του διδιάστατου χώρου σε συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση μόνο πάνω στο σύνορο S αυτής της περιοχής V . Αυτό το σύνορο είναι διδιάστατο (επιφάνεια) για τριδιάστατη περιοχή V ή μονοδιάστατο (καμπύλη) για διδιάστατη περιοχή V . Με αυτόν τον τρόπο έχουμε μείωση της διαστάσεως του προβλήματος κατά μονάδα, κάτι που είναι εξαιρετικά ενδιαφέρον και υπολογιστικά πολύ χρήσιμο. Αυτό δεν συμβαίνει βέβαια στις δύο ανταγωνιστικές μεθόδους των πεπερασμένων διαφορών και κυρίως των πεπερασμένων στοιχείων. Αυτό το σημείο αποτελεί και το βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων έναντι των μεθόδων των πεπερασμένων διαφορών και των πεπερασμένων στοιχείων και τον κύριο λόγο της μεγάλης ανάπτυξης της ιδίως κατά τα τελευταία σαράντα χρόνια.

Επιπλέον η παρούσα μέθοδος των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων έχει και τα ακόλουθα δευτερεύοντα πλεονεκτήματα έναντι αυτών των δύο μεθόδων: των μεθόδων των πεπερασμένων διαφορών και των πεπερασμένων στοιχείων:

- Οι προσεγγίσεις που γίνονται αφορούν μόνο στο σύνορο S της περιοχής V και γίνονται κατά την αριθμητική επίλυση της συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης (γενικά με χρήση συνοριακών στοιχείων). Δε γίνονται παραπέρα προσεγγίσεις μέσα στην ίδια την περιοχή V . Εκεί ισχύει με ακρίβεια η αρχική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους αν και βέβαια τελικά προκύπτουν προσεγγιστικά αποτελέσματα για την άγνωστη συνάρτηση (ή τις άγνωστες συναρτήσεις) απλά λόγω των προσεγγίσεων που ήδη έγιναν στο σύνορο S .
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολύ εύκολα και σε άπειρες περιοχές, όπως είναι μια περιοχή με εσωτερικό μόνο σύνορο (ή σύνορα) ή μια περιοχή με άπειρο σύνορο (π.χ. στις τρεις διαστάσεις ένας ημίχωρος και στις δύο διαστάσεις ένα ημιεπίπεδο).
- Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί πολύ εύκολα και σε περιοχές με ιδιόμορφα σημεία. Τέτοιες περιοχές είναι π.χ. οι ρωγμές στη Θραυστομηχανική (ή Μηχανική της Θραύσεως) και τα λεπτά εμπόδια στη μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική (ή Μηχανική των Ρευστών) και στις δύο περιπτώσεις με ιδιόμορφα σημεία τα δύο άκρα τους, δηλαδή τα δύο άκρα των ρωγμών ή των λεπτών εμποδίων στη ροή.
- Μετά την επίλυση της συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης υπάρχει άμεσα η δυνατότητα υπολογισμού της άγνωστης συναρτήσεως και στο εσωτερικό της περιοχής V απλά με βάση ολοκλήρωση στο σύνορο S αυτής της περιοχής μέσω του αντίστοιχου συνοριακού ολοκληρωτικού τύπου. Και όχι μόνο της άγνωστης συναρτήσεως αλλά επίσης και κάθε τάξεως μερικών παραγώγων της στην ίδια περιοχή V πάλι απλά με βάση ολοκλήρωση στο σύνορο S χωρίς καθόλου παραγωγίσεις των συνοριακών τιμών της άγνωστης συναρτήσεως. Φυσικά σε αυτήν την περίπτωση απαιτείται η χρήση τροποποιημένων (μέσω των σχετικών παραγωγίσεων) συνοριακών ολοκληρωτικών τύπων.
- Επειδή βασίζεται σε ολοκληρώματα και όχι σε παραγώγους είναι υπολογιστικά πολύ πιο αποτελεσματική από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Είναι πραγματικά γνωστό από την Αριθμητική Ανάλυση ότι οι αριθμητικές παραγωγίσεις λόγω των πεπερασμένων διαφορών που χρησιμοποιούν για τις προσεγγίσεις των παραγώγων εισάγουν γενικά πιο εύκολα σημαντικά σφάλματα σε προσεγγιστικούς υπολογισμούς από τις αριθμητικές ολοκληρώσεις, όπου βέβαια δε χρησιμοποιούνται καθόλου πεπερασμένες διαφορές.

E6.1.3

E6.1.3. Μειονεκτήματα των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων

Ασφαλώς η μέθοδος των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων έχει πολλά σημαντικά πλεονεκτήματα, που ήδη τα αναφέραμε πιο πάνω. Από αυτά την πρώτη θέση την κατέχει η μείωση της διαστάσεως του προβλήματος που εμείς θέλουμε να λύσουμε (από τριδιάστατο σε διδιάστατο ή από διδιάστατο σε μονοδιάστατο). Εντούτοις έχει βέβαια και τα μειονεκτήματά της σε σύγκριση με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων αλλά και τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Τα μειονεκτήματα της μεθόδου των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι τα εξής:

- Ο περιορισμός της καταρχήν σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και μάλιστα με σταθερούς συντελεστές.
- Η ανάγκη διαθεσιμότητας ή ευρέσεως ειδικής ιδιόμορφης λύσεως της σχετικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους, που καλείται *θεμελιώδης λύση* (ή *συνάρτηση Green ελεύθερου χώρου*). Εδώ πρόκειται για τη λύση της

διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους του προβλήματος που έχουμε στον άπειρο χώρο (τριδιάστατο ή διδιάστατο) χωρίς συνοριακές συνθήκες και για μοναδιαία πηγή, φόρτιση, κλπ. στο σημείο ξ του χώρου. Η διαθεσιμότητα της θεμελιώδους λύσεως (ή συναρτήσεως Green ελεύθερου χώρου) ισχύει βέβαια στις γνωστές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, όπως είναι η εξίσωση του Laplace, αλλά δεν ισχύει πάντα. Επίσης, αν δεν είναι διαθέσιμη η θεμελιώδης λύση, η εύρεσή της δεν είναι πάντα μια εύκολη εργασία.

- Από αριθμητική άποψη το γεγονός ότι το τελικό σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, όπου ανάγεται τελικά η συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων ή οποιαδήποτε άλλη αριθμητικής ολοκληρώσεως, είναι πλήρες (δηλαδή δεν περιέχει μηδενικά) και επίσης είναι μη συμμετρικό σε αντίθεση με ό,τι συμβαίνει στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Εκεί το αντίστοιχο σύστημα είναι μη πλήρες (δηλαδή περιέχει πάρα πολλά μηδενικά) και επίσης είναι συμμετρικό. Εντούτοις από συνολική άποψη η μέθοδος των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι τελικά στις περισσότερες περιπτώσεις υπολογιστικά αρκετά πιο αποτελεσματική από τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων πολύ απλά εξαιτίας της μείωσης της διαστάσεως του προβλήματος. Αυτήν τη μείωση την αναφέραμε ήδη σαν το κύριο πλεονέκτημα της μεθόδου των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων.
- Μερικές φορές ο χρήστης/η χρήστρια της μεθόδου αισθάνεται λίγο άβολα από μαθηματική άποψη με τις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Αυτό μπορεί να συμβεί, επειδή έχει συχνά μπροστά του/μπροστά της πολύπλοκα συνοριακά ολοκληρώματα ή δεν έχει την αναγκαία εμπειρία με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις, με τα ιδιόμορφα ολοκληρώματα που παρουσιάζονται στις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις (με ασθενή, ισχυρή ή/και πολύ ισχυρή ιδιομορφία) και γενικά με τους υπολογισμούς οι οποίοι απαιτούνται κατά την κατασκευή και μετά την επίλυση συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων.

E6.1.4

E6.1.4. Αριθμητική επίλυση και συνοριακά στοιχεία

Ασφαλώς η μέθοδος των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων απαιτεί γενικά την υποστήριξη της (μετά την κατασκευή της ολοκληρωτικής εξίσωσης) από μια κατάλληλη αριθμητική μέθοδο για την προσεγγιστική επίλυσή της. Και προφανώς σε πάρα πολύ λίγες περιπτώσεις μπορεί να βρεθεί με κλειστό τύπο η λύση μιας συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης. Ανάμεσα σε αυτές τις λιγοστές περιπτώσεις περιλαμβάνονται οι περιπτώσεις απλών συνόρων, όπως π.χ. στις δύο διαστάσεις περιφερειών κύκλων, ευθύγραμμων συνόρων ημιεπιπέδων, ευθύγραμμων ρωγμών ή εγκλεισμάτων και ευθύγραμμων εμποδίων στη διδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού.

Εντούτοις στη συντριπτική πλειοψηφία των περιπτώσεων η λύση που θα βρεθεί θα είναι προσεγγιστική και συνήθως καθαρά αριθμητική. Για το σκοπό αυτό σχεδόν πάντα η συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση επιλύεται με τη μέθοδο της αριθμητικής ολοκληρώσεως. Παλιότερα αυτή η μέθοδος βασιζόταν συχνά σε κλασική αριθμητική ολοκλήρωση. Όμως κατά τα τελευταία σαράντα περίπου χρόνια χρησιμοποιείται βασικά η μέθοδος των *συνοριακών στοιχείων (boundary elements)*. Αυτή είναι μια πάρα πολύ αποτελεσματική μέθοδος, η οποία κάνει *διακριτοποίηση* του συνόρου S , όπου γίνεται η αριθμητική ολοκλήρωση, με τη χρήση συνοριακών στοιχείων και στη συνέχεια κάνει προσέγγιση της άγνωστης συναρτήσεως (ή των άγνωστων συναρτήσεων) σε κάθε συνοριακό στοιχείο του συνόρου S .

Τόσο πολύ έχει μάλιστα γενικευθεί η χρήση των συνοριακών στοιχείων κατά την επίλυση συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων, ώστε με το χρόνο τείνει να καταργηθεί ο όρος *συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις* με αντικατάστασή του από τον όρο *συνοριακά στοιχεία*. Δηλαδή λέγοντας μέθοδος των συνοριακών στοιχείων (boundary element method) εννοούμε τόσο την εύρεση της ίδιας της συνοριακής ολοκληρωτικής εξισώσεως (όπως γίνεται σε αυτό το Κεφάλαιο Ε6 για την εξίσωση του Laplace και τη γραμμική Ελαστικότητα) όσο και την αριθμητική επίλυσή της με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων και όχι βέβαια με οποιαδήποτε μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσεως. Εντούτοις σε αυτό το μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά και σε αυτό το Κεφάλαιο Ε6 θα περιορίσουμε την προσοχή μας αποκλειστικά στην εύρεση συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων (εδώ για την εξίσωση του Laplace και τη γραμμική Ελαστικότητα) και όχι στην αριθμητική επίλυσή τους.

Στην πράξη η μέθοδος των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων, που παρουσιάστηκε στις αρχές του εικοστού αιώνα,⁴ έχει εξελιχθεί σήμερα και ιδιαίτερα από τη δεκαετία του 1970 και μετά σε συνδυασμό με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων σε μια εξαιρετικά αποτελεσματική μέθοδο επίλυσεως ποικίλων προβλημάτων.

E6.1.5

E6.1.5. Άμεσες και έμμεσες συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις

Συμπληρώνουμε αυτήν την ενότητα αναφέροντας τη διάκριση των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων σε άμεσες και έμμεσες. Συγκεκριμένα έχουμε μια άμεση συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση, όταν άγνωστη συνάρτηση (ή συχνά άγνωστες συναρτήσεις) είναι η ίδια η άγνωστη συνάρτηση του προβλήματος και παράγωγοί της, δηλαδή ποσότητες με φυσική σημασία. Αντίθετα έχουμε μια έμμεση συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση, όταν χρησιμοποιούμε σε αυτήν σαν άγνωστη συνάρτηση μια εντελώς νέα βοηθητική συνάρτηση χωρίς φυσική σημασία και παραγώγους της.

Και μετά από αυτά τα εισαγωγικά ξεκινάμε με την εξίσωση του Laplace. Αυτή είναι το πιο απλό και ταυτόχρονα πιο κλασικό σχετικό πρόβλημα με χρησιμότητα στη Ρευστομηχανική για ιδεατό ρευστό, αλλά και σε αρκετές άλλες περιοχές της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού. Θα παρουσιάσουμε τη σχετική συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (όπως βέβαια και τον αντίστοιχο συνοριακό ολοκληρωτικό τύπο), όπως χρησιμοποιείται γενικά σήμερα στην άμεση μέθοδο των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Και στη συνέχεια θα προχωρήσουμε ανάλογα και στο κάπως πιο δύσκολο πρόβλημα της γραμμικής Ελαστικότητας.

⁴Δείγμα από την αρχική βιβλιογραφία για τις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις είναι το εξής:

1. Fredholm, I. (1903), Sur une classe d'équations fonctionnelles. *Acta Mathematica*, Vol. 27, pp. 365–390.
2. Lauricella, G. (1906), Sull' integrazione delle equazioni dell' equilibrio dei corpi elastici isotropi. *Rendiconti dell' Accademia dei Lincei*, Vol. 15, pp. 426–432.
3. Kellogg, O. D. (1929), *Foundations of Potential Theory*. Springer-Verlag, Berlin (Dover edition: 1954).
4. Sherman, D. I. (1940), On the solution of the plane static problem of the theory of elasticity for displacements given on the boundary. *Doklady Akademii Nauk S.S.S.R.*, Vol. 27, pp. 911–913.
5. Muskhelishvili, N. I. (1963), *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd English edition. Noordhoff, Groningen. (Translation of the 4th Russian edition: 1954, 1st Russian edition: 1933).
6. Mikhlin, S. G. (1957), *Integral Equations*. Pergamon Press, London.
7. Kupradze, V. D. (1965), *Potential Methods in the Theory of Elasticity*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem. (Translation of the Russian edition: 1963).
8. Jaswon, M. A. and Symm, G. T. (1977), *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*. Academic Press, London.

E6.2

E6.2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE

E6.2.1

E6.2.1. Το θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss

Για την εύρεση της συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης που αφορά στην εξίσωση του Laplace (γενικά στις τρεις διαστάσεις με ειδική περίπτωση της τις δύο διαστάσεις) θα βασιστούμε στη δεύτερη ταυτότητα του Green. Και αυτή με τη σειρά της βασίζεται στο **θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (ή των Gauss–Ostrogradsky)**, που το γνωρίζουμε ήδη καλά από τη Διανυσματική Ανάλυση στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι. Το θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss αφορά σε ένα συνεχές και παραγωγίσιμο (σε όλη την περιοχή V που μας ενδιαφέρει εδώ) διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ στις τρεις διαστάσεις $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ της μορφής

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1 \mathbf{e}_1 + F_2 \mathbf{e}_2 + F_3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 F_i \mathbf{e}_i = F_i \mathbf{e}_i. \quad (6.2.1)$$

Εδώ με \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 και \mathbf{e}_3 συμβολίζονται τα τρία μοναδιαία διανύσματα του συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων $Ox_1x_2x_3$. Επίσης εδώ χρησιμοποιήθηκε δεξιά (και θα συνεχίσει να χρησιμοποιείται σε ολόκληρο αυτό το Κεφάλαιο Ε6) η ήδη γνωστή μας από την Παράγραφο Ε1.1.2 του Κεφαλαίου Ε1 σύμβαση αθροίσεως του Einstein.

Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα για μια περιοχή V στον τριδιάστατο χώρο που περικλείεται από λεία απλή κλειστή επιφάνεια S (που είναι το σύνορό της) έχουμε

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV(\mathbf{x}) = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS(\mathbf{x}) \quad (6.2.2)$$

με $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ το προς τα έξω μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S . Όπως γνωρίζουμε, το σύμβολο div δηλώνει την απόκλιση, divergence διανυσματικού πεδίου. Επίσης το σύμβολο \iint_S δηλώνει ολοκλήρωση πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια S ανάλογα με το σύμβολο \oint_S που δηλώνει ολοκλήρωση πάνω σε μια κλειστή καμπύλη S . Τέλος τα σύμβολα $dV(\mathbf{x})$ και $dS(\mathbf{x})$ δηλώνουν απλά ότι οι ολοκληρώσεις γίνονται ως προς τη μεταβλητή $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Αυτή είναι η μεταβλητή ολοκληρώσεως. Το θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (6.2.2) συσχετίζει τη συνολική απόκλιση του διανυσματικού πεδίου \mathbf{F} στην περιοχή ολοκληρώσεως V (στο αριστερό μέλος του) με τη συνολική προς τα έξω ροή του πάνω στο σύνορο S της περιοχής V (στο δεξιό μέλος του). Και αυτές οι δύο ποσότητες είναι ίσες! Προφανώς, επειδή

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = F_{i,i} \quad \text{και επίσης} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = F_i n_i, \quad (6.2.3)$$

το πιο πάνω θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (6.2.2) μπορεί να γραφεί και στην ισοδύναμη μορφή του

$$\iiint_V F_{i,i} dV(\mathbf{x}) = \iint_S F_i n_i dS(\mathbf{x}). \quad (6.2.4)$$

Εννοείται βέβαια ότι δείκτες μετά από κόμμα δηλώνουν παραγωγίσεις, εδώ μερικές παραγωγίσεις, και επίσης ότι για επαναλαμβανόμενους δείκτες, εδώ το δείκτη i , ισχύει η γνωστή μας από την Παράγραφο Ε1.1.2 σύμβαση αθροίσεως του Einstein.

E6.2.2

E6.2.2. Η δεύτερη ταυτότητα του Green

Με βάση το πιο πάνω θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (ή των Gauss–Ostrogradsky) (6.2.2) ή ισοδύναμα (6.2.4) προχωράμε τώρα στην απόδειξη της δεύτερης

ταυτότητας του Green. Όπως ήδη αναφέραμε, σε αυτή θα βασίσουμε την εύρεση της συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης για την εξίσωση του Laplace καθώς και την εύρεση του αντίστοιχου συνοριακού ολοκληρωτικού τύπου.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τώρα το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ στο θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (6.2.2) ή ισοδύναμα (6.2.4) ότι είναι της μορφής

$$\mathbf{F} = u \operatorname{grad} v \equiv u \nabla v, \quad \text{οπότε} \quad F_i = u \frac{\partial v}{\partial x_i} = uv_{,i}. \quad (6.2.5)$$

Εδώ τα $u = u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, x_3)$ και $v = v(\mathbf{x}) = v(x_1, x_2, x_3)$ είναι δύο βαθμωτά πεδία (βαθμωτές συναρτήσεις), που θεωρούνται επιπλέον συνεχή και επαρκώς παραγωγίσιμα. Άρα για την απόκλιση $\operatorname{div} \mathbf{F}$ του διανυσματικού πεδίου \mathbf{F} θα ισχύει η σχέση

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_i} \quad \text{ή} \quad F_{i,i} = u_{,i} v_{,i} + uv_{,ii} \quad (6.2.6)$$

τώρα σε λίγο πιο σύντομη γραφή. Αυτά ως προς το αριστερό μέλος του θεωρήματος της αποκλίσεως του Gauss (6.2.2) ή ισοδύναμα (6.2.4). Τώρα ως προς το δεξιό μέλος του ίδιου θεωρήματος λόγω της σχέσεως (6.2.5) προφανώς έχουμε

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = F_i n_i = uv_{,i} n_i. \quad (6.2.7)$$

Κατά συνέπεια το θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (6.2.2) ή ισοδύναμα (6.2.4) παίρνει στην περίπτωση μας (6.2.5) τη μορφή

$$\iiint_V (u_{,i} v_{,i} + uv_{,ii}) dV(\mathbf{x}) = \iint_S uv_{,i} n_i dS(\mathbf{x}). \quad (6.2.8)$$

Υπενθυμίζουμε ότι n_i ($i = 1, 2, 3$) είναι οι τρεις συνιστώσες του προς τα έξω μοναδιαίου κάθετου διανύσματος $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ στην κλειστή επιφάνεια S , που αποτελεί το σύνορο της τριδιάστατης περιοχής V . Λαμβάνοντας μάλιστα υπόψη μας ότι

$$\nabla u = u_{,i} \mathbf{e}_i, \quad \nabla v = v_{,i} \mathbf{e}_i, \quad \nabla^2 v = v_{,ii} \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial n} = v_{,i} n_i, \quad (6.2.9)$$

μπορούμε τώρα να ξαναγράψουμε την πιο πάνω σχέση (6.2.8) και στην απόλυτα ισοδύναμη, αλλά τώρα χωρίς καθόλου δείκτες, μορφή της

$$\iiint_V (\nabla u \nabla v + u \nabla^2 v) dV(\mathbf{x}) = \iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS(\mathbf{x}). \quad (6.2.10)$$

Με έναν εντελώς ανάλογο τρόπο (ή απλά με εναλλαγή των ρόλων των βαθμωτών πεδίων u και v) προκύπτει και η αντίστοιχη σχέση

$$\iiint_V (\nabla v \nabla u + v \nabla^2 u) dV(\mathbf{x}) = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS(\mathbf{x}). \quad (6.2.11)$$

Επειδή μάλιστα $\nabla u \nabla v = \nabla v \nabla u$, αφαιρώντας τώρα κατά μέλη τους δύο πιο πάνω ολοκληρωτικούς τύπους (6.2.10) και (6.2.11), διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$\iiint_V (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dV(\mathbf{x}) = \iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS(\mathbf{x}) \quad (6.2.12)$$

εννοείται με τα δύο βαθμωτά πεδία u και v συνεχή και κατάλληλα παραγωγίσιμα. Αυτός εδώ ο τελευταίος ολοκληρωτικός τύπος (6.2.12) καλείται **δεύτερη ταυτότητα του Green**. Σε αυτήν θα βασίσουμε αμέσως πιο κάτω την εύρεση της συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης και του αντίστοιχου συνοριακού ολοκληρωτικού τύπου για την εξίσωση του Laplace, που μας ενδιαφέρει εδώ.

Πριν ξεκινήσουμε όμως τη σχετική διαδικασία, αξίζει να αναφερθούμε και στην ειδική περίπτωση που και τα δύο βαθμωτά πεδία (και οι δύο βαθμωτές συναρτήσεις)

$u = u(x_1, x_2, x_3)$ και $v = v(x_1, x_2, x_3)$ είναι αρμονικές συναρτήσεις, δηλαδή και τα δύο αυτά πεδία επαληθεύουν την εξίσωση του Laplace. Τότε φυσικά ισχύουν οι σχέσεις

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{και} \quad \nabla^2 v = 0. \quad (6.2.13)$$

Σε αυτήν την ειδική περίπτωση προφανώς το αριστερό μέλος της πιο πάνω δευτέρας ταυτότητας του Green (6.2.12) μηδενίζεται. Επομένως τότε αυτή η ταυτότητα παίρνει την απλή μορφή

$$\iint_S \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.2.14)$$

Αυτή γράφεται ισοδύναμα και σαν

$$\iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS(\mathbf{x}) = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS(\mathbf{x}). \quad (6.2.15)$$

Έτσι λοιπόν η δεύτερη ταυτότητα του Green “εξελίχθηκε” εδώ σε ένα ενδιαφέρον θεώρημα αμοιβαιότητας για δύο αρμονικές συναρτήσεις. Πρόκειται για κάτι σαν τη γνωστή αρχή της αμοιβαιότητας των Betti–Maxwell στη Μηχανική των Υλικών. Εδώ όμως αφορά στην πολύ απλούστερη περίπτωση των αρμονικών συναρτήσεων.

E6.2.3

E6.2.3. Η θεμελιώδης λύση για την εξίσωση του Laplace

Στην παρούσα Ενότητα E6.2 ασχολούμαστε με την επίλυση της εξίσωσης του Laplace σε μια ανοικτή (χωρίς τα συνοριακά σημεία της) τριδιάστατη περιοχή V με σύνορο λεία απλή κλειστή επιφάνεια $S \equiv \partial V$ με αναγωγή της σε μια συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση. Συγκεκριμένα ισχύει η τριδιάστατη εξίσωση του Laplace

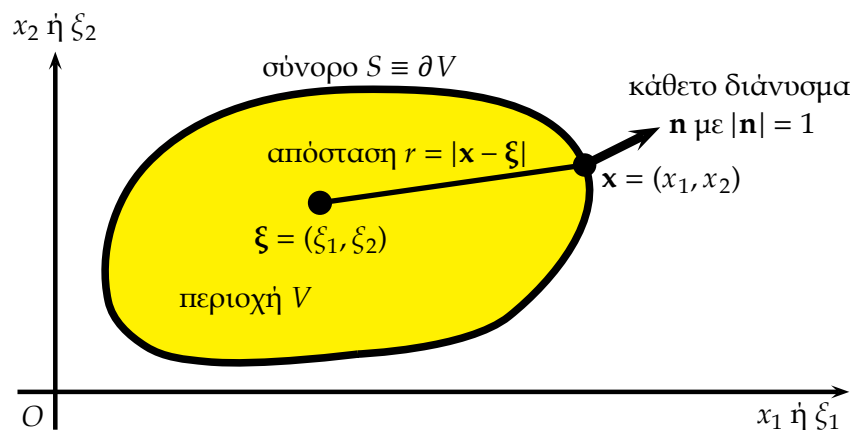
$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{και πιο αναλυτικά} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \quad (6.2.16)$$

με άγνωστη συνάρτηση τη συνάρτηση $u = u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, x_3)$. Στο σύνορο $S \equiv \partial V$ της ανοικτής περιοχής V θεωρούμε διαθέσιμες τις σχετικές συνοριακές συνθήκες. Συγκεκριμένα θεωρούμε διαθέσιμη μία συνθήκη σε κάθε σημείο \mathbf{x} του συνόρου S .

Ανάλογα ισχύουν βέβαια και στην πιο απλή περίπτωση ανοικτής διδιάστατης περιοχής V με σύνορο λεία απλή κλειστή καμπύλη $S \equiv \partial V$ (πιο κάτω Σχήμα E6.1). Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει φυσικά η πιο απλή διδιάστατη εξίσωση του Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{και πιο αναλυτικά} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \quad (6.2.17)$$

με άγνωστη συνάρτηση τώρα τη συνάρτηση δύο μεταβλητών $u = u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2)$.



Σχήμα E6.1: Πεπερασμένη ανοικτή διδιάστατη περιοχή V στο επίπεδο Ox_1x_2 ή $O\xi_1\xi_2$ με σύνορο λεία απλή κλειστή καμπύλη $S \equiv \partial V$.

Για την εύρεση της σχετικής συνοριακής ολοκληρωτικής εξισώσεως θα χρησιμοποιήσουμε εδώ, όπως ήδη αναφέραμε, τη δεύτερη ταυτότητα του Green (6.2.12) γι' αυτήν την άγνωστη συνάρτηση $u = u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, x_3)$. Σαν δεύτερη συνάρτηση v στην ίδια ταυτότητα (6.2.12) θα χρησιμοποιήσουμε μια ειδική λύση G της τριδιάστατης εξισώσεως του Laplace και συγκεκριμένα μια λύση της που να είναι ιδιόμορφη (εδώ να απειρίζεται) στο σημείο $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ της περιοχής V . Αυτήν τη συνάρτηση τη γράφουμε σαν $G = G(\mathbf{x}, \xi)$, όπου βέβαια \mathbf{x} και ξ είναι τα δύο σημεία $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Δηλαδή λίγο πιο αναλυτικά έχουμε $G = G(\mathbf{x}, \xi) = G(x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Αυτή η συνάρτηση $G = G(\mathbf{x}, \xi)$ πληροί εδώ την τριδιάστατη εξίσωση του Laplace (6.2.16) ως προς την πρώτη μεταβλητή της \mathbf{x} ή λίγο καλύτερα ως προς τις τρεις πρώτες μεταβλητές της (x_1, x_2, x_3) . Συγκεκριμένα ισχύει η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_3^2} = 0 \quad \text{φυσικά με } \mathbf{x} \neq \xi. \quad (6.2.18)$$

Πιο αναλυτικά, περιλαμβάνοντας τώρα και το ανώμαλο (ή ιδιόμορφο) σημείο ξ , θεωρούμε ότι για τη συνάρτηση $G = G(\mathbf{x}, \xi)$ ισχύει η τριδιάστατη εξίσωση του Poisson

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial x_3^2} = \delta(\mathbf{x} - \xi). \quad (6.2.19)$$

Εδώ $\delta(\mathbf{x} - \xi)$ είναι η τριδιάστατη συνάρτηση δέλτα του Dirac. Αυτή μηδενίζεται παντού εκτός από το σημείο $\mathbf{x} = \xi$, όπου απειρίζεται. Και μάλιστα απειρίζεται με τέτοιο τρόπο, ώστε το σχετικό τριπλό ολοκλήρωμα να ισούται με τη μονάδα. Άρα

$$\iiint_V \delta(\mathbf{x} - \xi) dV(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{με } \xi \in V. \quad (6.2.20)$$

Φυσικά για $\mathbf{x} \neq \xi$, δηλαδή σε όλα τα σημεία της περιοχής V εκτός από το σημείο ξ , η εξίσωση του Poisson (6.2.19) μεταπίπτει στην εξίσωση του Laplace (6.2.18).

Η λύση της πιο πάνω εξισώσεως του Poisson (6.2.19) χωρίς καμία συνοριακή συνθήκη και με μηδενισμό της στο άπειρο (για $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$) αποδεικνύεται πως έχει στις τρεις διαστάσεις (x_1, x_2, x_3) την πολύ απλή μορφή

$$G = G(\mathbf{x}, \xi) = -\frac{1}{4\pi r}. \quad (6.2.21)$$

Εδώ το σύμβολο r δηλώνει απλά την απόσταση των δύο σημείων \mathbf{x} και ξ , δηλαδή

$$r = r(\mathbf{x}, \xi) = |\mathbf{x} - \xi| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}. \quad (6.2.22)$$

Και βέβαια, όταν $\mathbf{x} = \xi$, δηλαδή όταν τα δύο σημεία \mathbf{x} και ξ συμπίπτουν, $r = 0$ και επομένως η συνάρτηση G στον πιο πάνω τύπο (6.2.21) απειρίζεται. Λέμε λοιπόν ότι η συνάρτηση G παρουσιάζει ιδιομορφία στο σημείο $\mathbf{x} = \xi$. Εντούτοις σε κάθε άλλο σημείο $\mathbf{x} \neq \xi$ (είτε $\xi \in V$ είτε $\xi \notin V$) αυτή η συνάρτηση G είναι συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση που επαληθεύει την τριδιάστατη εξίσωση του Laplace (6.2.18).

Με βάση την πιο πάνω σχέση (6.2.21) μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε και τις μερικές παραγώγους ως προς x_i της συναρτήσεως $G = G(\mathbf{x}, \xi)$ στις τρεις διαστάσεις (για $n = 3$), που θα τις χρειαστούμε παρακάτω. Πραγματικά με τη χρήση και της σχέσεως (6.2.22) για την απόσταση $r = |\mathbf{x} - \xi|$ των δύο σημείων \mathbf{x} και ξ στον τριδιάστατο χώρο (για $n = 3$) για τις παραγώγους της συναρτήσεως $G(\mathbf{x}, \xi)$ ως προς x_i βρίσκουμε αρκετά εύκολα με τον κανόνα της αλυσίδας στις παραγώγους (ή κανόνα της αλληλουχίας των παραγώγων) ότι

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_i} = \frac{dG}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{2(x_i - \xi_i)}{2r} = \frac{x_i - \xi_i}{4\pi r^3} \quad \text{για } n = 3. \quad (6.2.23)$$

Ανάλογα για τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους ως προς ξ_i έχουμε

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} = \frac{dG}{dr} \frac{\partial r}{\partial \xi_i} = \frac{1}{4\pi r^2} \left[-\frac{2(x_i - \xi_i)}{2r} \right] = -\frac{x_i - \xi_i}{4\pi r^3} \quad \text{για } n = 3. \quad (6.2.24)$$

Και ασφαλώς μπορούμε αρκετά εύκολα να υπολογίσουμε ανάλογα και τις μερικές παραγώγους δευτέρας ή/και ανωτέρας τάξεως της ίδιας συναρτήσεως $G = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ως προς x_i ή/και ως προς ξ_i .

Σημειώνουμε επίσης ότι στις δύο διαστάσεις (x_1, x_2) η αντίστοιχη συνάρτηση της συναρτήσεως $G = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ στη σχέση (6.2.21) παίρνει την κάπως διαφορετική μορφή

$$G = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \ln r. \quad (6.2.25)$$

Τώρα στις δύο διαστάσεις για την απόσταση r των σημείων \mathbf{x} και $\boldsymbol{\xi}$ ισχύει ο τύπος

$$r = r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2}. \quad (6.2.26)$$

Από τον τύπο (6.2.25) παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $G = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ παρουσιάζει τώρα λογαριθμική ιδιομορφία στον απειρισμό της στο ανώμαλο σημείο $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ με $r = 0$.

Με βάση τώρα τη σχέση (6.2.25) μπορούμε πάλι να υπολογίσουμε εύκολα και τις μερικές παραγώγους ως προς x_i της συναρτήσεως $G = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ στις δύο διαστάσεις (για $n = 2$), που θα τις χρειαστούμε κι αυτές παρακάτω. Πραγματικά με χρήση και της σχέσεως (6.2.26) για την απόσταση $r = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ των δύο σημείων \mathbf{x} και $\boldsymbol{\xi}$, εδώ όμως στο διδιάστατο χώρο (για $n = 2$), για τις παραγώγους ως προς x_i βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial x_i} = \frac{dG}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi r} \frac{2(x_i - \xi_i)}{2r} = \frac{x_i - \xi_i}{2\pi r^2} \quad \text{για } n = 2. \quad (6.2.27)$$

Ανάλογα για τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους ως προς ξ_i έχουμε

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} = \frac{dG}{dr} \frac{\partial r}{\partial \xi_i} = \frac{1}{2\pi r} \left[-\frac{2(x_i - \xi_i)}{2r} \right] = -\frac{x_i - \xi_i}{2\pi r^2} \quad \text{για } n = 2. \quad (6.2.28)$$

Και ασφαλώς μπορούμε και πάλι αρκετά εύκολα να υπολογίσουμε ανάλογα και τις μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως ή/και ανωτέρας τάξεως της ίδιας συναρτήσεως $G = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ ως προς x_i ή/και ως προς ξ_i .

Αυτή εδώ η συνάρτηση $G = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ είτε στις τρεις διαστάσεις (για $n = 3$) με τον τύπο (6.2.21) είτε στις δύο διαστάσεις (για $n = 2$) με τον τύπο (6.2.25) καλείται στις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις *θεμελιώδης λύση* εννοείται εδώ της εξισώσεως του Laplace (τριδιάστατης ή διδιάστατης). Με διαφορετική ορολογία στις συναρτήσεις Green, που θα τις μελετήσουμε εκτενώς παρακάτω στο Κεφάλαιο Ε10, καλείται *συνάρτηση Green ελεύθερου χώρου*. Από φυσική άποψη η συνάρτηση $G = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ δηλώνει το δυναμικό που δημιουργεί στον άπειρο χώρο μια πηγή μοναδιαίας εντάσεως που βρίσκεται στο σημείο $\boldsymbol{\xi}$. Και βέβαια γι' αυτήν τη συνάρτηση $G = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ (που αναφέρεται στον άπειρο χώρο) δεν υπάρχουν καθόλου συνοριακές συνθήκες εκτός προφανώς από την απαίτηση του μηδενισμού της στο άπειρο (για $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$).

E6.2.4

E6.2.4. Ο συνοριακός ολοκληρωτικός τύπος για την εξίσωση του Laplace

Διαθέτουμε ήδη αρκετά εφόδια και είμαστε έτοιμοι να προχωρήσουμε στην εύρεση της συνοριακής ολοκληρωτικής εξισώσεως για την εξίσωση του Laplace (6.2.16) στις τρεις διαστάσεις (για $n = 3$), την επαναλαμβάνουμε

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{και πιο αναλυτικά} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0, \quad (6.2.29)$$

και ανάλογα στις δύο διαστάσεις (για $n = 2$). Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι οι σχετικές συνοριακές συνθήκες αφορούν στο σύνορο $S \equiv \partial V$ της περιοχής V , στην οποία θέλουμε να επιλύσουμε την εξίσωση του Laplace. Σε αυτές τις συνοριακές συνθήκες θα αναφερθούμε λεπτομερώς πιο κάτω. Είμαστε λοιπόν απόλυτα έτοιμοι και ξεκινάμε αμέσως τη δουλειά μας!

Εδώ εμείς απλά εφαρμόζουμε τη δεύτερη ταυτότητα του Green (6.2.12) με βάση την άγνωστη συνάρτηση $u = u(\mathbf{x})$ και επίσης τη θεμελιώδη λύση $G = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ της τριδιάστατης εξίσωσης του Laplace στη σχέση (6.2.21), που τη θεωρούμε φυσικά στις παραγωγίσεις και στις ολοκληρώσεις συνάρτηση μόνο του \mathbf{x} . Έτσι παίρνουμε

$$\iiint_V (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u) dV(\mathbf{x}) = \iint_S \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS(\mathbf{x}). \quad (6.2.30)$$

Αλλά στο αριστερό τριπλό ολοκλήρωμα στην περιοχή V η άγνωστη συνάρτησή μας $u = u(\mathbf{x})$ είναι αρμονική συνάρτηση, απλά επειδή επαληθεύει την εξίσωση του Laplace (6.2.29). Επίσης η συνάρτηση $G = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ είναι σχεδόν παντού (εκτός βέβαια από το σημείο $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$) και αυτή αρμονική συνάρτηση στην τριδιάστατη περιοχή V , απλά επειδή επαληθεύει την τριδιάστατη εξίσωση του Poisson (6.2.19). Επομένως η δεύτερη ταυτότητα του Green στην παρούσα μορφή της (6.2.30) για την εξίσωση του Laplace (6.2.29) απλοποιείται στο αριστερό μέλος της και παίρνει τη μορφή

$$\iiint_V u(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) dV(\mathbf{x}) = \iint_S \left[u(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \right] dS(\mathbf{x}), \quad (6.2.31)$$

όπου τώρα δηλώσαμε σαφώς και τις μεταβλητές των δύο συναρτήσεων u και G .

Ως προς το αριστερό μέλος αυτής εδώ της ταυτότητας (6.2.31) διακρίνουμε τώρα τρεις διαφορετικές περιπτώσεις που αφορούν στο ανώμαλο (ή ιδιόμορφο) σημείο $\boldsymbol{\xi}$:

(α) Αν το σημείο $\boldsymbol{\xi}$ βρίσκεται έξω από την περιοχή V και το σύνορο της $S \equiv \partial V$, δηλαδή αν $\boldsymbol{\xi} \notin V \cup S$, τότε στην ολοκλήρωση αριστερά στην περιοχή V η συνάρτηση $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ μηδενίζεται παντού στο αριστερό τριπλό ολοκλήρωμα, οπότε μηδενίζεται και όλο αυτό το ολοκλήρωμα. Τότε η πιο πάνω ταυτότητα (6.2.31) παίρνει τη μορφή

$$\iint_S \left[u(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \right] dS(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\xi} \notin V \cup S \quad (6.2.32)$$

(με την ολοκλήρωση φυσικά ως προς \mathbf{x} , όχι ως προς $\boldsymbol{\xi}$) ή απόλυτα ισοδύναμα

$$\iint_S u(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} dS(\mathbf{x}) = \iint_S G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} dS(\mathbf{x}) \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\xi} \notin V \cup S \quad (6.2.33)$$

και γίνεται έτσι απλά ένα είδος θεωρήματος αμοιβαιότητας. Αυτό το γεγονός είναι ασφαλώς ενδιαφέρον, αλλά όχι και ιδιαίτερα χρήσιμο στον παρόντα σκοπό μας της επιλύσεως της τριδιάστατης εξίσωσης του Laplace (6.2.29) μέσω της αναγωγής της σε συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση στο σύνορο S της περιοχής V .

(β) Αν το σημείο $\boldsymbol{\xi}$ βρίσκεται μέσα στην περιοχή V (που, ας το υπενθυμίσουμε, τη θεωρούμε μια ανοικτή περιοχή χωρίς να περιλαμβάνει το σύνορό της S), δηλαδή αν $\boldsymbol{\xi} \in V$, τότε στον τύπο (6.2.31) στην ολοκλήρωση αριστερά στην περιοχή V η συνάρτηση $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ μηδενίζεται σχεδόν παντού στο αριστερό τριπλό ολοκλήρωμα. Συγκεκριμένα η συνάρτηση $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ δε μηδενίζεται, αλλά απειρίζεται, μόνο στο ανώμαλο (ή ιδιόμορφο) σημείο $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ της περιοχής V . Τότε γι' αυτήν τη συνάρτηση $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ ισχύει ο τύπος (6.2.20) και επιπλέον αποδεικνύεται ότι ισχύει και ο γενικότερός του σχετικός τύπος

$$\iiint_V u(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) dV(\mathbf{x}) = u(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\xi} \in V. \quad (6.2.34)$$

Τότε βέβαια δε μηδενίζεται το αριστερό τριπλό ολοκλήρωμα στον τύπο (6.2.31), αλλά παίρνει την τιμή $u(\xi)$. Επομένως στην περίπτωση αυτή, $\xi \in V$, ο παραπάνω τύπος (6.2.31) παίρνει τη μορφή του συνοριακού ολοκληρωτικού τύπου

$$u(\xi) = \iint_S \left[u(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial n} - G(\mathbf{x}, \xi) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \right] dS(\mathbf{x}) \quad \text{με } \xi \in V \quad (6.2.35)$$

και με ολοκλήρωση (και εδώ ως προς \mathbf{x}) μόνο πάνω στο σύνορο S της περιοχής V .

Για διευκόλυνσή μας στο συμβολισμό ορίζουμε μάλιστα τη νέα συνάρτηση

$$H(\mathbf{x}, \xi) := \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial n} = \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial x_i} n_i \quad (6.2.36)$$

με $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ το προς τα έξω μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S . Εδώ οι μερικές παράγωγοι $\partial G(\mathbf{x}, \xi)/\partial x_i$ δίνονται από τους τύπους (6.2.23) στις τρεις διαστάσεις (για $n = 3$) και (6.2.27) στις δύο διαστάσεις (για $n = 2$). Τότε ο πιο πάνω τύπος (6.2.35) γράφεται και στη λίγο πιο απλή (στο συμβολισμό μόνο!) μορφή του

$$u(\xi) = \iint_S \left[H(\mathbf{x}, \xi) u(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}, \xi) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \right] dS(\mathbf{x}) \quad \text{με } \xi \in V. \quad (6.2.37)$$

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση Ε6.1:** Για την εύρεση του πιο πάνω τύπου (6.2.35) και έπειτα του ισοδύναμου του τύπου (6.2.37) χρησιμοποιήθηκε εδώ ο τύπος (6.2.30) σε συνδυασμό (i) με την εξίσωση του Laplace (6.2.29) για την άγνωστη σε αυτήν την εξίσωση συνάρτηση $u = u(\mathbf{x})$, (ii) με την εξίσωση του Poisson (6.2.19) για τη θεμελιώδη λύση $G = G(\mathbf{x}, \xi)$ και (iii) με τον τύπο (6.2.34) για τη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(\mathbf{x} - \xi)$. Δηλαδή χρησιμοποιήθηκε ολόκληρη η περιοχή V που μας ενδιαφέρει και στο ανώμαλο σημείο ξ σε αυτήν έγινε βέβαια κατάλληλη χρήση της συναρτήσεως $\delta(\mathbf{x} - \xi)$.

Υπάρχει όμως και μια δεύτερη και εξίσου ενδιαφέρουσα και πρακτικά χρήσιμη και αποτελεσματική σχετική δυνατότητα που οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα (6.2.35) ή ισοδύναμα (6.2.37) απαλλάσσοντάς μας μάλιστα από την υποχρέωση να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση δέλτα $\delta(\mathbf{x} - \xi)$. Αυτή η δυνατότητα είναι να απομονωθεί το ανώμαλο σημείο ξ της ανοικτής περιοχής V με μία σφαίρα Σ ακτίνας ε (ανάλογα στις δύο διαστάσεις με έναν κύκλο Σ ακτίνας ε) με κέντρο το σημείο ξ και μετά να γίνει η σχετική εργασία στην υπόλοιπη περιοχή $V^* = V - \Sigma$. Αυτή η νέα περιοχή V^* χωρίς πια το σημείο ξ θα έχει φυσικά σαν σύνορο όχι μόνο το σύνορο S της αρχικής περιοχής V , αλλά και το σύνορο S^* της σφαίρας Σ (στις δύο διαστάσεις του κύκλου Σ).

Ασφαλώς τότε στην περιοχή V^* δεν υπάρχει πια καμία απολύτως ανάγκη να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση του Poisson (6.2.19) για τη θεμελιώδη λύση $G = G(\mathbf{x}, \xi)$. Η προηγούμενη της εξίσωση του Laplace (6.2.18) μας αρκεί τώρα που $\mathbf{x} \neq \xi$, γιατί δουλεύουμε τώρα στην περιοχή V^* , που δεν περιέχει πια το σημείο ξ και όπου η θεμελιώδης λύση $G = G(\mathbf{x}, \xi)$ στο πρόβλημά μας είναι απόλυτα ομαλή συνάρτηση που επαληθεύει την εξίσωση του Laplace (6.2.18). Αυτή δίνεται στις τρεις διαστάσεις από τον τύπο (6.2.21) (στις δύο διαστάσεις από τον τύπο (6.2.25)). Και φυσικά σε αυτήν τη διαδικασία θα πρέπει στο τέλος να πάρουμε το όριο για $\varepsilon \rightarrow 0$ για την ακτίνα ε της σφαίρας Σ (στις δύο διαστάσεις του κύκλου Σ πάλι με ακτίνα ε).

Εδώ όμως εμείς προτιμήσαμε την πρώτη δυνατότητα αντί για τη δεύτερη. Αυτό το κάναμε, επειδή έχουμε ήδη κάποια εξοικείωση με τη συνάρτηση δέλτα του Dirac και επιπλέον επειδή έτσι μπορέσαμε και αποφύγαμε τη νέα περιοχή V^* και το εσωτερικό σύνορο της S^* , τους σχετικούς υπολογισμούς και την οριακή διαδικασία. ▲

Από πρακτική άποψη ο τύπος (6.2.37) μας είναι αρκετά πιο χρήσιμος από τον τύπο (6.2.32) ή (6.2.33) στην πρώτη περίπτωση, όπου ήταν $\xi \notin V \cup S$. Αυτό συμβαίνει, επειδή η συνάρτηση $G(\mathbf{x}, \xi)$ (η θεμελιώδης λύση ή συνάρτηση Green ελεύθερου χώρου) μας είναι γνωστή από τη σχέση (6.2.21) εδώ στις τρεις διαστάσεις (για $n = 3$), ανάλογα από τη σχέση (6.2.25) στις δύο διαστάσεις (για $n = 2$) και είναι μάλιστα και αρκετά απλή συνάρτηση και στις δύο αυτές περιπτώσεις. Επομένως ο τύπος (6.2.37) θεωρητικά θα μπορούσε να μας επιτρέψει τον υπολογισμό της άγνωστης συναρτήσεως $u(\mathbf{x})$ (ή $u(\xi)$), το ίδιο κάνει μέσα σε όλη την περιοχή V (υπενθυμίζουμε ανοικτή περιοχή, χωρίς να περιλαμβάνει το σύνορό της). Αυτό θα συνέβαινε αν τύχαινε και οι συνοριακές τιμές $u(\mathbf{x})$ και $\partial u(\mathbf{x})/\partial n$ της ίδιας της άγνωστης συναρτήσεως και της παραγώγου της κατά την κάθετο στην κλειστή επιφάνεια S , που είναι το σύνορο της περιοχής V , ήσαν και οι δύο τους γνωστές σε κάθε σημείο \mathbf{x} της επιφάνειας S . Δυστυχώς όμως γενικά δε συμβαίνει αυτό προς το παρόν τουλάχιστον. Θα δούμε παρακάτω πώς μπορεί να αντιμετωπισθεί αυτό το σοβαρό πρόβλημα.

(γ) Προχωράμε τώρα και στην τρίτη και τελευταία περίπτωση, που μάλλον είναι και η πιο ενδιαφέρουσα. Εδώ υποθέτουμε ότι το σημείο ξ βρίσκεται πάνω στην κλειστή επιφάνεια S , δηλαδή πάνω στο σύνορο της περιοχής V , συγκεκριμένα ότι $\xi \in S$. Τότε το τριπλό ολοκλήρωμα στον τύπο (6.2.31) αριστερά δεν κάνει ούτε μηδέν, όπως συνέβη στη σχέση (6.2.32), ούτε $u(\xi)$, όπως συνέβη στη σχέση (6.2.37). Αποδεικνύεται ότι κάνει ακριβώς το μισό αυτών των δύο αποτελεσμάτων, δηλαδή κάνει $(1/2)u(\xi)$. Συγκεκριμένα σε αυτήν την περίπτωση αποδεικνύεται ότι ισχύει ο τύπος

$$\frac{1}{2}u(\xi) = \iint_S \left[H(\mathbf{x}, \xi)u(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}, \xi) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \right] dS(\mathbf{x}) \quad \text{με } \xi \in S. \quad (6.2.38)$$

Αυτό συμβαίνει υπό την προϋπόθεση (την οποία δεχόμαστε εδώ) ότι αναφερόμαστε σε ένα σημείο ξ της κλειστής επιφάνειας S , όπου αυτή η επιφάνεια είναι λεία, δηλαδή έχει εφαπτόμενο επίπεδο. Στην αντίθετη περίπτωση αποδεικνύεται ότι ο πιο πάνω τύπος (6.2.38) τροποποιείται κατάλληλα, όμως μόνο ως προς το συντελεστή του $1/2$ στο αριστερό μέλος του $(1/2)u(\xi)$, ο οποίος στην περίπτωση αυτή παύει να είναι $1/2$.

Έχουμε λοιπόν τελικά τρεις συνοριακούς ολοκληρωτικούς τύπους με συνοριακά επιφανειακά ολοκληρώματα πάνω στην κλειστή επιφάνεια S , που περιβάλλει την περιοχή V ενδιαφέροντός μας για την επίλυση της εξισώσεως του Laplace (6.2.29). Συγκεκριμένα ισχύει ο τύπος (6.2.32) για $\xi \notin V \cup S$, ο τύπος (6.2.37) για $\xi \in V$ και τέλος ο τύπος (6.2.38) για $\xi \in S$. Καλύφθηκαν έτσι όλες οι περιπτώσεις.

Τον πρώτο από αυτούς, το συνοριακό ολοκληρωτικό τύπο (6.2.32), το θεωρούμε εδώ (σωστά!) σαν ένα θεώρημα αμοιβαιότητας ιδίως γραμμένο στην ισοδύναμη μορφή του (6.2.33) και τον αγνοούμε (κακώς ίσως!). Αυτό το κάνουμε κυρίως επειδή δεν αφορά στην περιοχή $V \cup S$ ενδιαφέροντός μας για την επίλυση της εξισώσεως του Laplace (6.2.29) και δε θέλουμε ιδιαίτερα να χρησιμοποιούμε σημεία $\xi \notin V \cup S$, παρόλο που αυτό δεν είναι λάθος από μαθηματική άποψη.

Ο δεύτερος τύπος (6.2.37) για $\xi \in V$ μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τον υπολογισμό της άγνωστης συναρτήσεως $u(\xi)$ σε κάθε σημείο ξ της ανοικτής περιοχής V ισχύος της εξισώσεως του Laplace (6.2.29). Και μάλιστα, αν τον παραγωγίσουμε ως προς ξ_i (με $i = 1, 2, 3$), παίρνουμε αμέσως και τις μερικές παραγώγους της άγνωστης συναρτήσεως $u(\xi)$ σε όλη την ανοικτή περιοχή V που μας ενδιαφέρει. Συγκεκριμένα από τον τύπο (6.2.37) προκύπτει αμέσως ότι

$$\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_i} \equiv u_{,i}(\xi) = \iint_S \left[\frac{\partial H(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi_i} u(\mathbf{x}) - \frac{\partial G(\mathbf{x}, \xi)}{\partial \xi_i} \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \right] dS(\mathbf{x}) \quad \text{με } \xi \in V. \quad (6.2.39)$$

Εδώ οι μερικές παράγωγοι $\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})/\partial \xi_i$ δίνονται από τους τύπους (6.2.24) στις τρεις διαστάσεις (για $n = 3$) και (6.2.28) στις δύο διαστάσεις (για $n = 2$). Ανάλογα με βάση τη σχέση (6.2.36) μπορούν εύκολα να υπολογισθούν και οι μερικές παράγωγοι $\partial H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})/\partial \xi_i$. Και μπορούμε φυσικά πέρα από τις σχέσεις (6.2.39) να προχωρήσουμε και σε παραπέρα μερικές παραγωγίσεις ως προς ξ_i , αν βέβαια ενδιαφερόμαστε και για παραγώγους ανωτέρας τάξεως της άγνωστης συναρτήσεως $u(\boldsymbol{\xi})$ στην ανοικτή περιοχή V όπου εργαζόμαστε στο παρόν πρόβλημα.

Μια χαρά είναι λοιπόν ο δεύτερος συνοριακός ολοκληρωτικός τύπος (6.2.37) και πραγματικά μας είναι εξαιρετικά χρήσιμος. Δυστυχώς όμως η χρήση του απαιτεί από μέρους μας τη γνώση και των δύο συνοριακών τιμών $u(\mathbf{x})$ και $\partial u(\mathbf{x})/\partial n$ σε όλη την κλειστή επιφάνεια S , δηλαδή σε όλο το σύνορο της περιοχής V . Αυτό όμως γενικά δεν ισχύει. Γενικά γνωρίζουμε στην επιφάνεια S είτε τις τιμές $u(\mathbf{x})$ της άγνωστης συναρτήσεως είτε τις τιμές $\partial u(\mathbf{x})/\partial n$ της παραγώγου της κατά το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα \mathbf{n} (εννοείται προς τα έξω) στην ίδια επιφάνεια S . Δε γνωρίζουμε όμως ταυτόχρονα και τις δύο αυτές τιμές στο ίδιο ακριβώς σημείο \mathbf{x} της επιφάνειας S . Δε συμβαίνει αυτό γενικά στα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού ακόμη και όταν έχουμε διαθέσιμες όσες πιο πολλές πειραματικές μετρήσεις μπορούμε. Και φυσικά, ακόμη και όταν τις γνωρίζουμε και τις δύο αυτές τιμές πάνω στην επιφάνεια S , έστω πειραματικά, αυτές δε μπορούν να είναι οποιοσδήποτε τιμές, αλλά θα πρέπει σίγουρα να πληρούν το συνοριακό ολοκληρωτικό τύπο (6.2.38), που αναφέρεται αποκλειστικά στην επιφάνεια S (στα σημεία $\boldsymbol{\xi} \in S$).

Τέλος ο τρίτος τύπος (6.2.38) για $\boldsymbol{\xi} \in S$, που μόλις αναφέραμε, είναι αυτός που μας λύνει τα χέρια στην παραπάνω δυσκολία μας. Γι' αυτό και του αφιερώνουμε αμέσως παρακάτω ιδιαίτερη παράγραφο στην παρούσα Ενότητα Ε6.2, που αφορά στην εξίσωση του Laplace. Ας γίνουμε λοιπόν συγκεκριμένοι.

E6.2.5

E6.2.5. Η συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση για την εξίσωση του Laplace

Λέγαμε πιο πάνω ότι τελικά ο χρήσιμος τύπος για τον υπολογισμό της άγνωστης συναρτήσεως $u(\boldsymbol{\xi})$ (ή $u(\mathbf{x})$) και σε όσο βαθμό χρειάζεται και των μερικών παραγώγων της είναι ο τύπος (6.2.37). Εντούτοις χρειαζόμαστε σε αυτόν ταυτόχρονα και τις δύο τιμές $u(\mathbf{x})$ και $\partial u(\mathbf{x})/\partial n$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(\boldsymbol{\xi})$ και της παραγώγου της κατά την κάθετο σε όλα τα σημεία \mathbf{x} του συνόρου S της περιοχής V . Στην πραγματικότητα μαζί με την τριδιάστατη εξίσωση του Laplace (6.2.29) διαθέτουμε γενικά στο σύνορο S της περιοχής V και τις εξής γνωστές συνοριακές τιμές που τη συνοδεύουν:

- Είτε τις συνοριακές τιμές $u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ της ίδιας της άγνωστης συναρτήσεως $u(\boldsymbol{\xi})$ πάνω σε όλο το σύνορο S . Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι έχουμε *συνοριακές συνθήκες Dirichlet* ή πιο απλά *πρόβλημα Dirichlet*.
- Είτε τις συνοριακές τιμές $\partial u(\mathbf{x})/\partial n = q(\mathbf{x})$ της παραγώγου κατά την κάθετο της άγνωστης συναρτήσεως $u(\boldsymbol{\xi})$ πάνω σε όλο το σύνορο S . Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι έχουμε *συνοριακές συνθήκες Neumann* ή πιο απλά *πρόβλημα Neumann*.
- Είτε τις συνοριακές τιμές $u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(\boldsymbol{\xi})$ πάνω σε ένα μόνο τμήμα S_1 του συνόρου S και τις συνοριακές τιμές $\partial u(\mathbf{x})/\partial n = q(\mathbf{x})$ της παραγώγου κατά την κάθετο της άγνωστης συναρτήσεως $u(\boldsymbol{\xi})$ πάνω στο υπόλοιπο τμήμα S_2 του ίδιου συνόρου S . Προφανώς εδώ ισχύουν οι δύο σχέσεις $S_1 \cup S_2 = S$ και $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι έχουμε *μικτές συνοριακές συνθήκες* ή ισοδύναμα *πρόβλημα μικτών συνοριακών συνθηκών*.

Υπάρχουν επίσης και άλλες δυνατότητες συνοριακών συνθηκών, όπως είναι οι *συνοριακές συνθήκες Robin* ή πιο απλά *πρόβλημα Robin*. Αυτές γενικεύουν τόσο τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet όσο και τις συνοριακές συνθήκες Neumann, που αποτελούν και οι δυο τους ειδικές περιπτώσεις των συνοριακών συνθηκών Robin.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι έχουμε συνοριακές συνθήκες Dirichlet, δηλαδή ξέρουμε τις τιμές $u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(\xi)$ σε όλο το σύνορο S της περιοχής V . Τότε βέβαια μας λείπουν όλες οι τιμές $\partial u(\mathbf{x})/\partial n$ της παραγώγου κατά την κάθετο στο ίδιο σύνορο S . Και τις χρειαζόμαστε φυσικά αυτές τις τιμές στον ολοκληρωτικό τύπο (6.2.37) για τον υπολογισμό της άγνωστης συναρτήσεως $u(\xi)$ στην περιοχή V . Τι κάνουμε σε αυτήν την περίπτωση; Μα απλά προσδιορίζουμε και τις επιπλέον συνοριακές τιμές $\partial u(\mathbf{x})/\partial n = q(\mathbf{x})$ χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο (6.2.38). Αυτός στην περίπτωσή μας όπου $u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2} p(\xi) = \iint_S [H(\mathbf{x}, \xi)p(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}, \xi)q(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}) \quad \text{με } \xi \in S. \quad (6.2.40)$$

Πού καταλήξαμε; Τι έχουμε εδώ; Μα απλά εδώ που είναι γνωστές οι συνοριακές τιμές $u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ στο σύνορο S (ισοδύναμα στην κλειστή επιφάνεια S , που την υποθέτουμε μάλιστα λεία) έχουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση ως προς τις άγνωστες τιμές $\partial u(\mathbf{x})/\partial n = q(\mathbf{x})$ στο ίδιο σύνορο S . Βέβαια με τη συνάρτηση $p(\mathbf{x})$ να είναι εδώ γνωστή και τη συνάρτηση $q(\mathbf{x})$ να είναι άγνωστη. Πρόκειται για μια διδιάστατη ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους, επειδή η άγνωστη συνάρτηση $q(\mathbf{x})$ παρουσιάζεται μόνο μέσα στο επιφανειακό ολοκλήρωμα, και προφανώς γραμμική και μη ομογενή. Και επειδή η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στο σύνορο S της περιοχής V , την καλούμε εύλογα *συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση*. Και ασφαλώς η λύση της (γενικά με κάποια κατάλληλη αριθμητική μέθοδο, όπως είναι κυρίως τα συνοριακά στοιχεία) θα μας δώσει (εννοείται γενικά προσεγγιστικά, όχι με κλειστό τύπο) την άγνωστη συνάρτηση $q(\mathbf{x})$, δηλαδή τις δεύτερες συνοριακές τιμές για την άγνωστη συνάρτηση $u(\xi)$ (ή $u(\mathbf{x})$) στην εξίσωση του Laplace (6.2.29), οι οποίες μας έλειπαν μέχρι τώρα. Και τότε χαρούμενοι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συνοριακό ολοκληρωτικό τύπο (6.2.37) σε όλη την ανοικτή περιοχή V . Τον επαναλαμβάνουμε

$$u(\xi) = \iint_S [H(\mathbf{x}, \xi)p(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}, \xi)q(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}) \quad \text{με } \xi \in V \quad (6.2.41)$$

εδώ βέβαια με $u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ και $\partial u(\mathbf{x})/\partial n = q(\mathbf{x})$ στο σύνορο S της περιοχής V . Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε αμέσως την άγνωστη συνάρτηση $u(\xi)$ σε κάθε σημείο ξ της ανοικτής περιοχής V που μας ενδιαφέρει ως προς την επίλυση της τριδιάστατης εξίσωσης του Laplace (6.2.29).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι έχουμε συνοριακές συνθήκες Neumann, δηλαδή ξέρουμε τις τιμές $\partial u(\mathbf{x})/\partial n = q(\mathbf{x})$ της παραγώγου κατά το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα της άγνωστης συναρτήσεως $u(\xi)$ και πάλι σε ολόκληρο το σύνορο S της περιοχής V . Φυσικά τώρα μας λείπουν όλες οι τιμές $u(\mathbf{x})$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(\xi)$ στο ίδιο σύνορο S . Και ασφαλώς τις χρειαζόμαστε και τώρα αυτές τις τιμές στον τελικό μας συνοριακό ολοκληρωτικό τύπο (6.2.41) για τον υπολογισμό της άγνωστης συναρτήσεως $u(\xi)$ στην περιοχή V . Τι κάνουμε σε αυτήν την περίπτωση; Μα ανάλογα με πριν προσδιορίζουμε και τις επιπλέον συνοριακές τιμές $u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ χρησιμοποιώντας τη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (6.2.40). Το ίδιο είχαμε κάνει και πριν που είχαμε πρόβλημα Dirichlet, δηλαδή πρόβλημα με συνοριακές συνθήκες Dirichlet. Μόνο που τώρα στο πρόβλημα Neumann στη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (6.2.40) άγνωστη συνάρτηση είναι η $p(\mathbf{x})$ και γνωστή συνάρτηση η $q(\mathbf{x})$. Ενώ προηγουμένως στο πρόβλημα Dirichlet συνέβαινε το αντίστροφο: άγνωστη συνάρτηση ήταν

η $q(\mathbf{x})$ και γνωστή η $p(\mathbf{x})$. Έτσι και τώρα στο πρόβλημα Neumann ισχύει ο ίδιος τύπος (6.2.40) σαν συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση, αλλά με άγνωστη συνάρτηση την $p(\mathbf{x})$, όπως ήδη αναφέραμε. Άρα τώρα στο πρόβλημα Neumann έχουμε συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση δευτέρου είδους αντίθετα με το πρόβλημα Dirichlet, όπου, όπως αναφέραμε, είχαμε συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση πρώτου είδους.

Για το παρόν πρόβλημα Neumann με συνοριακές συνθήκες Neumann της μορφής $\partial u(\mathbf{x})/\partial n = q(\mathbf{x})$ ας σημειώσουμε ότι η σχετική γνωστή συνάρτηση $q(\mathbf{x})$ δε μπορεί να είναι εντελώς αυθαίρετη. Για να το δούμε αυτό ... Συγκεκριμένα στο πρόβλημα Neumann θεωρούμε το θεώρημα της αμοιβαιότητας (6.2.15) για την εξίσωση του Laplace, που το επαναλαμβάνουμε και εδώ

$$\iint_S u \frac{\partial v}{\partial n} dS(\mathbf{x}) = \iint_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS(\mathbf{x}). \quad (6.2.42)$$

Προφανώς στο θεώρημα αυτό οι συναρτήσεις $u = u(\mathbf{x})$ και $v = v(\mathbf{x})$ επαληθεύουν και οι δυο τους την εξίσωση του Laplace (6.2.16) ή (6.2.29), δηλαδή είναι και οι δυο τους αρμονικές συναρτήσεις.

Τώρα στο θεώρημα αυτό (6.2.42) σαν πρώτη συνάρτηση $u = u(\mathbf{x})$ θεωρούμε την άγνωστη αρμονική συνάρτηση στο παρόν πρόβλημα Neumann με συνοριακές συνθήκες Neumann της μορφής $\partial u(\mathbf{x})/\partial n = q(\mathbf{x})$. Στη συνέχεια σαν δεύτερη συνάρτηση $v = v(\mathbf{x})$ θεωρούμε την πάρα πολύ απλή σταθερή συνάρτηση $v = 1$, που όμως είναι σίγουρα αρμονική συνάρτηση (πληροί την εξίσωση του Laplace (6.2.16) ή (6.2.29)), όπως επαληθεύεται αμέσως. Με αυτόν τον τρόπο το πιο πάνω θεώρημα αμοιβαιότητας (6.2.42) για την εξίσωση του Laplace παίρνει την πάρα πολύ απλή μορφή

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \iint_S q(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.2.43)$$

Αυτό συμβαίνει, επειδή στο αριστερό μέλος του θεωρήματος (6.2.42) η παράγωγος $\partial v/\partial n$ κατά το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα μηδενίζεται, αφού η συνάρτηση v έχει υποτεθεί σταθερή και συγκεκριμένα $v = 1$. Το συμπέρασμά μας από αυτό το αποτέλεσμα (6.2.43) είναι ότι στο πρόβλημα Neumann για την εξίσωση του Laplace οι σχετικές συνοριακές τιμές $\partial u(\mathbf{x})/\partial n = q(\mathbf{x})$ δε μπορούν να είναι εντελώς αυθαίρετες. Θα πρέπει σίγουρα να πληρούν τον πιο πάνω ολοκληρωτικό περιορισμό (6.2.43).

Σαν ένα απλό παράδειγμα ας αναφερθούμε σε ένα ιδεατό ρευστό σε μόνιμη ροή με $u(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$ το σχετικό δυναμικό ταχύτητας. Ας υποθέσουμε επίσης ότι δεν υπάρχουν πηγές ή καταβόθρες (αρνητικές πηγές) στην περιοχή V . Τότε η ποσότητα $\partial \Phi(\mathbf{x})/\partial n = q(\mathbf{x})$ εκφράζει την κατά το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα ταχύτητα $v_n(\mathbf{x})$ του ρευστού στο σύνορο S της περιοχής V . Και επομένως ο περιορισμός (6.2.43) εκφράζει το γεγονός ότι η συνολική παροχή Q του ρευστού μέσω της κλειστής επιφάνειας S είναι μηδενική. Αυτό είναι βέβαια απόλυτα εύλογο στην παρούσα ροή ιδεατού ρευστού και προφανώς σύμφωνο με τη διατήρηση της μάζας του ρευστού μέσα στην περιοχή V . (Υπενθυμίζεται ότι ένα ιδεατό ρευστό είναι και ασυμπίεστο.)

Ας αναφερθούμε τέλος και στο μικτό πρόβλημα συνοριακών συνθηκών με συνοριακές συνθήκες Dirichlet $u(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x})$ σε ένα τμήμα S_1 του συνόρου S της περιοχής V και συνοριακές συνθήκες Neumann $\partial u(\mathbf{x})/\partial n = q(\mathbf{x})$ στο υπόλοιπο τμήμα S_2 του ίδιου συνόρου. Τότε μπορούμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε το συνοριακό ολοκληρωτικό τύπο (6.2.40), αλλά βλέποντάς τον τώρα σαν μια λίγο παράξενη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση. Συγκεκριμένα στο τμήμα S_1 της κλειστής επιφάνειας S άγνωστη συνάρτηση είναι η $q(\mathbf{x})$ (με τη συνάρτηση $p(\mathbf{x})$ γνωστή εκεί), ενώ στο υπόλοιπο τμήμα S_2 της ίδιας επιφάνειας S άγνωστη συνάρτηση είναι η $p(\mathbf{x})$ (με

τη συνάρτηση $q(\mathbf{x})$ γνωστή εκεί). Κανένα πρόβλημα λοιπόν! Σε κάθε σημείο \mathbf{x} όλης της κλειστής επιφάνειας S μόνο μία είναι η άγνωστη συνάρτηση (ή η $q(\mathbf{x})$ ή η $p(\mathbf{x})$) με τη δεύτερη συνάρτηση (ή την $p(\mathbf{x})$ ή την $q(\mathbf{x})$ αντίστοιχα) γνωστή. Έτσι μπορούμε και σε αυτήν την περίπτωση να λύσουμε (συνήθως αριθμητικά, όχι με κλειστό τύπο, και γενικά με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων) τη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (6.2.40). Με αυτόν τον τρόπο θα προσδιορίσουμε (επαναλαμβάνουμε γενικά αριθμητικά) και τη δεύτερη συνάρτηση που μας λείπει όπου βέβαια μας λείπει.

Έτσι τελικά θα γνωρίζουμε και τις δύο συναρτήσεις $p(\mathbf{x})$ και $q(\mathbf{x})$ σε ολόκληρη την κλειστή επιφάνεια S , που αποτελεί το σύνορο της περιοχής V που μας ενδιαφέρει. Και τότε χαρούμενοι μπορούμε να προσδιορίσουμε και στο παρόν πρόβλημα την άγνωστη συνάρτηση $u(\xi)$ σε κάθε σημείο ξ της ανοικτής περιοχής V με βάση και πάλι το συνοριακό ολοκληρωτικό τύπο (6.2.41). Και παραπέρα με παραγωγίσεις αυτού του θεμελιώδους τύπου μπορούμε να προσδιορίσουμε και κάθε μερική παράγωγο της άγνωστης συναρτήσεως $u(\xi)$ ξανά μέσω ενός επιφανειακού ολοκληρώματος στην κλειστή επιφάνεια S . Και μάλιστα αυτό το πετυχαίνουμε εδώ με βάση τις ίδιες συνοριακές τιμές $p(\mathbf{x})$ και $q(\mathbf{x})$ και όχι μερικές παραγώγους τους. Αυτό συμβαίνει, επειδή αυτές οι μερικές παραγωγίσεις γίνονται ως προς ξ_i , όπως παρατηρούμε και στις σχέσεις (6.2.39) εκεί βέβαια μόνο για τις πρώτες μερικές παραγώγους ως προς ξ_i της άγνωστης συναρτήσεως $u(\xi)$.

Τελειώνουμε αυτήν την παράγραφο με δύο σημαντικές παρατηρήσεις:

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση E6.2:** Στη συνοριακή ολοκληρωτική μας εξίσωση (6.2.40) πάνω στην κλειστή επιφάνεια S (στο σύνορο $S \equiv \partial V$ της ανοικτής περιοχής V) είτε τη βλέπουμε με άγνωστη συνάρτηση την $q(\mathbf{x})$ (στο πρόβλημα Dirichlet) είτε με άγνωστη συνάρτηση την $p(\mathbf{x})$ στο πρόβλημα Neumann είτε με μικτό τρόπο (στο πρόβλημα μικτών συνοριακών συνθηκών) κάτι δε μας αρέσει, κάτι δεν πάει καλά. Συγκεκριμένα, όταν το σημείο \mathbf{x} κατά την επιφανειακή ολοκλήρωση δεξιά πάνω στην επιφάνεια S συμπίπτει με το σταθερό σημείο ξ πάνω στην ίδια επιφάνεια, τότε και οι δύο συναρτήσεις $G(\mathbf{x}, \xi)$ και $H(\mathbf{x}, \xi)$ απειρίζονται. Αυτό είναι σαφές για τη συνάρτηση $G(\mathbf{x}, \xi)$ από τη σχέση (6.2.21) στις τρεις διαστάσεις και (6.2.25) στις δύο διαστάσεις, οπότε βέβαια δεν έχουμε επιφάνεια αλλά καμπύλη S . Ακόμη χειρότερη είναι η κατάσταση για τη συνάρτηση $H(\mathbf{x}, \xi)$ με βάση τη σχέση (6.2.36) εκεί δεξιά σε συνδυασμό με τις σχέσεις (6.2.23) στις τρεις διαστάσεις και (6.2.27) στις δύο διαστάσεις.

Επομένως για $\xi \in S$, ακριβώς όπως συμβαίνει στη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (6.2.40), το ολοκλήρωμα δεξιά δεν είναι ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα. Αντίθετα είναι ένα ιδιόμορφο ολοκλήρωμα λόγω του ότι απειρίζονται οι δύο πυρήνες του $G(\mathbf{x}, \xi)$ και $H(\mathbf{x}, \xi)$ για $\mathbf{x} = \xi$. Ο απειρισμός του πυρήνα $G(\mathbf{x}, \xi)$ για $\mathbf{x} = \xi$ είναι κάπως ασθενέστερος από τον απειρισμό του πυρήνα $H(\mathbf{x}, \xi)$ πάλι για $\mathbf{x} = \xi$, που θεωρείται ισχυρός απειρισμός. Για να αντιμετωπισθεί μαθηματικά αλλά και υπολογιστικά αυτός ο ισχυρός απειρισμός δεν αρκεί ο ορισμός του γενικευμένου ή καταχρηστικού ολοκληρώματος. Απαιτείται ένας ισχυρότερος ορισμός, ώστε να μπορέσει το ολοκλήρωμα στη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (6.2.40) να αποκτήσει συγκεκριμένη τιμή. Αποδεικνύεται ότι ο σχετικός κατάλληλος ορισμός εξαιτίας του πυρήνα $H(\mathbf{x}, \xi)$ είναι ο ορισμός του σαν *ολοκληρώματος κυρίας τιμής τύπου Cauchy*. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι γύρω από το ανώμαλο σημείο ξ αφαιρείται σφαίρα Σ με κέντρο το σημείο ξ και ακτίνα ε και η ολοκλήρωση δε γίνεται στο μέρος της επιφάνειας S που είναι εσωτερικό αυτής της σφαίρας Σ . Τελικά θεωρείται ότι $\varepsilon \rightarrow 0$ και λαμβάνεται το σχετικό όριο. Αυτά στις τρεις διαστάσεις (για $n = 3$).

Στις δύο διαστάσεις (για $n = 2$) αφαιρείται ανάλογα κύκλος Σ με κέντρο το σημείο ξ και ακτίνα ε και στη συνέχεια θεωρείται και πάλι ότι $\varepsilon \rightarrow 0$ και λαμβάνεται το σχετικό όριο. Έτσι η συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (6.2.40) είναι μια ιδιόμορφη ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Cauchy τόσο στις τρεις όσο και στις δύο διαστάσεις.

Τα πιο πάνω και οι σχετικοί υπολογισμοί, που δεν είναι τόσο απλοί και που παραλείπονται εδώ, δεν αποτελούν απλά ένα μαθηματικό τέχνασμα, έναν αυθαίρετο ορισμό του ολοκληρώματος στη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (6.2.40) δεξιά. Δεν αποβλέπουν απλά στο να αποκτήσει έννοια αυτό το ολοκλήρωμα: εδώ την έννοια ολοκληρώματος κυρίας τιμής τύπου Cauchy. Αποδεικνύεται ότι αυτή η κύρια τιμή είναι σύμφωνη και από φυσική άποψη με το πρόβλημα που λύνουμε, εδώ την εξίσωση του Laplace μαζί με τις σχετικές συνοριακές συνθήκες. Δηλαδή θα ήταν λάθος αν υιοθετείτο οποιαδήποτε άλλη κύρια τιμή για το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα που παρουσιάζεται στη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (6.2.40) δεξιά. Μόνο η κύρια τιμή του κατά Cauchy είναι η σωστή τιμή του, δηλαδή η τιμή του ολοκληρώματος η οποία θα μας οδηγήσει τελικά στα σωστά αποτελέσματα για τη λύση αυτής της συνοριακής ολοκληρωτικής εξισώσεως (6.2.40).

Ας τολμήσουμε να συμπληρώσουμε ότι πέρα από τα ιδιόμορφα ολοκληρώματα κυρίας τιμής τύπου Cauchy που μόλις αναφέραμε παρουσιάζονται στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού και ακόμη χειρότερα, δηλαδή ακόμη πιο ιδιόμορφα, ολοκληρώματα. Πρόκειται για ολοκληρώματα με ακόμη πιο έντονο απειρισμό των σχετικών πυρήνων. Τέτοια ολοκληρώματα καλούνται συνήθως *υπεριδιόμορφα ολοκληρώματα (hypersingular integrals)* και οι αντίστοιχες συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις *υπεριδιόμορφες συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις (hypersingular boundary integral equations)*. Οι υπερδιόμορφες συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις παρουσιάζονται με φυσικό τρόπο ιδίως σε προβλήματα ρωγμών στη Θραυστομηχανική (ή Μηχανική της Θραύσεως, Fracture Mechanics) είτε στις τρεις είτε στις δύο διαστάσεις. Παρουσιάζονται όμως και στη Ρευστομηχανική. Και στις δύο περιπτώσεις τα σχετικά ολοκληρώματα υπολογίζονται σαν ολοκληρώματα πεπερασμένου μέρους τύπου Hadamard και όχι πια σαν ολοκληρώματα κυρίας τιμής τύπου Cauchy, κάτι που δεν αρκεί. Δε θα υπεισέλθουμε σε σχετικές λεπτομέρειες. ▲

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση Ε6.3:** Στην προηγούμενη ανάπτυξη βασιστήκαμε στη θεμελιώδη λύση $G(\mathbf{x}, \xi)$, που καλείται επίσης και συνάρτηση Green ελεύθερου χώρου και που εδώ στην εξίσωση του Laplace δίνεται από τον τύπο (6.2.21) στις τρεις διαστάσεις (για $n = 3$) και (6.2.25) στις δύο διαστάσεις (για $n = 2$). Η συνάρτηση αυτή $G(\mathbf{x}, \xi)$ επαληθεύει την εξίσωση του Poisson (6.2.19) στις τρεις διαστάσεις (και ανάλογα στις δύο διαστάσεις) και αντιστοιχεί σε μοναδιαία πηγή στο ανώμαλο σημείο της $\mathbf{x} = \xi$ τείνοντας στο μηδέν για $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. Δηλαδή στη συνάρτηση αυτή $G(\mathbf{x}, \xi)$ δεν υπάρχουν ουσιαστικά συνοριακές συνθήκες. Είναι μια πολύ απλή συνάρτηση και εύκολη στη χρήση της, αλλά δυστυχώς “αδιαφορεί” εντελώς για το σύνορο S της περιοχής V .

Μια εναλλακτική δυνατότητα είναι να χρησιμοποιηθεί μια διαφορετική συνάρτηση $G^*(\mathbf{x}, \xi)$ που να επαληθεύει πάλι την εξίσωση του Poisson (6.2.19), αλλά ταυτόχρονα να λαμβάνει υπόψη το σύνορο S της περιοχής V μηδενιζόμενη μάλιστα σε αυτό (για $\mathbf{x} \in S$). Στην περίπτωση αυτή, επειδή η συνάρτηση $G^*(\mathbf{x}, \xi)$ κατασκευάστηκε τώρα έτσι ώστε να ισχύει η σχέση $G^*(\mathbf{x}, \xi) = 0$ πάνω στο σύνορο S (για $\mathbf{x} \in S$), ο συνοριακός ολοκληρωτικός τύπος (6.2.41) παίρνει την απλοποιημένη μορφή του

$$u(\xi) = \iint_S H^*(\mathbf{x}, \xi) p(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \quad \text{με } \xi \in V. \quad (6.2.44)$$

Εδώ βέβαια τώρα

$$H^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \frac{\partial G^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} = \frac{\partial G^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_i} n_i \quad (6.2.45)$$

απόλυτα ανάλογα με τον ορισμό (6.2.36) της αρχικής συναρτήσεως $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$.

Η σχέση (6.2.44) είναι μια θαυμάσια σχέση για την επίλυση του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση του Laplace στην περιοχή V με γνωστές βέβαια εδώ τις συνοριακές τιμές $p(\mathbf{x})$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(\boldsymbol{\xi})$ (ή $u(\mathbf{x})$) στο σύνορο S της περιοχής V . Απαιτεί όμως τη γνώση της συναρτήσεως $G^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ που προαναφέραμε αν και ο υπολογισμός της δεν είναι κάτι το πολύ εύκολο. Στη συνέχεια με βάση τη συνάρτηση $G^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ προσδιορίζεται και η συνάρτηση $H^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ από τη σχέση (6.2.45). Σημειώνουμε εδώ πως η συνάρτηση $G^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ είναι η συνάρτηση Green για το παρόν συγκεκριμένο πρόβλημα με σύνορο την επιφάνεια S και όχι απλά η συνάρτηση Green ελεύθερου χώρου, όπως ήταν η αρχική συνάρτηση $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι τις συναρτήσεις Green θα τις μελετήσουμε λεπτομερώς στο Κεφάλαιο Ε10.

Και ανάλογα μπορούμε να κατασκευάσουμε και τη συνάρτηση Green $G^{**}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ για το παρόν πρόβλημα της εξισώσεως του Laplace στην περιοχή V , αλλά τώρα με συνοριακές συνθήκες $H^{**}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) := \partial G^{**}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})/\partial n = 0$ στο σύνορο της S . Τότε ο συνοριακός ολοκληρωτικός τύπος (6.2.41) παίρνει την απλοποιημένη ξανά μορφή του

$$u(\boldsymbol{\xi}) = - \iint_S G^{**}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\xi} \in V, \quad (6.2.46)$$

που αποτελεί ουσιαστικά τη λύση του σχετικού προβλήματος Neumann. Και πάλι βέβαια η δυσκολία έγκειται στην κατασκευή της συναρτήσεως Green $G^{**}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$.

Για το λόγο αυτό στις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις γενικά χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση Green ελεύθερου χώρου (τη θεμελιώδη λύση) $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ αντί για την ειδική συνάρτηση Green $G^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ (για το πρόβλημα Dirichlet) και $G^{**}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ (για το πρόβλημα Neumann). Εκτός βέβαια και αν η κατασκευή τους είναι αρκετά εύκολη, κάτι που συμβαίνει όμως μόνο σε πολύ ειδικές περιπτώσεις γεωμετρίας της περιοχής V είτε στις τρεις είτε στις δύο διαστάσεις. ▲

E6.2.6

E6.2.6. Η συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση για την εξίσωση του Poisson

Ας γενικεύσουμε τώρα λίγο τα προηγούμενα αποτελέσματα από την εξίσωση του Laplace (6.2.16) ή (6.2.29) στην πιο γενική εξίσωση του Poisson

$$\nabla^2 u = f(\mathbf{x}) \quad \text{και πιο αναλυτικά} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(\mathbf{x}) \quad (6.2.47)$$

με άγνωστη συνάρτηση ξανά τη συνάρτηση $u = u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, x_3)$ και στην ίδια ακριβώς περιοχή V με σύνορο μια κλειστή επιφάνεια S (ή μια κλειστή καμπύλη S στις δύο διαστάσεις). Εδώ βέβαια $f(\mathbf{x})$ είναι μια γνωστή συνάρτηση σε ολόκληρη την περιοχή V που μας ενδιαφέρει. Και φυσικά και εδώ μπορούμε να έχουμε πρόβλημα Dirichlet, πρόβλημα Neumann ή πρόβλημα μικτών συνοριακών συνθηκών ακριβώς όπως και πριν. Τιποτε το ουσιαστικό δεν αλλάζει. Απλά τώρα στη διαφορική μας εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.47) έχουμε και δεξιό μέλος $f(\mathbf{x})$. Δηλαδή έχουμε εξίσωση του Poisson, που είναι μη ομογενής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, αντί για εξίσωση του Laplace στη σχέση (6.2.16) ή (6.2.29), που ήταν ομογενής. Δεν υπάρχει καμία άλλη αλλαγή.

Και στο παρόν γενικότερο πρόβλημα τώρα με την εξίσωση του Poisson (6.2.47) αντί για την εξίσωση του Laplace (6.2.16) θα χρησιμοποιήσουμε ξανά τη δεύτερη

ταυτότητα του Green (6.2.12) με την άγνωστη συνάρτηση $u = u(\mathbf{x})$ σαν την πρώτη συνάρτηση u και τη συνάρτηση Green $G = G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ των σχέσεων (6.2.21) (στις τρεις διαστάσεις) και (6.2.25) (στις δύο διαστάσεις) σαν τη δεύτερη συνάρτηση v . Δεν αλλάζουν και πολλά πράγματα στην εξίσωση του Poisson σε σχέση με την εξίσωση του Laplace. Χρησιμοποιούμε έτσι και εδώ πάλι τη δεύτερη ταυτότητα του Green στη μορφή της (6.2.30), που την υπενθυμίζουμε

$$\iiint_V (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u) dV(\mathbf{x}) = \iint_S \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS(\mathbf{x}). \quad (6.2.48)$$

Στη συνέχεια όμως αυτή παίρνει εδώ στην εξίσωση του Poisson (6.2.47) τη μορφή

$$\iiint_V [u(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\mathbf{x})] dV(\mathbf{x}) = \iint_S \left[u(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \right] dS(\mathbf{x}) \quad (6.2.49)$$

αντί για τη λίγο απλούστερη μορφή της (6.2.31), που είχε πάρει στην περίπτωση της εξίσωσης του Laplace. Αυτό συνέβη εδώ απλά επειδή τώρα στην εξίσωση του Poisson ισχύει $\nabla^2 u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ στο αριστερό μέλος, ενώ προηγουμένως στην εξίσωση του Laplace ίσχυε $\nabla^2 u(\mathbf{x}) = 0$.

Με τη χρήση και εδώ της σχέσεως (6.2.34) για τη συνάρτηση δέλτα του Dirac, την υπενθυμίζουμε

$$\iiint_V u(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) dV(\mathbf{x}) = u(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\xi} \in V, \quad (6.2.50)$$

η πιο πάνω ταυτότητα (6.2.49) παίρνει την τελική μορφή της

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \iint_S \left[u(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})}{\partial n} - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} \right] dS(\mathbf{x}) + F(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\xi} \in V. \quad (6.2.51)$$

Εδώ ορίσαμε για διευκόλυνσή μας τη νέα συνάρτηση

$$F(\boldsymbol{\xi}) := \iiint_V G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) f(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}), \quad (6.2.52)$$

που είναι ασφαλώς μια γνωστή συνάρτηση σε όλη την περιοχή V και στο σύνορό της $S \equiv \partial V$. Αυτό είναι προφανές, επειδή τόσο η συνάρτηση Green $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ όσο και το δεξιό μέλος $f(\mathbf{x})$ στην εξίσωση του Poisson (6.2.47) είναι γνωστές συναρτήσεις.

Από δω και πέρα όλα είναι όπως πριν στην εξίσωση του Laplace με μόνη τη διαφορά ότι παρουσιάζεται παντού και η γνωστή συνάρτηση $F(\boldsymbol{\xi})$ της σχέσεως (6.2.52). Για παράδειγμα, η συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση (6.2.40) γενικεύεται εδώ που έχουμε την εξίσωση του Poisson (6.2.47) παίρνοντας τη μορφή

$$\frac{1}{2} p(\boldsymbol{\xi}) = \iint_S [H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) p(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}) + F(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\xi} \in S \quad (6.2.53)$$

και με τις τέσσερις συναρτήσεις $p(\mathbf{x})$, $q(\mathbf{x})$, $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ και $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ να ορίζονται ακριβώς όπως και πριν. Και παραπέρα ο συνοριακός ολοκληρωτικός τύπος (6.2.41), που μας επιτρέπει τον υπολογισμό της άγνωστης συναρτήσεως $u(\boldsymbol{\xi})$ (ή $u(\mathbf{x})$) μετά την επίλυση της συνοριακής ολοκληρωτικής εξίσωσης (6.2.53), γενικεύεται στη μορφή

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \iint_S [H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) p(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) q(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}) + F(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{με} \quad \boldsymbol{\xi} \in V. \quad (6.2.54)$$

Αφού λοιπόν η συνάρτηση $F(\boldsymbol{\xi})$ που ορίστηκε στη σχέση (6.2.52) είναι γνωστή συνάρτηση σε όλη την περιοχή V και στο σύνορό της S , κανένα πρόβλημα δεν υπάρχει πέρα βέβαια από το προφανές γεγονός ότι ο υπολογισμός αυτής της συναρτήσεως $F(\boldsymbol{\xi})$ απαιτεί υπολογιστικό κόπο. Δυστυχώς απαιτεί, καθώς πρόκειται για ένα τριπλό ολοκλήρωμα σε όλη την περιοχή V , όχι μόνο στο σύνορό της S , εδώ στις τρεις

διαστάσεις (και ανάλογα ένα διπλό ολοκλήρωμα στις δύο διαστάσεις). Εντούτοις η ίδια η ολοκληρωτική εξίσωση (6.2.53) συνεχίζει να είναι μια συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση είτε άγνωστη συνάρτηση σε αυτήν είναι η $p(\mathbf{x})$ είτε η $q(\mathbf{x})$ είτε αλλού η μία και αλλού ή άλλη πάντοτε όμως πάνω στο σύνορο S της περιοχής V ισχύος της εξισώσεως του Poisson (6.2.47).

Στο σημείο αυτό εγκαταλείπουμε την κλασική αλλά και τόσο πολύ χρήσιμη σε ποικίλα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού εξίσωση του Laplace (6.2.16) και τη γενίκευση της στην εξίσωση του Poisson (6.2.47). Προχωράμε τώρα σε ένα κάπως πιο δύσκολο πρόβλημα, όπου όμως παρουσιάζονται ξανά συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Πρόκειται για το κλασικό πρόβλημα της γραμμικής τριδιάστατης ή διδιάστατης Ελαστικότητας, που είναι ένα πιο δύσκολο αλλ' εξίσου ενδιαφέρον πρόβλημα. Με αυτό το πρόβλημα θα ασχοληθούμε στην αμέσως επόμενη Ενότητα Ε6.3.

E6.3

E6.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

E6.3.1

E6.3.1. Εξισώσεις ισορροπίας, βασικοί τύποι και ο νόμος του Hooke

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε πολύ σύντομα το πρόβλημα της γραμμικής Ελαστικότητας για ένα ισότροπο ελαστικό μέσον V στις τρεις διαστάσεις με ειδική περίπτωση του τις δύο διαστάσεις με γνωστές τις συνοριακές συνθήκες στο σύνορο του $S \equiv \partial V$ (κλειστή επιφάνεια στις τρεις διαστάσεις και κλειστή καμπύλη στις δύο διαστάσεις). Αυτό το πρόβλημα θα το αναγάγουμε εδώ σε ένα σύστημα συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων στο σύνορο S του ελαστικού μέσου V το οποίο μελετάμε. Θα βρούμε επίσης και τους σχετικούς συνοριακούς ολοκληρωτικούς τύπους που μας επιτρέπουν τον υπολογισμό των μετατοπίσεων u_i , των παραμορφώσεων ε_{ij} και των τάσεων σ_{ij} σε όλο το ελαστικό μέσον V .

Εισαγωγικά σημειώνουμε πως τα βασικά μεγέθη στο πρόβλημα της γραμμικής Ελαστικότητας είναι οι τάσεις σ_{ij} και οι μετατοπίσεις u_i στο ελαστικό μέσον V . Από τις μετατοπίσεις u_i προκύπτουν εύκολα με μερικές παραγωγίσεις και οι παραμορφώσεις ε_{ij} . Φυσικά στις τρεις διαστάσεις οι δείκτες i, j , κλπ. παίρνουν τις τρεις τιμές $i, j = 1, 2, 3$, ενώ στις δύο διαστάσεις παίρνουν τις δύο τιμές $i, j = 1, 2$.

Οι τάσεις σ_{ij} στα σημεία του ελαστικού μέσου είναι οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$. Αυτός είναι ένας συμμετρικός τανυστής δευτέρας τάξεως με $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$. Το ότι είναι τανυστής το αποδείξαμε στην Παράγραφο Ε1.7.1 του Κεφαλαίου 1. Επιπλέον οι τάσεις σ_{ij} πληρούν τις γνωστές μας εξισώσεις ισορροπίας, που τις αναφέραμε ήδη στην Άσκηση Ε1.24 της Ενότητας Ε1.6 του Κεφαλαίου Ε1, υποθέτοντας εκεί ότι δεν υπάρχουν δυνάμεις μάζας (ή καθολικές δυνάμεις) στο ελαστικό μέσον. Εάν υπάρχουν και δυνάμεις μάζας (ή καθολικές δυνάμεις) f_i , που δηλώνουν δύναμη ανά μονάδα όγκου στις τρεις διαστάσεις (δύναμη ανά μονάδα επιφανείας στις δύο διαστάσεις), τότε οι εξισώσεις ισορροπίας γενικεύονται παίρνοντας τη μορφή

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{και πιο απλά} \quad \sigma_{ij,j} + f_i = 0. \quad (6.3.1)$$

Η δεύτερη μορφή (στο μέσον και μετά δεξιά) ισχύει, απλά επειδή ο τανυστής των τάσεων $\boldsymbol{\sigma}$ είναι συμμετρικός, οπότε φυσικά $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$. Πιο σωστή είναι η πρώτη μορφή.

Πρόκειται για τρεις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους στις τρεις διαστάσεις ή δύο αντίστοιχες εξισώσεις στις δύο διαστάσεις. Η ισχύς των εξισώσεων

ισορροπίας σε ένα ελαστικό μέσον υπό οποιαδήποτε φόρτισή του είναι απόλυτα αναγκαία για την ισορροπία του ελαστικού μέσου. Εννοείται ότι και εδώ, όπως και σε όλο αυτό το Κεφάλαιο Ε6, χρησιμοποιείται στους δείκτες η σύμβαση αθροίσεως του Einstein. Αυτή η σύμβαση μας είναι γνωστή ήδη από την Παράγραφο Ε1.1.2 του Κεφαλαίου Ε1 και την έχουμε ήδη χρησιμοποιήσει πάρα πολλές φορές.

Στα σημεία \mathbf{x} του συνόρου S του ελαστικού μέσου ορίζονται επίσης οι συνιστώσες t_i του διανύσματος των τάσεων \mathbf{t} . Αυτές τις συμβολίζουμε εδώ με t_i (αντί για p_i) ακολουθώντας το συμβολισμό ο οποίος χρησιμοποιείται συνήθως στις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Οι συνιστώσες t_i του διανύσματος των τάσεων \mathbf{t} δίνονται από τον τύπο (1.7.10) της Παραγράφου Ε1.7.1 του Κεφαλαίου Ε1, που έχει τη μορφή

$$t_i = \sigma_{ji}n_j \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad t_i = \sigma_{ij}n_j, \quad (6.3.2)$$

αφού, επαναλαμβάνουμε $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$. Σημειώνουμε επίσης ότι n_j είναι οι συνιστώσες του κάθετου διανύσματος \mathbf{n} πάνω στο σύνορο S του ελαστικού μέσου V . (Επαναλαμβάνουμε πως αυτό το σύνορο S είναι κλειστή επιφάνεια στις τρεις διαστάσεις και κλειστή καμπύλη στις δύο διαστάσεις.) Το διάνυσμα \mathbf{t} όπως βέβαια και οι συνιστώσες του t_i αναφέρονται μόνο στο σύνορο $S \equiv \partial V$ της περιοχής V . Συγκεκριμένα εκφράζουν δύναμη ανά μονάδα επιφανείας στην επιφάνεια S στις τρεις διαστάσεις και ανάλογα δύναμη ανά μονάδα μήκους στην καμπύλη S στις δύο διαστάσεις.

Από την άλλη πλευρά οι μετατοπίσεις u_i πάλι στα σημεία του ελαστικού μέσου V είναι οι συνιστώσες ενός διανύσματος \mathbf{u} , που είναι βέβαια τανυστής πρώτης τάξεως. Από τις μετατοπίσεις u_i προκύπτουν εύκολα με απλές μερικές παραγωγίσεις τους και οι παραμορφώσεις ε_{ij} απλά με βάση τους τύπους ορισμού τους (1.7.13) στην Παράγραφο Ε1.7.2 του Κεφαλαίου Ε1. Συγκεκριμένα οι μετατοπίσεις ε_{ij} ορίζονται με βάση τους τύπους

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.3.3)$$

εννοείται και εδώ με τους δείκτες μετά από κόμμα να δηλώνουν παραγωγίσεις, εδώ μερικές παραγωγίσεις. Σημειώνουμε ότι στην Παράγραφο Ε1.7.2 του Κεφαλαίου Ε1 αποδείξαμε πάρα πολύ εύκολα ότι οι παραμορφώσεις ε_{ij} αποτελούν τις συνιστώσες ενός τανυστή δευτέρας τάξεως: του τανυστή των παραμορφώσεων $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Αυτές είναι λοιπόν οι βασικές ποσότητες μας μέσα στο ελαστικό μέσον V (είτε τριδιάστατο είτε διδιάστατο): οι τάσεις σ_{ij} , οι μετατοπίσεις u_i και οι παραμορφώσεις ε_{ij} . Όμως ο Πολιτικός Μηχανικός δίνει έμφαση στις τάσεις σ_{ij} . Αυτό συμβαίνει, επειδή αυτές συνδέονται πιο άμεσα με την ασφάλεια του ελαστικού μέσου ως προς την εξαιρετικά ανεπιθύμητη περίπτωση της διαρροής του (της αστοχίας του) σε ένα ή περισσότερα σημεία του. Είδαμε επίσης ότι οι παραμορφώσεις ε_{ij} προσδιορίζονται αμέσως μόλις είναι γνωστές οι μετατοπίσεις u_i με βάση τους πιο πάνω τύπους ορισμού τους (6.3.3). Και εδώ οι μετατοπίσεις u_i θα προσδιορισθούν πρώτες.

Ο βασικός νόμος που ισχύει στη γραμμική Ελαστικότητα είναι ο νόμος του Hooke. Αυτός συνδέει τις τάσεις σ_{ij} με τις παραμορφώσεις ε_{ij} και μάλιστα με γραμμικό τρόπο. (Γι' αυτό και μιλάμε για γραμμική Ελαστικότητα.) Ο νόμος του Hooke μας είναι ήδη γνωστός από τη σχέση (1.4.15) της Εφαρμογής Ε1.1 του Κεφαλαίου Ε1. Στη γενική περίπτωση του, που περιλαμβάνει και ανισότροπα μέσα, έχει τη μορφή

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6.3.4)$$

με E_{ijkl} τις συνιστώσες του τανυστή των ελαστικών σταθερών \mathbf{E} του ελαστικού μέσου.

Εμείς σε αυτήν την Ενότητα Ε6.3 περιορίζουμε την προσοχή μας σε ισότροπα γραμμικά ελαστικά μέσα. Αυτά έχουν δύο μόνο ανεξάρτητες ελαστικές σταθερές. Συνήθη επιλογή γι' αυτές είναι το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος του Poisson ν . Αν αντί γι' αυτές τις δύο ελαστικές σταθερές επιλέξουμε να χρησιμοποιήσουμε εδώ τις δύο σταθερές του Lamé λ και μ , τότε ο νόμος του Hooke (6.3.4) παίρνει τη μορφή

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}. \quad (6.3.5)$$

Εδώ βέβαια δ_{ij} είναι το γνωστό μας από την Παράγραφο Ε1.1.3 του Κεφαλαίου Ε1 δέλτα του Kronecker. Επίσης $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ στις τρεις διαστάσεις ($\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}$ στις δύο διαστάσεις) λόγω της συμβάσεως αθροίσεως του Einstein, που συνεχώς τη χρησιμοποιούμε σ' αυτό το κεφάλαιο για τις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις.

E6.3.2

E6.3.2. Οι εξισώσεις του Navier

Προχωρώντας εισάγουμε τώρα τους ορισμούς (6.3.3) των παραμορφώσεων ε_{ij} με βάση τις μετατοπίσεις u_i στο ελαστικό μέσον V , που το θεωρούμε συνεχώς από δω και πέρα ισότροπο, στον πιο πάνω νόμο του Hooke (6.3.5) για ισότροπο γραμμικά ελαστικό μέσον. Τότε ο νόμος του Hooke (6.3.5) παίρνει την ισοδύναμη μορφή του

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (6.3.6)$$

Και συνεχίζοντας εισάγουμε τώρα αυτές τις εκφράσεις των τάσεων σ_{ij} στις εξισώσεις ισορροπίας (6.3.1) δεξιά, δηλαδή στις εξισώσεις $\sigma_{ij,j} + f_i = 0$. Προκύπτει εύκολα ότι

$$\lambda \delta_{ij} u_{k,kj} + \mu (u_{i,jj} + u_{j,ij}) + f_i = 0. \quad (6.3.7)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τη γνωστή μας ιδιότητα της αντικαταστάσεως για το δέλτα του Kronecker στον πρώτο όρο αριστερά και αλλάζουμε το σύμβολο του επαναλαμβανόμενου δείκτη από j σε k στους δύο επόμενους όρους $\mu u_{i,jj}$ και $\mu u_{j,ij}$, κάτι που είναι απόλυτα επιτρεπτό για έναν επαναλαμβανόμενο δείκτη. Επίσης αλλάζουμε και τη σειρά των μερικών παραγωγίσεων στον όρο $\mu u_{j,ij}$. Έτσι παίρνουμε

$$\lambda u_{k,ki} + \mu (u_{i,kk} + u_{k,ki}) + f_i = 0. \quad (6.3.8)$$

Πάρα πολύ εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτή η σχέση απλοποιείται και στη μορφή

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + f_i = 0. \quad (6.3.9)$$

Αυτή η μορφή μπορεί φυσικά να γραφεί και λίγο πιο αναλυτικά ως εξής:

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + f_i = 0. \quad (6.3.10)$$

Και εδώ βέβαια ο δείκτης i παίρνει στις τρεις διαστάσεις τις τρεις τιμές $i = 1, 2, 3$ (στις δύο διαστάσεις τις δύο τιμές $i = 1, 2$). Ανάλογα και ο δείκτης k , που είναι φυσικά επαναλαμβανόμενος δείκτης. Έχουμε επομένως στις τρεις διαστάσεις τρεις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως με άγνωστες συναρτήσεις τις μετατοπίσεις u_i στο ελαστικό μέσον V . Αυτές οι τρεις διαφορικές εξισώσεις (6.3.9) ή (6.3.10) καλούνται **εξισώσεις του Navier**. Ανάλογα ισχύουν και στις δύο διαστάσεις εκεί βέβαια με δύο διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

Πρόκειται προφανώς για τις εξισώσεις ισορροπίας (6.3.1), γραμμένες όμως εδώ στις σχέσεις (6.3.9) και (6.3.10) με χρήση των μετατοπίσεων u_i αντί για τις τάσεις σ_{ij} .

Και αυτό το πετύχαμε βέβαια με χρήση του νόμου του Hooke (6.3.5) και σ' αυτόν επίσης των ορισμών των παραμορφώσεων (6.3.3). Καλό είναι αυτό, γιατί έτσι έχουμε στις τρεις διαστάσεις τρεις μόνο άγνωστες συναρτήσεις (τις μετατοπίσεις u_i) αντί για έξι άγνωστες συναρτήσεις (τις τάσεις σ_{ij} με $\sigma_{ji} = \sigma_{ij}$) που είχαμε αρχικά. Δυστυχώς έχουμε όμως τώρα διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως (αντί πρώτης τάξεως): έχουμε τώρα τις εξισώσεις του Navier (6.3.9) ή (6.3.10).

Στο σημείο αυτό ας συμπληρώσουμε ότι η δεύτερη σταθερά του Lamé μ συμπίπτει με το μέτρο διατμήσεως G του ισότροπου ελαστικού μέσου. Επίσης η πρώτη σταθερά του Lamé λ δίνεται, όπως είναι γνωστό από τη Μηχανική των Υλικών, από τον τύπο

$$\lambda = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} \quad (6.3.11)$$

με ν το λόγο του Poisson του ίδιου ισότροπου ελαστικού μέσου. Επομένως έχουμε

$$\lambda + \mu = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} + \mu = \frac{(2\nu+1-2\nu)\mu}{1-2\nu} = \frac{\mu}{1-2\nu}. \quad (6.3.12)$$

Κατά συνέπεια οι εξισώσεις του Navier (6.3.10), δηλαδή οι εξισώσεις ισορροπίας γραμμένες με χρήση των μετατοπίσεων u_i , μπορούν να γραφούν και στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{f_i}{\mu} = 0. \quad (6.3.13)$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε, όπως φαίνεται, τη σταθερά του Lamé $\mu = G$ και το λόγο του Poisson ν σαν τις δύο βασικές ελαστικές σταθερές του ισότροπου ελαστικού μέσου. (Κανένας δε μας το απαγορεύει αυτό!) Επιπλέον πήραμε το θάρρος να διαιρέσουμε αυτές τις εξισώσεις με τη δεύτερη σταθερά του Lamé μ .

Και αν θέλουμε, μπορούμε βέβαια να γράψουμε τις ίδιες ακριβώς εξισώσεις του Navier (6.3.13) και σε διανυσματική μορφή με χρήση του διανύσματος των μετατοπίσεων $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 = u_i \mathbf{e}_i$ (ή $\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 = u_i \mathbf{e}_i$ στις δύο διαστάσεις) με \mathbf{e}_i τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος Καρτεσιανών συντεταγμένων. Λαμβάνουμε υπόψη μας τους εξής τύπους της Ενότητας Ε1.6 του Κεφαλαίου Ε1: τον τύπο (1.6.20) για τη Λαπλασιανή βαθμωτού μεγέθους, τον τύπο (1.6.13) για την απόκλιση διανύσματος και τον τύπο (1.6.3) για την κλίση βαθμωτού μεγέθους. Έτσι γράφουμε τις πιο πάνω εξισώσεις του Navier (6.3.13) στην ισοδύναμη μορφή τους

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div } \mathbf{u}) + \frac{f_i}{\mu} = 0 \quad (6.3.14)$$

με $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ επαναλαμβάνουμε το διάνυσμα των μετατοπίσεων u_i και τελικά

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}) + \frac{\mathbf{f}}{\mu} = \mathbf{0} \quad \text{ή πιο απλά} \quad \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{\mathbf{f}}{\mu} = \mathbf{0} \quad (6.3.15)$$

με $\mathbf{f} = f_i \mathbf{e}_i$ το διάνυσμα των δυνάμεων μάζας (ή καθολικών δυνάμεων). Σε αυτήν την τελευταία και καθαρά διανυσματική μορφή των εξισώσεων του Navier θέσαμε

$$\nabla^2 \mathbf{u} = (\nabla^2 u_i) \mathbf{e}_i \quad (6.3.16)$$

για τη Λαπλασιανή διανύσματος εδώ του διανύσματος των μετατοπίσεων \mathbf{u} .

Ωστόσο εμείς σε αυτό εδώ το Κεφάλαιο Ε6 για τις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις (ασφαλώς και τους σχετικούς ολοκληρωτικούς τύπους) ήδη προτιμάμε και θα συνεχίσουμε να προτιμάμε τη γραφή των σχέσεών μας με δείκτες και όχι με διανύσματα. Δηλαδή για τις εξισώσεις του Navier προτιμάμε τη μορφή τους (6.3.13) με δείκτες και όχι τις δύο μορφές τους (6.3.15) με διανύσματα.

E6.3.3

E6.3.3. Το θεώρημα της αμοιβαιότητας των έργων του Betti

Οι συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις αυτής της Ενότητας Ε6.3 θα βασισθούν κυρίως στο θεώρημα της αμοιβαιότητας των έργων του Betti (ή των Betti–Maxwell). Σύμφωνα με αυτό το θεώρημα θεωρούμε σε ένα ελαστικό μέσον V (είτε τριδιάστατο είτε διδιάστατο) ότι έχουμε δύο διαφορετικές καταστάσεις ισορροπίας:

1. Την Κατάσταση 1 με μετατοπίσεις u_i , διάνυσμα των τάσεων t_i στο σύνορο του S και δυνάμεις μάζας (ή καθολικές δυνάμεις) f_i στο εσωτερικό του.
2. Την Κατάσταση 2 με μετατοπίσεις u_i^* , διάνυσμα των τάσεων t_i^* στο σύνορο του S και δυνάμεις μάζας (ή καθολικές δυνάμεις) f_i^* στο εσωτερικό του.

Τότε αποδεικνύεται ότι το έργο των δυνάμεων t_i και f_i της Καταστάσεως 1 επί τις μετατοπίσεις u_i^* της Καταστάσεως 2 είναι ίσο με το έργο των δυνάμεων t_i^* και f_i^* της Καταστάσεως 2 επί τις μετατοπίσεις u_i της Καταστάσεως 1. Αυτό είναι το **θεώρημα της αμοιβαιότητας των έργων του Betti (ή των Betti–Maxwell)** ή απλούστερα το **θεώρημα της αμοιβαιότητας των έργων** ή ακόμη πιο απλά το **θεώρημα του Betti**.

Επομένως με μαθηματική διατύπωση αυτού του θεωρήματος θα έχουμε

$$\oint_S t_i(\mathbf{x}) u_i^*(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \iiint_V f_i(\mathbf{x}) u_i^*(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = \oint_S t_i^*(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) + \iiint_V f_i^*(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \quad (6.3.17)$$

και παραλείποντας παντού την προφανή μεταβλητή \mathbf{x}

$$\oint_S t_i u_i^* dS + \iiint_V f_i u_i^* dV = \oint_S t_i^* u_i dS + \iiint_V f_i^* u_i dV. \quad (6.3.18)$$

Στη σχέση αυτή στο αριστερό μέλος έχουμε πρώτα το έργο του διανύσματος των τάσεων t_i της Καταστάσεως 1 επί τις μετατοπίσεις u_i^* της Καταστάσεως 2 στο σύνορο S της περιοχής V . Στη συνέχεια έχουμε το έργο των δυνάμεων μάζας (καθολικών δυνάμεων) f_i της ίδιας Καταστάσεως 1 επί τις μετατοπίσεις u_i^* πάλι της Καταστάσεως 2, τώρα όμως στην ίδια την περιοχή V , δηλαδή σε ολόκληρο το ελαστικό μέσον μας. Ανάλογα συμβαίνουν και στο δεξιό μέλος, εκεί όμως με εναλλαγή των ρόλων των Καταστάσεων 1 και 2, που υπενθυμίζουμε είναι και οι δύο καταστάσεις ισορροπίας. Ισοδύναμα (και πιο απλά) το θεώρημα του Betti γράφεται αμέσως και στη μορφή

$$\iiint_V (f_i u_i^* - f_i^* u_i) dV = - \oint_S (t_i u_i^* - t_i^* u_i) dS. \quad (6.3.19)$$

Αυτό που είναι το σημαντικό για μας είναι ότι εδώ στη γραμμική Ελαστικότητα για την εύρεση των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων (και των αντίστοιχων συνοριακών ολοκληρωτικών τύπων) το θεώρημα του Betti (6.3.19) παίζει το ρόλο που έπαιζε η δεύτερη ταυτότητα του Green (6.2.12) στην εξίσωση του Laplace στην προηγούμενη Ενότητα Ε6.2. Και επιπλέον σημειώνουμε ότι η απόδειξη της δεύτερης ταυτότητας του Green (6.2.12) βασίστηκε στο θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (ή των Gauss–Ostrogradsky) (6.2.4). Το επαναλαμβάνουμε κι εδώ το θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (στις τρεις διαστάσεις και χωρίς δήλωση της μεταβλητής \mathbf{x})

$$\iiint_V F_{i,i} dV = \oint_S F_i n_i dS. \quad (6.3.20)$$

Εντελώς ανάλογα κι εδώ η απόδειξη του θεωρήματος του Betti (6.3.18) ή (6.3.19) θα βασισθεί και πάλι στο θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (6.3.20) (εδώ στις τρεις διαστάσεις, $n = 3$, και απόλυτα ανάλογα στις δύο διαστάσεις, $n = 2$). Προχωράμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος της αμοιβαιότητας των έργων του Betti (ή των Betti–Maxwell), δηλαδή στην απόδειξη της σχέσεως (6.3.18) ή ισοδύναμα (6.3.19).

Για την απόδειξη αυτή ξεκινάμε, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, με το θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (6.3.20). Σαν παραγωγίσιμη συνάρτηση σε αυτό θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F_i = \sigma_{ij} u_j^*, \quad \text{οπότε} \quad F_{i,i} = \sigma_{ij,i} u_j^* + \sigma_{ij} u_{j,i}^* \quad (6.3.21)$$

φυσικά με σ_{ij} τις τάσεις στην πρώτη Κατάσταση 1 και u_j^* τις μετατοπίσεις στη δεύτερη Κατάσταση 2. Και επαναλαμβάνουμε ότι αναφερόμαστε συνεχώς σε δύο καταστάσεις ισορροπίας του ίδιου ακριβώς ελαστικού μέσου V με σύνορο του την κλειστή επιφάνεια S . Και επαναλαμβάνουμε επίσης ότι εδώ χρησιμοποιούμε συνεχώς τη σύμβαση αθροίσεως του Einstein για επαναλαμβανόμενο δείκτη, που το θεωρούμε αυτόματα ότι είναι δείκτης αθροίσεως. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι δείκτες μετά από κόμμα δηλώνουν μερικές παραγωγίσεις. Σημειώνουμε τέλος ότι εδώ δουλεύουμε στις τρεις διαστάσεις με $n = 3$ και επομένως με τριπλό ολοκλήρωμα στο μέσον V και επιφανειακό ολοκλήρωμα στο σύνορό του S . Εντούτοις απόλυτα ανάλογη είναι η απόδειξη και στις δύο διαστάσεις με $n = 2$ και επομένως διπλό ολοκλήρωμα στο μέσον V και επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο σύνορό του S . Για παράδειγμα, στις δύο διαστάσεις το θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (6.3.20) παίρνει τη μορφή

$$\iint_V F_{i,i} dV = \oint_S F_i n_i dS \quad (6.3.22)$$

με διαστάσεις στις ολοκληρώσεις (και αριστερά και δεξιά) μειωμένες κατά ένα.

Αντικαθιστώντας λοιπόν τις σχέσεις (6.3.21) στο θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (6.3.20), παίρνουμε

$$\iiint_V (\sigma_{ij,i} u_j^* + \sigma_{ij} u_{j,i}^*) dV = \iint_S \sigma_{ij} u_j^* n_i dS = \iint_S t_j u_j^* dS, \quad \text{αφού} \quad \sigma_{ij} n_i = t_j \quad (6.3.23)$$

σύμφωνα με την πρώτη σχέση (6.3.2) (εδώ βέβαια με εναλλαγή των δεικτών i και j). Επιπλέον εδώ στο αριστερό μέλος αυτής της σχέσεως (6.3.23) παρατηρούμε ότι

$$\iiint_V \sigma_{ij,i} u_j^* dV = - \iiint_V f_j u_j^* dV, \quad \text{αφού} \quad \sigma_{ij,i} = -f_j \quad (6.3.24)$$

λόγω των πρώτων σχέσεων ισορροπίας (6.3.1) (εδώ φυσικά και πάλι με εναλλαγή των δεικτών i και j). Επομένως η πιο πάνω σχέση (6.3.23) παίρνει τελικά τη μορφή

$$\iiint_V \sigma_{ij} u_{j,i}^* dV = \iint_S t_j u_j^* dS + \iiint_V f_j u_j^* dV \quad (6.3.25)$$

και ισοδύναμα

$$\iiint_V \sigma_{ij} u_{j,i}^* dV = \iint_S t_i u_i^* dS + \iiint_V f_i u_i^* dV \quad (6.3.26)$$

απλά αλλάζοντας δεξιά τον επαναλαμβανόμενο δείκτη από j σε i . Κι έτσι “φτιάξαμε” εδώ δεξιά το αριστερό μέλος του θεωρήματος της αμοιβαιότητας των έργων του Betti (6.3.18), δηλαδή το συνολικό έργο των δυνάμεων (διανυσμάτων τάσεων t_i και δυνάμεων μάζας ή καθολικών δυνάμεων f_i) της Καταστάσεως 1 επί τις αντίστοιχες μετατοπίσεις u_i^* της Καταστάσεως 2.

Και εντελώς ανάλογα βέβαια, απλά αν εναλλάξουμε τους ρόλους των Καταστάσεων 1 και 2 (ή λίγο πιο επίσημα αν εργασθούμε με την παραγωγίσιμη συνάρτηση $F_i^* = \sigma_{ij}^* u_j$ στη σχέση (6.3.21)), παίρνουμε και την απόλυτα ανάλογη σχέση

$$\iiint_V \sigma_{ij}^* u_{j,i} dV = \iint_S t_i^* u_i dS + \iiint_V f_i^* u_i dV. \quad (6.3.27)$$

Κι έτσι “φτιάξαμε” εδώ δεξιά και το δεξιό μέλος του θεωρήματος της αμοιβαιότητας των έργων του Betti (6.3.18).

Έχουμε λοιπόν δημιουργήσει τόσο το αριστερό μέλος όσο και το δεξιό μέλος του θεωρήματος του Betti (6.3.18) στις σχέσεις (6.3.26) και (6.3.27) δεξιά αντίστοιχα. Άρα για να ισχύει το θεώρημα του Betti (6.3.18) μας απομένει να αποδείξουμε ότι τα αριστερά μέλη αυτών των δύο σχέσεων (6.3.26) και (6.3.27) είναι ίσα μεταξύ τους. Δηλαδή πρέπει να αποδείξουμε (μαθηματικά εννοούμε ...) ότι

$$\iiint_V \sigma_{ij} u_{j,i}^* dV = \iiint_V \sigma_{ij}^* u_{j,i} dV \quad \text{και πιο απλά} \quad \iiint_V (\sigma_{ij} u_{j,i}^* - \sigma_{ij}^* u_{j,i}) dV = 0. \quad (6.3.28)$$

Ναι, μπορούμε να κάνουμε αυτήν την απόδειξη και θα την κάνουμε στηριζόμενοι φυσικά στο νόμο του Hooke στη μορφή του (6.3.6), την επαναλαμβάνουμε και εδώ

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.3.29)$$

με λ και μ τις δύο σταθερές του Lamé (εννοείται για ισότροπα ελαστικά μέσα). Εδώ βέβαια οι τάσεις σ_{ij} έχουν εκφραστεί με τη χρήση των μετατοπίσεων u_i αντί για τις παραμορφώσεις ε_{ij} , όπως ήταν αρχικά στο νόμο του Hooke στην πιο συνηθισμένη μορφή του (6.3.5). Αυτό ακριβώς θέλουμε κι εμείς που έχουμε τις μετατοπίσεις u_i^* και u_i στη σχέση (6.3.28), που μας απομένει να αποδείξουμε.

Από το νόμο του Hooke στη μορφή του (6.3.29) πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη του επί $u_{j,i}^*$, προκύπτει ότι

$$\sigma_{ij} u_{j,i}^* = \lambda \delta_{ij} u_{k,k} u_{j,i}^* + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) u_{j,i}^* \quad (6.3.30)$$

και τελικά

$$\sigma_{ij} u_{j,i}^* = \lambda u_{k,k} u_{j,j}^* + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) u_{j,i}^*, \quad (6.3.31)$$

αφού $\delta_{ij} u_{j,i}^* = u_{j,j}^*$. Ανάλογα, αν εναλλάξουμε τους ρόλους των Καταστάσεων 1 και 2 (των καταστάσεων ισορροπίας που θεωρούμε στο ελαστικό μέσον V), προκύπτει ότι

$$\sigma_{ij}^* u_{j,i} = \lambda u_{k,k}^* u_{j,j} + \mu (u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) u_{j,i}. \quad (6.3.32)$$

Αν αφαιρέσουμε τώρα κατά μέλη αυτές τις δύο σχέσεις (6.3.31) και (6.3.32), αμέσως διαπιστώνουμε ότι

$$\sigma_{ij} u_{j,i}^* - \sigma_{ij}^* u_{j,i} = \lambda (u_{k,k} u_{j,j}^* - u_{k,k}^* u_{j,j}) + \mu (u_{i,j} u_{j,i}^* + u_{j,i} u_{j,i}^* - u_{i,j}^* u_{j,i} - u_{j,i}^* u_{j,i}). \quad (6.3.33)$$

Προφανώς όμως εδώ δεξιά ο πρώτος όρος (ο όρος με το λ) μηδενίζεται, επειδή

$$u_{k,k} u_{j,j}^* - u_{k,k}^* u_{j,j} = u_{j,j} u_{k,k}^* - u_{k,k}^* u_{j,j} = u_{j,j} u_{k,k}^* - u_{j,j} u_{k,k}^* = 0. \quad (6.3.34)$$

Αυτό ισχύει, επειδή το σύμβολο που χρησιμοποιείται σε έναν επαναλαμβανόμενο δείκτη (εδώ j ή k) δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, δηλαδή $u_{k,k} = u_{j,j}$ και $u_{j,j}^* = u_{k,k}^*$, και επίσης $u_{k,k}^* u_{j,j} = u_{j,j} u_{k,k}^*$ λόγω της αντιμεταθετικής ιδιότητας στον πολλαπλασιασμό. Ανάλογα και ο δεύτερος όρος (ο όρος με το μ) μηδενίζεται στη σχέση (6.3.33), επειδή

$$u_{i,j} u_{j,i}^* + u_{j,i} u_{j,i}^* - u_{i,j}^* u_{j,i} - u_{j,i}^* u_{j,i} = (u_{i,j} u_{j,i}^* - u_{i,j}^* u_{j,i}) + (u_{j,i} u_{j,i}^* - u_{j,i}^* u_{j,i}) = 0. \quad (6.3.35)$$

Αυτό ισχύει, επειδή $u_{i,j} u_{j,i}^* = u_{j,i} u_{j,i}^* = u_{i,j}^* u_{j,i}$ με εναλλαγή των συμβόλων i και j αυτών των επαναλαμβανόμενων δεικτών και χρήση της αντιμεταθετικής ιδιότητας στον πολλαπλασιασμό και επίσης επειδή $u_{j,i} u_{j,i}^* = u_{j,i}^* u_{j,i}$ απλά με χρήση και πάλι της αντιμεταθετικής ιδιότητας στον πολλαπλασιασμό.

Άρα με βάση τις σχέσεις (6.3.34) και (6.3.35) το δεξιό μέλος της σχέσεως (6.3.33) μηδενίζεται, οπότε μηδενίζεται και το αριστερό μέλος της ίδιας σχέσεως και έχουμε

$$\sigma_{ij} u_{j,i}^* - \sigma_{ij}^* u_{j,i} = 0. \quad (6.3.36)$$

Κατά συνέπεια μηδενίζεται η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο ολοκλήρωμα της σχέσεως (6.3.28) δεξιά, οπότε πραγματικά ισχύει η σχέση (6.3.28) δεξιά. Επομένως ισχύει και η σχέση (6.3.28) αριστερά. Επομένως αποδείξαμε πραγματικά, όπως ήδη σχεδιάσαμε να κάνουμε, ότι τα αριστερά μέλη των δύο σχέσεων (6.3.26) και (6.3.27) είναι ίσα μεταξύ τους. Άρα και τα δεξιά μέλη αυτών των δύο σχέσεων είναι ίσα μεταξύ τους. Συνεπώς ισχύει το θεώρημα της αμοιβαιότητας των έργων του Betti (6.3.18), που, αν θέλουμε, μπορούμε να το γράψουμε και στην ισοδύναμη και λίγο πιο απλή μορφή του (6.3.19), κάτι που ήδη κάναμε.

Πάντως, για να είμαστε ειλικρινείς, η αρχική μορφή (6.3.18) του θεωρήματος του Betti είναι πιο σαφής από την άποψη του Πολιτικού Μηχανικού. Αυτό κατά τη γνώμη μας ισχύει, επειδή η μορφή του (6.3.18) αριστερά αναφέρεται στο συνολικό έργο των δυνάμεων της Καταστάσεως 1 ως προς τις μετατοπίσεις της Καταστάσεως 2, ενώ δεξιά αναφέρεται ανάλογα στο συνολικό έργο των δυνάμεων της Καταστάσεως 2 ως προς τις μετατοπίσεις της Καταστάσεως 1. Εν πάση περιπτώσει αυτά δεν είναι και τόσο σημαντικά. Το σημαντικό είναι, ας το επαναλάβουμε και εδώ, ότι το θεώρημα του Betti (6.3.18) ή (6.3.19) παίζει στη γραμμική Ελαστικότητα τον ίδιο ακριβώς και πάρα πολύ σημαντικό ρόλο που έπαιξε στην προηγούμενη Ενότητα E6.2 η δεύτερη ταυτότητα του Green στην εξίσωση του Laplace. Και στις δύο περιπτώσεις εννοούμε βέβαια σημαντικό ρόλο ως προς το σχηματισμό των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων και των αντίστοιχων ολοκληρωτικών τύπων.

E6.3.4

E6.3.4. Η θεμελιώδης λύση για τις εξισώσεις της γραμμικής Ελαστικότητας

Προχωρώντας τώρα, ανάλογα με την Παράγραφο E6.2.3 εκεί για την εξίσωση του Laplace θα δημιουργήσουμε και εδώ μια *θεμελιώδη λύση* ή *συνάρτηση Green ελεύθερου χώρου* εδώ βέβαια για το πρόβλημά μας της γραμμικής Ελαστικότητας. Πιο συγκεκριμένα κατά τη χρήση του θεωρήματος της αμοιβαιότητας των έργων του Betti (ή των Betti–Maxwell) (6.3.18) που σχεδιάζουμε να κάνουμε θεωρούμε εδώ σαν Κατάσταση 1 την αληθινή κατάσταση ισορροπίας του ελαστικού μέσου V με τα αληθινά μεγέθη που έχουμε σε αυτό, δηλαδή τις μετατοπίσεις u_i στο μέσον V και το διάνυσμα τάσεων t_i στο σύνορό του $S \equiv \partial V$. Για διευκόλυνσή μας μάλιστα θα υποθέσουμε ότι δεν υπάρχουν δυνάμεις μάζας (ή καθολικές δυνάμεις) f_i , όπως είναι για παράδειγμα οι δυνάμεις της γήινης βαρύτητας. Τώρα σαν Κατάσταση 2 στο ίδιο ελαστικό μέσο V θα θεωρήσουμε την κατάσταση εκείνη που οφείλεται σε μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο σε ένα σημείο $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ του άπειρου χώρου κατά τις διευθύνσεις των τριών αξόνων Ox_1 , Ox_2 και Ox_3 στις τρεις διαστάσεις (και ανάλογα στις δύο διαστάσεις). Εδώ βέβαια το σημείο ξ το θεωρούμε κυρίως σημείο του ίδιου του ελαστικού μέσου V είτε στο εσωτερικό του είτε πάνω στο σύνορό του S .

Αυτό που θα κάνουμε εδώ είναι ασφαλώς παρόμοιο με αυτό που είχαμε κάνει στην Παράγραφο E6.2.3 με την εξίσωση του Laplace. Εκεί είχαμε θεωρήσει πηγή μοναδιαίας έντασης στο σημείο ξ . Εδώ θεωρούμε μοναδιαία δύναμη στο σημείο ξ . Μόνο που αυτή η μοναδιαία δύναμη μπορεί (μάλλον πρέπει) να είναι ή κατά τον άξονα Ox_1 ή κατά τον άξονα Ox_2 ή κατά τον άξονα Ox_3 . Δηλαδή κατά κάποιον τρόπο εδώ στη γραμμική Ελαστικότητα η θεμελιώδης λύση μας είναι ουσιαστικά τρεις θεμελιώδεις λύσεις. Και είναι απόλυτα εύλογο αυτό, επειδή στην εξίσωση του Laplace είχαμε προς προσδιορισμό ένα βαθμωτό μέγεθος, τη λύση της, το δυναμικό $u = u(\mathbf{x})$. Αντίθετα εδώ στη γραμμική Ελαστικότητα έχουμε προς προσδιορισμό ένα διανυσματικό μέγεθος, τη μετατόπιση $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ στο ελαστικό μέσον V , δηλαδή

ουσιαστικά τρία βαθμωτά μεγέθη: τις μετατοπίσεις $u_i(\mathbf{x})$, που είναι οι συνιστώσες του διανύσματος της μετατοπίσεως $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Προφανώς είναι σαφώς πιο δύσκολο το πρόβλημα της γραμμικής Ελαστικότητας. Και το καταλάβαμε ήδη αυτό (πολύ καλά μάλιστα ...) με την επίπονη προσπάθεια που καταβάλαμε στην προηγούμενη Παράγραφο Ε6.3.3 για την απόδειξη του θεωρήματος του Betti. Αυτή ήταν αρκετά μεγαλύτερη από την προσπάθεια την οποία είχαμε καταβάλει στην αντίστοιχη Παράγραφο Ε6.2.2 για τη απόδειξη εκεί της δεύτερης ταυτότητας του Green. Σημειώνουμε ασφαλώς ότι και οι δύο αυτές αποδείξεις είχαν σαν βάση τους το γνωστό θεώρημα της αποκλίσεως του Gauss (ή των Gauss–Ostrogradsky) (6.2.4), που το αναφέραμε στην Παράγραφο Ε6.2.1.

Ξεκινάμε λοιπόν στο θέμα του προσδιορισμού των μετατοπίσεων u_i που οφείλονται σε μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο σε σημείο ξ του άπειρου χώρου κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_k με $k = 1, 2, 3$ υποθέτοντας εδώ ότι δουλεύουμε στον τριδιάστατο χώρο. (Ανάλογα βέβαια ισχύουν και στο διδιάστατο χώρο.) Η λύση αυτού του προβλήματος, που καλείται *πρόβλημα του Kelvin*, βρέθηκε από τον Kelvin και καλείται *λύση του Kelvin*. Για την εύρεση της λύσεως του προβλήματος του Kelvin εμείς θα χρησιμοποιήσουμε εδώ προφανώς τις εξισώσεις του Navier (6.3.13) της Παραγράφου Ε6.3.2. Εδώ τις γράφουμε λίγο πιο συνεπτυγμένα στη μορφή

$$u_{i,kk} + \frac{1}{1-2\nu} u_{k,ki} = -\frac{f_i}{\mu}. \quad (6.3.37)$$

Υπενθυμίζουμε ότι εδώ στον τριδιάστατο χώρο που υποθέτουμε έχουμε σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με άγνωστες συναρτήσεις τις τρεις μετατοπίσεις u_i του ελαστικού μέσου (εδώ του άπειρου χώρου). Επίσης μ είναι η δεύτερη σταθερά του Lamé και ν ο λόγος του Poisson του ελαστικού μέσου, που το έχουμε υποθέσει ότι είναι και ισότροπο. Τέλος στο δεξιό μέλος f_i είναι οι δυνάμεις μάζας (ή καθολικές δυνάμεις) που ασκούνται στα σημεία του ελαστικού μέσου.

Για την επίλυση του προβλήματος του Kelvin αλλά συνάμα και για λόγους συγκρίσεως αυτής της εφαρμογής στη γραμμική Ελαστικότητα με την προηγούμενη εφαρμογή στην εξίσωση του Laplace εισάγουμε και μια νέα, βοηθητική συνάρτηση. Αυτή είναι το καλούμενο *διάνυσμα του Galerkin*, που το συμβολίζουμε με \mathbf{G} και που έχει συνιστώσες G_i (εδώ με $i = 1, 2, 3$). Το διάνυσμα του Galerkin \mathbf{G} ορίζεται έμμεσα μέσω της διανυσματικής σχέσεως

$$\mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{G} - \frac{1}{2(1-\nu)} \text{grad}(\text{div } \mathbf{G}) \quad \text{ή πιο απλά} \quad \mathbf{u} = \nabla^2 \mathbf{G} - \frac{1}{2(1-\nu)} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{G}). \quad (6.3.38)$$

Φυσικά αυτή η διανυσματική σχέση γράφεται και στην ισοδύναμη με δείκτες μορφή

$$u_i = G_{i,jj} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{j,ji}, \quad (6.3.39)$$

που εμείς την προτιμάμε και θα τη χρησιμοποιήσουμε εδώ. Και πάντα βέβαια εδώ οι επαναλαμβανόμενοι δείκτες (όπως ο j πιο πάνω) δηλώνουν άθροιση σύμφωνα με τη σύμβαση του Einstein, ενώ δείκτες μετά από κόμμα δηλώνουν παραγωγίσεις.

Δηλαδή τι έγινε εδώ; Εδώ στη σχέση (6.3.38) ή ισοδύναμα (6.3.39) έγινε αντικατάσταση του διανύσματος των μετατοπίσεων \mathbf{u} (με συνιστώσες u_i) από το διάνυσμα του Galerkin \mathbf{G} (με συνιστώσες G_i), που είναι ένα βοηθητικό διάνυσμα. Και φυσικά το διάνυσμα των μετατοπίσεων \mathbf{u} έχει σαφή φυσική έννοια. Αντίθετα το βοηθητικό διάνυσμα του Galerkin δεν έχει καμία φυσική έννοια και έχει εισαχθεί αποκλειστικά ώστε να διευκολύνει από τη μαθηματική μόνο άποψη την επίλυση του ελαστικού προβλήματος (εδώ του προβλήματος του Kelvin). Και ασφαλώς, εάν εμείς

βρούμε το διάνυσμα του Galerkin σε ένα ελαστικό πρόβλημα (εδώ στο πρόβλημα του Kelvin), τότε θα μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε έπειτα και το διάνυσμα των μετατοπίσεων \mathbf{u} χρησιμοποιώντας τους τύπους (6.3.38) ή ισοδύναμα (6.3.39). Αυτοί είναι οι τύποι με τους οποίους έχουμε εισαγάγει το διάνυσμα του Galerkin \mathbf{G} .

Ασφαλώς το διάνυσμα του Galerkin \mathbf{G} δεν ορίστηκε μέσω των σχέσεων (6.3.38) ή (6.3.39) τυχαία. Ορίστηκε έτσι ώστε να απλοποιήσει τη γραφή (6.3.37) των εξισώσεων του Navier, δηλαδή των εξισώσεων ισορροπίας γραμμένων όμως με χρήση των παραμορφώσεων u_i (εδώ με $i = 1, 2, 3$). Για να το δούμε αυτό ... Αντικαθιστούμε λοιπόν τις εκφράσεις (6.3.39) των μετατοπίσεων u_i στις εξισώσεις του Navier (6.3.37). Έτσι παίρνουμε φυσικά τις εξισώσεις ισορροπίας του ελαστικού μέσου με άγνωστες συναρτήσεις τις συνιστώσες G_i του διανύσματος του Galerkin \mathbf{G} . Προκύπτει άμεσα

$$G_{i,jjkk} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{j,jikk} + \frac{1}{1-2\nu} \left[G_{k,jjki} - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{j,jkki} \right] = -\frac{f_i}{\mu}. \quad (6.3.40)$$

Εδώ όμως $G_{j,jkki} = G_{j,jikk}$, επειδή υποθέτουμε συνεχώς πως οι μερικές παράγωγοι τις οποίες αναφέρουμε όχι μόνο υπάρχουν αλλά είναι και συνεχείς συναρτήσεις, οπότε επιτρέπεται ασφαλώς κάθε αλλαγή στη σειρά των μερικών παραγωγίσεων. Επιπλέον $G_{k,jjki} = G_{j,kkji} = G_{j,jikk}$, απλά επειδή επιτρέπεται η αλλαγή συμβόλου για επαναλαμβανόμενους δείκτες, εδώ για τους δείκτες j και k (και τους δύο, πρώτη ισότητα) και επίσης επιτρέπεται η αλλαγή στη σειρά των μερικών παραγωγίσεων για συνεχείς μερικές παραγώγους, όπως πριν λίγο αναφέραμε (δεύτερη ισότητα). Υπό αυτές τις συνθήκες η πιο πάνω σχέση (6.3.40) παίρνει τη μορφή

$$G_{i,jjkk} + \left[-\frac{1}{2(1-\nu)} + \frac{1}{1-2\nu} - \frac{1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} \right] G_{j,jikk} = -\frac{f_i}{\mu}. \quad (6.3.41)$$

Διαπιστώνουμε όμως πολύ εύκολα (απλά κάνοντας τα κλάσματα ομώνυμα) ότι

$$-\frac{1}{2(1-\nu)} + \frac{1}{1-2\nu} - \frac{1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} = \frac{-1+2\nu+2-2\nu-1}{2(1-\nu)(1-2\nu)} = 0. \quad (6.3.42)$$

Επομένως ο όρος μέσα στις αγκύλες στη σχέση (6.3.41) μηδενίζεται. Άρα η σχέση αυτή παίρνει την εξαιρετικά απλή τελική μορφή της

$$G_{i,jjkk} = -\frac{f_i}{\mu}. \quad (6.3.43)$$

Αυτή η μορφή γράφεται βέβαια ισοδύναμα και λίγο απλούστερα σαν

$$\nabla^4 G_i = -\frac{f_i}{\mu} \quad \text{και διανυσματικά} \quad \nabla^4 \mathbf{G} = -\frac{\mathbf{f}}{\mu}. \quad (6.3.44)$$

Εδώ βέβαια $\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2)$ είναι ο διαρμονικός τελεστής. Δηλαδή είναι ο τελεστής που δηλώνει τη διπλή εφαρμογή του τελεστή του Laplace (ή της Λαπλασιανής) ∇^2 σε μια επαρκώς παραγωγίσιμη βαθμωτή ή διανυσματική συνάρτηση, όπως έχουμε υποθέσει εδώ ότι είναι το διάνυσμα του Galerkin \mathbf{G} και οι τρεις συνιστώσες του G_i .

Το συμπέρασμά μας είναι πάντως πως το πρόβλημα της γραμμικής Ελαστικότητας με χρήση του διανύσματος του Galerkin \mathbf{G} έχει αναχθεί εδώ στις τρεις διαστάσεις σε τρεις μη ομογενείς διαρμονικές εξισώσεις: στις εξισώσεις (6.3.43) ή (6.3.44) αριστερά με $i = 1, 2, 3$. (Ανάλογα ισχύουν φυσικά και στις δύο διαστάσεις με $i = 1, 2$.) Και ασφαλώς, αν δεν υπάρχουν δυνάμεις μάζας (ή καθολικές δυνάμεις) f_i , οπότε τα δεξιά μέλη μηδενίζονται, αυτές οι εξισώσεις (6.3.43) ή (6.3.44) αριστερά συμπίπτουν με την ήδη γνωστή μας ομογενή διαρμονική εξίσωση

$$\nabla^4 u = 0. \quad (6.3.45)$$

Μετά από όλη αυτήν την αναγκαία εισαγωγή του διανύσματος του Galerkin \mathbf{G} περιορίζουμε την προσοχή μας αποκλειστικά στο πρόβλημα του Kelvin, το οποίο ήδη αναφέραμε. Θεωρούμε επομένως ένα μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο (μία μοναδιαία συγκεντρωμένη δύναμη) $P_k = 1$ που ασκείται στο σημείο $\boldsymbol{\xi}$ του άπειρου ισότροπου και γραμμικά ελαστικού μέσου V_∞ κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_k (με $k = 1, 2, 3$). Στο άπειρο ελαστικό μέσον μας V_∞ υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν δυνάμεις μάζας (ή καθολικές δυνάμεις) εκτός βέβαια από αυτό το συγκεντρωμένο φορτίο $P_k = 1$. Δεν ασκείται καμία άλλη φόρτιση ούτε συγκεντρωμένη αλλά ούτε και κατανεμημένη στο άπειρο ελαστικό μέσον V_∞ .

Αυτό το μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο $P_k = 1$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_k μπορούμε να το δηλώσουμε με τις δυνάμεις μάζας (ή καθολικές δυνάμεις)

$$f_i = f_i(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta_{ik} \quad \text{ή διανυσματικά} \quad \mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\mathbf{e}_k \quad (6.3.46)$$

με $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})$ την τριδιάστατη συνάρτηση δέλτα του Dirac φυσικά εδώ με $i, k = 1, 2, 3$ στον τριδιάστατο χώρο που εργαζόμαστε. (Και αντίστοιχα θα είχαμε τη διδιάστατη συνάρτηση δέλτα του Dirac και $i, k = 1, 2$ αν εργαζόμασταν στο διδιάστατο χώρο.) Στην πιο πάνω σχέση (6.3.46) είναι επίσης σαφές ότι η διεύθυνση του φορτίου $P_k = 1$ είναι κατά τον άξονα Ox_k με μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{e}_k . Είναι ακόμη σαφές από την ίδια σχέση (6.3.46) ότι οι παρούσες δυνάμεις μάζας f_i είναι παντού μηδενικές για $i \neq k$ και σχεδόν παντού μηδενικές (παντού εκτός από το ίδιο το σημείο $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$) για $i = k$. Αυτά συμβαίνουν, επειδή $\delta_{ik} = 0$ για $i \neq k$ και επίσης $\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = 0$ για $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}$. Και τέλος, αφού

$$\iiint_{V_\infty} \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) dV = 1, \quad (6.3.47)$$

προφανώς το συνολικό μέγεθος P_k του φορτίου κατά τον άξονα Ox_k που προκύπτει από τις δυνάμεις μάζας (6.3.46) στο άπειρο ελαστικό μέσον V_∞ είναι ίσο με τη μονάδα, $P_k = 1$, όπως πραγματικά θεωρήσαμε από την αρχή στην παρούσα φόρτιση.

Κατά συνέπεια για την παρούσα ιδιόμορφη φόρτιση (συγκεντρωμένο φορτίο $P_k = 1$ κατά τον άξονα Ox_k) οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (6.3.44) για το διάνυσμα του Galerkin \mathbf{G} παίρνουν με βάση τις σχέσεις (6.3.46) τη μορφή

$$\nabla^4 G_{ik} = -\frac{\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\delta_{ik}}{\mu} \quad \text{και διανυσματικά} \quad \nabla^4 \mathbf{G}_k = -\frac{\delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})\mathbf{e}_k}{\mu}. \quad (6.3.48)$$

Εδώ ο δείκτης k δηλώνει τη διεύθυνση του μοναδιαίου συγκεντρωμένου φορτίου $P_k = 1$, που εφαρμόζεται βέβαια κατά τον άξονα Ox_k . Και επειδή υπάρχουν στις τρεις διαστάσεις τρεις άξονες, το χρειαζόμαστε εδώ και αυτόν το δείκτη k . Σύμφωνα με τα παραπάνω εδώ είναι απαραίτητο για μας να έχουμε διαθέσιμη τη λύση της μη ομογενούς διαρμονικής εξίσωσης

$$\nabla^4 G_0 = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad \text{με} \quad G_0 = G_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \quad (6.3.49)$$

χωρίς καμία συνοριακή συνθήκη στο άπειρο (για $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$).

Ας σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι στην προηγούμενη Ενότητα Ε6.2 για την εξίσωση του Laplace χρειαστήκαμε να έχουμε διαθέσιμη τη λύση της εξίσωσης του Poisson (μη ομογενούς εξίσωσης του Laplace)

$$\nabla^2 G_0 = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \quad \text{με} \quad G_0 = G_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}). \quad (6.3.50)$$

Αυτήν τη γράψαμε με G_0 αντί για G , έτσι ώστε να μη γίνει σύγχυση με το διάνυσμα του Galerkin \mathbf{G} . Ανάλογα εδώ για τη γραμμική Ελαστικότητα χρειαζόμαστε τη λύση

της μη ομογενούς διαρμονικής εξισώσεως (6.3.49) με ∇^4 αντί για ∇^2 για την εξίσωση του Laplace. Εδώ λοιπόν έχουμε το διαρμονικό τελεστή ∇^4 αντί για τον τελεστή του Laplace ∇^2 και αυτό κάνει φυσικά το παρόν πρόβλημά μας πιο δύσκολο. Επιπλέον εδώ έχουμε τρεις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους: τις εξισώσεις (6.3.48) αριστερά ή ισοδύναμα την αντίστοιχη διανυσματική εξίσωση (6.3.48) δεξιά.

Θα μας διευκολύνει πολύ εδώ να ορίσουμε το διάνυσμα

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi} \quad \text{με συνιστώσες} \quad r_i = x_i - \xi_i \quad \text{με} \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.3.51)$$

Το μέτρο r αυτού του διανύσματος \mathbf{r} , δηλαδή η απόσταση $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$ των δύο σημείων \mathbf{x} (του σημείου όπου εργαζόμαστε) και $\boldsymbol{\xi}$ (του σημείου εφαρμογής του φορτίου $P_k = 1$), προφανώς είναι

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{r_i r_i} = \sqrt{(x_i - \xi_i)(x_i - \xi_i)} = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}. \quad (6.3.52)$$

Εδώ στη γραμμική Ελαστικότητα αποδεικνύεται ότι η κατάλληλη λύση της μη ομογενούς διαρμονικής εξισώσεως (6.3.49) έχει στις τρεις διαστάσεις τη μορφή

$$G_0 = G_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{r}{8\pi}. \quad (6.3.53)$$

Αυτή η λύση είναι η *θεμελιώδης λύση* ή *συνάρτηση Green ελεύθερου χώρου* για τη μη ομογενή διαρμονική εξίσωση και αυτή θα χρησιμοποιήσουμε εμείς παρακάτω. Με την ευκαιρία σημειώνουμε επίσης ότι στις δύο διαστάσεις η αντίστοιχη λύση (που δε θα τη χρησιμοποιήσουμε όμως εδώ) είναι

$$G_0 = G_0(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{r^2}{8\pi} \ln r. \quad (6.3.54)$$

Στη συνέχεια οι τρεις συνιστώσες G_{ik} του διανύσματος του Galerkin \mathbf{G}_k προκύπτουν από τη λύση (6.3.53) με πολλαπλασιασμό της επί $-\delta_{ik}/\mu$. Αυτό φαίνεται αμέσως με σύγκριση των εξισώσεων (6.3.48) αριστερά και (6.3.49). Άρα παίρνουμε

$$G_{ik} = G_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{r}{8\pi\mu} \delta_{ik}. \quad (6.3.55)$$

Και προφανώς μόνο η συνιστώσα αυτού του διανύσματος του Galerkin \mathbf{G}_k κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_k , οπότε ισχύει $i = k$, προκύπτει μη μηδενική. Οι άλλες δύο συνιστώσες του ίδιου διανύσματος \mathbf{G}_k (αυτές με $i \neq k$) είναι παντού μηδενικές.

Είναι απλή η πιο πάνω έκφραση (6.3.55) των συνιστωσών G_{ik} του διανύσματος του Galerkin \mathbf{G}_k . Θα τη χρησιμοποιήσουμε τώρα για να βρούμε τις μετατοπίσεις u_i των σημείων του τριδιάστατου άπειρου ισότροπου ελαστικού μέσου V_∞ που εξετάζουμε εδώ. Αυτές τις τρεις μετατοπίσεις u_i τις δηλώνουμε με το ειδικό σύμβολο U_{ik} . Στο σύμβολο αυτό ο πρώτος δείκτης i αναφέρεται στη διεύθυνση της μετατοπίσεως στο σημείο παρατηρήσεώς της \mathbf{x} , ενώ ο δεύτερος δείκτης k αναφέρεται στη διεύθυνση του μοναδιαίου συγκεντρωμένου φορτίου $P_k = 1$ στο σημείο εφαρμογής του $\boldsymbol{\xi}$.

Για το σκοπό αυτό προφανώς θα χρησιμοποιήσουμε τις τρεις σχέσεις (6.3.39), οι οποίες μας δίνουν τις τρεις μετατοπίσεις u_i με τη χρήση μερικών παραγώγων των συνιστωσών G_i του διανύσματος του Galerkin \mathbf{G} . Αυτές οι τρεις σχέσεις παίρνουν στο παρόν πρόβλημά μας, στο πρόβλημα του Kelvin που μελετάμε, τη μορφή

$$U_{ik} = U_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G_{ik,jj}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) - \frac{1}{2(1-\nu)} G_{jk,ji}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}). \quad (6.3.56)$$

Στο σημείο αυτό είναι βέβαια αναγκαίο λόγω των σχέσεων (6.3.55) να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους που χρειαζόμαστε της αποστάσεως $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$

των δύο σημείων \mathbf{x} (σημείο παρατηρήσεως) και ξ (σημείο φορτίσεως). Αυτή δίνεται προφανώς στις τρεις διαστάσεις από τη σχέση (6.3.52). Ξεκινώντας, για τις πρώτες μερικές παραγώγους αυτής της αποστάσεως $r = |\mathbf{r}|$ ως προς τις μεταβλητές x_i έχουμε

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} \equiv r_{,i} = \frac{2(x_i - \xi_i)}{2r} = \frac{x_i - \xi_i}{r} = \frac{r_i}{r}, \quad \text{αφού } r_i = x_i - \xi_i. \quad (6.3.57)$$

Υπενθυμίζουμε και εδώ ότι κάθε δείκτης μετά από κόμμα, εδώ ο δείκτης i , δηλώνει παραγωγή, εδώ φυσικά μερική παραγωγή.

Συνεχίζοντας, για τις δεύτερες μερικές παραγώγους $r_{,ij}$ της ίδιας αποστάσεως r προκύπτει με παραγωγή των πρώτων μερικών παραγώγων της (6.3.57) ότι

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_i} \equiv r_{,ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_i - \xi_i}{r} \right) = \frac{1}{r} \delta_{ij} - \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r^3} = \frac{1}{r} \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^3} \quad (6.3.58)$$

με δ_{ij} το γνωστό μας δέλτα του Kronecker. Αυτό συμβαίνει επειδή προφανώς

$$\frac{\partial(x_i - \xi_i)}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad (6.3.59)$$

όπως διαπιστώνουμε αμέσως με τη διάκριση των δύο περιπτώσεων $j = i$ και $j \neq i$, και επίσης επειδή σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας στις παραγώγους

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_j} = -\frac{1}{r^2} \frac{x_j - \xi_j}{r} = -\frac{x_j - \xi_j}{r^3} = -\frac{r_j}{r^3}, \quad (6.3.60)$$

όπως διαπιστώνουμε με βάση τις διαθέσιμες πρώτες μερικές παραγώγους (6.3.57).

Για $j \neq i$ η σχέση (6.3.58) για τη μερική παράγωγο $r_{,ij}$ παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_i} \equiv r_{,ij} = -\frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r^3} = -\frac{r_i r_j}{r^3} \quad \text{για } j \neq i, \quad (6.3.61)$$

γιατί τώρα (για $j \neq i$) $\delta_{ij} = 0$. Επίσης για $j = i$ η ίδια σχέση (6.3.58) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_j \partial x_i} \equiv r_{,ij} = \frac{1}{r} - \frac{(x_i - \xi_i)(x_j - \xi_j)}{r^3} = \frac{1}{r} - \frac{r_i r_j}{r^3} \quad \text{για } j = i, \quad (6.3.62)$$

γιατί τώρα (για $j = i$) $\delta_{ij} = 1$. Ειδικότερα για $j = i = 1, 2, 3$ έχουμε

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} \equiv r_{,11} = \frac{1}{r} - \frac{r_1^2}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2} \equiv r_{,22} = \frac{1}{r} - \frac{r_2^2}{r^3} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_3^2} \equiv r_{,33} = \frac{1}{r} - \frac{r_3^2}{r^3}. \quad (6.3.63)$$

Αθροίζοντας αυτές τις τρεις σχέσεις προκύπτει αμέσως ότι

$$\nabla^2 r = r_{,jj} = r_{,11} + r_{,22} + r_{,33} = \frac{3}{r} - \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}, \quad (6.3.64)$$

αφού $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = r^2$ με r_i τις τρεις συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{r} = r_i \mathbf{e}_i$ και r το μέτρο του: $r = |\mathbf{r}|$. Και φυσικά ∇^2 είναι ο πολύ γνωστός μας τελεστής του Laplace, που όπως ξέρουμε καλείται επίσης Laplacian (ή Λαπλασιανή).

Διαθέτουμε λοιπόν από τις σχέσεις (6.3.55) τις τρεις συνιστώσες G_{ik} του διανύσματος του Galerkin \mathbf{G}_k για μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο $P_k = 1$ στο σημείο ξ και κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_k . Επίσης υπολογίσαμε αμέσως πιο πάνω τις μερικές παραγώγους που χρειαζόμαστε της αποστάσεως $r = |\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \xi|$ των δύο σημείων \mathbf{x} και ξ που υπεισέρχεται σε αυτές τις συνιστώσες (6.3.55). Είμαστε λοιπόν απόλυτα έτοιμοι να υπολογίσουμε τις μετατοπίσεις U_{ik} στο παρόν πρόβλημα μοναδιαίου φορτίου $P_k = 1$ που μελετάμε στο άπειρο ισότροπο ελαστικό μέσον V_∞ με βάση τις σχέσεις (6.3.56). Αυτή εδώ η λύση του παρόντος προβλήματος του Kelvin (και πιο απλά λύση του Kelvin, ο οποίος την υπολόγισε) είναι η θεμελιώδης λύση

(ή συνάρτηση Green ελεύθερου χώρου) την οποία θα χρησιμοποιήσουμε στο παρόν πρόβλημα της γραμμικής Ελαστικότητας που μελετάμε σε αυτήν την Ενότητα Ε6.3.

Αντικαθιστούμε λοιπόν τις εκφράσεις (6.3.55) των συνιστωσών G_{ik} του διανύσματος του Galerkin \mathbf{G}_k στις σχέσεις (6.3.56) για τις μετατοπίσεις U_{ik} . Προκύπτει ότι

$$U_{ik} = U_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{8\pi\mu} \left[r_{,ij} \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} \delta_{jk} r_{,ji} \right] = \frac{1}{8\pi\mu} \left[r_{,ij} \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} r_{,ik} \right], \quad (6.3.65)$$

επειδή $\delta_{jk} r_{,ji} = r_{,ki}$ με βάση τη γνωστή μας ιδιότητα της αντικαταστάσεως του δέλτα του Kronecker και επίσης $r_{,ki} = r_{,ik}$ με αλλαγή της σειράς των μερικών παραγωγίσεων εννοείται για $r > 0$, δηλαδή για $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}$. (Το σημείο $\boldsymbol{\xi}$ είναι ανώμαλο σημείο.) Λαμβάνουμε τώρα υπόψη μας τις σχέσεις (6.3.64) και (6.3.58). Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} U_{ik} = U_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{8\pi\mu} \left[\frac{2}{r} \delta_{ik} - \frac{1}{2(1-\nu)} \left(\frac{1}{r} \delta_{ik} - \frac{r_i r_k}{r^3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[4(1-\nu)\delta_{ik} - \delta_{ik} + \frac{r_i r_k}{r^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.3.66)$$

Και απλοποιώντας λίγο αυτήν τη σχέση για τις μετατοπίσεις U_{ik} τη γράφουμε στην τελική της μορφή

$$U_{ik} = U_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ik} + \frac{r_i r_k}{r^2} \right]. \quad (6.3.67)$$

Αυτή είναι λοιπόν η διάσημη λύση του Kelvin για τις μετατοπίσεις U_{ik} σε άπειρο ισότροπο ελαστικό μέσον V_∞ με φόρτισή του ένα μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο (μία δύναμη) $P_k = 1$ στο σημείο $\boldsymbol{\xi}$ και κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_k . Υπενθυμίζεται ότι στις μετατοπίσεις αυτές U_{ik} ο πρώτος δείκτης i είναι η διεύθυνση της ίδιας της μετατοπίσεως. Ο δεύτερος δείκτης k αναφέρεται στη διεύθυνση του μοναδιαίου συγκεντρωμένου φορτίου $P_k = 1$ (που ασκείται στο σημείο $\boldsymbol{\xi}$ κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_k) που την προκάλεσε. Και παρατηρούμε επιπλέον ότι αυτό το φορτίο παρόλο που ασκείται κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_k προκαλεί μετατοπίσεις κατά τις διευθύνσεις και των τριών αξόνων Ox_1, Ox_2 και Ox_3 στο ελαστικό μέσον V_∞ και όχι μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_k εφαρμογής του. Εύλογο είναι αυτό εάν το σκεφτούμε από φυσική άποψη για συνεχές ελαστικό μέσον V_∞ .

Προσδιορίσαμε λοιπόν τις τρεις μετατοπίσεις U_{ik} στο παρόν πρόβλημα συγκεντρωμένου φορτίου $P_k = 1$ στο σημείο $\boldsymbol{\xi}$ στο άπειρο ισότροπο ελαστικό μέσον V_∞ . Και στη συνέχεια σχετικά εύκολα μπορούμε να προσδιορίσουμε τις αντίστοιχες παραμορφώσεις ε_{ijk} και τάσεις σ_{ijk} στο σημείο \mathbf{x} του ίδιου μέσου V_∞ . Σημειώνουμε ότι εδώ ο τρίτος δείκτης k αναφέρεται στη διεύθυνση του συγκεντρωμένου φορτίου P_k . Στις ίδιες τις παραμορφώσεις ε_{ijk} και τις τάσεις σ_{ijk} αναφέρονται μόνο οι δύο πρώτοι δείκτες i και j . Αυτοί οι προσδιορισμοί των ε_{ijk} και σ_{ijk} δεν είναι τίποτε θεωρητικά, αλλά πρακτικά απαιτούνται αρκετοί υπολογισμοί. Και υπενθυμίζουμε βέβαια ότι εδώ εργαζόμαστε στις τρεις διαστάσεις (με $i, j, k = 1, 2, 3$). Ωστόσο απόλυτα ανάλογη είναι η εργασία που πρέπει να γίνει και στις δύο διαστάσεις (με $i, j, k = 1, 2$).

Για τον υπολογισμό των παραμορφώσεων ε_{ijk} στο παρόν πρόβλημα του Kelvin ξεκινάμε φυσικά από τους γενικούς ορισμούς (6.3.3) των παραμορφώσεων ε_{ij} . Τους επαναλαμβάνουμε

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (6.3.68)$$

Στην περίπτωσή μας (του προβλήματος του Kelvin) προφανώς έχουμε

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial U_{jk}}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (U_{ik,j} + U_{jk,i}). \quad (6.3.69)$$

Τώρα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (6.3.67) για τις μετατοπίσεις U_{ik} . Αυτές τις γράφουμε εδώ και στην ισοδύναμη μορφή τους

$$U_{ik} = U_{ik}(\mathbf{x}, \xi) = c \left[(3 - 4\nu) \frac{1}{r} \delta_{ik} + \frac{r_i r_k}{r^3} \right], \quad (6.3.70)$$

όπου ορίσαμε για διευκόλυνσή μας τη βοηθητική σταθερά

$$c = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)}. \quad (6.3.71)$$

Έτσι υπολογίζουμε τις πρώτες μερικές παραγώγους των μετατοπίσεων U_{ik} που είναι

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_j} = c \left[(3 - 4\nu) \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial r}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{r_k}{r^3} \frac{\partial r_i}{\partial x_j} + \frac{r_i}{r^3} \frac{\partial r_k}{\partial x_j} - \frac{3r_i r_k}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right]. \quad (6.3.72)$$

Προφανώς κατά την παραγωγή του δεξιού όρου μέσα στις αγκύλες στις πιο πάνω σχέσεις (6.3.70) χρησιμοποιήσαμε το γνωστό μας κανόνα παραγωγίσεως γινομένου.

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη μας τις σχέσεις (6.3.57) και (6.3.59), έχουμε

$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{r_j}{r}, \quad \frac{\partial r_i}{\partial x_j} = \frac{\partial(x_i - \xi_i)}{\partial x_j} = \delta_{ij} \quad \text{και ανάλογα} \quad \frac{\partial r_k}{\partial x_j} = \frac{\partial(x_k - \xi_k)}{\partial x_j} = \delta_{kj} = \delta_{jk}. \quad (6.3.73)$$

Με χρήση αυτών των σχέσεων οι πιο πάνω μερικές παράγωγοι (6.3.72) γράφονται στη μορφή

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_j} = c \left[-(3 - 4\nu) \frac{1}{r^2} \frac{r_j}{r} \delta_{ik} + \frac{r_k}{r^3} \delta_{ij} + \frac{r_i}{r^3} \delta_{jk} - \frac{3r_i r_j r_k}{r^4} \frac{r_j}{r} \right] \quad (6.3.74)$$

και τελικά με κοινό παράγοντα το $1/r^2$ (επομένως αδιάστατους όλους τους όρους μέσα στις αγκύλες) στην τελική μορφή τους

$$\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_j} = \frac{c}{r^2} \left[-(3 - 4\nu) \frac{r_j}{r} \delta_{ik} + \frac{r_k}{r} \delta_{ij} + \frac{r_i}{r} \delta_{jk} - \frac{3r_i r_j r_k}{r^3} \right]. \quad (6.3.75)$$

Και φυσικά με εναλλαγή των δεικτών i και j προκύπτει και η εντελώς ανάλογη σχέση

$$\frac{\partial U_{jk}}{\partial x_i} = \frac{c}{r^2} \left[-(3 - 4\nu) \frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_k}{r} \delta_{ij} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} - \frac{3r_i r_j r_k}{r^3} \right], \quad (6.3.76)$$

αφού $\delta_{ji} = \delta_{ij}$ και επίσης $r_j r_i = r_i r_j$ με βάση την αντιμεταθετική ιδιότητα στον απλό πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών.

Εισάγουμε τώρα τις δύο πιο πάνω σχέσεις (6.3.75) και (6.3.76) στη σχέση (6.3.69), που δίνει τις παραμορφώσεις ε_{ijk} στο παρόν πρόβλημα του Kelvin με μετατοπίσεις τις U_{ik} . Έτσι προκύπτουν οι παραμορφώσεις ε_{ijk} στη μορφή

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{c}{2r^2} \left[-(3 - 4\nu) \left(\frac{r_j}{r} \delta_{ik} + \frac{r_i}{r} \delta_{jk} \right) + \frac{2r_k}{r} \delta_{ij} + \frac{r_i}{r} \delta_{jk} + \frac{r_j}{r} \delta_{ik} - \frac{6r_i r_j r_k}{r^3} \right] \quad (6.3.77)$$

και μετά από κάποιες προφανείς απλοποιήσεις τελικά στη μορφή

$$\varepsilon_{ijk} = -\frac{c}{r^2} \left[(1 - 2\nu) \left(\frac{r_j}{r} \delta_{ik} + \frac{r_i}{r} \delta_{jk} \right) - \frac{r_k}{r} \delta_{ij} + \frac{3r_i r_j r_k}{r^3} \right]. \quad (6.3.78)$$

Αυτές είναι οι τελικές εκφράσεις των παραμορφώσεων ε_{ijk} σε αυτό το πρόβλημα του Kelvin. Υπενθυμίζεται ότι ο δείκτης k δηλώνει εδώ τη διεύθυνση του μοναδιαίου συγκεντρωμένου φορτίου $P_k = 1$, το οποίο εφαρμόζεται στο σημείο ξ του άπειρου ισότροπου και γραμμικά ελαστικού μέσου V_∞ που μελετάμε κατά τον άξονα Ox_k .

Έχοντας λοιπόν ήδη υπολογίσει τις παραμορφώσεις ε_{ijk} , μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τις αντίστοιχες τάσεις σ_{ijk} . Για το σκοπό αυτό θα βασιστούμε φυσικά στο νόμο του Hooke, που ισχύει εδώ στη γραμμική Ελαστικότητα. Για ένα ισότροπο ελαστικό μέσον, όπως υποθέσαμε ότι είναι ο άπειρος χώρος V_∞ , ο νόμος του Hooke

παίρνει τη μορφή (6.3.5). Επομένως οι τάσεις σ_{ijk} στο παρόν πρόβλημα του Kelvin θα δίνονται από τους εξής τύπους (με χρήση των δύο σταθερών του Lamé λ και μ):

$$\sigma_{ijk} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{mmk} + 2\mu \varepsilon_{ijk}. \quad (6.3.79)$$

Σημειώνουμε ότι εδώ χρησιμοποιήσαμε δεξιά τον καινούργιο δείκτη m σαν επαναλαμβανόμενο δείκτη, επειδή ο δείκτης k , που είχε χρησιμοποιηθεί για το σκοπό αυτό στη σχέση (6.3.5), χρησιμοποιείται εδώ σαν ελεύθερος δείκτης δηλώνοντας τη διεύθυνση του συγκεντρωμένου φορτίου $P_k = 1$, όπως ήδη έχουμε αναφέρει. Προτιμάμε εδώ τις δύο ελαστικές σταθερές μ (δεύτερη σταθερά του Lamé που είναι ίση με το μέτρο διατμήσεως G) και ν (λόγο του Poisson) αντί για την πρώτη σταθερά του Lamé $\lambda = 2\nu\mu/(1-2\nu)$, όπως ήδη γνωρίζουμε από τη σχέση (6.3.11). Έτσι ο νόμος του Hooke (6.3.79) παίρνει εδώ τη μορφή (με τη χρήση των δύο σταθερών μ και ν)

$$\sigma_{ijk} = \frac{2\nu\mu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mmk} + 2\mu \varepsilon_{ijk} = 2\mu \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{mmk} + \varepsilon_{ijk} \right). \quad (6.3.80)$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε τώρα την ποσότητα ε_{mmk} στον πρώτο όρο δεξιά της πιο πάνω σχέσεως (6.3.80). Από τη σχέση (6.3.78) με $i = j = 1, 2, 3$ προκύπτει ότι

$$\varepsilon_{11k} = -\frac{c}{r^2} \left[(1-2\nu) \frac{2r_1}{r} \delta_{1k} - \frac{r_k}{r} + \frac{3r_1^2 r_k}{r^3} \right], \quad (6.3.81)$$

$$\varepsilon_{22k} = -\frac{c}{r^2} \left[(1-2\nu) \frac{2r_2}{r} \delta_{2k} - \frac{r_k}{r} + \frac{3r_2^2 r_k}{r^3} \right], \quad (6.3.82)$$

$$\varepsilon_{33k} = -\frac{c}{r^2} \left[(1-2\nu) \frac{2r_3}{r} \delta_{3k} - \frac{r_k}{r} + \frac{3r_3^2 r_k}{r^3} \right]. \quad (6.3.83)$$

Εδώ βέβαια λάβαμε υπόψη μας ότι $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$. Προσθέτοντας τώρα κατά μέλη αυτές τις τρεις σχέσεις, προκύπτει για το άθροισμα $\varepsilon_{mmk} = \varepsilon_{11k} + \varepsilon_{22k} + \varepsilon_{33k}$ ότι

$$\varepsilon_{mmk} = -\frac{c}{r^2} \left[2(1-2\nu) \frac{r_1 \delta_{1k} + r_2 \delta_{2k} + r_3 \delta_{3k}}{r} - \frac{3r_k}{r} + \frac{3(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) r_k}{r^3} \right]. \quad (6.3.84)$$

Επειδή μάλιστα ισχύουν οι σχέσεις

$$r_1 \delta_{1k} + r_2 \delta_{2k} + r_3 \delta_{3k} = r_m \delta_{mk} = r_k \quad \text{και} \quad r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = r^2, \quad (6.3.85)$$

η σχέση (6.3.84) παίρνει την τελική της και απλοποιημένη μορφή

$$\varepsilon_{mmk} = -\frac{2c}{r^2} (1-2\nu) \frac{r_k}{r}. \quad (6.3.86)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις εκφράσεις των ε_{ijk} από τη σχέση (6.3.78) και ε_{mmk} από την προηγούμενη σχέση (6.3.86) στο νόμο του Hooke (6.3.80). Προκύπτει εύκολα ότι

$$\sigma_{ijk} = -\frac{2c\mu}{r^2} \left[2\nu \frac{r_k}{r} \delta_{ij} + (1-2\nu) \left(\frac{r_j}{r} \delta_{ik} + \frac{r_i}{r} \delta_{jk} \right) - \frac{r_k}{r} \delta_{ij} + \frac{3r_i r_j r_k}{r^3} \right]. \quad (6.3.87)$$

Με αντικατάσταση της βοηθητικής σταθεράς c από τη σχέση (6.3.71) και απλοποίηση μέσα στις αγκύλες, συγκεκριμένα των δύο όρων με $(r_k/r)\delta_{ij}$, αυτή η σχέση (6.3.87) για τις τάσεις σ_{ijk} στο πρόβλημα του Kelvin παίρνει την τελική της μορφή

$$\sigma_{ijk} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu) \left(\frac{r_j}{r} \delta_{ik} + \frac{r_i}{r} \delta_{jk} - \frac{r_k}{r} \delta_{ij} \right) + \frac{3r_i r_j r_k}{r^3} \right]. \quad (6.3.88)$$

Συμπληρώσαμε λοιπόν τον υπολογισμό των μετατοπίσεων U_{ik} , σχέσεις (6.3.67), των παραμορφώσεων ε_{ijk} , σχέσεις (6.3.78), και των τάσεων σ_{ijk} , σχέσεις (6.3.88), στο πρόβλημα του Kelvin για ισότροπο ελαστικό μέσον, που έτσι έχει πλήρως επιλυθεί.

E6.3.5

E6.3.5. Οι συνοριακοί ολοκληρωτικοί τύποι της γραμμικής Ελαστικότητας

Είμαστε τώρα έτοιμοι να προχωρήσουμε. Στην Παράγραφο E6.2.4 βρήκαμε το συνοριακό ολοκληρωτικό τύπο για την εξίσωση του Laplace με διάκριση μάλιστα των τριών περιπτώσεων που το σημείο ξ ήταν έξω από την περιοχή V , μέσα στην περιοχή V και πάνω στο σύνορο $S \equiv \partial V$ της ίδιας περιοχής V . Ανάλογα κι εδώ θα βρούμε τους τρεις συνοριακούς ολοκληρωτικούς τύπους της γραμμικής Ελαστικότητας, όπου ισχύουν οι εξισώσεις του Navier (6.3.9) ή ισοδύναμα (6.3.10) για τις άγνωστες μετατοπίσεις u_i ($i = 1, 2, 3$) στο ισότροπο και γραμμικά ελαστικό μέσον V που μελετάμε. Τις επαναλαμβάνουμε αυτές τις εξισώσεις στη μορφή τους (6.3.10)

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + f_i = 0. \quad (6.3.89)$$

Εδώ βέβαια θα βρούμε τρεις συνοριακούς ολοκληρωτικούς τύπους, επειδή έχουμε τρεις άγνωστες συναρτήσεις: τις μετατοπίσεις u_i . Σημειώνουμε ότι εδώ εργαζόμαστε στις τρεις διαστάσεις, αλλά βέβαια απόλυτα ανάλογη είναι η εργασία μας και στις δύο διαστάσεις. Μόνο που εκεί το ισότροπο και γραμμικά ελαστικό μέσον V είναι διδιάστατο (επίπεδο) και το σύνορό του $S \equiv \partial V$ είναι κλειστή καμπύλη και όχι κλειστή επιφάνεια όπως είναι εδώ το σύνορο S . Και φυσικά στις δύο διαστάσεις έχουμε μόνο δύο αντί για τρεις συνοριακούς ολοκληρωτικούς τύπους.

Στην Παράγραφο E6.2.4 για την εξίσωση του Laplace χρησιμοποιήσαμε τη δεύτερη ταυτότητα του Green (6.2.12). Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε ανάλογα το θεώρημα της αμοιβαιότητας των έργων του Betti (ή των Betti-Maxwell) (6.3.18) και λίγο πιο απλά (6.3.19). Σαν πρώτη κατάσταση ισορροπίας του ελαστικού μέσου V (που το θεωρούμε και ισότροπο) με σύνορό του την κλειστή επιφάνεια S , δηλαδή σαν Κατάσταση 1, θεωρούμε την πραγματική κατάσταση ισορροπίας του ελαστικού μέσου V . Και μάλιστα υποθέτουμε πως δεν υπάρχουν καθόλου δυνάμεις μάζας (ή καθολικές δυνάμεις) που να ασκούνται στο ελαστικό μέσον V , δηλαδή υποθέτουμε ότι $f_i = 0$.

Τώρα σαν δεύτερη κατάσταση ισορροπίας του ελαστικού μέσου V , δηλαδή σαν Κατάσταση 2, θεωρούμε την κατάσταση εκείνη που προκύπτει εάν από το άπειρο ελαστικό μέσον V_∞ στο πρόβλημα του Kelvin, που τόσο προσεκτικά μελετήσαμε στην προηγούμενη Παράγραφο E6.3.4, αποκόψουμε την περιοχή V που αντιστοιχεί ακριβώς στο ελαστικό μέσον V . Δηλαδή στην Κατάσταση 2 το ελαστικό μέσον V είναι απλά ένα μέρος του άπειρου ελαστικού μέσου V_∞ , δηλαδή $V \subset V_\infty$. Και πώς ισορροπεί τώρα αυτό το ελαστικό μέσον $V \subset V_\infty$; Μα πολύ απλά αυτό ισορροπεί με την εφαρμογή στο σύνορό του $S \equiv \partial V$ των φορτίσεων που προκύπτουν από τις τάσεις που αναπτύσσονται στο άπειρο ελαστικό μέσον V_∞ στο πρόβλημα του Kelvin, δηλαδή στο πρόβλημα με φόρτιση μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο $P_k = 1$ στο σημείο ξ του άπειρου ελαστικού μέσου V_∞ . Και επαναλαμβάνουμε ότι το σύνορο S του δικού μας, του πραγματικού ελαστικού μέσου V είναι μια κλειστή επιφάνεια.

Και προφανώς αυτές οι φορτίσεις πάνω στην επιφάνεια S του ελαστικού μέσου $V \subset V_\infty$ δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι φορτίσεις που προκαλεί στην επιφάνεια S το διάλυμα των τάσεων με συνιστώσες t_i που οφείλονται στις τάσεις σ_{ij} και που δίνονται από το γνωστό μας τύπο (6.3.2). Τις επαναλαμβάνουμε κι εδώ

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (6.3.90)$$

και θα τις χρησιμοποιήσουμε στη δεύτερη μορφή τους $t_i = \sigma_{ij} n_j$. Ναι, αλλ' εδώ εμείς υποθέσαμε σαν Κατάσταση 2 το πρόβλημα του Kelvin με τάσεις σ_{ijk} (με τον τρίτο

δείκτη k να δηλώνει, επαναλαμβάνουμε κι εδώ, τη διεύθυνση του συγκεντρωμένου φορτίου ($P_k = 1$). Αυτές οι τάσεις σ_{ijk} δίνονται από τις σχέσεις (6.3.88) της αμέσως προηγούμενης Παραγράφου Ε6.3.4. Και έτσι οι συνιστώσες t_i του διανύσματος των τάσεων στις πιο πάνω σχέσεις (6.3.90) παίρνουν εδώ τη μορφή (έχοντας προτιμήσει τη δεύτερη μορφή τους)

$$T_{ik} = \sigma_{ijk} n_j. \quad (6.3.91)$$

Εδώ μάλιστα στο πρόβλημα του Kelvin χρησιμοποιήσαμε το ειδικό σύμβολο T_{ik} (με το δεύτερο δείκτη k να δηλώνει ξανά τη διεύθυνση του συγκεντρωμένου φορτίου $P_k = 1$) για τις συνιστώσες t_i του διανύσματος των τάσεων στο πρόβλημα του Kelvin.

Ο υπολογισμός αυτών των συνιστωσών T_{ik} είναι αρκετά εύκολος αρκεί βέβαια να λάβουμε υπόψη μας τις εκφράσεις (6.3.88) των τάσεων σ_{ijk} . Έτσι προκύπτει ότι

$$T_{ik} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[(1-2\nu) \left(\frac{r_j}{r} \delta_{ik} + \frac{r_i}{r} \delta_{jk} - \frac{r_k}{r} \delta_{ij} \right) + \frac{3r_i r_j r_k}{r^3} \right] n_j. \quad (6.3.92)$$

Προφανώς ο δείκτης j δεξιά είναι τώρα πια ένας επαναλαμβανόμενος δείκτης. Έτσι ελεύθεροι δείκτες είναι μόνο οι δύο δείκτες i και k , όπως πάρα πολύ σωστά φαίνεται αριστερά στο σύμβολο T_{ik} . Τώρα με βάση την ιδιότητα της αντικαταστάσεως του δέλτα του Kronecker έχουμε $\delta_{jk} n_j = n_k$ και επίσης $\delta_{ij} n_j = n_i$. Έτσι διαπιστώνουμε πολύ εύκολα ότι οι πιο πάνω συνιστώσες T_{ik} του διανύσματος των τάσεων παίρνουν την τελική τους μορφή

$$T_{ik} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu) \left(\frac{r_i}{r} n_k - \frac{r_k}{r} n_i \right) + \left[(1-2\nu) \delta_{ik} + \frac{3r_i r_k}{r^2} \right] \frac{r_j}{r} n_j \right\}. \quad (6.3.93)$$

Επαναλαμβάνουμε ότι αυτές είναι οι φορτίσεις στην επιφάνεια S του ελαστικού μέσου V στην Κατάσταση 2, στη δεύτερη κατάσταση ισορροπίας του, που βασίστηκε εδώ στη λύση του προβλήματος του Kelvin της προηγούμενης Παραγράφου Ε6.3.4.

Και τώρα εφαρμόζουμε το θεώρημα της αμοιβαιότητας των έργων του Betti (ή των Betti–Maxwell) στη δεύτερη μορφή του (6.3.19). Την υπενθυμίζουμε

$$\iiint_V (f_i u_i^* - f_i^* u_i) dV = - \iint_S (t_i u_i^* - t_i^* u_i) dS. \quad (6.3.94)$$

Αυτό το θεώρημα το εφαρμόζουμε για τις δύο καταστάσεις ισορροπίας που ήδη αναφέραμε λεπτομερώς. Υπενθυμίζουμε ότι $f_i = 0$ στην Κατάσταση 1 (την πραγματική) και φυσικά ότι $u_i^* = U_{ik}$, σχέσεις (6.3.67), και $t_i^* = T_{ik}$, σχέσεις (6.3.93), στην Κατάσταση 2 (η οποία βασίζεται στο πρόβλημα του Kelvin). Προκύπτει αμέσως ότι

$$\iiint_V f_i^* u_i dV = \iint_S (U_{ik} t_i - T_{ik} u_i) dS \quad (6.3.95)$$

και λίγο σαφέστερα

$$\iiint_V f_i^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u_i(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = \iint_S [U_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) t_i(\mathbf{x}) - T_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u_i(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}). \quad (6.3.96)$$

Εδώ \mathbf{x} είναι το σημείο όπου αναφέρονται τα μεγέθη μας και στις δύο καταστάσεις και $\boldsymbol{\xi}$ το σημείο εφαρμογής του μοναδιαίου συγκεντρωμένου φορτίου $P_k = 1$ (κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_k) στο πρόβλημα του Kelvin στην Κατάσταση 2 μόνο.

Και τώρα για τον υπολογισμό του αριστερού μέλους σε αυτήν τη σχέση (6.3.96) λαμβάνουμε υπόψη μας τη σχέση (6.3.46) για τις δυνάμεις μάζας (ή καθολικές δυνάμεις) στο πρόβλημα του Kelvin, δηλαδή εδώ στην Κατάσταση 2 στο θεώρημα της αμοιβαιότητας των έργων του Betti (6.3.94) που μόλις εφαρμόσαμε. Έτσι έχουμε εδώ

$$f_i^* = f_i^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) \delta_{ik} \quad (6.3.97)$$

με $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$ την τριδιάστατη συνάρτηση δέλτα του Dirac. Και προφανώς, το καταλαβαίνουμε αυτό, αυτή η σχέση μας δηλώνει πολύ απλά ότι δεν υπάρχουν δυνάμεις μάζας στην Κατάσταση 2 παρά μόνο ένα μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο $P_k = 1$ στη θέση $\boldsymbol{\xi}$ και μάλιστα κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_k . Αυτό συμβαίνει, επειδή $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) = 0$ για $\mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}$ και επίσης $\delta_{ik} = 0$ για $i \neq k$ ενώ $\delta_{ik} = 1$ μόνο για $i = k$. Σημειώνουμε ότι η τριδιάστατη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$ πληροί τη σχέση

$$\iiint_{V_\infty} \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) u_i(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = u_i(\boldsymbol{\xi}). \quad (6.3.98)$$

Αυτή αποτελεί βέβαια γενίκευση της αντιστοίχης ιδιότητάς της στη μία διάσταση. Αποτελεί όμως γενίκευση και της σχέσεως (6.3.47), που ισχύει στις τρεις διαστάσεις.

Αν όμως περιορίσουμε την τριδιάστατη ολοκλήρωση αριστερά στο ίδιο το ελαστικό μέσον V που έχουμε στο πραγματικό πρόβλημά μας (με σύνορό του την κλειστή επιφάνεια S) και που το θεωρούμε εδώ σαν μια ανοικτή τριδιάστατη περιοχή, τότε η πιο πάνω σχέση (6.3.98) θα ισχύει μόνο αν $\boldsymbol{\xi} \in V$. Αλλιώς, αν $\boldsymbol{\xi} \in S$, δηλαδή για τα σημεία του συνόρου S της περιοχής V , αποδεικνύεται ότι δεξιά έχουμε σαν αποτέλεσμα $(1/2)u_i(\boldsymbol{\xi})$ με την προϋπόθεση ότι η επιφάνεια S είναι λεία στο σημείο της $\boldsymbol{\xi}$, δηλαδή διαθέτει εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο αυτό. Και τέλος, αν $\boldsymbol{\xi} \notin V \cup S$, δηλαδή το σημείο $\boldsymbol{\xi}$ είναι έξω από το ελαστικό μέσον V , τότε στη σχέση (6.3.98) δεξιά έχουμε σαν αποτέλεσμα το μηδέν. Άρα η σχέση (6.3.98) με περιορισμό της ολοκλήρωσής αριστερά στο ίδιο το ελαστικό μέσον V παίρνει τη γενικευμένη μορφή της

$$\iiint_V \delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi}) u_i(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) = c(\boldsymbol{\xi}) u_i(\boldsymbol{\xi}) \quad (6.3.99)$$

με την ποσότητα $c = c(\boldsymbol{\xi})$ στο δεξιό μέλος να δίνεται από τους τύπους

$$c(\boldsymbol{\xi}) = 1 \text{ με } \boldsymbol{\xi} \in V, \quad c(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \text{ με } \boldsymbol{\xi} \in S \text{ και } c(\boldsymbol{\xi}) = 0 \text{ με } \boldsymbol{\xi} \notin V \cup S. \quad (6.3.100)$$

Αντικαθιστούμε την έκφραση (6.3.97) για τις δυνάμεις μάζας (ή καθολικές δυνάμεις) $f_i^* = f_i^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ στη σχέση (6.3.96) αριστερά και λαμβάνουμε στη συνέχεια υπόψη μας τη σχέση (6.3.99) και το γεγονός ότι $\delta_{ik} u_i(\boldsymbol{\xi}) = u_k(\boldsymbol{\xi})$. Προκύπτει ότι

$$c(\boldsymbol{\xi}) u_k(\boldsymbol{\xi}) = \iint_S [U_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) t_i(\mathbf{x}) - T_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u_i(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}). \quad (6.3.101)$$

Αυτός ο ενδιαφέρων τύπος καλείται **ταυτότητα του Somigliana** για τις μετατοπίσεις. Αν $\boldsymbol{\xi} \notin V \cup S$, τότε $c(\boldsymbol{\xi}) = 0$ και η ταυτότητα του Somigliana παίρνει τη μορφή

$$\iint_S [U_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) t_i(\mathbf{x}) - T_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u_i(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}) = 0 \text{ με } \boldsymbol{\xi} \notin V \cup S. \quad (6.3.102)$$

Πρόκειται για ενδιαφέροντα συνοριακό ολοκληρωτικό τύπο, αλλ' αυτός συνήθως αγνοείται στις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις κυρίως επειδή το σημείο $\boldsymbol{\xi}$ είναι έξω από το ελαστικό μέσον V . Αν $\boldsymbol{\xi} \in S$, τότε η ταυτότητα του Somigliana για τις μετατοπίσεις (6.3.101) γίνεται καθαρά συνοριακή. Σε αυτήν εδώ την περίπτωση θα αναφερθούμε στην επόμενη Παράγραφο Ε6.3.6. Τέλος, αν $\boldsymbol{\xi} \in V$ (με την περιοχή V να τη θεωρούμε ανοικτή περιοχή, δηλαδή χωρίς τα συνοριακά σημεία της), ε τότε η ταυτότητα του Somigliana (6.3.101) παίρνει την πιο κοινή μορφή της

$$u_k(\boldsymbol{\xi}) = \iint_S [U_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) t_i(\mathbf{x}) - T_{ik}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) u_i(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}) \text{ με } \boldsymbol{\xi} \in V. \quad (6.3.103)$$

Ας σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι το αριστερό μέλος $u_k(\boldsymbol{\xi})$ πέρα από τη χρήση της τριδιάστατης συναρτήσεως δέλτα του Dirac $\delta(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})$ πιο πάνω μπορεί να βρεθεί και πολύ πιο άμεσα πάλι με βάση τη σχέση (6.3.96), δηλαδή ουσιαστικά το θεώρημα

του Betti. Πράγματι, πέρα από τα έργα των διανυσμάτων των τάσεων των Καταστάσεων 1 και 2 ως προς τις σχετικές μετατοπίσεις των Καταστάσεων 2 και 1 αντίστοιχα στο σύνορο S της περιοχής V που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.3.96) στο αριστερό μέλος της έχουμε απλά το έργο των δυνάμεων μάζας της Καταστάσεως 2 επί τις αντίστοιχες μετατοπίσεις της Καταστάσεως 1. (Αυτό συμβαίνει, γιατί υποθέσαμε ότι στην Κατάσταση 1 δεν υπάρχουν δυνάμεις μάζας.) Και αυτό το έργο είναι φυσικά ίσο με $u_k(\xi)$, γιατί έχουμε συγκεντρωμένο φορτίο $P_k = 1$ στο πρόβλημα του Kelvin της Καταστάσεως 2 και μάλιστα κατά τη διεύθυνση του άξονα Ox_k επί $u_k(\xi)$. Ναι $u_k(\xi)$, αφού αυτή είναι η μετατόπιση στην Κατάσταση 1 (στο πραγματικό ελαστικό μέσον V) στο σημείο ξ . Επομένως $1 \times u_k(\xi) = u_k(\xi)$ ακριβώς όπως προέκυψε ήδη και με την επίσημη μαθηματική διαδικασία στην ταυτότητα (6.3.103) αριστερά.

Η ταυτότητα του Somigliana (6.3.103) μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τις μετατοπίσεις $u_i(\xi)$ σε οποιοδήποτε σημείο $\xi \in V$ στο εσωτερικό του ελαστικού μέσου V με την προϋπόθεση βέβαια ότι ξέρουμε τις συνοριακές τιμές $t_i(\mathbf{x})$ του διανύσματος των τάσεων και $u_i(\mathbf{x})$ των μετατοπίσεων μόνο στο σύνορο S της περιοχής V . Από κει και πέρα οι παραμορφώσεις $\varepsilon_{ij}(\xi)$ πάλι με $\xi \in V$ μπορούν να υπολογισθούν εύκολα με αντίστοιχους τύπους, αν λάβουμε υπόψη μας τους τύπους (6.3.3) ορισμού των παραμορφώσεων με τη βοήθεια των μετατοπίσεων και κάνουμε τις κατάλληλες μερικές παραγωγίσεις ως προς ξ στους πυρήνες $U_{ik}(\mathbf{x}, \xi)$ και $T_{ik}(\mathbf{x}, \xi)$ που παρουσιάζονται στην ταυτότητα του Somigliana (6.3.103). (Αυτές οι μερικές παραγωγίσεις, τώρα όμως ως προς ξ , είναι εντελώς ανάλογες με εκείνες που είχαμε κάνει στην προηγούμενη Παράγραφο Ε6.3.4 για το πρόβλημα του Kelvin.) Τέλος με τη χρήση του νόμου του Hooke (6.3.5) μπορούμε εύκολα να βρούμε από τις παραμορφώσεις $\varepsilon_{ij}(\xi)$ και τις αντίστοιχες τάσεις $\sigma_{ij}(\xi)$ και πάλι βέβαια με $\xi \in V$.

E6.3.6

E6.3.6. Οι συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις της γραμμικής Ελαστικότητας

Όπως έγινε κατανοητό από την προηγούμενη Παράγραφο Ε6.3.5, οι μετατοπίσεις u_i , οι παραμορφώσεις ε_{ij} και οι τάσεις σ_{ij} στο εσωτερικό του ελαστικού μέσου V μπορούν να υπολογισθούν με τη χρήση ολοκληρωτικών τύπων με επιφανειακή ολοκλήρωση στο σύνορο S του ελαστικού μέσου V . Όμως για να γίνει αυτό θα πρέπει, όπως ήδη αναφέραμε, να είναι γνωστές οι παραμορφώσεις u_i αλλά και το διάνυσμα των τάσεων t_i σε όλο το σύνορο S της περιοχής V . Αυτό όμως γενικά δε συμβαίνει. Γενικά στο σύνορο S είναι γνωστές είτε μόνο οι μετατοπίσεις u_i είτε μόνο το διάνυσμα των τάσεων, δηλαδή οι φορτίσεις, t_i . Στην πρώτη περίπτωση θα πρέπει βέβαια να βρεθεί και το διάνυσμα των τάσεων t_i . Ενώ στη δεύτερη περίπτωση θα πρέπει να βρεθούν και οι μετατοπίσεις u_i . Και στη μικτή περίπτωση είναι γνωστές οι μετατοπίσεις u_i σε ένα τμήμα $S_1 \subset S$ του συνόρου S και το διάνυσμα των τάσεων t_i στο υπόλοιπο τμήμα $S_2 \subset S$ του συνόρου S φυσικά με $S_1 \cup S_2 = S$. Και σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να βρεθούν οι ποσότητες που λείπουν, δηλαδή το διάνυσμα των τάσεων t_i στο τμήμα S_1 και οι μετατοπίσεις u_i στο υπόλοιπο τμήμα S_2 του S .

Αυτό το πετυχαίνουμε με τη χρήση της ταυτότητας του Somigliana για τις μετατοπίσεις (6.3.101) ακριβώς πάνω στο σύνορο S , δηλαδή με $\xi \in S$, οπότε $c(\xi) = 1/2$ με βάση τη δεύτερη σχέση (6.3.100) και ασφαλώς με την υπόθεση λείου συνόρου S . Σε αυτήν την περίπτωση η ταυτότητα του Somigliana (6.3.101) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2} u_k(\xi) = \iint_S [U_{ik}(\mathbf{x}, \xi) t_i(\mathbf{x}) - T_{ik}(\mathbf{x}, \xi) u_i(\mathbf{x})] dS(\mathbf{x}) \quad \text{με } \xi \in S \quad (6.3.104)$$

αποτελώντας τις τρεις συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις (με $k = 1, 2, 3$) που θα πρέπει να επιλύσουμε συνήθως αριθμητικά με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε7

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο Κεφάλαιο αυτό Ε7 αναφερόμαστε στο Λογισμό Μεταβολών. Με τις μεθόδους του προσδιορίζουμε ακρότατα, δηλαδή μέγιστα και ελάχιστα, συναρτησιακών (ή συναρτησοειδών), δηλαδή συναρτήσεων $J[y]$ σε μορφή ολοκληρωμάτων, όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι συνάρτηση μιας συνάρτησεως $y(x)$ και των παραγώγων της είτε συνήθων παραγώγων είτε μερικών παραγώγων. Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις στα πρακτικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού μας ενδιαφέρει μόνο η περίπτωση ελαχιστοποίησης συναρτησιακού $J[y]$, δηλαδή το συναρτησιακό να παίρνει ελάχιστη τιμή για μια κατάλληλη συνάρτηση.

Στην πρώτη Ενότητα Ε7.1 αναφερόμαστε γενικά σε συναρτησιακά της μορφής $J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx$ και στην ελαχιστοποίησή τους. Πρόκειται για την πιο απλή περίπτωση ελαχιστοποίησης συναρτησιακού στο Λογισμό Μεταβολών. Σαν εφαρμογές αναφέρουμε ένα πολύ απλό πρόβλημα Γεωμετρίας και ένα διάσημο πρόβλημα Δυναμικής: το πρόβλημα της βραχυτόχρονης. Στην επόμενη Ενότητα Ε7.2 γι' αυτήν την απλή περίπτωση προκύπτει ότι αναγκαία συνθήκη ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού $J[y]$ είναι η ισχύς μιας διαφορικής εξίσωσης που καλείται εξίσωση των Euler–Lagrange. Σαν εφαρμογές λύνουμε πλήρως το απλό πρόβλημα Γεωμετρίας της Ενότητας Ε7.1 και αναφέρουμε και ένα ακόμη πρόβλημα Γεωμετρίας.

Την επόμενη Ενότητα Ε7.3 την αφιερώνουμε στην εφαρμογή των προηγούμενων στο στατικό πρόβλημα του καλωδίου, όπου και προκύπτει με ελαχιστοποίηση ενός κατάλληλου συναρτησιακού και με χρήση της εξίσωσης των Euler–Lagrange η σχετική γνωστή μας διαφορική εξίσωση. Ανάλογα ενεργούμε στην Ενότητα Ε7.4 που ακολουθεί, εκεί για το στατικό πρόβλημα της δοκού αντί του καλωδίου και με χρήση γενικευμένης μορφής της εξίσωσης των Euler–Lagrange. Και στις δύο αυτές ενότητες τα συναρτησιακά που ελαχιστοποιούνται αφορούν στις ενέργειες αυτών των γραμμικών φορέων μας: καλωδίου και δοκού.

Πιο σημαντική στις εφαρμογές του Λογισμού Μεταβολών και των συναρτησιακών είναι η επόμενη Ενότητα Ε7.5. Εκεί αναφερόμαστε στην αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton. Αυτή είναι μια πολύ γνωστή αρχή στη Δυναμική που απαιτεί την ελαχιστοποίηση της δράσεως στην κίνηση υλικού σημείου ή υλικών σημείων. Η αρχή αυτή έχει πάρα πολλές εφαρμογές στη Δυναμική και αποτελεί μια εναλλακτική δυνατότητα ως προς το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα οδηγώντας τελικά στις ίδιες διαφορικές εξισώσεις. Σαν εφαρμογές παρουσιάζουμε την πτώση υλικού σημείου, την κίνηση του απλού εκκρεμούς κι άλλες κινήσεις. Μετά στην Ενότητα Ε7.6 αναφερόμαστε μόνο στην εφαρμογή της αρχής της ελάχιστης δράσεως του Hamilton σε μονώροφο, διώροφο και τριώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως (ή διατμητικό κτίριο). Με χρήση της προκύπτουν οι γνωστές μας συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (απλές ή συστήματα) για ιδεατά κτίρια.

Τέλος στην Ενότητα Ε7.7 γενικεύουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα στην ενδιαφέρουσα περίπτωση περισσότερων της μιας ανεξάρτητων μεταβλητών. Τότε η γενικευμένη εξίσωση των Euler–Lagrange οδηγεί σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Τη μέθοδο αυτή την εφαρμόζουμε σε συναρτησιακά που οδηγούν στην εξίσωση του Laplace και στην εξίσωση του Poisson. Με χρήση και της αρχής του Hamilton βρίσκουμε ενεργειακά τις διαφορικές εξισώσεις φορέων (καλώδιο, δοκός, κλπ.) σε δυναμική καταπόνηση.

E7.1

E7.1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥΣ

Γνωρίζουμε ήδη από το Μέρος Α: *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς*, Τεύχος 1: *Εφαρμοσμένες Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς* πώς μπορούμε να σχηματίζουμε διαφορικές εξισώσεις σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού με τους κλασικούς τρόπους εργασίας. Για παράδειγμα, μάθαμε πώς να χρησιμοποιούμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για να καταστρώνουμε απλές διαφορικές εξισώσεις κινήσεως υλικών σημείων. Χρησιμοποιήσαμε επίσης απλές σχέσεις της Γεωμετρίας αλλά και της Μηχανικής των Υλικών για να σχηματίσουμε την εξίσωση της συνήθους δοκού. Ανάλογα και της δοκού σε ελαστική βάση. Τέλος στην Ενότητα A2.2 του Μέρους Α χρησιμοποιήσαμε την αρχή διατηρήσεως της ενέργειας για το σχηματισμό της διαφορικής εξισώσεως της κινήσεως μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου (ή ισοδύναμα ελατηρίου-μάζας).

Σ' αυτήν την Ενότητα E7.1 προχωράμε σε μια εντελώς διαφορετική μέθοδο σχηματισμού διαφορικών εξισώσεων που είναι εφαρμόσιμη σε πολλά προβλήματα τόσο της Μηχανικής των Υλικών όσο και της Δυναμικής και των Ταλαντώσεων. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην ελαχιστοποίηση ενός ολοκληρώματος το οποίο περιέχει την άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ και καταλήγει στη ζητούμενη διαφορική εξίσωση του προβλήματός μας. Συγκεκριμένα θεωρούμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (7.1.1)$$

Εδώ η συνάρτηση $F(x, y, y')$ είναι μια γνωστή συνάρτηση των τριών μεταβλητών x, y και y' με $y = y(x)$ και $y' = y'(x)$ την πρώτη παράγωγο της συναρτήσεως $y = y(x)$. Ένα τέτοιο ολοκλήρωμα καλείται *συναρτησιακό* και σπανιότερα *συναρτησοειδές*. Έτσι το σύμβολο $J[y]$ δηλώνει μια συνάρτηση, τη J , που έχει όμως σαν μεταβλητή της όχι μια απλή μεταβλητή, όχι έναν απλό αριθμό, αλλά μια άλλη συνάρτηση: τη συνάρτηση y . Για το λόγο αυτό λέμε ότι το σύμβολο $J[y]$ δηλώνει μια συνάρτηση συναρτήσεως (κι όχι απλής μεταβλητής). Επίσης για τον ίδιο λόγο χρησιμοποιούμε συνήθως (αλλ' όχι πάντα!) αγκύλες αντί για παρενθέσεις γράφοντας συνήθως $J[y]$ και όχι $J(y)$. Φυσικά και $J(y)$ να γράψουμε, με τίποτα δεν είναι λάθος!

Στη Φυσική, στη Μηχανική των Υλικών, στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις, κλπ. αρκετοί νόμοι έχουν τη μορφή (ή έστω μπορούν να γραφούν σε μορφή) ελαχιστοποίησησεως κάποιου κατάλληλου συναρτησιακού $J[y]$ προφανώς υπό κατάλληλες προϋποθέσεις και συνοριακές συνθήκες. Δηλαδή αρκετοί φυσικοί νόμοι οδηγούν στην απαίτηση ένα κατάλληλο συναρτησιακό $J[y]$ της μορφής (7.1.1) που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ να πάρει ελάχιστη τιμή, δηλαδή

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx = \text{minimum}. \quad (7.1.2)$$

Στο συναρτησιακό αυτό $J[y]$ η ολοκληρωτέα συνάρτηση $F(x, y, y')$ είναι μια γνωστή συνάρτηση των τριών μεταβλητών x, y και y' . Εντούτοις η ίδια η συνάρτηση $y = y(x)$ (η μεταβλητή του συναρτησιακού $J[y]$) είναι μια άγνωστη συνάρτηση που πρέπει να προσδιορισθεί από την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $J[y]$. Αυτή η δουλειά, δηλαδή η ελαχιστοποίηση ενός συναρτησιακού, γίνεται στο *Λογισμό Μεταβολών*. Αυτός είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών και το μελετάμε σύντομα σ' αυτό εδώ το Κεφάλαιο E7. Συγκεκριμένα στην επόμενη Ενότητα E7.2 θα χρησιμοποιήσουμε το Λογισμό Μεταβολών για να βρούμε το αποτέλεσμα το οποίο προκύπτει για την

ελαχιστοποίηση του πιο πάνω συναρτησιακού $J[y]$: εξίσωση των Euler-Lagrange. Σε επόμενες ενότητες θα αναφέρουμε (χωρίς αποδείξεις) και τρεις απλές γενικεύσεις του ίδιου αποτελέσματος σε λίγο δυσκολότερα συναρτησιακά, αλλά σίγουρα, όπως θα δούμε παρακάτω, πολύ χρήσιμα στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

Πέρα από τους φυσικούς νόμους που εκφράζονται (ή έστω μπορούν να εκφραστούν) σαν προβλήματα ελαχιστοποίησης συναρτησιακών υπάρχουν και πολλά πρακτικά προβλήματα που μπορούν να εκφραστούν με τον ίδιο τρόπο χωρίς να δηλώνουν κανέναν απολύτως φυσικό νόμο. Ας δούμε τώρα ένα τέτοιο πρόβλημα.

❖ Εφαρμογή Ενότητα Ε7.1

▼ Εφαρμογή Ε7.1 ■ Γεωμετρία: ελάχιστο μήκος καμπύλης

Η πιο απλή σχετική εφαρμογή είναι η εύρεση της καμπύλης $y(x)$ η οποία συνδέει δύο γνωστά σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) , δηλαδή $y(x_1) = y_1$ και $y(x_2) = y_2$, και έχει ελάχιστο μήκος S . Προφανώς, επειδή το στοιχειώδες μήκος τόξου ds πάνω σε μια λεία καμπύλη $y = y(x)$ είναι

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx, \quad \text{αφού } y'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad (7.1.3)$$

το συνολικό μήκος S αυτής εδώ της καμπύλης από το πρώτο σημείο της (x_1, y_1) μέχρι το δεύτερο σημείο της (x_2, y_2) θα δίνεται από το συναρτησιακό

$$S = S[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (7.1.4)$$

Και αυτό το συναρτησιακό $S[y]$ θέλουμε να είναι ελάχιστο, δηλαδή να ισχύει

$$S = S[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \text{minimum}. \quad (7.1.5)$$

Επομένως εδώ προέκυψε πραγματικά το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού $J[y]$ στη σχέση (7.1.2) με τη συνάρτηση F στο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος του να παίρνει σ' αυτήν τη γεωμετρική εφαρμογή την πολύ απλή μορφή

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (7.1.6)$$

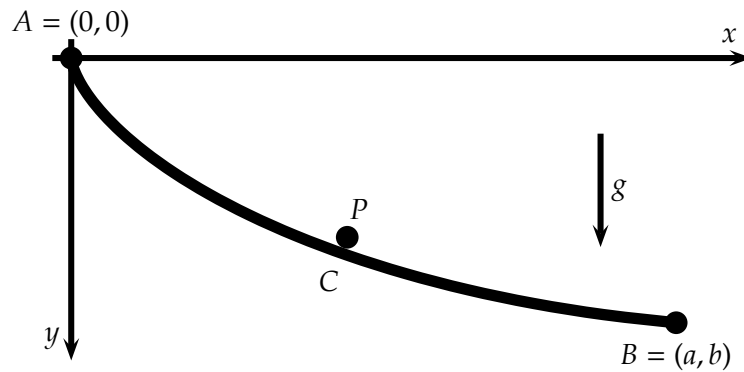
Αυτό φαίνεται καθαρά από την πιο πάνω σχέση (7.1.5). Ας σημειώσουμε επίσης ότι εδώ χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο $S[y]$ για το συναρτησιακό μας (που εδώ εκφράζει το συνολικό μήκος S καμπύλης) αντί για το γενικότερο σύμβολο $J[y]$ πιο πάνω. ▲

❖ Εφαρμογή Ενότητα Ε7.1

▼ Εφαρμογή Ε7.2 ■ Δυναμική: βραχυστόχρονη

Αναφέρουμε κι ένα άλλο δυσκολότερο αλλά συνάμα και πολύ διάσημο πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτησιακού. Αυτό είναι ένα πρόβλημα Δυναμικής και αφορά στην εύρεση της καμπύλης $y(x)$ που ενώνει ξανά δύο γνωστά σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο και οδηγεί ένα υλικό σημείο που κινείται πάνω της σε ελάχιστο χρόνο διαδρομής T από το πρώτο σημείο (που είναι πιο ψηλά) στο δεύτερο (που είναι πιο χαμηλά). Αυτό το πρόβλημα είναι το διάσημο *πρόβλημα της βραχυστόχρονης*⁵ εννοείται της βραχυστόχρονης καμπύλης (ή *πρόβλημα του βραχυστόχρονου*). Πρόκειται για την καμπύλη με τον ελάχιστο χρόνο T κίνησης του υλικού σημείου P . Το πρόβλημα αυτό τέθηκε από το Johann Bernoulli το 1696.

⁵Ο γράφων θεωρεί πιο σωστό τον όρο βραχιστόχρονη (με ι από τη λέξη βράχιστος) αντί για τον όρο βραχυστόχρονη (με υ), που έχει όμως επικρατήσει. Ο αγγλικός όρος είναι brachistochrone (με ι).



Σχήμα E7.1: Βραχυστόχρονη καμπύλη AB στην κίνηση στο γήινο πεδίο βαρύτητας.

Στο πιο πάνω Σχήμα E7.1 θεωρούμε την κίνηση υλικού σημείου P από το σημείο $A = (0, 0)$ μέχρι το σημείο $B = (a, b)$ (με $b > 0$) υπό την επίδραση του γήινου πεδίου βαρύτητας (με επιτάχυνση g). Απλά για διευκόλυνση πήραμε το σημείο A σαν αρχή των συντεταγμένων και τη θετική φορά του άξονα Ay προς τα κάτω, προς τη γη. Εδώ ζητάμε το προς ελαχιστοποίηση συναρτησιακό $T[y]$ της βραχυστόχρονης καμπύλης που ενώνει τα σημεία A και B . Πρόκειται, επαναλαμβάνουμε, για την καμπύλη που απαιτεί τον ελάχιστο χρόνο διαδρομής $T[y]$ του υλικού σημείου από το σημείο A μέχρι το σημείο B βέβαια με το σημείο B πιο κάτω από σημείο A (Σχήμα E7.1).

Το υλικό σημείο μάζας m ξεκινάει την κίνησή του πάνω στην καμπύλη AB που ενώνει τα σημεία A και B από το σημείο A , όπου βρίσκεται σε ηρεμία με μηδενική ταχύτητα: $v_A = 0$. Ο συνολικός χρόνος T που απαιτείται για την κίνηση αυτή είναι

$$T = \int_0^T dt = \int_0^S \frac{dt}{ds} ds \quad (7.1.7)$$

με S το συνολικό μήκος της καμπύλης AB και ds το σχετικό μήκος τόξου που είναι

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx, \quad \text{αφού } y'(x) = \frac{dy}{dx}. \quad (7.1.8)$$

Είναι επίσης γνωστό ότι η ταχύτητα v του υλικού σημείου P είναι

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \text{οπότε } \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}. \quad (7.1.9)$$

Επομένως ο συνολικός χρόνος T στη σχέση (7.1.7) παίρνει τώρα με βάση τις δύο σχέσεις (7.1.8) και (7.1.9) τη μορφή

$$T = T[y] = \int_0^a \frac{1}{v} \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{v} dx. \quad (7.1.10)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα v του υλικού σημείου, όταν βρίσκεται στη θέση y , εδώ όμως με τον άξονα Oy προς τα κάτω (Σχήμα E7.1). Στο σημείο A με $y = 0$ το υλικό σημείο είχε κινητική ενέργεια 0 , ενώ στο σημείο C πιο κάτω έχει κινητική ενέργεια $E = \frac{1}{2}mv^2$ με m τη μάζα του. Υποθέτουμε βέβαια πως δεν υπάρχουν τριβές. Αυτή η κινητική ενέργεια E προήλθε φυσικά από τη διαφορά δυναμικής ενέργειας $V = mgy$ μεταξύ των δύο σημείων A και C . Επομένως έχουμε

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy, \quad \text{οπότε } v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2gy(x)}. \quad (7.1.11)$$

Αυτή είναι η ταχύτητα v του υλικού σημείου P στο σημείο C με τεταγμένη y . Εισάγοντάς την στο συναρτησιακό (7.1.10), αυτό παίρνει την τελική του μορφή

$$T = T[y] = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}} dx = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx \quad \text{με } y = y(x). \quad (7.1.12)$$

Αυτό είναι το προς ελαχιστοποίηση συναρτησιακό στο παρόν πρόβλημα της βραχυ-στόχρου καμπύλης και επειδή εδώ παριστάνει το συνολικό χρόνο T , το γράψαμε με λίγο διαφορετικό σύμβολο συγκεκριμένα σαν $T[y]$ αντί σαν $J[y]$. Και φυσικά η συνάρτηση $F(x, y, y')$ στο συναρτησιακό αυτό $T[y]$ είναι η ακόλουθη συνάρτηση:

$$F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} \quad \text{με} \quad y = y(x). \quad (7.1.13)$$

Εδώ βέβαια παραλείψαμε τη σταθερά $1/\sqrt{2g}$ έξω από το ολοκλήρωμα του συναρτησιακού $T[y]$ στη σχέση (7.1.12), επειδή δεν έχει καμία επίδραση στην ελαχιστοποίησή του. Τώρα το πώς ακριβώς μπορούμε να κάνουμε την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $T[y]$ και έτσι να βρούμε τη βραχυστόχρονη καμπύλη $y(x)$, ε αυτό είναι ένα θέμα που το εξετάζουμε με το Λογισμό Μεταβολών αμέσως πιο κάτω. ▲

E7.2

E7.2. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ EULER-LAGRANGE

Υποθέτουμε τώρα πως έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του πιο πάνω συναρτησιακού $J[y]$ στη σχέση (7.1.2). Την επαναλαμβάνουμε

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx = \text{minimum} \quad (7.2.1)$$

εδώ μαζί με δύο συνοριακές συνθήκες: τις δύο συνθήκες $y(a) = y_a$ και $y(b) = y_b$. Αυτό σημαίνει ότι εμείς θέλουμε να προσδιορίσουμε την προς το παρόν άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ (η οποία εδώ παίζει το ρόλο της μεταβλητής στο συναρτησιακό $J[y]$) με τέτοιον τρόπο, ώστε αυτό το συναρτησιακό $J[y]$ να γίνει ελάχιστο (minimum).

Αυτό το πρόβλημα αποτελεί ουσιαστικά μια ενδιαφέρουσα γενίκευση του προβλήματος της ελαχιστοποίησης μιας παραγωγίσιμης συναρτήσεως $f(x)$. Από το Διαφορικό Λογισμό (τις παραγώγους) ξέρουμε πολύ καλά ότι για να έχει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ τοπικό ελάχιστο σ' ένα συγκεκριμένο εσωτερικό σημείο $x = c$ του διαστήματος ορισμού της $[a, b]$ θα πρέπει οπωσδήποτε να ισχύει $f'(c) = 0$ στο σημείο αυτό $x = c$. Δηλαδή η παράγωγός της (που υποθέσαμε ότι υπάρχει, αφού αναφερθήκαμε σε παραγωγίσιμη συνάρτηση) πρέπει οπωσδήποτε να μηδενίζεται.

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση E7.1:** Θα ήταν μια πάρα πολύ μεγάλη παράλειψή μας να μην αναφέρουμε εδώ ότι στην παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ ο μηδενισμός της πρώτης παραγώγου της $f'(c) = 0$ στο σημείο $x = c$ είναι βέβαια αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη τοπικού ελάχιστου στο σημείο αυτό. Δεν ισχύει όμως και το αντίστροφο. Πρόκειται λοιπόν για μια αναγκαία, αλλ' όχι και ικανή συνθήκη. Δηλαδή ο μηδενισμός της παραγώγου $f'(c) = 0$ δε σημαίνει σίγουρα ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = c$. Ο ίδιος μηδενισμός $f'(c) = 0$ μπορεί να δηλώνει ένα τοπικό μέγιστο της ίδιας συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο $x = c$ ή ακόμη και ένα σημείο καμπής της ίδιας συναρτήσεως που δεν είναι ούτε τοπικό μέγιστο ούτε τοπικό ελάχιστο. Γενικά λέμε ότι ένα σημείο c όπου $f'(c) = 0$ αποτελεί **στάσιμο σημείο** (ή **σημείο στασιμότητας**) της συναρτήσεως $f(x)$. Δηλαδή, το επαναλαμβάνουμε, ο μηδενισμός της πρώτης παραγώγου $f'(c) = 0$ αποτελεί αναγκαία, αλλ' όχι και ικανή, συνθήκη, ώστε η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ να έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x = c$, δηλαδή να ισχύει $f(c) = \text{minimum}$ (ή ισοδύναμα $f(c) = \min$). ▲

ΘΕΩΡΗΜΑ

Επανερχόμαστε τώρα στη δική μας περίπτωση με το συναρτησιακό $J[y]$ με χρήση του Λογισμού Μεταβολών. Θα αποδείξουμε παρακάτω ότι ισχύει το εξής θεώρημα:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ Ε7.1 (Εξίσωση των Euler–Lagrange):** Θεωρούμε την ελαχιστοποίηση (τοπικό ελάχιστο) του συναρτησιακού $J[y]$ που ορίζεται στη σχέση (7.1.1) στο διάστημα $[a, b]$. Δηλαδή θέλουμε να ισχύει η σχέση (7.1.2), την επαναλαμβάνουμε

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx = \text{minimum}, \quad (7.2.2)$$

για μια συγκεκριμένη αρχικά άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ που διαθέτει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο διάστημα $[a, b]$ και έχει καθορισμένες συνοριακές συνθήκες

$$y(a) = y_a \quad \text{και} \quad y(b) = y_b \quad (7.2.3)$$

στα δύο άκρα $x = a$ και $x = b$ του πιο πάνω διαστήματος ολοκληρώσεως $[a, b]$. Για να συμβαίνει αυτή η ελαχιστοποίηση θα πρέπει να πληρούται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{με} \quad a \leq x \leq b. \quad (7.2.4)$$

Με την εκτέλεση των παραγωγίσεων σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση διαπιστώνεται εύκολα ότι πρόκειται για διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως για την προσδιοριστέα συνάρτηση $y(x)$. Αυτή η εξίσωση καλείται **εξίσωση των Euler–Lagrange**. Πρόκειται για μια πάρα πολύ σημαντική εξίσωση στο Λογισμό Μεταβολών. ▲

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση Ε7.2:** Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι, ακριβώς όπως και στις παραγώγους, η εξίσωση των Euler–Lagrange (7.2.4) αποτελεί **αναγκαία αλλά όχι και ικανή συνθήκη** ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού $J[y]$ στη σχέση (7.2.2). Δηλαδή η συνάρτηση $y(x)$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $J[y]$ πρέπει οπωσδήποτε να είναι λύση της εξίσωσης των Euler–Lagrange (7.2.4). Αντίθετα όμως κάθε συνάρτηση $y(x)$ που επαληθεύει την εξίσωση των Euler–Lagrange (7.2.4) δεν ελαχιστοποιεί κατ' ανάγκη το συναρτησιακό $J[y]$ στη σχέση (7.2.2). Εδώ για μια τέτοια συνάρτηση $y(x)$ μπορεί το συναρτησιακό $J[y]$ να παίρνει μέγιστη τιμή ή ακόμη να μην παίρνει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή. Παρά ταύτα κάθε τέτοια συνάρτηση $y(x)$ οδηγεί το συναρτησιακό $J[y]$ σε **στάσιμη τιμή**, το **στασιμοποιεί**. Πάντως το ευχάριστο σε όλη αυτήν την υπόθεση είναι ότι η εξίσωση των Euler–Lagrange (7.2.4) είναι αναγκαίο να ισχύει οπωσδήποτε, όταν επιδιώκουμε την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $J[y]$: είναι αναγκαία συνθήκη ελαχιστοποίησης του $J[y]$. ▲

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση Ε7.3:** Εμείς εδώ αναφερόμαστε πολύ γενικά σε ελαχιστοποίηση συναρτησιακών (και ανάλογα σε αρχές ελαχίστου), στη συγκεκριμένη περίπτωση του συναρτησιακού $J[y]$ στη σχέση (7.2.2), και όχι σε μεγιστοποίησή τους. Κι αυτό το κάνουμε απλά επειδή αυτή είναι η συνηθισμένη ενδιαφέρουσα περίπτωση που καλύπτει τη συντριπτική πλειονότητα των εφαρμογών του Πολιτικού Μηχανικού. Σαν ένα παράδειγμα εφαρμογών ας αναφέρουμε την **αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton** στη Δυναμική, που θα τη δούμε στην Ενότητα Ε7.5 παρακάτω και θα τη χρησιμοποιήσουμε επίσης στην Ενότητα Ε7.6 σε ιδεατά κτίρια στη Δυναμική των Κατασκευών. Εντούτοις η αλήθεια είναι ότι σ' εξαιρετικά σπάνιες περιπτώσεις είναι δυνατόν το συναρτησιακό που έχουμε, π.χ. εδώ το συναρτησιακό $J[y]$, να μην ελαχιστοποιείται, αλλ' απλά να μένει στάσιμο με τη σωστή συνάρτηση $y(x)$ σ' αυτό. Έτσι,

για να είμαστε απόλυτα σωστοί, θα έπρεπε να λέμε *αρχή της στάσιμης δράσεως του Hamilton* αντί *αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton*. Και γενικότερα θα έπρεπε να μιλάμε για αρχές στάσιμων τιμών (ή αρχές στασιμότητας) και όχι απλά για αρχές ελάχιστων τιμών.

Κι όμως αυτές οι ειδικές περιπτώσεις μη ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού $J[y]$ που μας ενδιαφέρει, ας πούμε του συναρτησιακού της δράσεως στην αρχή του Hamilton, είναι κυριολεκτικά ελάχιστες. Επομένως εμείς εδώ συνεχίζουμε να θεωρούμε ότι το συναρτησιακό μας $J[y]$ ελαχιστοποιείται, όπως και πραγματικά συμβαίνει στη συντριπτική πλειονότητα των περιπτώσεων, και δε μένει απλά στάσιμο που είναι βέβαια μια πιο γενική δυνατότητα. Εντούτοις είναι εξαιρετικά απίθανο στα πρακτικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού να μην έχουμε ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $J[y]$. Κι έτσι κι αλλιώς, δηλαδή ακόμη και σ' αυτήν την πιο γενική περίπτωση της στάσιμης τιμής, δηλαδή στην περίπτωση που το συναρτησιακό $J[y]$ μένει στάσιμο, η εξίσωση των Euler-Lagrange (7.2.4) συνεχίζει να ισχύει χωρίς καμία απολύτως τροποποίηση. Και το ίδιο ακριβώς συμβαίνει βέβαια και με τις γενικεύσεις της, που θα τις δούμε παρακάτω. Πρόκειται επομένως για μια γενικά απόλυτα αποδεκτή εξίσωση και δε χρειάζεται καν να ελέγχουμε ότι το συναρτησιακό $J[y]$ παίρνει ελάχιστη τιμή. Δηλαδή δεν υπάρχει κανένα ουσιαστικό πρόβλημα στην επίλυση πρακτικών προβλημάτων του Πολιτικού Μηχανικού με τη χρήση του όρου *ελαχιστοποίηση συναρτησιακού* αντί για τον πιο ακριβή όρο *στασιμοποίηση συναρτησιακού* ή καλύτερα *στασιμότητα συναρτησιακού*. ▲

Και τώρα μετά από όλες αυτές τις διασαφηνίσεις ήρθε η ώρα να προχωρήσουμε στην απόδειξη της εξίσωσης των Euler-Lagrange (7.2.4). Πρέπει όμως να ομολογήσουμε ότι αυτή είναι κάπως παράξενη με τις γνώσεις που έχουμε. Δεν είναι όμως ιδιαίτερα δύσκολη. Είναι μάλιστα και ενδιαφέρουσα και την αναφέρουμε αμέσως παρακάτω. Σημειώνουμε ότι σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση, δηλαδή με συγκεκριμένη τη συνάρτηση $F(x, y, y')$ των τριών μεταβλητών x, y και y' , εκτελούμε τις παραγωγίσεις σ' αυτήν την εξίσωση (7.2.4) για τη γνωστή συνάρτηση $F(x, y, y')$, η οποία υπεισέρχεται στο συναρτησιακό $J[y]$. Διαπιστώνουμε έτσι, επαναλαμβάνουμε, ότι η πιο πάνω εξίσωση των Euler-Lagrange είναι ουσιαστικά μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως ως προς την άγνωστη, την προσδιοριστέα συνάρτηση $y = y(x)$.

⇒ **Απόδειξη:** Προχωράμε τώρα για την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx = \text{minimum} \quad (7.2.5)$$

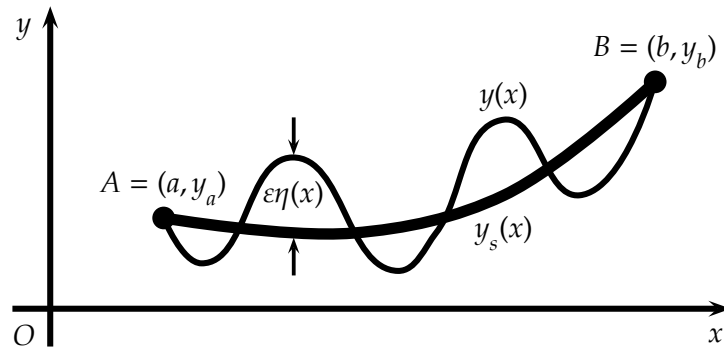
στη σχέση (7.2.2) στην απόδειξη της σχετικής εξίσωσης των Euler-Lagrange (7.2.4). Την υπενθυμίζουμε κι αυτήν την τόσο διάσημη διαφορική εξίσωση (Θεώρημα Ε7.1)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{με} \quad a \leq x \leq b. \quad (7.2.6)$$

Βέβαια εδώ ισχύουν και οι δύο συνοριακές συνθήκες (7.2.3): $y(a) = y_a$ και $y(b) = y_b$.

Η κατάσταση εδώ στο ξεκίνημα της αποδείξεως έχει περίπου ως εξής: Θεωρούμε τη συνάρτηση $y = y_s(x)$ (με δείκτη s) που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $J[y]$ και μια άλλη συνάρτηση $y = y(x)$ που δεν το ελαχιστοποιεί (Σχήμα Ε7.2 παρακάτω). Και οι δυο τους θεωρούνται πως έχουν συνεχείς δεύτερες παραγώγους και πως πληρούν τις δύο συνοριακές συνθήκες (7.2.3) στα άκρα του διαστήματος ολοκλήρωσεως $[a, b]$.

Απόδειξη



Σχήμα E7.2: Η συνάρτηση $y_s(x)$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $J[y]$ και μια άλλη συνάρτηση $y(x) = y_s(x) + \varepsilon\eta(x)$ με $\eta(a) = \eta(b) = 0$ που δεν το ελαχιστοποιεί.

Δηλαδή εδώ ισχύουν και οι τέσσερις σχέσεις

$$y_s(a) = y_a \quad \text{και} \quad y_s(b) = y_b \quad \text{και} \quad \text{επίσης} \quad y(a) = y_a \quad \text{και} \quad y(b) = y_b. \quad (7.2.7)$$

Θεωρούμε επίσης τη διαφορά $\varepsilon\eta(x)$ αυτών των δύο συναρτήσεων $y(x)$ και $y_s(x)$, οπότε

$$\varepsilon\eta(x) = y(x) - y_s(x) \quad \text{ή} \quad \text{ισοδύναμα} \quad y(x) = y_s(x) + \varepsilon\eta(x) \quad (7.2.8)$$

με το ε μη μηδενική σταθερά ($\varepsilon \neq 0$). Η διαφορά $\varepsilon\eta(x)$ αποτελεί μια μεταβολή $dy_s(x)$ της συναρτήσεως $y_s(x)$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $J[y]$. Τότε εξαιτίας των συνοριακών συνθηκών (7.2.7) για τις συναρτήσεις $y_s(x)$ και $y(x)$ για τη συνάρτηση $\eta(x)$ θα ισχύουν, όπως διαπιστώνεται άμεσα, οι δύο ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$\eta(a) = \eta(b) = 0 \quad (7.2.9)$$

στα άκρα του ίδιου διαστήματος ολοκληρώσεως $[a, b]$. Και φυσικά, αφού υποθέσαμε πως και οι δύο συναρτήσεις $y(x)$ και $y_s(x)$ έχουν συνεχείς δευτερες παραγώγους, το ίδιο προφανώς θα συμβαίνει και για τη διαφορά τους $dy_s(x) = \varepsilon\eta(x)$, επομένως και για την ίδια τη συνάρτηση $\eta(x)$, αφού $\varepsilon \neq 0$.

Και τώρα υπενθυμίζουμε ότι δεχθήκαμε τη συνάρτηση $y_s(x)$ σαν τη συνάρτηση εκείνη που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό: τοπικό ελάχιστο. Δηλαδή ισχύει η σχέση

$$J[y_s] = \int_a^b F(x, y_s, y_s') dx = \text{minimum}. \quad (7.2.10)$$

Ενώ αντίθετα η συνάρτηση $y(x) = y_s(x) + \varepsilon\eta(x)$, που περιλαμβάνει μια μεταβολή $dy_s(x) = \varepsilon\eta(x)$ της συναρτήσεως $y_s(x)$, δεν ελαχιστοποιεί το ίδιο συναρτησιακό $J[y]$. Άρα οδηγεί σε μια μεγαλύτερη τιμή του συναρτησιακού $J[y]$. Επομένως ισχύει ότι

$$J[y] = J[y_s + \varepsilon\eta] \geq J[y_s] \quad (7.2.11)$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\varepsilon = 0$. Ορίζοντας μάλιστα ρητά τη συνάρτηση

$$\varphi(\varepsilon) = J[y_s + \varepsilon\eta], \quad (7.2.12)$$

κατανοούμε σύμφωνα με τα παραπάνω πως αυτή ελαχιστοποιείται όταν $\varepsilon = 0$. Κι αυτό συμβαίνει, επειδή έτσι επιλέξαμε τη συνάρτηση $y_s(x)$: να ελαχιστοποιεί η ίδια το συναρτησιακό $J[y]$. Κάθε μεταβολή της $dy_s(x) = \varepsilon\eta(x)$ οδηγεί σε μια νέα συνάρτηση $y(x)$ που δεν ελαχιστοποιεί όμως το συναρτησιακό $J[y]$ της σχέσεως (7.1.1).

Επομένως σύμφωνα με τις δύο σχέσεις (7.2.11) και (7.2.12) η ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $J[y]$ γίνεται για $\varepsilon = 0$. Άρα για $\varepsilon = 0$ θα πρέπει να μηδενίζεται η παράγωγος $\varphi'(\varepsilon)$, δηλαδή να ισχύει η σχέση

$$\varphi'(\varepsilon) = 0 \quad \text{για} \quad \varepsilon = 0 \quad \text{και λίγο πιο απλά} \quad \varphi'(0) = 0. \quad (7.2.13)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα αυτήν εδώ την παράγωγο $\varphi'(\varepsilon) \equiv d\varphi(\varepsilon)/d\varepsilon$ προσπαθώντας να την εκφράσουμε με τη βοήθεια της συναρτήσεως $y_s(x)$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $J[y]$, σχέση (7.2.2), και που θέλουμε να την προσδιορίσουμε. Για τον υπολογισμό αυτής της παραγώγου $\varphi'(\varepsilon)$ λαμβάνουμε υπόψη τον ορισμό (7.2.12) της βοηθητικής συναρτήσεως $\varphi(\varepsilon)$. Παραγωγίζοντας τον παίρνουμε

$$\varphi'(\varepsilon) = \frac{d}{d\varepsilon} J[y_s + \varepsilon\eta] = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, y, y') dx = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(x, y_s + \varepsilon\eta, y'_s + \varepsilon\eta') dx \quad (7.2.14)$$

λόγω του ορισμού (7.1.1) ή (7.2.5) του συναρτησιακού $J[y]$ καθώς επίσης και του ορισμού (7.2.8) δεξιά της γενικότερης συναρτήσεως $y(x) = y_s(x) + \varepsilon\eta(x)$ με βάση τη συνάρτηση $y_s(x)$ που ελαχιστοποιεί αυτό το συναρτησιακό $J[y]$.

Εδώ όμως παρατηρούμε ότι μεταβλητή ολοκληρώσεως στο συναρτησιακό $J[y]$ είναι το x , ενώ η παραγωγή γίνεται ως προς τη μεταβλητή ε της συναρτήσεως $\varphi(\varepsilon)$. Επομένως μπορούμε εδώ δεξιά να εναλλάξουμε τη σειρά της παραγωγίσεως και της ολοκληρώσεως λαμβάνοντας το ολοκλήρωμα της παραγώγου ως προς ε της ολοκληρωτέας συναρτήσεως $F(x, y_s + \varepsilon\eta, y'_s + \varepsilon\eta')$. Έτσι προκύπτει εύκολα ότι

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_a^b \frac{d}{d\varepsilon} [F(x, y_s + \varepsilon\eta, y'_s + \varepsilon\eta')] dx. \quad (7.2.15)$$

Δεν είναι δα και κανένα πολύ σπουδαίο πρόβλημα το να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση $F(x, y_s + \varepsilon\eta, y'_s + \varepsilon\eta')$ ως προς ε . Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας (ή ισοδύναμα της αλληλουχίας των παραγώγων), βρίσκουμε αρκετά εύκολα ότι

$$\frac{d}{d\varepsilon} [F(x, y_s + \varepsilon\eta, y'_s + \varepsilon\eta')] = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d(y_s + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{d(y'_s + \varepsilon\eta')}{d\varepsilon} \quad (7.2.16)$$

προφανώς με $y = y_s + \varepsilon\eta$ με βάση το γεγονός ότι $F = F(x, y, y')$. Και αφού μάλιστα

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = 0, \quad \frac{d(y_s + \varepsilon\eta)}{d\varepsilon} = \eta \quad \text{και} \quad \frac{d(y'_s + \varepsilon\eta')}{d\varepsilon} = \eta', \quad (7.2.17)$$

προκύπτει ότι

$$\frac{d}{d\varepsilon} [F(x, y_s + \varepsilon\eta, y'_s + \varepsilon\eta')] = \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'. \quad (7.2.18)$$

Τόσο απλά!

Επομένως η παράγωγος $\varphi'(\varepsilon)$ που θέλουμε να υπολογίσουμε στη σχέση (7.2.15) παίρνει τώρα πια τη μορφή

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx \quad \text{υπενθυμίζουμε με} \quad F = F(x, y, y'). \quad (7.2.19)$$

Ωραία, σωστά, αλλά πάντως δε μας πολυαρέσει αυτή εδώ η μορφή της παραγώγου $\varphi'(\varepsilon)$, επειδή περιέχει τόσο τη συνάρτηση $\eta(x)$ όσο και την παράγωγό της $\eta'(x)$. Εδώ μια παραγοντική ολοκλήρωση (ολοκλήρωση κατά μέρη ή κατά παράγοντες) στο δεύτερο όρο της ολοκληρωτέας συναρτήσεως, δηλαδή στον όρο της $(\partial F/\partial y')\eta'$, μας βοηθάει απαλλάσσοντάς μας από την παράγωγο $\eta' = \eta'(x)$. Έτσι προκύπτει ότι

$$\varphi'(\varepsilon) = \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \Big|_a^b + \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \eta \right] dx \quad \text{φυσικά με} \quad \eta = \eta(x). \quad (7.2.20)$$

Αλλ' η συνάρτηση $\eta = \eta(x)$ μηδενίζεται στα άκρα $x = a$ και $x = b$ του διαστήματος ολοκλήρωσης $[a, b]$ σύμφωνα με τις σχέσεις (7.2.9). Επομένως ο πρώτος όρος, ο όρος πριν το ολοκλήρωμα, στην παραπάνω σχέση (7.2.20) μηδενίζεται κι αυτός. Βγάζοντας μάλιστα στην ολοκληρωτέα συνάρτηση κοινό παράγοντα το $\eta = \eta(x)$, έχουμε τώρα

$$\varphi'(\varepsilon) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta(x) dx \quad (7.2.21)$$

και τελικά για $\varepsilon = 0$, οπότε $y(x) = y_s(x)$,

$$\varphi'(0) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_s} \right) \right] \eta(x) dx = 0 \quad (7.2.22)$$

λόγω και της αναγκαίας συνθήκης $\varphi'(\varepsilon) = 0$ για $\varepsilon = 0$ ή $\varphi'(0) = 0$, σχέση (7.2.13), για την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $J[y]$: $J[y] = \text{minimum}$, σχέση (7.2.2).

Τώρα στο Λογισμό Μεταβολών αποδεικνύεται ένα σημαντικό λήμμα που μας είναι εδώ πολύ χρήσιμο. Σύμφωνα με το λήμμα αυτό, αν για μια συνεχή συνάρτηση $f(x)$ ισχύει η σχέση

$$\int_a^b f(x)\eta(x) dx = 0 \quad (7.2.23)$$

για κάθε συνάρτηση $\eta(x)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και με $\eta(a) = \eta(b) = 0$, τότε $f(x) = 0$ σε όλο το διάστημα $[a, b]$, δηλαδή $f(x) \equiv 0$. Εδώ απλά σκιαγραφούμε τη βασική ιδέα της σχετικής αποδείξεως. Υποθέτουμε (κακώς!) προς στιγμή ότι $f(c) \neq 0$ σε ένα σημείο $c \in (a, b)$. Τότε, επειδή η συνάρτηση $f(x)$ έχει υποθεθεί συνεχής, θα υπάρχει ένα μικρό διάστημα $(c-d, c+d)$ του διαστήματος $[a, b]$ με τη συνάρτηση $f(x)$ μη μηδενική. Στο διάστημα αυτό $(c-d, c+d)$ επιλέγεται κατάλληλα η δεύτερη συνάρτηση $\eta(x)$, ώστε να είναι κι αυτή μη μηδενική και μάλιστα του ίδιου προσήμου με τη συνάρτηση $f(x)$, ενώ παντού αλλού να είναι μηδενική. Έτσι η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x)\eta(x)$ στο πιο πάνω ολοκλήρωμα (7.2.23) είναι θετική στο διάστημα $(c-d, c+d)$ και μηδενική παντού αλλού. Επομένως και το ολοκλήρωμά της στο διάστημα $[a, b]$ θα είναι κι αυτό θετικό. Αυτό όμως είναι άτοπο, επειδή το ολοκλήρωμα αυτό έχει υποθεθεί στη σχέση (7.2.23) ότι είναι μηδενικό. Το άτοπο προέκυψε από την εσφαλμένη υπόθεση ότι η συνεχής συνάρτηση $f(x)$ έχει ένα σημείο $c \in [a, b]$, όπου δε μηδενίζεται. Άρα η συνάρτηση αυτή $f(x)$ θα πρέπει να μηδενίζεται σ' ολόκληρο το διάστημα $[a, b]$, δηλαδή $f(x) \equiv 0$, ώστε πράγματι να ισχύει η σχέση (7.2.23) **για κάθε** συνάρτηση $\eta(x)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και με $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Ναι, τέτοια συνάρτηση είναι και η δική μας συνάρτηση $\eta(x)$ στη μεταβολή $\varepsilon\eta(x)$ της συναρτήσεως $y_s(x)$ (Σχήμα Ε7.2) που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $J[y]$. Άρα, αφού θέλουμε για οποιαδήποτε συνάρτηση $\eta(x)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο να ισχύει η σχέση (7.2.22), θα πρέπει σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα ο πρώτος όρος της ολοκληρωτέας συναρτήσεως, δηλαδή ο όρος στις αγκύλες του ολοκληρώματος (7.2.22) να μηδενίζεται εκ ταυτότητας: σε ολόκληρο το διάστημα $[a, b]$. Άρα για τη ζητούμενη συνάρτηση $y_s(x)$ (Σχήμα Ε7.2) είναι αναγκαίο να ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial F}{\partial y_s} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_s} \right) = 0 \quad \text{με} \quad a \leq x \leq b. \quad (7.2.24)$$

Επαναλαμβάνουμε αυτό συμβαίνει εάν θέλουμε να ισχύει πάντα η σχέση (7.2.22), δηλαδή **για κάθε** συνάρτηση $\eta(x)$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Άρα καταλήξαμε ακριβώς στην εξίσωση των Euler-Lagrange (7.2.4) ή (7.2.6), μόνο που εδώ δηλώσαμε ρητά τη λύση της $y_s(x)$. Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που πρέπει να πληροί η συνάρτηση $y_s(x)$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $J[y]$.

Δηλαδή η συνάρτηση $y_s(x)$ ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού $J[y]$ είναι λύση της εξίσωσης (7.2.4) ή (7.2.6). Κι έτσι αποδείχθηκε το Θεώρημα Ε7.1 για την εξίσωση των Euler-Lagrange στην ελαχιστοποίηση (7.2.2) του συναρτησιακού $J[y]$. ▲

❖ Εφαρμογή
Ενότητα Ε7.2

▼ Εφαρμογή Ε7.3 ■ Γεωμετρία: ελάχιστο μήκος καμπύλης (συνέχεια)

Εδώ συμπληρώνουμε τη στοιχειώδη γεωμετρική Εφαρμογή Ε7.1 της προηγούμενης Ενότητας Ε7.1. Και είδαμε ήδη ότι η προς το παρόν άγνωστη καμπύλη $y = y(x)$ με ελάχιστο μήκος S που ενώνει δύο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) του επιπέδου θα πρέπει να ελαχιστοποιεί το πολύ απλό συναρτησιακό (7.1.5). Το επαναλαμβάνουμε κι εδώ

$$S = S[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \text{minimum.} \quad (7.2.25)$$

Δηλαδή εδώ η συνάρτησή μας $F(x, y, y')$, η οποία είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο συναρτησιακό $S = S[y]$, έχει τη μορφή (7.1.6). Την επαναλαμβάνουμε κι αυτή

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (7.2.26)$$

Απλά πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της συναρτήσεως $F(x, y, y')$ που χρειαζόμαστε στην εξίσωση των Euler-Lagrange (7.2.4), δηλαδή στη διαφορική εξίσωση $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$ εδώ με $x_1 \leq x \leq x_2$. (7.2.27)

Είναι κυριολεκτικά παιχνίδι αυτή η δουλειά με την τόσο απλή συνάρτηση $F(x, y, y')$ που έχουμε εδώ. Και μάλιστα εδώ η ίδια συνάρτησή μας, η συνάρτηση $F(x, y, y')$ στη σχέση (7.2.26), εξαρτάται (ευτυχώς!) μόνο από την παράγωγο y' . Άρα προκύπτει

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \text{και στη συνέχεια} \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{2y'}{2\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}, \quad (7.2.28)$$

όπως πολύ εύκολα διαπιστώνουμε με την παραγωγή της συναρτήσεως $F(x, y, y')$ στη σχέση (7.2.26) ως προς την τρίτη μεταβλητή της, την y' .

Επομένως η εξίσωση των Euler-Lagrange (7.2.4) ή (7.2.27) παίρνει εδώ τη μορφή

$$0 - \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0 \quad \implies \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0. \quad (7.2.29)$$

Πάρα πολύ ωραία! Είναι τώρα απόλυτα εφικτό να προχωρήσουμε στην παραγωγή ως προς x της συναρτήσεως $y'/\sqrt{1 + y'^2}$ δεξιά. (Τώρα μάλιστα πρόκειται για συνήθη παραγωγή, όχι πια για μερική παραγωγή.) Έτσι θα βρούμε τη διαφορική εξίσωση που αναγκαστικά πρέπει να πληροί η συνάρτηση $y(x)$ που ζητάμε εδώ για το ελάχιστο μήκος S καμπύλης που ενώνει δύο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) . Αυτό είναι εφικτό, θα προκύψει εύκολα μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως, αλλά δεν είναι και ιδιαίτερα έξυπνο. Ειδικά εδώ μπορούμε να σκεφθούμε λίγο πιο απλά. Επειδή η παράγωγος ως προς x της συναρτήσεως $y'/\sqrt{1 + y'^2}$ είναι ίση με μηδέν, η συνάρτηση αυτή θα πρέπει να είναι σταθερή. Δηλαδή είναι αναγκαίο να ισχύει

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = C \quad (7.2.30)$$

με το C να δηλώνει μια αυθαίρετη σταθερά.

Λύνουμε τώρα την αμέσως πιο πάνω εξίσωση (7.2.30) ως προς y' . Πρόκειται για ένα πάρα πολύ εύκολο μαθηματικό καθήκον, απλά επειδή έχουμε μια αλγεβρική και όχι διαφορική εξίσωση ως προς y' . Διαπιστώνουμε έτσι αμέσως ότι

$$y' = D, \quad \text{οπότε} \quad y = Dx + E, \quad (7.2.31)$$

όπου το D (που προκύπτει αμέσως από το C) είναι επίσης μια σταθερά. Επομένως έχουμε σταθερή την παράγωγο $y' = y'(x)$ της άγνωστης συναρτήσεώς μας $y = y(x)$ που ζητάμε να προσδιορίσουμε. Άρα η καμπύλη με το ελάχιστο μήκος S που ενώνει τα δύο σταθερά σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι η σχετική ευθεία γραμμή. Εννοείται πως οι δύο σταθερές D και E στην παραπάνω γραμμική συνάρτηση $y = Dx + E$ θα προσδιορισθούν από τις δύο συνθήκες ότι η συνάρτηση αυτή πρέπει να περνάει και από τα δύο αυτά σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) , να συνδέει, να ενώνει τα σημεία αυτά.

Παρατηρούμε τέλος ότι το αποτέλεσμα αυτό ήταν αναμενόμενο, ήταν προφανές στην τόσο απλή παρούσα εφαρμογή μας. Αντίθετα στο **πρόβλημα της βραχυστόχρονης**, το οποίο ήδη μελετήσαμε στην Εφαρμογή Ε7.2 της προηγούμενης Ενότητας Ε7.1, καθώς και στις περισσότερες εφαρμογές της εξισώσεως των Euler-Lagrange τα αποτελέσματά τους γενικά δεν είναι καθόλου μα καθόλου προφανή. Ιδίως μάλιστα στο πρόβλημα της βραχυστόχρονης το αποτέλεσμα (η **κυκλοειδής καμπύλη**) είναι μάλλον απρόσμενο και ιδιαίτερα ενδιαφέρον. Αλλά δε θα προχωρήσουμε στο πρόβλημα αυτό. (Ανάλογα ισχύουν στην αμέσως παρακάτω Άσκηση Ε7.1 και στο σχετικό, μαθηματικά μόνο σχετικό!, **πρόβλημα της αλυσοειδούς**.) Όμως εμείς εδώ θα δώσουμε προτεραιότητα σε πρακτικά προβλήματα που τα θεωρούμε πολύ πιο σημαντικά για τον Πολιτικό Μηχανικό και ταυτόχρονα και πολύ πιο απλά στη λύση τους. Και εδώ βέβαια πάντοτε με χρήση της εξισώσεως των Euler-Lagrange (7.2.4) και των διαφορών γενικεύσεών της που μερικές θα τις δούμε παρακάτω. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε7.2

▼ Άσκηση Ε7.1 ■ Γεωμετρία: ελάχιστη επιφάνεια εκ περιστροφής

Θεωρούμε την επιφάνεια εκ περιστροφής την οποία σχηματίζει καμπύλη $y = y(x)$ (με $x_1 \leq x \leq x_2$ και με $y(x) > 0$) η οποία ενώνει τα δύο σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) , όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα Ox . Γι' αυτήν την επιφάνεια εκ περιστροφής θέλουμε να έχει το μικρότερο δυνατό εμβαδόν, το ελάχιστο εμβαδόν. Ζητούνται: (α) Το **συναρτησιακό** (ή **συναρτησοειδές**) $J[y]$ που ελαχιστοποιείται. (β) Η σχετική συνάρτηση $F(x, y, y')$ που θα χρησιμοποιηθεί στην εξίσωση των Euler-Lagrange. (γ) Να αναφερθεί η εξίσωση αυτή χωρίς όμως καμία εκτέλεση παραγωγίσεων, δηλαδή χωρίς να σχηματισθεί η τελική διαφορική εξίσωση για τη συνάρτηση $y = y(x)$.
 ⇔ **Απαντήσεις:** (α) $J[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$. (β) $F(x, y, y') = y \sqrt{1 + y'^2}$, αφού η σταθερά 2π προφανώς δεν επηρεάζει καθόλου την ελαχιστοποίηση αυτού του συναρτησιακού $J[y]$. (γ) Εξίσωση (7.2.4) ή (7.2.6) ή καλύτερα (7.2.27). ▲

E7.3

E7.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΑΛΩΔΙΟΥ

Σε αυτήν την παράγραφο θεωρούμε το πρόβλημα ενός ευθύγραμμου καλωδίου μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) υπό τάση (δύναμη) T κατά μήκος του και με κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$. Εδώ άγνωστη συνάρτηση είναι η κάθετη μετατόπιση $v(x)$ των σημείων του καλωδίου. Προσεγγιστικά το πρόβλημα αυτό παρουσιάζεται σε ένα σχεδόν ευθύγραμμο καλώδιο που στηρίζει μια **κρεμαστή γέφυρα**. (Όχι τη γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου! Αυτή είναι καλωδιωτή γέφυρα αναρτημένη με ευθύγραμμα καλώδια, αλλ' όχι κρεμαστή γέφυρα.) Η κρεμαστή γέφυρα ασκεί την κάθετη φόρτιση $p(x)$ πάνω στο καλώδιο που τη στηρίζει μέσω πολλών κατακόρυφων καλωδίων (των **αναρτήρων**) κατά μήκος της. Η φόρτιση αυτή $p(x)$ οφείλεται στο βάρος της ίδιας της γέφυρας, των **κύριων δοκών** και του **καταστρώματός** της, καθώς και στα εξωτερικά φορτία που δέχεται η γέφυρα, π.χ. από τα αυτοκίνητα που βρίσκονται

πάνω στην κρεμαστή γέφυρα.

Αποδεικνύεται ότι το πιο πάνω πρόβλημα του ευθύγραμμου καλωδίου με συνοριακές συνθήκες $v(0) = v(L) = 0$ ανάγεται στην ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού

$$\Pi[v] = \int_0^L \left[\frac{T}{2} v'^2(x) - p(x)v(x) \right] dx = \text{minimum}. \quad (7.3.1)$$

Εδώ πρόκειται για την *αρχή της ελάχιστης συνολικής δυναμικής ενέργειας* στη Μηχανική των Υλικών. Άρα η συνάρτηση $F(x, y, y')$ στο παρόν πρόβλημα καλωδίου είναι η συνάρτηση

$$F(x, v, v') = \frac{T}{2} v'^2 - p(x)v. \quad (7.3.2)$$

Εδώ βέβαια συμβολίσαμε το συναρτησιακό με Π αντί για J . Έτσι γίνεται συνήθως σε προβλήματα ελαχιστοποίησης συναρτησιακών στη Μηχανική των Υλικών. Επίσης συμβολίσαμε την άγνωστη συνάρτηση που θέλουμε να προσδιορίσουμε με $v(x)$ αντί με $y(x)$. Αυτό έχει υιοθετηθεί εδώ για τις κάθετες, τις εγκάρσιες μετατοπίσεις (κατά τον άξονα Oy) σε γραμμικούς φορείς (κυρίως σε δοκούς, εδώ όμως και σε καλώδια).

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση E7.4:** Η παραπάνω συνάρτηση $F(x, v, v')$ στο καλώδιο, δηλαδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο συναρτησιακό $\Pi[v]$ στη σχέση (7.3.1), είναι η διαφορά δύο όρων. Ο πρώτος όρος $(T/2)v'^2$ είναι η *ενέργεια παραμορφώσεως* του καλωδίου ανά μονάδα μήκους του, ενώ ο δεύτερος όρος $p(x)v$ είναι το *έργο* της εξωτερικής φορτίσεως $p(x)$ του καλωδίου πάλι ανά μονάδα μήκους του με μετατόπιση $v = v(x)$ των σημείων του. Άρα η *συνολική ενέργεια παραμορφώσεως* $U[v]$ του καλωδίου (σε όλο το μήκος του καλωδίου: $0 \leq x \leq L$) και το *συνολικό έργο* $W[v]$ της εξωτερικής φορτίσεως $p(x)$ με κάθετη μετατόπιση του καλωδίου $v(x)$ θα είναι

$$U[v] = \int_0^L \frac{T}{2} v'^2(x) dx \quad \text{και} \quad W[v] = \int_0^L p(x)v(x) dx. \quad (7.3.3)$$

Επομένως

$$\Pi[v] = U[v] - W[v] \quad (7.3.4)$$

για το συναρτησιακό $\Pi[v]$ στη σχέση (7.3.1), για τη *συνολική δυναμική ενέργεια* του καλωδίου. Εδώ επιζητούμε την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $\Pi[v]$. ▲

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση E7.5:** Όπως γνωρίζουμε πολύ καλά, η κάθετη μετατόπιση $v(x)$ σε μια δοκό καλείται συνήθως *βέλος κάμψεως* της δοκού και πραγματικά υπάρχει κάμψη στις δοκούς. Στα καλώδια όμως (π.χ. στο καλώδιο που στηρίζει μια κρεμαστή γέφυρα) η δυσκαμψία τους EI είναι πρακτικά μηδέν. (Τέλος πάντων είναι πολύ μικρή, σχεδόν μηδέν, προσεγγιστικά όμως ο Πολιτικός Μηχανικός την υποθέτει ίση με το μηδέν.) Επομένως δεν υπάρχει κάμψη στα καλώδια: τα καλώδια είναι (μάλλον τα υποθέτουμε εμείς πως είναι) απόλυτα εύκαμπτα. (Αλλιώς δε θα ήσαν καλώδια: θα ήσαν δοκοί.) Αφού όμως σ' ένα καλώδιο δεν υπάρχει κάμψη (δυσκαμψία $EI = 0$ στα καλώδια), δε μπορούμε να μιλάμε για βέλος κάμψεως $v(x)$ καλωδίου. Μπορούμε όμως να μιλάμε για κάθετη μετατόπιση $v(x)$ καλωδίου. Φυσικά μπορούμε να μιλάμε και για κάθετη μετατόπιση $v(x)$ δοκού. Στις δοκούς όμως εμείς προτιμάμε (στα Ελληνικά εννοείται) τον όρο βέλος κάμψεως. (Δεν υπάρχει αντίστοιχος όρος στα Αγγλικά. Εκεί χρησιμοποιείται ο όρος deflection, που στα Ελληνικά σημαίνει απόκλιση. Όμως ο όρος απόκλιση γενικά δε χρησιμοποιείται στα Ελληνικά.) ▲

Υπενθυμίζουμε τώρα την εξίσωση των Euler-Lagrange (7.2.4), η οποία πρέπει αναγκαστικά να ισχύει για την ελαχιστοποίηση του πιο πάνω συναρτησιακού $\Pi[v]$:

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) = 0 \quad \text{εδώ με } 0 \leq x \leq L. \quad (7.3.5)$$

(Εδώ βέβαια τη γράψαμε με v και v' αντί με y και y' αντίστοιχα.) Αυτή είναι ουσιαστικά και η διαφορική εξίσωση του προβλήματός μας για την άγνωστη κάθετη μετατόπιση $v(x)$ των σημείων του καλώδιου εξαιτίας της κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως του $p(x)$. Ε στις κρεμαστές γέφυρες αυτό είναι προσέγγιση. Η φόρτιση $p(x)$ ασκείται στο **καλώδιο αναρτήσεως** της κρεμαστής γέφυρας από τα κατακόρυφα καλώδιά της, τους **αναρτήρες** της κρεμαστής γέφυρας κατά μήκος της.

Πολύ εύκολη είναι κι εδώ η μετατροπή της εξισώσεως των Euler-Lagrange (7.3.5) στην τελική της μορφή: στη διαφορική εξίσωση για την κάθετη μετατόπιση $v(x)$ των σημείων του καλώδιου. Από την παραπάνω σχέση (7.3.5) για τη συνάρτηση $F(x, v, v') = (T/2)v'^2 - p(x)v$ που δίνεται από τη σχέση (7.3.2) παραγωγίζοντας τόσο ως προς v όσο κι ως προς v' , βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους που χρειαζόμαστε

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -p(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial v'} = \frac{T}{2}(2v') = Tv'. \quad (7.3.6)$$

Και τώρα η εξίσωση των Euler-Lagrange (7.3.5) μας δίνει στην περίπτωση μας

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) = 0 \quad \implies \quad -p(x) - \frac{d}{dx} (Tv') = 0 \quad (7.3.7)$$

και τελικά, αφού $v = v(x)$, ενώ η τάση T είναι σταθερή κατά μήκος του καλώδιου,

$$Tv''(x) = -p(x). \quad (7.3.8)$$

Αυτή είναι η προσεγγιστική διαφορική εξίσωση του ευθύγραμμου (προσεγγιστικά βέβαια) καλώδιου υπό τάση T και υπό κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$. Αυτή χρησιμοποιεί γενικά ο Πολιτικός Μηχανικός στις κρεμαστές γέφυρές του. (Επαναλαμβάνουμε κι εδώ: η γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου δεν είναι κρεμαστή γέφυρα!) Σημειώνουμε επίσης ότι πρόκειται για μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Αντίθετα η αντίστοιχη και πολύ πιο γνωστή μας διαφορική εξίσωση της δοκού

$$EIv''''(x) = p(x) \quad (7.3.9)$$

είναι τετάρτης τάξεως. Ε πιο πολύπλοκος γραμμικός φορέας είναι η δοκός από το καλώδιο. Η δοκός έχει κατανομή τάσεων σ_z κατά μήκος της (κάθετα στη διατομή της). Τελικά έχει δυσκαμψία EI . Επομένως είναι εύλογο και η διαφορική εξίσωσή της με δεξιό μέλος την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$ να είναι ανωτέρας τάξεως (τετάρτης τάξεως) από την αντίστοιχη εξίσωση στο καλώδιο (δευτέρας τάξεως).

Άσκηση

Ενότητα Ε7.3

▼ Άσκηση Ε7.2 ■ Μηχανική των Υλικών: καλώδιο σε ελαστική βάση

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα του **καλώδιου σε ελαστική βάση**. Το καλώδιο έχει μήκος L (με $0 \leq x \leq L$), είναι στηριγμένο στα δύο άκρα του, $v(0) = v(L) = 0$, υφίσταται κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$ (π.χ. σε kN/m) προς το έδαφος και βρίσκεται υπό εφελκυστική τάση T (δύναμη, π.χ. σε kN). Η κάθετη μετατόπισή του είναι $v(x)$ και την υποθέτουμε ότι είναι προς την πλευρά του εδάφους. Σε αυτό το πρόβλημα καλώδιου το προς ελαχιστοποίηση συναρτησιακό $\Pi^*[v]$ (που είναι εδώ η **συνολική**

δυναμική ενέργεια του καλωδίου) έχει τη μορφή

$$P^*[v] = \int_0^L \left[\frac{T}{2} v'^2(x) + \frac{k}{2} v^2(x) - p(x)v(x) \right] dx = \text{minimum}. \quad (7.3.10)$$

Δηλαδή πρόκειται για τροποποίηση του συναρτησιακού $\Pi[v]$ στη σχέση (7.3.1) που ελαχιστοποιείται στο πρόβλημα του καλωδίου χωρίς την ελαστική βάση. Μόνο που τώρα έχει προστεθεί στην ολοκληρωτέα συνάρτηση $F(x, v, v')$ ο δεύτερος όρος της $(k/2)v^2(x)$. Αυτός ο όρος δηλώνει το έργο της αντιδράσεως του εδάφους (με συνολικό συντελεστή του συστήματος εδάφους-καλωδίου k) στην κάθετη μετατόπιση $v(x)$ των σημείων του καλωδίου προς το έδαφος. Εδώ ζητείται απλά η διαφορική εξίσωση του καλωδίου σε ελαστική βάση για την άγνωστη κάθετη μετατόπιση $v(x)$ των σημείων του και φυσικά με την ελαχιστοποίηση του πιο πάνω συναρτησιακού.

⇒ **Απάντηση:** $Tv''(x) + kv(x) = -p(x)$, γενίκευση της διαφορικής εξίσωσης (7.3.8).

▼ **Σημείωση:** Ας σημειωθεί ότι θα ήταν ανακριβής ο ισχυρισμός ότι το πρόβλημα του καλωδίου σε ελαστική βάση είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρον πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού. Δεν είναι! Εντούτοις χρησιμεύει σαν βάση για τη γενίκευσή του στην επόμενη παράγραφο στο πιο δύσκολο πρόβλημα της δοκού σε ελαστική βάση. Αυτό είναι ένα πραγματικά ενδιαφέρον πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού. ▲

E7.4

E7.4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ

Μια που φθάσαμε τώρα ως εδώ, σκόπιμο είναι να προχωρήσουμε κι ένα βήμα παραπέρα. Και σ' αυτήν εδώ την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο, τη μέθοδο της ελαχιστοποίησης ενός κατάλληλου συναρτησιακού $\Pi[v]$, για την εύρεση της ήδη γνωστής διαφορικής εξίσωσης της δοκού (7.3.9): $EIv''''(x) = p(x)$. Η δοκός έχει μήκος L ($0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψία EI και υφίσταται κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$ (δύναμη ανά μονάδα μήκους, π.χ. σε kN/m). Αποδεικνύεται ότι στο παρόν πρόβλημα δοκού το κατάλληλο προς ελαχιστοποίηση συναρτησιακό $\Pi[v]$ ξανά με άγνωστη συνάρτηση την προς το παρόν άγνωστη κάθετη μετατόπιση $v(x)$ των σημείων της δοκού (το **βέλος κάμψεως** της δοκού) είναι το συναρτησιακό

$$\Pi[v] = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} v''^2(x) - p(x)v(x) \right] dx = \text{minimum}. \quad (7.4.1)$$

Αυτό το συναρτησιακό $\Pi[v]$ αποτελεί τη **συνολική δυναμική ενέργεια** της δοκού και θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί και πάλι σύμφωνα με την **αρχή της ελάχιστης συνολικής δυναμικής ενέργειας** στη Μηχανική. Εδώ βέβαια για δοκό (που είναι ένας δύσκαμπος γραμμικός φορέας: έχει δυσκαμψία EI) η κάθετη μετατόπιση $v(x)$ των σημείων της δοκού καλείται, όπως ήδη γνωρίζουμε, **βέλος κάμψεως** της δοκού.

Οι αλλαγές που υπάρχουν σ' αυτό το προς ελαχιστοποίηση συναρτησιακό $\Pi[v]$ στη σχέση (7.4.1) για τη δοκό δεν είναι μεγάλες σχετικά με το αντίστοιχο συναρτησιακό (7.3.1) για το καλώδιο. Συγκεκριμένα μόνο ο πρώτος όρος της ολοκληρωτέας συναρτήσεως F έχει αλλάξει. Αντίθετα ο δεύτερος όρος της έμεινε απόλυτα ίδιος. Συγκεκριμένα τώρα η ενέργεια παραμορφώσεως της δοκού ανά μονάδα μήκους της είναι $(EI/2)v''^2(x)$ με EI τη δυσκαμψία και δεύτερη παράγωγο $v''(x)$, ενώ στην περίπτωση του καλωδίου ήταν $(T/2)v'^2(x)$ με T την τάση και πρώτη παράγωγο $v'(x)$. Καμία άλλη αλλαγή δεν παρατηρείται από το καλώδιο (έστω σε μια κρεμαστή γέφυρα) στη δοκό (πράγματι σε πάρα πολλές κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού).

Άρα τώρα έχουμε αντί για τις σχέσεις (7.3.3) τις ακόλουθες σχέσεις (με την πρώτη από αυτές διαφορετική, καινούργια):

$$U[v] = \int_0^L \frac{EI}{2} v''^2(x) dx \quad \text{και} \quad W[v] = \int_0^L p(x)v(x) dx \quad (7.4.2)$$

για τη *συνολική ενέργεια παραμορφώσεως* $U[v]$ της δοκού σε όλο το μήκος της δοκού και για το *συνολικό έργο* $W[v]$ της εξωτερικής φορτίσεως $p(x)$ ξανά σε όλο το μήκος της δοκού. (Σημειώνουμε ότι το συνολικό έργο $W[v]$ παρέμεινε το ίδιο. Είναι ακριβώς όπως και στο καλώδιο: δεύτερη σχέση (7.3.3).) Έτσι το πιο πάνω συναρτησιακό $\Pi[v]$ στη σχέση (7.4.1), το συναρτησιακό που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε εδώ στη δοκό, μπορεί και πάλι να γραφεί στη μορφή της διαφοράς

$$\Pi[v] = U[v] - W[v]. \quad (7.4.3)$$

Αυτή η μορφή συμπίπτει πλήρως με την αντίστοιχη μορφή (7.3.4) για το καλώδιο. Εντούτοις τώρα στη δοκό η συνολική ενέργεια παραμορφώσεως της $U[v]$ δίνεται από τον πρώτο τύπο (7.4.2), όπως έχει ρητά αναφερθεί, και όχι πια από τον πρώτο τύπο (7.3.3). Αυτός ισχύει μόνο στο καλώδιο. Δεν ισχύει στη δοκό.

Μετά την επαρκή αυτή εισαγωγή προχωράμε αμέσως στην ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $\Pi[v]$ στη σχέση (7.4.1) για τη δοκό μας: *αρχή της ελάχιστης συνολικής δυναμικής ενέργειας*. Η σχετική ολοκληρωτέα συνάρτηση $F(x, v, v', v'')$ είναι βέβαια η συνάρτηση

$$F(x, v, v', v'') = \frac{EI}{2} v''^2(x) - p(x)v(x). \quad (7.4.4)$$

Υπενθυμίζουμε ότι EI είναι η δυσκαμψία της δοκού και $p(x)$ η κάθετη κατανεμημένη φόρτιση της (ανά μονάδα μήκους της). Επίσης εδώ παρατηρούμε ότι πέρα από την άγνωστη συνάρτηση $v(x)$ (το βέλος κάμψεως της δοκού) παρουσιάζεται στην ολοκληρωτέα συνάρτηση F και η δεύτερη παράγωγος $v'' = v''(x)$ του βέλους κάμψεως $v(x)$. Αυτή η δεύτερη παράγωγος $v''(x)$ δεν είχε ληφθεί υπόψη στην αρχική εξίσωση των Euler-Lagrange (7.2.4) για το αρχικό συναρτησιακό μας $J[y]$ στη σχέση (7.2.2).

Επομένως στην περίπτωση της δοκού έχουμε προς ελαχιστοποίηση ένα λίγο πιο πολύπλοκο συναρτησιακό $J[y]$. Αυτό είναι τώρα της μορφής

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx = \text{minimum}. \quad (7.4.5)$$

Για την ελαχιστοποίηση αυτού του συναρτησιακού $J[y]$ αποδεικνύεται ότι για μια συγκεκριμένη συνάρτηση $y = y(x)$ υπό κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα $x = a$ και $x = b$ του διαστήματος $[a, b]$ και με την κατάλληλη αντιμετώπισή τους, στην οποία δε θα υπεισέλθουμε εδώ, πρέπει να ισχύει τελικά η εξής εξίσωση:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) = 0. \quad (7.4.6)$$

Αυτή η εξίσωση αποτελεί αναγκαία αλλ' όχι και ικανή συνθήκη ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού $J[y]$ στη σχέση (7.4.5). Αυτή είναι η σχετική γενικευμένη εξίσωση των Euler-Lagrange, δηλαδή μια γενίκευση της αρχικής μορφής της (7.2.4), που αποδείξαμε στην Ενότητα Ε7.2. Η απόδειξη αυτής της γενικευμένης εξισώσεως των Euler-Lagrange (7.4.6), την οποία όμως θα παραλείψουμε εδώ, μπορεί να γίνει απλά γενικεύοντας την απόδειξη της αρχικής εξισώσεως των Euler-Lagrange (7.2.4). Εδώ στη σχέση (7.4.6) παρατηρούμε ότι απλά προστέθηκε και ένας τρίτος όρος στο αριστερό μέλος της. Ο όρος αυτός σχετίζεται με τη μερική παράγωγο της συναρτήσεως $F(x, y, y', y'')$ ως προς τη δεύτερη παράγωγο y'' .

Άρα εδώ στο δικό μας πρόβλημα δοκού με $F(x, v, v', v'')$ αντί για $F(x, y, y', y'')$ και με τη συνάρτηση $F(x, v, v', v'')$ (δυναμική ενέργεια ανά μονάδα μήκους της δοκού) να δίνεται από τη σχέση (7.4.4) θα έχουμε τις τρεις μερικές παραγώγους της

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -p(x), \quad \frac{\partial F}{\partial v'} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial v''} = \frac{EI}{2}(2v'') = EIv''. \quad (7.4.7)$$

Άρα η γενικευμένη εξίσωση των Euler-Lagrange (7.4.6) παίρνει στη δοκό (βέβαια υπό κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$) τη μορφή

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial v''} \right) = 0 \quad \implies \quad -p(x) - 0 + \frac{d^2}{dx^2} (EIv'') = 0. \quad (7.4.8)$$


Αφού μάλιστα $v = v(x)$, έχουμε τελικά (τώρα με συνήθη, όχι με μερική παράγωγο)

$$\frac{d^2}{dx^2} [EI(x)v''(x)] = p(x). \quad (7.4.9)$$

Χάρη γενικότητας υποθέσαμε για λίγο ότι η δυσκαμψία EI της δοκού μπορεί να μεταβάλλεται κατά μήκος της, δηλαδή ότι $EI = EI(x)$. Αυτό συμβαίνει για παράδειγμα, όταν το ύψος b δοκού ορθογωνικής διατομής διαστάσεων a (πλάτος) επί b (ύψος) μεταβάλλεται με τη θέση x , δηλαδή όταν $b = b(x)$. Αρκετές φορές παρατηρούμε μια τέτοια μεταβολή $b = b(x)$ σε προβόλους που στηρίζουν εξώστες (μπαλκόνια) σε οικοδομές. Προφανώς, όταν η δυσκαμψία EI της δοκού είναι σταθερή κατά μήκος της, τότε η διαφορική εξίσωση (7.4.9) παίρνει τη συνηθισμένη μορφή της

$$EIv''''(x) = p(x). \quad (7.4.10)$$

Τούτη η μορφή μας είναι ήδη πολύ γνωστή από την Ενότητα Α2.1, σχέση (2.1.34) του Μέρους Α και την έχουμε χρησιμοποιήσει πάρα-πάρα πολλές φορές.

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε7.4

▼ Άσκηση Ε7.3 ■ Μηχανική των Υλικών: δοκοί σε ελαστική βάση

Θεωρούμε το πρόβλημα της *δοκού σε ελαστική βάση* γενικεύοντας το αντίστοιχο πρόβλημα για καλώδιο σε ελαστική βάση στην Άσκηση Ε7.2 της προηγούμενης Ενότητας Ε7.3. Η δοκός μας έχει μήκος L (με $0 \leq x \leq L$), σταθερή δυσκαμψία EI και υφίσταται κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$ (π.χ. σε kN/m) προς το έδαφος. Το βέλος κάμψής της είναι $v(x)$. Το υποθέτουμε ότι είναι κι αυτό προς το έδαφος. Σε αυτό το πρόβλημα το προς ελαχιστοποίηση συναρτησιακό $\Pi^*[v]$ έχει τη μορφή

$$\Pi^*[v] = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} v''^2(x) + \frac{k}{2} v^2(x) - p(x)v(x) \right] dx = \text{minimum}. \quad (7.4.11)$$

Δηλαδή πρόκειται για τροποποίηση του συναρτησιακού $\Pi[v]$ στη σχέση (7.4.1) που ελαχιστοποιείται στο πρόβλημα της δοκού χωρίς την ελαστική βάση. Μόνο που τώρα έχει προστεθεί στην ολοκληρωτέα συνάρτηση $F(x, v, v', v'')$ ο δεύτερος όρος της $(k/2)v^2(x)$, ακριβώς όπως είχε συμβεί και στο πιο απλό πρόβλημα του καλωδίου σε ελαστική βάση στην Άσκηση Ε7.2. Αυτός ο όρος $(k/2)v^2(x)$ δηλώνει το έργο της αντιδράσεως του εδάφους (με συνολικό συντελεστή του συστήματος εδάφους-δοκού k) στην κάθετη μετατόπιση $v(x)$ των σημείων της δοκού προς το έδαφος. Εδώ ζητείται απλά η διαφορική εξίσωση της δοκού σε ελαστική βάση για το άγνωστο βέλος κάμψής της $v(x)$ φυσικά με την ελαχιστοποίηση του πιο πάνω συναρτησιακού $\Pi^*[v]$.

⇒ **Απάντηση:** $EIv''''(x) + kv(x) = p(x)$. Πρόκειται βέβαια για την ίδια διαφορική εξίσωση (2.1.42) δεξιά της Παραγράφου Α2.1.7 στο Κεφάλαιο Α2 του Μέρους Α. Εκεί

όμως αυτή η διαφορική εξίσωση είχε βρεθεί με έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο.

▼ **Σημείωση:** Οι δοκοί σε ελαστική βάση παρουσιάζονται αρκετά συχνά στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Τέτοιες δοκοί, όπως πολύ καλά γνωρίζουμε, είναι οι *πεδιλοδοκοί* στις Θεμελιώσεις. Επίσης οι *σιδηροτροχιές* στη Σιδηροδρομική. ▲

E7.5

E7.5. ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΔΡΑΣΕΩΣ ΤΟΥ HAMILTON

Μέχρι τώρα περιορισθήκαμε σε ελαχιστοποιήσεις συναρτησιακών $J[y]$ ή $\Pi[v]$ ή $\Pi^*[v]$ που αφορούσαν σε ολοκληρώσεις με μεταβλητή τη θέση x στο χώρο. Πολύ ενδιαφέρουσα είναι κι η περίπτωση όπου στη θέση της μεταβλητής ολοκληρώσεως έχουμε το χρόνο t . Για χρονικά προβλήματα ισχύει η *αρχή της ελάχιστης δράσεως* (ή καλύτερα η *αρχή της στάσιμης δράσεως*) του *Hamilton*. Αυτή αναφέρει τα εξής:

● Αρχή

▼ **Αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton:** Σε ένα μηχανικό σύστημα μέσα σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων ένα υλικό σημείο κινείται από ένα αρχικό σημείο A , από όπου ξεκινάει τη χρονική στιγμή $t = t_1$, σε ένα τελικό σημείο B , όπου φθάνει τη χρονική στιγμή $t = t_2$. Αυτή η κίνηση γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε η *δράση* (ή ισοδύναμα *το ολοκλήρωμα δράσεως*) J να είναι ελάχιστη (ελάχιστο). Δηλαδή εδώ ισχύει

$$J = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \text{minimum} \quad \text{με} \quad L = T - V. \quad (7.5.1)$$

Στη σχέση αυτή $L = T - V$ είναι η *Lagrangian* (ή *Λαγκρανζιανή*) του μηχανικού συστήματος, T η κινητική ενέργειά του και V η δυναμική ενέργειά του. ▲

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση E7.6:** Στα μονοβάθμια μηχανικά συστήματα και οι τρεις αυτές ποσότητες L , T και V είναι συναρτήσεις της αρχικά άγνωστης συναρτήσεως $q = q(t)$ που εκφράζει τη θέση του υλικού σημείου, οπότε και $J = J[q]$. Αυτή η συνάρτηση $q(t)$ είναι συνήθως η συνηθισμένη θέση του $u(t)$ σε ευθύγραμμη κίνησή του ή η γωνιακή θέση του $\theta(t)$ σε περιστροφική κίνησή του γύρω από ένα σταθερό σημείο O , όπως συμβαίνει π.χ. στο απλό εκκρεμές. ▲

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση E7.7:** Γενικά το παραπάνω ολοκλήρωμα $J = J[q]$ (η *δράση* του μηχανικού συστήματος) πρέπει να γίνεται ελάχιστο. Όμως σε πολύ λίγες περιπτώσεις μπορεί απλά να εμφανίζει τιμή στασιμότητας για τη συνάρτηση $q(t)$ χωρίς να γίνεται ελάχιστο. (Εντούτοις δε γίνεται ούτε μέγιστο.) Για το λόγο αυτό η παραπάνω *αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton* στη Μηχανική (και γενικότερα στη Φυσική) καλείται γενικά (και πράγματι πολύ πιο σωστά!) *αρχή της στάσιμης δράσεως του Hamilton*. Αντίστοιχη είναι και η *αρχή του ελάχιστου χρόνου του Fermat* στην Οπτική εκεί για τη διαδρομή (την τροχιά) των ακτίνων του φωτός. ▲

Εδώ τώρα για την ελαχιστοποίηση της δράσεως (του ολοκληρώματος δράσεως) $J = J[q]$ σύμφωνα με τα παραπάνω πρέπει να ισχύει η σχετική και τώρα πια αρκετά γνωστή μας εξίσωση των Euler-Lagrange (7.2.4). Την επαναλαμβάνουμε κι εδώ

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (7.5.2)$$

Βέβαια στην περίπτωση μας έχουμε L αντί F , q αντί y και t αντί x . (Εδώ έχουμε ένα χρονικό πρόβλημα!) Έτσι η εξίσωση των Euler-Lagrange (7.5.2) που αντιστοιχεί στην αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton παίρνει την τροποποιημένη μορφή

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0. \quad (7.5.3)$$

Στην ουσία αυτή η εξίσωση των Euler-Lagrange αποτελεί τη διαφορική εξίσωση της κινήσεως του υλικού σημείου του παρόντος μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος.

❖ Εφαρμογή Ενότητα Ε7.5

▼ Εφαρμογή Ε7.4 ■ Δυναμική: πτώση υλικού σημείου

Προχωράμε σε μια πρώτη εφαρμογή αυτής της ενδιαφέρουσας δυνατότητας προσδιορισμού της εξισώσεως κινήσεως ενός υλικού σημείου σε συντηρητικό πεδίο δυνάμεων. Εδώ θεωρούμε απλά την πτώση υλικού σημείου μάζας m στο γήινο πεδίο βαρύτητας με επιτάχυνση της βαρύτητας g . Αυτή η πτώση ξεκινάει από μια αρχική θέση $y(0) = 0$ του υλικού σημείου με μηδενική αρχική ταχύτητά του: $v(0) = \dot{y}(0) = 0$. (Εδώ η διεύθυνση της κινήσεως θεωρείται θετική προς τα κάτω, προς τη γη.)

Υπό αυτές τις συνθήκες, όταν το υλικό σημείο υπό την επίδραση της γήινης βαρύτητας φθάσει στη θέση $y(t)$ (με $y(t) > 0$), οπότε θα έχει ταχύτητα $v(t) = \dot{y}(t) > 0$, η κινητική ενέργειά του T και η δυναμική ενέργειά του V προφανώς θα είναι

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \quad \text{και} \quad V = -mgy \quad (7.5.4)$$

αντίστοιχα. Σημειώνεται ότι η δυναμική ενέργεια V του υλικού σημείου θεωρήθηκε με αφετηρία το οριζόντιο επίπεδο $y = 0$, από όπου και άρχισε η πτώση του υλικού σημείου. Άρα είναι αρνητική και ίση με $V = -mgy$. Επομένως με βάση τις δύο πιο πάνω σχέσεις (7.5.4) καθώς και τον ορισμό $L = T - V$ δεξιά στη σχέση (7.5.1) της Lagrangian (ή Λαγκρανζιανής) L του υλικού σημείου θα έχουμε

$$L = T - V = \frac{1}{2} m v^2 - (-mgy) = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + mgy. \quad (7.5.5)$$

Τώρα πια δε μας απομένει παρά να χρησιμοποιήσουμε και την εξίσωση των Euler-Lagrange (7.5.3). Έτσι θα προσδιορίσουμε τη διαφορική εξίσωση της κινήσεως του υλικού σημείου σε αυτήν την πτώση του προς τη γη. Εδώ βέβαια έχουμε το y αντί για το q σαν άγνωστη συνάρτηση στην εξίσωση των Euler-Lagrange (7.5.3): $q = y$. Επομένως αυτή η εξίσωση γράφεται τώρα στην τροποποιημένη μορφή της

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad (7.5.6)$$

με τη Lagrangian (Λαγκρανζιανή) L να δίνεται εδώ από την πιο πάνω σχέση (7.5.5). Είναι πράγματι πολύ εύκολες οι σχετικές μερικές παραγωγίσεις της Lagrangian L τόσο ως προς y όσο και ως προς \dot{y} . Προκύπτουν αμέσως οι δύο μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial L}{\partial y} = mg, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2} m(2\dot{y}) = m\dot{y}, \quad \text{οπότε} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = m\ddot{y}. \quad (7.5.7)$$

Εννοείται ότι η μάζα m του υλικού σημείου έχει υποθεθεί εδώ ότι είναι σταθερή.

Υπό αυτές τις συνθήκες η εξίσωση των Euler-Lagrange (7.5.6) παίρνει τη μορφή

$$mg - m\ddot{y} = 0 \quad \text{και τελικά} \quad \ddot{y}(t) = g, \quad (7.5.8)$$

αφού $y = y(t)$. Καταλήξαμε λοιπόν σε αυτήν την εισαγωγική εφαρμογή μας στη Δυναμική στην αναμενόμενη διαφορική εξίσωση $\ddot{y}(t) = g$ της κατακόρυφης κίνησης ενός υλικού σημείου στο γήινο πεδίο βαρύτητας με επιτάχυνση g προς τη γη. ▲

❖ Εφαρμογή

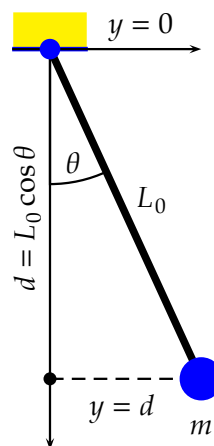
Ενότητα E7.5

▼ Εφαρμογή E7.5 ■ Δυναμική: κίνηση απλού εκκρεμούς

Προχωράμε τώρα και σε μια λίγο πιο δύσκολη εφαρμογή βέβαια ξανά στην κίνηση υλικού σημείου. Στην παρούσα εφαρμογή θεωρούμε το απλό εκκρεμές με μήκος του νήματός του L_0 και μάζα m στο άκρο του (Σχήμα E7.3). Η κίνηση του εκκρεμούς γίνεται γύρω από την κατακόρυφη θέση ισορροπίας του $\theta = 0$. Το νήμα θεωρείται εντελώς αβαρές. Άγνωστη συνάρτηση είναι η γωνιακή θέση $\theta(t)$ του νήματος ως προς την κατακόρυφο $\theta = 0$, η γωνιακή απόκλιση του $\theta(t)$. Υποθέτουμε επίσης ότι δεν υπάρχει καμία απόσβεση της κινήσεως. Άρα εδώ μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton που οδηγεί τελικά στην εξίσωση των Euler-Lagrange (7.5.3) για τη Lagrangian L . Αυτή η εξίσωση παίρνει εδώ τη μορφή

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0, \quad (7.5.9)$$

μια που άγνωστη συνάρτηση είναι η γωνιακή θέση $\theta(t)$ του νήματος του εκκρεμούς ως προς την κατακόρυφο $\theta = 0$. (Εδώ βέβαια για τη θέση έχουμε θ αντί για q .)



Σχήμα E7.3: Απλό εκκρεμές.

Ακριβώς όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή, θα πρέπει κι εδώ να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια T της μάζας m , τη δυναμική ενέργειά της V και τη διαφορά τους $L = T - V$. Αυτή είναι η Lagrangian (Λαγκρανζιανή) που υπεισέρχεται στην εξίσωση των Euler-Lagrange (7.5.9). Λίγο-πολύ είναι εύκολη η δουλειά μας αυτή. Πρώτα για την κινητική ενέργεια T παίρνουμε υπόψη ότι η ταχύτητα της μάζας m είναι $v = L_0 \dot{\theta}$ στο παρόν πρόβλημα. Έπειτα για τη δυναμική ενέργεια V επιλέγουμε να την ορίσουμε με βάση το οριζόντιο επίπεδο του πάνω άκρου O (του σταθερού άκρου) του νήματος του εκκρεμούς. Έτσι διαπιστώνουμε ότι η μάζα m στο κάτω άκρο του νήματος βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση $d = L_0 \cos \theta$ πιο κάτω από το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο O στηρίξεως του νήματος.

Με βάση όλα αυτά πολύ εύκολα προκύπτουν οι σχέσεις

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (L_0 \dot{\theta})^2 = \frac{1}{2} m L_0^2 \dot{\theta}^2 \quad \text{και} \quad V = -mgd = -mgL_0 \cos \theta \quad (7.5.10)$$

για την κινητική και τη δυναμική ενέργεια της μάζας του εκκρεμούς αντίστοιχα και

$$L = T - V = \frac{1}{2} mL_0^2 \dot{\theta}^2 - (-mgL_0 \cos \theta) = \frac{1}{2} mL_0^2 \dot{\theta}^2 + mgL_0 \cos \theta \quad (7.5.11)$$

για την αντίστοιχη Lagrangian (Λαγκρανζιανή) L . Στη συνέχεια για τις δύο μερικές παραγώγους της Lagrangian L (ως προς θ και $\dot{\theta}$) προκύπτουν πολύ εύκολα οι τύποι

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgL_0 \sin \theta, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2} mL_0^2 (2\dot{\theta}) = mL_0^2 \dot{\theta}, \quad \text{οπότε} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = mL_0^2 \ddot{\theta}. \quad (7.5.12)$$

Τώρα πολύ απλά αντικαθιστούμε αυτές τις δύο παραγώγους στην εξίσωση των Euler-Lagrange (7.5.9). Έτσι προκύπτει αμέσως η διαφορική εξίσωση της κινήσεως

$$-mgL_0 \sin \theta - mL_0^2 \ddot{\theta} = 0, \quad \text{οπότε} \quad L_0 \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0 \quad (7.5.13)$$

και λίγο πιο απλά

$$\ddot{\theta}(t) + \omega_0^2 \sin \theta(t) = 0 \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L_0}}. \quad (7.5.14)$$

Πρόκειται βέβαια για την ήδη γνωστή μας μη γραμμική διαφορική εξίσωση (1.3.12), την οποία συναντήσαμε στην Εφαρμογή Α1.9 του Κεφαλαίου Α1 του Μέρους Α. Ασφαλώς η ίδια ακριβώς διαφορική εξίσωση μπορεί να προκύψει και με τον πολύ πιο κλασικό τρόπο της χρήσεως του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα. ▲

▼ **Συμπέρασμα:** Η αρχή της ελάχιστης δράσεως (ή πιο σωστά αρχή της στάσιμης δράσεως) του Hamilton αποτελεί μια πολύ ενδιαφέρουσα εναλλακτική δυνατότητα σε σχέση με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για την κατάστρωση εξισώσεων κινήσεως στην περίπτωση μηχανικών συστημάτων μέσα σε συντηρητικά πεδία δυνάμεων. ▲

◆ Συμπέρασμα

Γενικεύοντας υποθέτουμε τώρα ότι η Lagrangian (ή Λαγκρανζιανή) L εξαρτάται όχι μόνο από μία μεταβλητή θέσεως q (π.χ. y ή θ στις δύο προηγούμενες εφαρμογές), αλλά από δύο ή περισσότερες, γενικά n μεταβλητές θέσεως q_i . Σε αυτήν την ενδιαφέρουσα περίπτωση αποδεικνύεται ότι ισχύουν ταυτόχρονα n εξισώσεις των Euler-Lagrange της μορφής (7.5.3) η καθεμιά τους ως προς τη μεταβλητή θέσεως q_i . Άρα στην περίπτωση αυτή $L = L(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$ και αποδεικνύεται ότι ισχύουν ταυτόχρονα οι εξής n εξισώσεις των Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \text{με} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.5.15)$$

❖ Εφαρμογή
Ενότητα Ε7.5

▼ **Εφαρμογή Ε7.6** ■ **Δυναμική: κίνηση σε Καρτεσιανές συντεταγμένες**

Εδώ θεωρούμε την κίνηση υλικού σημείου μάζας m στο οριζόντιο επίπεδο Oxy με αρχικές συνθήκες, αλλά χωρίς να ασκούνται πάνω του δυνάμεις από κάποιο συντηρητικό πεδίο δυνάμεων. Τότε η κινητική ενέργειά του T και η δυναμική ενέργειά του V θα είναι

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad \text{και} \quad V = 0 \quad (7.5.16)$$

με v την ταχύτητα του υλικού σημείου: $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Επομένως σε αυτήν την ειδική περίπτωση η Lagrangian (ή Λαγκρανζιανή) L θα είναι ίση απλά με την κινητική ενέργεια T του υλικού σημείου, δηλαδή

$$L = T - V = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 0 = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2). \quad (7.5.17)$$

Παρατηρούμε ότι εδώ έχουμε $n = 2$ μεταβλητές θέσεως: τις Καρτεσιανές συντεταγμένες x και y του υλικού σημείου. Άρα $q_1 = x$ και $q_2 = y$ στις πιο πάνω εξισώσεις των Euler-Lagrange (7.5.15). Επομένως εδώ οι εξισώσεις των Euler-Lagrange είναι δύο. Επειδή μάλιστα προφανώς

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \quad \text{και επίσης} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} m(2\dot{x}) = m\dot{x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{1}{2} m(2\dot{y}) = m\dot{y}, \quad (7.5.18)$$

οι δύο αυτές εξισώσεις (7.5.15) παίρνουν εδώ τις πάρα πολύ απλές μορφές

$$0 - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \quad \text{και} \quad 0 - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0 \quad (7.5.19)$$

και τελικά

$$\ddot{x} = 0 \quad \text{και} \quad \ddot{y} = 0 \quad \text{φυσικά με} \quad x = x(t) \quad \text{και} \quad y = y(t). \quad (7.5.20)$$

Να τη λουπόν η επίπεδη κίνηση του υλικού σημείου σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) χωρίς την ύπαρξη πεδίου δυνάμεων: σταθερή επιτάχυνση του υλικού σημείου τόσο κατά τον άξονα Ox , συγκεκριμένα $\ddot{x} = 0$, όσο και κατά τον άξονα Oy , συγκεκριμένα $\ddot{y} = 0$. Ναι, ακριβώς όπως περιμέναμε και από τον πολύ πιο γνωστό μας δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Το ίδιο ακριβώς βρήκαμε κι εδώ με την αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton. Κι είναι βέβαια λογικό το αποτέλεσμα αυτό. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε7.5

▼ Άσκηση Ε7.4 ■ Δυναμική: κίνηση σε Καρτεσιανές συντεταγμένες

Ζητούνται: (α) Να επαναληφθεί όλη η προηγούμενη Εφαρμογή Ε7.6, αλλά τώρα στον τριδιάστατο χώρο (x, y, z) και πάλι χωρίς πεδίο δυνάμεων. (β) Να επαναληφθεί το προηγούμενο ερώτημα, όταν υπάρχει κι η επίδραση του γήινου πεδίου βαρύτητας με επιτάχυνση $-g$ (προς τα κάτω) κατά τον κατακόρυφο άξονα Oz εδώ με θετική φορά του προς τα πάνω. Υπόδειξη: Τώρα η δυναμική ενέργεια V του υλικού σημείου δεν είναι πια μηδέν: είναι $V = mgz$ ανάλογα με τη δεύτερη σχέση (7.5.4) στην Εφαρμογή Ε7.4 αυτής της ενότητας, αλλ' εδώ με τον άξονα Oz προς τα πάνω και όχι προς τα κάτω, δηλαδή αντίθετα με την Εφαρμογή Ε7.4. (γ) Συμφωνούν αυτά τα αποτελέσματα με τα αναμενόμενα από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα;

⇒ **Απαντήσεις:** (α) $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$ και $\ddot{z} = 0$ και λίγο πιο αναλυτικά $\ddot{x}(t) = 0$, $\ddot{y}(t) = 0$ και $\ddot{z}(t) = 0$. (β) $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 0$ και $\ddot{z} = -g$. (γ) Ναι. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε7.5

▼ Άσκηση Ε7.5 ■ Δυναμική: κίνηση σε πολικές συντεταγμένες

Θεωρούμε ξανά την Εφαρμογή Ε7.6 με κίνηση υλικού σημείου στο επίπεδο, αλλά τώρα σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . Και πάλι δεν έχουμε πεδίο δυνάμεων, οπότε η δυναμική ενέργεια είναι ξανά $V = 0$. Τώρα η κινητική ενέργεια T , που οφείλεται βέβαια στην ταχύτητα v του υλικού σημείου, αποδεικνύεται ότι είναι

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \quad (7.5.21)$$

Ζητούνται: (α) Πόσες και ποιες μεταβλητές θέσεως q_i έχουμε εδώ; (β) Ποιες είναι οι εξισώσεις της κινήσεως του υλικού σημείου που προκύπτουν εδώ από τις εξισώσεις των Euler-Lagrange (7.5.15);

⇒ **Απαντήσεις:** (α) Δύο, τις $q_1 = r$ (πολική ακτίνα) και $q_2 = \theta$ (πολική γωνία). (β) $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$ και $r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$ (με απλοποίηση του r). Φυσικά $r = r(t)$ και $\theta = \theta(t)$. ▲

Ε7.6

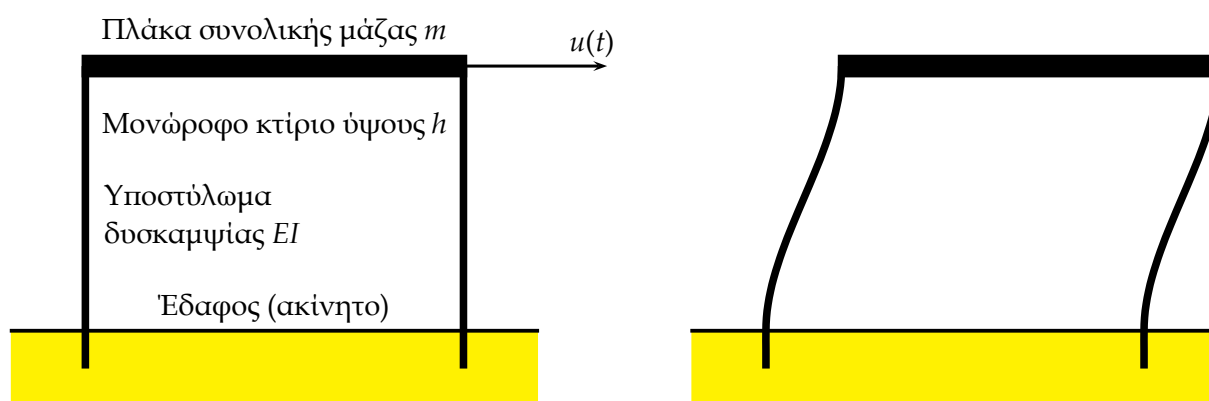
Ε7.6. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΙΔΕΑΤΑ ΚΤΙΡΙΑ ΔΙΑΤΜΗΣΕΩΣ

Με χρήση της αρχής της ελάχιστης δράσεως του Hamilton (7.5.1) μπορούμε να καταστρώσουμε και εξισώσεις κινήσεως σε *ιδεατά κτίρια διατμήσεως* (ή *ιδεατά διατμητικά κτίρια*) που αναμφίβολα ενδιαφέρουν πολύ τον Πολιτικό Μηχανικό. Στην ενότητα αυτή θα καταστρώσουμε τις εξισώσεις κινήσεως για το μονώροφο και το διώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως. Τη γενίκευσή τους στο τριώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως θα την αναφέρουμε σαν άσκηση. Εννοείται ότι πολύ εύκολα μπορούμε να προχωρήσουμε και σε ιδεατό κτίριο διατμήσεως με περισσότερους ορόφους.

❖ Εφαρμογή
Ενότητα Ε7.6

▼ Εφαρμογή Ε7.7 ■ Δυναμική των Κατασκευών: μονώροφο κτίριο

Στη Δυναμική των Κατασκευών θεωρούμε το μονώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως (ή ιδεατό διατμητικό κτίριο) του πιο κάτω Σχήματος Ε7.4.



(α) Το κτίριο στη θέση ισορροπίας του

(β) Το κτίριο μετά τη μετατόπιση της πλάκας του

Σχήμα Ε7.4: Κίνηση μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως.

Η μάζα του (που υποτίθεται πως είναι συγκεντρωμένη στο ύψος της πλάκας του) είναι m . Ο συνολικός *συντελεστής δυσκαμψίας* των *υποστωλωμάτων* του είναι k . Αποδείξαμε ήδη στη σχέση (13.2.14) δεξιά στην Ενότητα Α13.2 του Μέρους Α ότι $k = 24EI/h^3$ με h το ύψος του ορόφου και EI τη δυσκαμψία των δύο υποστωλωμάτων του κτιρίου. Αυτό το μονώροφο κτίριο θεωρείται εδώ σε *ιδιοταλάντωση* ή πιο γενικά σε *ελεύθερη ταλάντωση* (με δύο αρχικές συνθήκες: την αρχική μετατόπιση και την αρχική ταχύτητα της πλάκας του).

Εδώ απλά ζητάμε να βρούμε την εξίσωση της οριζόντιας κινήσεως της απαραμόρφωτης πλάκας του κτιρίου με άγνωστη συνάρτηση την οριζόντια μετατόπιση της $u(t)$. (Πρόκειται για ιδεατό κτίριο: η πλάκα του είναι απαραμόρφωτη, με άπειρη δυσκαμψία.) Το έδαφος, όπου έχει θεμελιωθεί το κτίριο, το θεωρούμε ακίνητο.

Φυσικά θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση των Euler-Lagrange (7.5.3), εδώ όμως με άγνωστη συνάρτηση τη $u = u(t)$ και όχι την $q = q(t)$ (απλά αλλαγή συμβόλου). Έτσι στο πρόβλημά μας η εξίσωση των Euler-Lagrange (7.5.3) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = 0. \quad (7.6.1)$$

Βέβαια η συνάρτηση \dot{u} είναι εδώ απλά η ταχύτητα $v = \dot{u}$ της πλάκας του κτιρίου.

Τώρα όμως έχουμε την υποχρέωση να υπολογίσουμε τη Lagrangian (Λαγκρανζιανή) $L = T - V$ στο παρόν μονοβάθμιο μηχανικό σύστημά μας: στο μονώροφο

ιδεατό κτίριο διατμήσεως (ή διατμητικό κτίριο) που εξετάζουμε. Ε δεν είναι και τόσο δύσκολη η δουλειά αυτή. Πρώτα-πρώτα η κινητική ενέργεια T του κτιρίου μας είναι

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\dot{u}^2. \quad (7.6.2)$$

Όσον αφορά στη δυναμική ενέργεια V του κτιρίου (που εδώ είναι απλά η *ενέργεια παραμορφώσεως* U των δύο υποστυλωμάτων του), αποδεικνύεται ότι αυτή είναι

$$V = U = \frac{1}{2} ku^2 \quad \text{εδώ βέβαια με} \quad k = \frac{24EI}{h^3}, \quad (7.6.3)$$

όπως ήδη αναφέραμε. Άρα η Lagrangian (Λαγκρανζιανή) $L = T - V$ είναι εδώ

$$L = T - V = \frac{1}{2} m\dot{u}^2 - \frac{1}{2} ku^2. \quad (7.6.4)$$

Τώρα απλά υπολογίζουμε και τις δύο μερικές παραγώγους της ως προς u και \dot{u}

$$\frac{\partial L}{\partial u} = -\frac{1}{2} k(2u) = -ku \quad \text{και} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \frac{1}{2} m(2\dot{u}) = m\dot{u} \quad (7.6.5)$$

και τις αντικαθιστούμε στην εξίσωση των Euler-Lagrange (7.6.1). Έτσι προκύπτει

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = 0 \quad \implies \quad -ku - \frac{d}{dt} (m\dot{u}) = 0 \quad \implies \quad ku + m\ddot{u} = 0. \quad (7.6.6)$$

Βέβαια αυτήν εδώ την εξίσωση κινήσεως μπορούμε να τη γράψουμε και στη μορφή

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0 \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad \text{με} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (7.6.7)$$

Πρόκειται φυσικά για τη γνωστή μας εξίσωση των ελεύθερων ταλαντώσεων μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος, όπως είναι και το σύστημα μάζας-ελατηρίου. Εδώ θεωρήσαμε ένα μονώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως (βέβαια με κατάλληλη σταθερά k). Η ίδια ακριβώς εξίσωση (7.6.7) ισχύει και σε έναν ιδεατό *υδατόπυργο*, εκεί όμως με διαφορετική σταθερά k , συγκεκριμένα με $k = 3EI/h^3$: εξίσωση (6.3.44) αριστερά στην Ενότητα Α6.3 του Μέρους Α (στο συμπλήρωμα του Μέρους Α). ▲

❖ Εφαρμογή Ενότητα Ε7.6

▼ Εφαρμογή Ε7.8 ■ Δυναμική των Κατασκευών: διώροφο κτίριο

Προχωράμε στο διώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως του πιο κάτω Σχήματος Ε7.5. Όπως και στο μονώροφο κτίριο της προηγούμενης εφαρμογής, έτσι και τώρα στο διώροφο κτίριο πρέπει να υπολογίσουμε τη Lagrangian $L = T - V$ που υπεισέρχεται στην αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton (7.5.1). Την υπενθυμίζουμε κι εδώ

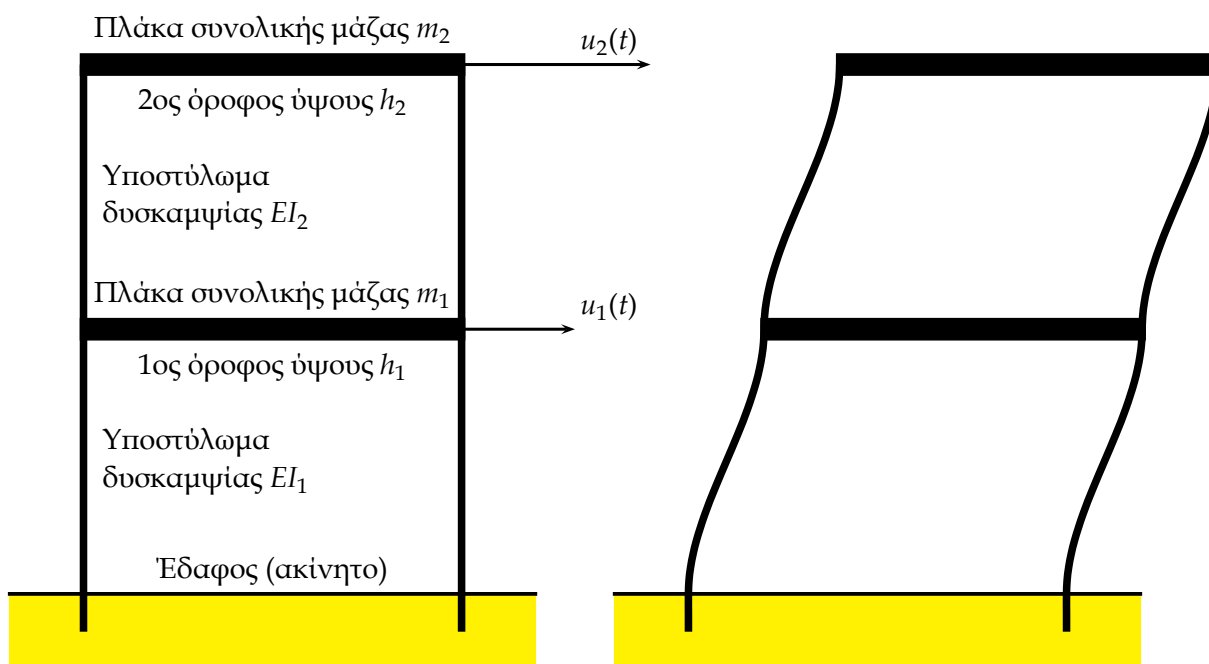
$$J = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \text{minimum} \quad \text{με} \quad L = T - V. \quad (7.6.8)$$

Τώρα όμως έχουμε διώροφο κτίριο με δύο μάζες των ορόφων του, m_1 και m_2 , που τις θεωρούμε συγκεντρωμένες στις πλάκες των ορόφων. Επίσης έχουμε δύο συνολικούς συντελεστές δυσκαμψίας των υποστυλωμάτων: k_1 για τα δύο υποστυλώματα του πρώτου ορόφου και k_2 για τα δύο υποστυλώματα του δεύτερου ορόφου.

Επίσης έχουμε δύο άγνωστες συναρτήσεις: τις οριζόντιες μετατοπίσεις u_1 του πρώτου ορόφου του κτιρίου και u_2 του δεύτερου ορόφου. Επομένως το συναρτησιακό J στην αρχή του Hamilton (7.6.8) που θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι της μορφής $J = J[u_1, u_2]$ με δύο άγνωστες συναρτήσεις: τις u_1 και u_2 σαν μεταβλητές του. Άρα πρέπει να γίνει ελαχιστοποίησή του και ως προς u_1 και ως προς u_2 . Η ελαχιστοποίηση αυτού εδώ του συναρτησιακού $J = J[u_1, u_2]$ οδηγεί σε δύο ταυτόχρονα

εξισώσεις των Euler-Lagrange της μορφής (7.5.15) εδώ με $q_1 = u_1$ και $q_2 = u_2$ και με $L = L(t, u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2)$. Συγκεκριμένα εδώ ισχύουν οι δύο εξισώσεις

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) = 0 \quad \text{εδώ με } i = 1, 2. \quad (7.6.9)$$



(α) Το κτίριο στη θέση ισορροπίας του (β) Το κτίριο μετά τις μετατοπίσεις των πλακών του

Σχήμα Ε7.5: Κίνηση διώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως.

Ανάλογα θα μπορούσαμε να έχουμε n βαθμούς ελευθερίας στο μηχανικό σύστημα, π.χ. σε n -ώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως. Τότε θα οδηγούμασταν σε n εξισώσεις των Euler-Lagrange πάντα της μορφής (7.6.9), δηλαδή τότε θα είχαμε $i = 1, 2, \dots, n$.

Τώρα πρέπει να υπολογίσουμε τη συνολική κινητική ενέργεια T του διώροφου ιδεατού κτιρίου του Σχήματος Ε7.5. Ασφαλώς αυτή είναι ίση με το άθροισμα των κινητικών ενεργειών T_1 και T_2 των δύο ορόφων του και δίνεται από τον τύπο

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_2^2. \quad (7.6.10)$$

Επίσης χρειαζόμαστε εδώ και τη συνολική δυναμική ενέργεια V του ίδιου διώροφου κτιρίου. Φυσικά αυτή η ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα των δυναμικών ενεργειών V_1 και V_2 των υποστυλωμάτων των δύο ορόφων του και δίνεται από τον τύπο

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} k_1 u_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (u_2 - u_1)^2. \quad (7.6.11)$$

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση Ε7.9:** Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε ότι είτε έχουμε ένα απλό ελατήριο είτε ένα υποστώλιμα σε όροφο κτιρίου αυτό που έχει σημασία για τη δυναμική ενέργεια V είναι μόνο η **διαφορά των μετατοπίσεων** στα άκρα τους. Δηλαδή εδώ για τα υποστυλώματα του δεύτερου ορόφου η μετατόπιση που υπεισέρχεται στη δυναμική του ενέργεια $V_2 = \frac{1}{2} k_2 (u_2 - u_1)^2$ είναι η διαφορά $u_2 - u_1$ των μετατοπίσεων των άκρων τους. Βέβαια αυτή είναι η μετατόπιση u_2 της πλάκας του δεύτερου ορόφου μείον τη μετατόπιση u_1 της πλάκας του πρώτου ορόφου. ▲

Τώρα με βάση τις δύο παραπάνω σχέσεις (7.6.10) και (7.6.11) η Lagrangian L του διώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως που μελετάμε παίρνει τη μορφή

$$L = T - V = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_2^2 - \frac{1}{2} k_1 u_1^2 - \frac{1}{2} k_2 (u_2 - u_1)^2. \quad (7.6.12)$$

Πολύ εύκολα προκύπτουν και οι δύο μερικές παράγωγοι της ως προς u_1 και u_2

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -k_1 u_1 + k_2 (u_2 - u_1) \quad \text{και} \quad \frac{\partial L}{\partial u_2} = -k_2 (u_2 - u_1). \quad (7.6.13)$$

Το ίδιο συμβαίνει και με τις δύο μερικές παράγωγους της ως προς \dot{u}_1 και \dot{u}_2

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_1} = \frac{1}{2} m_1 (2\dot{u}_1) = m_1 \dot{u}_1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_2} = \frac{1}{2} m_2 (2\dot{u}_2) = m_2 \dot{u}_2. \quad (7.6.14)$$

Αντικαθιστούμε αυτές τις τέσσερις μερικές παραγώγους στις δύο εξισώσεις των Euler-Lagrange (7.6.9) και εκτελούμε και τις δύο συνήθεις παραγωγίσεις ως προς το χρόνο t . Προκύπτει έτσι το σύστημα των *συζευγμένων* διαφορικών εξισώσεων

$$-k_1 u_1 + k_2 (u_2 - u_1) - m_1 \ddot{u}_1 = 0 \quad \text{και} \quad -k_2 (u_2 - u_1) - m_2 \ddot{u}_2 = 0 \quad (7.6.15)$$

ή

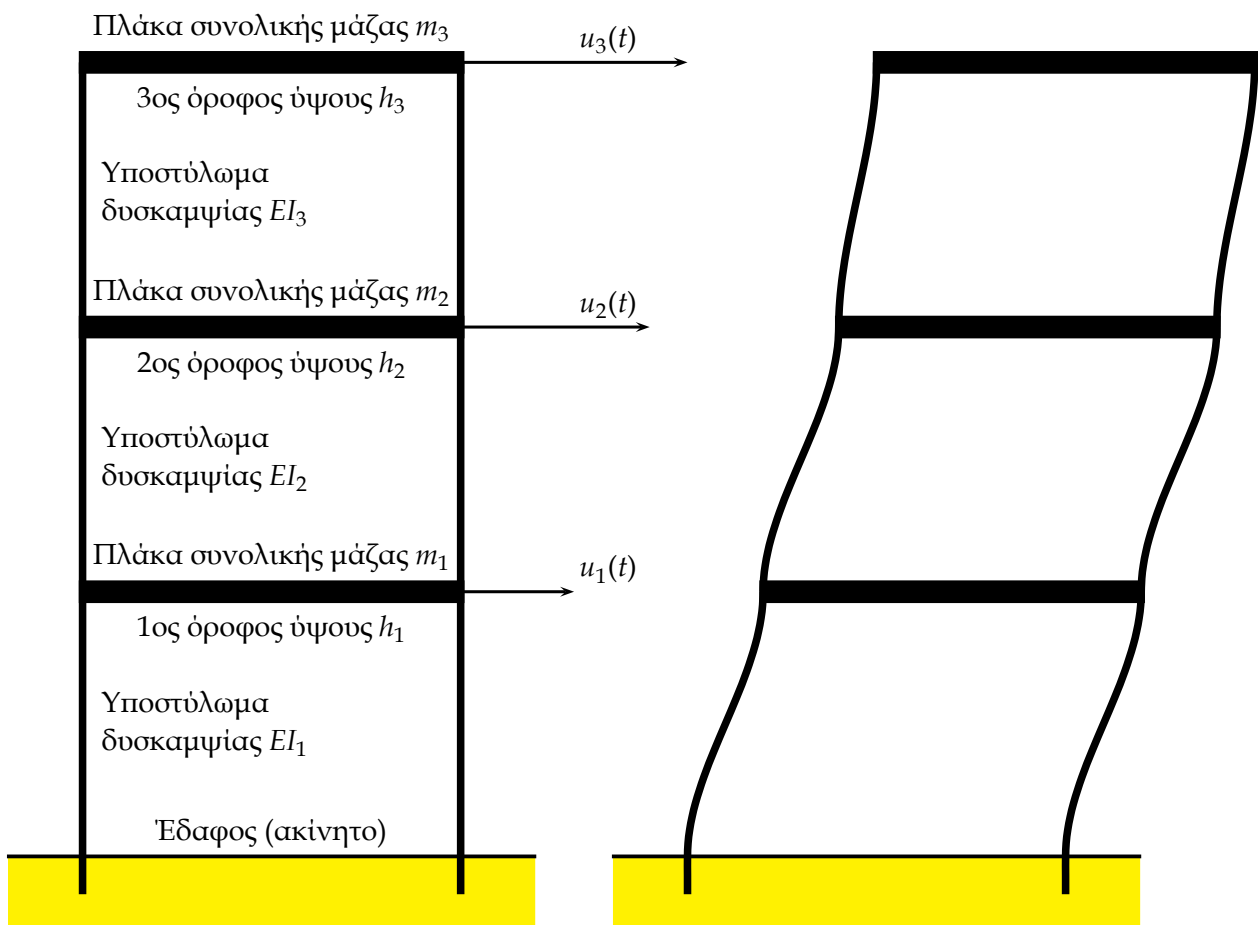
$$m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2) u_1 - k_2 u_2 = 0 \quad \text{και} \quad m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + k_2 u_2 = 0. \quad (7.6.16)$$

Αυτές είναι οι διαφορικές εξισώσεις κινήσεως των πλακών του διώροφου κτιρίου. ▲

✎ Άσκηση

Ενότητα Ε7.6

▼ Άσκηση Ε7.6 ■ Δυναμική των Κατασκευών: τριώροφο κτίριο



(α) Το κτίριο στη θέση ισορροπίας του

(β) Το κτίριο μετά τις μετατοπίσεις των πλακών του

Σχήμα Ε7.6: Κίνηση τριώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως.

Εδώ θεωρούμε το τριώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως του παραπάνω Σχήματος Ε7 πάλι σε ιδιοταλαντώσεις ή γενικότερα σε ελεύθερες ταλαντώσεις.

Οι μάζες των τριών ορόφων είναι m_1 , m_2 και m_3 και οι συνολικοί *συντελεστές δυσκαμψίας* των *υποστολωμάτων* των ορόφων είναι k_1 , k_2 και k_3 . Το έδαφος θεωρείται κι εδώ ακίνητο. Οι οριζόντιες μετατοπίσεις των πλακών των τριών ορόφων είναι $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ και $u_3 = u_3(t)$. Επομένως το τριώροφο κτίριο αποτελεί ένα *τριβάθμιο μηχανικό σύστημα*, δηλαδή σύστημα με τρεις βαθμούς ελευθερίας.

Ζητούνται: (α) Η συνολική κινητική ενέργεια $T[\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dot{u}_3]$ του τριώροφου κτιρίου και (β) η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια $V[u_1, u_2, u_3]$. (γ) Η σχετική Lagrangian $L = T - V$ που υπεισέρχεται στην *αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton*. (δ) Με βάση τις σχετικές εξισώσεις των Euler-Lagrange οι διαφορικές εξισώσεις κινήσεως των τριών πλακών του κτιρίου. Προφανώς αυτές αποτελούν ένα σύστημα τριών συζευγμένων (όχι ασύζευκτων, όχι ανεξάρτητων μεταξύ τους) γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως.

⇒ *Απαντήσεις:* (α) $T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} m_1 \dot{u}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{u}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{u}_3^2$.

(β) $V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{1}{2} k_1 u_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (u_2 - u_1)^2 + \frac{1}{2} k_3 (u_3 - u_2)^2$.

(δ) $m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = 0$, $m_2 \ddot{u}_2 - k_2 u_1 + (k_2 + k_3)u_2 - k_3 u_3 = 0$,

και $m_3 \ddot{u}_3 - k_3 u_2 + k_3 u_3 = 0$: σύστημα τριών συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων. ▲

E7.7

Ε7.7. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΣΕ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΜΙΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Σε αυτό εδώ το Κεφάλαιο Ε7 εξετάσαμε μέχρι τώρα την ελαχιστοποίηση (γενικότερα τη στασιμοποίηση) συναρτησιακών J που εκφράζονται με ολοκληρώματα της μορφής (7.2.2) ή γενικότερα (7.4.5) ή τέλος αφορούν στην περίπτωση που έχουμε πάνω από μία άγνωστες συναρτήσεις. Σ' όλες αυτές τις περιπτώσεις αναφέραμε τις σχετικές εξισώσεις των Euler-Lagrange για την ελαχιστοποίηση (και γενικότερα τη στασιμοποίηση) του συναρτησιακού J με πλήρη απόδειξη στην πρώτη περίπτωση: εξίσωση (7.2.4). Και φυσικά παρουσιάσαμε αρκετές εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού μέχρι και σε ιδεατά κτίρια διατμήσεως (ή διατμητικά κτίρια). Το κοινό χαρακτηριστικό όλων αυτών των περιπτώσεων ήταν ότι εμείς δουλεύαμε στη μία διάσταση, με μονοδιάστατα ολοκληρώματα στον ορισμό του συναρτησιακού μας J , δηλαδή με μία μόνο μεταβλητή ολοκληρώσεως συνήθως τη θέση x ή το χρόνο t . Και ασφαλώς όλες οι εξισώσεις των Euler-Lagrange (είτε απλές εξισώσεις είτε συστήματα εξισώσεων) που καταλήγαμε ήσαν ουσιαστικά συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Σε αυτήν εδώ την ενότητα θα αναφερθούμε σύντομα και στην περίπτωση όπου το συναρτησιακό J ορίζεται με ολοκλήρωμα στο χώρο των δύο διαστάσεων (διδιάστατο ολοκλήρωμα) ή στο χώρο των τριών διαστάσεων (τριδιάστατο ολοκλήρωμα). Πρόκειται για μια εύλογη γενίκευση και προφανώς πάρα πολύ ενδιαφέρουσα για τον Πολιτικό Μηχανικό. Για να γίνουμε λίγο πιο συγκεκριμένοι, ας αναφερθούμε στην εξής ελαχιστοποίηση συναρτησιακού στη διδιάστατη περιοχή D :

$$J[u] = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy = \text{minimum} \quad \text{εδώ με} \quad u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y := \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.7.1)$$

με το σύμβολο $:=$ να σημαίνει «εξ ορισμού». Εδώ η άγνωστη συνάρτηση u , την οποία επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται (και γενικότερα να στασιμοποιείται, να γίνεται στάσιμο) αυτό το συναρτησιακό $J[u]$, είναι συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, π.χ. των x και y . Συγκεκριμένα εδώ $u = u(x, y)$.

Ο τρόπος εργασίας είναι κι εδώ ανάλογος με εκείνον ο οποίος παρουσιάστηκε

εκτενώς στην Ενότητα Ε7.2 για το συναρτησιακό (7.2.2) και τη σχετική εξίσωση των Euler-Lagrange (7.2.4). Εκεί παρουσιάστηκε και η πλήρης σχετική απόδειξη. Εδώ απλά αναφέρουμε (δίχως απόδειξη) το σχετικό θεώρημα στις δύο διαστάσεις (x, y) :

ΘΕΩΡΗΜΑ

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ Ε7.2 (Εξίσωση των Euler-Lagrange στις δύο διαστάσεις):** Θεωρούμε την ελαχιστοποίηση (τοπικό ελάχιστο) του συναρτησιακού $J[u]$ που ορίζεται στη σχέση (7.7.1) στη διδιάστατη περιοχή D του επιπέδου Oxy . Δηλαδή θέλουμε να ισχύει η σχέση (7.7.1), την επαναλαμβάνουμε

$$J[u] = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy = \text{minimum} \quad \text{εδώ με} \quad u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y := \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.7.2)$$

για μια συγκεκριμένη αρχικά άγνωστη συνάρτηση $u = u(x, y)$ που διαθέτει συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους στην περιοχή D και παίρνει καθορισμένες τιμές στο σύνορο $C \equiv \partial D$ αυτής της περιοχής D . Για να συμβαίνει αυτή η ελαχιστοποίηση (και γενικότερα η στασιμοποίηση) θα πρέπει να πληροῦται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0 \quad \text{με} \quad (x, y) \in D. \quad (7.7.3)$$

Με την εκτέλεση των παραγωγίσεων σε κάθε συγκεκριμένη περίπτωση διαπιστώνεται εύκολα ότι πρόκειται για διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως για την προσδιοριστέα συνάρτηση $u = u(x, y)$. Αυτή εδώ η εξίσωση καλείται και πάλι *εξίσωση των Euler-Lagrange*. Και στην παρούσα περίπτωση πρόκειται ασφαλώς για μια πάρα πολύ σημαντική εξίσωση στο Λογισμό Μεταβολών. ▲

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση Ε7.10:** Φυσικά αυτό το θεώρημα γενικεύεται και στις τρεις διαστάσεις (όπως και σε περισσότερες διαστάσεις αν χρειασθεί). Στις τρεις διαστάσεις (x, y, z) η ολοκλήρωση γίνεται σε τριδιάστατη περιοχή V και η άγνωστη συνάρτηση είναι συνάρτηση των τριών μεταβλητών (x, y, z) , δηλαδή $u = u(x, y, z)$. Σε αυτήν την περίπτωση και υπό ανάλογες συνθήκες παραγωγισιμότητας και συνοριακών τιμών το συναρτησιακό $J[u]$ το οποίο ελαχιστοποιείται στη σχέση (7.7.2) και η αντίστοιχη εξίσωση των Euler-Lagrange (7.7.3) παίρνουν τις λίγο πιο γενικές μορφές τους

$$J[u] = \iiint_V F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) dx dy dz = \text{minimum} \quad (7.7.4)$$

και

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial u_z} \right) = 0 \quad \text{με} \quad (x, y, z) \in V. \quad (7.7.5)$$

Αυτές οι σχέσεις είναι φυσικά λίγο-πολύ προφανείς γενικεύσεις των αντίστοιχων σχέσεων (7.7.2) και (7.7.3) του πιο πάνω Θεωρήματος Ε7.2. ▲

❖ Εφαρμογή

Ενότητα Ε7.7

▼ Εφαρμογή Ε7.9 ■ Διδιάστατη εξίσωση του Laplace

Θεωρούμε την ελαχιστοποίηση του εξής συναρτησιακού στις δύο διαστάσεις (x, y) :

$$J[u] = \iint_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy = \text{minimum} \quad \text{ξανά με} \quad u_x := \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{και} \quad u_y := \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (7.7.6)$$

(Υποθέτουμε βέβαια ότι ισχύουν και οι επιπλέον συνθήκες του Θεωρήματος Ε7.2.)

Δηλαδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση σε αυτό το συναρτησιακό $J[u]$ είναι απλά

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = u_x^2 + u_y^2. \quad (7.7.7)$$

Επομένως έχουμε τις μερικές παραγώγους της

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u_x} = 2u_x \quad \text{και} \quad \frac{\partial F}{\partial u_y} = 2u_y. \quad (7.7.8)$$


Κατά συνέπεια η εξίσωση των Euler-Lagrange (7.7.3) παίρνει εδώ την απλή μορφή

$$0 - 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad \text{φυσικά με} \quad u_x := \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{και} \quad u_y := \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.7.9)$$

και τελικά, όπως διαπιστώνουμε πάρα πολύ εύκολα,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ή} \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{με} \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{και} \quad u_{yy} := \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (7.7.10)$$

Προφανώς πρόκειται για την πολύ γνωστή μας διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Αυτήν την πληρούν μεταξύ άλλων το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και η συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση) $\Psi(x, y)$ στη Ρευστομηχανική ιδεατού ρευστού στη μόνιμη κατάσταση ροής, η θερμοκρασία $\theta(x, y)$ στη Μετάδοση Θερμότητας πάλι στη μόνιμη κατάσταση, το άθροισμα των κυρίων τάσεων $s(x, y)$ στη Μηχανική των Υλικών και η συνάρτηση στρεβλώσεως $\psi(x, y)$ στη στρέψη ράβδου. Εδώ είδαμε επίσης σε ποια ελαχιστοποίηση συναρτησιακού $J[u]$ αντιστοιχεί αυτή η τόσο διάσημη εξίσωση. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε7.7


▼ Άσκηση Ε7.7 ■ Τριδιάστατη εξίσωση του Laplace

Εδώ ζητούνται: (α) Η εξίσωση των Euler-Lagrange για την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού

$$J[u] = \iiint_V (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dx dy dz = \text{minimum}. \quad (7.7.11)$$

(β) Πώς καλείται στις Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους η εξίσωση που μόλις βρέθηκε; (γ) Πού παρουσιάζεται στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού;

⇒ **Απαντήσεις:** (α) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$. (γ) Στη Ρευστομηχανική στο δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y, z)$ στην τριδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού στη μόνιμη κατάσταση ροής. Ανάλογα στη Μετάδοση Θερμότητας στη θερμοκρασία $\theta(x, y, z)$. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε7.7

▼ Άσκηση Ε7.8 ■ Εξίσωση του Poisson, Ρευστομηχανική, Στρέψη

Ανάλογη εργασία μπορεί εύκολα να γίνει και με το πιο γενικό συναρτησιακό

$$J[u] = \iint_D (u_x^2 + u_y^2 + 2fu) dx dy = \text{minimum} \quad \text{με} \quad f = f(x, y). \quad (7.7.12)$$

Ζητούνται: (α) Η σχετική εξίσωση των Euler-Lagrange. (β) Στη Ρευστομηχανική σε πρόβλημα ροής Νευτώνειου ρευστού (με συνεκτικότητα, ιξώδες) μέσα σε έναν ευθύγραμμο αγωγό (σωλήνα) προκύπτει πάνω στη διατομή D το συναρτησιακό

$$J[v] = \iint_D (v_x^2 + v_y^2 + 2fv) dx dy = \text{minimum} \quad \text{με} \quad f = \frac{p_z}{\mu}. \quad (7.7.13)$$

Εδώ άγνωστη συνάρτηση $v = v(x, y)$ είναι η ταχύτητα του Νευτώνειου ρευστού κατά μήκος του αγωγού, p_z η παράγωγος της πίεσεως p του Νευτώνειου ρευστού ξανά κατά μήκος του αγωγού και μ η συνεκτικότητά του (το ιξώδες του). Με εφαρμογή του αποτελέσματος του ερωτήματος (α) να γραφεί κατευθείαν η σχετική εξίσωση των Euler-Lagrange. (γ) Στη Μηχανική των Υλικών στο πρόβλημα της στρέψεως ευθύγραμμης ράβδου προκύπτει το συναρτησιακό

$$\Pi[\varphi] = \frac{1}{2G} \iint_D (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 2f\varphi) dx dy = \text{minimum} \quad \text{με} \quad f = -2G\theta, \quad (7.7.14)$$

με άγνωστη συνάρτηση $\varphi = \varphi(x, y)$ την τασική συνάρτηση του Prandtl, G το μέτρο διατμήσεως του ισότροπου ελαστικού υλικού και θ τη γωνία στρέψεως (σε ακτίνια!) της ράβδου ανά μονάδα μήκους της. Κι εδώ με εφαρμογή του αποτελέσματος του ερωτήματος (α) να γραφεί πάλι κατευθείαν η σχετική εξίσωση των Euler-Lagrange.

⇨ **Απαντήσεις:** (α) $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$. (β) $v_{xx} + v_{yy} = p_z/\mu$. (γ) $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = -2G\theta$. ▲

❖ Εφαρμογή

Ενότητα Ε7.7

▼ Εφαρμογή Ε7.10 ■ Θεμελιώσεις: δυναμική καταπόνηση πασσάλου

Θεωρούμε το πρόβλημα της δυναμικής καταπόνησεως πασσάλου μήκους (ύψους) H (με $0 \leq z \leq H$) στις Θεμελιώσεις. Ο πάσσαλος έχει γραμμική πυκνότητα ρA και δυστένεια EA . Η κατανεμημένη αξονική φόρτιση του (κυρίως από το έδαφος) είναι $p = p(z, t)$. Η αξονική (διαμήκης) μετατόπιση των σημείων του είναι $w = w(z, t)$. Το συναρτησιακό J το οποίο θα πρέπει εδώ να γίνει στάσιμο σύμφωνα με την αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton (Ενότητα Ε7.5) αποδεικνύεται ότι έχει τη μορφή

$$J[w] = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^H F(z, t, w, w_z, w_t) dz dt = \text{στάσιμο} \quad \text{με} \quad w_z := \frac{\partial w}{\partial z}, \quad w_t := \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (7.7.15)$$

Εδώ t_1 και t_2 είναι δύο συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Επιπλέον η συνάρτηση F ορίζεται σαν

$$F(z, t, w, w_z, w_t) = \frac{1}{2} \rho A w_t^2 - \frac{1}{2} EA w_z^2 + p(z, t)w. \quad (7.7.16)$$

Δηλαδή εδώ παρατηρούμε ότι έχουμε μία χωρική μεταβλητή, το z κατά μήκος του πασσάλου, και μία χρονική μεταβλητή, το χρόνο t . Κάπως παράξενο φαντάζει αυτό, αλλ' είναι λογικό. Έτσι είναι! Κι ας γίνουμε σαφέστεροι. Ο πρώτος όρος στη συνάρτηση αυτή $F(z, t, w, w_z, w_t)$ δεξιά δηλώνει την *κινητική ενέργεια* του πασσάλου ανά μονάδα μήκους του. Ο δεύτερος όρος δηλώνει την *ενέργεια παραμορφώσεως* του πασσάλου ξανά ανά μονάδα μήκους του. Τέλος ο τρίτος όρος δηλώνει το *έργο της αξονικής φορτίσεως* $p = p(z, t)$ πάλι ανά μονάδα μήκους του πασσάλου. Η πρώτη ολοκλήρωση γίνεται ως προς τη θέση z σε όλο το μήκος (ή εδώ καλύτερα ύψος) H του πασσάλου. Κι ακολουθεί η ολοκλήρωση ως προς το χρόνο t , κάτι που ήδη το γνωρίζουμε από την αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton στη σχέση (7.5.1). Δηλαδή εδώ στην αρχή του Hamilton δεν έχουμε απλά ένα υλικό σημείο, όπως στην Ενότητα Ε7.5, όπου την αναφέραμε για πρώτη φορά. Ούτε ένα διακριτό μηχανικό σύστημα, όπως το διώροφο και το τριώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως στην Ενότητα Ε7.6. Εδώ έχουμε ένα συνεχές μέσον και όχι πια διακριτό σύστημα.

Τέλος πάντων! Φλυαρήσαμε λίγο, αλλά έπρεπε. Και τώρα χρησιμοποιούμε την εξίσωση των Euler-Lagrange (7.7.3). Αυτή στην περίπτωση μας παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial w_z} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial w_t} \right) = 0 \quad \text{με} \quad 0 \leq z \leq H \quad \text{και} \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (7.7.17)$$

Υπολογίζοντας τώρα τις μερικές παραγώγους της συναρτήσεως F στη σχέση (7.7.16), βρίσκουμε εύκολα ότι

$$p(z, t) + \frac{\partial}{\partial z} (EA w_z) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho A w_t) = 0. \quad (7.7.18)$$

Υποθέτοντας μάλιστα τη δυστένεια EA και τη γραμμική πυκνότητα ρA ότι είναι σταθερές κατά μήκος του πασσάλου (με $0 \leq z \leq H$), παίρνουμε τελικά την εξίσωση

$$EA \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + p(z, t) = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{με} \quad w = w(z, t). \quad (7.7.19)$$

Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (3.2.15) της Ενότητας Β3.2 του Μέρους Β. Εδώ βέβαια χρησιμοποιήσαμε λίγο διαφορετικά σύμβολα. ▲

Μέχρι τώρα σε αυτήν την Ενότητα Ε7.7 εξετάσαμε την εφαρμογή της εξισώσεως των Euler-Lagrange για τη στασιμοποίηση (που περιλαμβάνει βέβαια και την ελαχιστοποίηση) συναρτησιακών στις δύο διαστάσεις της μορφής (7.7.2) συγκεκριμένα της μορφής

$$J[u] = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy. \quad (7.7.20)$$

Αυτή η μορφή περιέχει στην ολοκληρωτέα συνάρτηση μόνο πρώτες παραγώγους της άγνωστης συναρτήσεως $u = u(x, y)$. Η σχετική εξίσωση των Euler-Lagrange έχει τη μορφή (7.7.3), που την επαναλαμβάνουμε κι αυτήν

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0 \quad \text{με } (x, y) \in D. \quad (7.7.21)$$

Αυτή η περίπτωση μας φάνηκε χρήσιμη και επαρκής στις προηγούμενες εφαρμογές και ασκήσεις αυτής της Ενότητας Ε7.7.

Τώρα προχωράμε και στη γενικότερη περίπτωση όπου το συναρτησιακό $J[u]$ περιέχει και δεύτερες παραγώγους της άγνωστης συναρτήσεως $u = u(x, y)$. Δηλαδή το $J[u]$ έχει τώρα τη μορφή στην περιοχή D (στο χώρο ή στο χώρο και στο χρόνο)

$$J[u] = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) dx dy = \text{minimum} \quad (7.7.22)$$

εννοείται με τους δείκτες να δηλώνουν κι εδώ μερικές παραγωγίσεις. Συγκεκριμένα

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y := \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad \text{και} \quad u_{yy} := \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (7.7.23)$$

Σε αυτήν την ενδιαφέρουσα και αρκετά γενικότερη περίπτωση αποδεικνύεται ότι η εξίσωση των Euler-Lagrange (7.7.21) παίρνει και αυτή τη γενικότερη μορφή της

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{xy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u_{yy}} \right) = 0 \quad (7.7.24)$$

με $(x, y) \in D$. Η άγνωστη συνάρτηση $u = u(x, y)$ υποτίθεται τώρα ότι διαθέτει συνεχείς τέταρτες μερικές παραγώγους. Και ασφαλώς η πιο πάνω εξίσωση των Euler-Lagrange (7.7.24) είναι τώρα η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους η οποία αντιστοιχεί στο πρόβλημα στασιμοποίησης του παρόντος συναρτησιακού $J[u]$.

Σημειώνουμε ότι αυτή η γενίκευση (7.7.24) στην εξίσωση των Euler-Lagrange μας θυμίζει αρκετά την αντιστοιχη γενίκευση που είχαμε κάνει στην Ενότητα Ε7.4. Εκεί είχαμε εξετάσει το συναρτησιακό (με δεύτερη παράγωγο της άγνωστης συναρτήσεως) (7.4.5) και χρησιμοποιήσαμε στη συνέχεια τη σχετική εξίσωση των Euler-Lagrange (7.4.6) για την εύρεση της διαφορικής εξισώσεως (7.4.9) και ειδικότερα της διαφορικής εξισώσεως (7.4.10) στο στατικό πρόβλημα της δοκού.

Εδώ θα γενικεύσουμε αυτό το αποτέλεσμα στην αντίστοιχη διαφορική εξίσωση του δυναμικού προβλήματος της δοκού, τώρα και με θέση x και με χρόνο t . Και από την άλλη πλευρά, ακριβώς όπως στην Ενότητα Ε7.4 γενικεύσαμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης της Ενότητας Ε7.3 από καλώδιο σε δοκό, έτσι κι εδώ τώρα στο δυναμικό πρόβλημα θα γενικεύσουμε τα αποτελέσματα της προηγούμενης Εφαρμογής Ε7.10 από πάσσαλο σε δοκό. Και φυσικά δεν ξεχνάμε ότι σε σύγκριση με τον πάσσαλο η δοκός αποτελεί πολύ πιο χρήσιμο γραμμικό φορέα για τον Πολιτικό Μηχανικό στις πρακτικές εφαρμογές του. Προχωράμε λοιπόν στην παρούσα ενδιαφέρουσα εφαρμογή. Θα δούμε μάλιστα ότι ενώ η εξίσωση των Euler-Lagrange ήταν προηγουμένως για πάσσαλο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως, η εξίσωση (7.7.19), τώρα θα προκύψει διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως.

❖ Εφαρμογή

Ενότητα Ε7.7

▼ Εφαρμογή Ε7.11 ■ Δυναμική των Κατασκευών: δοκός Euler–Bernoulli

Στην εφαρμογή αυτή θεωρούμε το πρόβλημα της δυναμικής καταπόνησως δοκού. Τη δοκό τη θεωρούμε μήκους L_0 (με $0 \leq x \leq L_0$), γραμμικής πυκνότητας ρA (γενικά μεταβλητής κατά μήκος της δοκού) και δυσκαμψίας EI (και αυτής γενικά μεταβλητής κατά μήκος της δοκού) με κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, t)$ και με άγνωστο βέλος κάμψεως $v(x, t)$ (ασφαλώς με x τη θέση και t το χρόνο). Εδώ δεχόμαστε για απλότητα την κλασική θεωρία της δοκού των Euler–Bernoulli (ή Bernoulli–Euler), όπως ήδη έχουμε κάνει και προηγουμένως.

Όπως και στην προηγούμενη Εφαρμογή Ε7.10 για το πρόβλημα της δυναμικής καταπόνησως πασσάλου, έτσι και εδώ στο παρόν πρόβλημα της δυναμικής καταπόνησως δοκού θα βασιστούμε στην αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton. Και πιο συγκεκριμένα θα επιδιώξουμε τη στασιμοποίηση του συναρτησιακού

$$J[v] = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{L_0} F(x, t, v, v_{xx}, v_t) dx dt = \text{στάσιμο} \quad \text{με} \quad v_{xx} := \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad v_t := \frac{\partial v}{\partial t}. \quad (7.7.25)$$

Εδώ t_1 και t_2 είναι (όπως και στην προηγούμενη Εφαρμογή Ε7.10) δύο συγκεκριμένες χρονικές στιγμές και φυσικά $v = v(x, t)$ είναι το άγνωστο βέλος κάμψεως της δοκού Euler–Bernoulli που μελετάμε.

Για να δούμε τώρα ποια είναι αυτή η ολοκληρωτέα συνάρτηση $F(x, t, v, v_{xx}, v_t)$ στο πιο πάνω συναρτησιακό $J[v]$ του παρόντος προβλήματος δοκού. Πρόκειται για τη συνάρτηση

$$F(x, t, v, v_{xx}, v_t) = \frac{1}{2} \rho A v_t^2 - \frac{1}{2} EI v_{xx}^2 + p(x, t)v \quad (7.7.26)$$

επαναλαμβάνουμε με $v = v(x, t)$. Πρόκειται φυσικά για συνάρτηση ανάλογη με την αντίστοιχη συνάρτηση $F(z, t, w, w_z, w_t)$ στη σχέση (7.7.16) για το πρόβλημα της δυναμικής καταπόνησως πασσάλου. Όπως κι εκεί, έτσι κι εδώ (ανάλογα βέβαια, για δοκό, όχι για πάσσαλο) ο πρώτος όρος στην παρούσα συνάρτηση $F(x, t, v, v_{xx}, v_t)$ δεξιά δηλώνει την *κινητική ενέργεια* της δοκού ανά μονάδα μήκους της. Ο δεύτερος όρος δηλώνει την *ενέργεια παραμορφώσεως* της δοκού πάλι ανά μονάδα μήκους της. Τέλος ο τρίτος όρος δηλώνει το *έργο της κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως* $p = p(x, t)$ ξανά ανά μονάδα μήκους της δοκού. Η πρώτη ολοκλήρωση γίνεται ως προς τη θέση x σε όλο το μήκος L_0 της δοκού. Κι ακολουθεί η ολοκλήρωση ως προς το χρόνο t , όπως ξέρουμε καλά από την αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton στη σχέση (7.5.1). Δηλαδή και εδώ, όπως και στην προηγούμενη Εφαρμογή Ε7.10 για τον πάσσαλο, έχουμε ένα συνεχές μέσον, εδώ δοκό, και όχι διακριτό σύστημα.

Όσο για το σχετικό ολοκλήρωμα στο διάστημα $[0, L_0]$, δηλαδή σε όλο το μήκος της δοκού, στο συναρτησιακό $J[v]$ στη σχέση (7.7.25) που θέλουμε να στασιμοποιήσουμε, ε αυτό το ολοκλήρωμα είναι η σχετική με το πρόβλημά μας Lagrangian (Λαγκρανζιανή) L . Αυτή μπορεί ασφαλώς να γραφεί εδώ στη μορφή

$$L = T - \Pi \quad \text{με} \quad T = T[v] \quad \text{και} \quad \Pi = \Pi[v] = U[v] - W[v], \quad (7.7.27)$$

όπου

$$T[v] = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \rho A v_t^2 dx, \quad U[v] = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} EI v_{xx}^2 dx \quad \text{και} \quad W[v] = \int_0^{L_0} p(x, t)v dx. \quad (7.7.28)$$

Άρα, αν εξαιρέσουμε τη *συνολική κινητική ενέργεια* $T = T[v]$ της δοκού, τα άλλα τρία πιο πάνω συναρτησιακά $\Pi = \Pi[v]$ (η *συνολική δυναμική ενέργεια* της δοκού), $U = U[v]$ (η *συνολική ενέργεια παραμορφώσεως της δοκού*) και τέλος $W = W[v]$

(το συνολικό έργο της κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως, της εξωτερικής φορτίσεως της δοκού) έχουν και εδώ ακριβώς τις εκφράσεις (7.4.3) και (7.4.2) στην Ενότητα Ε7.4 για το αντίστοιχο στατικό πρόβλημα της δοκού. Και βέβαια είναι και εδώ συναρτήσεις του βέλους κάμψεως $v = v(x, t)$ της δοκού. Εντούτοις εδώ όλα αυτά τα συναρτησιακά εξαρτώνται προφανώς από το χρόνο t . Παρατηρούμε ότι αυτό συμβαίνει, γιατί ο χρόνος t δεν περιλαμβάνεται στις τρεις πιο πάνω χωρικές ολοκληρώσεις (7.7.28) κατά μήκος της δοκού. Αντίθετα ο χρόνος t περιλαμβάνεται στη δεύτερη (στην εξωτερική) ολοκλήρωση στο αρχικό συναρτησιακό (7.7.25) της αρχής της ελάχιστης δράσεως του Hamilton, που επιδιώκουμε εδώ να στασιμοποιήσουμε.

Και τώρα που εξηγήσαμε πλήρως το πρόβλημά μας για τη στασιμοποίηση του συναρτησιακού $J[v]$ στη σχέση (7.7.25), δε μας απομένει παρά η τυπική εφαρμογή της σχετικής εξισώσεως των Euler-Lagrange (7.7.24) για την εύρεση της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους στο παρόν πρόβλημα δυναμικής καταπονήσεως δοκού. Την υπενθυμίζουμε και εδώ αυτήν τη θεμελιώδη εξίσωση γράφοντάς την όμως τώρα με λίγο διαφορετικά σύμβολα συγκεκριμένα με v (την τωρινή μας άγνωστη συνάρτηση, δηλαδή το βέλος κάμψεως της δοκού) αντί για u και επίσης με t (το χρόνο) αντί για y . Έτσι έχουμε τώρα την εξίσωση των Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial v_t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial v_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial v_{xt}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial F}{\partial v_{tt}} \right) = 0. \quad (7.7.29)$$

Εκτελώντας τις σχετικές μερικές παραγωγίσεις στη συνάρτηση $F(x, t, v, v_{xx}, v_t)$ στη σχέση (7.7.26), διαπιστώνουμε πάρα πολύ εύκολα ότι

$$\frac{\partial F}{\partial v} = p(x, t), \quad \frac{\partial F}{\partial v_x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v_t} = \rho A v_t, \quad \frac{\partial F}{\partial v_{xx}} = -EI v_{xx}, \quad \frac{\partial F}{\partial v_{xt}} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial v_{tt}} = 0. \quad (7.7.30)$$

Επομένως η πιο πάνω εξίσωση των Euler-Lagrange (7.7.29) παίρνει τώρα τη μορφή

$$p(x, t) - \frac{\partial}{\partial t} (\rho A v_t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI v_{xx}) = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI v_{xx}) + \frac{\partial}{\partial t} (\rho A v_t) = p(x, t), \quad (7.7.31)$$

μια που οι υπόλοιπες τρεις μερικές παράγωγοι μηδενίζονται.

Και τώρα υποθέτουμε τη γραμμική ποκνότητα ρA και τη δυσκαμψία EI της δοκού ότι είναι σταθερές κατά μήκος της. Τότε εκτελώντας και τις δύο σχετικές μερικές παραγωγίσεις (ως προς τη θέση x και ως προς το χρόνο t) σε αυτήν εδώ τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (7.7.31) δεξιά, τη γράφουμε στην τελική της μορφή

$$EI v_{xxxx} + \rho A v_{tt} = p(x, t) \quad \text{ή} \quad EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t). \quad (7.7.32)$$

Πρόκειται ασφαλώς για την ήδη γνωστή μας διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους των καμπτικών εξαναγκασμένων ταλαντώσεων δοκού. Και αν βέβαια δεν υπάρχει εξωτερική φόρτιση, $p(x, t) \equiv 0$, τότε έχουμε φυσικά την αντίστοιχη εξίσωση των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού. Κι έτσι βρήκαμε εδώ με ενεργειακή μέθοδο και με τη χρήση του Λογισμού Μεταβολών, της αρχής της ελάχιστης δράσεως του Hamilton και της σχετικής εξισώσεως των Euler-Lagrange (7.7.29) για το πρόβλημά μας τη διαφορική εξίσωση των καμπτικών ταλαντώσεων (γενικά εξαναγκασμένων) δοκού. Βέβαια υποθέσαμε δοκό Euler-Bernoulli (ή Bernoulli-Euler). Για να δούμε τώρα και μια λίγο πιο δύσκολη και ταυτόχρονα και λίγο πιο ακριβή περίπτωση δοκού: τη δοκό Rayleigh.

 **Άσκηση**

Ενότητα Ε7.7

▼ **Άσκηση Ε7.9 ■ Δυναμική των Κατασκευών: δοκός Rayleigh**

Η δοκός Rayleigh (1894) αποτελεί μια μικρή βελτίωση της δοκού Euler–Bernoulli (ή Bernoulli–Euler). Συγκεκριμένα τώρα στη δοκό Rayleigh λαμβάνουμε υπόψη μας και την επιρροή της στροφικής αδράνειας ρI των διατομών της δοκού. Αυτό έχει σαν συνέπεια την προσθήκη του ενεργειακού όρου

$$F_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \rho I v_{xt}^2 \quad \text{με} \quad v_{xt} := \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \quad (7.7.33)$$

στη συνάρτηση F της σχέσεως (7.7.26).

Ζητούνται: (α) Ποια μορφή παίρνει τώρα η συνάρτηση αυτή F ; (β) Ποια είναι η επιπλέον κινητική ενέργεια $T_{\text{rot}} = T_{\text{rot}}[v]$ σε όλο το μήκος της δοκού; (γ) Με χρήση της πιο πάνω εξίσωσης των Euler–Lagrange (7.7.29) να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση (7.7.32) της δοκού στο παρόν δυναμικό πρόβλημα με σταθερές τις τέσσερις ποσότητες ρ , A , E και I γενικεύεται παίρνοντας τη μορφή

$$EI v_{xxxx} + \rho A v_{tt} - \rho I v_{xxtt} = p(x, t) \quad \text{ή} \quad EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} = p(x, t). \quad (7.7.34)$$

Και προφανώς αυτή εδώ η μορφή αποτελεί και μια μικρή βελτίωση της αρχικής εξίσωσης (7.7.32) με τη θεωρία των Euler–Bernoulli. Και παραπέρα μπορεί βέβαια να βρεθεί (αν και αυτό δε ζητείται εδώ) και η αντίστοιχη και ακόμη πιο βελτιωμένη (για την ακρίβεια αρκετά πιο βελτιωμένη) εξίσωση της δοκού στο παρόν δυναμικό πρόβλημα με τη θεωρία του Timoshenko (1921). Αυτή η τελευταία θεωρία παίρνει υπόψη της όχι μόνο την επιρροή της στροφικής αδράνειας της δοκού, αλλ' επιπλέον και την επιρροή των παραμορφώσεων από την τέμνουσα δύναμη της δοκού.

⇒ **Απαντήσεις:** (α) $F = F(x, t, v, v_{xx}, v_t, v_{xt}) = \frac{1}{2} \rho A v_t^2 + \frac{1}{2} \rho I v_{xt}^2 - \frac{1}{2} EI v_{xx}^2 + p(x, t)v$.

(β) $T_{\text{rot}} = T_{\text{rot}}[v] = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \rho I v_{xt}^2 dx$. ▲

❖ **Εφαρμογή**

Ενότητα Ε7.7

▼ **Εφαρμογή Ε7.12 ■ Πλάκες**

Με την παρούσα εφαρμογή συμπληρώνουμε αυτήν την ενότητα με ένα δεύτερο παράδειγμα ελαχιστοποίησης συναρτησιακού με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση περιέχει και δεύτερες παραγώγους της άγνωστης συναρτήσεως. Πρόκειται για το στατικό πρόβλημα της πλάκας με τις κλασικές υποθέσεις του Kirchhoff, που συνήθως χρησιμοποιεί ο Πολιτικός Μηχανικός. Εδώ μελετάμε το στατικό πρόβλημα της πλάκας ουσιαστικά γενικεύοντας τα αποτελέσματα της Ενότητας Ε7.4 από δοκό (που είναι φυσικά ένας γραμμικός φορέας) σε πλάκα (που είναι βέβαια ένας επιφανειακός φορέας). Στη δοκό άγνωστη συνάρτηση ήταν το βέλος κάμψεως της $v = v(x)$. Και ανάλογα εδώ στην πλάκα άγνωστη συνάρτηση είναι πάλι το βέλος κάμψεως της (ισοδύναμα η βύθισή της) $w = w(x, y)$. Αυτό είναι όμως τώρα συνάρτηση δύο μεταβλητών, των x και y , απλά επειδή η πλάκα είναι ένας επιφανειακός φορέας.

Και εδώ εμείς ζητάμε την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $\Pi[w]$, που αφορά στη συνολική δυναμική ενέργεια της πλάκας και υπολογίζεται από τη διαφορά

$$\Pi[w] = U[w] - W[w]. \quad (7.7.35)$$

(Πρόκειται ουσιαστικά για τον ίδιο τύπο (7.4.3) της Ενότητας Ε7.4 για τη δοκό, εδώ όμως για την πλάκα με w αντί για v .) Στη διαφορά αυτή $U[w]$ είναι πάλι η συνολική

ενέργεια παραμορφώσεως της πλάκας, ενώ $W[w]$ είναι ξανά το συνολικό έργο της κάθετης κατανεμημένης εξωτερικής φορτίσεως εδώ $p(x, y)$ της πλάκας. Το πρώτο από αυτά τα δύο συναρτησιακά $U[w]$ δίνεται στο πρόβλημα της πλάκας από τον τύπο

$$U[w] = \frac{D}{2} \iint_P \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (7.7.36)$$

Εδώ D είναι η δυσκαμψία της πλάκας και ν ο λόγος του Poisson του υλικού της, το οποίο το υποθέτουμε φυσικά ισότροπο και ελαστικό. (Σημειώνουμε επίσης πως η δυσκαμψία D της πλάκας δίνεται από τον τύπο $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ με E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της και h το πάχος της.)

Με τη χρήση δεικτών για τη δήλωση των παραγώγων, όπως κάνουμε εδώ πολύ συχνά, αυτό το συναρτησιακό $U[w]$ γράφεται και στη λίγο πιο απλή μορφή του

$$U[w] = \frac{D}{2} \iint_P [(w_{xx} + w_{yy})^2 - 2(1-\nu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)] dx dy \quad (7.7.37)$$

με την ολοκλήρωση να εκτείνεται προφανώς σε ολόκληρη την πλάκα P .

Επίσης το δεύτερο από αυτά τα δύο συναρτησιακά $W[w]$ δίνεται από τον τύπο

$$W[w] = \iint_P p(x, y)w dx dy \quad (7.7.38)$$

φυσικά συνεχώς με $w = w(x, y)$ για το βέλος κάμψεως (τη βύθιση) της πλάκας.

Και τώρα θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό $\Pi[w]$ της συνολικής δυναμικής ενέργειας της πλάκας. Αυτό το συναρτησιακό με βάση τις πιο πάνω σχέσεις (7.7.35), (7.7.37) και (7.7.38) μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\Pi[w] = \iint_P F(x, y, w, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}) dx dy, \quad (7.7.39)$$

όπου η συνάρτηση $F = F(x, y, w, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy})$ προκύπτει ότι δίνεται από τη σχέση

$$F(x, y, w, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}) = \frac{D}{2} [(w_{xx} + w_{yy})^2 - 2(1-\nu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)] - p(x, y)w. \quad (7.7.40)$$

Και τώρα απλά θα χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση των Euler-Lagrange (7.7.24) γι' αυτήν τη συνάρτηση F βρίσκοντας με αυτόν τον τρόπο τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της πλάκας. Την υπενθυμίζουμε αυτήν την εξίσωση κι εδώ

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \right) = 0. \quad (7.7.41)$$

Εδώ θέσαμε μάλιστα w αντί για u στην άγνωστη συνάρτηση, αφού με w συμβολίζουμε το άγνωστο βέλος κάμψεως (τη βύθιση) της πλάκας σ' αυτήν την εφαρμογή.

Παραγωγίζοντας την πιο πάνω συνάρτηση F στη σχέση (7.7.40) ως προς w , w_x , w_y , w_{xx} , w_{xy} και w_{yy} , βρίσκουμε εύκολα αυτές τις μερικές παραγώγους που είναι

$$\frac{\partial F}{\partial w} = -p(x, y), \quad (7.7.42)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_x} = \frac{\partial F}{\partial w_y} = 0, \quad (7.7.43)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} = D[(w_{xx} + w_{yy}) - (1-\nu)w_{yy}], \quad (7.7.44)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} = 2D(1-\nu)w_{xy}, \quad (7.7.45)$$

$$\frac{\partial F}{\partial w_{yy}} = D[(w_{xx} + w_{yy}) - (1-\nu)w_{xx}]. \quad (7.7.46)$$

Δε μας απομένει τώρα παρά να αντικαταστήσουμε αυτές τις μερικές παραγώγους που μόλις βρήκαμε στην εξίσωση των Euler-Lagrange (7.7.41). Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned} -p(x, y) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(w_{xx} + w_{yy}) - (1 - \nu)w_{yy}] + 2D(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (w_{xy}) \\ + D \frac{\partial^2}{\partial y^2} [(w_{xx} + w_{yy}) - (1 - \nu)w_{xx}] = 0. \end{aligned} \quad (7.7.47)$$

Εκτελώντας τώρα τις παραγωγίσεις, μεταφέροντας τη φόρτιση $p(x, y)$ στο δεξιό μέλος και διαιρώντας με τη δυσκαμψία D της πλάκας, προκύπτει πολύ εύκολα ότι

$$w_{xxxx} + w_{xxyy} - (1 - \nu)w_{xxyy} + 2(1 - \nu)w_{xxyy} + w_{xxyy} + w_{yyyy} - (1 - \nu)w_{xxyy} = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (7.7.48)$$

Εδώ βέβαια έχουμε υποθέσει ότι η αλλαγή της σειράς των μερικών παραγωγίσεων δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, κάτι που ισχύει για συνεχείς μερικές παραγώγους. Παρατηρούμε μάλιστα πως οι τρεις όροι με τον παράγοντα $1 - \nu$ απλοποιούνται. Έτσι παίρνουμε τελικά τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy} = \frac{p(x, y)}{D} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \nabla^4 w = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (7.7.49)$$

Δηλαδή προέκυψε τελικά η γνωστή μας διαφορική εξίσωση της πλάκας στο στατικό πρόβλημα με $\nabla^4 \equiv \Delta^2$ τον επίσης γνωστό μας διαρμονικό τελεστή.

► Παρατήρηση


▼ **Παρατήρηση E7.11:** Στο σημείο αυτό οφείλουμε να κάνουμε μια πολύ σημαντική παρατήρηση. Είδαμε πιο πάνω πως οι όροι με παράγοντα το $1 - \nu$ απλοποιούνται. (Η αλλιώς πως η διαφορική εξίσωση της πλάκας δεν εξαρτάται καθόλου από το λόγο του Poisson ν του υλικού της.) Αυτή η απλοποίηση σημαίνει πρακτικά ότι πιο πάνω στη σχέση (7.7.40) θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει σαν ολοκληρωτέα συνάρτηση στο συναρτησιακό μας (7.7.39) την πολύ απλούστερη συνάρτηση

$$F^*(x, y, w, w_{xx}, w_{yy}) = \frac{D}{2} (w_{xx} + w_{yy})^2 - p(x, y)w. \quad (7.7.50)$$

Γιατί δεν το κάναμε, ενώ είναι εφικτό και από μαθηματική άποψη απόλυτα σωστό;

Η απάντηση είναι πολύ απλή: δεν το κάναμε, επειδή εδώ στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ενδιαφερόμαστε κυρίως για τις φυσικές έννοιες και τις εφαρμογές τους στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Και η συνάρτηση F στη σχέση (7.7.40), που είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο συναρτησιακό (7.7.39), εκφράζει από φυσική άποψη την επιφανειακή πυκνότητα της ενέργειας παραμορφώσεως της πλάκας (ο όρος της με παράγοντα τη δυσκαμψία D της πλάκας που οφείλεται και στις τρεις ροπές της) μείον το αντίστοιχο έργο της φορτίσεως $p(x, y)$ της πλάκας. Η αλλιώς το προς ελαχιστοποίηση συναρτησιακό $\Pi[w]$ εκφράζει τη συνολική δυναμική ενέργεια της πλάκας, δηλαδή εδώ τη διαφορά της συνολικής ενέργειας παραμορφώσεως της πλάκας μείον το έργο της φορτίσεως $p(x, y)$.

Αυτό ακριβώς είναι που θέλουμε να δείξουμε εδώ: ότι η ενεργειακή αντιμετώπιση ενός προβλήματος του Πολιτικού Μηχανικού οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα με εκείνο που οδηγεί η αντίστοιχη μέθοδος που βασίζεται στην ισορροπία του φορέα, εδώ της πλάκας. Δεν κάνουμε ένα μαθηματικό παιχνίδι ελαχιστοποίησης. Και έτσι, αν χρησιμοποιούσαμε την απλοποιημένη συνάρτηση F^* της αμέσως πιο πάνω σχέσεως (7.7.50), τότε από την ενεργειακή άποψη του Πολιτικού Μηχανικού εδώ στο πρόβλημα της πλάκας θα είχαμε κάνει ένα σοβαρό λάθος. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε7.7

▼ **Άσκηση Ε7.10** ■ **Πλάκα σε ελαστική βάση**

Ας θεωρήσουμε τώρα το πρόβλημα όπου η πλάκα υποστηρίζεται από ελαστική βάση, συνήθως το έδαφος, δηλαδή έχουμε πλάκα σε ελαστική βάση. Εδώ υποθέτουμε ότι η κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y)$ της πλάκας είναι τέτοια (ας πούμε γενικά με κατεύθυνση προς την ελαστική βάση), ώστε η πλάκα να στηρίζεται σ' όλα τα σημεία της στην ελαστική βάση της. Στην περίπτωση αυτή (για παράδειγμα σε θεμελιώσεις οικοδομών) η συνάρτηση F στη σχέση (7.7.40) έχει και έναν επιπλέον όρο: τον όρο (εννοείται με συν, αντίθετα προς τον όρο της φορτίσεως $p(x, y)$ που είναι με πλην)


$$F_k = \frac{1}{2} kw^2 \quad \text{με} \quad w = w(x, y). \quad (7.7.51)$$

Αυτός ο όρος εκφράζει βέβαια το έργο της αντιδράσεως $-kw$ της ελαστικής βάσεως με k το συνολικό σχετικό συντελεστή του μηχανικού συστήματος βάσεως-πλάκας.

Εδώ ζητείται με γενίκευση όλων των προηγούμενων υπολογισμών για την απλή πλάκα η εύρεση της διαφορικής εξίσωσης της παρούσας πλάκας σε ελαστική βάση (επαναλαμβάνουμε συνήθως στο έδαφος), που έχει τη μορφή

$$D\nabla^4 w + kw = p(x, y) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \nabla^4 w + \frac{k}{D} w = \frac{p(x, y)}{D}. \quad (7.7.52)$$

Δηλαδή εδώ απλά είναι σαν να έχουμε κάθετη κατανεμημένη φόρτιση στην πλάκα $p(x, y) - kw$, κάτι που είναι απόλυτα εύλογο και σωστό. Πραγματικά έτσι είναι! Μόνο βέβαια που η αντίδραση της ελαστικής βάσεως $-kw$ (γενικά αντίθετη προς τη φόρτιση $p(x, y)$) είναι άγνωστη μέχρις ότου λυθεί η πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά ... ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε7.7

▼ **Άσκηση Ε7.11** ■ **Δυναμική καταπόνηση πλάκας**

Θεωρούμε τώρα τη γενίκευση από τη στατική στη δυναμική καταπόνηση πλάκας P ανάλογα με ό,τι είχαμε κάνει στην Εφαρμογή Ε7.11 για τη δυναμική καταπόνηση δοκού. Την πλάκα τη δεχόμαστε ότι έχει σταθερό πάχος h , ότι είναι από ισότροπο γραμμικά ελαστικό υλικό πυκνότητας ρ κι ότι έχει σταθερή δυσκαμψία D . Η πλάκα καταπονείται από χρονικά εξαρτημένη κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p = p(x, y, t)$ φυσικά με (x, y) τις Καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων της και με t το χρόνο.

Όπως και στη δοκό, έτσι θα πρέπει και εδώ να στασιμοποιηθεί η Lagrangian (Λαγκρανζιανή) L , που δίνεται από τη σχέση (7.7.27). Δηλαδή $L = T - \Pi$ με $T = T[w]$ τη συνολική κινητική ενέργεια της πλάκας και $\Pi = \Pi[w]$ τη συνολική δυναμική ενέργεια της πλάκας φυσικά με $w = w(x, y, t)$ το βέλος κάμψεως (τη βύθιση) της πλάκας. Βέβαια για τη συνολική δυναμική ενέργεια $\Pi = \Pi[w]$ της πλάκας ισχύουν και εδώ οι σχέσεις (7.7.35) έως (7.7.40) της Εφαρμογής Ε7.12 για τη στατική καταπόνηση πλάκας, οι οποίες ισχύουν και στο αντίστοιχο στατικό πρόβλημα. Εδώ όμως στο δυναμικό πρόβλημα φυσικά το βέλος κάμψεως w και η φόρτιση p της πλάκας εξαρτώνται όχι μόνο από τη θέση (x, y) στην πλάκα αλλά και από το χρόνο t .

Ζητούνται: (α) Να διαπιστωθεί ότι η συνολική κινητική ενέργεια $T = T[w]$ της πλάκας δίνεται από τον τύπο

$$T = T[w] = \frac{1}{2} \iint_p \rho h w_t^2 dx dy \quad (7.7.53)$$

επαναλαμβάνεται με ρ την πυκνότητα του υλικού της πλάκας και h το πάχος της. Άρα ρh είναι η επιφανειακή πυκνότητα της πλάκας, που εδώ είναι σταθερή. Αυτός

ο τύπος είναι βέβαια απόλυτα ανάλογος με τον πρώτο τύπο (7.7.28) για τη συνολική κινητική ενέργεια $T = T[v]$ της δοκού εκεί βέβαια με v το βέλος κάμψεως της δοκού. Λαμβάνουμε τώρα υπόψη μας ότι η εξίσωση των Euler-Lagrange στο παρόν πρόβλημα πλάκας παίρνει την κάπως γενικευμένη (λόγω και του χρόνου t) μορφή

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial F}{\partial w_t} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xx}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{xy}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w_{yy}} \right) = 0. \quad (7.7.54)$$

Εδώ F είναι η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο προς στασιμοποίηση συναρτησιακό $J = J[w]$, το οποίο είναι φυσικά απόλυτα ανάλογο με το συναρτησιακό $J = J[v]$ που είχαμε στη δοκό, σχέση (7.7.25) της Εφαρμογής E7.11. Σημειώνουμε πως στην πιο πάνω εξίσωση των Euler-Lagrange (7.7.54) περιλάβαμε μόνο τους όρους που δεν είναι μηδενικοί στο παρόν δυναμικό πρόβλημα πλάκας.

(β) Με βάση και τη σχέση (7.7.40) της Εφαρμογής E7.12 να αποδειχθεί πως αυτή η ολοκληρωτέα συνάρτηση F στο συναρτησιακό $J = J[w]$ δίνεται από τον τύπο

$$F = F(x, y, t, w, w_t, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}) = \frac{\rho h}{2} w_t^2 - \frac{D}{2} [(w_{xx} + w_{yy})^2 - 2(1 - \nu)(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)] + p(x, y, t)w. \quad (7.7.55)$$

(γ) Στη συνέχεια με χρήση της πιο πάνω εξισώσεως των Euler-Lagrange (7.7.54) να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που ισχύει για το βέλος κάμψεως $w = w(x, y, t)$ στο παρόν δυναμικό πρόβλημα πλάκας έχει τη μορφή

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{p(x, y, t)}{D}. \quad (7.7.56)$$

Προφανώς αυτή η εξίσωση αποτελεί γενίκευση (τώρα και με τον αδρανειακό όρο) της αντίστοιχης εξισώσεως (7.7.49), που ισχύει στο στατικό πρόβλημα πλάκας. ▲

E7.8

E7.8. ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΩΝ ΥΠΟ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΥΣ

E7.8.1

E7.8.1. Ισοπεριμετρικά προβλήματα

Σε μερικές περιπτώσεις θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε (ή γενικότερα να στασιμοποιήσουμε) ένα συναρτησιακό J υπό κάποιους περιορισμούς. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε εδώ πως θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε (ή να στασιμοποιήσουμε) το συναρτησιακό $J[y]$ στη σχέση (7.1.1), το επαναλαμβάνουμε

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (7.8.1)$$

με δύο συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες $y(a) = y_a$ και $y(b) = y_b$. Επιπλέον έχουμε όμως και τον ολοκληρωτικό περιορισμό (περιορισμό σε μορφή ολοκληρώματος)

$$\int_a^b G(x, y, y') dx = C \quad (7.8.2)$$

(με το C γνωστή σταθερά) και εδώ όπως και στο ίδιο το συναρτησιακό ξανά μόνο με πρώτη παράγωγο y' της άγνωστης συναρτήσεως $y = y(x)$. Φυσικά εδώ οι δύο συναρτήσεις $F(x, y, y')$ και $G(x, y, y')$ είναι γνωστές συναρτήσεις των τριών μεταβλητών τους, ενώ άγνωστη συνάρτηση είναι βέβαια η συνάρτηση $y = y(x)$. Αυτή είναι και η συνάρτηση που δηλώνεται στο συναρτησιακό $J[y]$.

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι κάποιες φορές ο περιορισμός (7.8.2) αφορά στο μήκος της περιμέτρου μιας περιοχής. Για το λόγο αυτό για το παρόν πρόβλημα

χρησιμοποιείται ο όρος *ισοπεριμετρικό πρόβλημα* ακόμη και στην περίπτωση που ο περιορισμός (7.8.2) δεν αφορά σε μήκος περιμέτρου περιοχής ούτε καν σε μήκος καμπύλης. Σημειώνεται πως το κλασικό σχετικό πρόβλημα αφορά στο σχήμα της περιοχής D η οποία περικλείεται από κλειστή καμπύλη C_0 συγκεκριμένου μήκους S (του μήκους της περιμέτρου της περιοχής D), έτσι ώστε το εμβαδόν της περιοχής D να γίνει μέγιστο. Το σχήμα αυτό αποδεικνύεται ότι είναι μια κυκλική περιοχή με την περίμετρό του περιφέρεια κύκλου (ή απλά κύκλο).

Για την παρούσα ελαχιστοποίηση (ή γενικότερα τη στασιμοποίηση) η μέθοδος που ακολουθείται εδώ είναι η μέθοδος της χρήσης ενός πολλαπλασιαστή Lagrange. Πιο συγκεκριμένα μπορεί να αποδειχθεί ότι για την παρούσα ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $J[y]$ αρκεί να ελαχιστοποιηθεί το τροποποιημένο συναρτησιακό

$$J^*[y] = \int_a^b F^*(x, y, y') dx. \quad (7.8.3)$$

Εδώ βλέπουμε ότι χρησιμοποιείται μια νέα, βοηθητική συνάρτηση, η συνάρτηση

$$F^*(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y'), \quad (7.8.4)$$

όπου το λ είναι μία σταθερά: ο πολλαπλασιαστής Lagrange. Σημειώνουμε βέβαια ότι τους πολλαπλασιαστές Lagrange τους έχουμε ήδη συναντήσει στο Διαφορικό Λογισμό στην περίπτωση που θέλαμε και εκεί να βρούμε το ακρότατο μιας συναρτήσεως υπό κάποιον περιορισμό ή κάποιους περιορισμούς σε μορφή εξισώσεων.

Η όλη διαδικασία είναι λοιπόν να δουλέψουμε με το συναρτησιακό $J^*[y]$ ελαχιστοποιώντας το με τη χρήση της σχετικής εξισώσεως των Euler–Lagrange. Στο αποτέλεσμα που θα βρούμε πέρα βέβαια από τις σταθερές που θα προκύψουν στη λύση αυτής της διαφορικής εξισώσεως θα υπάρχει και η σταθερά λ : ο πολλαπλασιαστής Lagrange του προβλήματός μας. Για τον προσδιορισμό όλων τους πέρα από τις δύο (στην παρούσα περίπτωση) διαθέσιμες συνοριακές συνθήκες $y(a) = y_a$ και $y(b) = y_b$ θα πρέπει φυσικά να χρησιμοποιηθεί και ο ολοκληρωτικός περιορισμός (7.8.2).

Και προφανώς όλα αυτά γενικεύονται επίσης στην περίπτωση παρουσίας και της δευτέρας παραγώγου της άγνωστης συναρτήσεως $y = y(x)$ ή και παραγώγων της ακόμη μεγαλύτερης τάξεως. Επίσης και στην περίπτωση όπου έχουμε πάνω από έναν περιορισμό της μορφής (7.8.2) ας πούμε τους m περιορισμούς (κι εδώ σε μορφή ολοκληρωτικών περιορισμών και συγκεκριμένα εξισώσεων με ολοκληρώματα)

$$\int_a^b G_i(x, y, y') dx = C_i \quad \text{με} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (7.8.5)$$

με τα $G_i(x, y, y')$ γνωστές συναρτήσεις και με τα C_i γνωστές σταθερές. Προφανώς σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει ανάλογα με πριν να χρησιμοποιηθούν m πολλαπλασιαστές Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ και με χρήση τους η νέα, βοηθητική συνάρτηση

$$F^*(x, y, y') = F(x, y, y') + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i(x, y, y'). \quad (7.8.6)$$

Συνήθως όμως σε ισοπεριμετρικά προβλήματα έχουμε ένα μόνο περιορισμό: $m = 1$.

❖ **Εφαρμογή**
Ενότητα Ε7.8

▼ Εφαρμογή Ε7.13 ■ Αλυσοειδής καμπύλη

Σαν μια εφαρμογή της μεθόδου του πολλαπλασιαστή Lagrange σε ισοπεριμετρικό πρόβλημα θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα της *αλυσοειδούς καμπύλης* (ή πιο απλά *αλυσοειδούς*). Αυτό εδώ το πρόβλημα αφορά στον προσδιορισμό του σχήματος που παίρνει μια εύκαμπτη αλυσίδα (ή ένα εύκαμπτο σχοινί ή ένα εύκαμπτο καλώδιο

ή κάτι παρόμοιο) μήκους S υπό την επίδραση της βαρύτητας. Η αλυσίδα θεωρείται ότι στηρίζεται σταθερά στα δύο άκρα της, δηλαδή στα σημεία της (a, y_a) και (b, y_b) με απόστασή τους d φυσικά μικρότερη από το μήκος S της αλυσίδας: $d < S$. Το πρόβλημα της αλυσειδούς καμπύλης παρουσιάζεται προσεγγιστικά και σε μια πάρα πολύ απλή, λειπή και εύκαμπτη γέφυρα που κρέμεται από τα δύο άκρα της (χωρίς δυνατότητα στρέψεώς της). Εκεί το σχήμα της γέφυρας (η καλούμενη αλυσειδής καμπύλη ή πιο απλά αλυσειδής) καθορίζεται μόνο από τη βαρύτητα.

Πιο συγκεκριμένα εδώ θα πρέπει η δυναμική ενέργεια V της αλυσίδας στην ισορροπία της να γίνει ελάχιστη σύμφωνα με την **αρχή της ελάχιστης συνολικής δυναμικής ενέργειας**. (Εδώ δεχόμαστε ότι δεν υπάρχει ενέργεια παραμορφώσεως της αλυσίδας, η οποία θεωρείται εύκαμπτη και ομογενής.) Άρα με ρ τη γραμμική πυκνότητα της αλυσίδας και g την επιτάχυνση της βαρύτητας θα πρέπει να έχουμε

$$V = V[y] = \int_a^b \rho g y \, ds(x) = \rho g \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} \, dx = \text{minimum}, \quad (7.8.7)$$

επειδή το στοιχειώδες μήκος ds της αλυσίδας είναι $ds = ds(x) = \sqrt{1 + y'^2} \, dx$, όπως γνωρίζουμε από τον τύπο (7.1.3), και η αντίστοιχη στοιχειώδης δυναμική ενέργεια είναι $dV = \rho g y \, ds$. Σημειώνουμε ότι εδώ υποθέσαμε πως η θετική διεύθυνση του ύψους y των σημείων της αλυσίδας είναι προς τα πάνω και όχι προς τη γη.

Και τώρα, επειδή το μήκος S της αλυσίδας δίνεται από τον τύπο (7.1.4), θα ισχύει

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} \, dx = S \quad (7.8.8)$$

εδώ βέβαια με το μήκος S της αλυσίδας γνωστό. Αυτός είναι ο περιορισμός μας στο παρόν ισοπεριμετρικό πρόβλημα (με τον περιορισμό σε μορφή ολοκληρώματος).

Εδώ έχουμε επομένως το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού $V = V[y]$, δηλαδή της δυναμικής ενέργειας της αλυσίδας, υπό τον περιορισμό (7.8.8) για το μήκος της S . Και επειδή η θετική σταθερά ρg δεν παίζει κανένα ρόλο κατά την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $V = V[y]$, μπορούμε να την αγνοήσουμε. Επομένως οι δύο συναρτήσεις $F(x, y, y')$ και $G(x, y, y')$ δίνονται εδώ από τις σχέσεις

$$F(x, y, y') = y \sqrt{1 + y'^2} \quad \text{και} \quad G(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (7.8.9)$$

Κατά συνέπεια με τη χρήση και του πολλαπλασιαστή Lagrange λ η σχέση (7.8.4) παίρνει στο παρόν πρόβλημα αλυσίδας (ή σχοινιού ή καλωδίου, κλπ.) τη μορφή

$$F^*(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y') = y \sqrt{1 + y'^2} + \lambda \sqrt{1 + y'^2} \quad (7.8.10)$$

και τελικά πιο απλά

$$F^*(x, y, y') = (y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2}. \quad (7.8.11)$$

Αυτή είναι λοιπόν η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο βοηθητικό συναρτησιακό $J^*[y]$ στη σχέση (7.8.3) κι εδώ που χρησιμοποιούμε το σύμβολο V της δυναμικής ενέργειας

$$V^*[y] = \int_a^b F^*(x, y, y') \, dx = \int_a^b (y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} \, dx. \quad (7.8.12)$$

Αυτό είναι το βοηθητικό συναρτησιακό που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τώρα πια χωρίς κανέναν περιορισμό. Δηλαδή ο περιορισμός (7.8.8) έχει ενσωματωθεί στο προς ελαχιστοποίηση συναρτησιακό $V^*[y]$ και δε χρειάζεται να ληφθεί υπόψη με ιδιαίτερο τρόπο κατά την ελαχιστοποίησή του. Στο τέλος όμως ο ίδιος περιορισμός (7.8.8) θα χρειασθεί να ληφθεί υπόψη για τον προσδιορισμό των σταθερών στη

λύση που θα βρεθεί, εδώ στην αλυσοειδή καμπύλη (ή πιο απλά στην αλυσοειδή) για το λόγο ότι το μήκος της S δεν έχει ληφθεί καθόλου υπόψη στο συναρτησιακό $V^*[y]$.

Φυσικά το επόμενο βήμα μας είναι να καταστρώσουμε τη σχετική εξίσωση των Euler-Lagrange, που είναι η διαφορική εξίσωση του προβλήματός μας. Πρόκειται ασφαλώς για την ήδη πολύ γνωστή μας εξίσωση (7.2.4), που την επαναλαμβάνουμε και εδώ με F^* αντί για F , οπότε ισχύει

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{με} \quad a \leq x \leq b. \quad (7.8.13)$$

Είναι εύκολη η εκτέλεση των σχετικών παραγωγίσεων στη συνάρτηση $F^*(x, y, y')$ στη σχέση (7.8.11). Προκύπτει αμέσως ότι

$$\sqrt{1 + y'^2} - \frac{d}{dx} \left[\frac{(y + \lambda)y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right] = 0. \quad (7.8.14)$$

Πρόκειται για μια συνήθη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως λόγω και της παραγώγου d/dx . Η λύση της προκύπτει (όχι και τόσο εύκολα, γιατί αυτή η διαφορική εξίσωση δεν είναι γραμμική) ότι έχει βασικά τη μορφή υπερβολικού συνημιτόνου:

$$y = y(x) = -\lambda + C_1 \cosh \frac{x + C_2}{C_1}. \quad (7.8.15)$$

Και φυσικά στη λύση αυτή πέρα από τη σταθερά λ (τον πολλαπλασιαστή Lagrange) έχουμε και δύο αυθαίρετες σταθερές: τις C_1 και C_2 . Τρεις λοιπόν είναι συνολικά οι προς προσδιορισμό σταθερές: οι λ , C_1 και C_2 . Αυτές μπορούν να προσδιορισθούν με βάση τον περιορισμό (7.8.8) για το μήκος S της αλυσίδας (που είναι γνωστό) και τις δύο συνοριακές συνθήκες $y(a) = y_a$ και $y(b) = y_b$, που είναι επίσης γνωστές. Ούτε και αυτοί οι υπολογισμοί είναι ιδιαίτερα εύκολοι, αλλ' είναι απόλυτα εφικτοί. Εν πάση περιπτώσει το σχήμα της εύκαμπτης αλυσίδας είναι της μορφής (7.8.15). Αυτό εδώ το σχήμα, που καλείται *αλυσοειδής καμπύλη* (ή πιο απλά *αλυσοειδής*), παίρνει η αλυσίδα (ή το σχοινί, το καλώδιο, κλπ.) υπό την επίδραση της βαρύτητας εδώ στο Λογισμό Μεταβολών με βάση την αρχή της ελάχιστης συνολικής δυναμικής ενέργειας $V = V[y]$ της αλυσίδας. Και έτσι προσδιορίσαμε με ενεργειακή μέθοδο την αλυσοειδή καμπύλη αντί να βασιστούμε για τον προσδιορισμό της στις εξισώσεις ισορροπίας της αλυσίδας, κάτι που είναι βέβαια επίσης απόλυτα εφικτό σαν μια εναλλακτική δυνατότητα. ▲

▼ Άσκηση E7.12 ■ Αλυσοειδής καμπύλη

Στην παρούσα άσκηση, που βασίζεται στην αμέσως προηγούμενη Εφαρμογή E7.13 για την αλυσοειδή καμπύλη (ή πιο απλά αλυσοειδή), ζητούνται επίσης: (α) Να επαληθευθεί ότι η υπερβολική συνάρτηση (7.8.15) είναι πραγματικά λύση της εξίσωσης των Euler-Lagrange (7.8.14). Θεωρούμε τώρα τα δύο άκρα της αλυσίδας ότι είναι τα δύο σημεία $(-d/2, 0)$ και $(d/2, 0)$ του άξονα Ox . Να ελεγχθεί ότι τότε θα πρέπει να ισχύει η σχέση $\cosh[(d - 2C_2)/(2C_1)] = \cosh[(d + 2C_2)/(2C_1)]$. Από αυτήν τη σχέση αποδεικνύεται ότι, επειδή $d > 0$, θα πρέπει να ισχύει $C_2 = 0$ και επομένως $y = -\lambda + C_1 \cosh(x/C_1)$. Υπό αυτές τις προϋποθέσεις ζητείται να αποδειχθούν: (β) Ότι $S = 2C_1 \sinh[d/(2C_1)]$. Άρα με γνωστό το μήκος S της αλυσίδας η άγνωστη σταθερά C_1 προκύπτει αριθμητικά από αυτήν την υπερβατική εξίσωση (με δύο αντίθετες τιμές: με συν που αντιστοιχεί σε ελάχιστο του V και με πλην που αντιστοιχεί σε μέγιστο). (γ) Ότι $\lambda = C_1 \cosh[d/(2C_1)]$ για τον πολλαπλασιαστή Lagrange λ . ▲

 **Άσκηση**

Ενότητα E7.8

E7.8.2

E7.8.2. Προβλήματα με συνηθισμένους περιορισμούς σε μορφή εξισώσεων

Πιο συχνά από τους ολοκληρωτικούς περιορισμούς που μελετήσαμε στην προηγούμενη Παράγραφο E7.8.1 παρουσιάζονται συνηθισμένοι (χωρίς ολοκληρώματα) περιορισμοί σε μορφή εξισώσεων κατά την ελαχιστοποίηση (ή γενικότερα κατά τη στασιμοποίηση) ενός συναρτησιακού J της μορφής (7.8.1), την επαναλαμβάνουμε

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx. \quad (7.8.16)$$

Ένας τέτοιος συνηθισμένος (χωρίς ολοκλήρωμα) περιορισμός έχει γενικά τη μορφή

$$G(x, y, y') = 0. \quad (7.8.17)$$

Δηλαδή η διαφορά με τον περιορισμό (7.8.2) είναι ότι τώρα η γνωστή συνάρτηση $G(x, y, y')$ δεν είναι πια η ολοκληρωτέα συνάρτηση σε ένα ολοκλήρωμα: είναι απλά το αριστερό μέλος σε μια εξίσωση. Και φυσικά και εδώ εμείς θέλουμε να προσδιορίσουμε την άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $J[y]$ στη σχέση (7.8.16), ενώ ταυτόχρονα πληροί και τον περιορισμό (7.8.17).

Και εδώ, όπως και πριν στα ισοπεριμετρικά προβλήματα με ολοκληρωτικούς περιορισμούς της μορφής (7.8.2), η κατάλληλη μέθοδος είναι αυτή που βασίζεται στον πολλαπλασιαστή Lagrange. Εδώ επιλέγεται ένας πολλαπλασιαστής Lagrange της μορφής $\lambda = \lambda(x)$ (δηλαδή αντίθετα με πριν δεν είναι απλά μια σταθερά, αλλά μια συνάρτηση του x) και θεωρείται ο βοηθητικός ολοκληρωτικός περιορισμός

$$\int_a^b G^*(x, y, y') dx = 0 \quad \text{με} \quad G^*(x, y, y') = \lambda(x)G(x, y, y'). \quad (7.8.18)$$

Αυτό συμβαίνει, επειδή, αφού $G(x, y, y') = 0$, σχέση (7.8.17), θα ισχύει επίσης η σχέση $G^*(x, y, y') = \lambda(x)G(x, y, y') = 0$ άρα και ο παραπάνω ολοκληρωτικός περιορισμός.

Επομένως το παρόν πρόβλημα με συνηθισμένο περιορισμό της μορφής (7.8.17) έχει αναχθεί στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα με ολοκληρωτικό περιορισμό της προηγούμενης Παραγράφου E7.8.1. Επομένως θα πρέπει και εδώ να ελαχιστοποιήσουμε (γενικότερα να στασιμοποιήσουμε) το νέο, το τροποποιημένο συναρτησιακό (7.8.3), το επαναλαμβάνουμε

$$J^*[y] = \int_a^b F^*(x, y, y') dx \quad (7.8.19)$$

με τη νέα, βοηθητική συνάρτηση (7.8.4), που τώρα παίρνει τη μορφή

$$F^*(x, y, y') = F(x, y, y') + G^*(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda G(x, y, y'), \quad (7.8.20)$$

όπου $y = y(x)$ και $\lambda = \lambda(x)$. Δηλαδή τώρα έχουμε δύο εξαρτημένες μεταβλητές: (α) την αρχική μας άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$ και (β) τη νέα, βοηθητική άγνωστη συνάρτηση $\lambda = \lambda(x)$, δηλαδή τον άγνωστο πολλαπλασιαστή Lagrange. Αυτός, επαναλαμβάνουμε, στην προηγούμενη Παράγραφο E7.8.1 ήταν απλά μια άγνωστη σταθερά, ενώ τώρα είναι μια άγνωστη συνάρτηση του x .

Επομένως τώρα έχουμε δύο εξισώσεις των Euler-Lagrange της μορφής (7.5.15), μία με $q_1 = y$ και μία με $q_2 = \lambda$, και προφανώς με F^* αντί για L και με x αντί για t σαν ανεξάρτητη μεταβλητή. Άρα θα ισχύουν οι δύο εξισώσεις των Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F^*}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial y'} \right) = 0, \quad (7.8.21)$$

η κύρια εξίσωσή μας, και

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \lambda'} \right) = 0, \quad \text{οπότε} \quad G(x, y, y') = 0. \quad (7.8.22)$$

Αυτό το διαπιστώνουμε αμέσως από τη σχέση (7.8.20), που ευτυχώς δεν περιέχει την παράγωγο $\lambda' = \lambda'(x)$. Δηλαδή η δεύτερη εξίσωση των Euler-Lagrange (η εξίσωση που αφορά στον πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda = \lambda(x)$) ανάγεται αμέσως στον ίδιο τον περιορισμό μας (7.8.17) χωρίς το $\lambda = \lambda(x)$. Ε απόλυτα λογικό είναι αυτό!

Καταλήξαμε λοιπόν εδώ σε ένα σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων: των εξισώσεων (7.8.21) και (7.8.22) δεξιά με δύο άγνωστες συναρτήσεις: τις $y = y(x)$ και $\lambda = \lambda(x)$. Η επίλυσή τους μας επιτρέπει τον προσδιορισμό της άγνωστης συναρτήσεως $y = y(x)$, η οποία ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό (7.8.16) με ταυτόχρονη πλήρωση φυσικά του περιορισμού (7.8.17). Και παράλληλα μας επιτρέπει βέβαια και τον προσδιορισμό του άγνωστου πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda = \lambda(x)$.

❖ Εφαρμογή Ενότητα Ε7.8

▼ Εφαρμογή Ε7.14 ■ Μόνιμη στρωτή ροή συνεκτικού ρευστού

Σε αυτήν την εφαρμογή θεωρούμε τη μόνιμη στρωτή διδιάστατη ροή ασυμπίεστου συνεκτικού ρευστού με συντελεστή συνεκτικότητας (ιξώδες) μ . Μια τέτοια ροή, που καθορίζεται από τις εξισώσεις Stokes (προβλημα Stokes), μπορεί να διατυπωθεί και με τη χρήση του Λογισμού Μεταβολών. Συγκεκριμένα σε αυτήν τη ροή σε επίπεδη περιοχή D αποδεικνύεται ότι θα πρέπει να ελαχιστοποιείται το συναρτησιακό

$$J[\mathbf{u}] \equiv J[u, v] = \iint_D \left[\mu(u_x^2 + v_y^2) + \frac{\mu}{2} (u_y + v_x)^2 - (f_x u + f_y v) \right] dx dy. \quad (7.8.23)$$

Εδώ το σύμβολο $\mathbf{u} = (u, v)$ δηλώνει την ταχύτητα του ρευστού και τα τέσσερα σύμβολα u_x, u_y, v_x και v_y δηλώνουν τις πρώτες μερικές παραγώγους των συνιστωσών της u και v . Επίσης f_x και f_y είναι οι καθολικές δυνάμεις (δυνάμεις μάζας) οι οποίες ασκούνται στο ρευστό. Στο παρόν πρόβλημα ροής ισχύει βέβαια και η εξίσωση της συνεχειας. Εδώ που υποθέσαμε ασυμπίεστο ρευστό αυτή έχει τη γνωστή μας μορφή

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{και} \quad \text{ισοδύναμα} \quad u_x + v_y = 0. \quad (7.8.24)$$

Επομένως εδώ έχουμε δύο άγνωστες συναρτήσεις: τις δύο συνιστώσες u και v της ταχύτητας \mathbf{u} του ρευστού και ένα συνηθισμένο (όχι ολοκληρωτικό) περιορισμό: την εξίσωση της συνεχειας (7.8.24). Αυτό το πρόβλημα Ρευστομηχανικής αναφέρεται στην παρούσα μορφή του και ανάγεται σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με τη μέθοδο του πολλαπλασιαστή Lagrange $\lambda = \lambda(x, y)$ από το Reddy.⁶

Από το συναρτησιακό $J[\mathbf{u}] \equiv J[u, v]$ στη σχέση (7.8.23) προκύπτει αμέσως πως η σχετική ολοκληρωτέα συνάρτηση F έχει τη μορφή

$$F = F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = \mu(u_x^2 + v_y^2) + \frac{\mu}{2} (u_y + v_x)^2 - (f_x u + f_y v). \quad (7.8.25)$$

Στη συνέχεια από τον περιορισμό (7.8.24), την εξίσωση της συνεχειας, παρατηρούμε αμέσως ότι η αντίστοιχη συνάρτηση G σε αυτόν τον περιορισμό έχει τη μορφή

$$G = G(x, y, u_x, v_y) = u_x + v_y. \quad (7.8.26)$$

Επομένως με βάση τα προηγούμενα χρησιμοποιούμε εδώ ένα τροποποιημένο συναρτησιακό της μορφής (7.8.19) και εδώ που έχουμε δύο άγνωστες συναρτήσεις, τις δύο συνιστώσες u και v της ταχύτητας \mathbf{u} του ρευστού στην παρούσα στρωτή ροή,

$$J[\mathbf{u}] \equiv J[u, v] = \iint_D F^*(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) dx dy. \quad (7.8.27)$$

⁶Reddy, J. N. (1986), *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill, New York, pp. 172-174.

Στο συναρτησιακό αυτό η βοηθητική συνάρτηση F^* δίνεται από τον τύπο (7.8.20), που στην παρούσα εφαρμογή, όπου λαμβάνονται υπόψη και οι δύο σχέσεις (7.8.25) και (7.8.26) για τις συναρτήσεις F και G αντίστοιχα, παίρνει τελικά τη μορφή

$$F^*(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = \mu(u_x^2 + v_y^2) + \frac{\mu}{2}(u_y + v_x)^2 - (f_x u + f_y v) + \lambda(u_x + v_y). \quad (7.8.28)$$

Σημειώνουμε βέβαια ότι εδώ που βρισκόμαστε στις δύο διαστάσεις (διδιάστατη ροή) ο πολλαπλασιαστής Lagrange είναι της μορφής $\lambda = \lambda(x, y)$ ακριβώς όπως συμβαίνει και με τις δύο συνιστώσες $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ της ταχύτητας \mathbf{u} του ρευστού.

Τώρα λοιπόν που έχουμε εδώ τρεις άγνωστες συναρτήσεις $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ και $\lambda = \lambda(x, y)$, θα έχουμε επίσης τρεις εξισώσεις των Euler-Lagrange αντί για τις δύο εξισώσεις (7.8.21) και (7.8.22). Αυτές είναι στο παρόν πρόβλημα στρωτής ροής

$$\frac{\partial F^*}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F^*}{\partial u_y} \right) = 0, \quad (7.8.29)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^*}{\partial v_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F^*}{\partial v_y} \right) = 0, \quad (7.8.30)$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F^*}{\partial \lambda_y} \right) = 0 \quad (7.8.31)$$

με τους δείκτες x και y στις άγνωστες συναρτήσεις, επαναλαμβάνουμε, να δηλώνουν και εδώ μερικές παραγωγίσεις αυτών των συναρτήσεων.

Και τώρα απλά με αντικατάσταση της πιο πάνω εκφράσεως (7.8.28) για τη νέα, βοηθητική συνάρτηση F^* σε αυτές τις τρεις εξισώσεις των Euler-Lagrange προκύπτει πολύ εύκολα το σύστημα των τριών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους

$$-f_x - \frac{\partial}{\partial x} (2\mu u_x + \lambda) - \frac{\partial}{\partial y} [\mu(u_y + v_x)] = 0, \quad (7.8.32)$$

$$-f_y - \frac{\partial}{\partial x} [\mu(u_y + v_x)] - \frac{\partial}{\partial y} [2\mu v_y + \lambda] = 0, \quad (7.8.33)$$

$$u_x + v_y = 0. \quad (7.8.34)$$

Παρατηρούμε ότι προφανώς η τρίτη αυτή εξίσωση (7.8.34) είναι η ίδια η εξίσωση της συνεχείας (7.8.24) όπως και αναμέναμε. Οι δύο πρώτες από αυτές εδώ τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους γράφονται εύκολα και στις τελικές τους μορφές

$$-\mu(2u_{xx} + u_{yy} + v_{xy}) - \lambda_x = f_x, \quad (7.8.35)$$

$$-\mu(u_{xy} + v_{xx} + 2v_{yy}) - \lambda_y = f_y. \quad (7.8.36)$$

Συγκρίνουμε τώρα αυτές τις δύο διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους στο παρόν πρόβλημα διδιάστατης στρωτής ροής με τις αντίστοιχες εξισώσεις που προκύπτουν με τον κλασικό τρόπο, δηλαδή χωρίς το Λογισμό Μεταβολών, και είναι

$$-\mu(2u_{xx} + u_{yy} + v_{xy}) + p_x = f_x, \quad (7.8.37)$$

$$-\mu(u_{xy} + v_{xx} + 2v_{yy}) + p_y = f_y. \quad (7.8.38)$$

Εδώ το p δηλώνει την πίεση του ρευστού και τα p_x και p_y δηλώνουν τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους στο παρόν πρόβλημα διδιάστατης στρωτής ροής. Παρατηρείται έτσι ότι ο πολλαπλασιαστής Lagrange $\lambda = \lambda(x, y)$ δίνεται από τη σχέση $\lambda = -p$, όπως σημειώνει και ο Reddy στο βιβλίο του που ήδη αναφέραμε.⁷ Τόσο απλά! ▲

⁷Reddy, J. N. (1986), *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill, New York, p. 174.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε8

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ RAYLEIGH–RITZ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο Κεφάλαιο αυτό Ε8 συνεχίζουμε το προηγούμενο Κεφάλαιο Ε7. Εδώ αναφερόμαστε στην ενδιαφέρουσα προσεγγιστική μέθοδο των Rayleigh–Ritz για την ελαχιστοποίηση (γενικότερα τη στασιμοποίηση) ενός συναρτησιακού J ή Π , όπως είναι τα συναρτησιακά που συναντήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο Ε7. Σύμφωνα με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz θεωρούμε την άγνωστη συνάρτηση στο ολοκλήρωμα του συναρτησιακού που θέλουμε να προσδιορίσουμε σαν γραμμικό συνδυασμό (με πεπερασμένο άθροισμα) γραμμικά ανεξάρτητων και λίγο–πολύ απλών συναρτήσεων που επαληθεύουν μάλιστα τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Οι συντελεστές σε αυτόν το γραμμικό συνδυασμό είναι άγνωστοι και πρέπει να προσδιορισθούν. Αυτό συμβαίνει με μηδενισμό όλων των πρώτων μερικών παραγώγων του συναρτησιακού ως προς όλους αυτούς τους συντελεστές. Συνήθως μάλιστα στα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού (όπως π.χ. σε δοκούς) προκύπτει ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων που είναι πολύ εύκολο να επιλυθεί.

Αυτή η μέθοδος των Rayleigh–Ritz αποτελεί μια εντελώς διαφορετική δυνατότητα ελαχιστοποίησης ενός συναρτησιακού σε σύγκριση της με τη μέθοδο του προηγούμενου κεφαλαίου. Εκεί χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της αναγωγής του προβλήματος σε σχετική διαφορική εξίσωση των Euler–Lagrange είτε συνήθη στη μία διάσταση είτε με μερικές παραγώγους στις δύο, τρεις ή τέσσερις (χώρος και χρόνος) διαστάσεις.

Μετά από τη συνοπτική αναφορά της θεωρίας παρουσιάζονται και δύο εφαρμογές της μεθόδου των Rayleigh–Ritz. Η πρώτη εφαρμογή αφορά στο πρόβλημα της δοκού υπό κάθετη κατανεμημένη φόρτιση. Το πρόβλημα αυτό λύνεται με την προσεγγιστική μέθοδο των Rayleigh–Ritz πρώτα για αμφίπακτη δοκό υπό ομοιόμορφη (σταθερή) φόρτιση και στη συνέχεια υπό τριγωνική φόρτιση. Και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιούνται στις προσεγγίσεις της μεθόδου απλές πολυωνμικές συναρτήσεις που πληρούν τις συνοριακές συνθήκες στις λακτώσεις της αμφίπακτης δοκού. Έτσι βρίσκεται εύκολα η λύση του προβλήματος. Στη συνέχεια αναφέρεται σε άσκηση και η περίπτωση της αμφιέριστης δοκού πάλι υπό ομοιόμορφη φόρτιση. Εκεί όμως χρησιμοποιούνται αναγκαστικά τριγωνομετρικές και όχι πια πολυωνμικές συναρτήσεις.

Η δεύτερη εφαρμογή αφορά σε ένα διδιάστατο πρόβλημα και συγκεκριμένα στο πρόβλημα της ροής ασυμπίεστου Νευτώνειου ρευστού σε αγωγό ορθογωνικής διατομής. Και αυτό το πρόβλημα λύνεται εδώ προσεγγιστικά με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz με χρήση κατάλληλων απλών πολυωνμικών συναρτήσεων στις δύο διαστάσεις για την ελαχιστοποίηση του σχετικού συναρτησιακού. Αυτό έχει άγνωστη συνάρτηση την ταχύτητα του ρευστού κατά μήκος του αγωγού. Με χρήση μάλιστα της προσεγγιστικής λύσεως που προκύπτει υπολογίζεται και η παροχή του Νευτώνειου ρευστού στον αγωγό. Σημειώνεται μάλιστα ότι εντελώς ανάλογο πρόβλημα παρουσιάζεται στη στρέψη ορθογωνικής ράβδου στη Μηχανική των Υλικών.

Το συμπέρασμα που συνάγεται από αυτές τις εφαρμογές είναι ότι η μέθοδος των Rayleigh–Ritz είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα και σχετικά εύκολη στη χρήση της προσεγγιστική μέθοδος για την επίλυση αρκετών προβλημάτων του Πολιτικού Μηχανικού. Και μάλιστα πολύ συχνά η λύση που προκύπτει έχει αρκετά καλή ακρίβεια ακόμη και για πολύ μικρό αριθμό όρων στο πεπερασμένο άθροισμα που χρησιμοποιείται.

E8.1

E8.1. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ RAYLEIGH-RITZ

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο E7 αναφερθήκαμε εκτενώς στην ελαχιστοποίηση (γενικότερα στη στασιμοποίηση) συναρτησιακών J (ή με διαφορετικό σύμβολο Π), π.χ. συναρτησιακών των μορφών

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad J[y] = \int_a^b F(x, y, y', y'') dx \quad \text{με } y = y(x),$$

$$J[u] = \iint_D F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy \quad \text{με } u = u(x, y), \quad u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y := \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (8.1.1)$$

κλπ. Για την ελαχιστοποίηση ενός τέτοιου συναρτησιακού J προσδιορίσαμε στην πρώτη περίπτωση και απλά αναφέραμε στις υπόλοιπες περιπτώσεις τη σχετική εξίσωση των Euler-Lagrange. Αυτή είναι βέβαια μια διαφορική εξίσωση είτε συνήθης είτε με μερικές παραγώγους. Και μάλιστα η εξίσωση των Euler-Lagrange αποτελεί μια αναγκαία συνθήκη για την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού J (ή με άλλο σύμβολο Π). Και γενικότερα για τη στασιμοποίηση του συναρτησιακού J και πάλι θα πρέπει να ισχύει η ίδια ακριβώς εξίσωση των Euler-Lagrange.

Επομένως κάθε φορά που είναι αναγκαία για μας η ελαχιστοποίηση (γενικότερα η στασιμοποίηση) ενός συναρτησιακού J οδηγούμαστε από αυτό το συναρτησιακό στην αντίστοιχη εξίσωση των Euler-Lagrange, που μάθαμε ήδη να την κατασκευάζουμε. Και στη συνέχεια αυτήν την εξίσωση τη λύνουμε σύμφωνα με τις γνώσεις που έχουμε ήδη αποκτήσει για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων από τα Μέρη Α και Β των *Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς* συνήθων και με μερικές παραγώγους αντίστοιχα. Και δεν παραλείπουμε να αναφέρουμε ότι η ελαχιστοποίηση ενός συναρτησιακού J προκύπτει πέρα από ποικίλα προβλήματα της Γεωμετρίας, της Επιστήμης του Μηχανικού, κλπ. και από γενικές φυσικές αρχές. Και αναφερθήκαμε ήδη στην *αρχή της ελάχιστης συνολικής δυναμικής ενέργειας* (στις Ενότητες E7.3 και E7.4 του προηγούμενου Κεφαλαίου E7) και στην *αρχή της ελάχιστης δράσεως του Hamilton* (στις Ενότητες E7.5 και E7.6 του ίδιου κεφαλαίου).

Ωραία! Είναι κατανοητά αυτά. Και λοιπόν τι διαφορετικό κάνουμε σε αυτό το Κεφάλαιο E8, δηλαδή με τη μέθοδο των Rayleigh-Ritz (1908); Ναι, εδώ με τη μέθοδο των Rayleigh-Ritz, που συχνά καλείται απλά μέθοδος του Ritz, εργαζόμαστε με έναν τελείως διαφορετικό τρόπο. Συγκεκριμένα θέλοντας τώρα να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό J , π.χ. σε μία από τις σχέσεις (8.1.1), απλά αδιαφορούμε για τη σχετική εξίσωση των Euler-Lagrange ή τις σχετικές εξισώσεις των Euler-Lagrange αν έχουμε πάνω από μία άγνωστες συναρτήσεις. Το τελευταίο συμβαίνει π.χ. στα πολυώροφα ιδεατά κτίρια διατμήσεως (Ενότητα E7.6 του Κεφαλαίου E7).

Πιο απλά με τη μέθοδο των Rayleigh-Ritz παραμένουμε στο συναρτησιακό J και επιχειρούμε να το ελαχιστοποιήσουμε (ή γενικότερα να το στασιμοποιήσουμε) κατευθείαν στην αρχική του μορφή. Δηλαδή δουλεύουμε με το ίδιο το συναρτησιακό J . Μόνο που εδώ με τη μέθοδο των Rayleigh-Ritz σε αντίθεση με την εξίσωση των Euler-Lagrange εργαζόμαστε προσεγγιστικά. Δηλαδή προσεγγίζουμε τη ζητούμενη άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ ή $u(x, y)$, κλπ. που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό J με βάση ορισμένες λίγο πολύ απλές και συνήθως πολυωνυμικές ή τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Αυτές τις επιλέγουμε κατάλληλα, έτσι ώστε γενικά να πληροούνται οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν. Μια πολύ μικρή εισαγωγή στη μέθοδο των

Rayleigh-Ritz κάναμε ήδη στην Ενότητα B12.1 του Κεφαλαίου B12 του Μέρους B. Εδώ θα την επαναλάβουμε από την αρχή και μάλιστα σε πολύ μεγαλύτερη έκταση.

Θεωρούμε λοιπόν κατ' αρχήν το πρώτο ή το δεύτερο συναρτησιακό $J[y]$ στις σχέσεις (8.1.1), που είναι και τα δύο στη μία διάσταση x . Αυτό το συναρτησιακό $J[y]$ εμείς θέλουμε να το ελαχιστοποιήσουμε (και πιο γενικά να το στασιμοποιήσουμε). Και για την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ που θέλουμε να προσδιορίσουμε απλά υποθέτουμε μια απλή προσεγγιστική μορφή της. Συγκεκριμένα υποθέτουμε μια μορφή γραμμικού συνδυασμού

$$y(x) \approx y_n(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x) \quad (8.1.2)$$

πεπερασμένου αριθμού n γνωστών συναρτήσεων $\varphi_k(x)$ που τις επιλέγουμε κατάλληλα. Και λέγοντας τις επιλέγουμε κατάλληλα, εννοούμε τις επιλέγουμε έτσι ώστε

1. Να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.
2. Να είναι σχετικά απλές συναρτήσεις. (Χρησιμοποιούνται κυρίως πολυωνυμικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις.)
3. Να μπορούν να εκφράσουν αρκετά καλά την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$.
4. Να πληρούν όλες τις συνοριακές συνθήκες. Εντούτοις ειδικότερα σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού αποδεικνύεται ότι αρκεί να πληρούν απαραίτητα τουλάχιστον όλες τις συνοριακές συνθήκες που είναι γεωμετρικής φύσεως, δηλαδή όλες τις γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες. Εάν βέβαια είναι δυνατόν, χρήσιμο είναι να πληρούν επιπλέον και τις συνοριακές συνθήκες που είναι μηχανικής φύσεως, δηλαδή και τις στατικές συνοριακές συνθήκες.

Και φυσικά στη συνέχεια, αφού οι συναρτήσεις $\varphi_k(x)$ μας είναι τώρα γνωστές (εμείς τις επιλέξαμε κατάλληλα με βάση τα τέσσερα παραπάνω κριτήρια!), μας απομένει ο προσδιορισμός των άγνωστων συντελεστών c_k στην πιο πάνω προσέγγιση (8.1.2).

Τώρα για τον προσδιορισμό των συντελεστών c_k σ' αυτήν την προσέγγιση (8.1.2) η διαδικασία είναι πολύ απλή τουλάχιστον θεωρητικά. Με αντικατάσταση της προσεγγίσεως $y_n(x)$ της άγνωστης συναρτήσεως $y(x)$ από την παραπάνω σχέση (8.1.2) στο συναρτησιακό $J = J[y]$ της πρώτης ή της δεύτερης σχέσεως (8.1.1) αυτό εδώ το συναρτησιακό παίρνει τη μορφή

$$K(c_1, c_2, \dots, c_n) \equiv J[y_n] = \int_a^b F(x, y_n, y_n') dx \quad \text{ή πιο γενικά} \quad \int_a^b F(x, y_n, y_n', y_n'') dx. \quad (8.1.3)$$

Και ασφαλώς για να γίνει ελάχιστο (ή μέγιστο ή γενικότερα στάσιμο) το συναρτησιακό $J[y_n]$, που εξαρτάται από τους n συντελεστές c_k , θα πρέπει βέβαια και οι n μερικές παράγωγοι της συναρτήσεως $K(c_1, c_2, \dots, c_n) \equiv J[y_n]$ να μηδενίζονται. Αυτό το γνωρίζουμε από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά I. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει

$$\frac{\partial K}{\partial c_1} = \frac{\partial K}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial K}{\partial c_n} = 0 \quad \text{με} \quad K = K(c_1, c_2, \dots, c_n). \quad (8.1.4)$$

Έτσι πρέπει σύμφωνα με τις γνώσεις μας για ελάχιστο (ή μέγιστο ή γενικότερα σημείο στασιμότητας) μιας συναρτήσεως $K(c_1, c_2, \dots, c_n)$ με n ανεξάρτητες μεταβλητές c_1, c_2, \dots, c_n . Άρα η ισχύς αυτών των εξισώσεων (8.1.4) είναι μία αναγκαία συνθήκη για την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $J[y_n]$ ως προς τη συνάρτηση $y_n = y_n(x)$ που προσεγγίζει τη ζητούμενη άγνωστη συνάρτηση $y = y(x)$, δηλαδή $y(x) \approx y_n(x)$.

Και τι γίνεται τώρα στη μέθοδο των Rayleigh-Ritz; Απλά θεωρούμε πρώτα μια άπειρη ακολουθία κατάλληλων συναρτήσεων $\varphi_n(x)$, όπως ήδη αναφέραμε, οι οποίες

έχουν τις καλές ιδιότητες που επίσης αναφέραμε. Και στη συνέχεια με βάση αυτές τις συναρτήσεις $\varphi_n(x)$ δημιουργούμε και μια δεύτερη ακολουθία συναρτήσεων

$$y_n(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x) \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (8.1.5)$$

Γενικά ξεκινάμε με $n = 1$ και μετά αυξάνουμε το n . Αυτές εδώ οι συναρτήσεις $y_n(x)$ προσεγγίζουν (γενικά καλύτερα όσο μεγαλώνει ο αριθμός n των όρων τους) την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ που ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό $J[y]$. Και επίσης αυτό που είναι σημαντικό και το επαναλαμβάνουμε κι εδώ είναι ότι οι n άγνωστοι συντελεστές c_k σε τούτη την προσέγγιση $y_n(x)$ προσδιορίζονται από τις n εξισώσεις (8.1.4). Αυτές είναι βέβαια αναγκαίες εξισώσεις για την ελαχιστοποίηση της συναρτήσεως $K(c_1, c_2, \dots, c_n) \equiv J[y_n]$ στη σχέση (8.1.3).

Αν όλα πάνε καλά, με μερικές διαδοχικές προσεγγίσεις $y_n(x)$ (με $n = 1, 2, \dots$) της άγνωστης συναρτήσεως $y(x)$ θα έχουμε φθάσει σε μια πολύ καλή προσέγγισή της. Δηλαδή τελικά το σφάλμα

$$\varepsilon_n(x) = y(x) - y_n(x) \quad (8.1.6)$$

της προσεγγίσεως $y_n(x)$ με κάποιον τρόπο τελικής εκτιμήσεως του θα είναι επαρκώς μικρό. Για παράδειγμα, αυτή η εκτίμηση μπορεί να γίνει με τη χρήση της μέγιστης ή άπειρης ή ομοιόμορφης νόρμας

$$\|\varepsilon_n\|_\infty := \max_{a \leq x \leq b} |\varepsilon_n(x)| = \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - y_n(x)| \quad (8.1.7)$$

ή της τετραγωνικής νόρμας (που υπολογιστικά είναι μερικές φορές πιο εύχρηστη)

$$\|\varepsilon_n\|_2 := \sqrt{\int_a^b \varepsilon_n^2(x) dx} = \sqrt{\int_a^b [y(x) - y_n(x)]^2 dx}. \quad (8.1.8)$$

Θα προκύψει μικρό σφάλμα $\varepsilon_n(x)$ ιδίως με μια κατάλληλη επιλογή της ακολουθίας των συναρτήσεων $\varphi_k(x)$ που χρησιμοποιούμε. Και γενικά, επαναλαμβάνουμε, στη μέθοδο των Rayleigh-Ritz οι συναρτήσεις $\varphi_k(x)$ είναι απλές συναρτήσεις. Συνήθως μάλιστα είναι πολυωνυμικές ή τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Αυτή είναι λοιπόν η μέθοδος των Rayleigh-Ritz για την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού J , εδώ $J[y]$. Την παρουσιάζουμε συνοπτικά σε τέσσερα απλά βήματα:

1. Επιλογή των συναρτήσεων $\varphi_k(x)$, έτσι ώστε να είναι σχετικά απλές και επίσης να πληρούν όλες τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος που εξετάζουμε ή τουλάχιστον (σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού) όλες τις γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες.
2. Σχηματισμός της αντίστοιχης συναρτήσεως-προσεγγίσεως $y_n(x)$ στη μορφή γραμμικού συνδυασμού (με πεπερασμένο άθροισμα) των συναρτήσεων $\varphi_k(x)$ με βάση τη σχέση (8.1.2) αρχικά συνήθως για $n = 1$.
3. Υπολογισμός των αρχικά άγνωστων συντελεστών c_k στην προσέγγιση (8.1.2) με βάση τις αλγεβρικές (όχι βέβαια διαφορικές!) εξισώσεις μερικών παραγώγων (8.1.4) αρχικά συνήθως για $n = 1$. Άρα θα υπάρξει πλήρης καθορισμός της συναρτήσεως-προσεγγίσεως $y_n(x)$ αρχικά για $n = 1$.
4. Επανάληψη των βημάτων 2 και 3 για $n = 2, 3, \dots$ μέχρι να υπάρξει επαρκής σύγκλιση της μεθόδου, δηλαδή το σφάλμα $\varepsilon_n(x) = y(x) - y_n(x)$ στη σχέση (8.1.6) να είναι αρκετά μικρό. Η λέξη μικρό αναφέρεται σε κάποια εκτίμηση αυτού του σφάλματος, π.χ. στην εκτίμησή του (8.1.7) ή (8.1.8). Συχνά επαναλαμβάνουμε αυτήν τη διαδικασία μικρό αριθμό φορών, π.χ. μέχρι $n = 2$ ή $n = 3$.

Μάλιστα μερικές φορές δεν την επαναλαμβάνουμε καθόλου και αρκούμαστε σε έναν όρο με $n = 1$ ή πιο συχνά δουλεύουμε κατευθείαν με $n = 2$ ή $n = 3$.

Υποθέτουμε ότι στη μέθοδο των Rayleigh-Ritz οδηγούμαστε σε ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $J[y]$ χρησιμοποιώντας την ακολουθία των συναρτήσεων $y_n(x)$, που ορίζονται από τις σχέσεις (8.1.5). Τότε πρέπει βέβαια να ισχύουν οι ανισότητες

$$J[y_1] \geq J[y_2] \geq J[y_3] \geq \dots \geq J[y_n] \quad \text{με } n = 4, 5, \dots \quad (8.1.9)$$

Και αυτό το γεγονός μπορούμε να το επαληθεύουμε, αν θέλουμε, κατά τη διάρκεια των υπολογισμών μας. Και φυσικά η πραγματικά ελάχιστη τιμή J_{\min} του συναρτησιακού $J[y]$ είναι αυτή που προκύπτει για $n \rightarrow \infty$ (υποθέτοντας εδώ τη σύγκλιση της μεθόδου για $n \rightarrow \infty$), δηλαδή για την αληθινή λύση $y(x)$ του προβλήματός μας.

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση Ε8.1:** Στη μέθοδο των Rayleigh-Ritz, την οποία εξετάζουμε εδώ, ο προσδιορισμός των αρχικά άγνωστων n συντελεστών c_k γίνεται, όπως ήδη είδαμε, από το σύστημα των n γενικά μη γραμμικών εξισώσεων (8.1.4). Η πλήρωσή τους είναι αναγκαία για την ελαχιστοποίηση του σχετικού συναρτησιακού $J[y_n]$. Όμως σε πάρα πολλές περιπτώσεις προβλημάτων του Πολιτικού Μηχανικού η συνάρτηση $F(x, y, y')$ και γενικότερα $F(x, y, y', y'')$ στο συναρτησιακό $J[y]$ είναι της μορφής

$$F(x, y, y', y'') = a_2 y''^2(x) + a_1 y'^2(x) + a_0 y^2(x) + f(x)y(x) \quad (8.1.10)$$

με τη συνάρτηση $f(x)$ εδώ γνωστή. Και αυτή είναι η περίπτωση στο προηγούμενο Κεφάλαιο Ε7 στα προβλήματα καλωδίου (Ενότητα Ε7.3), δοκού (Ενότητα Ε7.4), μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως (Εφαρμογή Ε7.7 στην Ενότητα Ε7.6), κλπ. Και σε αυτήν την ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση οι μερικές παραγωγίσεις (8.1.4) στο σύστημα αυτών των εξισώσεων για τον προσδιορισμό των συντελεστών c_k στην προσέγγιση $y_n(x)$ στη σχέση (8.1.2) οδηγούν σε εξισώσεις πρώτου βαθμού ως προς τους άγνωστους συντελεστές c_k . Δηλαδή οι n συντελεστές c_k προσδιορίζονται από ένα κοινό σύστημα n γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Και ασφαλώς διευκολύνει πάρα πολύ τον Πολιτικό Μηχανικό αυτή η κατάσταση. Πού να κάθεται να λύνει σύστημα n μη γραμμικών εξισώσεων, όπως είναι γενικά οι n εξισώσεις (8.1.4); ▲

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση Ε8.2:** Ασφαλώς η πιο πάνω περιγραφή της μεθόδου των Rayleigh-Ritz γενικεύεται και σε συναρτησιακά J στο χώρο των δύο ή τριών ή τεσσάρων διαστάσεων. Απλά εκεί οι συναρτήσεις φ_k που χρησιμοποιούμε στις προσεγγίσεις (8.1.2) θα είναι και αυτές στον αντίστοιχο χώρο των δύο ή τριών ή τεσσάρων διαστάσεων. Για παράδειγμα, στο χώρο των δύο διαστάσεων (x, y) , όπως συμβαίνει με το συναρτησιακό $J[u]$ στην τελευταία σχέση (8.1.1), οι προσεγγίσεις (8.1.2) της άγνωστης συναρτήσεως $u = u(x, y)$ παίρνουν τώρα τη διδιάστατη μορφή τους

$$u(x, y) \approx u_n(x, y) = c_1 \varphi_1(x, y) + c_2 \varphi_2(x, y) + \dots + c_n \varphi_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x, y). \quad (8.1.11)$$

Και ανάλογα εργαζόμαστε στο χώρο των τριών διαστάσεων, εκεί βέβαια με (x, y, z) αντί απλά (x, y) σε όλες τις συναρτήσεις μας. Ναι, έτσι είναι, αλλά οι εξισώσεις (8.1.4) συνεχίζουν να ισχύουν κι εδώ. Τίποτε το ουσιαστικό δεν αλλάζει. Τόσο απλή είναι αυτή η γενίκευση της μεθόδου των Rayleigh-Ritz! ▲

E8.2

E8.2. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΚΑΜΨΕΩΣ ΔΟΚΟΥ

E8.2.1

E8.2.1. Ομοιόμορφη (σταθερή) φόρτιση αμφίπακτης δοκού

Σαν μια απλή εφαρμογή της μεθόδου των Rayleigh-Ritz θεωρούμε το πρόβλημα της κάμψεως αμφίπακτης δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI υπό ομοιόμορφη (σταθερή) κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x) = p_0$. Άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού. Σύμφωνα με την *αρχή της ελάχιστης συνολικής δυναμικής ενέργειας* θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί το κατάλληλο συναρτησιακό $\Pi[v]$. Αυτό το συναρτησιακό μας είναι γνωστό από την Ενότητα E7.4 του προηγούμενου Κεφαλαίου E7. Συγκεκριμένα θα πρέπει να ισχύει η σχέση (7.4.1)

$$\Pi[v] = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} v''^2(x) - p(x)v(x) \right] dx = \text{minimum} \quad (8.2.1)$$

μαζί βέβαια με τις κατάλληλες τέσσερις συνοριακές συνθήκες (εδώ συνθήκες πακτώσεως) στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της δοκού. Στην Ενότητα E7.4 επιθυμώντας την ελαχιστοποίηση του πιο πάνω συναρτησιακού $\Pi[v]$, οδηγηθήκαμε στη γνωστή μας διαφορική εξίσωση της δοκού (7.4.10). Αυτή είναι η εξίσωση των Euler-Lagrange στο παρόν πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτησιακού. Την υπενθυμίζουμε

$$EIv''''(x) = p(x). \quad (8.2.2)$$

Εδώ εργαζόμαστε με έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο. Συγκεκριμένα εργαζόμαστε με τη μέθοδο των Rayleigh-Ritz πάνω στο ίδιο το συναρτησιακό $\Pi[v]$ στη σχέση (8.2.1) που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε. Και μάλιστα εδώ κάνουμε κατευθείαν ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού. Στην περίπτωση μας που θεωρούμε μια αμφίπακτη δοκό υπό ομοιόμορφη (σταθερή) κατανεμημένη φόρτιση $p(x) = p_0$ το συναρτησιακό $\Pi[v]$ στη σχέση (8.2.1) παίρνει την ελάχιστη πιο απλή μορφή του

$$\Pi[v] = \int_0^L \left[\frac{EI}{2} v''^2(x) - p_0 v(x) \right] dx = \text{minimum}. \quad (8.2.3)$$

Και φυσικά για το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού πρέπει να ισχύουν επιπλέον και οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες πακτώσεως στα δύο άκρα της αμφίπακτης δοκού

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(L) = 0 \quad \text{και} \quad v'(L) = 0. \quad (8.2.4)$$

Επιπλέον εδώ εργαζόμαστε προσεγγιστικά σύμφωνα με τη θεωρία της μεθόδου των Rayleigh-Ritz, που ήδη την εκθέσαμε συνοπτικά στην προηγούμενη Ενότητα E8.1.

Και τώρα ήρθε πια η ώρα να επιλέξουμε τις κατάλληλες συναρτήσεις $\varphi_k(x)$ στις προσεγγίσεις $v_n(x)$ του βέλους κάμψεως $v(x)$ της αμφίπακτης δοκού που σχεδιάζουμε να κάνουμε με τη μέθοδο των Rayleigh-Ritz. Σαν τέτοιες συναρτήσεις $\varphi_k(x)$ στις προσεγγίσεις $v_n(x)$ επιλέγουμε εδώ τις συναρτήσεις

$$\varphi_1(x) = x^2(L-x)^2, \quad \varphi_2(x) = x^3(L-x)^2, \quad \varphi_3(x) = x^4(L-x)^2 \quad (8.2.5)$$

και γενικά

$$\varphi_k(x) = x^{k+1}(L-x)^2 \quad \text{με} \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.2.6)$$

Πρόκειται βέβαια για πολύ απλές και επίσης γραμμικά ανεξάρτητες συναρτήσεις. Και το κυριότερο για συναρτήσεις που πληρούν και τις τέσσερις πιο πάνω συνοριακές συνθήκες (8.2.4). Αυτό είναι προφανές από τους δύο παράγοντες x^2 και $(L-x)^2$

που είναι παρόντες σε όλες αυτές τις συναρτήσεις $\varphi_k(x)$. Και βέβαια αυτοί είναι οι κατάλληλοι παράγοντες για τις δύο πακτώσεις στο αριστερό άκρο και στο δεξιό άκρο της δοκού αντίστοιχα. Άρα είμαστε απόλυτα ήσυχτοι με τις τέσσερις ομογενείς συνοριακές συνθήκες (8.2.4) στις δύο πακτώσεις $x = 0$ και $x = L$ της αμφίπακτης δοκού. Με την επιλογή (8.2.6) των συναρτήσεων $\varphi_k(x)$ αυτές πληρούνται αυτόματα!

Επομένως βασιζόμαστε σ' αυτές τις συναρτήσεις $\varphi_k(x)$ για τις προσεγγίσεις $v_n(x)$ του βέλους κάμψεως $v(x)$ της αμφίπακτης δοκού μας με βάση τη γενική σχέση (8.1.5) (γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\varphi_k(x)$ στη μορφή ενός πεπερασμένου αθροίσματος με n όρους). Έτσι δημιουργούμε την ακολουθία των συναρτήσεων

$$v_1(x) = c_1\varphi_1(x) = c_1x^2(L-x)^2, \quad (8.2.7)$$

$$v_2(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = (c_1 + c_2x)x^2(L-x)^2, \quad (8.2.8)$$

$$v_3(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + c_3\varphi_3(x) = (c_1 + c_2x + c_3x^2)x^2(L-x)^2, \quad (8.2.9)$$

κλπ. Παντού είναι παρών ο παράγοντας $x^2(L-x)^2$, που χρειάζεται για την πλήρωση των συνοριακών συνθηκών. Αυτές οι συναρτήσεις $v_n(x)$ με τις κατάλληλες επιλογές των συντελεστών τους c_k προσεγγίζουν το αληθινό βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού.

Ξεκινάμε τώρα με $n = 1$, οπότε έχουμε τη συνάρτηση-προσέγγιση $v_1(x)$ στην πιο πάνω σχέση (8.2.7). Αυτήν τη συνάρτηση $v_1(x)$ την εισάγουμε στη συνέχεια στο συναρτησιακό μας $\Pi[v]$ στη σχέση (8.2.3). Σημειώνουμε πως για τους υπολογισμούς μας χρησιμοποιήσαμε εδώ τη *Mathematica*. Προκύπτει έτσι το αποτέλεσμα

$$\Pi[v_1] \equiv K(c_1) = \frac{L^5}{30} (12EIc_1^2 - p_0c_1). \quad (8.2.10)$$

Και ασφαλώς για τον υπολογισμό του συντελεστή c_1 που ελαχιστοποιεί αυτό το συναρτησιακό πρέπει η παράγωγος της παραπάνω εκφράσεως $\Pi[v_1] \equiv K(c_1)$, που τη βλέπουμε βέβαια εδώ σαν συνάρτηση του c_1 , να μηδενίζεται. Έτσι προκύπτει ότι

$$\frac{dK(c_1)}{dc_1} = \frac{L^5}{30} (24EIc_1 - p_0) = 0. \quad (8.2.11)$$

Η λύση αυτής της πρωτοβάθμιας αλγεβρικής εξίσωσεως είναι προφανώς η σταθερά

$$c_1 = \frac{p_0}{24EI}. \quad (8.2.12)$$

Και έτσι η πρώτη προσέγγιση $v_1(x)$ στη σχέση (8.2.7) του βέλους κάμψεως $v(x)$ της παρούσας αμφίπακτης δοκού υπό ομοιόμορφη φόρτιση p_0 παίρνει τελικά τη μορφή

$$v_1(x) = \frac{p_0}{24EI} x^2(L-x)^2. \quad (8.2.13)$$

Μπορούμε να προχωρήσουμε και στην επόμενη προσέγγιση $v_2(x)$ με βάση τη σχέση (8.2.8), όπου υπάρχουν τώρα δύο άγνωστοι συντελεστές: οι c_1 και c_2 . Δε θα το κάνουμε όμως, επειδή εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση $v_1(x)$ στην πιο πάνω σχέση (8.2.13), που μόλις προσδιορίσαμε, πληροί όχι μόνο τις συνοριακές συνθήκες (8.2.4) της αμφίπακτης δοκού, αλλά και την ίδια τη διαφορική εξίσωση (8.2.2) της δοκού, εδώ βέβαια με $p(x) = p_0$. Επομένως είναι η ακριβής λύση του παρόντος προβλήματος αμφίπακτης δοκού: $v(x) = v_1(x)$ στη σχέση (8.2.13). Δεν είναι προσέγγιση ειδικά εδώ στο τόσο απλό αυτό πρόβλημα αμφίπακτης δοκού που μόλις λύσαμε. Εάν όμως συνεχίσουμε με τη δεύτερη προσέγγιση $v_2(x)$ στη σχέση (8.2.8), ε τότε απλά παίρνουμε την ίδια παραπάνω τιμή (8.2.12) του συντελεστή c_1 και επίσης $c_2 = 0$. Δηλαδή παίρνουμε ξανά το αποτέλεσμα (8.2.13). Και ανάλογα με την

τρύτη προσέγγιση $v_3(x)$ τώρα στη σχέση (8.2.9), όπου βέβαια στο παρόν πρόβλημα προκύπτει $c_2 = c_3 = 0$. Ξανά τα ίδια! Με ένα πάρα πολύ απλό πρόβλημα δοκού ξεκινήσαμε τις εφαρμογές της μεθόδου των Rayleigh-Ritz! Δεν πειράζει ...

Άσκηση

Ενότητα Ε8.2

▼ Άσκηση Ε8.1 ■ Μηχανική των Υλικών: δοκοί

Με τη χρήση της μεθόδου των Rayleigh-Ritz (με τη βοήθεια και της *Mathematica* ή κάποιου άλλου προγράμματος συμβολικών υπολογισμών) να επαληθευθεί/να αποδειχθεί στην παρούσα εφαρμογή ότι πράγματι στη δεύτερη προσέγγιση $v_2(x)$ (με $n = 2$) του βέλους κάμψεως $v(x)$ προκύπτουν οι τιμές των συντελεστών

$$c_1 = \frac{p_0}{24EI} \quad \text{και} \quad c_2 = 0. \quad (8.2.14)$$

Επομένως ειδικά εδώ ισχύει $v_1(x) = v_2(x) = v(x)$ ή ισοδύναμα $\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x) = 0$. ▲

Ε8.2.2

Ε8.2.2. Τριγωνική φόρτιση αμφίπακτης δοκού

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα λίγο πιο δύσκολο πρόβλημα αμφίπακτης δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI : το πρόβλημα με τριγωνική φόρτιση αυτής της δοκού συγκεκριμένα εδώ με

$$p(x) = p_0 x \quad (8.2.15)$$

με το p_0 σταθερά. Σημειώνουμε ότι κι εδώ εκτελέσαμε τους υπολογισμούς μας με τη *Mathematica*. Το πρόβλημα αυτό μπορούμε ασφαλώς να το δούμε σαν πρόβλημα συνοριακών τιμών: διαφορική εξίσωση (8.2.2) και συνοριακές συνθήκες (8.2.4). Τότε διαπιστώνουμε ότι έχει την κλειστή λύση

$$v(x) = \frac{p_0}{120EI} x^2(L-x)^2(2L+x). \quad (8.2.16)$$

Και βέβαια υπενθυμίζουμε εδώ ότι η τόσο γνωστή μας διαφορική εξίσωση (8.2.2) της δοκού δεν είναι τίποτε άλλο παρά η εξίσωση των Euler-Lagrange για το συναρτησιακό $\Pi[v]$ στη σχέση (8.2.1) για το πρόβλημα της δοκού. Αυτό το γνωρίζουμε ήδη πολύ καλά από την Ενότητα Ε7.4 του προηγούμενου Κεφαλαίου Ε7.

Ωραία ως εδώ! Και κατανοούμε ότι έχουμε μπροστά μας δύο εντελώς μα εντελώς διαφορετικούς τρόπους για να αντιμετωπίσουμε το παρόν πρόβλημα δοκού.

1. Είτε να το επιλύσουμε σαν ένα συνηθισμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών: συνήθης διαφορική εξίσωση (8.2.2) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (8.2.4).
2. Είτε να το επιλύσουμε σαν ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης συναρτησιακού, εδώ του συναρτησιακού $\Pi[v]$ στη σχέση (8.2.1) με $p(x) = p_0 x$.

Και φυσικά η μέθοδος της ελαχιστοποίησης του συναρτησιακού $\Pi[v]$ οδηγεί άμεσα και στη διαφορική εξίσωση (8.2.2) που είναι η σχετική εξίσωση των Euler-Lagrange.

Η πιο πάνω λύση (8.2.16) είναι, επαναλαμβάνουμε, η κλειστή λύση $v(x)$ του προβλήματος συνοριακών τιμών. Τώρα ξεκινάμε με τη δεύτερη δυνατότητα: την ελαχιστοποίηση του ίδιου του συναρτησιακού $\Pi[v]$ με την προσεγγιστική μέθοδο των Rayleigh-Ritz. Στη μέθοδο αυτή, ακριβώς όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή, θεωρούμε τις συναρτήσεις $\varphi_k(x)$ που δίνονται από τις σχέσεις (8.2.5) για $k = 1, 2, 3$ και γενικότερα από τις σχέσεις (8.2.6) για οποιοδήποτε k . Και η πρώτη προσέγγιση $v_1(x)$ του βέλους κάμψεως $v(x)$ δίνεται ασφαλώς και εδώ από τη σχέση (8.2.7). Την επαναλαμβάνουμε

$$v_1(x) = c_1 \varphi_1(x) = c_1 x^2(L-x)^2. \quad (8.2.17)$$

Εισάγοντάς την στο συναρτησιακό $\Pi[v]$ για τη δοκό στη σχέση (8.2.1), ακριβώς όπως κάναμε και στην προηγούμενη εφαρμογή εκεί για ομοιόμορφη (σταθερή) φόρτιση $p(x) = p_0$, παίρνουμε εδώ για την τριγωνική φόρτιση $p(x) = p_0 x$ της αμφίπακτης δοκού το αποτέλεσμα

$$\Pi[v_1] \equiv K(c_1) = \frac{L^5}{60} (24EIc_1^2 - p_0 Lc_1). \quad (8.2.18)$$

Για τον υπολογισμό του συντελεστή c_1 που ελαχιστοποιεί αυτό το συναρτησιακό $\Pi[v_1]$ πρέπει κι εδώ η παράγωγος αυτής της εκφράσεως $\Pi[v_1] \equiv K(c_1)$, που είναι συνάρτηση του άγνωστου προς το παρόν μοναδικού συντελεστή c_1 , να μηδενίζεται. Έτσι προκύπτει ότι

$$\frac{dK(c_1)}{dc_1} = \frac{L^5}{60} (48EIc_1 - p_0 L) = 0. \quad (8.2.19)$$

Η λύση c_1 αυτής της γραμμικής αλγεβρικής εξισώσεως είναι προφανώς η σταθερά

$$c_1 = \frac{p_0 L}{48EI}. \quad (8.2.20)$$

Άρα η πρώτη προσέγγιση $v_1(x)$ του βέλους κάμψεως $v(x)$ της αμφίπακτης δοκού αυτής εδώ της εφαρμογής με τριγωνική φόρτιση $p(x) = p_0 x$, σχέση (8.2.15), είναι τελικά η συνάρτηση

$$v_1(x) = \frac{p_0 L}{48EI} x^2(L-x)^2. \quad (8.2.21)$$

Συγκρίνοντας αυτήν την προσέγγιση $v_1(x)$ με την ακριβή λύση $v(x)$ που έτυχε ειδικά εδώ να μας είναι γνωστή (τη βρήκαμε με τη *Mathematica*) από τη σχέση (8.2.16), διαπιστώνουμε ότι στο σφάλμα $\varepsilon_1(x)$ της προσεγγίσεως $v_1(x)$ είναι

$$\varepsilon_1(x) = v(x) - v_1(x) = -\frac{p_0}{240EI} x^2(L-x)^2(L-2x). \quad (8.2.22)$$

Γι' αυτό το σφάλμα $\varepsilon_1(x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική νόρμα στη σχέση (8.1.8), που εδώ παίρνει φυσικά τη μορφή

$$\|\varepsilon_1\|_2 := \sqrt{\int_0^L \varepsilon_1^2(x) dx} = \sqrt{\int_0^L [v(x) - v_1(x)]^2 dx}, \quad (8.2.23)$$

προκύπτει να έχει την τιμή

$$\|\varepsilon_1\|_2 = \frac{|p_0|}{EI} \sqrt{\frac{L^{11}}{399168000}}. \quad (8.2.24)$$

Και φυσικά η τιμή αυτή είναι προφανώς μη αρνητική, επειδή $EI > 0$. (Γι' αυτό και δε βάλαμε απόλυτη τιμή στο EI .) Και ασφαλώς αυτό συμβαίνει πάντα στις νόρμες.

Για την ίδια προσέγγιση $v_1(x)$ στη σχέση (8.2.21) του άγνωστου βέλους κάμψεως $v(x)$ της αμφίπακτης δοκού ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης το συναρτησιακό $\Pi[v]$ στη σχέση (8.2.1), εδώ με $p(x) = p_0 x$, που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε. Εδώ για την προσέγγιση $v_1(x)$ αυτό το συναρτησιακό $\Pi[v_1]$ δίνεται από τη σχέση (8.2.18). Με βάση την τιμή (8.2.20) του σχετικού συντελεστή c_1 αυτό το συναρτησιακό $\Pi[v_1]$ παίρνει τελικά (με προσέγγισή του με δεκαδικό αριθμό) την τιμή

$$\Pi[v_1] \approx -0.000173611 \frac{p_0^2 L^7}{EI}. \quad (8.2.25)$$

Και φυσικά δεν πρόκειται για την ελάχιστη τιμή του, επειδή η ελάχιστη τιμή αυτού του συναρτησιακού $\Pi[v]$ προκύπτει προφανώς για την ακριβή έκφραση $v(x)$ του

βέλους κάμψεως της δοκού, εδώ στη σχέση (8.2.16), και όχι από την προσέγγισή της $v_1(x) \approx v(x)$. Εδώ η προσέγγιση $v_1(x)$ αναφέρεται στη σχέση (8.2.21).

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε και στην επόμενη προσέγγιση $v_2(x)$ για το βέλος κάμψεως $v(x)$ της παρούσας αμφίπακτης δοκού. Τώρα αυτή η προσέγγιση θα δίνεται από τη σχέση (8.2.8). Την επαναλαμβάνουμε κι αυτή

$$v_2(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = (c_1 + c_2x)x^2(L-x)^2. \quad (8.2.26)$$

Εισάγοντας αυτήν την προσέγγιση $v_2(x)$ στο συναρτησιακό $\Pi[v]$ για τη δοκό στη σχέση (8.2.1) με $p(x) = p_0x$, ακριβώς όπως κάναμε και προηγουμένως για $n = 1$, παίρνουμε τώρα το αποτέλεσμα

$$\Pi[v_2] \equiv K(c_1, c_2) = \frac{L^5}{420} [168EIc_1^2 + 7Lc_1(24EILc_2 - p_0) + 4L^2c_2(18EILc_2 - p_0)]. \quad (8.2.27)$$

Εδώ έχουμε τώρα δύο συντελεστές προς υπολογισμό και συγκεκριμένα τους δύο συντελεστές c_1 και c_2 . Για τον υπολογισμό τους ο οποίος να ελαχιστοποιεί αυτό το συναρτησιακό $\Pi[v_2] \equiv K(c_1, c_2)$ είναι αναγκαίο κι εδώ η παράγωγος της πιο πάνω εκφράσεως $\Pi[v_2] \equiv K(c_1, c_2)$, που είναι συνάρτηση αυτών των δύο άγνωστων προς το παρόν συντελεστών c_1 και c_2 , να μηδενίζεται. Έτσι προκύπτει ότι

$$\frac{\partial K(c_1, c_2)}{\partial c_1} = \frac{L^5}{60} (48EIc_1 + 24EILc_2 - p_0L) = 0, \quad (8.2.28)$$

$$\frac{\partial K(c_1, c_2)}{\partial c_2} = \frac{L^6}{105} (42EIc_1 + 36EILc_2 - p_0L) = 0. \quad (8.2.29)$$

Πρόκειται για ένα απλό σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Η λύση του προκύπτει εύκολα και έχει τη μορφή

$$c_1 = \frac{p_0L}{60EI} \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{p_0}{120EI}. \quad (8.2.30)$$

Άρα η δεύτερη προσέγγιση $v_2(x)$ του βέλους κάμψεως $v(x)$ της αμφίπακτης δοκού της παρούσας εφαρμογής με τριγωνική φόρτιση $p(x) = p_0x$, σχέση (8.2.15), είναι τελικά η συνάρτηση

$$v_2(x) = \frac{p_0}{120EI} x^2(L-x)^2(2L+x). \quad (8.2.31)$$

Συγκρίνοντας αυτήν τη συνάρτηση $v_2(x)$ με την ακριβή λύση $v(x)$ που έτυχε ειδικά εδώ να μας είναι γνωστή από τη σχέση (8.2.16), διαπιστώνουμε ότι πράγματι φθάσαμε τώρα στην ακριβή λύση $v(x)$. Εδώ η συνάρτηση $v_2(x)$ με κανέναν τρόπο δεν είναι προσέγγιση του βέλους κάμψεως $v(x)$. Είναι η ακριβής έκφρασή του, δηλαδή

$$e_2(x) = v(x) - v_2(x) = 0. \quad (8.2.32)$$

Για την ίδια συνάρτηση $v_2(x) = v(x)$ για το βέλος κάμψεως $v(x)$ της αμφίπακτης δοκού ενδιαφέρον παρουσιάζει ξανά το συναρτησιακό $\Pi[v]$ στη σχέση (8.2.1) που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε εδώ με $p(x) = p_0x$. Για τη συνάρτηση $v_2(x) = v(x)$ αυτό το συναρτησιακό $\Pi[v]$, εδώ $\Pi[v_2]$, δίνεται από τη σχέση (8.2.27). Με βάση τις εκφράσεις (8.2.30) των σχετικών συντελεστών c_1 και c_2 αυτό το συναρτησιακό $\Pi[v_2]$ παίρνει τελικά (με προσέγγισή του με δεκαδικό αριθμό) την τιμή


$$\Pi[v_2] = \Pi[v] \approx -0.000178571 \frac{p_0^2 L^7}{EI}. \quad (8.2.33)$$

Και φυσικά τώρα πια πρόκειται για την ελάχιστη τιμή του συναρτησιακού $\Pi[v]$, αφού η ελάχιστη τιμή αυτού του συναρτησιακού $\Pi[v]$ προκύπτει φυσικά για την

ακριβή έκφραση $v(x) = v_2(x)$ του βέλους κάμψεως της δοκού, την οποία έχουμε εδώ διαθέσιμη στις σχέσεις (8.2.16) και (8.2.31). Και σίγουρα μάλιστα με βάση και τη σχέση (8.2.25) για το συναρτησιακό $\Pi[v_1]$


$$\Pi[v_2] < \Pi[v_1], \quad \text{επειδή} \quad -0.000178571 \frac{p_0^2 L^7}{EI} < -0.000173611 \frac{p_0^2 L^7}{EI}, \quad (8.2.34)$$

αφού $-0.000178571 < -0.000173611$ και επίσης $p_0^2 L^7 / EI > 0$. Και ασφαλώς δεν έχει νόημα να προχωρήσουμε στην επόμενη συνάρτηση $v_3(x)$ στη σχέση (8.2.9), μια που εδώ τυχαίνει να είμαστε βέβαιοι ότι η συνάρτηση $v_2(x)$ συμπίπτει με την ακριβή έκφραση του βέλους κάμψεως $v(x)$ της δοκού. Αν όμως προχωρήσουμε και στη συνάρτηση $v_3(x)$, απλά θα διαπιστώσουμε ότι οι σχετικοί συντελεστές c_1 και c_2 δίνονται πάλι από τις σχέσεις (8.2.30), ενώ $c_3 = 0$. Δηλαδή τελικά εύλογα $v_3(x) = v_2(x) = v(x)$.

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε8.2

▼ Άσκηση Ε8.2 ■ Μηχανική των Υλικών: δοκοί

Για την παρούσα αμφίπακτη δοκό υπό την τριγωνική φόρτιση (8.2.15) και με τη χρήση κάποιου προγράμματος συμβολικών υπολογισμών, π.χ. της *Mathematica*, ζητούνται: (α) Να επαναληφθούν οι προηγούμενοι υπολογισμοί για $n = 1$ και $n = 2$ και να επαληθευθούν όλα τα πιο πάνω αποτελέσματα. (β) Να γίνουν οι υπολογισμοί για $n = 3$ και να διαπιστωθεί ότι $c_3 = 0$ και τελικά $v_3(x) = v_2(x) = v(x)$. ▲


 **Άσκηση**
Ενότητα Ε8.2

▼ Άσκηση Ε8.3 ■ Μηχανική των Υλικών: δοκοί

Για την ίδια αμφίπακτη δοκό, αλλά τώρα υπό την εκθετική φόρτιση

$$p(x) = p_0 e^{x/L}, \quad (8.2.35)$$

και με χρήση κάποιου προγράμματος συμβολικών υπολογισμών ζητούνται: (α) Να υπολογισθεί η προσέγγιση $v_1(x)$ (με $n = 1$), η σχετική τιμή του συναρτησιακού $\Pi[v_1]$ και η σχετική τετραγωνική νόρμα $\|e_1\|_2$. (β) Να επαναληφθούν οι προηγούμενοι υπολογισμοί για $n = 2$. (γ) Να ελεγχθεί ότι $\Pi[v_2] < \Pi[v_1]$, δηλαδή ότι πραγματικά μειώνεται το συναρτησιακό $\Pi[v]$ με αυτήν τη δεύτερη προσέγγιση $v_2(x)$. (δ) Να ελεγχθεί ότι τώρα $\|e_2\|_2 \ll \|e_1\|_2$, δηλαδή ότι επίσης μειώνεται και κατά πολύ μάλιστα η τετραγωνική νόρμα του σφάλματος $e_n(x)$ στη δεύτερη προσέγγιση $v_2(x)$ του βέλους κάμψεως $v(x)$ σε σύγκριση με την πρώτη προσέγγισή του $v_1(x)$. ▲

 **Άσκηση**
Ενότητα Ε8.2

▼ Άσκηση Ε8.4 ■ Μηχανική των Υλικών: δοκοί

Εξετάζεται το πρόβλημα της κάμψεως αμφιέριστης δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI υπό σταθερή φόρτιση $p(x) = p_0$. Σε αυτό το πρόβλημα ζητείται να χρησιμοποιηθούν οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\varphi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{L}, \quad \varphi_2(x) = \sin \frac{3\pi x}{L}, \quad \varphi_3(x) = \sin \frac{5\pi x}{L}, \quad \text{κλπ.} \quad (8.2.36)$$

Ζητούνται: (α) Να εξηγηθεί για ποιο λόγο είναι ακατάλληλες για την αμφιέριστη δοκό οι πολυωνυμικές συναρτήσεις (8.2.5) που χρησιμοποιήθηκαν προηγουμένως επιτυχώς για την αμφίπακτη δοκό. (β) Επίσης να εξηγηθεί για ποιο λόγο είναι τώρα κατάλληλες οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις (8.2.36). (γ) Τέλος με τη χρήση τους και με εφαρμογή της μεθόδου των Rayleigh–Ritz ζητούνται οι προσεγγίσεις $v_1(x)$ (για $n = 1$) και $v_2(x)$ (για $n = 2$) του βέλους κάμψεως $v(x)$ της αμφιέριστης δοκού. ▲

E8.3

E8.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΡΟΗΣ ΝΕΥΤΩΝΕΙΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

E8.3.1

E8.3.1. Μόνιμη ροή Νευτώνειου ρευστού σε αγωγό ορθογωνικής διατομής

Στην ενότητα αυτή προχωράμε στην επίδειξη της προσεγγιστικής μεθόδου των Rayleigh-Ritz στις δύο διαστάσεις (x, y) . Συγκεκριμένα θεωρούμε στη Ρευστομηχανική το πρόβλημα της μονοδιάστατης μόνιμης (σταθερής) ροής ασυμπίεστου (με σταθερή πυκνότητα ρ) Νευτώνειου ρευστού (όχι ιδεατού ρευστού!) με συνεκτικότητα (ιξώδες) μ (με $\mu > 0$) σε ευθύγραμμο αγωγό σταθερής ορθογωνικής διατομής $[-a, a] \times [-b, b]$. Η ροή γίνεται κατά μήκος του άξονα Oz ο οποίος είναι κατά μήκος του αγωγού. Η παράγωγος της πίεσης p κατά μήκος του αγωγού είναι $p_z := \partial p / \partial z$ και θεωρείται σταθερή. Αγνώστη συνάρτηση είναι εδώ η ταχύτητα $v = v(x, y)$ του Νευτώνειου ρευστού κατά μήκος του αγωγού. Αυτή όμως θα πρέπει να μηδενίζεται σε όλο το σύνορο του αγωγού εξαιτίας της συνεκτικότητας, του ιξώδους μ (με $\mu > 0$) του Νευτώνειου ρευστού. Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους προκύπτει εδώ από την εξίσωση (3.3.21) της Παραγράφου B3.3.2 του Κεφαλαίου B3 του Μέρους Β. Αυτή είναι η τρίτη εξίσωση των Navier-Stokes (εδώ για σταθερή ροή και χωρίς βαρύτητα). Είναι μάλιστα η εξίσωση του Poisson συγκεκριμένα η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = f \quad \text{με} \quad f = \frac{p_z}{\mu}, \quad -a \leq x \leq a \quad \text{και} \quad -b \leq y \leq b. \quad (8.3.1)$$

Το σχετικό συναρτησιακό που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί σ' αυτό το πρόβλημα είναι το συναρτησιακό (7.7.13) που αναφέραμε στην Άσκηση E7.8 της Ενότητας E7.7 του προηγούμενου Κεφαλαίου E7. Συγκεκριμένα εδώ θα πρέπει να ισχύει

$$J[v] = \iint_D (v_x^2 + v_y^2 + 2fv) \, dx \, dy = \text{minimum} \quad \text{με} \quad f = \frac{p_z}{\mu}, \quad v_x := \frac{\partial v}{\partial x}, \quad v_y := \frac{\partial v}{\partial y} \quad (8.3.2)$$

με συνοριακές συνθήκες μηδενισμού της ταχύτητας $v(x, y)$ του ρευστού σ' ολόκληρη την περίμετρο της ορθογωνικής διατομής του αγωγού. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει

$$v(\pm a, y) = 0 \quad \text{και} \quad v(x, \pm b) = 0 \quad \text{με} \quad -a \leq x \leq a \quad \text{και} \quad -b \leq y \leq b. \quad (8.3.3)$$

Αυτός ο μηδενισμός οφείλεται απλά στο ότι λόγω της συνεκτικότητας (του ιξώδους) του Νευτώνειου ρευστού θα πρέπει η ταχύτητά του να είναι μηδενική σ' όλο το σύνορο της διατομής $[-a, a] \times [-b, b]$ του αγωγού, δηλαδή εδώ για $x = \pm a$ και $y = \pm b$. Εννοείται ότι αυτό δεν ισχύει σε ιδεατά ρευστά: εκεί μπορεί να υπάρχει μη μηδενική εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας του ιδεατού ρευστού. Κάθετη όμως όχι!

Στην Άσκηση E7.8 που προαναφέραμε προέκυψε ότι η τόσο κλασική εξίσωση του Poisson (8.3.1) είναι η εξίσωση των Euler-Lagrange που αντιστοιχεί στην ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού $J[v]$ της παρούσας ροής Νευτώνειου ρευστού, που δίνεται στη σχέση (8.3.2).

Σημειώνεται επίσης ότι παροχή Q του Νευτώνειου ρευστού κατά τη ροή του κατά μήκος του ευθύγραμμου αγωγού δίνεται προφανώς από τον τύπο

$$Q = \iint_D v(x, y) \, dx \, dy = \int_{-a}^a \int_{-b}^b v(x, y) \, dx \, dy. \quad (8.3.4)$$

Και ασφαλώς η μέση ταχύτητα \bar{v} του Νευτώνειου ρευστού πάνω στην ορθογωνική διατομή D του παρόντος αγωγού εμβαδού A θα είναι

$$\bar{v} = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{4ab}. \quad (8.3.5)$$

Αυτό συμβαίνει, απλά επειδή το εμβαδόν A της ορθογωνικής διατομής του αγωγού στον παρονομαστή της προηγούμενης σχέσεως είναι $A = (2a)(2b) = 4ab$.

Το παρόν ενδιαφέρον πρόβλημα ροής λύθηκε με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz από το Beltzer⁸ κυρίως με τη χρήση του προγράμματος συμβολικών υπολογισμών *Maple* για τετραγωνική διατομή (με $b = a$) και με τρεις άγνωστους συντελεστές στην προσεγγιστική συνάρτηση $v_3(x, y)$ που χρησιμοποιήθηκε για την ταχύτητα $v(x, y)$ του Νευτώνειου ρευστού. Εδώ στην παρούσα εφαρμογή της μεθόδου των Rayleigh–Ritz εμείς χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών *Mathematica*. Επίσης εργαζόμαστε στη γενική ορθογωνική διατομή (γενικά με $b \neq a$) αντί στην ειδική περίπτωση της τετραγωνικής διατομής (με $b = a$). Και αυτό βέβαια κάνει τους συμβολικούς υπολογισμούς μας αρκετά πιο δύσκολους. Ναι, είναι συμβολικοί και οι παρόντες υπολογισμοί εξαιτίας των τριών συμβόλων $f = p_z/\mu$, a και b που υπεισέρχονται σε αυτούς ιδίως μάλιστα των συμβόλων a και b .

E8.3.2

E8.3.2. Εφαρμογή της μεθόδου των Rayleigh–Ritz

Και τώρα σύμφωνα με τη βασική προσέγγιση (8.1.2) στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz δεχόμαστε την εξής προσέγγιση $v_n(x, y)$ της άγνωστης ταχύτητας $v = v(x, y)$ του Νευτώνειου ρευστού στη ροή του στον αγωγό:

$$\begin{aligned} v_n(x, y) &= c_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + c_2(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)x^2 + c_3(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)y^2 + \dots \\ &= (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(c_1 + c_2x^2 + c_3y^2 + \dots). \end{aligned} \quad (8.3.6)$$

Εδώ λόγω της συμμετρίας της διατομής $D = [-a, a] \times [-b, b]$ του αγωγού πήραμε μόνο άρτιους όρους. Με τους παράγοντες $(x^2 - a^2)$ και $(y^2 - b^2)$ σε κάθε όρο αυτής της προσεγγίσεως φροντίσαμε να έχουμε πλήρωση των συνοριακών συνθηκών (8.3.3): $v(\pm a, \pm b) = 0$ σε όλη την περίμετρο της ορθογωνικής διατομής του αγωγού. Τώρα το πόσους ακριβώς όρους θα πάρουμε στην πιο πάνω προσέγγιση (8.3.6) έχει σχέση με την ακρίβεια την οποία επιδιώκουμε να έχουμε και με το υπολογιστικό κόστος. Συχνά αυτό είναι πολύ υψηλό, ιδίως όταν πέρα από τους αριθμούς υπάρχουν και σύμβολα, όπως είναι εδώ τα σύμβολα a , b και f . Αυτά προκαλούν αρκετά έντονες δυσκολίες ακόμη και στα προγράμματα συμβολικών υπολογισμών, όπως είναι εδώ η *Mathematica*, επειδή λόγω των συμβόλων οδηγούν σε πολύ μεγάλα αποτελέσματα.

E8.3.3

E8.3.3. Προσέγγιση με έναν όρο στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz

Πρόκειται για την πιο απλή και φυσικά τη λιγότερο ακριβή προσέγγιση $v_1(x, y)$. Απλά υποθέτουμε ότι

$$v_1(x, y) = c_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2). \quad (8.3.7)$$

Χρησιμοποιώντας συνεχώς τη *Mathematica* (και είναι κατανοητό αυτό στους παρόντες συμβολικούς υπολογισμούς), υπολογίζουμε πρώτα-πρώτα το συναρτησιακό μας: το ολοκλήρωμα $J[v]$, εδώ το $J[v_1]$, στη σχέση (8.3.2). Προκύπτει ότι

$$J[v_1] \equiv K[c_1] = \frac{32}{45} a^3 b^3 c_1 [4(a^2 + b^2)c_1 + 5f]. \quad (8.3.8)$$

Τώρα, για να ελαχιστοποιήσουμε το ολοκλήρωμα $J[v_1]$ με βάση τις σχέσεις (8.1.4), θα πρέπει προφανώς να θέσουμε την παράγωγο της αμέσως πιο πάνω εκφράσεως

⁸Beltzer, A. I. (1995), *Engineering Analysis with Maple/Mathematica*, Academic Press, London, pp. 256–257.

$J[v_1] \equiv K[c_1]$ ως προς τον άγνωστο συντελεστή c_1 ίση με το μηδέν. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι

$$\frac{dK[c_1]}{dc_1} = \frac{32}{45} a^3 b^3 [8(a^2 + b^2)c_1 + 5f] = 0 \quad (8.3.9)$$

και τελικά (εδώ με $a > 0$ και $b > 0$) προκύπτει η γραμμική αλγεβρική εξίσωση

$$8(a^2 + b^2)c_1 + 5f = 0. \quad (8.3.10)$$

Η λύση της είναι προφανώς

$$c_1 = -\frac{5f}{8(a^2 + b^2)}. \quad (8.3.11)$$

Άρα με αυτήν την τιμή του συντελεστή c_1 η προσέγγιση $v_1(x, y)$ της ταχύτητας $v(x, y)$ του Νευτώνειου ρευστού στη σχέση (8.3.7) παίρνει τη μορφή

$$v_1(x, y) = -\frac{5f}{8(a^2 + b^2)} (x^2 - a^2)(y^2 - b^2). \quad (8.3.12)$$

Η σχετική τιμή $J[v_1]$ του συναρτησιακού $J[v]$ προκύπτει ότι είναι

$$J[v_1] = -\frac{10a^3b^3f^2}{9(a^2 + b^2)} \quad \text{και για } a = b \quad J[v_1] = -\frac{5a^4f^2}{9} \approx -0.555556 a^4f^2. \quad (8.3.13)$$

Στη συνέχεια από τον τύπο (8.3.4) υπολογίζεται και η αντίστοιχη παροχή Q_1 του Νευτώνειου ρευστού που είναι

$$Q_1 = -\frac{10a^3b^3f}{9(a^2 + b^2)} \quad \text{και για } a = b \quad Q_1 = -\frac{5a^4f}{9} \approx -0.555556 a^4f. \quad (8.3.14)$$

Τέλος με χρήση του τύπου (8.3.5) υπολογίζεται και η μέση ταχύτητα \bar{v}_1 του Νευτώνειου ρευστού στην ορθογωνική διατομή $D = [-a, a] \times [-b, b]$ του αγωγού που είναι

$$\bar{v}_1 = -\frac{5a^2b^2f}{18(a^2 + b^2)} \quad \text{και για } a = b \quad \bar{v}_1 = -\frac{5a^2f}{36} \approx -0.138889 a^2f. \quad (8.3.15)$$

E8.3.4

E8.3.4. Προσέγγιση με τρεις όρους στη μέθοδο των Rayleigh-Ritz

Πρόκειται ασφαλώς για μια ακριβέστερη προσέγγιση από την προσέγγιση με έναν όρο. Με βάση τη γενική προσέγγιση (8.3.6), που ήδη δεχθήκαμε στην παρούσα εφαρμογή της μεθόδου των Rayleigh-Ritz, υποθέτουμε τώρα ότι

$$v_3(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(c_1 + c_2x^2 + c_3y^2). \quad (8.3.16)$$

Σημειώνουμε ότι στην παρούσα περίπτωση ορθογωνικής διατομής που γενικά $a \neq b$ ισχύει επίσης γενικά ότι $c_3 \neq c_2$ και έτσι έχουμε προς προσδιορισμό τρεις συντελεστές, τους c_1 , c_2 και c_3 , στην πιο πάνω σχέση (8.3.16). Αν όμως είχαμε δεχθεί τετραγωνική διατομή με $a = b$, τότε βέβαια λόγω της συμμετρίας θα ίσχυε επίσης ότι $c_3 = c_2$ και θα είχαμε προς προσδιορισμό μόνο δύο συντελεστές, τους c_1 και c_2 , με την ίδια περίπου ακρίβεια στα αποτελέσματά μας.

Χρησιμοποιώντας και τώρα τη *Mathematica* στους συμβολικούς υπολογισμούς μας, υπολογίζουμε πρώτα-πρώτα το συναρτησιακό μας: το ολοκλήρωμα $J[v]$, εδώ βέβαια $J[v_3]$, στη σχέση (8.3.2). Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} J[v_3] \equiv K[c_1, c_2, c_3] = & \frac{32}{4725} a^3 b^3 \left\{ 4 \left[5a^6 c_2^2 + 5(21b^2 c_1^2 + 6b^4 c_1 c_3 + b^6 c_3^2) \right. \right. \\ & + 3a^4 c_2 [10c_1 + b^2(11c_2 + 2c_3)] + 3a^2 [35c_1^2 + 14b^2 c_1 (c_2 + c_3) \\ & \left. \left. + b^4 c_3 (2c_2 + 11c_3) \right] + 105(5c_1 + a^2 c_2 + b^2 c_3) f \right\}. \quad (8.3.17) \end{aligned}$$

Τώρα, για να ελαχιστοποιήσουμε το ολοκλήρωμα $J[v_3]$ με βάση τις σχέσεις (8.1.4), θα πρέπει προφανώς να θέσουμε και τις τρεις παραγώγους της αμέσως παραπάνω εκφράσεως $J[v_3] \equiv K[c_1, c_2, c_3]$ ως προς τους τρεις άγνωστους συντελεστές c_1, c_2 και c_3 ίσες με το μηδέν. Έτσι προκύπτει τελικά το σύστημα των τριών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$280(a^2 + b^2)c_1 + 8a^2(5a^2 + 7b^2)c_2 + 8b^2(7a^2 + 5b^2)c_3 + 175f = 0, \quad (8.3.18)$$

$$24(5a^2 + 7b^2)c_1 + 8a^2(5a^2 + 33b^2)c_2 + 24b^2(a^2 + b^2)c_3 + 105f = 0, \quad (8.3.19)$$

$$24(7a^2 + 5b^2)c_1 + 24a^2(a^2 + b^2)c_2 + 8b^2(33a^2 + 5b^2)c_3 + 105f = 0. \quad (8.3.20)$$

Η λύση του είναι

$$c_1 = -\frac{35(9a^4 + 130a^2b^2 + 9b^4)f}{d}, \quad (8.3.21)$$

$$c_2 = -\frac{105(9a^2 + b^2)f}{d}, \quad (8.3.22)$$

$$c_3 = -\frac{105(a^2 + 9b^2)f}{d}, \quad (8.3.23)$$

όπου

$$d = 16(a^2 + b^2)(45a^4 + 464a^2b^2 + 45b^4). \quad (8.3.24)$$

Επομένως με αυτές τις τιμές των συντελεστών c_1, c_2 και c_3 η προσέγγιση $v_3(x, y)$ της ταχύτητας $v(x, y)$ του Νευτώνειου ρευστού στη σχέση (8.3.16) παίρνει τη μορφή

$$v_3(x, y) = -\frac{35(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)[9(a^4 + b^4) + 130a^2b^2 + 3a^2(9x^2 + y^2) + 3b^2(x^2 + 9y^2)]f}{16(a^2 + b^2)(45a^4 + 464a^2b^2 + 45b^4)}. \quad (8.3.25)$$

Η σχετική τιμή $J[v_3]$ του συναρτησιακού $J[v]$ προκύπτει ότι είναι

$$J[v_3] = -\frac{56b^3(9a^7 + 82a^5b^2 + 9a^3b^4)f^2}{9(45a^6 + 509a^4b^2 + 509a^2b^4 + 45b^6)} \quad (8.3.26)$$

και για $a = b$

$$J[v_3] = -\frac{1400a^4f^2}{2493} \approx -0.561572a^4f^2. \quad (8.3.27)$$

Στη συνέχεια από τον τύπο (8.3.4) υπολογίζεται και η αντίστοιχη παροχή Q_3 του Νευτώνειου ρευστού που είναι

$$Q_3 = -\frac{56a^3b^3(9a^2 + b^2)(a^2 + 9b^2)f}{9(a^2 + b^2)(45a^4 + 464a^2b^2 + 45b^4)} \quad (8.3.28)$$

και για $a = b$

$$Q_3 = -\frac{1400a^4f}{2493} \approx -0.561572a^4f. \quad (8.3.29)$$

Τέλος με χρήση του τύπου (8.3.5) υπολογίζεται και η μέση ταχύτητα \bar{v}_3 του Νευτώνειου ρευστού στην ορθογωνική διατομή $D = [-a, a] \times [-b, b]$ του αγωγού που είναι

$$\bar{v}_3 = -\frac{14a^2b^2(9a^2 + b^2)(a^2 + 9b^2)f}{9(a^2 + b^2)(45a^4 + 464a^2b^2 + 45b^4)} \quad (8.3.30)$$

και για $a = b$

$$\bar{v}_3 = -\frac{350a^2f}{2493} \approx -0.140393a^2f. \quad (8.3.31)$$

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι συγκρίνοντας τις τιμές $J[v_1] \approx -0.555556a^4f^2$ στη σχέση (8.3.13) δεξιά και $J[v_3] \approx -0.561572a^4f^2$ στη σχέση (8.3.27), παρατηρούμε ότι η δεύτερη είναι μικρότερη από την πρώτη, επειδή $-0.561572 < -0.555556$. Άρα η τιμή του συναρτησιακού $J[v]$ μειώθηκε, όπως αναμέναμε βέβαια στην παρούσα

ελαχιστοποίηση αυτού του συναρτησιακού που επιδιώκουμε εδώ με τη μέθοδο των Rayleigh-Ritz. Και φυσικά και κάποια πολύ μικρή επιπλέον μείωση θα συνέβαινε αν προχωρούσαμε σε παραπέρα προσεγγίσεις με περισσότερους όρους στη μέθοδο των Rayleigh-Ritz, κάτι που όμως δε θα κάνουμε.

Ασκήση

Ενότητα Ε8.3

▼ Ασκήση Ε8.5 ■ Μηχανική των Υλικών: Στρέψη

Όπως ήδη γνωρίζουμε από την Ασκήση Ε7.8 της Ενότητας Ε7.7 του προηγούμενου Κεφαλαίου Ε7, το ίδιο ουσιαστικά συναρτησιακό (7.7.13) ή (8.3.2) παρουσιάζεται επίσης στο πρόβλημα της στρέψεως ευθύγραμμης ράβδου. Αυτό το συναρτησιακό το έχουμε δηλώσει στην Ασκήση Ε7.8, σχέση (7.7.14) με $\Pi[\varphi]$ και έχει τη μορφή

$$\Pi[\varphi] = \frac{1}{2G} \iint_D (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + 2f\varphi) dx dy = \text{minimum} \quad \text{με} \quad f = -2G\theta. \quad (8.3.32)$$

Υπενθυμίζουμε ότι τώρα άγνωστη συνάρτηση $\varphi = \varphi(x, y)$ είναι η τασική συνάρτηση του Prandtl, το G δηλώνει το μέτρο διατμήσεως του ισότροπου ελαστικού υλικού της ράβδου (που καταπονείται σε στρέψη) και το θ τη γωνία στρέψεως (ή γωνία στροφής) της ράβδου ανά μονάδα μήκους της. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι, όπως γνωρίζουμε από την Ασκήση Ε7.8 που ήδη αναφέραμε, η εξίσωση των Euler-Lagrange για το πιο πάνω συναρτησιακό $\Pi[\varphi]$ είναι η γνωστή διδιάστατη εξίσωση του Poisson

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = -2G\theta. \quad (8.3.33)$$

Τώρα, εάν είναι γνωστή η τασική συνάρτηση του Prandtl $\varphi(x, y)$, τότε η ροπή στρέψεως (ή στρεπτική ροπή) T (ισοδύναμα M_t) στη ράβδο προκύπτει από τον τύπο

$$T = 2 \iint_D \varphi(x, y) dx dy = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi(x, y) dy dx \quad (8.3.34)$$

εννοείται με τη δεξιά έκφρασή του να ισχύει για μια ράβδο ορθογωνικής διατομής $D = [-a, a] \times [-b, b]$ διαστάσεων $2a$ επί $2b$ και εμβαδού $A = 4ab$.

Πέρα από τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (8.3.33) θα πρέπει να ισχύει επίσης και η συνοριακή συνθήκη

$$\varphi(x, y) = C \quad (\text{σταθερά}) \quad \text{και} \quad \text{συνήθως} \quad \varphi(x, y) = 0 \quad \text{για} \quad C = 0 \quad (8.3.35)$$

σε ολόκληρο το σύνορο της διατομής της ευθύγραμμης ράβδου, δηλαδή σε όλη την περίμετρο της ορθογωνικής διατομής της.

Αυτό το πρόβλημα στρέψεως μπορεί ασφαλώς να λυθεί με άμεσο (αλλά όχι και ιδιαίτερα εύκολο) τρόπο που οδηγεί στη λύση του $\varphi(x, y)$ για την τασική συνάρτηση του Prandtl σε μορφή σειράς. Από αυτήν τη λύση προσδιορίζεται στη συνέχεια και η σχετική ροπή στρέψεως (ή στρεπτική ροπή) T . Αυτή έχει την εξής μορφή σειράς:

$$T = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi(x, y) dy dx = \frac{16}{3} G\theta a^3 b \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right). \quad (8.3.36)$$

Στην ειδική περίπτωση της τετραγωνικής διατομής ($a = b$) αυτός ο τύπος μας δίνει την τιμή

$$T \approx 2.24923 G\theta a^4. \quad (8.3.37)$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι κλασικό και αναφέρεται στο βιβλίο Ελαστικότητας των Timoshenko and Goodier.⁹ Εκεί στην Ενότητα 109 επιλύεται το πρόβλημα στρέψεως ευθύγραμμης ράβδου ορθογωνικής διατομής με τον άμεσο τρόπο των σειρών.

⁹Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N. (1970), *Theory of Elasticity*, 3rd Edition, McGraw-Hill, New York.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε9

ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΑΘΜΙΣΜΕΝΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Πέρα από τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz, που τη μελετήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο Ε8, μια εξίσου ενδιαφέρουσα ίσως μάλιστα και λίγο περισσότερο ενδιαφέρουσα μέθοδος για την προσεγγιστική επίλυση προβλημάτων του μηχανικού (και όχι μόνο!) είναι η μέθοδος του Galerkin (ή μέθοδος των Bubnov–Galerkin). Αυτή είναι η πιο γνωστή και πιο χρήσιμη μέθοδος από μια κατηγορία μεθόδων που καλούνται μέθοδοι των σταθμισμένων υπολοίπων. Η μέθοδος του Galerkin μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσεγγιστική επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων καθώς και διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, οι οποίες συνοδεύονται από τις σχετικές ομογενείς αρχικές ή συνήθως συνοριακές συνθήκες. Σε αντίθεση με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz, που βασίζεται σε χρήση συναρτησιακού, η μέθοδος του Galerkin βασίζεται στην ίδια την προς επίλυση διαφορική εξίσωση (συνήθη ή με μερικές παραγώγους).

Πιο συγκεκριμένα στη μέθοδο του Galerkin επιδιώκουμε την προσεγγιστική επίλυση του προβλήματός μας μέσω της προσεγγίσεως της άγνωστης συναρτήσεως με γραμμικό συνδυασμό (πεπερασμένο άθροισμα) γνωστών και σχετικά απλών γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων που επαληθεύουν όλες ανεξαιρέτως τις αρχικές ή συνήθως συνοριακές συνθήκες του προβλήματός μας. Δηλαδή στο σημείο αυτό εργαζόμαστε και εδώ στη μέθοδο του Galerkin περίπου όπως είχαμε εργασθεί και στο προηγούμενο Κεφάλαιο Ε8 στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz. Η συνέχεια όμως είναι εντελώς διαφορετική. Συγκεκριμένα εδώ στη μέθοδο του Galerkin για τον προσδιορισμό των άγνωστων συντελεστών σε αυτόν το γραμμικό συνδυασμό ζητάμε το μηδενισμό των ολοκληρωμάτων των σφαλμάτων στη διαφορική μας εξίσωση επί καθεμία από τις γνωστές συναρτήσεις στο γραμμικό συνδυασμό που υποθέσαμε για την άγνωστη συνάρτηση στο διάστημα ή στην περιοχή που μας ενδιαφέρει. Έτσι προκύπτει τελικά ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων (συνήθως γραμμικών), που η λύση του μας δίνει εύκολα τους συντελεστές της σχετικής προσεγγίσεως.

Οι μέθοδοι των Rayleigh–Ritz και του Galerkin ξεκινάνε από δύο εντελώς διαφορετικές αρχές. Συγκεκριμένα η πρώτη στοχεύει στην προσεγγιστική στασιμοποίηση ενός συναρτησιακού (και μάλιστα άμεσα, χωρίς χρήση της σχετικής εξισώσεως των Euler–Lagrange). Αντίθετα η δεύτερη στοχεύει στην προσεγγιστική επίλυση μιας διαφορικής εξισώσεως: συνήθους ή με μερικές παραγώγους. Όμως σε πολλές περιπτώσεις τα αποτελέσματα που μας δίνουν οι μέθοδοι των Rayleigh–Ritz και του Galerkin για το ίδιο πρόβλημα συμπίπτουν απόλυτα εννοείται για αντίστοιχες αρχικές προσεγγίσεις της άγνωστης συναρτήσεως. Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι ενώ στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz είναι απόλυτα αναγκαίο να λαμβάνονται υπόψη στις συναρτήσεις της προσεγγίσεως της άγνωστης συναρτήσεως μόνο οι γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες (ενώ μπορούν να αγνοούνται οι στατικές συνοριακές συνθήκες), στη μέθοδο του Galerkin είναι αναγκαίο να λαμβάνονται υπόψη όλες οι συνοριακές συνθήκες. Η μέθοδος του Galerkin είναι επίσης ευρύτερη στους στόχους της και μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μεγαλύτερη κατηγορία προβλημάτων, π.χ. σε προβλήματα που δε σχετίζονται με συναρτησιακά και σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Σε αυτό το κεφάλαιο αρχικά θα περιγράψουμε τη μέθοδο του Galerkin και στη συνέχεια θα επιδείξουμε

τη χρησιμότητά της σε εφαρμογές και μάλιστα στις ίδιες περίπου εφαρμογές (στη δοκό και στη μόνιμη ροή Νευτώνειου ρευστού) που είχαμε δει στο προηγούμενο Κεφάλαιο Ε8 εκεί με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz. Θα παρατηρήσουμε μάλιστα τη σύμπτωση των αποτελεσμάτων των δύο μεθόδων σε αυτές τις εφαρμογές εννοείται υπό τις ίδιες συνθήκες προσεγγίσεων.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε και σε μερικές ακόμη μεθόδους σταθμισμένων υπολοίπων: (α) Στη μέθοδο των Petrov–Galerkin, που αποτελεί μια ενδιαφέρουσα γενίκευση της μεθόδου του Galerkin με τη χρήση οποιωνδήποτε συναρτήσεων σαν συναρτήσεων βάρους στα σταθμισμένα υπόλοιπα. (β) Στη μέθοδο του συντοπισμού (collocation) και (γ) στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, που είναι και οι δυο τους ειδικές περιπτώσεις της γενικότερης μεθόδου των Petrov–Galerkin. (δ) Τέλος στη μέθοδο του Kantorovich, που είναι μια πιο πολύπλοκη και ειδική μέθοδος σταθμισμένων υπολοίπων και αφορά μόνο σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Παρουσιάζουμε επίσης και ορισμένες εφαρμογές των μεθόδων (β), (γ) και (δ).

E9.1

E9.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ GALERKIN

E9.1.1

E9.1.1. Περιγραφή της μεθόδου του Galerkin

Θεωρούμε εδώ ότι έχουμε να επιλύσουμε μια γραμμική και γενικά μη ομογενή συνήθη διαφορική εξίσωση p -τάξεως στο διάστημα $[a, b]$ της μορφής

$$a_p y^{(p)}(x) + a_{p-1} y^{(p-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \quad (9.1.1)$$

με άγνωστη συνάρτηση την $y(x)$ και υπό ομογενείς αρχικές ή συνοριακές συνθήκες. Εδώ οι συντελεστές της a_k μπορεί να είναι είτε σταθεροί είτε μη σταθεροί (μεταβλητοί) και η συνάρτηση $f(x)$ στο δεξιό μέλος είναι μια γνωστή συνάρτηση. Αυτήν εδώ τη συνήθη διαφορική εξίσωση τη γράφουμε συχνά και στην πιο σύντομη μορφή της

$$\mathcal{A}(D)y(x) = f(x) \quad (9.1.2)$$

με

$$\mathcal{A}(D) = a_p D^p + a_{p-1} D^{p-1} + \dots + a_1 D + a_0. \quad (9.1.3)$$

Εδώ το σύμβολο $D \equiv d/dx$ δηλώνει το διαφορικό τελεστή ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x στη διαφορική εξίσωση (9.1.1) ή σε πιο συνεπτυγμένη μορφή (9.1.2).

Ακριβώς όπως και στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz στο προηγούμενο Κεφάλαιο Ε8 έτσι και εδώ στη μέθοδο του Galerkin (ή των Bubnov–Galerkin) υποθέτουμε την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ ότι προσεγγίζεται από ένα γραμμικό συνδυασμό $y_n(x)$ γνωστών, απλών και κατάλληλων συναρτήσεων $\varphi_k(x)$. Δηλαδή υποθέτουμε την ισχύ της προσεγγίσεως (8.1.2) στην Ενότητα Ε8.1 του προηγούμενου Κεφαλαίου Ε8 για τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz. Αυτήν την επαναλαμβάνουμε και εδώ

$$y(x) \approx y_n(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x). \quad (9.1.4)$$

Και προφανώς ως προς την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ το σφάλμα $\varepsilon_n(x)$ που σχετίζεται με αυτήν την προσέγγιση $y_n(x)$ θα είναι

$$\varepsilon_n(x) = y(x) - y_n(x) = y(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x). \quad (9.1.5)$$

Αυτό το σφάλμα γενικά μειώνεται με την αύξηση του αριθμού n των όρων στο γραμμικό συνδυασμό (9.1.4) για την προσέγγιση $y_n(x)$ της άγνωστης συναρτήσεως $y(x)$.

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι οι γνωστές συναρτήσεις $\varphi_k(x)$ πρέπει να επιλέγονται κατάλληλα, ώστε να έχουν τις τέσσερις καλές ιδιότητες που αναφέρονται κάτω από τη σχέση (8.1.2). Εδώ όμως στη μέθοδο του Galerkin τονίζουμε ότι θα πρέπει να πληρούνται όλες ανεξαιρέτως οι ομογενείς (όπως υποθέτουμε) συνοριακές συνθήκες (και οι μηχανικές ή στατικές συνοριακές συνθήκες) και όχι μόνο οι γεωμετρικές συνοριακές συνθήκες. Αντίθετα στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz απαιτείται η πλήρωση μόνο των γεωμετρικών συνοριακών συνθηκών. Δηλαδή στη μέθοδο του Galerkin τα πράγματα είναι αρκετά πιο αυστηρά ως προς την επιλογή των συναρτήσεων $\varphi_k(x)$ στην παραπάνω προσέγγιση $y_n(x)$ στη σχέση (9.1.4) της άγνωστης συναρτήσεως $y(x)$ στη διαφορική εξίσωση (9.1.1) ή (9.1.2), που θέλουμε να επιλύσουμε προσεγγιστικά.

Και τώρα μας μένει το κύριο μέρος της εργασίας μας, δηλαδή ο προσδιορισμός των άγνωστων συντελεστών c_k στην προσέγγιση (9.1.4) της άγνωστης συναρτήσεως $y(x)$. Στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz αυτό το πετύχαμε με ελαχιστοποίηση (γενικότερα στασιμοποίηση) του σχετικού συναρτησιακού εξισώνοντας με το μηδέν τις σχετικές μερικές παραγώγους (8.1.4). Έτσι δημιουργήθηκε ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων (συνήθως γραμμικών) για την εύρεση των άγνωστων συντελεστών c_k .

Για το σκοπό αυτό στη μέθοδο του Galerkin υιοθετείται η ακόλουθη διαδικασία: η προσεγγιστική λύση $y_n(x)$ στη σχέση (9.1.4) της διαφορικής εξίσωσης (9.1.1) ή (9.1.2) (που συνοδεύεται βέβαια από τις σχετικές ομογενείς αρχικές ή συνοριακές συνθήκες) προφανώς δεν πληροί ακριβώς αυτήν τη διαφορική εξίσωση. Υπάρχει ένα σφάλμα, ένα **υπόλοιπο**

$$R_n(x) = \mathcal{A}(D)y_n(x) - f(x). \quad (9.1.6)$$

Εμείς εδώ στη μέθοδο του Galerkin υποθέτουμε ότι μηδενίζονται τα n **σταθμισμένα υπόλοιπα**

$$\int_a^b R_n(x)\varphi_m(x) dx = 0 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9.1.7)$$

Παρατηρούμε ότι εδώ σαν **συναρτήσεις βάρους** σε αυτά τα σταθμισμένα υπόλοιπα θεωρήσαμε τις ίδιες τις συναρτήσεις $\varphi_m(x)$ (με $m = 1, 2, \dots, n$) που χρησιμοποιήσαμε ήδη στη σχέση (9.1.4) στην προσέγγιση $y_n(x)$ της άγνωστης συναρτήσεως $y(x)$ στην παρούσα μέθοδο του Galerkin (ή των Bubnov–Galerkin).

Αντικαθιστούμε τώρα τις εκφράσεις των υπολοίπων $R_n(x)$ από τις σχέσεις (9.1.6) στις εξισώσεις (9.1.7). Έτσι προκύπτει η πιο λεπτομερής μορφή αυτών των εξισώσεων

$$\int_a^b [\mathcal{A}(D)y_n(x) - f(x)]\varphi_m(x) dx = 0 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9.1.8)$$

Και αυτές οι εξισώσεις γίνονται ακόμη πιο σαφείς, εάν αντικαταστήσουμε σε αυτές και την έκφραση (9.1.4) της προσεγγίσεως $y_n(x)$. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε

$$\int_a^b \left[\mathcal{A}(D) \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right] \varphi_m(x) dx = \int_a^b f(x)\varphi_m(x) dx \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (9.1.9)$$

όπου μάλιστα μεταφέραμε τώρα δεξιά τους όρους με τη γνωστή συνάρτηση $f(x)$ στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (9.1.2). Αφού μάλιστα οι συντελεστές c_k στην προσέγγιση (9.1.4) είναι σταθερές, χρησιμοποιώντας τη γραμμική ιδιότητα στην παραγωγή και στη συνέχεια στην ολοκλήρωση, μπορούμε να γράψουμε τις πιο πάνω εξισώσεις (9.1.9) στην τελική τους μορφή

$$\sum_{k=1}^n c_k \left\{ \int_a^b [\mathcal{A}(D)\varphi_k(x)]\varphi_m(x) dx \right\} = \int_a^b f(x)\varphi_m(x) dx \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9.1.10)$$

Εδώ πρόκειται προφανώς για n γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις ως προς τους n άγνωστους συντελεστές c_k στο γραμμικό συνδυασμό (9.1.4) για την προσέγγιση $y_n(x)$ της λύσεως $y(x)$ αυτού του προβλήματος, που αποτελείται από τη γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση (9.1.1) ή (9.1.2) και τις σχετικές ομογενείς αρχικές ή συνήθως συνοριακές συνθήκες. Με τη λύση αυτού του συστήματος (9.1.10) προσδιορίζουμε αμέσως τους συντελεστές c_k και μετά την προσέγγιση $y_n(x)$ με βάση τη σχέση (9.1.4).

Στο σημείο αυτό υπενθυμίζουμε ότι εδώ στη μέθοδο του Galerkin χρησιμοποιήσαμε κατευθείαν τη διαφορική εξίσωση (9.1.1) ή (9.1.2) και δε χρησιμοποιήσαμε συναρτησιακά. Συναρτησιακά είχαμε χρησιμοποιήσει στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz στο προηγούμενο Κεφάλαιο Ε8. Εκεί με τη χρήση συναρτησιακών η διαφορική εξίσωση (9.1.1) ή (9.1.2) θα ήταν η εξίσωση των Euler–Lagrange του σχετικού συναρτησιακού. Εάν βέβαια υπάρχει σχετικό συναρτησιακό ... Γιατί δεν υπάρχει πάντα. Και με αυτήν την έννοια η μέθοδος του Galerkin είναι γενικότερη από τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz, αφού είναι εφαρμόσιμη και σε προβλήματα που δε σχετίζονται καθόλου με συναρτησιακά, τα οποία δε μπορούν να διατυπωθούν σαν προβλήματα ελαχιστοποιήσεως (και γενικότερα στασιμοποιήσεως) συναρτησιακών.

Εντούτοις για το ίδιο πρόβλημα και με βάση την ίδια προσέγγιση (9.1.4) η μέθοδος των Rayleigh–Ritz και η μέθοδος του Galerkin παρά την πιο πάνω ουσιαστική διαφορά που έχουν αποδεικνύεται ότι μας δίνουν αρκετά συχνά ακριβώς τα ίδια προσεγγιστικά αποτελέσματα. Αυτό θα το δούμε και στις παρακάτω εφαρμογές, που επιλέχθηκαν να είναι αντίστοιχες εφαρμογών που είχαμε δει και στο προηγούμενο Κεφάλαιο Ε8, εκεί βέβαια χρησιμοποιώντας συναρτησιακά και τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz και όχι διαφορικές εξισώσεις και τη μέθοδο του Galerkin όπως εδώ.

Πριν προχωρήσουμε όμως σε πρακτικές εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού, θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ πως η εφαρμογή της μεθόδου του Galerkin δεν περιορίζεται μόνο σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Εμάς ασφαλώς μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα και οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Υποθέτουμε λοιπόν ότι έχουμε προς επίλυση μια γραμμική και γενικά μη ομογενή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της μορφής

$$\mathcal{A}(D_x, D_y)u(x, y) = f(x, y) \quad \text{με} \quad D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{και} \quad D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}. \quad (9.1.11)$$

Τώρα με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, τις x και y , η σχετική προσέγγιση (9.1.4) της άγνωστης συναρτήσεως, εδώ της συναρτήσεως $u(x, y)$, θα πάρει φυσικά τη μορφή

$$u(x, y) \approx u_n(x, y) = c_1\varphi_1(x, y) + c_2\varphi_2(x, y) + \dots + c_n\varphi_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x, y). \quad (9.1.12)$$

Επίσης το σφάλμα $\varepsilon_n(x)$ στη σχέση (9.1.5) θα πάρει τώρα προφανώς τη μορφή

$$\varepsilon_n(x, y) = u(x, y) - u_n(x, y) = u(x, y) - \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x, y). \quad (9.1.13)$$

Και ανάλογα το υπόλοιπο $R_n(x)$ στη σχέση (9.1.6) θα πάρει τώρα τη μορφή

$$R_n(x, y) = \mathcal{A}(D_x, D_y)u_n(x, y) - f(x, y). \quad (9.1.14)$$

Και φυσικά ανάλογες αλλαγές έχουμε στις εξισώσεις (9.1.7), (9.1.8) και (9.1.9). Εκεί μάλιστα οι ολοκληρώσεις θα γίνονται στη διδιάστατη περιοχή D , όπου ισχύει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (9.1.11) και στο σύνορο C της οποίας ισχύουν οι σχετικές ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Τέλος οι τελικές εξισώσεις της

μεθόδου του Galerkin, οι εξισώσεις (9.1.10) για τον προσδιορισμό των n συντελεστών c_k , εδώ στην προσέγγιση (9.1.12), παίρνουν τώρα τις διδιάστατες μορφές τους

$$\sum_{k=1}^n c_k \left\{ \iint_D [\mathcal{A}(D_x, D_y)\varphi_k(x, y)]\varphi_m(x, y) dx dy \right\} = \iint_D f(x, y)\varphi_m(x, y) dx dy \quad (9.1.15)$$

πάλι βέβαια με $m = 1, 2, \dots, n$: έχουμε συνολικά n γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις.

Και ανάλογα βέβαια η μέθοδος του Galerkin ισχύει και για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές της μορφής

$$\mathcal{A}(D_x, D_y, D_z)u(x, y, z) = f(x, y, z) \quad \text{με} \quad D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{και} \quad D_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} \quad (9.1.16)$$

ή και με τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές, π.χ. τις x, y, z (τη θέση) και t (το χρόνο).

Σημειώνουμε τέλος ότι η μέθοδος του Galerkin είναι επίσης εφαρμόσιμη και σε μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις αλλά και σε ολοκληρωτικές εξισώσεις. Και σε αντίθεση με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz δεν απαιτεί την ύπαρξη συναρτησιακού προς ελαχιστοποίηση (και γενικότερα στασιμοποίηση). Επομένως είναι μια πολύ ενδιαφέρουσα μέθοδος και μάλιστα πολύ γενικότερη μέθοδος από τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz, παρόλο που αρκετές φορές τα αποτελέσματα αυτών των δύο μεθόδων (εννοείται για τις ίδιες προσεγγίσεις της άγνωστης συναρτήσεως) συμπίπτουν.

E9.1.2

E9.1.2. Εφαρμογή σε πρόβλημα αμφίπακτης δοκού

Σαν πρώτη εφαρμογή της μεθόδου του Galerkin (ή των Bubnov–Galerkin) θεωρούμε το πρόβλημα της αμφίπακτης δοκού υπό τριγωνική κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x) = p_0x$. Αυτό το πρόβλημα το μελετήσαμε ήδη στην Ενότητα Ε8.2 (ειδικότερα στην Παράγραφο Ε8.2.2) του προηγούμενου Κεφαλαίου Ε8, εκεί όμως με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz και συγκεκριμένα με την ελαχιστοποίηση του σχετικού συναρτησιακού (8.2.1). Εδώ θα εργασθούμε με τη μέθοδο του Galerkin και συγκεκριμένα με βάση τη γνωστή μας διαφορική εξίσωση της δοκού (8.2.2). Πρόκειται προφανώς για μια μη ομογενή συνήθη διαφορική εξίσωση. Την επαναλαμβάνουμε

$$EIv''''(x) = p(x) \quad \text{εδώ με} \quad p(x) = p_0x. \quad (9.1.17)$$

Σαν συναρτήσεις $\varphi_k(x)$ χρησιμοποιούμε και εδώ στη μέθοδο του Galerkin τις ίδιες ακριβώς συναρτήσεις (8.2.5) και γενικότερα (8.2.6) που είχαμε χρησιμοποιήσει στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz. Προφανώς αυτές πληρούν και τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες στα δύο πακτωμένα άκρα $x = 0$ και $x = L$ αυτής της αμφίπακτης δοκού.

Ξεκινάμε με $n = 1$. Δεχόμαστε και εδώ σαν πρώτη προσέγγιση $v_1(x)$ της άγνωστης συναρτήσεως $v(x)$, του άγνωστου βέλους κάμψεως της παρούσας αμφίπακτης δοκού, την προσέγγιση (8.2.17) με μοναδικό άγνωστο συντελεστή το c_1 . Αυτή είναι

$$v_1(x) = c_1\varphi_1(x) = c_1x^2(L-x)^2, \quad \text{αφού εδώ} \quad \varphi_1(x) = x^2(L-x)^2. \quad (9.1.18)$$

Για τον υπολογισμό του άγνωστου συντελεστή c_1 με τη μέθοδο του Galerkin χρησιμοποιούμε φυσικά τις εξισώσεις σταθμισμένων υπολοίπων (9.1.7), που όπως ήδη είδαμε, μπορούν να γραφούν εναλλακτικά και στις τελικές τους μορφές (9.1.10). Εδώ έχουμε βέβαια $n = 1$, δηλαδή έχουμε μία μόνο εξίσωση σταθμισμένων υπολοίπων (9.1.7) ή εναλλακτικά (9.1.10). Τώρα για την πιο πάνω πρώτη προσέγγιση $v_1(x)$ του βέλους κάμψεως $v(x)$ της παρούσας δοκού το υπόλοιπο που προκύπτει στη διαφορική εξίσωση (9.1.17) αυτής της δοκού, όπως εύκολα διαπιστώνουμε, είναι

$$R_1(x) = 24EIc_1 - p_0x. \quad (9.1.19)$$

Και με τη χρήση του όπως και της συναρτήσεως $\varphi_1(x)$ στη σχέση (9.1.18) η εξίσωση σταθμισμένου υπολοίπου (9.1.7) (εδώ με $n = 1$) παίρνει τελικά την πολύ απλή μορφή

$$\frac{L^5}{60} (48EIc_1 - p_0L) = 0. \quad (9.1.20)$$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για την ίδια ακριβώς εξίσωση (8.2.19), που είχαμε βρει στην Παράγραφο Ε8.2.2 για το ίδιο ακριβώς πρόβλημα αμφίπακτης δοκού και με την ίδια προσέγγιση (9.1.18) στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz. Επομένως παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των μεθόδων των Rayleigh–Ritz και του Galerkin συμπίπτουν στο παρόν πρόβλημα. Αυτό θα δούμε ότι παρατηρείται και σε άλλες περιπτώσεις.

Προχωράμε τώρα και στη δεύτερη προσέγγιση $v_2(x)$ του βέλους κάμψεως της δοκού με δύο συναρτήσεις $\varphi_1(x)$ και $\varphi_2(x)$ και με δύο άγνωστους συντελεστές c_1 και c_2 . Πρόκειται για την προσέγγιση (8.2.26) της ίδιας Παραγράφου Ε8.2.2. Και σε αυτήν την περίπτωση, τώρα με $n = 2$, εργαζόμαστε με τη μέθοδο του Galerkin και με δύο εξισώσεις σταθμισμένων υπολοίπων (9.1.7). Στην περίπτωση αυτή προκύπτει τελικά το ίδιο σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (8.2.28) και (8.2.29) και φυσικά μετά και οι ίδιες τιμές (8.2.30) των δύο άγνωστων συντελεστών c_1 και c_2 . Δηλαδή και εδώ ($n = 2$) παρατηρούμε τη σύμπτωση των αποτελεσμάτων των μεθόδων των Rayleigh–Ritz και του Galerkin στο παρόν πρόβλημα αμφίπακτης δοκού.

Αξιίζει πάντως να σημειώσουμε πέρα από τη σύμπτωση των προσεγγιστικών αποτελεσμάτων, την οποία ήδη παρατηρήσαμε και πράγματι ισχύει αρκετά συχνά, ότι το συναρτησιακό που ελαχιστοποιείται στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz, εδώ το συναρτησιακό (8.2.1), έχει σαν εξίσωση των Euler–Lagrange τη διαφορική εξίσωση που χρησιμοποιείται στη μέθοδο του Galerkin, εδώ την εξίσωση (8.2.2) ή (9.1.17).

Ε9.1.3

Ε9.1.3. Εφαρμογή σε πρόβλημα ροής Νευτώνειου ρευστού

Σαν δεύτερη εφαρμογή της μεθόδου του Galerkin (ή των Bubnov–Galerkin) θεωρούμε το πρόβλημα της μόνιμης ροής Νευτώνειου ρευστού σε ευθύγραμμο αγωγό ορθογωνικής διατομής $D = [-a, a] \times [-b, b]$. Αυτό το πρόβλημα το μελετήσαμε στην Ενότητα Ε8.3 του προηγούμενου Κεφαλαίου Ε8 εκεί με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz και συγκεκριμένα με την ελαχιστοποίηση του συναρτησιακού (8.3.2). Εδώ θα εργασθούμε με τη μέθοδο του Galerkin και συγκεκριμένα με βάση τη σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (8.3.1). Πρόκειται προφανώς για μια διδιάστατη εξίσωση του Poisson με σταθερό δεξιό μέλος. Την επαναλαμβάνουμε και εδώ

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = f \quad \text{με} \quad f = \frac{p_z}{\mu}, \quad -a \leq x \leq a \quad \text{και} \quad -b \leq y \leq b. \quad (9.1.21)$$

Οι σχετικές συνοριακές συνθήκες στο σύνορο της διατομής D του αγωγού είναι

$$v(\pm a, y) = 0 \quad \text{και} \quad v(x, \pm b) = 0 \quad \text{με} \quad -a \leq x \leq a \quad \text{και} \quad -b \leq y \leq b. \quad (9.1.22)$$

Αυτές αφορούν βέβαια στο μηδενισμό της ταχύτητας του Νευτώνειου ρευστού σε όλο το σύνορο της ορθογωνικής διατομής $D = [-a, a] \times [-b, b]$ του ευθύγραμμου αγωγού. Πρόκειται για τη *συνθήκη μη ολίσθησης* στο παρόν πρόβλημα ροής.

Για την προσεγγιστική επίλυση του προβλήματός μας θεωρούμε τις συναρτήσεις $\varphi_1(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$, $\varphi_2(x, y) = x^2\varphi_1(x, y)$, $\varphi_3(x, y) = y^2\varphi_1(x, y)$, κλπ. (9.1.23)

Αυτές οι συναρτήσεις πληρούν ασφαλώς και τις τέσσερις πιο πάνω συνοριακές συνθήκες (9.1.22). Επιπλέον όμως λαμβάνουν υπόψη και τη συμμετρία της διατομής

$D = [-a, a] \times [-b, b]$ του ευθύγραμμου αγωγού, δηλαδή είναι άρτιες συναρτήσεις ως προς και τις δύο μεταβλητές x και y πάνω στη διατομή D του ευθύγραμμου αγωγού.

Ξεκινάμε τώρα στη μέθοδο του Galerkin με ένα μόνο όρο ($n = 1$). Με χρήση λοιπόν μόνο της πρώτης συναρτήσεως $\varphi_1(x, y)$ από τις πιο πάνω συναρτήσεις (9.1.23) προσεγγίζουμε την άγνωστη συνάρτηση $v(x, y)$, που είναι βέβαια η ταχύτητα του Νευτώνειου ρευστού στον ευθύγραμμο αγωγό, με τη συνάρτηση

$$v_1(x, y) = c_1 \varphi_1(x, y) = c_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2). \quad (9.1.24)$$

Πρόκειται φυσικά για την ίδια ακριβώς συνάρτηση (8.3.7), που είχαμε χρησιμοποιήσει στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz στην Παράγραφο Ε8.3.3 για το ίδιο ακριβώς πρόβλημα και εκεί με $n = 1$. Εδώ όμως δεν ελαχιστοποιούμε κανένα συναρτησιακό. Απλά χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις (9.1.15), που τις προσδιορίσαμε με τη μέθοδο του Galerkin για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές x και y , στο παρόν πρόβλημα, δηλαδή στη διαφορική εξίσωση (9.1.21) εδώ βέβαια με $n = 1$. Σαν αποτέλεσμα προκύπτει η γραμμική αλγεβρική εξίσωση

$$-\frac{128}{45} a^3 b^3 (a^2 + b^2) c_1 = \frac{16}{9} a^3 b^3 f. \quad (9.1.25)$$

Αυτή μπορεί πολύ εύκολα να γραφεί και στην ισοδύναμη απλοποιημένη μορφή της

$$8(a^2 + b^2)c_1 + 5f = 0. \quad (9.1.26)$$

Παρατηρούμε ότι πρόκειται για την ίδια ακριβώς εξίσωση (8.3.10), που είχε προκύψει στην Παράγραφο Ε8.3.3 στο ίδιο πρόβλημα με την ίδια προσέγγιση (9.1.24) στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz. Επομένως ισχύουν παραπέρα και οι σχέσεις (8.3.11) και (8.3.12) εκείνης εκεί της Παραγράφου Ε8.3.3. Συγκεκριμένα για τον άγνωστο συντελεστή c_1 στην προσέγγιση $v_1(x, y)$, σχέση (9.1.24), ισχύει η σχέση (8.3.11), που την επαναλαμβάνουμε και εδώ

$$c_1 = -\frac{5f}{8(a^2 + b^2)}. \quad (9.1.27)$$

Παρουσιάζεται λοιπόν πλήρης σύμπτωση των αποτελεσμάτων των μεθόδων των Rayleigh–Ritz και του Galerkin στο παρόν πρόβλημα ροής Νευτώνειου ρευστού σε αγωγό και με τη ίδια αρχική προσέγγιση $v_1(x, y)$ της ταχύτητας $v(x, y)$ του ρευστού για $n = 1$. Εντούτοις τονίζουμε ότι εδώ με τη μέθοδο του Galerkin εργασθήκαμε με έναν εντελώς διαφορετικό τρόπο. Συγκεκριμένα μηδενίσαμε ένα σταθμισμένο υπόλοιπο και δεν ελαχιστοποιήσαμε ένα συναρτησιακό, όπως είχαμε κάνει στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz. Επομένως βασίζονται σε δύο εντελώς διαφορετικές αρχές αυτές οι δύο μέθοδοι: των Rayleigh–Ritz και του Galerkin. Και αυτό συμβαίνει παρά τη συχνή σύμπτωση των προσεγγιστικών αποτελεσμάτων τους υπό ακριβώς τις ίδιες συνθήκες: ίδιο πρόβλημα και ίδια προσέγγιση της άγνωστης συναρτήσεως.

Συνεχίζουμε το ίδιο πρόβλημα τώρα με $n = 3$ και συγκεκριμένα χρησιμοποιώντας και τις τρεις συναρτήσεις (9.1.23) στη σχετική προσέγγιση $v_3(x, y)$ της άγνωστης ταχύτητας $v(x, y)$ του Νευτώνειου ρευστού. Τότε για την προσέγγιση αυτή έχουμε

$$v_3(x, y) = c_1 \varphi_1(x, y) + c_2 \varphi_2(x, y) + c_3 \varphi_3(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(c_1 + c_2 x^2 + c_3 y^2). \quad (9.1.28)$$

Δουλεύουμε και πάλι με τις τελικές εξισώσεις σταθμισμένων υπολοίπων (9.1.15) στη μέθοδο του Galerkin για το παρόν πρόβλημα ροής με διαφορική εξίσωση την (9.1.21). Οδηγούμαστε έτσι στο ίδιο σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (8.3.18) έως (8.3.20) για τους άγνωστους συντελεστές c_1 , c_2 και c_3 και στα ίδια παραπέρα αποτελέσματα με εκείνα που είχαμε βρει στην Παράγραφο Ε8.3.4 για το ίδιο πρόβλημα ροής και την ίδια προσέγγιση (9.1.28), εκεί όμως με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz.

E9.2

E9.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ PETROV–GALERKIN

Η μέθοδος του Galerkin (ή ισοδύναμα η μέθοδος των Bubnov–Galerkin) είναι η βασική και υπολογιστικά πιο αποτελεσματική μέθοδος σε μια κατηγορία μεθόδων για την προσεγγιστική επίλυση διαφορικών εξισώσεων (είτε συνήθων είτε με μερικές παραγώγους). Σε αυτήν για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις γίνεται προσέγγιση της λύσεώς τους $y(x)$ από ένα γραμμικό συνδυασμό $y_n(x)$ κατάλληλα επιλεγμένων συναρτήσεων της μορφής (9.1.4). Αυτόν το γραμμικό συνδυασμό τον επαναλαμβάνουμε για διευκόλυνσή μας και εδώ

$$y(x) \approx y_n(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x). \quad (9.2.1)$$

Και ανάλογα ισχύουν βέβαια και για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

Εντούτοις η μέθοδος του Galerkin δεν είναι η μοναδική σχετική μέθοδος. Μερικές πολύ αξιολογες παραλλαγές της είναι επίσης ενδιαφέρουσες και θα τις αναφέρουμε σε αυτήν την ενότητα και στις αμέσως επόμενες τρεις ενότητες. Η μέθοδος του Galerkin και όλες αυτές οι μέθοδοι, που καλούνται **μέθοδοι σταθμισμένων υπολοίπων**, βασίζονται στο υπόλοιπο $R_n(x)$ στη σχέση (9.1.6), που την επαναλαμβάνουμε

$$R_n(x) = \mathcal{A}(D)y_n(x) - f(x). \quad (9.2.2)$$

Πρόκειται φυσικά για το σφάλμα που οφείλεται απλά στο ότι στη διαφορική μας εξίσωση (9.1.2), την υπενθυμίζουμε

$$\mathcal{A}(D)y(x) = f(x) \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \mathcal{A}(D)y(x) - f(x) = 0, \quad (9.2.3)$$

θέσαμε την προσέγγιση $y_n(x)$ στη θέση της άγνωστης συναρτήσεως $y(x)$. Και είναι σαφές ότι αυτή η ενέργειά μας δημιουργεί σφάλμα, εδώ το πιο πάνω υπόλοιπο $R_n(x)$.

Τώρα πιο συγκεκριμένα η μέθοδος του Galerkin βασίζεται στο μηδενισμό των σχετικών σταθμισμένων υπολοίπων (9.1.7), δηλαδή στις n εξισώσεις

$$\int_a^b R_n(x)\varphi_m(x) dx = 0 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9.2.4)$$

Σε αυτά τα ολοκληρώματα οι n συναρτήσεις $\varphi_m(x)$ είναι οι σχετικές **συναρτήσεις βάρους**. Αυτές οι εξισώσεις (9.2.4) συνήθως (και συγκεκριμένα για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις) είναι συστήματα n γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Η λύση τους καθορίζει τους n μέχρι τώρα άγνωστους συντελεστές c_k στο γραμμικό συνδυασμό (9.2.1) για την προσέγγιση $y_n(x) \approx y(x)$ της άγνωστης συναρτήσεως $y(x)$ στη διαφορική εξίσωση (9.2.3) που θέλουμε να λύσουμε, εδώ βέβαια προσεγγιστικά. Και με αυτόν τον καθορισμό προσδιορίζεται πλήρως αυτή η προσέγγιση $y_n(x) \approx y(x)$, που γενικά βελτιώνεται καθώς αυξάνεται ο αριθμός n των όρων στον παραπάνω γραμμικό συνδυασμό (9.2.1). Τότε όμως φυσικά αυξάνεται και ο ίδιος αριθμός n των εξισώσεων (9.2.4).

Η βασική γενίκευση της μεθόδου του Galerkin (ή των Bubnov–Galerkin) είναι η μέθοδος των Petrov–Galerkin. Στη μέθοδο αυτή πολύ απλά γενικεύουμε τις εξισώσεις (9.2.4) επιλέγοντας τώρα τις συναρτήσεις βάρους $\varphi_m(x)$ στα ολοκληρώματα των αριστερών μελών τους, δηλαδή στα σταθμισμένα (εννοείται με τις συναρτήσεις βάρους $\varphi_m(x)$) ολοκληρώματα, να είναι γενικά διαφορετικές συναρτήσεις $\psi_m(x)$ από τις συναρτήσεις $\varphi_m(x)$ στο γραμμικό συνδυασμό (9.2.1). Αυτή η γενίκευση, δηλαδή τα σύνολα των συναρτήσεων $\varphi_m(x)$ στο γραμμικό συνδυασμό (9.2.1) και $\psi_m(x)$

στις εξισώσεις (9.2.4) να μην είναι τώρα ακριβώς τα ίδια, δημιουργεί τη μέθοδο των Petrov–Galerkin. Άρα σε αυτήν τη νέα μέθοδο, που είναι προφανώς μια εύλογη γενίκευση της μεθόδου του Galerkin, για τον προσδιορισμό των n συντελεστών c_k στο γραμμικό συνδυασμό (9.2.1) χρησιμοποιούμε τις n εξισώσεις

$$\int_a^b R_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (9.2.5)$$

αντί για τις n εξισώσεις (9.2.4). Τόσο απλά!

Δηλαδή τώρα “σταθμίζουμε” τα υπόλοιπα $R_n(x)$ στα n ολοκληρώματα των πιο πάνω σχέσεων με συναρτήσεις βάρους τις καταρχήν αυθαίρετες συναρτήσεις $\psi_m(x)$ αντί για τις βασικές μας συναρτήσεις $\varphi_m(x)$, που συνεχίζουμε και τώρα να χρησιμοποιούμε στο γραμμικό συνδυασμό (9.2.1). Και δεν έχουμε βέβαια καμία απολύτως αλλαγή σε αυτόν το γραμμικό συνδυασμό: μένει ακριβώς ο ίδιος. Μόνο οι n συναρτήσεις βάρους έχουν αλλάξει στα ολοκληρώματα των εξισώσεων (9.2.5): από $\varphi_m(x)$ που ήσαν στις εξισώσεις (9.2.4) της μεθόδου του Galerkin έγιναν τώρα $\psi_m(x)$ στις εξισώσεις (9.2.5) της μεθόδου των Petrov–Galerkin, που είναι απλά μια γενίκευσή της.

Είναι επίσης προφανές ότι ανάλογα ισχύουν και σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, π.χ. στη διαφορική εξίσωση (9.1.11) με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, κλπ. Μόνο που εκεί εννοείται ότι αντί για x θα έχουμε όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές στο γραμμικό συνδυασμό (9.2.1) και παραπέρα και στις εξισώσεις (9.2.5) για τη μέθοδο των Petrov–Galerkin. Και επίσης στις ίδιες εξισώσεις η ολοκλήρωση θα γίνεται σε όλη την περιοχή D , όπου ισχύει (ή θέλουμε να ισχύει) η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Παραδείγματος χάρη, εάν εργαζόμαστε στις τρεις διαστάσεις (x, y, z) , ο γραμμικός συνδυασμός (9.2.1) θα πάρει τη μορφή

$$u(x, y, z) \approx u_n(x, y, z) = c_1 \varphi_1(x, y, z) + c_2 \varphi_2(x, y, z) + \dots + c_n \varphi_n(x, y, z) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x, y, z) \quad (9.2.6)$$

με άγνωστη συνάρτηση τώρα τη $u_n = u_n(x, y, z)$ αριστερά και δεξιά τις συναρτήσεις $\varphi_k(x, y, z)$. (Εντούτοις το άθροισμα δεξιά παραμένει και τώρα ένα απλό άθροισμα!)

Και ανάλογα οι n εξισώσεις (9.2.5), οι εξισώσεις των σταθμισμένων υπολοίπων που χρησιμοποιούμε, θα πάρουν και αυτές τις τριδιάστατες μορφές τους

$$\iiint_D R_n(x, y, z) \psi_m(x, y, z) dx dy dz = 0 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9.2.7)$$

Εδώ στη μέθοδο των Petrov–Galerkin συναρτήσεις βάρους είναι οι συναρτήσεις $\psi_m(x, y, z)$, ενώ στην αρχική μέθοδο του Galerkin (ή των Bubnov–Galerkin) έχουμε σαν συναρτήσεις βάρους τις αρχικές μας συναρτήσεις $\varphi_m(x, y, z)$ του γραμμικού συνδυασμού (9.2.6). Δηλαδή στη μέθοδο του Galerkin, στην αρχική μας μέθοδο, απλά επιλέγουμε

$$\psi_m(x, y, z) = \varphi_m(x, y, z) \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (9.2.8)$$

στα σταθμισμένα (με τις συναρτήσεις $\psi_m(x, y, z)$) υπόλοιπα $R_n(x, y, z)$ των αριστερών μελών των εξισώσεων (9.2.7). Αυτές είναι οι εξισώσεις που χρησιμοποιούμε για τον προσδιορισμό των άγνωστων συντελεστών c_k στο γραμμικό συνδυασμό (9.2.6).

Η μέθοδος των Petrov–Galerkin είναι επομένως η γενική μέθοδος στις μεθόδους που καλούνται μέθοδοι σταθμισμένων υπολοίπων. Και θέτοντας στις σχετικές εξισώσεις (9.2.7) συγκεκριμένα σύνολα συναρτήσεων $\psi_m(x, y, z)$, παίρνουμε τις αντίστοιχες ειδικότερες μεθόδους. Και όπως αναφέραμε, χρησιμοποιώντας εκεί τις συναρτήσεις $\varphi_m(x, y, z)$, παίρνουμε τη μέθοδο του Galerkin, την αρχική μας μέθοδο.

Στις δύο αμέσως επόμενες ενότητες θα αναφερθούμε σε δύο ακόμη συνηθισμένες και πρακτικά ενδιαφέρουσες δυνατότητες επιλογής των συναρτήσεων $\psi_m(x, y, z)$. Πρόκειται για τις μεθόδους (α) του *συντοπισμού (collocation)* και (β) των *ελαχίστων τετραγώνων*. Όμως, όπως θα δούμε, η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων είναι μια κάπως διαφορετική μέθοδος ως προς την αρχή στην οποία βασίζεται.

Εννοείται ότι όλα αυτά ισχύουν ανεξάρτητα από τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών στη διαφορική μας εξίσωση (είτε συνήθη είτε με μερικές παραγώγους): μία μεταβλητή (π.χ. η x), δύο μεταβλητές (π.χ. οι x και y), τρεις μεταβλητές (π.χ., όπως εδώ, οι x , y και z) ή και τέσσερις μεταβλητές (π.χ. οι x , y , z και t). Ξεκινάμε!

E9.3

E9.3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΣΥΝΤΟΠΙΣΜΟΥ

E9.3.1

E9.3.1. Περιγραφή της μεθόδου του συντοπισμού

Στη μέθοδο του συντοπισμού (collocation method) στη μία διάσταση x οι συναρτήσεις βάρους $\psi_m(x)$ στην πιο πάνω γενική μέθοδο των Petrov–Galerkin, εξισώσεις (9.2.5), επιλέγονται σαν συναρτήσεις δέλτα του Dirac με βάση συγκεκριμένα σημεία x_m του διαστήματος ολοκλήρωσεως $[a, b]$. Συγκεκριμένα επιλέγονται σαν

$$\psi_m(x) = \delta(x - x_m) \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9.3.1)$$

Επομένως οι εξισώσεις (9.2.5) παίρνουν τώρα τις μορφές

$$\int_a^b R_n(x) \delta(x - x_m) dx = 0 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9.3.2)$$

Γνωρίζουμε όμως ότι για τη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(x)$ ισχύει η θεμελιώδης ιδιότητά της

$$\int_a^b g(x) \delta(x - \xi) dx = g(\xi) \quad \text{με} \quad a < \xi < b. \quad (9.3.3)$$

Επομένως οι πιο πάνω εξισώσεις (9.3.2) παίρνουν εδώ στη μέθοδο του συντοπισμού (collocation method) τις πάρα πολύ απλές μορφές τους

$$R_n(x_m) = 0 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9.3.4)$$

Αυτό σημαίνει πολύ απλά ότι η μέθοδος του συντοπισμού (collocation method) δεν είναι τίποτε άλλο παρά ο μηδενισμός του υπολοίπου $R_n(x)$ σε n συγκεκριμένα σημεία x_m του διαστήματος $[a, b]$ που μας ενδιαφέρει. Δηλαδή στα σημεία αυτά x_m ζητάμε να μην υπάρχει σφάλμα, να μηδενίζεται το σφάλμα, όταν προσεγγίζουμε την άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ στη διαφορική εξίσωσή μας (9.2.3) με την προσέγγισή της (9.2.1) σε μορφή γραμμικού συνδυασμού $y_n(x)$ των n συναρτήσεων $\varphi_k(x)$.

Αυτά ισχύουν φυσικά στη μία διάσταση για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Και ανάλογα βέβαια ισχύουν και σε περισσότερες διαστάσεις για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Για παράδειγμα, στις τρεις διαστάσεις (x, y, z) στη μέθοδο του συντοπισμού με n σημεία συντοπισμού (x_m, y_m, z_m) θέλουμε ασφαλώς να ισχύει

$$R_n(x_m, y_m, z_m) = 0 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9.3.5)$$

Αυτές είναι τώρα οι εξισώσεις με βάση τις οποίες θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές c_k στο γραμμικό συνδυασμό (9.2.6) για την προσέγγιση $u_n(x, y, z)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(x, y, z)$ στη διαφορική μας εξίσωση με μερικές παραγώγους (9.1.16). Ας προχωρήσουμε τώρα και σε μια εφαρμογή της μεθόδου του συντοπισμού.

E9.3.2

E9.3.2. Εφαρμογή σε πρόβλημα αμφίπακτης δοκού

Θεωρούμε και εδώ το πρόβλημα της αμφίπακτης δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI υπό τριγωνική κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x) = p_0 x$. Πρόκειται για το ίδιο πρόβλημα δοκού που μελετήσαμε ήδη στην Παράγραφο Ε8.2.2 με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz και στην Παράγραφο Ε9.1.2 με τη μέθοδο του Galerkin (ή των Bubnov–Galerkin). Δεχόμαστε και εδώ σαν συναρτήσεις $\varphi_k(x)$ τις συναρτήσεις (8.2.6) της Παραγράφου Ε8.2.1. Τις επαναλαμβάνουμε

$$\varphi_k(x) = x^{k+1}(L-x)^2 \quad \text{με } k = 1, 2, \dots \quad (9.3.6)$$

Η κλασική σχετική διαφορική εξίσωση (8.2.2) της συνήθους δοκού παίρνει εδώ για φόρτιση $p(x) = p_0 x$ τη μορφή

$$EIv''''(x) = p_0 x. \quad (9.3.7)$$

Για το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού θεωρούμε φυσικά και εδώ ότι προσεγγίζεται από το γραμμικό συνδυασμό (9.2.1), που εδώ με v αντί για y παίρνει τη μορφή

$$v(x) \approx v_n(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x). \quad (9.3.8)$$

Δεχόμαστε στην αρχή ότι $n = 1$. Τότε έχουμε απλά, όπως και στη σχέση (8.2.7) της Παραγράφου Ε8.2.1 με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz,

$$v_1(x) = c_1 \varphi_1(x) = c_1 x^2(L-x)^2 \quad (9.3.9)$$

και πρέπει να προσδιορίσουμε το μοναδικό συντελεστή c_1 . Όπως ήδη εξηγήσαμε, στη μέθοδο του συντοπισμού θέλουμε το μηδενισμό του σφάλματος $R_n(x)$ (εδώ του σφάλματος $R_1(x)$) σε n σημεία συντοπισμού x_m (εδώ σε ένα σημείο συντοπισμού x_1).

Επιλέγοντας σαν σημείο συντοπισμού το σημείο $x_1 = L/3$ της δοκού, απαιτούμε να ισχύει $R_1(L/3) = 0$. Τότε προκύπτει η εξίσωση

$$24EIc_1 - \frac{p_0 L}{3} = 0, \quad \text{οπότε } c_1 = \frac{p_0 L}{72EI} \quad \text{και τελικά } v_1(x) = \frac{p_0 L}{72EI} x^2(L-x)^2. \quad (9.3.10)$$

Εδώ όμως γνωρίζουμε από τη σχέση (8.2.16) ότι η λύση του παρόντος τόσο απλού προβλήματος αμφίπακτης δοκού με $p(x) = p_0 x$ είναι

$$v(x) = \frac{p_0}{120EI} x^2(L-x)^2(2L+x). \quad (9.3.11)$$

Συγκρίνουμε τώρα αυτήν την ακριβή λύση $v(x)$ με την προσεγγιστική λύση $v_1(x)$ στη σχέση (9.3.10). Έτσι βρίσκουμε ότι το σφάλμα

$$\varepsilon_1(x) = v(x) - v_1(x) \quad (9.3.12)$$

της πιο πάνω προσεγγίσεως $v_1(x)$ στη σχέση (9.3.10) δεξιά παίρνει τη μέγιστη τιμή του (υποθέτοντας για υπολογιστική ευκολία μας μοναδιαίες τιμές των σταθερών: $L = 1$, $EI = 1$ και $p_0 = 1$)

$$\|\varepsilon_1\|_\infty := \max_{0 \leq x \leq 1} |\varepsilon_1(x)| \approx 0.000452239 \quad \text{στη θέση } x = 0.568103 \quad (9.3.13)$$

της αμφίπακτης δοκού μας (εδώ με $L = 1$). Επίσης για το ίδιο σφάλμα $\varepsilon_1(x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική νόρμα $\|\varepsilon_1\|_2$ στη σχέση (8.2.23) προκύπτει ότι έχει εδώ την τιμή

$$\|\varepsilon_1\|_2 := \sqrt{\int_0^L \varepsilon_1^2(x) dx} = \sqrt{\int_0^L [v(x) - v_1(x)]^2 dx} \approx 0.000281164 \frac{|p_0|}{EI} \sqrt{L^{11}}. \quad (9.3.14)$$

Εναλλακτικά, επιλέγοντας τώρα σαν σημείο συντοπισμού το σημείο $x_1 = L/2$ της δοκού, απαιτούμε να ισχύει $R_1(L/2) = 0$. Τότε προκύπτει η εξίσωση

$$24EIc_1 - \frac{p_0L}{2} = 0, \quad \text{οπότε} \quad c_1 = \frac{p_0L}{48EI} \quad \text{και τελικά} \quad v_1(x) = \frac{p_0L}{48EI} x^2(L-x)^2. \quad (9.3.15)$$

Συγκρίνουμε ξανά την παραπάνω ακριβή λύση $v(x)$ στη σχέση (9.3.11) με την καινούργια προσεγγιστική λύση $v_1(x)$ στην αμέσως πιο πάνω σχέση (9.3.15). Βρίσκουμε έτσι ότι το σφάλμα (9.3.12) της παραπάνω προσεγγίσεως $v_1(x)$ στη σχέση (9.3.15) δεξιά παίρνει τη μέγιστη τιμή του (υποθέτοντας κι εδώ για υπολογιστική ευκολία μας μοναδιαίες τιμές των σταθερών: $L = 1$, $EI = 1$ και $p_0 = 1$)

$$\|e_1\|_\infty := \max_{0 \leq x \leq 1} |e_1(x)| \approx 0.0000745348 \quad \text{στη θέση} \quad x = 0.722948 \quad (9.3.16)$$

της αμφίπακτης δοκού μας (εδώ με $L = 1$). Επίσης για το ίδιο σφάλμα $e_1(x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική νόρμα $\|e_1\|_2$ στη σχέση (8.2.23) προκύπτει ότι παίρνει την τιμή

$$\|e_1\|_2 := \sqrt{\int_0^L e_1^2(x) dx} = \sqrt{\int_0^L [v(x) - v_1(x)]^2 dx} \approx 0.0000500521 \frac{|p_0|}{EI} \sqrt{L^{11}}. \quad (9.3.17)$$

Τέλος, επιλέγοντας σαν σημείο συντοπισμού το σημείο $x_1 = 2L/3$ της δοκού, απαιτούμε να ισχύει $R_1(2L/3) = 0$. Τότε προκύπτει η εξίσωση

$$24EIc_1 - \frac{2p_0L}{3} = 0, \quad \text{οπότε} \quad c_1 = \frac{p_0L}{36EI} \quad \text{και τελικά} \quad v_1(x) = \frac{p_0L}{36EI} x^2(L-x)^2. \quad (9.3.18)$$

Συγκρίνουμε και τώρα την παραπάνω ακριβή λύση $v(x)$ στη σχέση (9.3.11) με την καινούργια μας προσεγγιστική λύση $v_1(x)$ στην αμέσως πιο πάνω σχέση (9.3.18). Διαπιστώνουμε έτσι πως το σφάλμα (9.3.12) της πιο πάνω προσεγγίσεως $v_1(x)$ στη σχέση (9.3.18) δεξιά παίρνει τη μέγιστη τιμή του (υποθέτοντας ξανά για υπολογιστική ευκολία μας μοναδιαίες τιμές των σταθερών: $L = 1$, $EI = 1$ και $p_0 = 1$)

$$\|e_1\|_\infty := \max_{0 \leq x \leq 1} |e_1(x)| \approx 0.000452239 \quad \text{στη θέση} \quad x = 0.431928 \quad (9.3.19)$$

της αμφίπακτης δοκού μας (εδώ με $L = 1$). Επίσης γι' αυτό το σφάλμα $e_1(x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική νόρμα $\|e_1\|_2$ στη σχέση (8.2.23) προκύπτει ότι παίρνει την τιμή

$$\|e_1\|_2 := \sqrt{\int_0^L e_1^2(x) dx} = \sqrt{\int_0^L [v(x) - v_1(x)]^2 dx} \approx 0.000281164 \frac{|p_0|}{EI} \sqrt{L^{11}}. \quad (9.3.20)$$

Από τα παραπάνω αποτελέσματα με $n = 1$ και για τρία διαφορετικά σημεία συντοπισμού, συγκεκριμένα τα σημεία $x_1 = L/3$, $x_1 = L/2$ και $x_1 = 2L/3$, βλέπουμε πως το καλύτερο προσεγγιστικό αποτέλεσμα $v_1(x)$ για το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού το παίρνουμε για $x_1 = L/2$. Επίσης βλέπουμε πως στις άλλες δύο επιλογές μας (με $x_1 = L/3$ και με $x_1 = 2L/3$) παίρνουμε στο συγκεκριμένο πρόβλημα δοκού αποτελέσματα $v_1(x)$ περίπου της ίδιας ακρίβειας.

Και φυσικά είναι εύλογο να μην έχουμε τη δυνατότητα να βρούμε το πραγματικό βέλος κάμψεως $v(x)$ της αμφίπακτης δοκού μας υπό την παρούσα τριγωνική κάθετη κατανομημένη φόρτιση της $p(x) = p_0x$. Αυτό συμβαίνει, επειδή το αληθινό βέλος κάμψεως $v(x)$ στη σχέση (9.3.11) είναι πολυώνυμο πέμπτου βαθμού ως προς x , ενώ εμείς στην προσέγγισή μας (9.3.9) για το βέλος κάμψεως υποθέσαμε εδώ (με ένα μόνο σημείο συντοπισμού) ότι αυτό το βέλος κάμψεως είναι πολυώνυμο τετάρτου βαθμού. Άρα δικαιολογημένα και στις τρεις πιο πάνω επιλογές μας για το σημείο συντοπισμού x_1 , όπως προφανώς και σε οποιαδήποτε άλλη επιλογή του σημείου x_1

κάνουμε, υπεισέρχεται κάποιο σφάλμα στο βέλος κάμψεως $v_1(x)$ που βρίσκουμε προσεγγιστικά, εδώ με τη μέθοδο του συντοπισμού (collocation method).

Επομένως είναι προφανές ότι πρέπει να έχουμε τουλάχιστον $n = 2$ όρους στην προσέγγισή μας (9.3.8), έτσι ώστε να βρούμε τελικά το αληθινό βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού. Αυτό φαίνεται καθαρά από την προσέγγιση (9.3.8) με χρήση των συναρτήσεων $\varphi_k(x)$ των σχέσεων (9.3.6) (που πληρούν φυσικά και τις τέσσερις ομογενείς συνοριακές συνθήκες της αμφίπακτης δοκού μας). Δηλαδή θα έχουμε

$$v_2(x) = v(x) \quad \text{μόνο όταν} \quad n \geq 2. \quad (9.3.21)$$

Ας το επαληθεύσουμε αυτό το ενδιαφέρον συμπέρασμά μας και με πραγματικούς υπολογισμούς.

Θεωρούμε λοιπόν τώρα την περίπτωση όπου $n = 2$ στην προσέγγισή μας (9.3.8) με βάση πάλι τις συναρτήσεις (9.3.6). Επομένως τώρα θα έχουμε

$$v_2(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) = c_1x^2(L-x)^2 + c_2x^3(L-x)^2 = x^2(L-x)^2(c_1 + c_2x). \quad (9.3.22)$$

Επιλέγουμε τώρα σαν σημεία συντοπισμού τα δύο σημεία $x_{12} = L/3$ και $x_{22} = 2L/3$ και απαιτούμε το μηδενισμό του σφάλματος $R_2(x)$ σε αυτά τα δύο σημεία συντοπισμού, δηλαδή

$$R_2(x_{12}) = 0 \quad \text{και} \quad R_2(x_{22}) = 0. \quad (9.3.23)$$

Για τον προσδιορισμό των δύο άγνωστων συντελεστών c_1 και c_2 προκύπτει έτσι το πολύ απλό σύστημα των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$24EIc_1 - 8EILc_2 = \frac{p_0L}{3} \quad \text{και} \quad 24EIc_1 + 32EILc_2 = \frac{2p_0L}{3}. \quad (9.3.24)$$

Λύνοντάς το προκύπτουν οι τιμές αυτών των δύο συντελεστών

$$c_1 = \frac{p_0L}{60EI} \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{p_0}{120EI}. \quad (9.3.25)$$

Επομένως το βέλος κάμψεως $v_2(x)$ βρίσκεται από τη σχέση (9.3.22) να έχει τη μορφή

$$v_2(x) = \frac{p_0}{120EI} x^2(L-x)^2(2L+x). \quad (9.3.26)$$

Αυτή η μορφή συμπίπτει με την ακριβή λύση (9.3.11) του παρόντος προβλήματος αμφίπακτης δοκού υπό τριγωνική κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x) = p_0x$, που την είχαμε αναφέρει και στη σχέση (8.2.16) της Παραγράφου Ε8.2.2 του προηγούμενου Κεφαλαίου Ε8, που αφορούσε στη μέθοδο των Rayleigh-Ritz.

Δηλαδή εδώ με $n = 2$, όπως εξηγήσαμε και λίγο πιο πάνω, $v_2(x) \equiv v(x)$. Άρα δεν υπάρχει πια κανένα σφάλμα, δηλαδή

$$e_2(x) = v(x) - v_2(x) = 0. \quad (9.3.27)$$

Έτσι βρήκαμε τώρα το αληθινό βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού. Και διαφορετικά σημεία συντοπισμού x_{12} και x_{22} να είχαμε επιλέξει, στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα θα καταλήγαμε. Και επίσης, αν προχωρήσουμε σε προσεγγίσεις με περισσότερους όρους (με μεγαλύτερες τιμές του n), οι επόμενοι συντελεστές c_k θα προκύψουν ίσοι με το μηδέν. Στο συγκεκριμένο απλό πρόβλημα μας είναι άχρηστες οι παραπέρα προσεγγίσεις στη μέθοδο του συντοπισμού και ασφαλώς και σε οποιαδήποτε άλλη παραπλήσια μέθοδο. Κατά συνέπεια δεν έχει καμία έννοια να προχωρήσουμε σε παραπέρα προσεγγίσεις εδώ που ξέρουμε την ακριβή λύση $v(x)$ του προβλήματός μας, που αναφέρθηκε στη σχέση (9.3.11).

E9.4

E9.4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

E9.4.1

E9.4.1. Περιγραφή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων

Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων (method of least squares) είναι και αυτή μια πολύ ενδιαφέρουσα μέθοδος, που ανήκει επίσης στις μεθόδους των σταθμισμένων υπολοίπων αν και, για να είμαστε ειλικρινείς, με λίγο παράξενο τρόπο. Πιο συγκεκριμένα στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων αυτό που ζητάμε είναι πολύ απλά η ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος του τετραγώνου $R_n^2(x)$ του υπολοίπου $R_n(x)$ της σχέσεως (9.1.6) ή (9.2.2), το επαναλαμβάνουμε και εδώ αυτό το υπόλοιπο

$$R_n(x) = \mathcal{A}(D)y_n(x) - f(x), \quad (9.4.1)$$

στο διάστημα $[a, b]$ ισχύος της σχετικής διαφορικής εξισώσεως (9.1.2)

$$\mathcal{A}(D)y(x) - f(x) = 0 \quad \text{ή καλύτερα} \quad \mathcal{A}(D)y(x) = f(x). \quad (9.4.2)$$

Δηλαδή στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων απαιτούμε απλά την ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος

$$\int_a^b R_n^2(x) dx = \text{minimum} \quad (9.4.3)$$

και φυσικά γι' αυτό και την αποκαλούμε μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Με την έννοια αυτή της ελαχιστοποίησης ενός ολοκληρώματος η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων σχετίζεται, μοιάζει κάπως με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz. Μόνο που εκεί εμείς επιδιώκαμε την ελαχιστοποίηση ενός συναρτησιακού, ενώ εδώ επιδιώκουμε απλά την ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος του τετραγώνου $R_n^2(x)$ του υπολοίπου $R_n(x)$, δηλαδή του σφάλματος που οφείλεται στην προσέγγιση της άγνωστης λύσεως $y(x)$ της διαφορικής εξισώσεως (9.4.2) από το γραμμικό συνδυασμό (9.1.4) ή (9.2.1). Ας την επαναλάβουμε και αυτήν την προσέγγιση

$$y(x) \approx y_n(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x). \quad (9.4.4)$$

Για να τη δούμε όμως και λίγο καλύτερα αυτήν εδώ την ελαχιστοποίηση. Επειδή θέλουμε την ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος (9.4.3), που προφανώς εξαρτάται από τους n συντελεστές c_k στον αμέσως πιο πάνω γραμμικό συνδυασμό (9.4.4), θα πρέπει φυσικά οι μερικές παράγωγοι αυτού του ολοκληρώματος ως προς όλους αυτούς τους συντελεστές c_k να είναι όλες τους ίσες με το μηδέν. Δηλαδή, εκτελώντας τις μερικές παραγωγίσεις, διαπιστώνουμε ότι θα πρέπει να ισχύουν οι n εξισώσεις

$$\int_a^b R_n(x) \frac{\partial R_n(x)}{\partial c_m} dx = 0 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9.4.5)$$

Για την εύρεση αυτών των εξισώσεων λάβαμε ασφαλώς υπόψη μας ότι οι συντελεστές c_m (ή c_k , το ίδιο κάνει) δε σχετίζονται με τα όρια ολοκληρώσεως a και b ούτε βέβαια με τη μεταβλητή ολοκληρώσεως x . Επομένως οι σχετικές μερικές παράγωγοι (ως προς c_m) του ολοκληρώματος (9.4.3), που θέλουμε εδώ να ελαχιστοποιήσουμε, θα είναι ίσες με τα ολοκληρώματα των αντίστοιχων παραγώγων, δηλαδή των μερικών παραγώγων ως προς c_m του τετραγώνου $R_n^2(x)$ του υπολοίπου $R_n(x)$. Επειδή όμως

$$\frac{\partial R_n^2(x)}{\partial c_m} = 2R_n(x) \frac{\partial R_n(x)}{\partial c_m} \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (9.4.6)$$

απλοποιώντας και τη σταθερά 2, καταλήγουμε τελικά στις εξισώσεις (9.4.5) για τον προσδιορισμό των n άγνωστων συντελεστών, των σταθερών c_m (ή c_k , το ίδιο κάνει) στο γραμμικό συνδυασμό (9.4.4).

Και αν μάλιστα εισαγάγουμε το συμβολισμό

$$\psi_m(x) = \frac{\partial R_n(x)}{\partial c_m} \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (9.4.7)$$

γ' αυτές τις μερικές παραγώγους, μπορούμε να ξαναγράψουμε τις εξισώσεις (9.4.5) στη μορφή

$$\int_a^b R_n(x) \psi_m(x) dx = 0 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (9.4.8)$$

Συγκρίνοντας αυτές τις σχέσεις με τις σχέσεις (9.2.5), παρατηρούμε απλά ότι η παρούσα μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων είναι κατά κάποιον τρόπο και αυτή μέθοδος σταθμισμένων υπολοίπων. Μόνο που εδώ αυτή η στάθμιση γίνεται ως προς τις συναρτήσεις $\psi_m(x)$ των σχέσεων (9.4.7), δηλαδή ως προς τις μερικές παραγώγους του υπολοίπου $R_n(x)$ ως προς τους άγνωστους συντελεστές c_m . Δηλαδή εδώ αυτές οι συναρτήσεις $\psi_m(x)$ δεν είναι προκαθορισμένες, όπως συμβαίνει π.χ. στη μέθοδο του Galerkin ή στη μέθοδο του συντοπισμού, αλλά προκύπτουν κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ευρέσεως των άγνωστων συντελεστών c_m . Παρά το γεγονός αυτό και η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων θεωρείται και αυτή, όπως ήδη αναφέραμε, σαν μια μέθοδος σταθμισμένων υπολοίπων, ακριβώς όπως είναι και οι υπόλοιπες μέθοδοι αυτού του Κεφαλαίου Ε9.

E9.4.2

E9.4.2. Εφαρμογή σε πρόβλημα αμφίπακτης δοκού

Ας δούμε τώρα την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων στο πρόβλημα της αμφίπακτης δοκού με τριγωνική φόρτιση $p(x) = p_0 x$, που ήδη αναφέραμε και σε προηγούμενες παραγράφους. Με βάση την παράγραφο Ε9.3.2 ισχύει εδώ η διαφορική εξίσωση (9.3.7) και επιλέγουμε τις συναρτήσεις $\varphi_k(x)$ πάλι με βάση τις σχέσεις (9.3.6). Ξεκινώντας με $n = 1$, ορίζουμε τη σχετική πρώτη προσέγγιση $v_1(x)$ του άγνωστου βέλους κάμψεως $v(x)$ με βάση τη σχέση (9.3.9), την επαναλαμβάνουμε

$$v_1(x) = c_1 \varphi_1(x) = c_1 x^2 (L - x)^2. \quad (9.4.9)$$

Τώρα το σχετικό υπόλοιπο $R_1(x)$ προκύπτει αμέσως από τη σχέση (9.4.1), που εδώ παίρνει τη μορφή

$$R_1(x) = EI v_1''''(x) - p_0 x \quad (9.4.10)$$

και για $n = 1$

$$R_1(x) = EI v_1''''(x) - p_0 x = 24EIc_1 - p_0 x. \quad (9.4.11)$$

Εισάγοντας αυτό το υπόλοιπο $R_1(x)$ στο ολοκλήρωμα (9.4.3), το οποίο εμείς θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε, προκύπτει ότι πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση

$$K(c_1) = 576(EI)^2 L c_1^2 - 24EIL^2 p_0 c_1 + \frac{p_0^2 L^3}{3} = \text{minimum} \quad (9.4.12)$$

εννοείται ως προς τον άγνωστο συντελεστή c_1 στην αρχική μας προσέγγιση (9.4.9).

Παραγωγίζοντας αυτήν τη συνάρτηση $K(c_1)$ ως προς c_1 , προσδιορίζουμε αμέσως τη σχετική γραμμική αλγεβρική εξίσωση

$$1152(EI)^2 L c_1 - 24EI p_0 L^2 = 0. \quad (9.4.13)$$

Η λύση της για τον άγνωστο συντελεστή c_1 είναι

$$c_1 = \frac{p_0 L}{48EI}. \quad (9.4.14)$$

Επομένως η πρώτη προσέγγιση $v_1(x)$ στο παρόν πρόβλημα δοκού με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων παίρνει με βάση τη σχέση (9.4.9) τη μορφή

$$v_1(x) = \frac{p_0 L}{48EI} x^2(L-x)^2. \quad (9.4.15)$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η προσέγγιση συμπίπτει με την προσέγγιση (9.3.15), που είχαμε βρει στην Παράγραφο Ε9.3.2 με τη μέθοδο του συντοπισμού με σημείο συντοπισμού το σημείο $x_1 = L/2$. Εκεί αναφερθήκαμε επίσης και στα σφάλματα αυτής της προσεγγίσεως, που δεν υπάρχει βέβαια λόγος να τα επαναλάβουμε και εδώ. Και επίσης παρατηρούμε ότι η πιο πάνω προσέγγιση (9.4.15) δε συμπίπτει με τις προσεγγίσεις (9.3.10) και (9.3.18), που είχαμε βρει πάλι με τη μέθοδο του συντοπισμού για $n = 1$, αλλά με σημεία συντοπισμού τα σημεία $x_1 = L/3$ και $x_1 = 2L/3$ αντίστοιχα. Ε δεν είναι δυνατόν να συμπίπτουν όλες οι προσεγγίσεις για $n = 1$ ακόμη και για το παρόν πάρα πολύ απλό πρόβλημα αμφίπακτης δοκού υπό τριγωνική φόρτιση!

Σημειώνουμε ακόμη ότι προφανώς αντί να χρησιμοποιήσουμε πιο πάνω τον αρχικό τύπο μας (9.4.3) για το ολοκλήρωμα που πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε εδώ στη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων θα μπορούσαμε ασφαλώς εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (9.4.5) (βέβαια εδώ με $m = n = 1$), που προκύπτει με τη σχετική παραγωγή. Τελικά το ίδιο αποτέλεσμα θα προκύψει, αλλά προφανώς η κατευθείαν χρήση των εξισώσεων (εδώ της εξισώσεως) (9.4.5) είναι υπολογιστικά ωφέλιμη αν και μαθηματικά λιγότερο σαφής σαν μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων. Βέβαια αντίθετα μαθηματικά η εξίσωση (9.4.5) είναι πιο σαφής από τον τύπο (9.4.3) σαν μέθοδος σταθμισμένων υπολοίπων. Έτσι η εξίσωση (9.4.5) είναι και πολύ πιο κοντά στο θέμα του παρόντος Κεφαλαίου Ε9, το οποίο αφορά στις μεθόδους των σταθμισμένων υπολοίπων.

Γνωρίζουμε ήδη ότι η ακριβής λύση $v(x)$ του παρόντος προβλήματος αμφίπακτης δοκού (διαφορική εξίσωση (9.3.7) και σχετικές συνοριακές συνθήκες) δίνεται από τη σχέση (9.3.11). Η σχέση αυτή, η οποία είναι πολυώνυμο πέμπτου βαθμού για το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού, μας δηλώνει σαφώς ότι χρειαζόμαστε και τις δύο συναρτήσεις $\varphi_1(x)$ και $\varphi_2(x)$ στο γραμμικό συνδυασμό (9.4.4), ώστε να βρούμε την ακριβή λύση $v(x)$ του προβλήματός μας. Δηλαδή χρειάζεται να δεχθούμε βέλος κάμψεως της μορφής $v_2(x)$ στη σχέση (9.3.22), που την επαναλαμβάνουμε και εδώ

$$v_2(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) = c_1 x^2(L-x)^2 + c_2 x^3(L-x)^2 = x^2(L-x)^2(c_1 + c_2 x). \quad (9.4.16)$$

Το σχετικό υπόλοιπο, τώρα το $R_2(x)$, προκύπτει και πάλι από τη σχέση (9.4.1). Αυτή η σχέση παίρνει εδώ τη μορφή (9.4.10), που για $n = 2$ μας δίνει

$$R_2(x) = EIV_2''''(x) - p_0 x = 24EI[c_1 + (5x - 2L)c_2] - p_0 x. \quad (9.4.17)$$

Εισάγουμε τώρα αυτό το υπόλοιπο στο ολοκλήρωμα (9.4.3) που θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε. Έτσι προκύπτει ότι θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση

$$K(c_1, c_2) = 192(EI)^2 L(3c_1^2 + 3Lc_1c_2 + 7L^2c_2^2) - 8EIL^2(3c_1 + 4Lc_2)p_0 + \frac{p_0^2 L^3}{3} = \text{minimum} \quad (9.4.18)$$

προφανώς τώρα ως προς τους δύο άγνωστους συντελεστές c_1 και c_2 στην παρούσα δευτέρα (με $n = 2$) προσέγγιση (9.4.16).

Παραγωγίζουμε αυτήν τη συνάρτηση $K(c_1)$ ως προς τους συντελεστές c_1 και c_2 . Έτσι βρίσκουμε εύκολα τις δύο σχετικές γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις που είναι

$$EIL(48Eic_1 + 24EILc_2 - p_0L) = 0, \quad (9.4.19)$$

$$EIL(18Eic_1 + 84EILc_2 - p_0L) = 0. \quad (9.4.20)$$

(Εννοείται πως εδώ μπορούμε να απλοποιήσουμε τους παράγοντες EIL .) Η λύση αυτών των εξισώσεων μας δίνει τους δύο άγνωστους συντελεστές c_1 και c_2 , που είναι

$$c_1 = \frac{p_0L}{60EI} \quad \text{και} \quad c_2 = \frac{p_0}{120EI}. \quad (9.4.21)$$

Αυτές οι τιμές των συντελεστών c_1 και c_2 συμπίπτουν ασφαλώς με τις τιμές (9.3.25) στη μέθοδο του συντοπισμού. Αυτό είναι εύλογο, αφού τώρα με δύο συντελεστές c_1 και c_2 παίρνουμε την ακριβή λύση $v(x)$ του προβλήματός μας, που δίνεται από τη σχέση (9.3.11) ή εδώ με $n = 2$ ισοδύναμα (9.3.26). Την υπενθυμίζουμε αυτήν τη λύση

$$v(x) \equiv v_2(x) = \frac{p_0}{120EI} x^2(L-x)^2(2L+x). \quad (9.4.22)$$

Επομένως και με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για $n = 2$ πήραμε την ακριβή λύση $v(x)$ του προβλήματός μας εννοείται με βάση τις συναρτήσεις $\varphi_k(x)$ στις σχέσεις (9.3.6), που σίγουρα είναι οι πιο κατάλληλες για το παρόν πρόβλημα αμφίπακτης δοκού. Και ασφαλώς στο παρόν τόσο απλό πρόβλημά μας δεν υπάρχει κανένας λόγος να προχωρήσουμε σε παραπέρα προσεγγίσεις ας πούμε για $n = 3$. Εκτός βέβαια (και είναι πολύ λογικό αυτό) κι αν θέλουμε να βεβαιωθούμε ότι η πιο πάνω λύση (9.4.22), που ήδη βρήκαμε για $n = 2$, είναι πραγματικά η ακριβής λύση $v_2(x)$ του προβλήματός μας. Και φυσικά γενικά πρέπει να το κάνουμε αυτό, δηλαδή να προχωράμε σε μεγαλύτερες τιμές του n . Έτσι θα έχουμε μια καλή εικόνα για την ακρίβεια (ή συνήθως το σφάλμα) μιας προσεγγιστικής λύσεως που βρίσκουμε με κάποια προσεγγιστική μέθοδο, όπως εδώ με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

E9.5

E9.5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΚΑΝΤΟΡΟΒΙΧ

E9.5.1

E9.5.1. Περιγραφή της μεθόδου του Kantorovich

Η μέθοδος του Kantorovich είναι μια ενδιαφέρουσα μέθοδος σταθμισμένων υπολοίπων για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που έχει εφαρμογή κυρίως στην προσεγγιστική επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους σε μια ορθογωνική περιοχή $D = [a, b] \times [c, d]$. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (9.1.11), που είχαμε αναφέρει στην Ενότητα E9.1 για τη μέθοδο του Galerkin και που την επαναλαμβάνουμε και εδώ

$$\mathcal{A}(D_x, D_y)u(x, y) = f(x, y) \quad \text{με} \quad D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{και} \quad D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}. \quad (9.5.1)$$

Αυτή η εξίσωση έχει σαν ανεξάρτητες μεταβλητές τις x και y . Πολύ ωραία ως εδώ!

Παραπέρα στη μέθοδο του Galerkin είχαμε υποθέσει σχετική προσέγγιση $u_n(x, y)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(x, y)$ της μορφής (9.1.12) και συγκεκριμένα της μορφής

$$u(x, y) \approx u_n(x, y) = c_1\varphi_1(x, y) + c_2\varphi_2(x, y) + \dots + c_n\varphi_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k\varphi_k(x, y). \quad (9.5.2)$$

Δηλαδή απλά είχαμε χρησιμοποιήσει γραμμικό συνδυασμό n κατάλληλων συναρτήσεων $\varphi_k(x, y)$ και των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών x και y στη διαφορική μας

εξίσωση με μερικές παραγώγους (9.5.1). Τους άγνωστους συντελεστές c_k μπορούμε να τους υπολογίσουμε με τη μέθοδο του Galerkin (Ενότητα Ε9.1) ή με τη γενικότερη μέθοδο των Petrov–Galerkin (Ενότητα Ε9.2) και ειδικότερα με τη μέθοδο του συντοπισμού (Ενότητα Ε9.3) ή με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (Ενότητα Ε9.4).

Εδώ στη μέθοδο του Kantorovich τα πράγματα είναι εντελώς διαφορετικά επαναλαμβάνουμε για την πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (9.5.1) στην ορθογωνική περιοχή $D = [a, b] \times [c, d]$. Συγκεκριμένα εδώ εμείς υποθέτουμε προσέγγιση $u_n(x, y)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(x, y)$ της μορφής

$$u(x, y) \approx u_n(x, y) = c_1(y)\varphi_1(x) + c_2(y)\varphi_2(x) + \dots + c_n(y)\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k(y)\varphi_k(x) \quad (9.5.3)$$

ή εναλλακτικά (με το x στη θέση του y και αντίστροφα το y στη θέση του x)

$$u(x, y) \approx u_n^*(x, y) = c_1(x)\varphi_1(y) + c_2(x)\varphi_2(y) + \dots + c_n(x)\varphi_n(y) = \sum_{k=1}^n c_k(x)\varphi_k(y). \quad (9.5.4)$$

Τώρα στη σχέση (9.5.3) οι συναρτήσεις φ_k είναι συναρτήσεις μόνο της μεταβλητής x , δηλαδή $\varphi_k = \varphi_k(x)$. Άρα εύλογα επαληθεύουν τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες μόνο στις πλευρές $x = a$ και $x = b$ της ορθογωνικής περιοχής $D = [a, b] \times [c, d]$. Η εξάρτηση των προσεγγίσεων $u_n(x, y)$ από τη δεύτερη μεταβλητή y γίνεται μέσω των συντελεστών $c_k(y)$, που δεν είναι τώρα πια σταθερές, αλλά είναι συναρτήσεις της δεύτερης μεταβλητής y . Και επιπλέον αναλαμβάνουν και το έργο της πληρώσεως και των άλλων ομογενών συνοριακών συνθηκών, δηλαδή των συνοριακών συνθηκών και στις άλλες δύο πλευρές $y = c$ και $y = d$ της ορθογωνικής περιοχής $D = [a, b] \times [c, d]$. Και αντίστοιχα ισχύουν βέβαια εάν χρησιμοποιήσουμε στην παρούσα μέθοδο του Kantorovich τις δεύτερες προσεγγίσεις (9.5.4) αντί για τις πρώτες προσεγγίσεις (9.5.3), δηλαδή εάν εναλλάξουμε τους ρόλους των συμβόλων x και y .

Ας περιορισθούμε από εδώ και πέρα στην πρώτη μορφή προσεγγίσεως (9.5.3) στη μέθοδο του Kantorovich, μια που η δεύτερη μορφή της (9.5.4) είναι εντελώς παρόμοια. Καταρχήν παρατηρούμε πως το σφάλμα, το υπόλοιπο στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (9.5.1), που τη λύση της $u(x, y)$ προσεγγίζουμε εδώ με το γραμμικό συνδυασμό (9.5.3) στη μέθοδο του Kantorovich, έχει την έκφραση

$$R_n(x, y) = \mathcal{A}(D_x, D_y)u_n(x, y) - f(x, y) = \sum_{k=1}^n \mathcal{A}(D_x, D_y)[c_k(y)\varphi_k(x)] - f(x, y). \quad (9.5.5)$$

Προφανώς εδώ οι συναρτήσεις $\varphi_k(x)$ είναι γνωστές συναρτήσεις της μεταβλητής x και επαληθεύουν τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες για $x = a$ και $x = b$, όπως ήδη αναφέραμε. Αντίθετα οι μη σταθεροί (μεταβλητοί) συντελεστές $c_k(y)$ στον πιο πάνω γραμμικό συνδυασμό (9.5.3) είναι άγνωστες συναρτήσεις της δεύτερης μεταβλητής, της μεταβλητής y και θα πρέπει να επαληθεύουν και τις άλλες ομογενείς συνοριακές συνθήκες για $y = c$ και $y = d$, όπως επίσης ήδη αναφέραμε.

Για τον προσδιορισμό των n συντελεστών $c_k(y)$ (που, επαναλαμβάνουμε, εδώ δεν είναι σταθεροί, είναι μεταβλητοί) χρησιμοποιούμε εδώ στη μέθοδο του Kantorovich τις εξισώσεις (9.2.5) της γενικής μεθόδου των Petrov–Galerkin της Ενότητας Ε9.2. Δηλαδή εδώ χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις σταθμισμένων υπολοίπων

$$\int_a^b R_n(x, y)\psi_m(x) dx = 0 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (9.5.6)$$

εδώ βέβαια με $R_n(x, y)$ αντί απλά $R_n(x)$, γιατί έχουμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (9.5.1) και όχι τη συνήθη διαφορική εξίσωση (9.1.2). Και ασφαλώς

από εδώ και πέρα έχουμε πολλές δυνατότητες επιλογής των συναρτήσεων βάρους $\psi_m(x)$ σε αυτές τις εξισώσεις (9.5.6). Για παράδειγμα, επιλέγοντας $\psi_m(x) = \varphi_m(x)$, δηλαδή τις ίδιες συναρτήσεις που χρησιμοποιήσαμε στο γραμμικό συνδυασμό (9.5.3) για την προσέγγιση $u_n(x, y)$, παίρνουμε τις εξισώσεις σταθμισμένων υπολοίπων

$$\int_a^b R_n(x, y) \varphi_m(x) dx = 0 \quad \text{με} \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (9.5.7)$$

της μεθόδου του Galerkin. Αυτές είναι προφανώς γενικεύσεις των εξισώσεων (9.1.7) ή (9.2.4) και πάλι στη μέθοδο του Galerkin αλλά για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, ενώ αντίθετα εδώ έχουμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (9.5.1).

Και τώρα απομένει το κύριο καθήκον της εργασίας μας: ο προσδιορισμός των συντελεστών $c_k(y)$ στο γραμμικό συνδυασμό (9.5.3), που υιοθετήσαμε εδώ στη μέθοδο του Kantorovich. Αυτός ο προσδιορισμός γίνεται αμέσως από τις εξισώσεις (9.5.6) απλά αντικαθιστώντας σε αυτές τα υπόλοιπα $R_n(x, y)$ από τις εκφράσεις τους (9.5.5) φυσικά με τις συναρτήσεις $\varphi_m(x)$ γνωστές. Πολύ ωραία! Μόνο που ... Μόνο που εδώ υπάρχει ο διαφορικός τελεστής $\mathcal{A}(D_x, D_y)$ στις σχέσεις (9.5.5). Αυτός περιέχει και το σύμβολο D_y της μερικής παραγωγίσεως ως προς τη δεύτερη ανεξάρτητη μεταβλητή y , που εφαρμόζεται βέβαια στους συντελεστές $c_k(y)$. Επομένως αναγκαστικά προκύπτουν και παράγωγοι $c_k^{(i)}(y)$ αυτών των συντελεστών $c_k(y)$ ανάλογα βέβαια με την τάξη της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (9.5.1) ως προς y μόνο.

Επομένως οι παραπάνω εξισώσεις (9.5.6) εδώ στη μέθοδο του Kantorovich δεν είναι απλά αλγεβρικές εξισώσεις (συνήθως μάλιστα γραμμικές) όπως ήσαν στη γενική μέθοδο των Petrov–Galerkin και στις ειδικές περιπτώσεις της: στις μεθόδους του Galerkin (ή των Bubnov–Galerkin), του συντοπισμού, των ελαχίστων τετραγώνων, κλπ. Εδώ οι εξισώσεις (9.5.6) είναι διαφορικές εξισώσεις. Για την ακρίβεια στην περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (9.5.1), όπου περιορίζουμε την προσοχή μας, είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις εννοείται με άγνωστες συναρτήσεις τους συντελεστές $c_k(y)$. Για την ακρίβεια οι εξισώσεις (9.5.6) αποτελούν ένα σύστημα n συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό αυτών των n μη σταθερών (μεταβλητών) συντελεστών $c_k(y)$. Και επιπλέον κατά την επίλυση αυτού του συστήματος των n συνήθων διαφορικών εξισώσεων θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες στις δύο οριζόντιες πλευρές $y = c$ και $y = d$ της ορθογωνικής περιοχής $D = [a, b] \times [c, d]$ όπου εργαζόμαστε.

Αυτή λοιπόν είναι η ποινή μας, η τιμωρία μας. Έχοντας μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, την εξίσωση (9.5.1), εδώ στη μέθοδο του Kantorovich θελήσαμε να χρησιμοποιήσουμε συναρτήσεις $\varphi_k = \varphi_k(x)$ της μιας μόνο μεταβλητής x αντί και των δύο μεταβλητών x και y , όπως οφείλαμε και όπως πραγματικά κάναμε στη μέθοδο του Galerkin και γενικότερα στη μέθοδο των Petrov–Galerkin. Και ανάλογα στα σταθμισμένα υπόλοιπά μας (9.5.6) (με ειδική περίπτωση τους τα σταθμισμένα υπόλοιπα (9.5.7)) είχαμε μονοδιάστατα ολοκληρώματα στο διάστημα $[a, b]$ αντί για διδιάστατα ολοκληρώματα σε όλη την ορθογωνική περιοχή εργασίας μας $D = [a, b] \times [c, d]$, όπως οφείλαμε. Κερδίσαμε λοιπόν “μειώνοντας” (μέσα σε εισαγωγικά) με τεχνητό τρόπο τη διάσταση του προβλήματός μας: αντί για δύο διαστάσεις x και y δουλέψαμε στη μία διάσταση x . Και ήταν επομένως εύλογο για μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, την εξίσωση (9.5.1), την επαναλαμβάνουμε

$$\mathcal{A}(D_x, D_y)u(x, y) = f(x, y) \quad \text{με} \quad D_x \equiv \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{και} \quad D_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \quad (9.5.8)$$

να καταλήξουμε σε ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων (αντί σε σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων) για τους άγνωστους συντελεστές $c_k = c_k(y)$ που θα πρέπει

να προσδιορίσουμε. Αναμενόμενο ήταν αυτό έτσι όπως επιλέξαμε να δουλέψουμε εδώ με τη μέθοδο του Kantorovich. Αυτή είναι η μέθοδος Kantorovich ...

Ας το δούμε όμως το θέμα και από τη θετική του πλευρά. Εδώ στη μέθοδο του Kantorovich ας υποθέσουμε πως έχουμε τη δυνατότητα ακριβούς (χωρίς προσεγγίσεις) επιλύσεως του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (9.5.6) και συμβαίνει αυτό μερικές φορές. Πετυχαίνουμε έτσι την ακριβή (χωρίς προσεγγίσεις) εργασία μας ως προς τη μεταβλητή y περιορίζοντας έτσι τον προσεγγιστικό χαρακτήρα της μεθόδου του Kantorovich, που είναι βέβαια μια προσεγγιστική μέθοδος και συγκεκριμένα μια μέθοδος σταθμισμένων υπολοίπων. Εντούτοις σε αυτήν την περίπτωση για τον ίδιο αριθμό n όρων στο γραμμικό συνδυασμό (9.5.3) (ή εναλλακτικά (9.5.4)) στη μέθοδο του Kantorovich με εκείνο στο γραμμικό συνδυασμό (9.5.2) στη γενική μέθοδο των Petron-Galerkin (και ειδικότερα στη μέθοδο του Galerkin) παίρνουμε γενικά αρκετά καλύτερα αποτελέσματα με τη μέθοδο του Kantorovich. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της ακριβούς επιλύσεως του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων (9.5.6) ή (9.5.7). Άρα μερικές φορές αξίζει τον κόπο να χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του Kantorovich ιδίως για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους της μορφής (9.5.1) ή (9.5.8) που ισχύουν σε ορθογωνικές περιοχές $D = [a, b] \times [c, d]$.

Στη μέθοδο του Galerkin (ή των Bubnov-Galerkin) και γενικότερα στη μέθοδο των Petron-Galerkin (με ειδικές περιπτώσεις της τη μέθοδο του συντοπισμού και τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων) λέμε ότι με τη χρήση γραμμικού συνδυασμού για την προσέγγιση της λύσεως του προβλήματός μας κάναμε *διακριτοποίηση* του προβλήματος έχοντας να προσδιορίσουμε μόνο τους n άγνωστους συντελεστές c_k και όχι την πλήρη άγνωστη συνάρτηση. Αντίθετα εδώ στη μέθοδο του Kantorovich, όπου προσεγγίζουμε ως προς τη μεταβλητή x με συντελεστές $c_k = c_k(y)$, λέμε πως κάνουμε *ημιδιακριτοποίηση* (ή *μερική διακριτοποίηση*) του προβλήματος.

Προχωράμε τώρα και σε δύο απλές εφαρμογές της μεθόδου του Kantorovich.

E9.5.2

E9.5.2. Εφαρμογή σε πρόβλημα ροής Νευτώνειου ρευστού

Θεωρούμε και εδώ το πρόβλημα ροής Νευτώνειου ρευστού σε αγωγό ορθογωνικής διατομής. Αυτό το πρόβλημα το είδαμε επίσης στην Ενότητα E8.3 του αμέσως προηγούμενου Κεφαλαίου E8 με τη μέθοδο των Rayleigh-Ritz ελαχιστοποιήσεως του σχετικού συναρτησιακού (8.3.2), όπως επίσης και στην Παράγραφο E9.1.3 της Ενότητας E9.1 αυτού του Κεφαλαίου E9 με τη μέθοδο του Galerkin (ή των Bubnov-Galerkin). Η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους για την ταχύτητα $v(x, y)$ του ρευστού είναι η εξίσωση (8.3.1) της Παραγράφου E8.3.1. Αυτή έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial y^2} = f \quad (9.5.9)$$

με το $f = p_z/\mu$ μια γνωστή σταθερά, που ήδη την εξηγήσαμε στην Ενότητα E8.3. Αυτή η διαφορική εξίσωση αφορά στην ορθογωνική περιοχή $D = [-a, a] \times [-b, b]$, που είναι η διατομή του ευθύγραμμου αγωγού ροής του Νευτώνειου ρευστού μας. Οι ομογενείς συνοριακές συνθήκες του προβλήματος αφορούν στο μηδενισμό της ταχύτητας $v(x, y)$ του ρευστού σε όλο το σύνορο της περιοχής D και έχουν τη μορφή

$$v(\pm a, y) = 0 \quad \text{και} \quad v(x, \pm b) = 0 \quad \text{με} \quad -a \leq x \leq a \quad \text{και} \quad -b \leq y \leq b. \quad (9.5.10)$$

Εδώ που δουλεύουμε με τη μέθοδο του Kantorovich, υποθέτουμε συναρτήσεις $\varphi_k = \varphi_k(x)$ που εξαρτώνται μόνο από τη μεταβλητή x και έχουν εύλογα τη μορφή

$$\varphi_k(x) = (x^2 - a^2)x^{2(k-1)} \quad \text{με} \quad k = 1, 2, \dots \quad (9.5.11)$$

λόγω της συμμετρίας του προβλήματος. Και φυσικά πληρούνται και οι δύο πρώτες συνοριακές συνθήκες (9.5.10) για $x = \pm a$. Όσον αφορά στις άλλες δύο συνοριακές συνθήκες (9.5.10) για $y = \pm b$, αυτές θα ληφθούν υπόψη αργότερα. Άρα δεχόμαστε τις προσεγγίσεις $u_n(x, y)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(x, y)$ των σχέσεων (9.5.3). Εδώ όμως χρησιμοποιούμε το σύμβολο v αντί για το u για την άγνωστη συνάρτησή μας, δηλαδή για την ταχύτητα του Νευτώνειου ρευστού. Βέβαια με παρόμοιο τρόπο θα μπορούσαμε να είχαμε εργασθεί με τις συναρτήσεις $\varphi_k = \varphi_k(y)$ και με τις αντίστοιχες προσεγγίσεις (9.5.4).

Από εδώ και πέρα περιοριζόμαστε στην πρώτη προσέγγιση $v_1(x, y)$ (με $n = 1$) των σχέσεων (9.5.3). Αυτή η προσέγγιση έχει τη μορφή (εδώ πάλι με v αντί για u)

$$v_1(x, y) = c_1(y)\varphi_1(x) = c_1(y)(x^2 - a^2). \quad (9.5.12)$$

Παρατηρούμε ότι η αντίστοιχη μορφή που είχαμε χρησιμοποιήσει στη μέθοδο των Rayleigh-Ritz στην Ενότητα Ε8.3 ήταν η μορφή (8.3.7) και συγκεκριμένα

$$v_1(x, y) = c_1\varphi_1(x, y) = c_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2). \quad (9.5.13)$$

Δηλαδή εκεί είχαμε $\varphi_1 = \varphi_1(x, y)$, ενώ εδώ στη μέθοδο του Kantorovich έχουμε απλά $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ έχοντας ενσωματώσει τη μεταβλητή y στον άγνωστο συντελεστή $c_1(y)$. Επομένως με τη μεταβλητή y θα ασχοληθούμε αργότερα και συγκεκριμένα κατά τη διάρκεια της επιλύσεως της συνήθους διαφορικής εξίσωσης που θα προκύψει εδώ για τον άγνωστο συντελεστή $c_1(y)$, ο οποίος δεν είναι πια σταθερά.

Τώρα με βάση τη σχέση (9.5.5) για τα υπόλοιπα $R_n(x)$, εδώ για $n = 1$, και φυσικά για την παρούσα διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (9.5.9) έχουμε (επίσης εδώ με v για την άγνωστη συνάρτηση αντί για u στη σχέση (9.5.2))

$$R_1(x) = \frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1(x, y)}{\partial y^2} - f. \quad (9.5.14)$$

Αντικαθιστώντας εδώ την παραπάνω έκφραση (9.5.12) της προσεγγίσεως $v_1(x, y)$ της άγνωστης συναρτήσεως $v(x, y)$ και εκτελώντας τις σχετικές πολύ απλές παραγωγίσεις, βρίσκουμε πολύ εύκολα ότι στην παρούσα περίπτωση το υπόλοιπο $R_1(x, y)$ δίνεται από τη σχέση

$$R_1(x, y) = 2c_1(y) + (x^2 - a^2)c_1''(y) - f. \quad (9.5.15)$$

Επομένως μας μένει τώρα να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (9.5.6) στη μέθοδο των Petrov-Galerkin για να οδηγηθούμε στη συνήθη διαφορική εξίσωση για τον προσδιορισμό του άγνωστου συντελεστή $c_1(y)$. Εδώ επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του Galerkin (ή των Bubnov-Galerkin) στην επιλογή των συναρτήσεων βάρους $\psi_m(x)$. Επομένως εδώ ισχύουν οι σχέσεις (9.5.7), δηλαδή οι σχέσεις (9.5.6) με $\psi_m(x) = \varphi_m(x)$ και συγκεκριμένα με

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x) = x^2 - a^2 \quad (9.5.16)$$

με βάση τις σχέσεις (9.5.11) και εδώ την πρώτη από αυτές για $k = 1$, επειδή εργαζόμαστε με $n = 1$. Κατά συνέπεια από τις εξισώσεις σταθμισμένων υπολοίπων (9.5.7), εδώ με $n = 1$, παίρνουμε

$$\int_{-a}^a R_1(x, y)\varphi_1(x) dx = 0. \quad (9.5.17)$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη μας τη σχέση (9.5.15) για το υπόλοιπο $R_1(x)$ καθώς και τη σχέση (9.5.16) για τη συνάρτηση $\varphi_1(x)$, προκύπτει αμέσως ότι

$$\int_{-a}^a [2c_1(y) + (x^2 - a^2)c_1''(y) - f](x^2 - a^2) dx = 0. \quad (9.5.18)$$

Εκτελούμε τώρα αυτήν την ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή x , οπότε και απαλλασσόμαστε από αυτήν τη μεταβλητή x . Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε (μετά και τη σχετική απλοποίηση) τη συνήθη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως

$$4a^2 c_1''(y) - 10c_1(y) = -5f \quad \text{με} \quad -b \leq y \leq b. \quad (9.5.19)$$

Αυτή η συνήθης διαφορική εξίσωση συνοδεύεται ασφαλώς και από τις δύο συνοριακές συνθήκες που μας απομένουν να λάβουμε υπόψη μας, δηλαδή τις συνθήκες

$$c_1(\pm b) = 0. \quad (9.5.20)$$

Αυτές προκύπτουν αμέσως από τις αρχικές μας συνοριακές συνθήκες $v(x, \pm b) = 0$ στις σχέσεις (9.5.10) με την παρούσα προσέγγιση $v_1(x, y)$ στη σχέση (9.5.12) της άγνωστης συναρτήσεως $v(x, y)$: της ταχύτητας του Νευτώνειου ρευστού στον αγωγό.

Αυτή εδώ η βοηθητική διαφορική εξίσωση (9.5.19) είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως, με σταθερούς συντελεστές και με σταθερό δεξιό μέλος f . Η επίλυσή της μαζί με τις δύο συνοριακές συνθήκες (9.5.20) είναι αρκετά εύκολη. Προτιμώντας στη λύση μας αυτή $c_1(y)$ υπερβολικές συναρτήσεις αντί για εκθετικές συναρτήσεις, την παίρνουμε τελικά στη μορφή

$$c_1(y) = \frac{f}{2} \left(1 - \cosh \frac{\sqrt{10}y}{2a} \operatorname{sech} \frac{\sqrt{10}b}{2a} \right). \quad (9.5.21)$$

Θυμόμαστε βέβαια τις δύο γνωστές σχέσεις $\operatorname{sech} z = 1/\cosh z$ και $\cosh(-z) = \cosh z$. Έτσι διαπιστώνουμε αμέσως ότι πληρούνται κι οι δύο συνοριακές συνθήκες (9.5.20).

Με τη χρήση αυτού του συντελεστή $c_1(y)$ η προσέγγισή μας (9.5.12) (με $n = 1$) στο παρόν πρόβλημα ροής Νευτώνειου ρευστού παίρνει την τελική της μορφή

$$v_1(x, y) = \frac{f}{2} \left(1 - \cosh \frac{\sqrt{10}y}{2a} \operatorname{sech} \frac{\sqrt{10}b}{2a} \right) (x^2 - a^2). \quad (9.5.22)$$

Στη συνέχεια η παροχή Q του Νευτώνειου ρευστού στην παρούσα ροή του στον αγωγό, η οποία δίνεται από τη σχέση (8.3.4), παίρνει την προσεγγιστική της μορφή

$$Q_1 = \iint_D v_1(x, y) dx dy = \int_{-a}^a \int_{-b}^b v_1(x, y) dy dx = \frac{4a^3 f}{15} \left(-5b + \sqrt{10}a \tanh \frac{\sqrt{10}b}{2a} \right). \quad (9.5.23)$$

Επίσης η μέση ταχύτητα \bar{v} του ρευστού στη διατομή D του αγωγού θα είναι εδώ

$$\bar{v}_1 = \frac{Q_1}{4ab} = \frac{a^2 f}{15b} \left(-5b + \sqrt{10}a \tanh \frac{\sqrt{10}b}{2a} \right). \quad (9.5.24)$$

Ειδικά για $b = a$ (για τετραγωνική διατομή D του αγωγού) η σχέση (9.5.23) μας δίνει το προσεγγιστικό αποτέλεσμα

$$Q_1 \approx -0.558550 a^4 f. \quad (9.5.25)$$

Και προφανώς στην ίδια περίπτωση η μέση ταχύτητα \bar{v} του ρευστού στη διατομή του αγωγού θα είναι

$$\bar{v}_1 = \frac{Q_1}{4a^2} \approx -0.139638 a^2 f. \quad (9.5.26)$$

Συγκρίνουμε τώρα το πιο πάνω αποτέλεσμα (9.5.25) για την παροχή Q_1 του ρευστού με το αντίστοιχο αποτέλεσμα (8.3.14) με τη μέθοδο των Rayleigh-Ritz, που είναι

$$Q_1 \approx -0.555556 a^4 f, \quad (9.5.27)$$

καθώς και με το αντίστοιχο σχεδόν ακριβές αποτέλεσμα, που είναι

$$Q \approx -0.562308 a^4 f. \quad (9.5.28)$$

Έτσι παρατηρούμε ότι η μέθοδος του Kantorovich στο παρόν πρόβλημα ροής Νευτώνειου ρευστού μας δίνει για $n = 1$ ένα αρκετά ακριβέστερο αποτέλεσμα σε σύγκριση με το αντίστοιχο αποτέλεσμα που μας δίνει η μέθοδος των Rayleigh–Ritz. Φυσικά το κόστος μας γι' αυτήν τη βελτιωμένη ακρίβεια εδώ στη μέθοδο του Kantorovich είναι ότι χρειάστηκε να λύσουμε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών συγκεκριμένα τη διαφορική εξίσωση (9.5.19) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες της (9.5.20). Εήσαν λίγο-πολύ αναμενόμενα αυτά, αφού εδώ εργασθήκαμε με προσέγγιση μόνο ως προς την πρώτη μεταβλητή x . Αντίθετα ως προς τη δεύτερη μεταβλητή y λύσαμε με απόλυτα ακριβή τρόπο το πρόβλημα συνοριακών τιμών που προέκυψε από την προσέγγιση που ήδη κάναμε, δηλαδή την προσέγγισή μας ως προς τη μεταβλητή x .

E9.5.3

E9.5.3. Εφαρμογή σε πρόβλημα πακτωμένης τετραγωνικής πλάκας

Σαν μια δεύτερη και λίγο δυσκολότερη εφαρμογή της μεθόδου του Kantorovich θεωρούμε το πρόβλημα μιας τετραγωνικής συνήθους πλάκας $[-a, a] \times [-a, a]$ δυσκαμψίας D υπό ομοιόμορφη κάθετη κατανεμημένη φόρτιση p_0 . Η πλάκα θεωρείται εδώ πακτωμένη σε όλο το σύνορό της (και στις τέσσερις πλευρές της). Στο πρόβλημα της πλάκας το βέλος κάμψεως της (ή η βύθισή της) $w = w(x, y)$ επαληθεύει, όπως ήδη γνωρίζουμε, τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (εδώ με $p(x, y) = p_0$)

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p_0}{D} \quad \text{και πιο απλά} \quad \nabla^4 w = \frac{p_0}{D} \quad \text{με} \quad w = w(x, y). \quad (9.5.29)$$

Εδώ λόγω της πακτώσεως της πλάκας σε όλο το σύνορό της (και στις τέσσερις πλευρές της) πρέπει να ισχύουν επίσης και οι οκτώ συνοριακές συνθήκες

$$w(\pm a, y) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}(\pm a, y) = 0, \quad w(x, \pm a) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial w}{\partial y}(x, \pm a) = 0. \quad (9.5.30)$$

Από αυτές οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες οι οποίες αφορούν στο ίδιο το βέλος κάμψεως $w(x, y)$ αναφέρονται στο μηδενισμό του σε όλο το σύνορο της παρούσας πακτωμένης πλάκας. Αντίθετα οι άλλες τέσσερις συνοριακές συνθήκες οι οποίες αφορούν σε πρώτες μερικές παραγώγους του βέλους κάμψεως $w(x, y)$ αναφέρονται στο μηδενισμό των σχετικών στροφών πάλι σε όλο το σύνορο της ίδιας πλάκας.

Θα χρησιμοποιήσουμε και στο παρόν πρόβλημα πλάκας τη μέθοδο του Kantorovich με ένα μόνο όρο (με $n = 1$). Δηλαδή θα εργασθούμε και εδώ ανάλογα με το προηγούμενο πρόβλημα της ροής Νευτώνειου ρευστού σε αγωγό. Εδώ όμως που έχουμε τέσσερις συνοριακές συνθήκες στις δύο πλευρές $x = \pm a$ της πλάκας, είμαστε προφανώς αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική συνάρτηση $\varphi_1(x)$. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση

$$\varphi_1(x) = (x^2 - a^2)^2. \quad (9.5.31)$$

Αυτή πληροί φυσικά και τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες στις δύο πλευρές $x = \pm a$ της πλάκας, δηλαδή τις συνθήκες

$$\varphi(\pm a) = 0 \quad \text{και} \quad \varphi'(\pm a) = 0. \quad (9.5.32)$$

Αυτές οι τέσσερις συνθήκες προκύπτουν από τις πρώτες συνθήκες (9.5.30) για $x = \pm a$.

Και στη συνέχεια, ακολουθώντας και εδώ τη μέθοδο του Kantorovich, δεχόμαστε σαν προσέγγιση $w_1(x, y)$ του βέλους κάμψεως $w(x, y)$ της πλάκας τη συνάρτηση

$$w_1(x, y) = c_1(y)\varphi_1(x) = c_1(y)(x^2 - a^2)^2. \quad (9.5.33)$$

Τώρα πια άγνωστη συνάρτηση είναι ο μη σταθερός (μεταβλητός) συντελεστής $c_1(y)$. Το σχετικό σφάλμα, το υπόλοιπο $R_1(x, y)$ που προκύπτει από την πιο πάνω διαφορική εξίσωση (9.5.29) της πλάκας θέτοντας $w_1 = w_1(x, y)$ στη θέση του $w = w(x, y)$ είναι

$$R_1(x, y) = \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} - \frac{p_0}{D} \quad \text{με} \quad w_1 = w_1(x, y). \quad (9.5.34)$$

Εκτελώντας τους σχετικούς υπολογισμούς με την πιο πάνω συνάρτηση $w_1(x, y)$ της σχέσεως (9.5.33) για το βέλος κάμψεως, βρίσκουμε γι' αυτό το υπόλοιπο $R_1(x, y)$ ότι

$$R_1(x, y) = 24c_1(y) + 8(3x^2 - a^2)c_1''(y) + (x^2 - a^2)^2 c_1''''(y) - \frac{p_0}{D}. \quad (9.5.35)$$

Αυτό το υπόλοιπο $R_1(x, y)$ το εισάγουμε τώρα στην εξίσωση (9.5.17) επιλέγοντας και τώρα εδώ στη μέθοδο του Kantorovich να δημιουργήσουμε τη σχετική συνήθη διαφορική εξίσωση με χρήση της μεθόδου του Galerkin: με την ίδια συνάρτηση $\varphi_1(x)$ της σχέσεως (9.5.31). Έτσι παίρνουμε την εξίσωση σταθμισμένων υπολοίπων

$$\int_{-a}^a R_1(x, y)\varphi_1(x) dx = 0. \quad (9.5.36)$$

Με την εκτέλεση των σχετικών υπολογισμών αυτή μας δίνει τη διαφορική εξίσωση

$$16a^4 c_1''''(y) - 96a^2 c_1''(y) + 504c_1(y) = \frac{21p_0}{D}. \quad (9.5.37)$$

Πρόκειται για συνήθη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως, γραμμική, με σταθερούς συντελεστές και μη ομογενή. Η λύση της θα μας δώσει τον άγνωστο συντελεστή $c_1(y)$ στην προσέγγιση $w_1(x, y)$ στη σχέση (9.5.33) του βέλους κάμψεως $w(x, y)$ της πλάκας.

Φυσικά εδώ πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και τις τελευταίες τέσσερις από τις οκτώ συνολικά συνοριακές συνθήκες (9.5.30) στις πλευρές $y = \pm a$ της τετραγωνικής πλάκας. Με βάση την παρούσα προσέγγιση (9.5.33) του βέλους κάμψεως $w(x, y)$ της πλάκας προκύπτει εύκολα ότι πρέπει να ισχύουν οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες

$$c_1(\pm a) = 0 \quad \text{και} \quad c_1'(\pm a) = 0. \quad (9.5.38)$$

Η λύση της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως (9.5.37) ως προς το συντελεστή $c_1(y)$ στην προσέγγιση (9.5.33) του βέλους κάμψεως, που συνοδεύεται από τις συνοριακές συνθήκες (9.5.38), είναι η εξής (με δεκαδικές προσεγγίσεις των σταθερών σε αυτήν):

$$c_1(y) \approx \frac{0.0209279p_0}{D} \left(1.99096 - \cos \frac{1.14291y}{a} \cosh \frac{2.07515y}{a} - 0.0875406 \sin \frac{1.14291y}{a} \sinh \frac{2.07515y}{a} \right). \quad (9.5.39)$$

Και φυσικά η προσέγγιση $w_1(x, y)$ του βέλους κάμψεως δίνεται από τη σχέση (9.5.33).

Η μέγιστη τιμή του βέλους κάμψεως παρουσιάζεται βέβαια στο κέντρο $O = (0, 0)$ της πλάκας και με βάση αυτήν την προσέγγιση $w_1(x, y)$ του βέλους κάμψεως είναι

$$w_{1, \max} = w_1(0, 0) \approx \frac{0.0207387a^4 p_0}{D}. \quad (9.5.40)$$

Η αντίστοιχη θεωρητική τιμή w_{\max} που προκύπτει από τη θεωρία των πλακών είναι

$$w_{\max} = w(0, 0) \approx \frac{0.00126(2a)^4 p_0}{D} = \frac{0.02016a^4 p_0}{D}. \quad (9.5.41)$$

Επομένως το σχετικό σφάλμα σε αυτήν τη μέγιστη τιμή w_{\max} είναι περίπου -2.87% .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε10

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN

ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο Κεφάλαιο αυτό Ε10 εξετάζονται οι συναρτήσεις Green. Πρόκειται για πρακτικά πολύ χρήσιμες συναρτήσεις που έχουν εφαρμογή στην επίλυση μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων είτε συνήθων είτε με μερικές παραγώγους. Οι συνθήκες που συνοδεύουν τη διαφορική εξίσωση είναι είτε ομογενείς αρχικές συνθήκες είτε πιο συχνά ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Για ένα τέτοιο πρόβλημα αρχικών ή συνοριακών τιμών στη μία διάσταση x (θέση ή χρόνος) προσδιορίζεται η σχετική συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ σαν λύση του ίδιου προβλήματος, αλλά με μοναδιαία σημειακή φόρτιση ή πηγή κλπ. σ' ένα μόνο σημείο $x = \xi$. Έτσι η διαφορική εξίσωση θα έχει σαν δεξιό μέλος της τη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(x - \xi)$. Τότε η άγνωστη συνάρτηση $y(x)$ για οποιαδήποτε φόρτιση ή πηγή, κλπ. $f(x)$ προσδιορίζεται μέσω ενός ολοκληρωτικού τύπου με πυρήνα τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$, που πολλαπλασιάζεται όμως επί το δεξιό μέλος $f(x)$ της διαφορικής εξίσωσης. Άρα, όταν αυτό αλλάξει, τότε η λύση του νέου προβλήματος προκύπτει αμέσως από τον ήδη γνωστό μας ολοκληρωτικό τύπο απλά με τη χρήση του νέου δεξιού μέλους $f(x)$ της διαφορικής εξίσωσης: της εισόδου στο σύστημα ή συναρτήσεως εξαναγκασμού ή φορτίσεως ή κατανομής πηγών, κλπ.

Για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης για τη συνάρτηση Green στη μία μόνο διάσταση συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Αυτή είναι εύκολα εφαρμόσιμη στην παρούσα περίπτωση που έχουμε δεξιά τη συνάρτηση δέλτα του Dirac. Μπορούμε όμως να αποφύγουμε το μετασχηματισμό Laplace επιλύοντας τη σχετική διαφορική εξίσωση και αριστερά και δεξιά από το σημείο $x = \xi$ της σημειακής (συγκεντρωμένης) φορτίσεως ή πηγής, κλπ. Ασφαλώς χρειάζεται επίσης να δώσουμε προσοχή στις αρχικές ή στις συνοριακές συνθήκες που ισχύουν καθώς και στις συνθήκες στο ίδιο το σημείο $x = \xi$.

Σημειώνεται επίσης ότι οι συναρτήσεις Green ουσιαστικά συμπίπτουν με τις συναρτήσεις επιρροής που είχαμε συναντήσει στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ. Επίσης διαπιστώνεται ότι για μια διαφορική εξίσωση τάξεως n η παράγωγος τάξεως $n-1$ της συναρτήσεως Green παρουσιάζει ασυνέχεια στο σημείο $x = \xi$ της φορτίσεως ή της πηγής, κλπ. Αντίθετα όλες οι παράγωγοι μικρότερης τάξεως (εάν βέβαια υπάρχουν) καθώς και η ίδια η συνάρτηση Green είναι συνεχείς σ' αυτό το σημείο $x = \xi$.

Στην πρώτη Ενότητα Ε10.1 αναφερόμαστε γενικά στις συναρτήσεις Green στη μία διάσταση και στη χρησιμότητά τους. Αναφέρουμε επίσης το σχετικό βασικό θεώρημα και το αποδεικνύουμε λεπτομερώς. Υπενθυμίζουμε μάλιστα και τη συνάρτηση δέλτα του Dirac που υπεισέρχεται στη διαφορική εξίσωση προσδιορισμού της συναρτήσεως Green. Στις Ενότητες Ε10.2, Ε10.3 και Ε10.4 παρουσιάζουμε τρεις εφαρμογές των συναρτήσεων Green ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού: (α) σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση, (β) σε καλώδιο (που προσεγγίζεται από χορδή) και (γ) σε δοκό με λάκτωση αριστερά και κύλιση δεξιά. Στην επόμενη Ενότητα Ε10.5 χρησιμοποιούμε λίγο διαφορετικά τη συνάρτηση Green σε ένα πρόβλημα μεταφοράς ρύπου με διάχυση στην Περιβαλλοντική Μηχανική. Τέλος στην τελευταία Ενότητα Ε10.6 αναφερόμαστε σε δύο συναρτήσεις Green αλλά τώρα στις δύο διαστάσεις: (α) στο πρόβλημα της ορθογωνικής πλάκας με έδραση (απλή στήριξη) σε όλο σύνορό της και (β) στην εξίσωση του Poisson.

E10.1

E10.1. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN ΣΤΗ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

E10.1.1

E10.1.1. Εισαγωγή στις συναρτήσεις Green

Οι συναρτήσεις Green είναι ιδιαίτερα χρήσιμες συναρτήσεις στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, όπως είναι και σε πολλές άλλες περιοχές της Επιστήμης του Μηχανικού, της Φυσικής και των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών γενικότερα. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών ή συνοριακών τιμών που αφορά σε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση n τάξεως της γενικής μορφής

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \quad (10.1.1)$$

με σταθερούς συντελεστές a_k ή γενικότερα με μη σταθερούς συντελεστές $a_k = a_k(x)$. Αυτήν τη διαφορική εξίσωση μπορούμε να τη γράψουμε πιο συνοπτικά στη μορφή

$$\mathcal{A}(D)y(x) = f(x) \quad (10.1.2)$$

έχοντας δηλώσει με $\mathcal{A}(D)$ το διαφορικό τελεστή του αριστερού μέλους της. Δηλαδή

$$\mathcal{A}(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \dots + a_1 D + a_0 \quad (10.1.3)$$

με το σύμβολο D^k να δηλώνει την παράγωγο τάξεως k ως προς τη μεταβλητή x .

Προφανώς σε ένα φυσικό πρόβλημα (όπως π.χ. σε ένα πρόβλημα ταλαντώσεων ή δοκού) η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση (10.1.1) ή ισοδύναμα (10.1.2) συνοδεύεται από n αρχικές ή συνοριακές συνθήκες με n την τάξη της γραμμικής διαφορικής εξισώσεως. Επομένως εδώ έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών ή ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών. Έτσι η λύση της, για την οποία ενδιαφερόμαστε εδώ, θα είναι η σχετική μερική λύση της (ή ειδική λύση της) $y_p(x)$ που θα επαληθεύει και τις αρχικές συνθήκες ή τις συνοριακές συνθήκες και όχι η γενική λύση της $y_g(x)$.

Ε δεν είναι δα κι η πρώτη φορά που αναφερόμαστε σε προβλήματα αρχικών τιμών ή συνοριακών τιμών. Ήδη στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II έχουμε αναφερθεί σε πολλά τέτοια προβλήματα για μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις τάξεως n της μορφής (10.1.1) ή ισοδύναμα (10.1.2). Και φυσικά σε πολλές περιπτώσεις έχουμε βρει και τις λύσεις τους, ιδίως εάν η μη ομογενής διαφορική εξίσωση είναι με σταθερούς συντελεστές. Για να γίνουμε λίγο πιο συγκεκριμένοι επαναλαμβάνουμε μια πολύ γνωστή εφαρμογή από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II συγκεκριμένα από το βιβλίο *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς*, Τεύχος 1.

❖ Εφαρμογή Ενότητα E10.1

▼ Εφαρμογή E10.1 ■ Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με απόσβεση

Θεωρούμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ασθενή (ή υποκρισίμη) απόσβεση ενός μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος. Ένα τέτοιο σύστημα μπορεί να είναι το κλασικό τριπαραμετρικό σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα ή ένα μονώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως (ή διατμητικό κτίριο) ή ένας ιδεατός υδατόπυργος. Επαναλαμβάνουμε ότι πρόκειται για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις του μηχανικού συστήματος. Επομένως η σχετική και ήδη πολύ γνωστή μας διαφορική εξίσωση

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (10.1.4)$$

είναι μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Εδώ m είναι η μάζα, c ο συντελεστής αποσβέσεως και k η σταθερά του ελατηρίου ή ο αντίστοιχος συντελεστής δυσκαμψίας. Επίσης η άγνωστη συνάρτηση $u(t)$ δηλώνει τη μετατόπιση της μάζας ή της πλάκας του μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως (ή διατμητικού κτιρίου) ή της δεξαμενής νερού του ιδεατού υδατόπυργου. Η συνάρτηση $p(t)$ στο δεξιό μέλος είναι η φόρτιση του παρόντος μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος, δηλαδή η εξωτερική δύναμη που ασκείται κατάλληλα σ' αυτό.

Φυσικά την ίδια διαφορική εξίσωση τη γράφουμε και στην ισοδύναμη μορφή

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad \text{με} \quad \xi = \frac{c}{2m\omega_0} \quad \text{και} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (10.1.5)$$

Το ξ καλείται *λόγος αποσβέσεως* και το ω_0 είναι η κυκλική συχνότητα του αντίστοιχου χωρίς απόσβεση (με $c = 0$ ή $\xi = 0$) μηχανικού συστήματος κι όχι του παρόντος. Εδώ εμείς υποθέσαμε ασθενή (ή υποκρισιμη) απόσβεση, δηλαδή ότι $0 < \xi < 1$.

Εδώ θεωρούμε επίσης μηδενικές αρχικές συνθήκες. Δηλαδή θεωρούμε μηδενική μετατόπιση και μηδενική ταχύτητα την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$:

$$u(0) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = 0. \quad (10.1.6)$$

Το πρόβλημα αυτό μπορούμε να το λύσουμε είτε με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων είτε με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων καταλήγουμε τελικά στη λύση (6.2.28) της Παραγράφου Α6.2.3 του Μέρους Α (*Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς*, Τεύχος 1). Τη λύση αυτή $u_p(t)$ την επαναλαμβάνουμε κι εδώ

$$u_p(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] p(\tau) d\tau \quad \text{με} \quad \omega_D = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}, \quad (10.1.7)$$

εδώ που έχουμε υποθέσει ότι έχουμε ασθενή απόσβεση, δηλαδή $0 < \xi < 1$. Στην ίδια ακριβώς λύση καταλήγουμε επίσης και με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Πρόκειται για την εξίσωση (11.8.11) της Ενότητας Α11.8 του Μέρους Α. Και ανάλογα ισχύουν σε ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση (απλά με $\xi = 0$), σε ταλαντώσεις με κρίσιμη απόσβεση (με $\xi = 1$) και σε ταλαντώσεις με ισχυρή (ή υπερκρίσιμη) απόσβεση (με $\xi > 1$). Επίσης θυμόμαστε πολύ καλά ότι η λύση αυτή (10.1.7) είναι μια μορφή του γνωστού μας *ολοκληρωτικού τύπου του Duhamel* ή πιο απλά *τύπου του Duhamel*.

Πολύ ωραία ως εδώ! Είχαμε τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (10.1.4) ή ισοδύναμα (10.1.5) με μηδενικές αρχικές συνθήκες $u(0) = 0$ και $\dot{u}(0) = 0$. Γι' αυτό το πρόβλημα αρχικών τιμών βρήκαμε (είτε με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων είτε με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace) τη λύση του $u_p(t)$ που μας ενδιαφέρει στον τύπο (10.1.7). Δηλαδή βρήκαμε τη λύση $u_p(t)$ του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών και όχι βέβαια τη γενική λύση $u_g(t)$ της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (10.1.4) ή (10.1.5). Δε μας ενδιαφέρει εδώ η γενική λύση $u_g(t)$. Γι' αυτό το πρόβλημα αρχικών τιμών απλά ξαναγράφουμε την ίδια ακριβώς λύση $u_p(t)$ στον τύπο (10.1.7) στην πλήρως ισοδύναμη μορφή της

$$u_p(t) = \int_0^t G(t, \tau) p(\tau) d\tau \quad (10.1.8)$$

απλά έχοντας ορίσει τη νέα συνάρτηση

$$G(t, \tau) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)]. \quad (10.1.9)$$

Αυτήν εδώ τη συνάρτηση $G(t, \tau)$ που μας επιτρέπει να γράψουμε τη λύση (10.1.7) στην πιο συνοπτική μορφή της (10.1.8) την αποκαλούμε **συνάρτηση Green** του παρόντος προβλήματος αρχικών τιμών. Είναι η συνάρτηση που υπεισέρχεται στον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.8), στον **ολοκληρωτικό τόπο του Duhamel**, στο συγκεκριμένο πρόβλημα που εξετάζουμε. Είναι ο **πορήνας** s' αυτόν εδώ τον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.8) και προφανώς είναι συνάρτηση δύο χρονικών μεταβλητών: του t και του τ . (Το τ είναι η μεταβλητή ολοκληρώσεως s' αυτόν τον ολοκληρωτικό τύπο.) ▲

Κι έτσι χωρίς να κουρασθούμε καθόλου, με τις ήδη έτοιμες γνώσεις μας από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II κάναμε κιόλας ένα πρώτο παράδειγμα συναρτήσεως Green. Στις επόμενες δύο Ασκήσεις E10.1 και E10.2 ακολουθούν δύο ακόμη εξίσου απλά και ανάλογα παραδείγματα ξανά στις Ταλαντώσεις.

Άσκηση

Ενότητα E10.1

▼ Άσκηση E10.1 ■ Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση

Με βάση την παραπάνω Εφαρμογή E10.1, αλλά και τις γνώσεις μας από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II, ποια είναι η συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ στον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.8), όταν δεν υπάρχει απόσβεση ($\xi = 0$) στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με μηδενικές αρχικές συνθήκες; **Υπόδειξη:** Τώρα, αφού $\xi = 0$, ισχύει $\omega_D = \omega_0$. ▲

Άσκηση

Ενότητα E10.1

▼ Άσκηση E10.2 ■ Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ισχυρή απόσβεση

Με βάση τις γνώσεις μας από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II (ή με εκτέλεση από την αρχή των σχετικών υπολογισμών) ποια είναι η συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ στον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.8), όταν υπάρχει ισχυρή (ή υπερκρίσιμη) απόσβεση ($\xi > 1$) στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με μηδενικές αρχικές συνθήκες; **Υπόδειξη:** Τώρα στη συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ θα έχουμε $a_D = \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$ αντί για $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$ που είχαμε στην περίπτωση της ασθενούς (ή υποκρίσιμης) αποσβέσεως. Επιπλέον θα έχουμε υπερβολικό ημίτονο (\sinh) αντί για τριγωνομετρικό ημίτονο (\sin). ▲

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση E10.1:** Γενικά οι συναρτήσεις Green αναφέρονται πιο συχνά σε προβλήματα που έχουν να κάνουν με τη θέση x παρά με το χρόνο t αντίθετα με την προηγούμενη εφαρμογή και τις προηγούμενες δύο ασκήσεις. Επίσης, κι αυτό είναι πιο σημαντικό, συνήθως αναφέρονται σε προβλήματα συνοριακών τιμών παρά σε προβλήματα αρχικών τιμών ξανά αντίθετα με την προηγούμενη εφαρμογή και τις προηγούμενες δύο ασκήσεις. Εντούτοις η χρήση τους είτε σε χρονικά προβλήματα είτε σε προβλήματα αρχικών τιμών, ακριβώς όπως συμβαίνει στην προηγούμενη εφαρμογή και στις προηγούμενες δύο ασκήσεις, είναι επίσης απόλυτα αποδεκτή. Κατά συνέπεια ο όρος **συνάρτηση Green** ισχύει σε κάθε περίπτωση ολοκληρωτικού τύπου για τη λύση ενός προβλήματος είτε αρχικών τιμών είτε συνοριακών τιμών είτε στο χώρο είτε στο χρόνο είτε και προβλήματος με συνθήκες και στο χώρο και στο χρόνο. (Αυτό μπορεί να συμβαίνει σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.) Η συνάρτηση Green αφορά στον **πορήνα** αυτού του ολοκληρωτικού τύπου, στην Εφαρμογή E10.1 του ολοκληρωτικού τύπου του Duhamel (10.1.7) ή (10.1.8). ▲

E10.1.2

E10.1.2. Ορισμός της συναρτήσεως Green

Προχωράμε τώρα στον επίσημο ορισμό της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$ στη μία διάσταση x (είτε στο χώρο είτε στο χρόνο). Αυτός είναι ο εξής ορισμός:

● ΟΡΙΣΜΟΣ

▼ **ΟΡΙΣΜΟΣ Ε10.1 (Συνάρτηση Green):** Θεωρούμε τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση n τάξεως της γενικής μορφής (10.1.1), την επαναλαμβάνουμε

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \quad (10.1.10)$$

ή σε πιο συνοπτική μορφή (10.1.2) σ' ένα διάστημα $[a, b]$ (με $a \leq x \leq b$) μαζί με n ομογενείς γραμμικές αρχικές ή πιο συχνά συνοριακές συνθήκες που τη συνοδεύουν. Για το πρόβλημα αυτό αρχικών τιμών ή συνοριακών τιμών ορίζουμε τη σχετική συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ σαν τον πυρήνα του ολοκληρωτικού τύπου

$$y_p(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (10.1.11)$$

που δίνει τη λύση του $y_p(x)$ εννοείται στο διάστημα $[a, b]$. Ο τύπος αυτός ισχύει για αυθαίρετο (οποιοδήποτε) δεξιό μέλος $f(x)$ στη διαφορική εξίσωση (10.1.10). Ασφαλώς το διάστημα ολοκληρώσεως $[a, b]$ μπορεί να είναι όχι μόνο πεπερασμένο $[a, b]$, αλλά και ημιάπειρο $(-\infty, b]$ ή $[a, \infty)$ ή άπειρο $(-\infty, \infty)$. ▲

Δηλαδή, με πολύ απλά λόγια, εάν ξέρουμε τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ σ' ένα πρόβλημα αρχικών ή πιο συχνά συνοριακών τιμών, τότε η λύση $y_p(x)$ του προβλήματος δίνεται για κάθε συνάρτηση $f(x)$ από τον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.11). Και μάλιστα προφανώς πληροῦται τόσο η διαφορική εξίσωση (10.1.10) όσο κι οι n ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες που τη συνοδεύουν. Φυσικά αυτές οι n ομογενείς γραμμικές συνθήκες περιλαμβάνουν σε κάθε όρο τους είτε την ίδια την άγνωστη συνάρτηση είτε παραγώγους της με γραμμικό τρόπο και δεν υπάρχει κανένας άλλος όρος, δηλαδή όρος που να μην περιέχει την άγνωστη συνάρτηση.

Για παράδειγμα, στην προηγούμενη Εφαρμογή Ε10.1 για τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ασθενή (ή υποκρισίμη) απόσβεση η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ήταν η διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (10.1.4) ή (10.1.5). Επίσης σχετικές ομογενείς συνθήκες ήσαν οι δύο αρχικές συνθήκες (10.1.6). Τέλος ολοκληρωτικός τύπος με τη χρήση συναρτήσεως Green $G(t, \tau)$ για τη λύση $u_p(t)$ αυτού του προβλήματος αρχικών τιμών ήταν ο τύπος (10.1.8). Ο πυρήνας $G(t, \tau)$ σ' αυτόν τον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.8), ο οποίος δίνεται σ' αυτήν εδώ την εφαρμογή από τον τύπο (10.1.9), είναι η σχετική συνάρτηση Green. Βέβαια σε τούτη την εφαρμογή είχαμε διαφορετικά σύμβολα από τα σύμβολα στις εξισώσεις (10.1.10) και (10.1.11), συγκεκριμένα είχαμε t αντί για x και τ αντί για ξ , κάτι που είναι φυσικά ασήμαντο.

Αυτό που είναι σημαντικό είναι να ξεκαθαρίσουμε περισσότερο την κατάσταση με τη συνάρτηση Green σ' ένα πρόβλημα είτε αρχικών είτε συνοριακών τιμών (στο χώρο ή στο χρόνο) και να έχουμε διαθέσιμο ένα συγκεκριμένο τρόπο προσδιορισμού της. Σχετικό είναι το ακόλουθο σημαντικό θεώρημα για τη συνάρτηση Green:

ΘΕΩΡΗΜΑ

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ Ε10.1 (Συνάρτηση Green):** Θεωρούμε τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ για ένα πρόβλημα είτε αρχικών είτε συνοριακών τιμών στο πεπερασμένο, ημιάπειρο ή άπειρο διάστημα $[a, b]$. Το πρόβλημα αυτό αφορά στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση n τάξεως (10.1.10), που συνοδεύεται από n ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες. Αυτή η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ προσδιορίζεται σαν η λύση της αντίστοιχης μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως

$$a_n G_x^{(n)}(x, \xi) + a_{n-1} G_x^{(n-1)}(x, \xi) + \dots + a_1 G_x'(x, \xi) + a_0 G(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (10.1.12)$$

μαζί βέβαια με τις ίδιες αρχικές ή συνοριακές συνθήκες φυσικά με δ τη συνάρτηση δέλτα του Dirac. Δηλαδή η συνάρτηση Green είναι η λύση $G(x, \xi)$ του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών, τώρα όμως με δεξιό μέλος στη διαφορική εξίσωση (10.1.10) τη συνάρτηση $\delta(x - \xi)$ στη θέση της συναρτήσεως $f(x)$. ▲

Εδώ οφείλουμε να σημειώσουμε ότι στην πιο πάνω μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (10.1.12) ο δείκτης x στις παραγώγους του αριστερού μέλους απλά θέλει να δηλώσει παραγωγίσεις της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$ ως προς την πρώτη μεταβλητή της x και όχι ως προς τη δεύτερη μεταβλητή της ξ . Και βέβαια είναι έτσι, αφού η ανεξάρτητη μεταβλητή ξ αυτήν τη διαφορική εξίσωση είναι το x . Το ξ είναι απλά η παράμετρος στο δεξιό μέλος $\delta(x - \xi)$. Δηλαδή το ξ δεν έχει καμία απολύτως σχέση με τις παραγωγίσεις στο αριστερό μέλος της διαφορικής εξισώσεως (10.1.12).

E10.1.3

E10.1.3. Υπενθύμιση της συναρτήσεως δέλτα του Dirac

Στο σημείο αυτό, λίγο πριν αποδείξουμε το πιο πάνω θεμελιώδες Θεώρημα E10.1 για τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$, είναι σκόπιμο να θυμηθούμε τον ορισμό της συναρτήσεως δέλτα του Dirac $\delta(x)$. Και δε θα πρέπει βέβαια να τη συγχέουμε με το δέλτα του Kronecker δ_{ij} , που ήδη ορίσαμε και χρησιμοποιήσαμε εκτενώς και με επιτυχία στο Κεφάλαιο Ε1. Αυτά τα δύο δ δεν έχουν καμία απολύτως σχέση μεταξύ τους.

Τη συνάρτηση δέλτα του Dirac, συγκεκριμένα τη συνάρτηση $\delta(x)$, την ορίσαμε στην Ενότητα A10.6 του Κεφαλαίου A10 του Μέρους A, δηλαδή στα *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς*, Τεύχος 1. Πρόκειται για τη συνάρτηση $\delta(x)$ που έχει τιμή μηδέν για κάθε $x \neq 0$ και τιμή άπειρο για $x = 0$, δηλαδή

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x \neq 0, \\ \infty & \text{για } x = 0, \end{cases} \quad (10.1.13)$$

ενώ ταυτόχρονα ισχύει ο τύπος

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) d\xi = 1. \quad (10.1.14)$$

Εμείς εδώ βέβαια στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωσή μας (10.1.12) για τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ έχουμε δεξιά $\delta(x - \xi)$ κι όχι απλά $\delta(x)$. Άρα ο απειρισμός αυτής της συναρτήσεως $\delta(x - \xi)$ θα γίνεται σύμφωνα με τον ορισμό (10.1.13) της συναρτήσεως $\delta(x)$, απλά όταν $x - \xi = 0$ ή ισοδύναμα όταν $x = \xi$. Δηλαδή εδώ έχουμε

$$\delta(x - \xi) = \begin{cases} 0 & \text{για } x \neq \xi, \\ \infty & \text{για } x = \xi. \end{cases} \quad (10.1.15)$$

Επίσης διαπιστώνουμε αρκετά εύκολα ότι ο τύπος (10.1.14) παίρνει τώρα την τροποποιημένη μορφή του

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) d\xi = 1. \quad (10.1.16)$$

Επιπλέον ισχύει φυσικά κι ο γενικότερός του και ήδη γνωστός μας τύπος (10.6.7) της Ενότητας A10.6 του Μέρους A, που το γράφουμε εδώ σε λίγο διαφορετική μορφή

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi = f(x). \quad (10.1.17)$$

Προφανώς για $f(x) = 1$, οπότε βέβαια και $f(\xi) = 1$, αυτός ο δεύτερος και πιο γενικός τύπος (10.1.17) μεταπίπτει στον προηγούμενό του τύπο (10.1.16).

Και τώρα που φρεσκάρουμε τον ορισμό της συναρτήσεως δέλτα του Dirac $\delta(x)$ και γενικότερα $\delta(x - \xi)$, προχωράμε άμεσα στην απόδειξη του Θεωρήματος Ε10.1.

E10.1.4

E10.1.4. Απόδειξη του Θεωρήματος Ε10.1

Αναφερόμαστε στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση n τάξεως (10.1.10), που συνοδεύεται βέβαια από n ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες. Εδώ υποθέτουμε ότι έχουμε διαθέσιμη τη σχετική συνάρτηση $G(x, \xi)$, δηλαδή τη συνάρτηση Green αυτού του προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών. Σύμφωνα με το προς απόδειξη Θεώρημα Ε10.1 η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ είναι λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως n τάξεως (10.1.12) και ισοδύναμα σε πιο συνοπτική μορφή

$$\mathcal{A}(D)G(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (10.1.18)$$

με το γραμμικό διαφορικό τελεστή $\mathcal{A}(D)$ να ορίζεται από τον τύπο (10.1.3) μαζί βέβαια με τις ίδιες ακριβώς n ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν τη διαφορική εξίσωση (10.1.10). Εμείς θέλουμε απλά να αποδείξουμε ότι η λύση $y_p(x)$ αυτού εδώ του προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών δίνεται από τον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.11) στον Ορισμό Ε10.1, που τον επαναλαμβάνουμε κι εδώ

$$y_p(x) = \int_a^b G(x, \xi)f(\xi) d\xi. \quad (10.1.19)$$

Για να το αποδείξουμε αυτό εφαρμόζουμε το γραμμικό διαφορικό τελεστή $\mathcal{A}(D)$ στη συνάρτηση $y_p(x)$, που είναι πιθανή λύση του προβλήματός μας. Έτσι παίρνουμε

$$\mathcal{A}(D)y_p(x) = \mathcal{A}(D) \int_a^b G(x, \xi)f(\xi) d\xi. \quad (10.1.20)$$

Όμως ο διαφορικός τελεστής $D \equiv d/dx$ αναφέρεται σε παραγωγή ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή x και όχι ως προς τη μεταβλητή ξ στο ολοκλήρωμα (10.1.19) ή (10.1.20). Επομένως ο σχετικός τελεστής $\mathcal{A}(D)$ που εφαρμόζεται στο ολοκλήρωμα (10.1.20) δεξιά μπορεί θαυμάσια να εφαρμοσθεί κατευθείαν στην ολοκληρωτέα συνάρτηση $G(x, \xi)f(\xi)$. Δηλαδή πρακτικά μπορεί να γίνει εναλλαγή της παραγωγίσεως (με τον τελεστή $\mathcal{A}(D)$) και της ολοκλήρωσεως. Το αποτέλεσμα φυσικά είναι

$$\mathcal{A}(D)y_p(x) = \int_a^b \mathcal{A}(D)G(x, \xi)f(\xi) d\xi, \quad (10.1.21)$$

μια που η γνωστή συνάρτηση $f(\xi)$, η είσοδος μας, δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή x .

Πολύ ωραία ως εδώ. Προχωράμε! Και τώρα, ναι, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $G(x, \xi)$, η συνάρτηση Green, πληροί τη διαφορική εξίσωση (10.1.18) με δεξιό μέλος της τη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(x - \xi)$. Έτσι την κατασκευάσαμε με βάση το Θεώρημα Ε10.1, που θέλουμε εδώ να αποδείξουμε. Κατά συνέπεια ο προηγούμενος τύπος (10.1.21) παίρνει παραπέρα την πιο απλή μορφή του

$$\mathcal{A}(D)y_p(x) = \int_a^b \delta(x - \xi)f(\xi) d\xi. \quad (10.1.22)$$

Και τώρα χρησιμοποιούμε τον τύπο (10.1.17) με διάστημα ολοκλήρωσεως το $[a, b]$. Υποθέτουμε βέβαια ότι $a < x < b$, έτσι ώστε ο απειρισμός της συναρτήσεως $\delta(x - \xi)$ να συμβαίνει ακριβώς μέσα στο ανοικτό διάστημα (a, b) , εκεί να είναι το σημείο x του απειρισμού της συναρτήσεως $\delta(x - \xi)$. Δηλαδή χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$\int_a^b \delta(x - \xi)f(\xi) d\xi = f(x) \quad \text{φυσικά με } a < x < b. \quad (10.1.23)$$

Με αυτόν τον τρόπο η σχέση (10.1.22) παίρνει την τελική μορφή της

$$\mathcal{A}(D)y_p(x) = f(x). \quad (10.1.24)$$

Κι η μορφή αυτή μας αποκαλύπτει σαφώς ότι ναι, η συνάρτηση $y_p(x)$, που ορίστηκε από το σχετικό ολοκληρωτικό τύπο (10.1.19) με τη βοήθεια της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$ του προβλήματός μας, ναι πραγματικά επαληθεύει τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (10.1.1) ή (10.1.10) και πιο συνοπτικά (10.1.2).

Κι επιπλέον πρέπει να μη λησμονούμε τις ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες που έχουμε στο πρόβλημά μας (είτε πρόβλημα αρχικών τιμών είτε πρόβλημα συνοριακών τιμών). Αυτές τις επαληθεύει η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$, αφού έτσι ακριβώς κατασκευάστηκε στο προς απόδειξη Θεώρημα Ε10.1: να τις επαληθεύει μαζί βέβαια και με τη διαφορική εξίσωση (10.1.12) ή ισοδύναμα (10.1.18). Επομένως τις επαληθεύει επίσης κι η λύση $y_p(x)$ στον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.19), επειδή είναι γραμμικές και ομογενείς. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ισχύουν οι εξής δύο ομογενείς συνοριακές συνθήκες:

$$y(a) = 0 \quad \text{και} \quad y'(b) = 0 \quad (10.1.25)$$

και ότι τις επαληθεύει η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$, δηλαδή ότι

$$G(a, \xi) = 0 \quad \text{και} \quad G'_x(b, \xi) = 0. \quad (10.1.26)$$

Τότε είναι προφανές από τον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.19) ότι

$$y_p(a) = 0 \quad \text{και} \quad y'_p(b) = 0. \quad (10.1.27)$$

Η δεύτερη συνθήκη, $y'_p(b) = 0$, ισχύει κι αυτή λαμβάνοντας υπόψη την παράγωγο

$$y'_p(x) = \int_a^b G'_x(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (10.1.28)$$

φυσικά με την παράγωγο $G'_x(x, \xi)$ ως προς την πρώτη μεταβλητή της x . Αυτή εδώ η παράγωγος $y'_p(x)$ προκύπτει αμέσως από τον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.19) με μία παραγωγή του ως προς τη μεταβλητή x . Για τη συνθήκη $y'_p(b) = 0$ λαμβάνουμε βέβαια επίσης υπόψη το γεγονός ότι $G'_x(b, \xi) = 0$. Και αυτό το γεγονός ισχύει από την κατασκευή της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$, όπως ήδη είπαμε, δηλαδή σύμφωνα με τη δεύτερη σχέση (10.1.26).

Το συμπέρασμά μας είναι απλά ότι ισχύει το Θεώρημα Ε10.1 κι η λύση $y_p(x)$ του προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών που εξετάζουμε προκύπτει πραγματικά από τον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.19) με πυρήνα του τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$. Κι αυτή βέβαια η συνάρτηση Green επαληθεύει τόσο τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (10.1.12) ή ισοδύναμα (10.1.18) όσο και τις n ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες του προβλήματος. Τονίζουμε βέβαια ότι πρόκειται για ομογενείς συνθήκες είτε αρχικές είτε συνοριακές. Αλλιώς παύουν να ισχύουν στον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.19) για τη συνάρτηση $y_p(x)$ ακόμη κι αν τις πληροί από την κατασκευή της η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$. Άρα, εάν οι n αρχικές ή συνοριακές συνθήκες δεν είναι ομογενείς, τότε η συνάρτηση $y_p(x)$ στον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.19) δεν είναι λύση του προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών που έχουμε να λύσουμε ακόμη και αν η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ που κατασκευάσαμε πληροί αυτές τις n μη ομογενείς αρχικές ή συνοριακές συνθήκες.

E10.1.5

E10.1.5. Εξηγήσεις για την παρουσία της συναρτήσεως δέλτα του Dirac

Θέλαμε να λύσουμε τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (10.1.1) ή πιο συνοπτικά (10.1.2) με δεξιό μέλος $f(x)$ μαζί βέβαια με τις σχετικές ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες. Τελικά όμως βρεθήκαμε να έχουμε μπροστά μας την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση (10.1.12) ή πιο συνοπτικά (10.1.18). Σ' αυτήν τη διαφορική εξίσωση (10.1.12) ή πιο συνοπτικά (10.1.18) για τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ τη θέση της συναρτήσεως $f(x)$ στην αρχική μας διαφορική εξίσωση (10.1.1) ή πιο συνοπτικά (10.1.2) την παίρνει τώρα η συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(x - \xi)$. Κι ενώ η συνάρτηση $f(x)$ είναι γενικά μια συνηθισμένη συνάρτηση, συχνά μάλιστα μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση, αντίθετα η συνάρτηση $\delta(x - \xi)$ είναι μια γενικευμένη συνάρτηση. Συγκεκριμένα είναι παντού μηδέν εκτός από το σημείο $x = \xi$, όπου απειρίζεται σύμφωνα με τον τύπο (10.1.15). Πώς και τα καταφέραμε έτσι;

Ναι, ασφαλώς ήμασταν σαφείς. Και μέσα στα πλαίσια της μέτριας μαθηματικής αυστηρότητας που ακολουθούμε σ' αυτό εδώ το κεφάλαιο αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο το βασικό Θεώρημα E10.1 για τις συναρτήσεις Green. Δηλαδή αποδείξαμε ότι πραγματικά η λύση $y_p(x)$ του προβλήματός μας αρχικών ή συνοριακών τιμών δίνεται από τον τύπο (10.1.19) με χρήση της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$, η οποία επαληθεύει τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (10.1.12) ή πιο συνοπτικά (10.1.18). Εντούτοις παρά την απόδειξη το ερώτημα παραμένει: για ποιον ακριβώς λόγο έγινε αυτή εδώ η εισαγωγή της συναρτήσεως δέλτα του Dirac $\delta(x - \xi)$ δεξιά στη διαφορική εξίσωση (10.1.12) ή (10.1.18) για τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$; Σ' αυτήν εδώ την παράγραφο θα επιχειρήσουμε να εξηγήσουμε αυτό το παράξενο γεγονός τόσο από μαθηματική όσο και από φυσική σκοπιά.

Ξεκινάμε με τη μαθηματική εξήγηση. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι αναζητούμε τη λύση $y_p(x)$ του προβλήματός μας που αφορά στη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (10.1.1) ή (10.1.2). Την επαναλαμβάνουμε στη δευτέρα μορφή της (10.1.2)

$$\mathcal{A}(D)y(x) = f(x). \quad (10.1.29)$$

Τη λύση αυτή $y_p(x)$ την αναζητούμε στη μορφή του ολοκληρωτικού τύπου (10.1.19). Τον επαναλαμβάνουμε κι αυτόν τον τύπο

$$y_p(x) = \int_a^b G(x, \xi)f(\xi) d\xi. \quad (10.1.30)$$

Εδώ όμως εμείς δε θέτουμε καμία προϋπόθεση ως προς τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$, που είναι ο πυρήνας σ' αυτόν τον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.30). Θα αποδείξουμε τώρα ότι η διαφορική εξίσωση (10.1.12) ή (10.1.18), δηλαδή η διαφορική εξίσωση

$$\mathcal{A}(D)G(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad (10.1.31)$$

είναι σίγουρα σωστή επιλογή για τον προσδιορισμό της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$.

Πραγματικά στον τύπο (10.1.30) εφαρμόζουμε και στα δύο μέλη του το διαφορικό τελεστή $\mathcal{A}(D)$ που ορίστηκε στη σχέση (10.1.3) και κάνουμε εναλλαγή της παραγωγίσεως με την ολοκλήρωση. Έτσι προκύπτει ο τύπος (10.1.21), δηλαδή ο τύπος

$$\mathcal{A}(D)y_p(x) = \int_a^b \mathcal{A}(D)G(x, \xi)f(\xi) d\xi. \quad (10.1.32)$$

Φυσικά εδώ δεν υποθέσαμε καθόλου την ισχύ της διαφορικής εξισώσεως (10.1.31) για τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ του προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών

που έχουμε. Γνωρίζουμε όμως ότι το δεξιό μέλος $f(x)$ στη διαφορική εξίσωση (10.1.29) επαληθεύει τον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.23). Τον υπενθυμίζουμε κι αυτόν τον τύπο

$$\int_a^b \delta(x - \xi)f(\xi) d\xi = f(x) \quad \text{φυσικά με } a < x < b. \quad (10.1.33)$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση (10.1.29) γράφεται και στην ισοδύναμη μορφή της

$$\mathcal{A}(D)y(x) = \int_a^b \delta(x - \xi)f(\xi) d\xi. \quad (10.1.34)$$

Και τώρα συγκρίνουμε τους δύο ολοκληρωτικούς τύπους (10.1.32) και (10.1.34). Και είναι εύλογο να απαιτούμε να έχουμε *τις ίδιες ολοκληρωτέες συναρτήσεις* και στους δύο, αφού τα αριστερά τους μέλη συμπίπτουν για τη λύση $y(x) = y_p(x)$ της διαφορικής εξισώσεως (10.1.29). Έτσι είναι λογικό να απαιτούμε να ισχύει η διαφορική εξίσωση (10.1.31) για τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$. Το ότι αυτή η εύλογη απαίτησή μας είναι και σωστή το αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο με την πλήρη απόδειξη του Θεωρήματος E10.1. Κι έτσι εξηγήθηκε μαθηματικά για ποιο λόγο στη διαφορική εξίσωση (10.1.31) για τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ έχουμε στο δεξιό μέλος της τη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(x - \xi)$, μια απρόσμενη γενικευμένη συνάρτηση.

Και τώρα προχωράμε στη φυσική εξήγηση της παρουσίας της ίδιας ακριβώς συναρτήσεως $\delta(x - \xi)$ στη διαφορική εξίσωση (10.1.31) για τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$. Φυσική εξήγηση λοιπόν. Άρα και πιο κατανοητή από τη μαθηματική εξήγηση.

Καταρχήν σημειώνουμε πως η συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(x)$ είναι απλά το όριο ενός ορθογωνικού παλμού μοναδιαίου εμβαδού (είτε στο χώρο είτε στο χρόνο), όταν το πλάτος ε του παλμού τείνει στο μηδέν, ενώ αντίθετα το ύψος του $1/\varepsilon$ τείνει στο άπειρο: $\varepsilon \times 1/\varepsilon = 1$. (Αυτό το γνωρίζουμε καλά ήδη από την Ενότητα A10.6 στο Μέρος Α: *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς*, Τεύχος 1.) Με τον τρόπο αυτό σε μια φόρτιση με $\delta(x - \xi)$ παριστάνουμε τη μοναδιαία συγκεντρωμένη φόρτιση στο σημείο $x = \xi$. Και ανάλογα ισχύουν και στο χρόνο, όπου με $\delta(t - \tau)$ παριστάνουμε τη μοναδιαία ωστική (ή κρουστική) φόρτιση τη χρονική στιγμή $t = \tau$. Επομένως η συνάρτηση $\delta(x - \xi)$ (είτε με $x - \xi$ είτε με $t - \tau$) στο δεξιό μέλος της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (10.1.12) ή (10.1.18) ή (10.1.31) πολύ απλά παριστάνει μια μοναδιαία συγκεντρωμένη (είτε στο χώρο x είτε στο χρόνο t) *συνάρτηση εξαναγκασμού* ή *είσοδο* ή *πηγή*. Κι αυτή είναι η συνάρτηση που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $\delta(x - \xi)$ (με $x - \xi$, με $t - \tau$, κλπ.) μπορεί να παριστάνει ένα μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο, μια μοναδιαία ωστική (ή κρουστική) φόρτιση (μοναδιαία δύναμη), μια μοναδιαία είσοδο ρύπου (δηλαδή μια μοναδιαία μάζα εισαγόμενου ρύπου) σ' ένα υδατόρρευμα στη θέση του $x = \xi$, κλπ.

Κατά συνέπεια η λύση $G(x, \xi)$ αυτής της ομολογουμένως λίγο παράξενης διαφορικής εξισώσεως (10.1.12) ή (10.1.18) ή (10.1.31), δηλαδή της διαφορικής εξισώσεως

$$\mathcal{A}(D)G(x, \xi) = \delta(x - \xi), \quad (10.1.35)$$

μας δίνει την απόκριση του συστήματος στη μοναδιαία συγκεντρωμένη φόρτιση στη θέση $x = \xi$ (είτε χωρική είτε χρονική) ή στη μοναδιαία πηγή. Και βέβαια στη λύση αυτή $G(x, \xi)$ λαμβάνονται επιπλέον υπόψη και οι αρχικές ή συνοριακές συνθήκες που ισχύουν. Αυτό συμβαίνει και στις τρεις περιπτώσεις που αναφέραμε. Εμείς όμως αναζητούμε τη λύση της αρχικής διαφορικής εξισώσεως (10.1.1), που γράφεται και πιο συνοπτικά στη μορφή (10.1.2) ή (10.1.29), δηλαδή της εξισώσεως

$$\mathcal{A}(D)y(x) = f(x). \quad (10.1.36)$$

Αυτή έχει δεξιά την αληθινή συνάρτηση εισόδου ή συνάρτηση εξαναγκασμού $f(x)$.

Αυτήν εδώ τη συνάρτηση εισόδου $f(x)$ ή $f(\xi)$ μπορούμε να τη θεωρήσουμε σαν άθροισμα πολύ μικρών συγκεντρωμένων εισόδων $f(\xi) \Delta\xi$ στη θέση ξ και στο πολύ μικρό διάστημα $\Delta\xi$ (είτε στο χώρο είτε στο χρόνο) της ανεξάρτητης μεταβλητής ξ . Επαναλαμβάνουμε μόνο σ' αυτό το πολύ μικρό διάστημα $\Delta\xi$. Τότε η απόκριση του συστήματος (είτε στο χώρο είτε στο χρόνο) στη θέση x που οφείλεται σ' αυτήν εδώ την πολύ μικρή συγκεντρωμένη είσοδο στη θέση ξ θα είναι απλά $G(x, \xi)f(\xi) \Delta\xi$, αφού έτσι ακριβώς υπολογίστηκε η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ με τη χρήση της διαφορικής εξίσωσης (10.1.35) που επαληθεύει. (Βέβαια, όπως ήδη σημειώσαμε, επαληθεύει επιπλέον και τις ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες που ισχύουν κάθε φορά.) Να λοιπόν η απόκριση στην πολύ μικρή είσοδο $f(\xi) \Delta\xi$. Και συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο και σε άλλες πολύ μικρές φορτίσεις, παίρνουμε τις αντίστοιχες αποκρίσεις. Τελικά σ' ολόκληρο το διάστημα $[a, b]$ που μας ενδιαφέρει (επαναλαμβάνουμε είτε στο χώρο είτε στο χρόνο) παίρνουμε τη συνολική απόκριση

$$y_{p,n}(x) = \sum_{k=1}^n G(x, \xi_k) f(\xi_k) \Delta\xi_k. \quad (10.1.37)$$

Εδώ βέβαια υποθέσαμε ότι ολόκληρο το διάστημά μας $[a, b]$ το χωρίσαμε σε n πολύ μικρά υποδιαστήματα όλα πλάτους $\Delta\xi = (b - a)/n$. Και φυσικά, όταν $n \rightarrow \infty$, το άθροισμα στο δεξιό μέλος αυτής της προσεγγιστικής λύσεως $y_{p,n}(x)$ στη σχέση (10.1.37) θα τείνει στο αντίστοιχο ολοκλήρωμα (10.1.30). Το επαναλαμβάνουμε

$$y_p(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (10.1.38)$$

Δηλαδή θα ισχύει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{p,n}(x) = y_p(x) \quad \text{και λίγο πιο απλά} \quad y_{p,n}(x) \rightarrow y_p(x) \quad \text{για} \quad n \rightarrow \infty. \quad (10.1.39)$$

Με το ολοκλήρωμα (10.1.38) υπολογίζουμε την απόκριση (την έξοδο) $y_p(x)$ του συστήματός μας που αντιστοιχεί στην είσοδο (τη φόρτιση, κλπ.) $f(x)$. Και με τον τρόπο αυτό και από τη φυσική σκοπιά του θέματος δικαιολογούμε τη λύση (10.1.38) που χρησιμοποιεί τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$, δηλαδή την απόκριση του συστήματός μας (τη μετατόπισή του, κλπ.) σε σημειακή συγκεντρωμένη είσοδο $\delta(x - \xi)$ σ' αυτό.

Κι αν θέλουμε μάλιστα, ας θυμηθούμε κι εδώ τον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.33). Αυτός ο τύπος ουσιαστικά αναλύει τη συνάρτηση $f(x)$ στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης (10.1.36) σε απειροστά κομματάκια $f(\xi) d\xi$ σ' ολόκληρο το διάστημα $[a, b]$. Με την ολοκλήρωση (10.1.33) αυτά τα κομματάκια ανασυνθέτουν τη συνάρτηση $f(x)$. Τώρα στο κάθε τέτοιο κομματάκι $f(\xi) d\xi$ αντιστοιχεί η απόκριση $G(x, \xi)f(\xi) d\xi$. Δηλαδή πολλαπλασιάζεται το κομματάκι $f(\xi) d\xi$ επί τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$. Άρα σ' όλα μαζί τα κομματάκια $f(\xi) d\xi$ αντιστοιχεί η συνολική απόκριση του συστήματος $y_p(x)$ στον προηγούμενο ολοκληρωτικό τύπο (10.1.38). Αυτή είναι βέβαια κι η λύση του προβλήματός μας: είτε αρχικών είτε συνοριακών τιμών.

E10.1.6

E10.1.6. Μέθοδοι υπολογισμού της συναρτήσεως Green

Μέχρι τώρα μάθαμε αρκετά για τις συναρτήσεις Green $G(x, \xi)$. Ανάμεσά τους είδαμε τον Ορισμό τους E10.1. Συγκεκριμένα η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ για μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση της μορφής (10.1.10), την επαναλαμβάνουμε

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \quad (10.1.40)$$

που ισχύει σ' ένα διάστημα $[a, b]$ (με $a \leq x \leq b$) μαζί βέβαια με n ομογενείς γραμμικές αρχικές συνθήκες ή πιο συχνά συνοριακές συνθήκες που τη συνοδεύουν είναι ο πυρήνας $G(x, \xi)$ του ολοκληρωτικού τύπου

$$y_p(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (10.1.41)$$

που δίνει τη λύση αυτού του προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών. Κι αυτή είναι η πρώτη μέθοδος υπολογισμού της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$. Συγκεκριμένα

- **ΠΡΩΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ GREEN:** Λύνουμε κατευθείαν τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (10.1.40), εννοείται για αυθαίρετη (όχι καθορισμένη) συνάρτηση $f(x)$ στο δεξιό μέλος της, μαζί με τις n ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες που τη συνοδεύουν. Και έτσι προσδιορίζουμε τη λύση $y_p(x)$ του προβλήματος αυτού στη μορφή του ολοκληρωτικού τύπου (10.1.41). Ο πυρήνας $G(x, \xi)$ του ολοκληρωτικού τύπου (10.1.41) που προκύπτει είναι η ζητούμενη συνάρτηση Green. Τώρα για την επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (10.1.40) υπάρχουν βασικά τρεις μέθοδοι που είναι μάλιστα και γνωστές σ' εμάς:

1. **Η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων της Ενότητας A5.9 του Κεφαλαίου A5 του Μέρους A:** Η μέθοδος αυτή έχει το πλεονέκτημα πως είναι ίσως πιο άμεση, επειδή δε χρησιμοποιεί μετασχηματισμό Laplace κι έτσι δουλεύει με την αρχική ανεξάρτητη μεταβλητή στη διαφορική εξίσωση, εδώ το x . Ταυτόχρονα όμως γενικά είναι και πιο δύσκολη στους απαιτούμενους υπολογισμούς σε σύγκριση με τη δεύτερη (την πιο κάτω) μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Επομένως γενικά δεν προτιμάται.
2. **Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace των Κεφαλαίων A10 και A11 του Μέρους A:** Η μέθοδος αυτή έχει το μειονέκτημα ότι μας μεταφέρει από την αρχική μεταβλητή της διαφορικής εξισώσεως, εδώ το x , στη μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace, συνήθως το s . Και δυστυχώς το s δεν έχει φυσική σημασία. Επίσης στο τέλος απαιτείται και επάνοδος μας στην αρχική μεταβλητή, εδώ στο x . Εντούτοις παρά τα μειονεκτήματά της η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace είναι γενικά πιο εύκολη στους απαιτούμενους υπολογισμούς σε σύγκριση με την πρώτη (την πιο πάνω) μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. Επομένως γενικά προτιμάται.
3. **Η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier των Κεφαλαίων A18 και A19 του Μέρους A:** Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται πολύ λιγότερο από τις δύο πρώτες μεθόδους που αναφέρθηκαν αμέσως πιο πάνω, χρησιμοποιείται αρκετά σπάνια. Κυρίως μάλιστα χρησιμοποιείται για άπειρα διαστήματα $x \in (-\infty, \infty)$ ισχύος της διαφορικής εξισώσεως (10.1.40).

Προχωράμε τώρα και στη δεύτερη και πιο εύχρηστη μέθοδο υπολογισμού συναρτήσεων Green. Αυτή βασίζεται στη διαφορική εξίσωση (10.1.12) του σχετικού Θεωρήματος E10.1 με ισοδύναμη μορφή της τη (10.1.18). Αυτήν τη δεύτερη μορφή την υπενθυμίζουμε κι εδώ

$$\mathcal{A}(D)G(x, \xi) = \delta(x - \xi). \quad (10.1.42)$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση ισχύει κατευθείαν για τον υπολογισμό της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$. Τη συνοδεύουν βέβαια και οι ίδιες n ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες που ισχύουν για την αρχική μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (10.1.40). Τίποτε δεν αλλάζει εδώ στις συνθήκες αυτές. Μένουν οι ίδιες!

- **ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ GREEN:** Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στο Θεώρημα Ε10.1, που ήδη διατυπώσαμε και επιπλέον και αποδείξαμε. Πιο συγκεκριμένα σ' αυτήν τη μέθοδο λύνουμε κατευθείαν τη δεύτερη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (10.1.42) με τη συνάρτηση $\delta(x - \xi)$ στο δεξιό μέλος της βέβαια μαζί με τις ίδιες n ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν την αρχική διαφορική εξίσωση (10.1.40). Έτσι προσδιορίζουμε κατευθείαν τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ του προβλήματος μας. Κι αυτήν μπορούμε στη συνέχεια να τη χρησιμοποιήσουμε στον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.41). Για την επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (10.1.42) υπάρχουν βασικά πάλι τρεις μέθοδοι που είναι μάλιστα και γνωστές σ' εμάς:

1. **Η μέθοδος της αναγωγής σε δύο ομογενείς διαφορικές εξισώσεις μαζί με τις σχετικές συνθήκες στο σημείο ξ :** Με βάση αυτήν τη μέθοδο στη διαφορική εξίσωση (10.1.42) που θέλουμε να λύσουμε το διάστημα ισχύος της $[a, b]$ το χωρίζουμε στα δύο υποδιαστήματα $[a, \xi)$ και $(\xi, b]$. Σε αυτά η διαφορική εξίσωση είναι βέβαια ομογενής, αφού η συνάρτηση $\delta(x - \xi)$ δεξιά μηδενίζεται για $x - \xi \neq 0$. Στη συνέχεια λύνουμε τις δύο όμοιες ομογενείς διαφορικές εξισώσεις που προέκυψαν. Η καθεμιά τους έχει στη λύση της n αυθαίρετες σταθερές. Άρα και οι δύο μαζί έχουν $2n$ αυθαίρετες σταθερές. Δεν ξεχνάμε βέβαια και τις n συνολικά συνοριακές συνθήκες στα σημεία $x = a$ (για την πρώτη ομογενή διαφορική εξίσωση) και $x = b$ (για τη δεύτερη ομογενή διαφορική εξίσωση). Έτσι τελικά απομένουν για προσδιορισμό μόνο $2n - n = n$ αυθαίρετες σταθερές. Αυτές οι n σταθερές που απομένουν προς προσδιορισμό μπορούν να προσδιορισθούν από τις νέες συνθήκες που οφείλουν να ισχύουν στο σημείο ξ μεταξύ των δύο υποδιαστημάτων $[a, \xi)$ και $(\xi, b]$. Αυτές είναι συνθήκες συνέχειας (εννοείται ως προς τη μεταβλητή x , όχι την ξ) για την άγνωστη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ και τις $n - 2$ πρώτες παραγώγους της. Αντίθετα η $n - 1$ παράγωγός της είναι ασυνεχής στο σημείο ξ . Αυτό προκύπτει από τη συνάρτηση $\delta(x - \xi)$ δεξιά στη διαφορική εξίσωση (10.1.42). Συγκεκριμένα με ολοκλήρωση και με βάση τη διαφορική εξίσωση (10.1.40) προκύπτει ότι η ασυνέχεια αυτή είναι ίση με $1/a_n$. Έτσι προκύπτουν συνολικά $(n-1)+1 = n$ ακόμη συνθήκες στο σημείο ξ και επομένως προσδιορίζεται πλήρως η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ και στα δύο υποδιαστήματά μας $[a, \xi)$ και $(\xi, b]$. Η μέθοδος την οποία μόλις περιγράψαμε έχει το πλεονέκτημα πως είναι άμεση, επειδή δε χρησιμοποιεί μετασχηματισμό Laplace κι έτσι δουλεύει με την αρχική ανεξάρτητη μεταβλητή στη διαφορική εξίσωση, εδώ το x . Ταυτόχρονα όμως γενικά είναι και κάπως πιο δύσκολη στους απαιτούμενους υπολογισμούς σε σύγκριση με τη δεύτερη (την πιο κάτω) μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Επομένως γενικά δεν προτιμάται.
2. **Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace των Κεφαλαίων Α10 και Α11 του Μέρους Α:** Η μέθοδος αυτή έχει πάλι το μειονέκτημα ότι μας μεταφέρει από την αρχική μεταβλητή της διαφορικής εξίσωσης, εδώ το x , στη μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace, συνήθως το s . Και δυστυχώς το s δεν έχει φυσική σημασία. Επιπλέον στο τέλος απαιτείται και επάνοδος στην αρχική μεταβλητή, εδώ στο x . Όμως παρά τα μειονέκτηματά της η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace είναι λίγο πιο εύκολη στους απαιτούμενους υπολογισμούς σε σύγκριση με την πρώτη (την πιο πάνω)

μέθοδο της αναγωγής σε δύο ομογενείς διαφορικές εξισώσεις. Σ' αυτό μας βοηθάει και το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Laplace του δεξιού μέλους $\delta(x - \xi)$ της διαφορικής εξισώσεως (10.1.42) που είναι

$$\mathcal{L}\{\delta(x - \xi)\} = e^{-\xi s}, \quad (10.1.43)$$

όπως ήδη γνωρίζουμε από την Ενότητα A10.6 του Κεφαλαίου A10 του Μέρους A, εκεί πρώτη σχέση (10.6.6), είναι αρκετά απλός. Άρα γενικά προτιμάται κι εδώ η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace.

3. **Η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier των Κεφαλαίων A18 και A19 του Μέρους A:** Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται κι εδώ στη διαφορική εξίσωση (10.1.42) πολύ λιγότερο από τις δύο πρώτες μεθόδους, οι οποίες αναφέρθηκαν αμέσως πιο πάνω, χρησιμοποιείται σπάνια. Κυρίως χρησιμοποιείται για άπειρα διαστήματα $x \in (-\infty, \infty)$ ισχύος της διαφορικής εξισώσεως (10.1.42).

Στις επόμενες τρεις Ενότητες E10.2, E10.3 και E10.4 θα εφαρμόσουμε τη θεωρία αυτής της Ενότητας E10.1 στον προσδιορισμό των συναρτήσεων Green σε τρεις ενδιαφέρουσες εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού. Οι εφαρμογές αυτές αφορούν στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ασθενή απόσβεση (Ενότητα E10.2) και στα στατικά προβλήματα του καλωδίου (Ενότητα E10.3) και της δοκού (Ενότητα E10.4). Στη συνέχεια στην Ενότητα E10.5 θα παρουσιασθεί μια κάπως διαφορετική εφαρμογή των συναρτήσεων Green: σε πρόβλημα μεταφοράς ρύπου με διάχυση. Στην τελευταία Ενότητα E10.6 θα γενικεύσουμε (πάρα πολύ σύντομα) τα αποτελέσματα αυτής της Ενότητας E10.1 για τις συναρτήσεις Green στην περίπτωση που εργαζόμαστε σε πάνω από μία διαστάσεις. Τότε βέβαια δουλεύουμε με μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους στις δύο, στις τρεις ή και στις τέσσερις ακόμη διαστάσεις.

E10.2

E10.2. ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

E10.2.1

E10.2.1. Καθορισμός του προβλήματος για τη συνάρτηση Green

Σ' αυτήν την Ενότητα E10.2 απλά συνεχίζουμε την Εφαρμογή E10.1 στην αρχή της προηγούμενης Ενότητας E10.1. Αυτή αφορά στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος με ασθενή (ή υποκρισιμη) απόσβεση, δηλαδή με $0 < \xi < 1$. Εδώ απλά θέλουμε να προσδιορίσουμε άμεσα τη σχετική συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ αντί να τη διαπιστώσουμε από το σχετικό ολοκληρωτικό τύπο του Duhamel (10.1.7), όπως κάναμε ήδη στην Ενότητα E10.1, σχέση (10.1.9). Δηλαδή εδώ ενεργούμε λίγο πιο επίσημα για τον προσδιορισμό της συναρτήσεως Green $G(t, \tau)$.

Για το σκοπό αυτό στη σχετική διαφορική εξίσωση (10.1.5), την επαναλαμβάνουμε σύντομα

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2u(t) = \frac{p(t)}{m}, \quad (10.2.1)$$

χρησιμοποιούμε το Θεώρημα E10.1 της προηγούμενης ενότητας θέτοντας στο δεξιό μέλος $\delta(t - \tau)$ αντί για $p(t)$. Δηλαδή εδώ ζητάμε να βρούμε την απόκριση του παρόντος μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος σε ωστική (ή ισοδύναμα κρουστική) φόρτιση $\delta(t - \tau)$ τη χρονική στιγμή $t = \tau$. Εδώ βέβαια δουλεύοντας στο χρόνο, χρησιμοποιούμε τα σύμβολα t και τ αντί για τα σύμβολα x και ξ που είναι πιο κατάλληλα

όταν δουλεύουμε στο χώρο. Όσον αφορά στις αρχικές συνθήκες, ακριβώς όπως και στην Εφαρμογή Ε10.1, που τη συμπληρώνουμε εδώ, υποθέτουμε ξανά πως ισχύουν οι δύο μηδενικές αρχικές συνθήκες (10.1.6). Τις επαναλαμβάνουμε κι αυτές

$$u(0) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = 0. \quad (10.2.2)$$

Με ωστική (ή κρουστική) φόρτιση $p(t) = \delta(t - \tau)$ η διαφορική εξίσωσή μας (10.2.1) παίρνει για τη συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ που θέλουμε να προσδιορίσουμε τη μορφή

$$\ddot{G}_t(t, \tau) + 2\xi\omega_0 \dot{G}_t(t, \tau) + \omega_0^2 G(t, \tau) = \frac{\delta(t - \tau)}{m}. \quad (10.2.3)$$

Εδώ ο δείκτης t στις παραγώγους $\ddot{G}_t(t, \tau)$ και $\dot{G}_t(t, \tau)$ δηλώνει απλά ότι η παραγωγίσεις γίνονται ως προς την πρώτη μεταβλητή t της συναρτήσεως Green $G(t, \tau)$ και όχι ως προς τη δεύτερη μεταβλητή της τ . Η διαφορική εξίσωση (10.2.3) είναι φυσικά η ειδική περίπτωση της γενικής διαφορικής εξισώσεως (10.1.12) στο Θεώρημα Ε10.1, που ισχύει στην παρούσα εφαρμογή στις Ταλαντώσεις. Επιπλέον οι δύο μηδενικές αρχικές συνθήκες (10.2.2), που είναι βέβαια ομογενείς γραμμικές αρχικές συνθήκες, ισχύουν, όπως ξέρουμε, και για τη συνάρτηση Green $G(t, \tau)$. Επομένως έχουμε

$$G(0, \tau) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{G}_t(0, \tau) = 0. \quad (10.2.4)$$

Για διευκόλυνσή μας την παραπάνω συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ που θέλουμε να προσδιορίσουμε τη γράφουμε και με το κάπως απλούστερο σύμβολο $u_\tau(t)$, δηλαδή θέτουμε $u_\tau(t) \equiv G(t, \tau)$. Προφανώς ο δείκτης τ επιλέχθηκε εδώ με βάση το γεγονός ότι στη διαφορική εξίσωση (10.2.3) δεξιά έχουμε τη συνάρτηση $\delta(t - \tau)$. Και φυσικά το τ είναι μια παράμετρος σ' αυτήν τη διαφορική εξίσωση (10.2.3) που έχει ανεξάρτητη μεταβλητή το t , όχι το τ .

Άρα η διαφορική εξίσωση (10.2.3) γράφεται τώρα με το καινούργιο σύμβολο $u_\tau(t)$ για την άγνωστη συνάρτηση στη μορφή

$$\ddot{u}_\tau(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}_\tau(t) + \omega_0^2 u_\tau(t) = \frac{\delta(t - \tau)}{m}. \quad (10.2.5)$$

Ανάλογα με τη χρήση του ίδιου συμβόλου $u_\tau(t)$ και οι δύο αρχικές συνθήκες (10.2.4) γράφονται πιο απλά σαν

$$u_\tau(0) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{u}_\tau(0) = 0. \quad (10.2.6)$$

Δηλαδή με απλά λόγια αλλάξαμε στο δεξιό μέλος στην αρχική διαφορική εξίσωσή μας (10.2.1) το $p(t)$ σε $\delta(t - \tau)$ στη νέα διαφορική εξίσωση (10.2.5). Για να θυμόμαστε μάλιστα τούτη την αλλαγή στη λύση που θα βρούμε, αλλάξαμε και την άγνωστη συνάρτηση από $u(t)$ σε $u_\tau(t)$ με τη χρήση της παραμέτρου τ σαν δείκτη στη $u_\tau(t)$.

E10.2.2

E10.2.2. Προσδιορισμός της συναρτήσεως Green με μετασχηματισμό Laplace

Ε καιρός είναι τώρα να τη βρούμε αυτήν τη συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ ή πιο απλά $u_\tau(t)$. Εύκολη είναι η δουλειά μας με τις γνώσεις που ήδη έχουμε από το Μέρος Α, Κεφάλαια Α10 και Α11 για το μετασχηματισμό Laplace. Εφαρμόζουμε λοιπόν το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξισώσεως (10.2.5) λαμβάνοντας υπόψη και τις αρχικές συνθήκες (10.2.6). Για το σκοπό αυτό πέρα από τη γραμμική ιδιότητα στο μετασχηματισμό Laplace θυμόμαστε επίσης και τους τύπους

$$\mathcal{L}\{\dot{u}(t)\} = sU(s) - u(0), \quad \mathcal{L}\{\ddot{u}(t)\} = s^2U(s) - su(0) - \dot{u}(0) \quad \text{με} \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} \quad (10.2.7)$$

για τους μετασχηματισμούς Laplace των δύο πρώτων παραγώγων $\dot{u}(t)$ και $\ddot{u}(t)$ μιας παραγωγίσιμης συναρτήσεως $u(t)$. Πρόκειται για τους τύπους (10.3.68) και (10.3.69) της Παραγράφου A10.3.5 (Ιδιότητα 5) του Κεφαλαίου A10 του Μέρους Α. Αυτοί αναφέρονται επίσης και στον Πίνακα A10.1 του ίδιου κεφαλαίου (Ενότητα A10.7) και είναι εξαιρετικά σημαντικοί στο μετασχηματισμό Laplace. Επιπλέον για το μετασχηματισμό Laplace της συναρτήσεως δ του Dirac γνωρίζουμε ότι ισχύει ο τύπος

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as} \quad \text{κι εδώ} \quad \mathcal{L}\{\delta(t-\tau)\} = e^{-\tau s}. \quad (10.2.8)$$

Πρόκειται για το γνωστό μας τύπο (10.6.6) της Ενότητας A10.6 του Κεφαλαίου A10 του Μέρους Α: *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς*, Τεύχος 1.

Με όλα αυτά τα εφόδια εφαρμόζουμε εύκολα το μετασχηματισμό Laplace και στη διαφορική εξίσωση (10.2.5) για τη συνάρτηση Green $u_\tau(t) \equiv G(t, \tau)$ που θέλουμε να προσδιορίσουμε στο πρόβλημά μας. Και προφανώς παίρνουμε υπόψη μας και τις δύο αρχικές συνθήκες (10.2.6), όπως ήδη είπαμε. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει αμέσως η σχετική αλγεβρική εξίσωση

$$s^2 U_\tau(s) + 2\xi\omega_0 s U_\tau(s) + \omega_0^2 U_\tau(s) = \frac{e^{-\tau s}}{m} \quad \text{με} \quad U_\tau(s) = \mathcal{L}\{u_\tau(t)\}. \quad (10.2.9)$$

Είναι μια ιδιαίτερα απλή αλγεβρική εξίσωση πρώτου βαθμού μάλιστα ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace $U_\tau(s)$. Τη λύνουμε πολύ εύκολα και βρίσκουμε

$$(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2) U_\tau(s) = \frac{e^{-\tau s}}{m}, \quad \text{οπότε} \quad U_\tau(s) = \frac{e^{-\tau s}}{m(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)}. \quad (10.2.10)$$

Απομένει τώρα και η αντιστροφή αυτού του μετασχηματισμού Laplace $U_\tau(s)$. Δεν είναι δα πολύ δύσκολη κι αυτή. Εδώ μπορούμε μάλιστα να χρησιμοποιήσουμε τα σχετικά αποτελέσματα της Ενότητας A11.8 του Κεφαλαίου A11 του Μέρους Α. Εκεί χρησιμοποιήσαμε τη συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$ στο παρόν πρόβλημα

$$G(s) = \frac{1}{m(s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)} = \frac{1}{m[(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2]} \quad \text{με} \quad \omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (10.2.11)$$

Εδώ παρατηρούμε ότι πρόκειται ουσιαστικά για το δεξιό μέλος στη λύση $U_\tau(s)$ στην παραπάνω σχέση (10.2.10) δεξιά. Αντιστρέφοντας κατά Laplace, καταλήξαμε ήδη στο αποτέλεσμα (11.8.10) της Ενότητας A11.8 του Μέρους Α. Το επαναλαμβάνουμε

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_D t. \quad (10.2.12)$$

Δηλαδή καταλήξαμε στην **ωστική** (ή **κρουστική**) **απόκριση** $g(t)$ του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος. Με χρήση τώρα και της μοναδιαίας βηματικής συναρτήσεως του Heaviside $H(t)$, που την ορίσαμε στην Παράγραφο A10.3.4 του Μέρους Α, σχέση (10.3.47), το προηγούμενο αποτέλεσμα (10.2.12) γράφεται τώρα και στη λίγο πιο επίσημη μορφή του

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_D t) H(t). \quad (10.2.13)$$

Εντούτοις κι η αρχική μορφή (10.2.12) της ωστικής (ή κρουστικής) αποκρίσεως $g(t)$ μια χαρά είναι, αφού οι ταλαντώσεις ξεκινούν τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή γίνονται ταλαντώσεις μόνο για $t \geq 0$. Έτσι η προσθήκη της μοναδιαίας βηματικής συναρτήσεως του Heaviside $H(t)$ στη σχέση (10.2.13) δεξιά, που είναι ίση με μηδέν, $H(t) = 0$, για αρνητικές τιμές του χρόνου $t (t < 0)$ και ίση με ένα, $H(t) = 1$, για θετικές τιμές του χρόνου $t (t > 0)$, δεν είναι αναγκαία σ' αυτό εδώ το πρόβλημα.

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση Ε10.2:** Δυστυχώς εδώ χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο G και για τη συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ και για τη συνάρτηση μεταφοράς $G(s)$. Αυτές είναι δύο εντελώς διαφορετικές συναρτήσεις. Επιπλέον η πρώτη έχει δύο μεταβλητές ενώ η δεύτερη μόνο μία. Επίσης η πρώτη αναφέρεται στο χρόνο t (σ' άλλες περιπτώσεις στη θέση x), ενώ η δεύτερη στο εντελώς διαφορετικό πεδίο s του μετασχηματισμού Laplace. Παράκληση να μη γίνει σύγχυση από τη χρήση του ίδιου συμβόλου G . ▲

Τώρα το μόνο που μας απομένει σ' αυτήν την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace $U_\tau(s)$ στη σχέση (10.2.10) δεξιά είναι ο όρος $e^{-\tau s}$ στον αριθμητή του $U_\tau(s)$. Αλλ' εμείς στο μετασχηματισμό Laplace ξέρουμε πολύ καλά και την ιδιότητά του

$$\mathcal{L}\{u(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}U(s) \quad \text{βέβαια με } a > 0 \quad \text{και} \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}. \quad (10.2.14)$$

Εδώ $H(t)$ είναι ξανά η μοναδιαία βηματική συνάρτηση του Heaviside. Πρόκειται για τη γνωστή μας Ιδιότητα 4 του μετασχηματισμού Laplace, σχέση (10.3.48) πάλι στην Παράγραφο Α10.3.4 του Μέρους Α. Αυτήν τη σημαντική ιδιότητα την αναφέραμε επίσης και στον Πίνακα Α10.1 της Ενότητας Α10.7 του Μέρους Α. Εδώ τη χρησιμοποιούμε με τ αντί για a . Επομένως εμείς που έχουμε τώρα και τον όρο $e^{-\tau s}$ στον αριθμητή του μετασχηματισμού Laplace $U_\tau(s)$ εδώ στη σχέση (10.2.10) δεξιά δε θα πάρουμε τώρα πια σαν αντιστρόφο μετασχηματισμό Laplace ακριβώς την ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$ στη σχέση (10.2.13). Εκεί δε λήφθηκε υπόψη αυτός ο όρος $e^{-\tau s}$. Θα πάρουμε σαν αντιστρόφο μετασχηματισμό Laplace τη συνάρτηση

$$u_\tau(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_\tau(s)\} = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)]H(t-\tau) \quad (10.2.15)$$

με βάση τον τύπο (10.2.14). Και φυσικά σε σύγκριση με τον πιο πάνω τύπο (10.2.13) εδώ έχουμε δεξιά $t - \tau$ αντί για t κι επίσης τη μετατοπισμένη μοναδιαία βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(t - \tau)$ αντί για την απλή, την αρχική μορφή της $H(t)$.

Αυτή είναι η συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ στο παρόν πρόβλημα εξαναγκασμένων ταλαντώσεων με ασθενή απόσβεση και με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Δηλαδή

$$G(t, \tau) \equiv u_\tau(t) = \frac{1}{m\omega_D} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)]H(t-\tau). \quad (10.2.16)$$

Εδώ απλά χρησιμοποιούμε αυτήν τη συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ σε συνδυασμό με τον Ορισμό Ε10.1 και το σχετικό Θεώρημα Ε10.1 της προηγούμενης Ενότητας Ε10.1 για τις συναρτήσεις Green. Σημειώνουμε βέβαια ότι ο τύπος (10.1.11) στον Ορισμό Ε10.1 της συναρτήσεως Green παίρνει στην περίπτωσή μας τη χρονική μορφή του

$$u_p(t) = \int_0^t G(t, \tau)p(\tau) d\tau, \quad (10.2.17)$$

αφού $H(t - \tau) = 0$ για $\tau > t$, οπότε με βάση τη σχέση (10.2.16) η ολοκλήρωση (ως προς τ) σταματάει τη χρονική στιγμή $\tau = t$. Δηλαδή $G(t, \tau) = 0$ για $\tau > t$ και είναι προφανές αυτό και από φυσικής απόψεως. Άρα η ολοκλήρωση μέχρι τη χρονική στιγμή $\tau = t$ σ' αυτήν τη σχέση (10.2.17) είναι επαρκής.

Επομένως, εισάγοντας τη συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ από τη σχέση (10.2.16) σε τούτη τη σχέση (10.2.17), διαπιστώνουμε ότι η λύση $u_p(t)$ της διαφορικής εξίσωσης (10.2.1) με μηδενικές αρχικές συνθήκες (10.2.2) παίρνει εδώ τη μορφή (10.1.7) της Εφαρμογής μας Ε10.1 στην Ενότητα Ε10.1. Την επαναλαμβάνουμε κι αυτήν τη λύση

$$u_p(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)]p(\tau) d\tau \quad \text{με} \quad \omega_D = \omega_0\sqrt{1 - \xi^2}. \quad (10.2.18)$$

Και φυσικά, αφού $0 \leq \tau \leq t$, ισχύει $t - \tau \geq 0$ κι επομένως εδώ $H(t - \tau) = 1$. Κατά συνέπεια σωστά κάναμε και παραλείψαμε, μπορούμε να παραλείψουμε τη βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(t - \tau)$ της σχέσεως (10.2.16) σ' αυτόν τον τύπο (10.2.18).

► Παρατήρηση

▼ **Παρατήρηση Ε10.3:** Συγκρίνουμε τώρα τις δύο σχέσεις (10.2.13) για την ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$ στο παρόν πρόβλημα εξαναγκασμένων ταλαντώσεων και (10.2.16) για τη σχετική συνάρτηση Green $G(t, \tau)$. Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουμε αμέσως ότι η συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ είναι απλά η μετατοπισμένη χρονικά κατά χρονικό διάστημα τ ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$. Δηλαδή ισχύει

$$G(t, \tau) = g(t - \tau). \quad (10.2.19)$$

Αυτό το διαπιστώνουμε και από τον τύπο (με συνέλιξη, συνελκτικό ολοκλήρωμα)

$$u(t) = g(t) * p(t) = \int_0^t g(t - \tau)p(\tau) d\tau. \quad (10.2.20)$$

Αυτός είναι ουσιαστικά ο τύπος (11.8.8) της Ενότητας Α11.8 του Μέρους Α. Συγκεκριμένα είναι ο ολοκληρωτικός τύπος του Duhamel στο παρόν πρόβλημα εξαναγκασμένων ταλαντώσεων. Φυσικά το πιο πάνω αποτέλεσμα (10.2.19) προέκυψε εδώ με τη μαθηματική μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.

Αλλ' από την άλλη πλευρά αυτό το αποτέλεσμα (10.2.19) είναι απόλυτα εύλογο, προφανές για τον Πολιτικό Μηχανικό που έχει καταλάβει τι σημαίνει συνάρτηση Green. Και εδώ η συνάρτηση Green είναι απλά η απόκριση του μηχανικού συστήματος σε μοναδιαία ωστική (ή κρουστική) φόρτιση $\delta(t - \tau)$ τη χρονική στιγμή $t = \tau$ (με $\tau > 0$) αντί για τη χρονική στιγμή $t = 0$ που αφορά στην ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$. Δηλαδή εδώ η φόρτιση $\delta(t - \tau)$ που αφορά στη συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ είναι χρονικά μετατοπισμένη κατά τ (καλύτερα έχει χρονική καθυστέρηση τ) σχετικά με την αντίστοιχη φόρτιση $\delta(t)$ που αφορά στην ωστική (ή κρουστική) απόκριση $g(t)$. Άρα εδώ είναι εύλογο η σχετική απόκριση, η συνάρτηση Green $G(t, \tau)$, να είναι απλά $g(t - \tau)$, κάτι που το διαπιστώσαμε ήδη στη σχέση (10.2.19). Και δε μας χρειάζονται βέβαια καθόλου μαθηματικά (ούτε μετασχηματισμός Laplace ούτε τίποτε άλλο!) για να το καταλάβουμε αυτό το τόσο απλό για τον Πολιτικό Μηχανικό φυσικό γεγονός. ▲

Άσκηση

Ενότητα Ε10.2

▼ **Άσκηση Ε10.3 ■ Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ισχυρή απόσβεση**

Θεωρούμε εδώ την ίδια εφαρμογή, τις ταλαντώσεις μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος ξανά με μηδενικές αρχικές συνθήκες, αλλά τώρα με ισχυρή (ή υπερκρίσιμη) απόσβεση ($\xi > 1$). Ζητούνται: (α) Πάλι με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace στη διαφορική εξίσωση (10.2.3) για τη συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ ζητείται αυτή η συνάρτηση Green $G(t, \tau)$. (β) Τώρα με βάση αυτήν τη συνάρτηση Green που βρέθηκε ζητείται ο ολοκληρωτικός τύπος για την απόκριση $u_p(t)$ του μηχανικού συστήματος. (γ) Για ποιο λόγο στον τύπο αυτό δεν παρουσιάζεται τελικά η μοναδιαία βηματική συνάρτηση του Heaviside εδώ η συνάρτηση $H(t - \tau)$;

⇒ **Απαντήσεις:** (α) $G(t, \tau) = \frac{1}{ma_D} e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sinh[a_D(t - \tau)]H(t - \tau)$ με $a_D = \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$.

(β) $u_p(t) = \frac{1}{ma_D} \int_0^t e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sinh[a_D(t - \tau)]p(\tau) d\tau.$ ▲

E10.3

E10.3. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΚΑΛΩΔΙΟΥ

E10.3.1

E10.3.1. Καθορισμός του προβλήματος για τη συνάρτηση Green

Στην Ενότητα αυτή Ε10.3 θα προσδιορίσουμε τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ στο απλό πρόβλημα του καλωδίου το οποίο στηρίζεται στα δύο άκρα του. Εδώ βέβαια σε αντίθεση με την προηγούμενη Ενότητα Ε10.2 πρόκειται για πρόβλημα στο χώρο εδώ με συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ και όχι στο χρόνο εκεί με συνάρτηση Green $G(t, \tau)$. Επίσης πρόκειται για πρόβλημα συνοριακών τιμών και όχι για πρόβλημα αρχικών τιμών. Σημειώνουμε μάλιστα πως ο Πολιτικός Μηχανικός προσεγγίζει το καλώδιο με χορδή. Δηλαδή ο Πολιτικός Μηχανικός δέχεται ότι το καλώδιο (για παράδειγμα σε κρεμαστή γέφυρα) δεν έχει καθόλου δυσκαμψία ακριβώς όπως και η χορδή και αντίθετα με τη δοκό που εκείνη έχει δυσκαμψία EI . Η σχετική διαφορική εξίσωση στο στατικό πρόβλημα καλωδίου μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) έχει τη μορφή

$$-Tv''(x) = p(x) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad v''(x) = -\frac{p(x)}{T}. \quad (10.3.1)$$

Εδώ T είναι η τάση (η ένταση) κατά μήκος όλου του καλωδίου (σε μονάδες δυνάμεως, όχι τάσεως), $v(x)$ η άγνωστη κάθετη μετατόπιση των σημείων του καλωδίου κατά μήκος του και $p(x)$ η γνωστή κάθετη κατανεμημένη φόρτιση ξανά κατά μήκος του καλωδίου. Δηλαδή έχουμε μια μη ομογενή (λόγω της φορτίσεως $p(x)$ δεξιά) γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Η εξίσωση αυτή συνοδεύεται εδώ στο πρόβλημα του καλωδίου από τις δύο πολύ απλές συνοριακές συνθήκες

$$v(0) = v(L) = 0. \quad (10.3.2)$$

Αυτές εκφράζουν τη στήριξη του καλωδίου στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο στα δύο άκρα του $x = 0$ και $x = L$. Είναι μάλιστα ομογενείς αυτές οι συνοριακές συνθήκες (10.3.2), αφού έχουν αριστερά μόνο την άγνωστη συνάρτηση $v(x)$ και δεξιά το μηδέν.

Το πρόβλημα αυτό το αντιμετωπίσαμε ήδη στο Μέρος Γ, στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις στα *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς*, Τεύχος 1 και συγκεκριμένα εκεί στην Παράγραφο Γ3.5.1. Εκεί είχαμε εργασθεί με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις της διαφορικής εξίσωσης (10.3.1) σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες (10.3.2) και προσδιορίσαμε τη σχετική *συνάρτηση επιρροής* $G(x, \xi)$, που συμπίπτει με την αντίστοιχη *συνάρτηση Green*. Το ίδιο είναι εδώ συνάρτηση επιρροής και συνάρτηση Green. Την ίδια ακριβώς συνάρτηση θα την προσδιορίσουμε κι εδώ. Εδώ όμως θα εργασθούμε με τη διαφορική εξίσωση (10.1.12) του Θεωρήματος Ε10.1 για τη συνάρτηση Green. Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι βέβαια η εξής:

$$-TG_x''(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad G_x''(x, \xi) = -\frac{\delta(x - \xi)}{T} \quad (10.3.3)$$

και προέκυψε απλά από την αρχική διαφορική εξίσωση (10.3.1) θέτοντας $G(x, \xi)$ για άγνωστη συνάρτηση και $\delta(x - \xi)$ στο δεξιό μέλος. Δηλαδή η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ είναι απλά η κάθετη (εγκάρσια) μετατόπιση του καλωδίου μας που οφείλεται σε μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο $P = 1$ στη θέση $x = \xi$ του καλωδίου. Αυτήν την ειδική φόρτιση υποδηλώνει το δεξιό μέλος $\delta(x - \xi)$ στη διαφορική εξίσωση (10.3.3). Φυσικά δεν πρέπει να λησμονούνται εδώ και οι δύο συνοριακές συνθήκες (10.3.2). Αυτές τώρα για τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ παίρνουν προφανώς τη μορφή

$$G(0, \xi) = G(L, \xi) = 0. \quad (10.3.4)$$

Για την επίλυση του παρόντος προβλήματος ένας πρώτος και πολύ δημοφιλής τρόπος είναι η εφαρμογή της ισορροπίας δυνάμεων κατά τον άξονα y κάθετα στο καλώδιο σε συνδυασμό με τη γεωμετρία του καλωδίου μετά τη μετατόπιση $G(x, \xi)$ των σημείων του. Αυτή οφείλεται στο μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο $P = 1$ στη θέση $x = \xi$. Στον τρόπο αυτό πέρα από την εξίσωση της ισορροπίας κατά τον άξονα y λαμβάνονται βέβαια υπόψη οι δύο συνοριακές συνθήκες (10.3.4) καθώς και τα δύο όμοια τρίγωνα που σχηματίζονται τόσο αριστερά όσο και δεξιά από το σημείο φορτίσεως $x = \xi$. Προφανώς καμία απολύτως διαφορική εξίσωση δε λύνεται με την τόσο απλή και ταυτόχρονα απόλυτα σωστή αυτή μέθοδο. Δυστυχώς όμως από την άλλη πλευρά αυτή η μέθοδος δεν είναι γενικεύσιμη σε άλλα πιο δύσκολα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού, όπως π.χ. στο αντίστοιχο πρόβλημα της δοκού.

Εμείς εδώ θα εργασθούμε με τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (10.3.3) και τις δύο συνοριακές συνθήκες (10.3.4) που τη συνοδεύουν. Για απλότητα δηλώνουμε εδώ την άγνωστη συνάρτηση με $v_\xi(x)$ φυσικά με $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$. Από φυσικής απόψεως αυτή η συνάρτηση $v_\xi(x)$ παριστάνει βέβαια την κάθετη (εγκάρσια) μετατόπιση των σημείων του καλωδίου που οφείλεται σ' ένα μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο $P = 1$ στη θέση $x = \xi$. Έτσι έχουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$v_\xi''(x) = -\frac{\delta(x - \xi)}{T} \quad (10.3.5)$$

και επίσης

$$v_\xi(0) = 0 \quad \text{και} \quad v_\xi(L) = 0. \quad (10.3.6)$$

Η εργασία μας αυτή θα γίνει μάλιστα με δύο εντελώς διαφορετικούς τρόπους που αναφέρθηκαν ήδη στην Παράγραφο Ε10.1.6 στη δεύτερη μέθοδο υπολογισμού συναρτήσεως Green. Συγκεκριμένα θα γίνει

- Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και
- Με τη μέθοδο της αναγωγής σε δύο ομογενείς διαφορικές εξισώσεις μαζί με τις σχετικές συνθήκες στο σημείο ξ .

E10.3.2

E10.3.2. Επίλυση με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace μας είναι οικεία από τα Κεφάλαια A10 και A11 του Μέρους A (*Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς*, Τεύχος 1) ακόμη και στην περίπτωση όπου παρουσιάζεται στη διαφορική μας εξίσωση η συνάρτηση δέλτα του Dirac, όπως συμβαίνει εδώ. Γι' αυτήν γνωρίζουμε μάλιστα ήδη από τον πρώτο τύπο (10.6.6) της Ενότητας A10.6 ή από τον Πίνακα A10.2 της Ενότητας A10.7, εκεί μετασχηματισμός Laplace 6, ότι

$$\mathcal{L}\{\delta(x - \xi)\} = e^{-\xi s}. \quad (10.3.7)$$

Στο μετασχηματισμό Laplace χρησιμοποιούνται μόνο αρχικές συνθήκες. Όμως εμείς εδώ έχουμε συνοριακές συνθήκες: τις συνοριακές συνθήκες (10.3.6). Άρα η παράγωγος $v_\xi'(0)$ που θα χρειασθούμε στο μετασχηματισμό Laplace μας είναι άγνωστη. Μπορούμε να τη δηλώσουμε απλά με $v_\xi'(0)$ και ακόμη καλύτερα με θ_0 , μια που εκφράζει (προσεγγιστικά εννοείται) τη γωνία στροφής του καλωδίου στο σημείο του $x = 0$ (και σ' όλα τα σημεία του με $0 \leq x < \xi$, όπως διαπιστώνεται πολύ εύκολα). Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της δευτέρας παραγώγου $v_\xi''(x)$ θα είναι

$$\mathcal{L}\{v_\xi''(x)\} = s^2 V_\xi(s) - s \cdot 0 - \theta_0 = s^2 V_\xi(s) - \theta_0, \quad \text{όπου} \quad V_\xi(s) = \mathcal{L}\{v_\xi(x)\}. \quad (10.3.8)$$

Με αυτές τις προϋποθέσεις, παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της διαφορικής εξίσωσης (10.3.5), βρίσκουμε αμέσως ότι

$$s^2 V_\xi(s) - \theta_0 = -\frac{1}{T} e^{-\xi s}. \quad (10.3.9)$$

Λοιπόν με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace μετατρέψαμε ήδη τη διαφορική εξίσωση (10.3.5) στη γραμμική αλγεβρική εξίσωση (10.3.9) ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace $V_\xi(s) = \mathcal{L}\{v_\xi(x)\}$. (Σημειώνουμε ότι πήραμε ήδη υπόψη μας και την πρώτη συνοριακή συνθήκη (10.3.6), τη συνθήκη $v_\xi(0) = 0$.) Τώρα λύνουμε αμέσως αυτήν τη γραμμική αλγεβρική εξίσωση (10.3.9). Έτσι προκύπτει ότι

$$V_\xi(s) = \frac{\theta_0}{s^2} - \frac{1}{T} \frac{e^{-\xi s}}{s^2}. \quad (10.3.10)$$

Και τώρα κάνουμε αντιστροφή κατά Laplace, έτσι ώστε να βρούμε και την ίδια την άγνωστη συνάρτηση εδώ την κάθετη ή εγκάρσια μετατόπιση $v_\xi(x)$ των σημείων του καλωδίου. Σε αυτό το σημείο θυμόμαστε βέβαια και τον ήδη γνωστό μας τύπο

$$\mathcal{L}\{u(t-a)H(t-a)\} = e^{-as} U(s) \quad \text{βέβαια με } a > 0 \text{ και } U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} \quad (10.3.11)$$

με $H(t)$ τη γνωστή μας μοναδιαία βηματική συνάρτηση του Heaviside. Πρόκειται για τον τύπο (10.3.48) στην Παράγραφο A10.3.4 του Κεφαλαίου A10 του Μέρους A για το μετασχηματισμό Laplace (Ιδιότητα 4 του μετασχηματισμού Laplace, επίσης στον Πίνακα A10.1 της Ενότητας A10.7). Αυτόν τον τύπο τον αναφέραμε κι εδώ στη σχέση (10.2.14). Και επειδή επίσης

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad (10.3.12)$$

με βάση το μετασχηματισμό Laplace 9 του Πίνακα A10.2 (εδώ όμως για $n = 2$), η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace (10.3.10) της άγνωστης συναρτήσεως $v_\xi(x)$ μας δίνει τώρα το αποτέλεσμα

$$v_\xi(x) = \mathcal{L}^{-1}\{V_\xi(s)\} = \theta_0 x - \frac{1}{T} (x - \xi)H(x - \xi) = \theta_0 x - \frac{1}{T} \langle x - \xi \rangle. \quad (10.3.13)$$

Σημειώνουμε ότι εδώ δεξιά χρησιμοποιήσαμε για απλότητα το συμβολισμό

$$\langle x - \xi \rangle := (x - \xi)H(x - \xi), \quad (10.3.14)$$

ο οποίος αφορά σε μια συνάρτηση Macaulay. Πρόκειται για τον τύπο (11.15.5) της Ενότητας A11.15 του Μέρους A για τις τόσο χρήσιμες για τον Πολιτικό Μηχανικό συναρτήσεις Macaulay, εδώ βέβαια στην πιο απλή περίπτωση τους: με $n = 1$.

Με βάση την πιο πάνω σχέση (10.3.13) γράφουμε την παρούσα συνάρτηση Green $G(x, \xi)$, που εδώ τη συμβολίζουμε για διευκόλυνση σαν $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$, στη μορφή

$$v_\xi(x) = v_{\xi 1}(x) = \theta_0 x, \quad \text{εάν } 0 \leq x \leq \xi, \quad (10.3.15)$$

αφού εδώ $H(x - \xi) = 0$, όταν $0 \leq x < \xi$. (Σημειώνουμε εδώ ότι για $x = \xi$ έχουμε επίσης $(x - \xi)H(x - \xi) = 0$.) Ανάλογα γράφουμε τη σχέση (10.3.13) και στη μορφή

$$v_\xi(x) = v_{\xi 2}(x) = \theta_0 x - \frac{1}{T} (x - \xi), \quad \text{εάν } \xi \leq x \leq L, \quad (10.3.16)$$

αφού εδώ $H(x - \xi) = 1$, επειδή $\xi \leq x \leq L$.

Απομένει βέβαια ο προσδιορισμός της προς το παρόν άγνωστης σταθεράς θ_0 . Για να τη βρούμε θυμόμαστε ότι πέρα από τη διαφορική εξίσωση (10.3.5) για την άγνωστη συνάρτηση $v_\xi(x)$ πήραμε ήδη υπόψη μας και την πρώτη συνοριακή συνθήκη (10.3.6), συγκεκριμένα τη συνθήκη $v_\xi(0) = 0$, και τις δύο στο μετασχηματισμό

Laplace (10.3.9) της διαφορικής εξίσωσης (10.3.5). Επομένως θα πρέπει τώρα να πάρουμε υπόψη μας και τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη (10.3.6), συγκεκριμένα τη συνθήκη $v_\xi(L) = 0$, που την είχαμε αγνοήσει μέχρι τώρα. Έτσι με χρήση της σχέσεως (10.3.16) για $x = L$ προκύπτει αμέσως από αυτήν τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη ότι

$$v_\xi(L) = v_{\xi 2}(L) = \theta_0 L - \frac{1}{T}(L - \xi) = 0 \quad \text{και τελικά} \quad \theta_0 = \frac{L - \xi}{TL} \quad (10.3.17)$$

για τη μέχρι τώρα άγνωστη σταθερά θ_0 , που τώρα προσδιορίστηκε.

Κι έτσι η συνάρτηση Green του παρόντος προβλήματος (10.3.13) (για $0 \leq x \leq L$) και αναλυτικότερα (10.3.15) (για $0 \leq x \leq \xi$) και (10.3.16) (για $\xi \leq x \leq L$) γράφεται τώρα με την τιμή της σταθεράς θ_0 που μόλις βρήκαμε στην τελική της μορφή

$$v_\xi(x) \equiv G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(L - \xi)x}{TL}, & \text{εάν } 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{(L - x)\xi}{TL}, & \text{εάν } \xi \leq x \leq L, \end{cases} \quad (10.3.18)$$

αφού για $\xi \leq x \leq L$ διαπιστώνεται πολύ εύκολα ότι ισχύει

$$\theta_0 x - \frac{1}{T}(x - \xi) = \frac{(L - \xi)x}{TL} - \frac{1}{T}(x - \xi) = \frac{(L - \xi)x - L(x - \xi)}{TL} = \frac{(L - x)\xi}{TL}. \quad (10.3.19)$$

Σημειώνουμε ότι τις ίδιες ακριβώς εκφράσεις για τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ τις είχαμε βρει και στα *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς*, Τεύχος 1, Παράγραφος Γ3.5.1 για τη συνάρτηση επιρροής (που συμπίπτει με τη συνάρτηση Green) στο πρόβλημα της χορδής, σχέσεις (3.5.11). Εκεί όμως είχαμε εργασθεί με την κατευθείαν επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών (10.3.1) και (10.3.2) χωρίς να κάνουμε χρήση της συναρτήσεως δέλτα του Dirac ούτε βέβαια της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace.

Σημειώνουμε επίσης ότι αν θέλουμε μάλιστα την ίδια πιο πάνω συνάρτηση Green $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$ τη γράφουμε και στην απόλυτα ισοδύναμη σε ενιαίο τύπο μορφή της

$$v_\xi(x) \equiv G(x, \xi) = \frac{(L - \xi)x}{TL} H(\xi - x) + \frac{(L - x)\xi}{TL} H(x - \xi). \quad (10.3.20)$$

Εδώ κάναμε ξανά χρήση της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside, που χρησιμοποιήθηκε κατάλληλα (υποθέτοντας ότι $H(0) = 1/2$), ώστε να ξεχωρίζονται τα δύο διαστήματα $0 \leq x \leq \xi$ και $\xi \leq x \leq L$. Έτσι παίρνουμε τις ίδιες εκφράσεις (10.3.18) της παρούσας συναρτήσεως Green για το πρόβλημα του καλωδίου που μελετάμε.

Και φυσικά τώρα πια που εμείς γνωρίζουμε τη συνάρτηση Green $v_\xi(x)$ για το παρόν πρόβλημα του καλωδίου, μπορούμε να υπολογίσουμε αμέσως την κάθετη μετατόπισή του (ή εγκάρσια μετατόπισή του) $v(x)$ σε οποιοδήποτε σημείο του x για οποιαδήποτε φόρτισή του $p(x)$ με βάση τον ολοκληρωτικό τύπο

$$v(x) = \int_0^L G(x, \xi) p(\xi) d\xi. \quad (10.3.21)$$

Και ασφαλώς αυτός εδώ ο τύπος είναι ουσιαστικά ο βασικός τύπος (10.1.11) του Ορισμού Ε10.1 για τον υπολογισμό της λύσεως $y_p(x)$ της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (10.1.10) στο ίδιο θεώρημα μαζί με τις συνθήκες που τη συνοδεύουν (εδώ στο καλώδιο συνοριακές συνθήκες) με τη χρήση της σχετικής συναρτήσεως Green.

Σημειώνουμε τέλος ότι για $x = \xi$ η κοινή τιμή $G(\xi, \xi)$ της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$ και από αριστερά (με $x = \xi$), $v_{\xi 1}(\xi)$, και από δεξιά (πάλι με $x = \xi$), $v_{\xi 2}(\xi)$, είναι

$$G(\xi, \xi) \equiv v_{\xi 1}(\xi) = v_{\xi 2}(\xi) = \frac{(L - \xi)\xi}{TL}. \quad (10.3.22)$$

Αυτό προκύπτει αμέσως από την πάνω και από την κάτω σχέση (10.3.18) και ανάλογα και από την ισοδύναμη σχέση (10.3.20) για τη συνάρτηση Green. Και αυτό πρέπει βέβαια να συμβαίνει και από φυσική άποψη, μια που η συνάρτηση Green $v_\xi(\xi) \equiv G(x, \xi)$ δηλώνει, όπως ήδη αναφέραμε, την κάθετη μετατόπιση των σημείων του καλωδίου. Και βέβαια αυτή εδώ η τιμή $G(\xi, \xi)$ είναι η μέγιστη τιμή αυτής της κάθετης μετατόπισης κατά μήκος του καλωδίου. Επίσης αυτή παρουσιάζεται στο σημείο $x = \xi$, όπου για την εύρεση της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$ εφαρμόζεται το μοναδιαίο κάθετο συγκεντρωμένο φορτίο $P = 1$ στο καλώδιο. Μαθηματικά αυτό το μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο το δηλώσαμε με την κάθετη “κατανεμημένη” φόρτιση του καλωδίου $p(x) = \delta(x - \xi)$ στη διαφορική εξίσωση (10.3.3) ή ισοδύναμα στη διαφορική εξίσωση (10.3.5) έχοντας βέβαια χρησιμοποιήσει και στις δύο αυτές διαφορικές εξισώσεις τη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(x - \xi)$.

E10.3.3

E10.3.3. Επίλυση με τη μέθοδο της αναγωγής σε δύο ομογενείς εξισώσεις

Σε αυτήν εδώ την παράγραφο θα προσδιορίσουμε την ίδια ακριβώς συνάρτηση Green στο πρόβλημα του καλωδίου που, επαναλαμβάνουμε, εδώ το προσεγγίζουμε με χορδή χωρίς τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace. Εδώ θα εργασθούμε με τη μέθοδο της αναγωγής του προβλήματος σε δύο ομογενείς διαφορικές εξισώσεις, που ήδη την αναφέραμε κι αυτή στην Παράγραφο E10.1.6. Πιο συγκεκριμένα εδώ θεωρούμε την ομογενή διαφορική εξίσωση

$$v_\xi''(x) = 0, \quad (10.3.23)$$

δηλαδή τη διαφορική εξίσωση (10.3.5) τώρα δίχως το δεξιό μέλος της $-\delta(x - \xi)/T$. Τη θεωρούμε όμως σε δύο χωριστά διαστήματα: (i) Στο διάστημα $[0, \xi)$ αριστερά από το σημείο $x = \xi$ εφαρμογής του συγκεντρωμένου φορτίου $P = 1$ στο καλώδιο που μελετάμε και (ii) στο διάστημα $[\xi, L]$ δεξιά από το σημείο $x = \xi$ εφαρμογής του ίδιου συγκεντρωμένου φορτίου $P = 1$.

Εδώ πρόκειται φυσικά για μια εξαιρετικά απλή διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως που έχει σαν γενική λύση της απλά ένα πρωτοβάθμιο πολυώνυμο της μορφής

$$v_h(x) = C_1x + C_2. \quad (10.3.24)$$

Δηλώνοντας τη λύση αυτή σαν $v_{\xi 1}(\xi)$ για το αριστερό τμήμα $[0, \xi)$ του καλωδίου και $v_{\xi 2}(\xi)$ για το δεξιό τμήμα $[\xi, L]$ του καλωδίου (βέβαια με διαφορετικές σταθερές σ' αυτά τα δύο τμήματα του καλωδίου), έχουμε

$$v_{\xi 1}(x) = Ax + B \quad \text{για } 0 \leq x < \xi \quad \text{και} \quad v_{\xi 2}(x) = Cx + D \quad \text{για } \xi < x \leq L. \quad (10.3.25)$$

Και είναι βέβαια εύλογες αυτές εδώ οι δύο απλές εκφράσεις, επειδή δεν υπάρχει καθόλου φόρτιση του καλωδίου στα δύο αυτά τμήματά του. Συγκεκριμένα εδώ για τον προσδιορισμό της συναρτήσεως Green $G(x, \xi) \equiv v_\xi(x)$ το συγκεντρωμένο φορτίο $P = 1$ ασκείται μόνο στο σημείο $x = \xi$ ακριβώς του καλωδίου. Και τώρα στόχο μας αποτελεί απλά ο προσδιορισμός και των τεσσάρων σταθερών A, B, C και D στις δύο πιο πάνω εκφράσεις (10.3.25) για την παρούσα συνάρτηση Green $G(x, \xi) \equiv v_\xi(x)$.

Δεν είναι δα και ιδιαίτερα δύσκολη δουλειά αυτή η δουλειά μας, που θα γίνει σύμφωνα με όσα αναφέραμε για την παρούσα μέθοδο της αναγωγής σε δύο ομογενείς διαφορικές εξισώσεις στην Παράγραφο E10.1.6. Πρέπει να προσδιορίσουμε τέσσερις σταθερές, τις σταθερές A, B, C και D , και έχουμε επίσης τέσσερις συνθήκες.

Συγκεκριμένα έχουμε (i, ii) τις δύο συνοριακές συνθήκες (10.3.6), (iii) τη συνθήκη της συνεχείας της άγνωστης συναρτήσεως Green $G(x, \xi) \equiv v_\xi(x)$ στο σημείο $x = \xi$ εφαρμογής του συγκεντρωμένου φορτίου $P = 1$ και (iv) τη συνθήκη της ασυνεχείας της πρώτης παραγώγου της ίδιας συναρτήσεως Green στο ίδιο σημείο $x = \xi$ με απότομη μεταβολή της εκεί κατά $-1/T$. Πιο συνοπτικά οι τέσσερις συνθήκες στο παρόν πρόβλημα προσδιορισμού της συναρτήσεως Green $G(x, \xi) \equiv v_\xi(x)$ είναι οι εξής:

$$v_{\xi 1}(0) = 0, \quad v_{\xi 2}(L) = 0, \quad v_{\xi 1}(\xi) = v_{\xi 2}(\xi) \quad \text{και} \quad v'_{\xi 2}(\xi) - v'_{\xi 1}(\xi) = -\frac{1}{T}. \quad (10.3.26)$$

Αυτές τις τέσσερις συνθήκες θα πρέπει να τις πληρούν εδώ οι δύο άγνωστες ακόμη συναρτήσεις $v_{\xi 1}(x)$ και $v_{\xi 2}(x)$ στις σχέσεις (10.3.25), που εκφράζουν (κι οι δύο μαζί) τη συνάρτηση Green $G(x, \xi) \equiv v_\xi(x)$ στο παρόν πρόβλημα καλωδίου.

Σημειώνουμε ότι είναι εύλογο η συνάρτηση Green να μηδενίζεται και στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ του καλωδίου (δύο πρώτες συνθήκες), αφού το καλώδιο είναι στηριγμένο σ' αυτά τα δύο άκρα του. Επίσης είναι εύλογο να είναι συνεχής ακόμη και στο σημείο $x = \xi$ (τρίτη συνθήκη), γιατί εκφράζει την κάθετη μετατόπιση των σημείων του καλωδίου και το καλώδιο είναι συνεχές. Δηλαδή το καλώδιο δεν έχει σπάσει στο σημείο $x = \xi$, που είναι βέβαια το σημείο της φορτίσεώς του, δεν έχει κοπεί στα δύο το καλώδιο σ' αυτό το σημείο $x = \xi$.

Τώρα όσον αφορά στην τέταρτη συνθήκη: στην απότομη μεταβολή της πρώτης παραγώγου της συναρτήσεως Green κατά $-1/T$ στο σημείο $x = \xi$ της φορτίσεως του καλωδίου, αυτή προκύπτει εύκολα από την ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσής (10.3.5) για την παρούσα συνάρτηση Green $G(x, \xi) \equiv v_\xi(x)$ γύρω από το σημείο $x = \xi$ της ιδιομορφίας $\delta(x - \xi)/T$ στο δεξιό μέλος της. Και ξέρουμε ότι η συνάρτηση δέλτα του Dirac περικλείει εμβαδόν ίσο με τη μονάδα γύρω από το σημείο απειρισμού της. Επομένως εδώ περικλείεται μεταβολή $-1/T \cdot 1 = -1/T$ γύρω από αυτό το σημείο.

Και από πιο φυσική άποψη η συνάρτηση $-Tv'(x)$ εκφράζει εδώ στο καλώδιο τη συνολική φόρτιση κατά μήκος του (ανάλογα με τη συνάρτηση $EIv'''(x)$ στη δοκό που εκφράζει την τέμνουσα δύναμη Q κατά μήκος της δοκού). Επομένως, μια που εδώ αυτή η συνολική φόρτιση του καλωδίου αυξάνεται κατά μονάδα στο σημείο $x = \xi$ εφαρμογής του μοναδιαίου συγκεντρωμένου φορτίου $P = 1$, θα πρέπει να υπάρχει η αντίστοιχη μεταβολή (πάλι κατά μονάδα) και στην ποσότητα $-Tv'(x)$ σ' αυτό το ίδιο σημείο $x = \xi$. Και διαιρώντας με $-1/T$, θα πρέπει τελικά να ισχύει η τέταρτη πιο πάνω συνθήκη (10.3.26).

Προχωράμε τώρα στον προσδιορισμό των τεσσάρων σταθερών A, B, C και D στις δύο σχέσεις (10.3.25) για την παρούσα συνάρτηση Green $v_\xi(\xi)$ με βάση τις τέσσερις συνθήκες (10.3.26). Εύκολη είναι η εργασία μας αυτή. Ξεκινάμε!

Από την πρώτη σχέση (10.3.25) με βάση την πρώτη συνθήκη (10.3.26) βρίσκουμε αμέσως ότι $B = 0$. Επίσης από τη δεύτερη σχέση (10.3.25) με βάση τη δεύτερη συνθήκη (10.3.26) βρίσκουμε αμέσως ότι $CL + D = 0$, οπότε $D = -CL$. Άρα μέχρι τώρα βρήκαμε ότι

$$v_{\xi 1}(x) = Ax \quad \text{και} \quad v_{\xi 2}(x) = C(x - L). \quad (10.3.27)$$

Μας απομένει τώρα ο προσδιορισμός των δύο σταθερών A και C . Από την τρίτη συνθήκη (10.3.26) διαπιστώνουμε αμέσως με τη χρήση των δύο πιο πάνω σχέσεων (10.3.27) ότι $A\xi = C(\xi - L)$ και επομένως $A = C(\xi - L)/\xi$ υποθέτοντας ότι $0 < \xi < L$. Άρα οι δύο σχέσεις μας (10.3.27) παίρνουν τώρα τη μορφή

$$v_{\xi 1}(x) = C \frac{(\xi - L)x}{\xi} \quad \text{και} \quad v_{\xi 2}(x) = C(x - L), \quad (10.3.28)$$

οπότε

$$v'_{\xi_1}(x) = C \frac{\xi - L}{\xi} \quad \text{και} \quad v'_{\xi_2}(x) = C. \quad (10.3.29)$$

Μία ακόμη σταθερά έχουμε να προσδιορίσουμε: τη σταθερά C . Χρησιμοποιώντας την τέταρτη (και τελευταία) συνθήκη (10.3.26) σε συνδυασμό με τις δύο παραγώγους $v'_{\xi_1}(x)$ και $v'_{\xi_2}(x)$ εδώ στις σχέσεις (10.3.29), διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$v'_{\xi_2}(\xi) - v'_{\xi_1}(\xi) = C - C \frac{\xi - L}{\xi} = -\frac{1}{T} \implies \frac{CL}{\xi} = -\frac{1}{T} \implies C = -\frac{\xi}{TL}. \quad (10.3.30)$$

Εισάγοντας τώρα και αυτήν την τελευταία σταθερά C στις δύο σχέσεις (10.3.28), παίρνουμε τελικά

$$v_{\xi_1}(x) = \frac{(L - \xi)x}{TL} \quad \text{και} \quad v_{\xi_2}(x) = \frac{(L - x)\xi}{TL}. \quad (10.3.31)$$

Κι έτσι παρατηρούμε ότι καταλήξαμε και με την παρούσα μέθοδο των δύο ομογενών διαφορικών εξισώσεων ακριβώς στην ίδια συνάρτηση Green $v_{\xi}(x) \equiv G(x, \xi)$ της σχέσεως (10.3.18), στην οποία είχαμε καταλήξει και στην προηγούμενη παράγραφο, εκεί βέβαια έχοντας χρησιμοποιήσει τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

Κι η εντύπωσή μας είναι εδώ ότι η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace, που χρησιμοποιεί τη βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(x)$ και τη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(x)$ στους παρόντες υπολογισμούς, είναι τελικά πιο απλή στην εφαρμογή της από την παρούσα μέθοδο των δύο ομογενών διαφορικών εξισώσεων. Και αυτό συμβαίνει, επειδή εκεί χρησιμοποιήσαμε ρητά μόνο τις δύο συνθήκες (10.3.6), τις δύο συνοριακές συνθήκες του καλωδίου στα άκρα του, δηλαδή μόνο τις δύο πρώτες συνθήκες (10.3.26). Αντίθετα εδώ χρησιμοποιήσαμε επιπλέον και τις δύο τελευταίες συνθήκες (10.3.26): τις συνθήκες συνέχειας της συναρτήσεως Green και ασυνεχείας της πρώτης παραγώγου της ως προς x για $x = \xi$. Άρα, αν είμαστε εξοικειωμένοι με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace προφανώς σε συνδυασμό με τις συναρτήσεις $H(x)$ και $\delta(x)$, είναι ίσως σκόπιμο να προτιμάμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace από τη μέθοδο των δύο ομογενών διαφορικών εξισώσεων.

Και βέβαια υπάρχει πάντοτε και η δυνατότητα της κατευθείαν επιλύσεως της αρχικής μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως του καλωδίου (10.3.1) με αυθαίρετη τη φόρτιση $p(x)$ στο δεξιό μέλος της με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων, που την ξέρουμε πολύ καλά κι αυτήν από τις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Έτσι θα βρούμε το σχετικό ολοκληρωτικό τύπο για τη λύση $v(x)$ αυτής της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως, που θα εμπεριέχει βέβαια την παρούσα συνάρτηση Green. Εντούτοις αυτή η τρίτη και από φυσική άποψη απόλυτα κατανοητή μέθοδος δεν είναι υπολογιστικά εύχρηστη από τη μαθηματική άποψη ως προς τους απαραίτητους υπολογισμούς που πρέπει να γίνουν.

Συνοψίζοντας εδώ σε γενικές γραμμές η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace παρόλο που υστερεί σαφώς από τη φυσική άποψη ωστόσο φαίνεται να είναι εδώ η προτιμητέα μέθοδος από την ωφελιμιστική άποψη των λιγότερων υπολογισμών. Και βέβαια με κανέναν τρόπο δε μπορούμε να αγνοούμε και αυτήν την άποψη. Σημειώνουμε τέλος ότι ανάλογα φαίνεται να ισχύουν επίσης σε όσες περιπτώσεις άπειρων διαστημάτων είμαστε υποχρεωμένοι να εργαζόμαστε με τη συγγενή μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier αντί με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

Μπορούμε τέλος να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ του καλωδίου, που υπολογίστηκε πιο πάνω και δίνεται από τη σχέση (10.3.18), είναι συμμετρική ως προς τις δύο μεταβλητές της x και ξ . Δηλαδή ισχύει εδώ η σχέση συμμετρίας της

$$G(x, \xi) = G(\xi, x) \quad (10.3.32)$$

Απόδειξη

⇒ **Απόδειξη:** Αυτή η σχέση είναι φυσικά προφανής για $x = \xi$. Τώρα για $x \neq \xi$ για την απόδειξη αυτή διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: Υποθέτουμε πρώτα ότι $x < \xi$, οπότε με βάση την πρώτη σχέση (10.3.18) έχουμε

$$G(x, \xi) = \frac{(L - \xi)x}{TL}. \quad (10.3.33)$$

Τώρα αναζητούμε την έκφραση $G(\xi, x)$, δηλαδή την κάθετη μετατόπιση στο σημείο ξ με τη μοναδιαία συγκεντρωμένη φόρτιση στο σημείο x . Κάνουμε όμως την υπόθεση ότι $x < \xi$. Άρα το σημείο ξ κείται δεξιά από το σημείο x . Επομένως θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τώρα τη δεύτερη σχέση (10.3.18) προφανώς εναλλάσσοντας εδώ τους ρόλους των x και ξ . Έτσι όμως παίρνουμε και πάλι το αμέσως πιο πάνω αποτέλεσμα (10.3.33), κάτι που αποδεικνύει τη σχέση (10.3.32), δηλαδή τη συμμετρία της παρούσας συναρτήσεως Green ως προς x και ξ . Ανάλογη απόδειξη γίνεται και στη δεύτερη περίπτωση όπου $x > \xi$ με βάση τη δεύτερη σχέση (10.3.18), δηλαδή τη σχέση

$$G(x, \xi) = \frac{(L - x)\xi}{TL}. \quad (10.3.34)$$

Αυτή η συμμετρία της συναρτήσεως Green αποτελεί συνέπεια της πολύ γνωστής *αρχής της αμοιβαιότητας των μετατοπίσεων* του Maxwell ή των Betti–Maxwell στη Μηχανική των Υλικών και ασφαλώς δεν ισχύει γενικά στις συναρτήσεις Green. Για παράδειγμα, δεν ισχύει στη συνάρτηση Green $G(t, \tau)$ στη σχέση (10.2.16) της Ενότητας Ε10.2 για τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος, π.χ. ενός μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατημήσεως (ή διατημητικού κτιρίου) με ασθενή απόσβεση (και ανάλογα με κρίσιμη απόσβεση και με ισχυρή απόσβεση).

 **Άσκηση****Ενότητα Ε10.3****▼ Άσκηση Ε10.4 ■ Καλώδιο υπό σταθερή φόρτιση**

Θεωρούμε εδώ την ειδική περίπτωση όπου το καλώδιο μας υπό τάση (ένταση) T έχει σταθερή κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x) = p_0$. Ζητούνται: (α) Με τη χρήση της πιο πάνω συναρτήσεως Green (10.3.18), που βρέθηκε ήδη με δύο τρόπους για το πρόβλημα του καλωδίου, να υπολογισθεί η κάθετη μετατόπιση (ή εγκάρσια μετατόπιση) $v(x)$ των σημείων του καλωδίου για την παρούσα σταθερή κάθετη φόρτισή του $p(x) = p_0$. *Υπόδειξη:* Εδώ θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο ολοκληρωτικός τύπος

$$v(x) = \int_0^L G(x, \xi)p(\xi) d\xi = \int_0^x v_{\xi 2}(\xi)p_0 d\xi + \int_x^L v_{\xi 1}(\xi)p_0 d\xi. \quad (10.3.35)$$

(β) Να εξηγηθεί γιατί η συνάρτηση $v_{\xi 2}(\xi)$ υπεισέρχεται στο πρώτο ολοκλήρωμα, ενώ η συνάρτηση $v_{\xi 1}(\xi)$ υπεισέρχεται στο δεύτερο και όχι αντίθετα. (γ) Να βρεθεί το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα, τώρα όμως χωρίς συναρτήσεις Green, δηλαδή με την άμεση επίλυση της ίδιας της διαφορικής εξίσωσης του καλωδίου (10.3.1) μαζί με τις σχετικές συνοριακές συνθήκες (10.3.2). (δ) Συμφωνούν τα αποτελέσματα; (ε) Για ποιο λόγο είναι γενικά προτιμότερη η χρήση της συναρτήσεως Green $v_{\xi}(x) \equiv G(x, \xi)$ και ειδικά εδώ στο πρόβλημα του καλωδίου που μελετήσαμε;

⇒ **Απαντήσεις:** (α) και (γ) $v(x) = p_0(L - x)x/(2T)$. (δ) Ναι. (ε) Επειδή μας επιτρέπει να βρίσκουμε απλά με ολοκλήρωση τη λύση του προβλήματος αρχικών ή συνοριακών τιμών που έχουμε (διαφορική εξίσωση και αρχικές ή συνοριακές συνθήκες) για οποιαδήποτε συνάρτηση στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης, εδώ για οποιαδήποτε φόρτιση $p(x)$ του καλωδίου μας. Κι έτσι δε χρειάζεται να λύνουμε από την αρχή αυτό το πρόβλημα, όταν αλλάζει αυτή η συνάρτηση, εδώ η φόρτιση $p(x)$. ▲

E10.4

E10.4. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΔΟΚΟΥ

E10.4.1

E10.4.1. Καθορισμός του προβλήματος για τη συνάρτηση Green

Σε αυτήν την ενότητα προχωράμε ένα βήμα παραπέρα από την προηγούμενη ενότητα θεωρώντας εδώ δοκό αντί για καλώδιο. Συγκεκριμένα εδώ θεωρούμε το κλασικό στατικό πρόβλημα της δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας EI στη Μηχανική των Υλικών. Η κάθετη καταναμεμένη φόρτιση που ασκείται πάνω στη δοκό είναι $p(x)$ και θεωρείται γνωστή. Όπως γνωρίζουμε, αυτό το πρόβλημα διέπεται από τη συνήθη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως

$$EIv''''(x) = p(x) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad v''''(x) = \frac{p(x)}{EI} \quad (10.4.1)$$

με άγνωστη συνάρτηση το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού που μελετάμε.

Σαν συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της δοκού μπορούμε να έχουμε συνθήκες (i) πακτώσεως, (ii) αρθρώσεως ή κυλίσεως και (iii) ελεύθερου άκρου (εννοείται πάντοτε με στατική ισορροπία της δοκού). Εδώ εμείς επιλέγουμε αριστερά συνθήκες πακτώσεως και δεξιά συνθήκες κυλίσεως. Δηλαδή υποθέτουμε τη δοκό μας ότι είναι πακτωμένη αριστερά και με κύλιση δεξιά. (Εντελώς ανάλογα θα μπορούσαμε να είχαμε υποθέσει αμφίπακτη δοκό, αμφιέριστη δοκό ή πρόβολο.) Με βάση αυτήν την υπόθεσή μας: δοκός με πάκτωση στο αριστερό άκρο της $x = 0$ και κύλιση το δεξιό άκρο της $x = L$, θα ισχύουν οι εξής τέσσερις συνοριακές συνθήκες:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(L) = 0 \quad \text{και} \quad v''(L) = 0. \quad (10.4.2)$$

Οι εξισώσεις (10.4.1) (διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως) και (10.4.2) (τέσσερις συνοριακές συνθήκες) αποτελούν το πρόβλημα που έχουμε να λύσουμε, εδώ βέβαια με τη μέθοδο της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$, που θέλουμε να την προσδιορίσουμε. Η κυριότερη διαφορά από την προηγούμενη Ενότητα E10.3, όπου είχαμε εξετάσει το πρόβλημα του καλωδίου, είναι ότι εδώ έχουμε συνήθη διαφορική εξίσωση τετάρτης (αντί δευτέρας τάξεως) και τέσσερις (αντί δύο) συνοριακές συνθήκες. Κατά τα λοιπά θα εργασθούμε κι εδώ για τη δοκό ανάλογα με τον τρόπο που είχαμε εργασθεί στην προηγούμενη ενότητα για το καλώδιο περιορίζοντας όμως εδώ την προσοχή μας αποκλειστικά στη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Και αυτή ήταν ήδη η πρώτη από τις δύο μεθόδους που είχαμε χρησιμοποιήσει και στο καλώδιο.

Για την εργασία μας εδώ προς προσδιορισμό της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$ για το στατικό πρόβλημα της δοκού (εδώ με πάκτωση-κύλιση στα δύο άκρα της) δεχόμαστε, ακριβώς όπως και στην προηγούμενη Ενότητα E10.3 για το καλώδιο, σαν φόρτιση μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο $P = 1$ στο σημείο $x = \xi$ της δοκού φυσικά με $0 \leq \xi \leq L$. Δηλαδή δεχόμαστε ότι $p(x) = \delta(x - \xi)$. Τότε η διαφορική εξίσωσή μας (10.4.1) παίρνει τη μορφή

$$EIG_x''''(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad G_x''''(x, \xi) = \frac{\delta(x - \xi)}{EI} \quad (10.4.3)$$

με τις παραγωγίσεις να εννοούνται ως προς τη μεταβλητή x , την οποία για το σκοπό αυτό τη θέσαμε σαν δεικτική στην παράγωγο. Επίσης οι συνοριακές συνθήκες (10.4.2) παίρνουν κι αυτές τις ακόλουθες μορφές τους:

$$G(0, \xi) = 0, \quad G'_x(0, \xi) = 0, \quad G(L, \xi) = 0 \quad \text{και} \quad G''_x(L, \xi) = 0 \quad (10.4.4)$$

με τις παραγωγίσεις να εννοούνται κι εδώ ως προς τη μεταβλητή x .

Τώρα, ακριβώς όπως και στην προηγούμενη Ενότητα Ε10.3 για το καλώδιο, έτσι κι εδώ για διευκόλυνσή μας στο συμβολισμό συμβολίζουμε από εδώ και πέρα τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ γενικά με $v_\xi(x)$. Δηλαδή θέτουμε $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$. Έτσι το πιο πάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών (10.4.3) και (10.4.4) για τη συνάρτηση Green που θέλουμε να προσδιορίσουμε γράφεται τώρα λίγο πιο απλά ως εξής:

$$EIv_\xi''''(x) = \delta(x - \xi) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad v_\xi''''(x) = \frac{\delta(x - \xi)}{EI} \quad (10.4.5)$$

και επίσης

$$v_\xi(0) = 0, \quad v_\xi'(0) = 0, \quad v_\xi(L) = 0 \quad \text{και} \quad v_\xi''(L) = 0. \quad (10.4.6)$$

Και τώρα στην αμέσως επόμενη παράγραφο θα λύσουμε αυτό εδώ το πρόβλημα προτιμώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, που την κρίνουμε σαν την υπολογιστικά ευκολότερη σχετική δυνατότητά μας. Έτσι θα προσδιορίσουμε την άγνωστη συνάρτηση $v_\xi(x)$ σ' αυτό το πρόβλημα, δηλαδή τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ στη δοκό μας. Και υπενθυμίζουμε ότι εδώ υποθέσαμε δοκό με πάκτωση-κύλιση στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$ αντίστοιχα. Εάν είχαμε υποθέσει κάποια άλλη δοκό (π.χ. αμφίπακτη δοκό, αμφιέριστη δοκό ή πρόβολο με πάκτωση αριστερά), τότε και οι συνοριακές συνθήκες θα ήσαν εντελώς διαφορετικές. Και βέβαια και η συνάρτηση Green $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$ που θα προέκυπτε θα ήταν κι αυτή εντελώς διαφορετική.

E10.4.2

E10.4.2. Επίλυση με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace

Για να μετασχηματίσουμε τώρα κατά Laplace τη διαφορική εξίσωση (10.4.5) παίρνουμε εδώ υπόψη μας το μετασχηματισμό Laplace (10.3.7) της προηγούμενης Ενότητας Ε10.3 για τη συνάρτηση $\delta(x - \xi)$ που τον επαναλαμβάνουμε κι εδώ

$$\mathcal{L}\{\delta(x - \xi)\} = e^{-\xi s}. \quad (10.4.7)$$

Επίσης τώρα αντί για το μετασχηματισμό Laplace (10.3.8) της προηγούμενης Ενότητας Ε10.3 για τη συνάρτηση Green $v_\xi(x)$, που θέλουμε να βρούμε, παίρνουμε υπόψη μας εδώ που έχουμε μια διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace

$$\mathcal{L}\{v_\xi''''(x)\} = s^4 V_\xi(s) - s^3 \cdot 0 - s^2 \cdot 0 - As - B, \quad \text{όπου} \quad V_\xi(s) = \mathcal{L}\{v_\xi(x)\}. \quad (10.4.8)$$

Σημειώνουμε βέβαια ότι σ' αυτόν το μετασχηματισμό Laplace για την τέταρτη παράγωγο $\mathcal{L}\{v_\xi''''(x)\}$ πήραμε ήδη υπόψη μας τις δύο πρώτες από τις συνοριακές συνθήκες (10.4.6), δηλαδή τις συνθήκες $v_\xi(0) = 0$ και $v_\xi'(0) = 0$. Αυτές αφορούν στην πάκτωση στο αριστερό άκρο $x = 0$ της δοκού. Επειδή όμως δεν έχουμε διαθέσιμες άλλες συνθήκες σ' αυτό το άκρο, θέσαμε εκεί αυθαίρετα $v_\xi''(0) = A$ και $v_\xi'''(0) = B$ με σκοπό να προσδιορίσουμε αυτές τις δύο άγνωστες σταθερές αργότερα με βάση τις άλλες δύο συνοριακές συνθήκες (10.4.6), δηλαδή τις δύο συνθήκες $v_\xi(L) = 0$ και $v_\xi''(L) = 0$. Αυτές όμως αφορούν στην κύλιση στο δεξιό άκρο $x = L$ της δοκού και δε μπορούμε να τις εκμεταλλευθούμε ακόμη.

Παρενθετικά σημειώνουμε ότι, όπως γνωρίζουμε από τη Μηχανική των Υλικών, οι δύο σταθερές A και B στον πιο πάνω μετασχηματισμό Laplace (10.4.8) ουσιαστικά δηλώνουν τη ροπή κάμψεως $M(0)$ και την τέμνουσα δύναμη $Q(0)$ στην πάκτωση της δοκού στο αριστερό άκρο της $x = 0$. Συγκεκριμένα ισχύουν οι δύο γνωστοί τύποι

$$A = v_\xi''(0) = \frac{M(0)}{EI} \quad \text{και} \quad B = v_\xi'''(0) = \frac{Q(0)}{EI}. \quad (10.4.9)$$

Εμείς όμως επιλέξαμε εδώ τη χρήση των μαθηματικών συμβόλων A και B αντί για τα φυσικά μεγέθη $M(0)/(EI)$ και $Q(0)/(EI)$ στο αριστερό άκρο $x = 0$ της δοκού. Εάν βέβαια είχαμε πρόβλημα με πάκτωση αριστερά, που είναι ένας ισοστατικός φορέας, τότε τα πράγματα θα ήσαν λίγο πιο εύκολα, επειδή τότε από τις εξισώσεις στατικής ισορροπίας θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε εύκολα τις ποσότητες $M(0)$ και $Q(0)$. Αλλά εδώ έχουμε έναν υπερστατικό φορέα και αυτό δεν είναι τόσο εύκολο. Κι εδώ όμως δεν υπάρχει ουσιαστικό πρόβλημα. Σε λίγο θα προσδιορισθούν πραγματικά οι δύο σταθερές A και B με βάση τις δύο τελευταίες συνοριακές συνθήκες (10.4.6), δηλαδή τις δύο συνθήκες $v_\xi(L) = 0$ και $v_\xi''(L) = 0$. Αυτές ισχύουν στην κύλιση στο δεξιό άκρο $x = L$ της παρούσας δοκού με πάκτωση-κύλιση στα δύο άκρα της.

Και τώρα με τη χρήση των δύο μετασχηματισμών Laplace (10.4.7) και (10.4.8) η διαφορική εξίσωση (10.4.5) δεξιά με μετασχηματισμό της κατά Laplace ανάγεται αμέσως στην ακόλουθη γραμμική αλγεβρική εξίσωση:

$$s^4 V_\xi(s) - As - B = \frac{e^{-\xi s}}{EI}. \quad (10.4.10)$$

Αυτήν τη λύνουμε πολύ εύκολα ως προς τον άγνωστό μας μετασχηματισμό Laplace $V_\xi(s) = \mathcal{L}\{v_\xi(x)\}$ της επίσης άγνωστης μας συναρτήσεως Green $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$, που εμείς προσπαθούμε να προσδιορίσουμε. Έτσι βρίσκουμε αμέσως ότι

$$V_\xi(s) = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^4} + \frac{e^{-\xi s}}{EI s^4}. \quad (10.4.11)$$

Βέβαια πρέπει τώρα να επιστρέψουμε από τη μεταβλητή s του μετασχηματισμού Laplace στην αρχική μεταβλητή x : στη θέση κατά μήκος της δοκού. Γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{οπότε} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\} = \frac{t^n}{n!} \quad \text{με} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.4.12)$$

Γνωρίζουμε όμως και την πολύ σημαντική ιδιότητα (10.3.11) του μετασχηματισμού Laplace. Την υπενθυμίζουμε εδώ και αυτήν την ιδιότητα

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\}H(t-a) = e^{-as} U(s) \quad \text{βέβαια με} \quad a > 0 \quad \text{και} \quad U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}. \quad (10.4.13)$$

Με τη χρήση τους και με βάση τη σχέση (10.4.11) προσδιορίζουμε αμέσως τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace $v_\xi(x) = \mathcal{L}^{-1}\{V_\xi(s)\}$ της άγνωστης συναρτήσεως: της συναρτήσεως Green $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$ που θέλουμε να βρούμε. Έτσι προκύπτει ότι

$$v_\xi(x) = \frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx^3}{6} + \frac{1}{6EI} (x-\xi)^3 H(x-\xi) = \frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx^3}{6} + \frac{1}{6EI} \langle x-\xi \rangle^3. \quad (10.4.14)$$

Ο τύπος αυτός για τη συνάρτηση Green $v_\xi(x)$ της παρούσας δοκού είναι ανάλογος με τον τύπο (10.3.13) της προηγούμενης Ενότητας E10.3 εκεί για το πρόβλημα του καλωδίου. Υπενθυμίζουμε ότι στον τύπο αυτό (10.4.14) χρησιμοποιήσαμε τη βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(x)$ αλλά και το συμβολισμό για τις συναρτήσεις Macaulay απόλυτα ανάλογα με ό,τι είχαμε κάνει και στο πρόβλημα του καλωδίου.

Σημειώνουμε βέβαια ότι λόγω της παρουσίας της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside σ' αυτόν τον τύπο (10.4.14) οι τελικές εκφράσεις της συναρτήσεως Green $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$ στα δύο τμήματα της δοκού $[0, \xi]$ (αριστερά από το συγκεντρωμένο φορτίο $P = 1$) και $[\xi, L]$ (δεξιά από το ίδιο συγκεντρωμένο φορτίο) θα διαφέρουν. Αυτό συμβαίνει, απλά επειδή $H(x-\xi) = 0$ για $x < \xi$, ενώ $H(x-\xi) = 1$ για $x \geq \xi$. (Ειδικά για το σημείο $x = \xi$ δεν υπάρχει φυσικά κανένα πρόβλημα, αφού εκεί το γινόμενο $(x-\xi)^3 H(x-\xi)$ είναι έτσι κι αλλιώς ίσο με το μηδέν.) Έτσι γράφουμε τώρα

αναλυτικότερα τον τύπο (10.4.14) με διάκριση αυτών των δύο περιπτώσεων, δηλαδή των περιπτώσεων (i) $0 \leq x \leq \xi$ (μαζί με την περίπτωση όπου $x = \xi$) και (ii) $\xi \leq x \leq L$ ως εξής:

$$v_{\xi}(x) = v_{\xi 1}(x) = \frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx^3}{6}, \quad \text{εάν } 0 \leq x \leq \xi, \quad (10.4.15)$$

και

$$v_{\xi}(x) = v_{\xi 2}(x) = \frac{Ax^2}{2} + \frac{Bx^3}{6} + \frac{1}{6EI}(x - \xi)^3, \quad \text{εάν } \xi \leq x \leq L. \quad (10.4.16)$$

Σχεδόν τελειώσαμε! Το τελευταίο βήμα μας αφορά στον προσδιορισμό των δύο σταθερών A και B με βάση τώρα τις δύο τελευταίες συνοριακές συνθήκες (10.4.6), συγκεκριμένα τις δύο συνοριακές συνθήκες

$$v_{\xi}(L) = 0 \quad \text{και} \quad v_{\xi}''(L) = 0, \quad (10.4.17)$$

που αναφέρονται στο δεξιό άκρο $x = L$ της δοκού (εκεί με κύλιση της δοκού). Για την πλήρωση και αυτών των δύο συνοριακών συνθηκών απλά θα αντικαταστήσουμε σ' αυτές την έκφραση (10.4.16) (αφού εδώ $\xi < x = L$) της συναρτήσεως Green $v_{\xi}(x)$ και της δευτέρης παραγώγου της που προκύπτει εύκολα από την έκφραση (10.4.16) και έχει τη μορφή

$$v_{\xi}''(x) = v_{\xi 2}''(x) = A + Bx + \frac{x - \xi}{EI}. \quad (10.4.18)$$

Έτσι από τις δύο συνοριακές συνθήκες (10.4.17) στο δεξιό άκρο $x = L$ της δοκού προκύπτει αμέσως το σύστημα των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$\frac{AL^2}{2} + \frac{BL^3}{6} + \frac{1}{6EI}(L - \xi)^3 = 0 \quad \text{και} \quad A + BL + \frac{L - \xi}{EI} = 0 \quad (10.4.19)$$

προφανώς με αγνώστους τις δύο προς προσδιορισμό σταθερές A και B . Λύνοντας αυτό το τόσο απλό γραμμικό σύστημα, βρίσκουμε τις τιμές των A και B που είναι

$$A = \frac{\xi(2L^2 - 3L\xi + \xi^2)}{2EIL^2} \quad \text{και} \quad B = -\frac{2L^3 - 3L\xi^2 + \xi^3}{2EIL^3}. \quad (10.4.20)$$

Αυτές προφανώς δεν εξαρτώνται από την ανεξάρτητη μεταβλητή x στη διαφορική εξίσωση της δοκού (10.4.5) για τη συνάρτηση Green $v_{\xi}(x) \equiv G(x, \xi)$. Αντίθετα όμως εξαρτώνται από τη θέση ξ του συγκεντρωμένου φορτίου που ασκείται στη δοκό.

Ωραία λοιπόν! Έχουμε τώρα πια προσδιορίσει και τις δύο σταθερές A και B στη συνάρτηση Green (10.4.14) ή πιο αναλυτικά (10.4.15) (για $0 \leq x \leq \xi$) και (10.4.16) (για $\xi \leq x \leq L$). Και αντικαθιστώντας τις σ' αυτές τις δύο σχέσεις παίρνουμε τελικά

$$v_{\xi}(x) \equiv G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x^2(L - \xi)[2L^2(3\xi - x) + \xi^2x - L\xi(2x + 3\xi)]}{12EIL^3}, & \text{εάν } 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi^2(L - x)[2L^2(3x - \xi) + x^2\xi - Lx(2\xi + 3x)]}{12EIL^3}, & \text{εάν } \xi \leq x \leq L. \end{cases} \quad (10.4.21)$$

Διαπιστώνουμε αρκετά εύκολα ότι αυτή η συνάρτηση Green $v_{\xi}(x) \equiv G(x, \xi)$ στο παρόν πρόβλημα δοκού με πάκτωση-κύλιση πληροί και τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες (10.4.6) στα δύο άκρα της δοκού $x = 0$ (με πάκτωση) και $x = L$ (με κύλιση). Και επιπλέον είναι συνεχής συνάρτηση ακόμη και στο σημείο $x = \xi$ της εφαρμογής του μοναδιαίου συγκεντρωμένου φορτίου $P = 1$, όπως βέβαια συμβαίνει και με τις δύο πρώτες παραγώγους της. Δηλαδή εύλογα εδώ για τη συνάρτηση Green $v_{\xi}(x)$ το βέλος κάμψεως της δοκού, η κλίση της και η ροπή κάμψεως της (ή καμπτική ροπή της) είναι και οι τρεις τους συνεχείς συναρτήσεις ακόμη και στη θέση $x = \xi$ εφαρμογής του συγκεντρωμένου φορτίου $P = 1$. Αντίθετα βέβαια η τέμνουσα δύναμη

$Q_\xi(x)$ της δοκού μεταβάλλεται κατά μονάδα στη θέση $x = \xi$. Προφανώς εκεί η τρίτη παράγωγος $v_\xi'''(x)$ της συναρτήσεως Green $v_\xi(x) = Q_\xi(x)/(EI)$ μεταβάλλεται (αυξάνεται) απότομα κατά $1/(EI)$. Και αυτό είναι βέβαια αναμενόμενο τόσο από φυσική άποψη (λόγω του μοναδιαίου συγκεντρωμένου φορτίου $P = 1$) όσο και από μαθηματική άποψη. Και αυτό το δεύτερο συμβαίνει λόγω του δεξιού μέλους $\delta(x - \xi)/(EI)$ (που με ολοκλήρωσή του γύρω από το σημείο $x = \xi$ μας δίνει $1/(EI)$) στην παρούσα διαφορική εξίσωση (10.4.5) για τη συνάρτηση Green $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$ της δοκού μας.

Ας σημειώσουμε τέλος τις τιμές που παίρνει το βέλος κάμψεως της δοκού $v_\xi(x)$, η κλίση της $\theta_\xi(x)$, και η ροπή κάμψεως της (ή καμπυλική ροπή της) $M_\xi(x)$ στο σημείο $x = \xi$ της εφαρμογής του συγκεντρωμένου φορτίου $P = 1$. Αυτές οι τρεις τιμές είναι

$$v_\xi(\xi) = \frac{(L - \xi)^2(4L - \xi)\xi^3}{12EIL^3}, \quad (10.4.22)$$

$$\theta_\xi(\xi) = v_\xi'(\xi) = \frac{(L - \xi)(2L^2 - 4L\xi + \xi^2)\xi^2}{4EIL^3}, \quad (10.4.23)$$

$$M_\xi(\xi) = EIV_\xi''(\xi) = -\frac{(3L^2 - 4L\xi + \xi^2)\xi^2}{2L^3}. \quad (10.4.24)$$

Αντίθετα, όπως ήδη αναφέραμε, η τέμνουσα δύναμη $Q_\xi(x)$ παίρνει δύο διαφορετικές τιμές αριστερά και δεξιά από το σημείο $x = \xi$ εφαρμογής του μοναδιαίου συγκεντρωμένου φορτίου $P = 1$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε αριστερά και δεξιά

$$Q_\xi(\xi^-) = EIV_\xi'''(\xi^-) = -1 + \frac{(3L - \xi)\xi^2}{2L^3}, \quad Q_\xi(\xi^+) = EIV_\xi'''(\xi^+) = \frac{(3L - \xi)\xi^2}{2L^3}. \quad (10.4.25)$$

Προφανώς η διαφορά αυτών των δύο τιμών είναι $Q_\xi(\xi^+) - Q_\xi(\xi^-) = 1$ κι αυτό είναι απόλυτα εύλογο για την τέμνουσα δύναμη, μια που στο σημείο $x = \xi$ ασκείται το μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο $P = 1$, εδώ για τον υπολογισμό της συναρτήσεως Green $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$ της παρούσας δοκού με πάκτωση-κύλιση στα δυο άκρα της.

Σημειώνουμε τέλος ότι όπως και στο καλώδιο έτσι και εδώ η συνάρτηση Green $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$ που προσδιορίστηκε στις σχέσεις (10.4.21) είναι συμμετρική ως προς τις δύο μεταβλητές της x και ξ . Δηλαδή ισχύει και εδώ η σχέση συμμετρίας (10.3.32) συγκεκριμένα η σχέση $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. Αυτή είναι βέβαια και εδώ συνέπεια της αρχής της αμοιβαιότητας των μετατοπίσεων του Maxwell ή των Betti-Maxwell στη Μηχανική των Υλικών. Και φυσικά η σχετική απόδειξη, δηλαδή ότι $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, είναι πάρα πολύ εύκολο να γίνει και εδώ στη δοκό με βάση τις σχέσεις (10.4.21) για τη συνάρτηση Green $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$. Σχεδόν με το μάτι φαίνεται αυτή η συμμετρία!

Άσκηση

Ενότητα Ε10.4

▼ Άσκηση Ε10.5 ■ Αμφιέριστη δοκός

Θεωρούμε τώρα αμφιέριστη δοκό αντί για δοκό με πάκτωση-κύλιση στα άκρα της. Εδώ ζητούνται: (α) Η εύρεση της σχετικής συναρτήσεως Green $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi)$ με τους υπολογισμούς να γίνουν και εδώ ανάλογα με τους πιο πάνω υπολογισμούς ξανά με χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Υπόδειξη: Το μόνο που αλλάζει εδώ είναι μία συνοριακή συνθήκη στο αριστερό άκρο της δοκού, όπου τώρα έχουμε άρθρωση αντί για πάκτωση πριν. (β) Για τη συνάρτηση Green που βρέθηκε να ελεγχθεί εάν είναι ή δεν είναι συμμετρική ως προς τις δύο μεταβλητές της x και ξ .

⇒ Απαντήσεις: (α) Τώρα $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi) = \frac{x(L - \xi)[\xi(2L - \xi) - x^2]}{6EIL}$, εάν $0 \leq x \leq \xi$, και $v_\xi(x) \equiv G(x, \xi) = \frac{\xi(L - x)[x(2L - x) - \xi^2]}{6EIL}$, εάν $\xi \leq x \leq L$. (β) Είναι συμμετρική. ▲

E10.5

E10.5. ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΡΥΠΟΥ ΜΕ ΔΙΑΧΥΣΗ

E10.5.1

E10.5.1. Εισαγωγή

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε σε μια διαφορετική δυνατότητα που δεν αφορά άμεσα στη συνηθισμένη συνάρτηση Green, αλλά που σχετίζεται αρκετά με αυτήν. Συγκεκριμένα θα αναφερθούμε στην περίπτωση όπου η συνάρτηση δέλτα του Dirac που είχαμε στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (10.1.12) για τη συνάρτηση Green $G(x, \xi)$ του Ορισμού E10.1 παρουσιάζεται στην αρχική συνθήκη της διαφορικής εξισώσεως. Αυτή η συνθήκη είναι που εμφανίζει τώρα τη σχετική ιδιομορφία και όχι η ίδια η διαφορική εξίσωση, που είναι τώρα ομογενής. Εδώ ασφαλώς δεν πρόκειται ακριβώς για μια συνάρτηση Green. Πρόκειται όμως για μια πολύ συγγενή περίπτωση και αυτό θα γίνει πολύ πιο σαφές στην τελευταία Ενότητα E10.6.

E10.5.2

E10.5.2. Το γενικό πρόβλημα αρχικής τιμής

Εδώ θεωρούμε καταρχήν το μονοδιάστατο πρόβλημα της μεταφοράς ρύπου με διάχυσή του μέσα σε ένα άπειρο υδατόρρευμα με $-\infty < x < \infty$ και για χρονικές στιγμές $t \geq 0$. Τότε, όπως ήδη γνωρίζουμε, για την άγνωστη συγκέντρωση $c = c(x, t)$ του ρύπου ισχύει η ομογενής μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \text{με} \quad c = c(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0 \quad (10.5.1)$$

και D το συντελεστή μοριακής διαχύσεως του ρύπου. Εδώ με $-\infty < x < \infty$ δεν έχουμε βέβαια συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες, αλλ' έχουμε μια συγκεκριμένη κι εδώ μη ομογενή αρχική συνθήκη: την αρχική (για $t = 0$) συγκέντρωση του ρύπου

$$c(x, 0) = c_0(x). \quad (10.5.2)$$

Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier ως προς τη θέση x λύσαμε αυτό το πρόβλημα, το πρόβλημα της διαχύσεως ρύπου σε υδατόρρευμα, στην Ενότητα B11.2 των *Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς*. Εκεί βρήκαμε μάλιστα το σχετικό αποτέλεσμα (11.2.20), που είναι το εξής (εδώ με $c_0(\xi)$ αντί για $f(\xi)$):

$$c(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} c_0(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4Dt)} d\xi. \quad (10.5.3)$$

Με βάση τον πυρήνα αυτού του ολοκληρωτικού τύπου ορίζουμε εδώ τη συνάρτηση

$$G^*(x, t, \xi) := \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-(x-\xi)^2/(4Dt)}. \quad (10.5.4)$$

Παρατηρούμε τώρα ότι μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω λύση $c(x, t)$ αυτού του προβλήματος μεταφοράς ρύπου μόνο με διάχυση στην πιο σύντομη μορφή του

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x, t, \xi) c_0(\xi) d\xi. \quad (10.5.5)$$

Και ασφαλώς αυτή η μορφή της λύσεώς μας μοιάζει πολύ με τη μορφή (10.1.11) της λύσεως του αντίστοιχου προβλήματος του Ορισμού E10.1 της Ενότητας E10.1 για τη συνάρτηση Green. Επομένως μερικές φορές χαρακτηρίζουμε αυτήν τη συνάρτηση $G^*(x, t, \xi)$ σαν συνάρτηση Green, παρόλο που δεν είναι συνάρτηση Green

σύμφωνα με τον Ορισμό Ε10.1 της συναρτήσεως Green. Η συνάρτηση Green αναφέρεται (ρητά στον ορισμό της) σε μη ομογενή διαφορική εξίσωση και σε ομογενείς συνθήκες, ενώ εδώ ισχύουν ακριβώς τα αντίθετα: έχουμε ομογενή διαφορική εξίσωση, την εξίσωση (10.5.1), και μη ομογενή συνθήκη, την αρχική συνθήκη (10.5.2). Στο θέμα αυτό θα αναφερθούμε εκτενέστερα στην επόμενη Ενότητα Ε10.6. Εκεί θα εξηγήσουμε λεπτομερώς τη σχέση αυτής της συναρτήσεως $G^*(x, t, \xi)$ με τη συνάρτηση Green $G(x, t, \xi, \tau)$ της μη ομογενούς μονοδιάστατης εξισώσεως της διαχύσεως.

E10.5.3

E10.5.3. Επίλυση του προβλήματος με συνάρτηση δέλτα σαν αρχική συνθήκη

Θα προσδιορίσουμε τώρα την πιο πάνω συνάρτηση $c_\xi(x, t) \equiv G^*(x, t, \xi)$ με βάση την πολύ ειδική περίπτωση όπου έχουμε ιδιόμορφη αρχική συνθήκη της μορφής

$$c_\xi(x, 0) \equiv G^*(x, 0, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (10.5.6)$$

αντί για τη γενική αρχική συνθήκη (10.5.2). Δηλαδή εδώ την αρχική μας χρονική στιγμή $t = 0$ υποθέτουμε απλά μοναδιαία συγκεντρωμένη μάζα ρύπου στη θέση ξ του υδατορρέυματος. Αυτό φαίνεται από τη συνάρτηση $\delta(x - \xi)$ δεξιά σε αυτήν την αρχική συνθήκη. Η διαφορική μας εξίσωση παραμένει ασφαλώς η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (10.5.1). Εδώ πήραμε επιπλέον το θάρρος τη σχετική συνάρτηση για τη μοναδιαία μάζα ρύπου $m = 1$ στη θέση ξ του υδατορρέυματος και την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ να τη δηλώσουμε με $c_\xi(x, t)$ και επίσης $G^*(x, t, \xi)$ ανάλογα με ό,τι είχαμε κάνει στις δύο προηγούμενες ενότητες για τα μοναδιαία φορτία σε καλώδιο και σε δοκό αντίστοιχα. Αυτή είναι η μέσα σε εισαγωγικά “συνάρτηση Green” στο παρόν πρόβλημα μεταφοράς ρύπου με διάχυσή του σε υδατόρρευμα.

Χρησιμοποιούμε και εδώ τη γνωστή μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier ως προς τη θέση x (με $-\infty < x < \infty$) στη διαφορική εξίσωση (10.5.1). Κι έτσι παίρνουμε

$$\frac{\partial C_\xi(\omega, t)}{\partial t} = -D\omega^2 C_\xi(\omega, t) \quad \text{με} \quad C_\xi(\omega, t) = \mathcal{F}\{c_\xi(x, t)\}. \quad (10.5.7)$$

Μετασχηματίσαμε έτσι τη διαφορική μας εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.5.1) σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση. Η λύση της προκύπτει πολύ εύκολα και είναι

$$C_\xi(\omega, t) = A(\omega)e^{-D\omega^2 t} \quad (10.5.8)$$

με τη “σταθερά” της $A(\omega)$ μια άγνωστη προς το παρόν συνάρτηση της μεταβλητής ω στον παρόντα μετασχηματισμό Fourier. Μετασχηματίζουμε επίσης κατά Fourier και την αρχική συνθήκη (10.5.6). Επειδή μάλιστα ισχύει ότι

$$\mathcal{F}\{\delta(x - \xi)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \delta(x - \xi) dx = e^{-i\omega\xi}, \quad (10.5.9)$$

όπως γνωρίζουμε, η πιο πάνω αρχική συνθήκη $c_\xi(x, 0) = \delta(x - \xi)$ παίρνει τη μορφή

$$C_\xi(\omega, 0) = e^{-i\omega\xi}. \quad (10.5.10)$$

Από την πιο πάνω λύση (10.5.8) προκύπτει επίσης ότι $C_\xi(\omega, 0) = A(\omega)$ και επομένως $A(\omega) = e^{-i\omega\xi}$. Άρα η λύση μας $C_\xi(\omega, t)$ στη σχέση (10.5.8) γράφεται τελικά στη μορφή

$$C_\xi(\omega, t) = e^{-i\omega\xi} e^{-D\omega^2 t}. \quad (10.5.11)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα και το γνωστό μας από το μετασχηματισμό Fourier τύπο

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-D\omega^2 t}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}. \quad (10.5.12)$$

Αυτός είναι ο τύπος (11.2.18) της Ενότητας B11.2 των *Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς*, όπου είχαμε επίσης αναφερθεί στη διάχυση ρύπου σε υδατόρρευμα. Χρησιμοποιούμε ακόμη και την επίσης αρκετά γνωστή μας ιδιότητα μεταθέσεως (εδώ κατά ξ) του μετασχηματισμού Fourier (εδώ με $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$)

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-i\omega\xi}F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} [e^{-i\omega\xi}F(\omega)] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x-\xi)}F(\omega) d\omega = f(x-\xi). \quad (10.5.13)$$

Αυτήν ουσιαστικά την ιδιότητα την έχουμε ήδη συναντήσει στο Εδάφιο A18.3.2 του Κεφαλαίου A18 στα *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς*. Αλλ' εκεί είχαμε μετάθεση στο χρόνο (κατά t_0), ενώ εδώ έχουμε μετάθεση στη θέση (κατά ξ). Δηλαδή απλά εδώ έχουμε ξ αντί για t_0 και x αντί για t . Αυτή είναι η διαφορά μας!

Τώρα με βάση τον τύπο αντιστροφής (10.5.12) και την ιδιότητα (10.5.13) στον αντιστροφο μετασχηματισμό Fourier η λύση μας (10.5.11) με αντιστροφή της κατά Fourier μας δίνει

$$c_{\xi}(x, t) \equiv G^*(x, t, \xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-(x-\xi)^2/(4Dt)}. \quad (10.5.14)$$

E10.5.4

E10.5.4. Επίλυση του αρχικού προβλήματος και φυσική ερμηνεία της λύσεως

Προχωράμε τώρα στην επίλυση του αρχικού προβλήματος (10.5.1) και (10.5.2) με τη χρήση της πιο πάνω συναρτήσεως $c_{\xi}(x, t) \equiv G^*(x, t, \xi)$, τώρα όμως με την πραγματική μας αρχική συνθήκη (10.5.2). Δηλαδή εδώ αντί για την αρχική μοναδιαία μάζα ρύπου $m = 1$ στη θέση ξ , δηλαδή αντί για την αρχική συνθήκη (10.5.6), έχουμε την πραγματική αρχική συνθήκη (10.5.2). Ε τότε πρέπει να ισχύει ο τύπος (10.5.5). Τον επαναλαμβάνουμε

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x, t, \xi) c_0(\xi) d\xi. \quad (10.5.15)$$

Ναι, πραγματικά! Και πρώτα-πρώτα, επειδή η συνάρτηση $c_{\xi}(x, t) \equiv G^*(x, t, \xi)$ επαληθεύει την ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (10.5.1) (έτσι την κατασκευάσαμε!), το ίδιο θα συμβαίνει προφανώς και με αυτήν τη συνάρτηση $c(x, t)$ στον αμέσως παραπάνω ολοκληρωτικό τύπο (10.5.15). Για την επαλήθευση αυτού του συμπεράσματός μας αρκεί να εκτελέσουμε τις σχετικές μερικές παραγωγίσεις (ως προς τη θέση x και το χρόνο t). Εδώ υποθέτουμε πως μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των μερικών παραγωγίσεων και της ολοκληρώσεως μετά την παρατήρηση ότι η μεταβλητή της ολοκληρώσεως ξ στον πιο πάνω ολοκληρωτικό τύπο (10.5.15) είναι εντελώς διαφορετική από τις μεταβλητές των μερικών παραγωγίσεων x και t .

Δε μας αρκεί βέβαια η πλήρωση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς (10.5.1) για τη συγκέντρωση του ρύπου $c(x, t)$ που έχουμε στη λύση (10.5.15). Επιθυμούμε επίσης να ισχύει εδώ και η αρχική συνθήκη (10.5.2), δηλαδή να ισχύει η πραγματική αρχική συνθήκη $c(x, 0) = c_0(x)$. Και πραγματικά συμβαίνει κι αυτό. Συγκεκριμένα, θέτοντας $t = 0$ στη λύση μας $c(x, t)$ στη σχέση (10.5.15), παίρνουμε

$$c(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(x, 0, \xi) c_0(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) c_0(\xi) d\xi = c_0(x). \quad (10.5.16)$$

Αυτό συμβαίνει εδώ, επειδή η συνάρτηση $G^*(x, t, \xi)$ κατασκευάστηκε πιο πάνω έτσι ώστε να πληροί την αρχική συνθήκη $G^*(x, 0, \xi) = \delta(x - \xi)$, τη συνθήκη (10.5.6), και επιπλέον για τη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(x)$ ισχύει ο πάρα πολύ γνωστός τύπος

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) f(\xi) d\xi = f(x). \quad (10.5.17)$$

Αυτός είναι ο τύπος (10.1.17) της Παραγράφου Ε10.1.3 πιο πάνω, όπου είχαμε κάνει μια σύντομη υπενθύμιση της συναρτήσεως δέλτα του Dirac. Επομένως με βάση το αποτέλεσμα (10.5.16) ισχύει και η αρχική συνθήκη (10.5.2).

Βέβαια ο παρατηρητικός/η παρατηρητική Πολιτικός Μηχανικός σημειώνει από φυσική άποψη ότι η αρχική συγκέντρωση (για $t = 0$) $c_0(x)$ του ρύπου στο υδατόρρευμα αποτελείται από άπειρες στοιχειώδεις μάζες ρύπου $c_0(\xi)d\xi$ στις θέσεις ξ κατά μήκος του υδατορρέυματος. Και αφού η μοναδιαία αρχική μάζα ρύπου $m = 1$ στη θέση ξ στο υδατόρρευμα μας δίνει συγκέντρωση του ρύπου $G^*(x, t, \xi)$, όπως ήδη βρήκαμε, η στοιχειώδης μη μοναδιαία μάζα ρύπου $c_0(\xi)d\xi$ θα μας δίνει συγκέντρωση του ρύπου $[c_0(\xi)d\xi]G^*(x, t, \xi) = G^*(x, t, \xi)c_0(\xi)d\xi$. Κατά συνέπεια όλες μαζί οι στοιχειώδεις μάζες ρύπου $c_0(\xi)d\xi$ (επαναλαμβάνεται για $t = 0$) θα μας δίνουν συνολική (με $-\infty < \xi < \infty$) συγκέντρωση του ρύπου ίση με το πιο πάνω ολοκλήρωμα (10.5.15).

Σημειώνουμε βέβαια ότι ασφαλώς αυτή η υπέρθεση (ή επαλληλία) λύσεων ισχύει φυσικά εδώ που έχουμε γραμμικό πρόβλημα, δηλαδή έχουμε γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Διαφορετικά, σε ένα μη γραμμικό πρόβλημα προφανώς δε θα ισχυε. Και έτσι ερμηνεύτηκε από φυσική άποψη η λύση (10.5.15) χωρίς να έχουν απαιτηθεί ούτε μερικές παραγωγίσεις της για την επιβεβαίωση ότι ισχύει η μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως (10.5.1) ούτε χρήση της συναρτήσεως δέλτα του Dirac για την επιβεβαίωση ότι ισχύει η αρχική συνθήκη (10.5.2). Αυτά εξηγήθηκαν έτσι με ένα φυσικό (αλλά όχι και μαθηματικό!) τρόπο. Και εδώ στο μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών εύλογα προηγήθηκε η μαθηματική απόδειξη της ισχύος της λύσεως (10.5.15) από την παραπάνω φυσική ερμηνεία της.

Άσκηση

Ενότητα Ε10.5

▼ Άσκηση Ε10.6 ■ Μεταφορά ρύπου με μεταγωγή και διάχυση

Στην άσκηση αυτή απλά θέλουμε να γενικεύσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα στην περίπτωση όπου πέρα από τη διάχυση του ρύπου (με συντελεστή μοριακής διαχύσεως D) μέσα στο υδατόρρευμα γίνεται επίσης μεταφορά του με μεταγωγή, όπου η ταχύτητα του νερού είναι ίση με V . Επιπλέον θεωρούμε ότι ο ρύπος υφίσταται και αποδόμηση πρώτης τάξεως με σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως k . Τώρα βέβαια αντί για την ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (10.5.1) ισχύει η γνωστή επίσης ομογενής γενικότερη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad \text{με } c = c(x, t), \quad -\infty < x < \infty \quad \text{και } t \geq 0. \quad (10.5.18)$$

Ζητούνται: (α) Με χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier και εντελώς ανάλογα με την προηγούμενη διαδικασία να αποδειχθεί ότι στην ειδική περίπτωση που $c(x, 0) = c_\xi(x, 0) = \delta(x - \xi)$ για το μετασχηματισμό Fourier $C_\xi(\omega, t) = \mathcal{F}\{c_\xi(x, t)\}$ της συγκεντρώσεως $c_\xi(x, t)$ του ρύπου σε αυτήν την ειδική περίπτωση ισχύει η σχέση

$$C_\xi(\omega, t) = e^{-i\omega\xi} e^{-(D\omega^2 + iV\omega + k)t} = e^{-kt} e^{-i\omega(\xi + Vt)} e^{-D\omega^2 t}. \quad (10.5.19)$$

(β) Αντιστρέφοντας τώρα κατά Fourier, να αποδειχθεί ότι εδώ ισχύει η σχέση

$$c_\xi(x, t) \equiv G^*(x, t, \xi) = \frac{e^{-kt}}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-(x-\xi-Vt)^2/(4Dt)}. \quad (10.5.20)$$

(γ) Στη συνέχεια στη γενική περίπτωση όπου ισχύει η αρχική συνθήκη $c(x, 0) = c_0(x)$ να διαπιστωθεί ανάλογα με πριν πως η συγκέντρωση του ρύπου $c(x, t)$ δίνεται από τον τύπο (10.5.15) φυσικά τώρα με την παρούσα συνάρτηση $c_\xi(x, t) \equiv G^*(x, t, \xi)$. ▲

E10.6

E10.6. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN ΣΕ ΠΑΝΩ ΑΠΟ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

E10.6.1

E10.6.1. Εισαγωγή στις συναρτήσεις Green σε πάνω από μία διαστάσεις

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε σε συναρτήσεις Green στη μία διάσταση: είτε στη θέση x είτε στο χρόνο t . Εντούτοις τα σχετικά αποτελέσματά μας είναι άμεσα γενικεύσιμα και σε περισσότερες από μία διαστάσεις, π.χ. στις δύο διαστάσεις (x, y) στο επίπεδο και στις τρεις διαστάσεις (x, y, z) στο χώρο. Ανάλογες γενικεύσεις γίνονται και σε χώρο και χρόνο ταυτόχρονα, π.χ. στη μία διάσταση στο χώρο x και ταυτόχρονα στο χρόνο t , δηλαδή ουσιαστικά στις δύο διαστάσεις (x, t) . Επίσης ταυτόχρονα στις δύο διαστάσεις στο χώρο (x, y) και στο χρόνο t , δηλαδή ουσιαστικά στις τρεις διαστάσεις (x, y, t) . Και ανάλογα και στις τέσσερις διαστάσεις (x, y, z, t) : τρεις στο χώρο (x, y, z) και μία στο χρόνο t . Δεν αποκλείεται και αυτό.

Τα ίδια περίπου με την Ενότητα E1.1 ισχύουν φυσικά κι εδώ. Αλλά εδώ βέβαια για μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους μαζί με τις σχετικές ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες που ισχύουν. Στην Ενότητα E1.1. αναπτύξαμε τη λογική για την ίδια τη συνάρτηση Green να μπορούμε να θεωρούμε στο δεξιό μέλος της αρχικής μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης συγκεντρωμένη συνάρτηση εξαναγκασμού (φόρτιση, πηγή, κλπ.) $\delta(x - \xi)$ αντί για την αρχική συνάρτηση $f(x)$. Αυτή είναι η ιδέα της συναρτήσεως Green! Έτσι εδώ με τη συνάρτηση Green η λύση του αρχικού μη ομογενούς γραμμικού προβλήματος θα εκφράζεται με τη χρήση ολοκληρώματος στις δύο ή και σε περισσότερες διαστάσεις. Επίσης και η συνάρτηση Green θα μπορεί να υπολογίζεται εδώ με δεξιό μέλος τη συνάρτηση δέλτα του Dirac στις δύο ή και σε περισσότερες διαστάσεις. Αυτή η συνάρτηση δέλτα του Dirac θα είναι απλά το γινόμενο των αντίστοιχων μονοδιάστατων συναρτήσεων δέλτα του Dirac.

Ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε στις δύο διαστάσεις (x, y) . Τότε η αρχική μας μη ομογενής γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση (10.1.1) ή (10.1.2) της μορφής

$$\mathcal{A}(D)y(x) = f(x) \quad \text{με} \quad D := \frac{d}{dx} \quad (10.6.1)$$

παίρνει εδώ τη γενικευμένη στις δύο διαστάσεις (x, y) μορφή της

$$\mathcal{A}(D_x, D_y)u(x, y) = f(x, y) \quad \text{με} \quad D_x := \frac{d}{dx} \quad \text{και} \quad D_y := \frac{d}{dy}. \quad (10.6.2)$$

Δηλαδή εδώ απλά έχουμε μερικές παραγώγους και δηλώνουμε τους δύο σχετικούς διαφορικούς τελεστές με D_x (για τη μερική παραγωγή ως προς x) και D_y (για τη μερική παραγωγή ως προς y) αντί για συνήθεις παραγώγους που είχαμε στην εξίσωση (10.6.1). Εκεί δηλώσαμε το σχετικό διαφορικό τελεστή απλά με D . Ανάλογα στις τρεις διαστάσεις θα έχουμε τους τρεις σχετικούς διαφορικούς τελεστές D_x , D_y και D_z (ή με κάποιες άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές αντί για τις x, y και z).

Πάμε τώρα και στον ολοκληρωτικό τύπο (10.1.11) του Ορισμού E10.1 πάλι στην Ενότητα E10.1. Αυτός δίνει τη λύση $y_p(x)$ του προβλήματος αρχικών ή/και συνοριακών τιμών που έχουμε με χρήση της συναρτήσεως Green $G(x, \xi)$ που υποτίθεται ότι έχουμε ήδη βρει. Τον υπενθυμίζουμε κι αυτόν τον τόσο σημαντικό τύπο (10.1.11)

$$y_p(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (10.6.3)$$

Είναι προφανές ότι στις δύο διαστάσεις (x, y) ο αντίστοιχος τύπος με την αντίστοιχη συνάρτηση Green $G(x, y, \xi, \eta)$ θα έχει διπλό ολοκλήρωμα (στη διδιάστατη τώρα περιοχή D) αντί για απλό ολοκλήρωμα (στο διάστημα $[a, b]$) και θα είναι της μορφής

$$u_p(x, y) = \iint_D G(x, y, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (10.6.4)$$

Σημειώνεται βέβαια ότι η συγκεντρωμένη φόρτιση, πηγή, κλπ. βρίσκεται τώρα στο σημείο (ξ, η) της διδιάστατης περιοχής μας D , ενώ ο υπολογισμός της άγνωστης (και τώρα πια γνωστής) συναρτήσεως $u_p(x, y)$ γίνεται στο σημείο (x, y) της ίδιας περιοχής D . Λογικά είναι αυτά. Και ανάλογα βέβαια μπορούμε να προχωρήσουμε και στις τρεις διαστάσεις (x, y, z) εκεί φυσικά με τριπλό ολοκλήρωμα στη σχετική τριδιάστατη περιοχή V .

Ωραία! Και τώρα για την ίδια τη συνάρτηση Green με βάση και τη φυσική σημασία της σαν απόκριση σε συγκεντρωμένη συνάρτηση εξαναγκασμού (φόρτιση, πηγή, κλπ.) πολύ συχνά, όπως είδαμε, την υπολογίζουμε με την επίλυση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (10.1.18) της Ενότητας Ε10.1, δηλαδή της εξίσωσης

$$\mathcal{A}(D)G(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (10.6.5)$$

με τη συνάρτηση δέλτα του Dirac δεξιά. Αυτή αντικαθιστά την αρχική μας διαφορική εξίσωση (10.6.1): απλά δεξιά με $\delta(x - \xi)$ αντί για $f(x)$. (Και δε λησμονούμε βέβαια τις ομογενείς γραμμικές αρχικές ή συνοριακές συνθήκες που ισχύουν στο πρόβλημα αρχικών τιμών ή συνοριακών τιμών που έχουμε να λύσουμε.)

Τώρα στις δύο διαστάσεις (x, y) για τον προσδιορισμό της συναρτήσεως Green $G(x, y, \xi, \eta)$ θα έχουμε την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση (10.6.2), αλλά πάλι με τη συνάρτηση δέλτα του Dirac δεξιά. Εννοείται τώρα με τη διδιάστατη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(x - \xi, y - \eta)$. Και αυτή διαπιστώνεται εύκολα ότι είναι απλά το γινόμενο των αντίστοιχων μονοδιάστατων συναρτήσεων δέλτα του Dirac. Δηλαδή εδώ στις δύο διαστάσεις (x, y) ισχύει

$$\delta(x - \xi, y - \eta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta). \quad (10.6.6)$$

Κατά συνέπεια η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους στις δύο διαστάσεις (x, y) για τον προσδιορισμό της συναρτήσεως Green (εδώ στις δύο διαστάσεις) που αντικαθιστά την αντίστοιχη μη ομογενή γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση (10.6.5) και βασίζεται στην αντίστοιχη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.6.2) θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{A}(D_x, D_y)G(x, y, \xi, \eta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta). \quad (10.6.7)$$

Και ανάλογα στις τρεις διαστάσεις (x, y, z) θα ισχύει η διαφορική εξίσωση

$$\mathcal{A}(D_x, D_y, D_z)u(x, y, z) = f(x, y, z) \text{ με } D_x := \frac{d}{dx}, D_y := \frac{d}{dy} \text{ και } D_z := \frac{d}{dz}, \quad (10.6.8)$$

που είναι μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, αντί για τη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.6.2) στις δύο διαστάσεις (x, y) . Ακόμη τώρα θα έχουμε τον τύπο

$$u_p(x, y, z) = \iiint_V G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \quad (10.6.9)$$

αντί για τον τύπο (10.6.4) στις δύο διαστάσεις (x, y) . Επίσης θα έχουμε τον τύπο

$$\delta(x - \xi, y - \eta, z - \zeta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta(z - \zeta) \quad (10.6.10)$$

αντί για τον τύπο (10.6.6) στις δύο διαστάσεις (x, y) . Τέλος θα ισχύει ο τύπος

$$\mathcal{A}(D_x, D_y, D_z)G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta(z - \zeta) \quad (10.6.11)$$

αντί για τον τύπο (10.6.7) στις δύο διαστάσεις (x, y) .

Εννοείται βέβαια ότι κάποια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές (x, y) στις δύο διαστάσεις ή (x, y, z) στις τρεις διαστάσεις μπορεί να είναι ο χρόνος t . Ή μπορεί ακόμη να έχουμε ταυτόχρονα και τις τέσσερις μεταβλητές (x, y, z, t) , δηλαδή τριδιάστατο χώρο και επιπλέον και χρονική εξάρτηση της άγνωστης συναρτήσεως $u(x, y, z, t)$ και της αντίστοιχης συναρτήσεως Green $G(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta, \tau)$. Ε τότε θα πρέπει ασφαλώς να κάνουμε ολοκλήρωση στις τέσσερις διαστάσεις (x, y, z, t) .

E10.6.2

E10.6.2. Εφαρμογή στο πρόβλημα της ορθογωνικής πλάκας

Σαν μια απλή εφαρμογή των συναρτήσεων Green σε πάνω από μία διαστάσεις απλά θα αναφέρουμε εδώ το ήδη πολύ γνωστό μας πρόβλημα της ορθογωνικής πλάκας $P = [0, a] \times [0, b]$ στις δύο διαστάσεις (x, y) από ισότροπο γραμμικά ελαστικό υλικό. Η πλάκα έχει δυσκαμψία $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ με h το πάχος της, E το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της και ν το λόγο του Poisson του υλικού της. Επιπλέον έχει απλή στήριξη (έδραση) σε όλο το σύνορό της C , δηλαδή στην περίμετρο του ορθογωνίου $P = [0, a] \times [0, b]$. Τέλος η κατανεμημένη κάθετη φόρτισή της είναι $p(x, y)$ (π.χ. σε kN/m^2 ή kPa).

Το πρόβλημα αυτής της πλάκας P (επαναλαμβάνεται με έδραση, όχι πάκτωση στο σύνορό της C) το μελετήσαμε με τη μέθοδο του Navier (1820) στην Ενότητα B7.1 του Κεφαλαίου B7 του Μέρους B: *Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους για Πολιτικούς Μηχανικούς*. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στη χρήση διπλών ημιτονικών σειρών Fourier αρχικά για την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y)$ της πλάκας P . Η λύση της σχετικής διαφορικής εξίσωσης τετάρτης τάξεως με μερικές παραγώγους, εξίσωση (7.1.2) της Ενότητας B.7.1, συγκεκριμένα

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad \text{με } w = w(x, y) \quad \text{και } (x, y) \in P \quad (10.6.12)$$

και με άγνωστη συνάρτηση το βέλος κάμψεως $w(x, y)$ της πλάκας προσδιορίστηκε κι αυτή στη μορφή διπλής ημιτονικής σειράς Fourier στην ίδια Ενότητα B7.1.

Στη συνέχεια στην Παράγραφο Γ3.5.3 της Ενότητας Γ3.5 του Μέρους Γ: *Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς* προσδιορίσαμε τη σχετική συνάρτηση επιρροής που συμπίπτει απόλυτα με τη συνάρτηση Green $G(x, y, \xi, \eta)$ σ' αυτήν την πλάκα με απλή στήριξη (με έδραση) στο σύνορό της. Συγκεκριμένα εκεί η φόρτιση ήταν ένα μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο στη θέση (ξ, η) , δηλαδή ακριβώς της παραπάνω μορφής (10.6.6): σχέση (3.5.30) στην Παράγραφο Γ3.5.3, συγκεκριμένα

$$p(x, y) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta). \quad (10.6.13)$$

Έχουμε λοιπόν ήδη λύσει τη σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.6.7), δηλαδή στο πρόβλημά μας την εξίσωση (10.6.12) με τη φόρτιση (10.6.13) και φυσικά, επαναλαμβάνουμε, με απλή στήριξη (με έδραση) στο σύνορο της πλάκας. Το τελικό αποτέλεσμα που βρήκαμε εκεί και το επαναλαμβάνουμε κι εδώ (βέβαια συνεχώς με τη χρήση διπλών ημιτονικών σειρών Fourier) είναι η συνάρτηση Green του προβλήματός μας. Αυτήν την επαναλαμβάνουμε κι εδώ από τον τύπο (3.5.38)

της Παραγράφου Γ3.5.3

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}. \quad (10.6.14)$$

Φυσικά εδώ $(x, y) \in P$ και $(\xi, \eta) \in P$. Δηλαδή και τα δύο αυτά σημεία (υπολογισμού του βέλους κάμψεως και φορτίσεως αντίστοιχα) βρίσκονται πάνω στην πλάκα P .

Τώρα με βάση αυτήν τη συνάρτηση Green, που την επαναλάβαμε κι εδώ, η λύση του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών, δηλαδή εδώ του προβλήματος της ορθογωνικής πλάκας P με απλή στήριξη (έδραση) στο σύνορο της C , θα είναι της μορφής (10.6.4). Συγκεκριμένα εδώ με το συμβολισμό που υιοθετήσαμε θα έχουμε

$$w(x, y) = \iint_P G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \text{με} \quad (x, y) \in P. \quad (10.6.15)$$

Πρόκειται για τον τύπο (3.5.40) της Παραγράφου Γ3.5.3. Προφανώς με χρήση της συναρτήσεως Green (10.6.14) μπορούμε να υπολογίζουμε το βέλος κάμψεως $w(x, y)$ της πλάκας σε κάθε σημείο της (x, y) και μάλιστα για κάθε κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y)$ της πλάκας. Και ασφαλώς διαπιστώνουμε αμέσως ότι η συνάρτηση Green (10.6.14) μηδενίζεται στο σύνορο C της παρούσας ορθογωνικής πλάκας P . Και η σχετική κάθετη στο σύνορο καμπτική ροπή μηδενίζεται και αυτή στο ίδιο σύνορο, αφού έχουμε απλή στήριξη (έδραση) της πλάκας. Όχι όμως και η κλίση της (εννοείται κάθετα στο σύνορο C της πλάκας), αφού δεν έχουμε πακτωμένη πλάκα.

Είναι λοιπόν πάρα πολύ χρήσιμη η συνάρτηση Green και στο παρόν πρόβλημα πλάκας. Και μάλιστα έχουμε ήδη διαπιστώσει και το διαπιστώνουμε ξανά από τον τύπο (10.6.14) ότι η συνάρτηση Green $G(x, y, \xi, \eta)$ είναι μια συμμετρική συνάρτηση. Συγκεκριμένα, αν εναλλαγούν το σημείο (ξ, η) της συγκεντρωμένης φορτίσεως στην πλάκα και το σημείο (x, y) του υπολογισμού του βέλους κάμψεως $w(x, y)$ της πλάκας, δε μεταβάλλεται η παρούσα συνάρτηση Green $G(x, y, \xi, \eta)$. Δηλαδή ισχύει η σχέση

$$G(x, y, \xi, \eta) = G(\xi, \eta, x, y). \quad (10.6.16)$$

Αυτή είναι η σχέση (3.5.39) της Παραγράφου Γ3.5.3. Και αυτήν τη σχέση συμμετρίας τη διαπιστώνουμε άμεσα, κυριολεκτικά άμεσα εναλλάσσοντας τα σύμβολα x και ξ , επίσης τα σύμβολα y και η στον τύπο (10.6.14) για την παρούσα συνάρτηση Green. Τόσο απλά εδώ! Αυτά από τη μαθηματική όψη του θέματος. Από τη φυσική του όψη, την όψη του Πολιτικού Μηχανικού πρόκειται για την **αρχή της αμοιβαιότητας** του Maxwell ή των Betti–Maxwell, κάτι που ήδη το αναφέραμε στην Παράγραφο Γ3.5.3. Την αρχή της αμοιβαιότητας του Maxwell ή των Betti–Maxwell την είχαμε δει βέβαια και στο καλώδιο στην Ενότητα Ε10.3 όπως και στη δοκό στην Ενότητα Ε10.4 για τις σχετικές συναρτήσεις Green. Όχι όμως και στις Ταλαντώσεις στην Ενότητα Ε10.2. Φυσικά δεν ισχύει στις Ταλαντώσεις αυτή η αρχή.

 **Άσκηση**

Ενότητα Ε10.6

▼ Άσκηση Ε10.7 ■ Ορθογωνική πλάκα σε ελαστική βάση

Πιο πάνω αναφέραμε σύντομα τα αποτελέσματα της Ενότητας Β7.1 του Μέρους Β και κυρίως της Παραγράφου Γ3.5.3 του Μέρους Γ για την ορθογωνική πλάκα P με απλή στήριξη (έδραση) στο σύνορο της C όσον αφορά στη σχετική συνάρτηση Green $G(x, y, \xi, \eta)$ στον τύπο (10.6.14). Εδώ ζητείται η αντίστοιχη συνάρτηση Green για πλάκα P σε ελαστική βάση πάλι με απλή στήριξη στο σύνορο της. *Υπόδειξη:* Να χρησιμοποιηθεί η Παράγραφος Β7.1.6 του Κεφαλαίου Β7 του Μέρους Α. ▲

E10.6.3

E10.6.3. Εφαρμογή στη μη ομογενή διδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως

Σαν δεύτερη εφαρμογή των συναρτήσεων Green σε πάνω από μία διαστάσεις θεωρούμε εδώ τη μη ομογενή διδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως. Αυτή έχει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad \text{με} \quad u = u(x, y, t) \quad (10.6.17)$$

και αποτελεί γενίκευση στις δύο διαστάσεις της ομογενούς μονοδιάστατης εξίσωσης της διαχύσεως (10.5.1). Εδώ βέβαια πέρα από τις δύο διαστάσεις x και y (αντί μόνο x στην εξίσωση (10.5.1)) υπάρχει και ο όρος $f(x, y, t)$ στο δεξιό μέλος, που κάνει την παρούσα διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους μη ομογενή. Επίσης για λόγους γενικότητας για την άγνωστη συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο u , όπως συμβαίνει συνήθως στην εξίσωση της διαχύσεως, αντί για το σύμβολο c στην εξίσωση (10.5.1), που χρησιμοποιείται συνήθως για τη συγκέντρωση ρύπου.

Σε αυτήν την παράγραφο στόχο μας αποτελεί η εύρεση της σχετικής συναρτήσεως Green $G(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$. Προφανώς εδώ που έχουμε τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές στη διαφορική εξίσωση (10.6.17) η συνάρτηση Green που θέλουμε να βρούμε θα έχει έξι ανεξάρτητες μεταβλητές. Από αυτές οι τρεις πρώτες αναφέρονται στο σημείο (στο χώρο και στο χρόνο) (x, y, t) όπου θέλουμε να υπολογίσουμε την άγνωστη συνάρτηση $u(x, y, t)$, ενώ οι άλλες τρεις (και αντίστοιχες τους βέβαια) (ξ, η, τ) αναφέρονται στο ιδιόμορφο σημείο (ξανά στο χώρο και στο χρόνο) όπου έχουμε την ιδιομορφία (την “πηγή”) στο μη ομογενή όρο της παρούσας διδιάστατης εξίσωσης της διαχύσεως (10.6.17). Πιο συγκεκριμένα εδώ η συνάρτηση Green $G(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$ που θέλουμε να προσδιορίσουμε και που για διευκόλυνσή μας τη δηλώνουμε εδώ σαν $u_\delta(x, y, t) \equiv G(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$ θα είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial u_\delta}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u_\delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\delta}{\partial y^2} \right) + \delta(x - \xi)\delta(y - \eta)\delta(t - \tau) \quad \text{με} \quad u_\delta = u_\delta(x, y, t) \quad (10.6.18)$$

και, υπενθυμίζουμε, $u_\delta(x, y, t) \equiv G(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$. Δηλαδή εδώ απλά συμβολίζουμε τη συνάρτηση Green με u_δ και δίνουμε έμφαση στις μεταβλητές x, y και t . Αυτή η διαφορική εξίσωση είναι ασφαλώς της γενικής μορφής (10.6.11), εδώ όμως με t αντί για z και με τ αντί για ζ , δηλαδή με χρόνο αντί για τρίτη διάσταση στο χώρο.

Τονίζουμε ότι στην παρούσα εφαρμογή αυτήν τη συνάρτηση Green θα την προσδιορίσουμε στην άπειρη χωρικά περιοχή $-\infty < x < \infty$ και $-\infty < y < \infty$, δηλαδή σε ολόκληρο το επίπεδο Oxy και επομένως χωρίς καθόλου συνοριακές συνθήκες. Επίσης χρονικά θα την προσδιορίσουμε για μη αρνητικές τιμές του χρόνου t , δηλαδή με $t \geq 0$, θεωρώντας εδώ μηδενική αρχική συνθήκη, δηλαδή ότι $u_\delta(x, y, 0) = 0$. Μια τέτοια συνάρτηση Green που αναφέρεται σε μια άπειρη περιοχή και δεν έχει επομένως συνοριακές συνθήκες την καλούμε πάρα πολύ συχνά **θεμελιώδη λύση**.

Στην περίπτωση μας μια πολύ κατάλληλη και πολύ συχνά χρησιμοποιούμενη μέθοδος για τον προσδιορισμό της συναρτήσεως Green $u_\delta(x, y, t) \equiv G(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$ είναι η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier. Αυτήν μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε δύο φορές: και ως προς τη μεταβλητή x και ως προς τη μεταβλητή y . Έτσι θα εξαλειφθούν οι μερικές παράγωγοι ως προς x και ως προς y και η πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.6.18) θα μετατραπεί σε συνήθη διαφορική εξίσωση, τώρα με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο t . Και αυτήν μπορούμε στη συνέχεια να τη λύσουμε εύκολα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, όπως ήδη κάναμε ως προς το χρόνο t στην Ενότητα E10.2 για τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις

με απόσβεση. Λοιπόν εδώ θα κάνουμε τρεις φορές μετασχηματισμό της διαφορικής εξίσωσής μας: δύο φορές μετασχηματισμό Fourier και μία φορά μετασχηματισμό Laplace. Και έτσι θα καταλήξουμε σε μία γραμμική (πρώτου βαθμού) αλγεβρική εξίσωση, που λύνεται βέβαια πάρα πολύ εύκολα. Και στη συνέχεια θα πρέπει όμως να κάνουμε και τρεις αντίστοιχους αντίστροφους μετασχηματισμούς, έτσι ώστε να επανέλθουμε στις αρχικές μας ανεξάρτητες μεταβλητές x , y και t . Ας εφαρμόσουμε λοιπόν αναλυτικά αυτήν τη διαδικασία που μόλις περιγράψαμε προσδιορίζοντας έτσι τελικά τη ζητούμενη συνάρτηση Green $u_\delta(x, y, t) \equiv G(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$ στο παρόν πρόβλημα διδιάστατης διαχύσεως.

Ξεκινάμε με μετασχηματισμό Fourier της διαφορικής εξίσωσής μας (10.6.18) ως προς τη χωρική μεταβλητή x . Θυμόμαστε βέβαια τους δύο παραπλήσιους μετασχηματισμούς Fourier (10.5.9) και Laplace (10.1.43)

$$\mathcal{F}\{\delta(x - \xi)\} = e^{-i\omega\xi} \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{\delta(x - \xi)\} = e^{-\xi s} \quad (10.6.19)$$

για τη μετατοπισμένη συνάρτηση $\delta(x - \xi)$ του Dirac όπως και τις γνωστές ιδιότητες για τους μετασχηματισμούς Fourier και Laplace που αφορούν στις παραγώγους συναρτήσεων. Έτσι από τη διαφορική εξίσωση (10.6.18) προκύπτει εύκολα ότι

$$\frac{\partial U_x(\omega_x, y, t)}{\partial t} = D \left(-\omega_x^2 U_x(\omega_x, y, t) + \frac{\partial^2 U_x(\omega_x, y, t)}{\partial y^2} \right) + e^{-i\omega_x \xi} \delta(y - \eta) \delta(t - \tau) \quad (10.6.20)$$

με

$$U_x(\omega_x, y, t) := \mathcal{F}_x\{u_\delta(x, y, t)\}. \quad (10.6.21)$$

Δηλαδή εδώ στη μεταβλητή x αντιστοιχίσαμε μετά από το σχετικό μετασχηματισμό Fourier \mathcal{F}_x τη μεταβλητή ω_x και όχι απλά τη μεταβλητή ω , όπως κάνουμε συνήθως στο μετασχηματισμό Fourier. Κι αυτό το κάναμε, επειδή σκοπεύουμε στη συνέχεια να προχωρήσουμε και σε ένα δεύτερο μετασχηματισμό Fourier \mathcal{F}_y , τώρα όμως ως προς τη δεύτερη χωρική μεταβλητή y .

Πολύ ωραία! Τώρα η νέα διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.6.21) έχει μονάχα δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τις y και t . Προχωράμε λοιπόν σε αυτήν ξανά σε μετασχηματισμό Fourier, τώρα όμως ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή y (αντί πριν τη x). Έτσι προκύπτει εύκολα ότι

$$\frac{\partial U_{xy}(\omega_x, \omega_y, t)}{\partial t} = -D(\omega_x^2 + \omega_y^2) U_{xy}(\omega_x, \omega_y, t) + e^{-i\omega_x \xi} e^{-i\omega_y \eta} \delta(t - \tau) \quad (10.6.22)$$

με

$$U_{xy}(\omega_x, \omega_y, t) := \mathcal{F}_y\{U_x(\omega_x, y, t)\} = \mathcal{F}_y\{\mathcal{F}_x\{u_\delta(x, y, t)\}\}. \quad (10.6.23)$$

Φθάσαμε λοιπόν σε μία συνήθη διαφορική εξίσωση, στην εξίσωση (10.6.22), που περιέχει όμως στο δεξιό μέλος της τη συνάρτηση δέλτα του Dirac $\delta(t - \tau)$. Επομένως για να τη λύσουμε θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, εδώ όμως με μηδενική αρχική συνθήκη, όπως προκύπτει εύκολα από το γεγονός ότι δεχθήκαμε μηδενική αρχική συνθήκη στην αρχική μας διαφορική εξίσωση (10.6.18) για τον προσδιορισμό της παρούσας συναρτήσεως Green $u_\delta(x, y, t) \equiv G(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$.

Μετασχηματίζουμε λοιπόν κατά Laplace τη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.6.22), παίρνοντας όμως υπόψη το δεύτερο τύπο (10.6.19) (για μετασχηματισμό Laplace) αντί για τον πρώτο (για μετασχηματισμό Fourier). Έτσι βρίσκουμε πολύ εύκολα ότι

$$s U_{xyt}(\omega_x, \omega_y, s) = -D(\omega_x^2 + \omega_y^2) U_{xyt}(\omega_x, \omega_y, s) + e^{-i\omega_x \xi} e^{-i\omega_y \eta} e^{-s\tau} \quad (10.6.24)$$

με

$$U_{xyt}(\omega_x, \omega_y, s) := \mathcal{L}_t\{U_{xy}(\omega_x, \omega_y, t)\} = \mathcal{L}_t\{\mathcal{F}_y\{\mathcal{F}_x\{u_\delta(x, y, t)\}\}\} \quad (10.6.25)$$

λόγω και της σχέσεως (10.6.23). Και τώρα λύνουμε αμέσως αυτήν εδώ τη γραμμική αλγεβρική εξίσωση (10.6.24) όπου καταλήξαμε (με κάποιο κόπο βέβαια) βρίσκοντας ότι

$$U_{xyt}(\omega_x, \omega_y, s) = \frac{e^{-i\omega_x \xi} e^{-i\omega_y \eta} e^{-\tau s}}{s + D(\omega_x^2 + \omega_y^2)} = \frac{e^{-(i\omega_x \xi + i\omega_y \eta + \tau s)}}{s + D(\omega_x^2 + \omega_y^2)}. \quad (10.6.26)$$

Τελειώσαμε λοιπόν με το πρόβλημά μας ως προς τους ευθείς μετασχηματισμούς που κάναμε: δύο μετασχηματισμούς Fourier και ένα μετασχηματισμό Laplace, βρισκόμαστε όμως στις βοηθητικές μεταβλητές ω_x , ω_y και s . Θα πρέπει τώρα να εργασθούμε αντίστροφα κάνοντας έναν αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και δύο αντίστροφους μετασχηματισμούς Fourier. Μόνο έτσι θα επανέλθουμε στις αρχικές μεταβλητές x , y και t , που αντιστοιχούν φυσικά στις ω_x , ω_y και s . Δεν είναι βέβαια και ιδιαίτερα δύσκολη αυτή η δουλειά με τις τόσες γνώσεις που έχουμε ήδη αποκτήσει και στο μετασχηματισμό Laplace και στο μετασχηματισμό Fourier αλλά και στην εξίσωση της διαχύσεως. Αυτήν τη συναντήσαμε κυρίως σε προβλήματα μεταφοράς ρύπου στην Περιβαλλοντική Μηχανική και στερεοποιήσεως στην Εδαφομηχανική.

Ξεκινάμε τώρα την αντίστροφη διαδικασία: τη διαδικασία των τριών αντιστροφών που οφείλουμε να κάνουμε. Με βάση το γνωστό μας μετασχηματισμό Laplace $\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$ της εκθετικής συναρτήσεως e^{at} , αλλά και την πάρα πολύ σημαντική ιδιότητα (10.2.14) του μετασχηματισμού Laplace, αντιστρέφοντας κατά Laplace την πιο πάνω σχέση (10.6.26), βρίσκουμε

$$U_{xy}(\omega_x, \omega_y, t) = e^{-(i\omega_x \xi + i\omega_y \eta)} e^{-D(\omega_x^2 + \omega_y^2)(t-\tau)} H(t-\tau) \quad (10.6.27)$$

φυσικά με $H(t)$ τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση του Heaviside, εδώ όμως στη θέση $t-\tau$, δηλαδή μετατοπισμένη κατά τ . Εδώ πήραμε βέβαια επίσης υπόψη μας ότι η ποσότητα $e^{-(i\omega_x \xi + i\omega_y \eta)}$ είναι σταθερή σε αυτήν την αντιστροφή κατά Laplace, που αφορά στο χρόνο t και στη βοηθητική μεταβλητή s του μετασχηματισμού Laplace και όχι στη θέση x και y και στις αντίστοιχες βοηθητικές μεταβλητές ω_x και ω_y .

Θα κάνουμε τώρα αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier επιστρέφοντας από τη μεταβλητή ω_y στη μεταβλητή y . Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον ιδιαίτερα χρήσιμο σε προβλήματα διαχύσεως τύπο αντιστροφής (10.5.12). Τον επαναλαμβάνουμε

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-D\omega_y^2(t-\tau)}\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi D(t-\tau)}} e^{-y^2/[4D(t-\tau)]}, \quad (10.6.28)$$

εδώ όμως με ω_y αντί για ω , y αντί για x και $t-\tau$ αντί για t . (Υπενθυμίζουμε εδώ ότι σε αυτήν την αντιστροφή κατά Fourier από ω_y σε y η ποσότητα $t-\tau$ είναι σταθερή. Και ασφαλώς σταθερές είναι και οι δύο ποσότητες $e^{-i\omega_x \xi}$ και $e^{-D\omega_x^2(t-\tau)}$ όπως επίσης και η μοναδιαία βηματική συνάρτηση του Heaviside $H(t-\tau)$. Εντούτοις η ποσότητα $e^{-i\omega_y \eta}$ δεν είναι σταθερή, αφού αυτή εξαρτάται από τη μεταβλητή ω_y σε αυτήν την αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier (10.6.27). Γι' αυτήν την ποσότητα $e^{-i\omega_y \eta}$ εμείς θα χρησιμοποιήσουμε εδώ την ιδιότητα μεταθέσεως (10.5.13) του μετασχηματισμού Fourier. Αυτήν τη γράφουμε εδώ στη μορφή

$$\mathcal{F}^{-1}\{e^{-i\omega_y \eta} F(\omega_y)\} = f(y-\eta), \quad (10.6.29)$$

δηλαδή με τα τωρινά μας σύμβολα ω_y , η και y αντί για τα αρχικά σύμβολά της που ήσαν ω , ξ και x αντίστοιχα. Με τη χρήση λοιπόν αυτών των τύπων η αντιστροφή κατά Fourier της σχέσεως (10.6.27) από τη μεταβλητή ω_y στη μεταβλητή y μας δίνει

$$U_x(\omega_x, y, t) = \frac{e^{-i\omega_x \xi} e^{-D\omega_x^2(t-\tau)}}{2\sqrt{\pi D(t-\tau)}} e^{-(y-\eta)^2/[4D(t-\tau)]} H(t-\tau). \quad (10.6.30)$$

Και τέλος κάνουμε εντελώς ανάλογα αντιστροφή πάλι κατά Fourier αλλά τώρα από τη μεταβλητή ω_x (αντί για ω_y) στη μεταβλητή x (αντί για y). Όλες οι υπόλοιπες ποσότητες είναι σταθερές σε αυτήν την τελευταία αντιστροφή, που είναι απόλυτα ανάλογη με την προηγούμενη και βασίζεται ξανά στους τύπους (10.6.28) και (10.6.29) (τώρα όμως με ω_x αντί για ω_y , με ξ αντί για η και με x αντί για y). Έτσι προκύπτει ο τελικός τύπος για την άγνωστη συνάρτηση $G(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$, τη συνάρτηση Green στο παρόν πρόβλημα διδιάστατης διαχύσεως, εδώ όμως στο άπειρο επίπεδο Oxy χωρίς συνοριακές συνθήκες. Άρα αυτή η συνάρτηση Green έχει την έκφραση

$$u_\delta(x, y, t) \equiv G(x, y, t, \xi, \eta, \tau) = \frac{1}{4\pi D(t-\tau)} e^{-r^2/[4D(t-\tau)]} H(t-\tau) \quad (10.6.31)$$

με

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \quad (10.6.32)$$

και ασφαλώς είναι πάρα πολύ σημαντική σε διδιάστατα προβλήματα διαχύσεως.

Και με γνωστή αυτήν τη συνάρτηση Green $u_\delta(x, y, t) \equiv G(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$ η λύση της αρχικής μας μη ομογενούς διδιάστατης εξίσωσης της διαχύσεως (10.6.17) παίρνει τώρα την εξής μορφή (με το αριστερό ολοκλήρωμα να αναφέρεται στο χρόνο τ):

$$u(x, y, t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty G(x, y, t, \xi, \eta, \tau) f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau \quad (10.6.33)$$

με αυτήν ή με διαφορετική σειρά στις τρεις ολοκληρώσεις: δύο στο χώρο (x, y) και μία στο χρόνο t . Ειδικά όμως για την ολοκλήρωση στο χρόνο t πρέπει να σημειώσουμε ότι λόγω της παρουσίας της μετατοπισμένης μοναδιαίας βηματικής συναρτήσεως $H(t-\tau)$ δεξιά στην παραπάνω έκφραση (10.6.31) της συναρτήσεως Green $u_\delta(x, y, t) \equiv G(x, y, t, \xi, \eta, \tau)$ αυτή εδώ η συνάρτηση Green μηδενίζεται για $t-\tau < 0$ ή ισοδύναμα για $\tau > t$. Αυτό σημαίνει ότι στη χρονική ολοκλήρωση η μεταβλητή ολοκληρώσεως τ δε μπορεί να ξεπεράσει το t ή αλλιώς ότι η ολοκλήρωση αρκεί να γίνει μόνο στο χρονικό διάστημα $[0, t]$. Έτσι ο αμέσως πιο πάνω τύπος (10.6.33) για τη λύση της μη ομογενούς διδιάστατης εξίσωσης της διαχύσεως (10.6.17) με χρήση και της εκφράσεως (10.6.31) της συναρτήσεως Green παίρνει την τελική του μορφή

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi D} \int_0^t \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-r^2/[4D(t-\tau)]}}{t-\tau} f(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta d\tau \quad (10.6.34)$$

με το r^2 να δίνεται πάλι από τη σχέση (10.6.32).

Άσκηση

Ενότητα Ε10.6

▼ Άσκηση Ε10.8 ■ Μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα

Θεωρούμε τη μη ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της μεταφοράς ρύπου σε άπειρο υδατόρρευμα με μεταγωγή (με ταχύτητα του νερού V) και διάχυση (με συντελεστή μοριακής διαχύσεως D), ενώ υπάρχει επίσης αποδόμηση του ρύπου πρώτης τάξεως (με σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως k). Υπάρχει επίσης εισαγωγή ρύπου στο υδατόρρευμα που ορίζεται από γνωστή συνάρτηση $f(x, t)$. Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους για τη συγκέντρωση $c = c(x, t)$ του ρύπου έχει τη μορφή

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc + f(x, t) \quad \text{με } c = c(x, t), \quad -\infty < x < \infty \quad \text{και } t \geq 0. \quad (10.6.35)$$

Στο παρόν πρόβλημα Περιβαλλοντικής Υδραυλικής ζητούνται: (α) Με διαδικασία ανάλογη της παραπάνω για τη μη ομογενή διδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως να αποδειχθεί ότι η σχετική συνάρτηση Green $u_\delta(x, t) \equiv G(x, t, \xi, \tau)$ έχει τη μορφή

$$u_\delta(x, t) \equiv G(x, t, \xi, \tau) = \frac{e^{-k(t-\tau)}}{2\sqrt{\pi D(t-\tau)}} e^{-[x-\xi-V(t-\tau)]^2/[4D(t-\tau)]} H(t-\tau). \quad (10.6.36)$$