

**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ**  
**για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**

*Τεύχος 1*

## ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Ο Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης γεννήθηκε στην Καλλιθέα Αττικής το 1950. Τελείωσε το Γυμνάσιο (1965) και το Λύκειο (1968) στον Πειραιά. Είναι διπλωματούχος Μηχανολόγος-Ηλεκτρολόγος Μηχανικός (1973) του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.) και Διδάκτωρ Μηχανικός (1976) πάλι του Ε.Μ.Π. Η διπλωματική εργασία του (1973) και η διδακτορική διατριβή του (1976) αναφέρονται στην Ελαστικότητα και στη Θραυστομηχανική.

Από το 1970 σαν σπουδαστής ήταν ανεπίσημος συνεργάτης του Εργαστηρίου Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π. Το 1976 υπήρξε ερευνητής στο ίδιο εργαστήριο. Από το 1976 μέχρι το 1980 ήταν Επιμελητής στις Έδρες Μηχανικής Α και Β του Ε.Μ.Π. Από το 1980 μέχρι το 1982 ήταν Έκτακτος Καθηγητής και από το 1982 μέχρι σήμερα είναι Καθηγητής της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών. Από το 1982 σαν Καθηγητής εργάζεται στο Γενικό Τμήμα στον Τομέα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής.

Στο Ε.Μ.Π. συμμετέσχε στα εργαστήρια Πειραματικής Αντοχής Υλικών και έκανε φροντιστήρια μαθημάτων Μηχανικής. Επίσης δίδαξε ένα εξάμηνο το μάθημα Αντοχή Υλικών. Στην Πολυτεχνική Σχολή του Πανεπιστημίου Πατρών δίδαξε μαθήματα Μαθηματικών, Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Πιθανοθεωρίας-Στατιστικής σε διάφορα τμήματα. Κατά τα τελευταία έτη διδάσκει αποκλειστικά στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών τα μαθήματα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III και εκτελεί τα σχετικά εργαστήρια στο Υπολογιστικό Κέντρο του Τμήματος. Διδάσκει επίσης το μεταπτυχιακό μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά πάλι στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών.

Το ερευνητικό έργο του αναφέρεται στη Μηχανική, τη Θραυστομηχανική, τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, τη Μιγαδική Ανάλυση, τις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, την Αριθμητική Ανάλυση (Αριθμητική Ολοκλήρωση και επίλυση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων) και τους Συμβολικούς Υπολογισμούς στη Μηχανική. Είναι συγγραφέας και συσυγγραφέας πολλών επιστημονικών εργασιών που έχουν δημοσιευθεί στην Αγγλική γλώσσα σε πολλά διεθνή περιοδικά των πιο πάνω επιστημονικών περιοχών (και μία εργασία στη Θεωρία Προσεγγίσεως) σε διάφορες χώρες. Σαν μεγαλύτερη ερευνητική συμβολή του θεωρεί την αναγωγή προβλημάτων ρωγμών σε ιδιόμορφες και υπεριδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις και την επίλυσή τους με χρήση της μεθόδου της αριθμητικής ολοκλήρωσεως.

Πέρα από τις επιστημονικές εργασίες του έχει κρίνει πολλές εργασίες άλλων συγγραφέων για διεθνή επιστημονικά περιοδικά της Μηχανικής, της Θραυστομηχανικής, των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και της Αριθμητικής Αναλύσεως. Υπήρξε κριτής για τα περιοδικά κριτικών *Applied Mechanics Reviews* και *Mathematical Reviews* και μέλος της Εκδοτικής Επιτροπής του περιοδικού *International Journal of Solids and Structures*.

Κατά τα τελευταία έτη καταβάλλει συστηματική προσπάθεια για την αναβάθμιση των μαθημάτων Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III που διδάσκει στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών: στην αίθουσα διδασκαλίας, στο εργαστήριο, μέσω συχνών εξετάσεων προόδου και εργαστηρίου και μέσω των διδακτικών αυτών βιβλίων Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III που απευθύνονται αποκλειστικά σε Πολιτικούς Μηχανικούς και όχι γενικά σε Μηχανικούς. Στην προσπάθειά του αυτή έχει τύχει πολύτιμης βοήθειας και συμπαράστασης κάθε μορφής από πολλούς συναδέλφους του καθώς και της ενεργής συμμετοχής των φοιτητών και φοιτητριών του Πολιτικών Μηχανικών και είναι ευγνώμων σε όλους και όλες γι' αυτά.

Τέλος στα Πανεπιστημιακά θέματα η θέση του ήταν και είναι υπέρ του Πανεπιστημίου στην κλασική του μορφή, όπως την έχει ζήσει και τη ζει και ο ίδιος επί πολλά χρόνια. Επομένως είναι εναντίον κάθε επιχειρηματικής ή οικονομικής διεισδύσεως τρίτων στον Πανεπιστημιακό χώρο. Είναι επίσης θερμός υποστηρικτής της ελεύθερης έρευνας στα Πανεπιστήμια με την έννοια ότι τα ερευνητικά αποτελέσματα πρέπει να είναι απόλυτα προσιτά σε κάθε μέρος του κόσμου χωρίς περιορισμούς μέσω της δημοσιεύσεώς τους είτε σε βιβλία είτε σε περιοδικά είτε στο διαδίκτυο. Τούτο έχει πράξει και ο ίδιος χωρίς καμία εξαίρεση.

---

# **ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ** **για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**

## **Τεύχος 1**

**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ  
ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ, ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ  
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

**για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**

---

***Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης***

*Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής,  
Γενικό Τμήμα Πολυτεχνικής Σχολής Πανεπιστημίου Πατρών*

**Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης** (συγγραφέας, Γενικό Τμήμα, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών)  
**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, Τεύχος 1:**  
**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ,**  
**ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ, ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**  
**1η Έκδοση: Φεβρουάριος 2008**

**Copyright © 2008 GOTSIS Εκδόσεις**

**ISBN 978-960-98187-6-6** (Αυτό το τεύχος. Παράκληση για χρήση του ISBN για παραγγελίες.)

**ISBN SET 978-960-98187-5-9** (Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς SET)

**ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ, ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟΝ ΕΚΔΟΤΗ**

**Βιβλιοπωλείο «Γνώση»,** Οδός Αράτου 41, 262.21 ΠΑΤΡΑ

Τηλέφωνο: (+30) 2610 226453, Fax: (+30) 2610 226690,

E-mail: gnosis@otenet.gr

- Όλα τα δικαιώματα διατηρούνται από τις **GOTSIS Εκδόσεις**. Η πνευματική ιδιοκτησία αποκτάται χωρίς καμία διατύπωση και χωρίς την ανάγκη ρήτρας απαγορευτικής των προσβολών της. Σημειώνεται η ισχύς του Νόμου 2121/1993, όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει, και της διεθνούς συμβάσεως της Βέρνης για την πνευματική ιδιοκτησία, η οποία έχει κυρωθεί με το Νόμο 100/1975.
- Απαγορεύεται απολύτως η αναδημοσίευση ή η αναπαραγωγή αυτού του βιβλίου (ολική ή μερική είτε στην παρούσα μορφή του είτε σε παραφρασμένη ή διασκευασμένη μορφή του) ή η διανομή του με οποιοδήποτε τρόπο (αντιγραφή, φωτοτυπία, εκτύπωση, μικροφίλμ, σάρωση ή/και αποθήκευση σε αρχείο ή αρχεία υπολογιστή, διαθεσιμότητα σε ιστοσελίδα ή σε βάσεις δεδομένων, διανομή μέσω του διαδικτύου, ηχογράφηση ή γενικά με οποιοδήποτε μηχανικό ή ηλεκτρονικό ή άλλο τρόπο είτε ήδη διαθέσιμο σήμερα είτε που θα υπάρξει στο μέλλον) χωρίς τη ρητή γραπτή άδεια των **GOTSIS Εκδόσεις**. Επίσης ανάλογα απαγορεύεται και η ολική ή μερική μετάφραση του παρόντος βιβλίου και γενικότερα η κάθε μορφής εκμετάλλευσή του στο σύνολό του ή σε μέρος του.
- Εντούτοις χορηγείται από τώρα η άδεια συνηθισμένου απλού δανεισμού για μελέτη του βιβλίου αυτού από αναγνώστες και αναγνώστριες Πανεπιστημιακών και μη βιβλιοθηκών.

**ΕΚΤΥΠΩΣΗ-ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ**

«Ταχύτυπο», Ταχυεκτυπώσεις – Γραβάνης Ε.Π.Ε., Πάροδος Διοδώρου 160, Βελβίτσι, 264.43 ΠΑΤΡΑ

Τηλέφωνο: (+30) 2610 461780 έως (+30) 2610 461790, E-mail: info@tachytypo.gr

**ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ**

Η κεντρική είσοδος και ένα πολύ μικρό τμήμα του κτιρίου του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών στην Πανεπιστημιούπολη στο Ρίο Πατρών

**ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ**

**Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης**

Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής

Γενικό Τμήμα, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών

Πανεπιστημιούπολη Πατρών, 265.04 ΡΙΟ, ΠΑΤΡΑ

Τηλέφωνο: (+30) 2610 432257, (+30) 2610 997378,

E-mail: n.ioakimidis@upatras.gr, <http://www.des.upatras.gr/amm/ioakimidis/ioakimidis.htm>

**ΑΠΟΠΟΙΗΣΗ ΕΥΘΥΝΗΣ**

Τόσο ο συγγραφέας όσο και ο εκδότης κατέβαλαν κάθε δυνατή προσπάθεια, ώστε το παρόν βιβλίο ακόμη και στην παρούσα 1η Έκδοσή του να μην περιέχει οποιασδήποτε μορφής λάθη. Εντούτοις είναι προφανές ότι αυτό δεν είναι απόλυτα δυνατόν να συμβεί. Επομένως δεν μπορούν να αναλάβουν καμιάς μορφής ευθύνη για οποιαδήποτε άμεση ή έμμεση ζημιά που θα μπορούσε να προκύψει στο χρήστη και στη χρήστρια αυτού του βιβλίου από λάθη που έχουν παρεισφρύσει. Παράκληση για την ενημέρωσή τους για κάθε λάθος, ώστε αυτό να διορθωθεί στην επόμενη έκδοση.

**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ**  
**για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**

**Τεύχος 1**

---

**Μέρος Β**

**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ**  
**ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**  
**ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ**  
**για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**

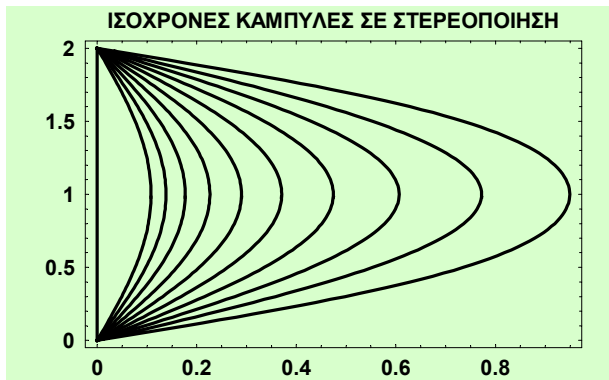
---

## ■ ΕΔΑΦΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΙΣΟΧΡΟΝΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΕ ΣΤΕΡΕΟΠΟΙΗΣΗ

```
In[1]:= M[n_] = (2 n - 1) π / 2; u[zr_, Tv_] = Sum[(2 / M[n]) Sin[M[n] zr] e-M[n]2 Tv, {n, 1, 5}];
```

```
In[2]:= values[Tv_] = Table[{u[zr, Tv], zr}, {zr, 0, 2, 0.02}]; isochrone[Tv_] :=  
ListPlot[values[Tv], PlotJoined → True, PlotStyle → Thickness[0.007],  
Frame → True, Background → RGBColor[0.85, 1, 0.8], DisplayFunction → Identity]
```

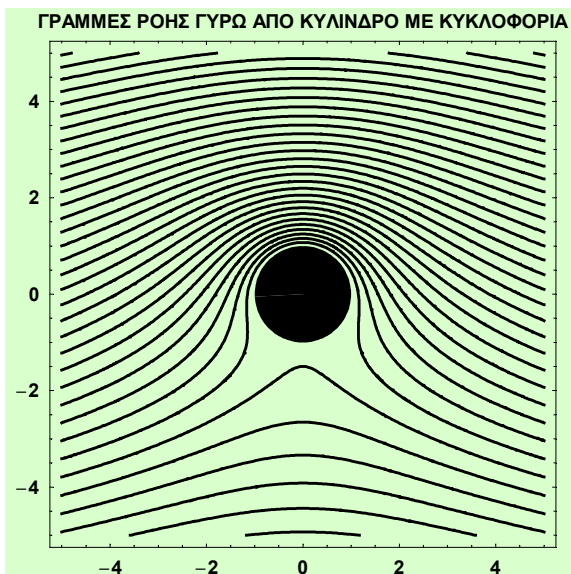
```
In[3]:= Show[{Table[isochrone[0.1 k], {k, 1, 10}], isochrone[10]},  
PlotLabel → "ΙΣΟΧΡΟΝΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΕ ΣΤΕΡΕΟΠΟΙΗΣΗ",  
DefaultFont → {"Arial-Bold", 10}, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



## ■ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΓΡΑΜΜΕΣ ΡΟΗΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ ΜΕ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ

```
In[4]:= Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]; {a = 1, κ = 2, V∞ = 1};  
Ψ[x_, y_] = If[x2 + y2 ≥ a2, V∞ y (1 - a2 / (x2 + y2)) + κ Log[Sqrt[x2 + y2] / a], 0];
```

```
In[5]:= Show[ContourShapes = ContourPlot[Ψ[x, y], {x, -5, 5},  
{y, -5, 5}, ContourStyle → Thickness[0.006], PlotPoints → 300,  
Contours → 35, ContourShading → False, DisplayFunction → Identity],  
Graphics[Disk[{0, 0}, a], AspectRatio → 1], DisplayFunction → $DisplayFunction,  
DefaultFont → {"Arial-Bold", 9}, Background → RGBColor[0.85, 1, 0.8],  
PlotLabel → "ΓΡΑΜΜΕΣ ΡΟΗΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ ΜΕ ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑ", ImageSize → 270];
```



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

• ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΜΕΡΟΥΣ Β	vii–viii
• ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Β	ix–x
• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΜΕΡΟΥΣ Β	xi–xii
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β1: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ	1–34
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 34 σελίδες)</i>	1
B1.1. Βασικές Έννοιες	2
B1.2. Βασικοί Χαρακτηρισμοί	7
B1.3. Τύποι Γραμμικών Διαφορικών Εξισώσεων Δευτέρας Τάξεως	15
B1.4. Αρχή της Υπερθέσεως (ή Επαλληλίας) Λύσεων	19
B1.5. Γενική Λύση της Μη Ομογενούς Γραμμικής Διαφορικής Εξισώσεως	22
B1.6. Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες	23
B1.7. Λύσεις Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους	26
B1.8. Επαλήθευση Λύσεων Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους	27
B1.9. Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους	29
B1.10. Μη Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους	32
B1.11. Αλλαγή Ανεξάρτητων Μεταβλητών	32
B1.12. Αλλαγή Άγνωστης Συναρτήσεως	33
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β2: ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ	35–54
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 20 σελίδες)</i>	35
B2.1. Οι Βασικές Εξισώσεις Δευτέρας Τάξεως για τον Πολιτικό Μηχανικό	36
B2.2. Οι Βασικές Εξισώσεις Τετάρτης Τάξεως για τον Πολιτικό Μηχανικό	50
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β3: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ	55–92
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 38 σελίδες)</i>	55
B3.1. Η Τασική Συνάρτηση του Airy στην Επίπεδη Ελαστικότητα	56
B3.2. Αξονικές Ταλαντώσεις Ράβδου	64
B3.3. Ιδεατό Ρευστό στη Ρευστομηχανική	76
B3.4. Μόνιμη Αστρόβιλη Ροή Ιδεατού Ρευστού	81
B3.5. Κυκλοφοριακή Ροή σε Αυτοκινητόδρομο	88
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β4: ΓΕΝΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΕ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ	93–114
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 22 σελίδες)</i>	93
B4.1. Εξίσωση της Χορδής: Λύση του d’Alembert	93
B4.2. Εφαρμογή στη Διδιάστατη Εξίσωση του Laplace	99
B4.3. Γενική Λύση για Ειδικές Γραμμικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως	101
B4.4. Γενική Λύση για Ειδικές Γραμμικές Εξισώσεις Δευτέρας Τάξεως	105
B4.5. Η Μέθοδος της Εκθετικής Αντικαταστάσεως	110
B4.6. Γενική Λύση της Διδιάστατης Διαρμονικής Εξισώσεως	112
<i>Μέσω Δύο Αρμονικών Συναρτήσεων</i>	

●	<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β5: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ</b>	<b>115–162</b>
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 48 σελίδες)</i>	115
	B5.1. Γενικά για τη Μέθοδο του Χωρισμού των Μεταβλητών	116
	B5.2. Εφαρμογή στη Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος	117
	B5.3. Εφαρμογή στη Μονοδιάστατη Εξίσωση της Διαχύσεως	130
	B5.4. Εφαρμογή στη Διδιάστατη Εξίσωση του Laplace	137
	B5.5. Μη Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες	150
	B5.6. Μη Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις	154
●	<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β6: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΡΑΒΔΩΝ ΚΑΙ ΔΟΚΩΝ</b>	<b>163–212</b>
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 50 σελίδες)</i>	163
	B6.1. Αξονικές Ταλαντώσεις Ράβδου	164
	B6.2. Καμπτικές Ταλαντώσεις Δοκού	181
●	<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β7: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ</b>	<b>213–218</b>
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 6 σελίδες)</i>	213
	B7.1. Η Μέθοδος του Navier για την Ορθογωνική Πλάκα	213
	B7.2. Η Μέθοδος του Lévy για την Ορθογωνική Πλάκα	218
●	<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β8: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΣΤΕΡΕΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ</b>	<b>219–224</b>
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 6 σελίδες)</i>	219
	B8.1. Στερεοποίηση Ημιπεριορισμένου (Ημίκλειστου) Στρώματος Αργίλου	219
	B8.2. Στερεοποίηση Ανοικτού Στρώματος Αργίλου	224
●	<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β9: ΠΟΛΙΚΕΣ, ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ</b>	<b>225–244</b>
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 20 σελίδες)</i>	225
	B9.1. Τύποι Μετασχηματισμών Μεταξύ των Συντεταγμένων	225
	B9.2. Η Εξίσωση του Laplace σε Πολικές Συντεταγμένες	226
	B9.3. Η Εξίσωση του Laplace σε Κυλινδρικές και σε Σφαιρικές Συντεταγμένες	231
	B9.4. Επίλυση της Εξίσωσης του Laplace σε Πολικές Συντεταγμένες	233
	B9.5. Ροή γύρω από Ακίνητο Κυκλικό Κύλινδρο	238
	B9.6. Χρήση Συναρτήσεων Bessel στη Διδιάστατη Εξίσωση της Διαχύσεως	240
	B9.7. Χρήση Συναρτήσεων Bessel στις Ιδιοταλαντώσεις Κυκλικής Πλάκας	242
●	<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β10: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE</b>	<b>245–274</b>
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 30 σελίδες)</i>	245
	B10.1. Σύντομη Περιγραφή της Μεθόδου	246
	B10.2. Μεταγωγή Ρύπου σε Υδατόρρευμα	249
	B10.3. Σχόλια για τη Χρήση του Μετασχηματισμού Laplace	259
	B10.4. Μετάδοση Θερμότητας στο Έδαφος	262
	B10.5. Ελεύθερες Αξονικές Ταλαντώσεις Ράβδου	269
●	<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β11: Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER</b>	<b>275–292</b>
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 18 σελίδες)</i>	275
	B11.1. Σύντομη Περιγραφή της Μεθόδου	276
	B11.2. Διάχυση Ρύπου σε Υδατόρρευμα	282
	B11.3. Ελεύθερες Καμπτικές Ταλαντώσεις Άπειρης Δοκού	288
●	<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β12: ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ</b>	<b>293–298</b>
	<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 6 σελίδες)</i>	293
	B12.1. Η Μέθοδος των Rayleigh–Ritz	293
	B12.2. Η Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών	297
●	<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> (2 σελίδες)	<b>299–300</b>



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν Μέρος Β των συγγραμμάτων **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς** καλύπτει τη σχετική θεωρία, η οποία αφορά στις **Εφαρμοσμένες Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Το Μέρος Β αποτελεί το πρώτο (και το πιο εκτενές: 300 περίπου σελίδες) τμήμα του Τεύχους 1 του συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Ειδικότερα στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών το σύγγραμμα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς** προορίζεται για το αντίστοιχο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III του τρίτου εξαμήνου σπουδών.

Τα υπόλοιπα τρία μέρη της θεωρίας αφορούν στις **Εφαρμοσμένες Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** (το Μέρος Α), στις **Εφαρμοσμένες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** (το Μέρος Γ) και στις **Εφαρμοσμένες Μιγαδικές Συναρτήσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** (το Μέρος Δ). Από αυτά το Μέρος Α αποτελεί το Τεύχος 1 του πρώτου συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Αντίθετα τα Μέρη Γ και Δ αποτελούν τμήματα του παρόντος Τεύχους 1 του δευτέρου συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Τα Μέρη Γ και Δ ακολουθούν εδώ το παρόν Μέρος Β.

Σύμφωνα με τη σύγχρονη άποψη (που υιοθετείται και εδώ χωρίς επιφυλάξεις) σαν θεωρία στο παρόν Μέρος Β του συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς** δε νοείται μόνο η ίδια η θεωρία, αλλά και τα παραδείγματα και οι εφαρμογές στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού που τη συνοδεύουν. Οι εφαρμογές αυτές προέρχονται εδώ κυρίως από την Ελαστικότητα (τασική συνάρτηση του Airy, στρέψη), τις ορθογωνικές Πλάκες (μέθοδοι των Navier και Lévy), τη Δυναμική των Κατασκευών (αξονικές ταλαντώσεις ράβδων και καμπτικές ταλαντώσεις δοκών, ταλαντώσεις πλακών), την Εδαφομηχανική (διήθηση και στερεοποίηση), τη Ρευστομηχανική (μόνιμη διδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού), την Περιβαλλοντική Υδραυλική (μεταφορά και αποδόμηση ρύπου σε υδατόρρευμα) και την Περιβαλλοντική Μηχανική γενικότερα και την Κυκλοφοριακή Ροή.

Το παρόν Τεύχος 1 των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς** συμπληρώνεται από ένα ακόμη (αλλά μικρότερο) τεύχος: Το Τεύχος 2 με τίτλο **Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks III για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Αυτό το χωριστό τεύχος περιλαμβάνει τις άλυτες (αλλά όμως εφαρμοσμένες) ασκήσεις και από τα τρία Μέρη Β, Γ και Δ του παρόντος Τεύχους 1 των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς** για το φοιτητή και τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό. Περιλαμβάνει επίσης εννέα notebooks της Mathematica με λυμένες ομάδες ασκήσεων, δύο notebooks με εφαρμογές και δύο ακόμη ανάλογα notebooks για animations (κινούμενα σχήματα). Τέλος το Τεύχος 3 του πρώτου συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς** με τίτλο **Χρήσιμες Εντολές της Mathematica για Πολιτικούς Μηχανικούς** αποτελεί ουσιαστικά ένα εκτενές «ευρετήριο» των κυριότερων εντολών της Mathematica τις οποίες χρειάζεται ο Πολιτικός Μηχανικός για την επίλυση ασκήσεων είτε γενικών είτε της επιστήμης του.

Εξαιρώντας την έμφαση η οποία δίνεται σ' αυτό το Μέρος Β σε προβλήματα της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού, κατά τα λοιπά καλύπτεται σε μεγάλο μέρος η γνωστή ύλη των Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους (ή Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων) που είναι διαθέσιμη στα κλασικά διδακτικά βιβλία. Η ύλη του μέρους αυτού αναφέρεται εκτενώς στον πίνακα των περιεχομένων του στις προηγούμενες δύο σελίδες, που δεν υπάρχει λόγος να επαναληφθεί, και κατανέμεται σε δώδεκα κεφάλαια, άλλα μικρότερης κι άλλα μεγαλύτερης έκτασης. Σε αρκετά σημεία η παρούσα ύλη υστερεί σχετικά με εκείνη στα κλασικά διδακτικά βιβλία. Τέτοια σημεία αφορούν σε ειδικές εξισώσεις και μεθόδους επίλυσεως και επίσης σε θεωρητικά αποτελέσματα που έχουν παραλειφθεί.

Οι κύριες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται εδώ για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους είναι πρώτα μερικές απλές μέθοδοι ευρέσεως κλειστών λύσεων, στη συνέχεια η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών (όπου δίνεται ιδιαίτερη έμφαση επιπλέον και με επέκτασή της σε μη ομογενείς εξισώσεις) και οι μέθοδοι των μετασχηματισμών Laplace και Fourier. Ένα κεφάλαιο αφορά σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους σε πολικές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες και το τελευταίο σύντομο κεφάλαιο στις σχετικές προσεγγιστικές και αριθμητικές μεθόδους. Τα πέντε Κεφάλαια B2, B3, B6, B7 και B8 αφορούν πλήρως σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που παρουσιάζονται στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

Πέρα από τον προσανατολισμό του παρόντος Μέρους B για τις Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού δίνεται επίσης έμφαση στη δυνατότητα σχετικά εύκολης κατανοήσεώς του από το μέσο φοιτητή και τη μέση φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό. Για το σκοπό αυτό έγινε μια έντονη προσπάθεια να είναι γραμμένο απλά, πάρα πολύ απλά, παρόλο που αυτό συνεπάγεται πολύ μεγαλύτερη έκτασή του, και επίσης σε όχι υψηλό μαθηματικό επίπεδο.

Επαναλαμβάνω ότι είμαι πραγματικά, ειλικρινέστατα πολύ ευτυχής για τη συνεχή ενθάρρυνση και τη βοήθεια που μου δόθηκε και μου δίνεται από τους συναδέλφους μου στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ως προς τα μαθήματα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III που μου έχουν ανατεθεί μέσω του Γενικού Τμήματος. Ας μου επιτραπεί να αναφερθώ πάλι ιδιαίτερα στο συνάδελφο Καθηγητή κ. Δημήτριο Μπέσκο του Τομέα Κατασκευών και να τον ευχαριστήσω θερμά. Αυτός μου υπέδειξε την πιθανή χρησιμότητα μιας προσπάθειας προετοιμασίας διδακτικών συγγραμμάτων για τα δύο αυτά μαθήματα. Ακόμη όμως μεγαλύτερη ενθάρρυνση μου έδωσαν η συνεργασία, η συνέπεια κι ο ζήλος των φοιτητών και φοιτητριών μου Πολιτικών Μηχανικών στα μαθήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III, τα οποία έχω εδώ και πολλά χρόνια την τιμή και τη χαρά να τους διδάσκω.

Θα αποτελούσε επίσης ιδιαίτερη τιμή και χαρά μου αν το παρόν Μέρος B για τις **Εφαρμοσμένες Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους για Πολιτικούς Μηχανικούς** μπορούσε να συμβάλει, έστω και πάρα πολύ λίγο, στην καλύτερη μελέτη του ενδιαφέροντος αυτού θέματος από τους φοιτητές και τις φοιτήτριες Πολιτικούς Μηχανικούς. Σ' αυτούς και σ' αυτές απευθύνεται και αυτό το Μέρος B, όπως φαίνεται κι από τον τίτλο του, κι όχι σε κάθε φοιτητή και φοιτήτρια έστω και Μηχανικό. Πρόκειται, νομίζω, για μια προσέγγιση κάπως διαφορετική στο περιεχόμενο και στους στόχους της από αυτές στα αναμφίβολα πολύ αξιολογότερα διαθέσιμα σχετικά διδακτικά βιβλία.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω και πάλι τις **GOTSIS Εκδόσεις** στην Πάτρα και ιδιαίτερα τον υπεύθυνό τους κ. Άγγελο Γκότση για το ενδιαφέρον τους σ' ολόκληρο το παρόν βιβλίο και την τόσο επιμελημένη προετοιμασία και εκτύπωσή του. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα αξιέπαινη πρωτοβουλία από τις **GOTSIS Εκδόσεις** και μάλιστα χωρίς ιδιαίτερο οικονομικό όφελος. Τούτο δυστυχώς ισχύει εξαιτίας του εξειδικευμένου χαρακτήρα των διδακτικών αυτών βιβλίων που δεν επιτρέπει τη διάθεσή τους σε ευρύ αναγνωστικό κοινό περιορίζοντάς τη σε Πολιτικούς Μηχανικούς.

Εντούτοις θεωρώ πως είναι προτιμότερο να διαθέτουν οι φοιτητές και οι φοιτήτριες Πολιτικού Μηχανικού τα «δικά τους» βιβλία Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Με τα συγγράμματα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς** γίνεται προσπάθεια να καταστεί εμφανές ότι τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III δεν είναι αποκομμένα από τα άλλα μαθήματα που διδάσκεται ο Πολιτικός Μηχανικός. Αντίθετα είναι φυσιολογικά συνδεδεμένα με αυτά σε μια αλυσίδα γνώσεων.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να σημειώσω ότι με πολύ μεγάλη χαρά μου θα δεχθώ κάθε υπόδειξη για τη βελτίωση αυτού του βιβλίου είτε με τη διόρθωση λαθών και σημείων με ασάφειες που έχουν παρεισφύσει είτε με ουσιαστικότερες υποδείξεις ως προς την επιλογή του περιεχομένου, των παραδειγμάτων και των εφαρμογών, κλπ. Θα είμαι πραγματικά ευγνώμων για κάθε τέτοια υπόδειξη!

Πάτρα, Φεβρουάριος 2008

Νικόλαος Ι. Ιωακείμης

e-mail: n.ioakimidis@upatras.gr

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Το περιεχόμενο στο παρόν **Μέρος Β** των διδακτικών βιβλίων *Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς*, που αφορά στις *Εφαρμοσμένες Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους για Πολιτικούς Μηχανικούς*, είναι απόλυτα κλασικό (τόσο στη θεωρία όσο και στις εφαρμογές) και βασίζεται στη σχετική εκτενέστατη μαθηματική και τεχνική βιβλιογραφία. Τα ίδια ισχύουν και για τα περιεχόμενα στο **Μέρος Α** για τις *Εφαρμοσμένες Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς*, στο **Μέρος Γ** για τις *Εφαρμοσμένες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς* καθώς και **Μέρος Δ** για τις *Εφαρμοσμένες Μηγαδικές Συναρτήσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς* των ίδιων διδακτικών βιβλίων *Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς*. Η συμβολή του γράφοντα περιορίζεται απλά στον τρόπο παρουσιάσεως της τόσο κλασικής αυτής ύλης, που δίνει έντονη έμφαση στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ

Οι μαθηματικοί τύποι αριθμούνται ανά κεφάλαιο και ενότητα. Ο κάθε τύπος έχει το δικό του αριθμό στη μορφή: αριθμός κεφαλαίου, τελεία, αριθμός ενότητας, τελεία, αριθμός τύπου, όπως ακριβώς γίνεται και στα περισσότερα επιστημονικά βιβλία. Δεν υπάρχει έτσι περίπτωση συγχύσεως στην αρίθμηση των τύπων. Πολύτιμος βοηθός για τις αναφορές από το κείμενο σε μαθηματικούς τύπους (σε κάθε ενότητα χωριστά) υπήρξε το γνωστό πρόγραμμα στοιχειοθεσίας  $\TeX$ , το οποίο έχει φυσικά και το πλεονέκτημα ότι δεν κάνει λάθη σ' αυτό το τόσο χρήσιμο έργο του.

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ

Η βασική γραμματοσειρά στα παρόντα διδακτικά βιβλία είναι η Optima, μια γραμματοσειρά κυρίως νεοκλασικού τύπου. Η Optima σχεδιάστηκε από το διάσημο σχεδιαστή γραμματοσειρών Hermann Zapf μεταξύ των ετών 1952 και 1955 και διατέθηκε εμπορικά αρχικά από την εταιρεία Linotype το 1958. Η Ελληνική παραλλαγή της, η MgOptima, που χρησιμοποιείται εδώ, διατίθεται από την εταιρεία Magenta στην Αθήνα σε CD-ROM Ελληνικών γραμματοσειρών. Και η Ελληνική παραλλαγή της Optima, η Optima Greek, σχεδιάστηκε αρχικά από τον ίδιο το Zapf και κυκλοφόρησε πρώτα επίσης από τη Linotype το 1971.<sup>1</sup> Το κείμενο και οι μαθηματικοί τύποι στοιχειοθετήθηκαν με τα προγράμματα στοιχειοθεσίας Y&Y  $\TeX$  και  $\Xi\TeX$  στην Ελληνική παραλλαγή τους. Τα προγράμματα αυτά είναι ισχυρότατα ιδίως για τη στοιχειοθεσία μαθηματικού κειμένου και υποστηρίζουν γραμματοσειρές PostScript. Τα τελικά αρχεία είναι σε μορφές DVI (Device Independent) και PDF (Portable Document Format). Φυσικά, όπως συμβαίνει συνήθως, στην τελική εκτύπωση χρησιμοποιήθηκε η μορφή PDF. Αυτή είναι και η πιο εύχρηστη και γενικά χρησιμοποιούμενη στις εκτυπώσεις.

<sup>1</sup>Όλες αυτές οι πληροφορίες για τη γραμματοσειρά Optima προέρχονται από το τόσο ενδιαφέρον βιβλίο του Brighurst, R. (2001), *Στοιχεία της Τυπογραφικής Τέχνης* (Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτότυπου: *The Elements of Typographic Style*, 2η Έκδοση. Hartley & Marks, 1996). Εταιρεία Ελληνικών Τυπογραφικών Στοιχείων και Πνευματικών Εκδόσεων Κρήτης, Ηράκλειο, σ. 292.

Ενδιαφέροντα σχόλια για την Optima αναφέρονται επίσης και στο βιβλίο των Grosvenor, J., Morrison, K. and Pim, A. (1992), *The PostScript Font Handbook: A Directory of Type 1 Fonts* (αναθεωρημένη έκδοση). Addison-Wesley, Wokingham, England, σ. 308. Μεταξύ αυτών των σχολίων αναφέρεται ότι η Optima είναι ίσως η πιο πρωτότυπη σχεδίαση (γραμματοσειράς εννοείται) του Hermann Zapf. Επίσης η εμφάνισή της το 1958 προκάλεσε «θόρυβο» στον κόσμο της τυπογραφίας. Έχει αρκετά παχείς και σαφείς χαρακτήρες και θεωρείται κατάλληλη όχι μόνο για τίτλους, αλλά και για συνεχές κείμενο, όπως συμβαίνει εδώ.

• **ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΑ ΔΥΟ ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ (ΜΕΤΑ ΤΗ ΣΕΛΙΔΑ ΤΙΤΛΟΥ) ΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ Β**

Τα δύο αυτά σχήματα αναφέρονται σε δύο κλασικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και δημιουργήθηκαν με χρήση της *Mathematica*.

Πιο συγκεκριμένα το πρώτο σχήμα αναφέρεται στις **ισόχρονες καμπύλες** στο πρόβλημα της μονοδιάστατης **στερεοποίησης στρώματος αργίλου** σύμφωνα με τη θεωρία του Terzaghi (1923). Το σχετικό πρόβλημα βασίζεται στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (8.1.1) και λύνεται στο Κεφάλαιο Β8 του παρόντος Μέρους Β. Εδώ χρησιμοποιήθηκαν οι δύο αδιάστατες μεταβλητές  $z_r$  και  $T_v$  των σχέσεων (8.1.23). Στο σχήμα αυτό το πάνω μισό μέρος του (από  $z_r = 1$  μέχρι  $z_r = 2$ ) αντιστοιχεί σε ημιπεριορισμένο (ημίκλειστο) στρώμα αργίλου με αδιαπέρατο το κάτω σύνορό του  $z_r = 1$  και διαπερατό το πάνω  $z_r = 2$ . Αντίθετα στο ίδιο σχήμα το κάτω μισό μέρος του (από  $z_r = 0$  μέχρι  $z_r = 1$ ) αντιστοιχεί πάλι σε ημιπεριορισμένο (ημίκλειστο) στρώμα αργίλου, αλλά τώρα με διαπερατό το κάτω σύνορό του  $z_r = 0$  και αδιαπέρατο το πάνω  $z_r = 1$ . Και τα δύο αυτά μέρη μαζί (από  $z_r = 0$  έως  $z_r = 2$ ) αφορούν σε ανοικτό στρώμα αργίλου διπλού όμως πάχους  $d^* = 2d$ .

Οι ισόχρονες καμπύλες που σχεδιάστηκαν αφορούν στην **πρόσθετη υδροστατική πίεση (υπερπίεση του νερού των πόρων)**  $u(z_r, T_v)$  του στρώματος αργίλου που εξετάζεται στην περίπτωση σταθερής αρχικής τιμής της  $u_i(z_r) = u_{i0}$  και σε αδιάστατη μορφή, δηλαδή  $u_r(z_r, T_v) := u^*(z_r, T_v)/u_{i0}$ . Φυσικά στις ισόχρονες καμπύλες έχουμε συγκεκριμένες (σταθερές) τιμές του **παράγοντα χρόνου** (ή **χρονικού παράγοντα**)  $T_v$ . Με χρήση των σχέσεων (8.1.24) και (8.1.25) προκύπτει η τελική σχέση

$$u_r(z_r, T_v) := \frac{u^*(z_r, T_v)}{u_{i0}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{M_n} \sin M_n z_r e^{-M_n^2 T_v} \quad \text{με} \quad M_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}.$$

Αυτή η σχέση χρησιμοποιήθηκε για τη σχεδίαση των ισόχρονων καμπύλων του πρώτου σχήματος για  $T_v = 0.1, 0.2, \dots, 1.0$  (από δεξιά προς τα αριστερά στο σχήμα αυτό). Σχεδιάστηκε επίσης και η πρόσθετη ισόχρονη καμπύλη για  $T_v = 10$ . Αυτή ουσιαστικά αφορά στην πλήρη στερεοποίηση του στρώματος αργίλου και είναι η κατακόρυφη καμπύλη (με το μάτι η ευθεία) αριστερά. Σε όλες τις ισόχρονες καμπύλες η πιο πάνω σειρά προσεγγίστηκε με τους πέντε πρώτους όρους της. Αυτή η προσέγγιση είναι επαρκής λόγω του όρου  $M_n$  στον παρονομαστή και κυρίως λόγω του εκθετικού παράγοντα στη σειρά που τείνει πολύ γρήγορα στο μηδέν, όπως φαίνεται από τον εκθέτη του.

Αναφέραμε ήδη ότι το πρώτο σχήμα από τα δύο σχήματα μετά τη σελίδα τίτλου στο παρόν Μέρος Β αναφέρεται στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως. Το δεύτερο σχήμα στην ίδια σελίδα αναφέρεται στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace και αφορά στις **γραμμές ροής γύρω από κύλινδρο με κυκλοφορία**. Με τη φράση αυτή εννοούμε την ομοιόμορφη, διδιάστατη (επίπεδη), μόνιμη (σταθερή) ροή ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική με ταχύτητα  $V_\infty$  παράλληλη με τον οριζόντιο άξονα  $Ox$  που παρεμποδίζεται όμως από σταθερό, στερεό, κυκλικό κύλινδρο ακτίνας  $a$  με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O = (0, 0)$ . Στη ροή αυτή υποθέτουμε επιπλέον την ύπαρξη και κυκλοφορίας  $\Gamma = 2\kappa\pi$  γύρω από τον κύλινδρο. Οι γραμμές ροής είναι οι καμπύλες εκείνες όπου η **ροϊκή συνάρτηση** (ή **συνάρτηση ροής**)  $\Psi(x, y)$  παίρνει σταθερές τιμές (Εδάφιο Β3.4.5 στο Κεφάλαιο Β3). Συγκεκριμένα στο παρόν πρόβλημα ροής η ροϊκή συνάρτηση δίνεται από τον τύπο

$$\Psi(x, y) = V_\infty y \left( 1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) + \kappa \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}.$$

Η εξίσωση αυτή δίνεται στη σελίδα 188 του κλασικού βιβλίου του Milne-Thomson *Theoretical Hydrodynamics* που αναφέρεται λεπτομερώς στη βιβλιογραφία της Ρευστομηχανικής του Μέρους Δ.

Στο σχήμα αυτό σχεδιάστηκαν 35 γραμμές ροής στην ειδική περίπτωση που  $a = 1$ ,  $\kappa = 2$  και  $V_\infty = 1$  με χρήση της σχετικής εντολής *ContourPlot* της *Mathematica*. Είναι ενδιαφέρουσες οι μορφές τους που δείχνουν την κίνηση του ιδεατού ρευστού. Επειδή εδώ  $\kappa = 2aV_\infty$ , πρόκειται για την κρίσιμη περίπτωση που τα δύο σημεία ανακοπής συμπίπτουν και βρίσκονται στο κατώτερο σημείο  $(0, -a)$  του κυλίνδρου. Εδώ η ύπαρξη κυκλοφορίας  $\Gamma = 2\kappa\pi$  καθιστά αυτό το πεδίο ροής μη συμμετρικό ως προς τον άξονα  $Ox$ , ενώ το αντίστοιχο πεδίο ροής με  $\kappa = 0$  είναι συμμετρικό.

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *B1*

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Το προηγούμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II αφορούσε στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III θα εξετασθούν καταρχήν οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Στην αρχή του εισαγωγικού αυτού κεφαλαίου γίνεται η κατά το δυνατόν ομαλή μετάβαση από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με πρώτο παράδειγμα τη διαφορική εξίσωση των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού. Αυτή είναι μία από τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους ιδιαίτερου ενδιαφέροντος για τον Πολιτικό Μηχανικό. Μια άλλη είναι η εξίσωση του Laplace (στις δύο και στις τρεις διαστάσεις), η οποία επίσης αναφέρεται στο κεφάλαιο αυτό. Εξηγούνται ακόμη οι έννοιες των ανεξάρτητων μεταβλητών και της εξαρτημένης μεταβλητής (της άγνωστης συναρτήσεως) καθώς και η έννοια της μερικής παραγωγίσεως σαν γενίκευση της συνήθους παραγωγίσεως.

Στη συνέχεια ορίζονται αρκετά λεπτομερώς οι χαρακτηρισμοί των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους ανάλογα: (α) με την τάξη τους (πρώτης, δεύτερας, κλπ.), (β) με το αν είναι γραμμικές ή μη γραμμικές, (γ) ειδικά αν είναι γραμμικές, με το αν έχουν σταθερούς ή μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές, (δ) και πάλι αν είναι γραμμικές, αν είναι ομογενείς ή μη ομογενείς, (ε) με τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών: συνήθως δύο, τρεις ή τέσσερις, π.χ.,  $x, y, z$  (θέση) και  $t$  (χρόνος), από τις οποίες το πολύ μία χρονική, η  $t$ , και ακριβώς μία για τέσσερις μεταβλητές:  $x, y, z$  και  $t$ . (στ) Ειδικά για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερας τάξεως και με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές γίνεται η διάκρισή τους ανάλογα με τον τύπο τους, δηλαδή αν είναι (i) υπερβολικού τύπου (ή υπερβολικές), (ii) παραβολικού τύπου (ή παραβολικές) ή (iii) ελλειπτικού τύπου (ή ελλειπτικές). Αντίστοιχα παραδείγματα αποτελούν: (i) η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση), (ii) η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως και (iii) η διδιάστατη εξίσωση του Laplace.

Ακολουθως αναφέρεται και εξηγείται η τόσο χρήσιμη αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων για ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Για τις μη ομογενείς εξισώσεις εξηγείται επίσης πώς η γενική λύση τους προκύπτει από τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς συν μια μερική λύση της μη ομογενούς. Γίνεται επίσης αναφορά στις έννοιες των αρχικών και των συνοριακών συνθηκών σε προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα κατασκευής (ευρέσεως, μορφώσεως, σχηματισμού) μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (συγκεκριμένα της εξίσωσης του κύματος) από μια γενική και δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αναφέρονται ακόμη και οι βασικές μέθοδοι επιλύσεως διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Από τις μεθόδους αυτές τις δύο σημαντικότερες αναλυτικές μεθόδους, δηλαδή τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών καθώς και τη μέθοδο των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών (Laplace και Fourier) θα τις εξετάσουμε εκτενώς σε επόμενα κεφάλαια (Κεφάλαια Β5 έως Β11). Πάρα πολύ λίγα στοιχεία για τις προσεγγιστικές και τις αριθμητικές μεθόδους θα αναφερθούν στο Κεφάλαιο Β12.

---

## B1.1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

### B1.1.1. Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Πολύ συχνά ο Πολιτικός Μηχανικός συναντά στην επιστήμη του συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Παραδείγματος χάρη, τέτοια είναι η συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως του αρμονικού ταλαντωτή σε ένα μονοβάθμιο (δηλαδή με ένα μόνο βαθμό ελευθερίας) διπααραμετρικό (δηλαδή με δύο παραμέτρους) μηχανικό σύστημα υλικού σημείου  $M$  μάζας  $m$  και ελατηρίου  $S$  σταθεράς  $k$ . Το απλό μηχανικό αυτό σύστημα θεωρείται ότι εκτελεί εξαναγκασμένες ταλαντώσεις υπό φόρτιση (εξωτερική δύναμη)  $p(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο  $M$ . Αυτή η συνήθης διαφορική εξίσωση έχει τη γνωστή μορφή

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + k u(t) = p(t), \quad t > 0, \quad (1.1.1)$$

με  $t$  το χρόνο και  $u = u(t)$  την προς το παρόν άγνωστη μετατόπιση του υλικού σημείου  $M$  ως προς τη θέση ισορροπίας του  $O$ . Στη συνήθη διαφορική αυτή εξίσωση ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$  και άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η μετατόπιση (ουσιαστικά η θέση)  $u = u(t)$  του υλικού σημείου  $M$ . Θα μπορούσε επίσης να σημειωθεί ότι η συνήθης διαφορική εξίσωση (1.1.1) είναι γραμμική, δευτέρας τάξεως, φυσικά πρώτου βαθμού, με σταθερούς συντελεστές (τις σταθερές  $m$  και  $k$ ) και βέβαια μη ομογενής (λόγω της φορτίσεως  $p(t)$ ).

Είναι επίσης πολύ γνωστή στον Πολιτικό Μηχανικό η συνήθης διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως της ελαστικής γραμμής (σχεδόν ισοδύναμα του βέλους κάμψεως)  $v = v(x)$  σε συνήθη δοκό σε κάμψη. Το μήκος της δοκού είναι  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ). Η δοκός έχει επίσης σταθερή δυσκαμψία  $EI$ : μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young) του υλικού της  $E$  επί τη ροπή αδρανεΐας της διατομής της  $I$  ως προς τον ουδέτερο άξονα  $Oz$  της διατομής αυτής στην κάμψη. Υφίσταται επίσης κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p = p(x)$  (σε  $kN/m$  ή σε ανάλογη μονάδα) πάνω στη δοκό. Αυτή η συνήθης διαφορική εξίσωση έχει τη μορφή

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = p(x), \quad 0 < x < L. \quad (1.1.2)$$

Στην περίπτωση δοκού επί ελαστικής βάσεως (ή ελαστικού θεμελίου) σύμφωνα με την υπόθεση του Winkler η εξίσωση αυτή (1.1.2) παίρνει την υπολογιστικά κάπως δυσκολότερη μορφή

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} + \hat{k} v(x) = p(x), \quad 0 < x < L. \quad (1.1.3)$$

Η σταθερά  $\hat{k}$  είναι κατάλληλη σταθερά που οφείλεται στην αντίδραση της ελαστικής βάσεως, συνήθως του εδάφους. Για τον υπολογισμό της σταθεράς αυτής  $\hat{k}$  λαμβάνονται υπόψη τόσο η σταθερά  $k_0$  αντιδράσεως της ελαστικής βάσεως (που καλείται και μέτρο της ελαστικής βάσεως ή μέτρο του εδάφους) όσο και το πλάτος  $b$  της δοκού. Συγκεκριμένα ισχύει η απλή σχέση  $\hat{k} = k_0 b$ .

Στις συνήθεις αυτές διαφορικές εξισώσεις (1.1.2) και (1.1.3) μοναδική ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού (αντί για το χρόνο  $t$  στη συνήθη διαφορική εξίσωση (1.1.1) του αρμονικού ταλαντωτή). Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή)  $v = v(x)$  είναι το βέλος κάμψεως (η εγκάρσια ή κάθετη μετατόπιση) των σημείων της δοκού. Αυτή δημιουργεί την ελαστική γραμμή της. Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (1.1.2) και (1.1.3) είναι γραμμικές, τετάρτης τάξεως, προφανώς πρώτου βαθμού, με σταθερούς συντελεστές και μη ομογενείς και πάλι λόγω της κατανεμημένης κάθετης φορτίσεως  $p = p(x)$ . Βέβαια τώρα η φόρτιση  $p = p(x)$  είναι συνάρτηση της θέσεως  $x$  και όχι του χρόνου  $t$ , αντίθετα με ό,τι συνέβαινε στη συνήθη διαφορική εξίσωση (1.1.1) του αρμονικού ταλαντωτή.

Μπορούν βέβαια να αναφερθούν και πολλά, πάρα πολλά ακόμη κλασικά παραδείγματα εμφανίσεως συνήθων διαφορικών εξισώσεων στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Ανάλογα και παραδείγματα συστημάτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Συστήματα συνήθων διαφορικών

εξισώσεων παρουσιάζονται π.χ. σε πολυβάθμια (δηλαδή με πολλούς βαθμούς ελευθερίας) μηχανικά συστήματα. Τέτοια είναι τα συστήματα μαζών-ελατηρίων-αποσβεστήρων σε συζευγμένες ταλαντώσεις ή σε εξιδανικευμένες κατασκευές, όπως σε ένα κτίριο διατμήσεως, όπου έχουν γίνει ορισμένες ουσιαστικές απλοποιητικές παραδοχές ως προς ένα αντίστοιχο πραγματικό κτίριο.

### Β1.1.2. Ανεξάρτητες μεταβλητές

Το χαρακτηριστικό των συνήθων διαφορικών εξισώσεων και των αντίστοιχων συστημάτων είναι ότι υπάρχει σ' αυτές μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή. Για παράδειγμα στη συνήθη διαφορική εξίσωση (1.1.1) ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$ : χρονική μεταβλητή. Αντίθετα στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (1.1.2) και (1.1.3) ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού: χωρική μεταβλητή. (Σημειώνεται ότι η διαφορική εξίσωση (1.1.3) αφορά σε δοκό επί ελαστικής βάσεως.) Επομένως οι παραγωγίσεις στις διαφορικές αυτές εξισώσεις είναι συνήθεις παραγωγίσεις και δίνουν συνήθεις παραγώγους. Παραδείγματος χάρη, εάν

$$u(t) = A \cos \omega t \implies \dot{u}(t) = -\omega A \sin \omega t \implies \ddot{u}(t) = -\omega^2 A \cos \omega t \quad (1.1.4)$$

με το εύρος των ταλαντώσεων  $A$  και την κυκλική συχνότητά τους  $\omega$  ( $\omega > 0$ ) γνωστές σταθερές.

Βέβαια σχεδόν πάντοτε ο Πολιτικός Μηχανικός θεωρεί ότι η συνάρτηση  $u(t)$  στις πιο πάνω σχέσεις είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου  $t$ . Το σύμβολο  $\omega$  θεωρείται ότι παριστάνει απλά μια παράμετρο, εδώ την κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων, και όχι μια ανεξάρτητη μεταβλητή. Γράφουμε δηλαδή απλά  $u = u(t)$  και όχι  $u = u(\omega, t)$  ή  $u = u(t, \omega)$ , παρόλο που και οι συμβολισμοί  $u(\omega, t)$  και  $u(t, \omega)$  είναι και αυτοί αποδεκτοί από μαθηματικής απόψεως.

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές του Πολιτικού Μηχανικού (και του Μηχανικού γενικότερα) συνήθως είναι μόνο ο χρόνος  $t$  και η θέση  $x$  (στη μία διάσταση). Στις δύο διαστάσεις για τη θέση έχουμε τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$  (τετμημένη) και  $y$  (τεταγμένη) σε Καρτεσιανές συντεταγμένες ή τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $r$  (πολική ακτίνα) και  $\theta$  (πολική γωνία) σε πολικές συντεταγμένες. Πάλι για τη θέση στις τρεις διαστάσεις έχουμε τις τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$ ,  $y$  και  $z$  σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. Ανάλογα χρησιμοποιούμε τις τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές  $r$ ,  $\theta$  και  $z$  στις κυλινδρικές συντεταγμένες γενικεύοντας τις πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$  στις τρεις διαστάσεις. Επίσης στις τρεις διαστάσεις σε σφαιρικές περιοχές ή σε περιοχές με σφαιρική συμμετρία (δηλαδή με συμμετρία ως προς το κέντρο  $O$  μιας σφαίρας) ως προς το ζητούμενο φυσικό μέγεθος ενδείκνυται συχνά να χρησιμοποιούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες  $\rho$ ,  $\theta$  και  $\varphi$ , που είναι επίσης τρεις. Σε ειδικές περιπτώσεις αποδεικνύονται χρήσιμα και άλλα είδη συντεταγμένων στις δύο διαστάσεις (φυσικά δύο μόνο συντεταγμένες) και στις τρεις διαστάσεις (μόνο τρεις συντεταγμένες).

Συνοψίζοντας, ο Πολιτικός Μηχανικός έχει συχνά (βέβαια όχι πάντοτε) σαν ανεξάρτητες μεταβλητές στα τεχνικά προβλήματά του τις εξής: (α) το χρόνο  $t$ , όπως συμβαίνει, π.χ., στη συνήθη διαφορική εξίσωση (1.1.1) ή (β) τη θέση  $x$ , όπως συμβαίνει, π.χ., στη συνήθη διαφορική εξίσωση (1.1.2) για το μονοδιάστατο πρόβλημα της συνήθους δοκού. Όταν εργάζεται στις δύο διαστάσεις, σε στατικά προβλήματα έχει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, π.χ. (α) τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$  και  $y$  ή (β) τις αντίστοιχες πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$ . Ανάλογα, όταν εργάζεται στις τρεις διαστάσεις, πάλι σε στατικά προβλήματα (δηλαδή σε μόνιμες καταστάσεις), έχει τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές, π.χ. (α) τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$ ,  $y$  και  $z$  ή (β) τις κυλινδρικές συντεταγμένες  $r$ ,  $\theta$  και  $z$  ή (γ) τις σφαιρικές συντεταγμένες  $\rho$ ,  $\theta$  και  $\varphi$ . Σημειώνεται επίσης ότι οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους σε πολικές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες μελετώνται στο Κεφάλαιο Β9.

Επιπλέον σε δυναμικά (όχι πια σε στατικά) προβλήματα ο Πολιτικός Μηχανικός έχει σαν ανεξάρτητη μεταβλητή και το χρόνο  $t$ . Δηλαδή στο δυναμικό πρόβλημα μιας δοκού (συνήθους ή επί ελαστικής βάσεως) ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί σαν ανεξάρτητες μεταβλητές τόσο τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού όσο και το χρόνο  $t$ , δηλαδή δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τις  $x$  και  $t$ .

Επομένως η διαφορική εξίσωση της κάμψεως της συνήθους δοκού (1.1.2) θα πρέπει να τροποποιηθεί στο δυναμικό φαινόμενο. Στο φαινόμενο αυτό η εξίσωση (1.1.2) θα πάρει την ακόλουθη μορφή με τη χρήση του συμβόλου  $\partial$  (αντί του  $d$ ) που δηλώνει μερική (και όχι συνήθη) παραγωγή:

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = p(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.1.5)$$

Στην εξίσωση αυτή το σύμβολο  $\rho$  δηλώνει τη συνήθη πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα όγκου) του υλικού από το οποίο έχει κατασκευασθεί η δοκός και το σύμβολο  $A$  το εμβαδόν της διατομής της  $S$ . Επομένως το γινόμενο  $\rho A$  εκφράζει την πυκνότητα ανά μονάδα μήκους της δοκού: τη γραμμική πυκνότητα. Η γραμμική αυτή πυκνότητα μερικές φορές δηλώνεται και σαν  $m$ , δηλαδή εδώ  $m = \rho A$ . Και τις δύο αυτές ποσότητες  $\rho$  και  $A$ , χάριν απλότητας, τις θεωρούμε εδώ σταθερές. Δηλαδή η συνήθης δοκός αποτελείται από ομογενές υλικό καθ' όλο το μήκος της (σταθερό  $\rho$ ). Επίσης είναι σταθερής διατομής  $S$  εμβαδού  $A$  (σταθερό  $A$ ). Φυσικά η διατομή αυτή  $S$  δεν είναι απαραίτητο να είναι ορθογωνική: μπορεί να είναι οποιοσδήποτε σχήματος, π.χ. σχήματος ταυ (T) ή, καλύτερα, διπλού ταυ. Τα δύο αυτά σχήματα είναι ευνοϊκά για τον Πολιτικό Μηχανικό, επειδή δημιουργούν μεγάλη ροπή αδρανείας  $I$  ως προς τον ουδέτερο άξονα  $Oz$  της διατομής  $S$  της δοκού (για την ίδια μάζα υλικού). Άρα και η δυσκαμψία  $EI$  στις διαφορικές εξισώσεις (1.1.2), (1.1.3), (1.1.5), κλπ. που αφορούν στην κάμψη δοκών είναι επίσης μεγάλη και τούτο είναι χρήσιμο για μειωμένη κάμψη.

Δε συμβαίνει τίποτε το τρομερό στη διαφορική εξίσωση (1.1.5). Απλά τώρα η άγνωστη συνάρτηση, δηλαδή το βέλος κάμψεως  $v = v(x, t)$ , εξαρτάται τόσο από τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού ( $0 \leq x \leq L$ ) όσο και από το χρόνο  $t$  ( $t \geq 0$ ) λόγω της δυναμικής (μεταβαλλόμενης με το χρόνο  $t$ ) καταπόνησεως της δοκού σε κάμψη. Γενικά και η κατανεμημένη φόρτιση  $p = p(x, t)$  της δοκού (π.χ. σε kN/m) είναι και αυτή συνάρτηση και της θέσεως  $x$  και του χρόνου  $t$  σε δυναμικά φαινόμενα. Υπάρχουν επομένως δύο ανεξάρτητες μεταβλητές στη δοκό: η θέση  $x$  και ο χρόνος  $t$  στο θεωρούμενο δυναμικό πρόβλημα δοκού σε κάμψη, κάτι το πολύ συνηθισμένο για τον Πολιτικό Μηχανικό (ιδίως σε περιπτώσεις σεισμών). Άρα, όπως ήδη αναφέρθηκε, οι παράγωγοι στη σχετική διαφορική εξίσωση (1.1.5) είναι μερικές παράγωγοι (που δηλώνονται με το σύμβολο  $\partial$ ) και όχι συνήθεις παράγωγοι (που δηλώνονται με το σύμβολο  $d$ ). Αντίθετα στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (1.1.1), (1.1.2) (της οποίας η διαφορική εξίσωση (1.1.5) αποτελεί γενίκευση στο δυναμικό φαινόμενο κάμψεως δοκού) και (1.1.3) έχουμε συνήθεις παραγώγους. Αυτές δηλώνονται με το σύμβολο  $d$ .

Παρεμπιπτόντως μπορεί να σημειωθεί ότι το όρθιο σύμβολο  $d$  δηλώνει διαφορικά, που χρησιμοποιούνται επίσης στη συνήθη παραγωγή, π.χ.  $du/dt$  (με το σύμβολο  $d$  όρθιο, ενώ τα σύμβολα  $u$  και  $t$  πλάγια). Αντίθετα το πλάγιο σύμβολο  $d$  μπορεί να παριστάνει κάποια μαθηματική ή φυσική ποσότητα ή συνάρτηση, π.χ. μια απόσταση  $d$ . Ανάλογα και για τα σύμβολα  $D$  (το διαφορικό τελεστή: όρθιο  $D$ , π.χ.  $Du$  για την παράγωγο  $\dot{u} = \dot{u}(t)$  της συναρτήσεως  $u$  μιας μεταβλητής  $t$ ) και  $D$  (π.χ. δυσκαμψία συνήθους πλάκας: πλάγιο  $D$ ). Το όρθιο σύμβολο  $D$  δηλώνει επίσης και την ολική παράγωγο, η οποία χρησιμοποιείται συχνά στη Ρευστομηχανική (ή Μηχανική των Ρευστών), π.χ.  $Du/Dt$  (με το σύμβολο  $D$  όρθιο, ενώ τα σύμβολα  $u$  και  $t$  πάλι πλάγια). Η ολική παράγωγος, π.χ. η  $Du/Dt$ , καλείται συχνά και υλική παράγωγος, επειδή αναφέρεται στην κίνηση της ύλης από την οποία αποτελείται το ρευστό, και πραγματικά στον ορισμό της περιέχεται η ταχύτητα  $\mathbf{V}$  του κινούμενου ρευστού.

### B1.1.3. Παρατηρήσεις για τις μερικές παραγώγους

Επ' ευκαιρία ας σημειωθεί ότι οι μερικές παράγωγοι δηλώνουν και αυτές παραγωγή, αλλά με σαφή ένδειξη ως προς ποια ή ποιες από τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Παραδείγματος χάρη, στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση (1.1.5) παρατηρούμε την παρουσία της τέταρτης μερικής παραγωγού της άγνωστης συναρτήσεως (του βέλους κάμψεως)  $v(x, t)$  ως προς τη θέση  $x$  καθώς και της



δεύτερης μερικής παραγώγου της ίδιας συναρτήσεως  $v(x, t)$  ως προς το χρόνο  $t$ , δηλαδή

$$\frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (1.1.6)$$

αντίστοιχα. Και στις δύο αυτές μερικές παραγωγώγους η ανεξάρτητη μεταβλητή που δεν αφορά στην παραγωγή θεωρείται σαν σταθερά, σαν παράμετρος κατά την ώρα της παραγωγίσεως.

Έτσι, αν υποθετικά δεχθούμε ότι

$$v(x, t) = Bx^5 \sin \omega t \quad (1.1.7)$$

με το  $B$  γνωστή σταθερά και  $\omega$  ( $\omega > 0$ ) την κυκλική συχνότητα ταλαντώσεων στο υποθετικό αυτό παράδειγμα, τότε οι μερικές παράγωγοι (1.1.6) που παρουσιάζονται στη διαφορική εξίσωση (1.1.5) θα έχουν τις εκφράσεις

$$\frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = 5! Bx \sin \omega t = 120 Bx \sin \omega t \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 Bx^5 \sin \omega t. \quad (1.1.8)$$

Αυτό διαπιστώνεται εύκολα με την εκτέλεση των παραγωγίσεων.

Αρκετά συχνά παρουσιάζονται και μικτές μερικές παράγωγοι, αν και αυτό δε συμβαίνει στη διαφορική εξίσωση (1.1.5). Υποθέτοντας και πάλι την ισχύ της σχέσεως (1.1.7) για τη συνάρτηση των δύο μεταβλητών  $v(x, t)$  (εδώ το βέλος κάμψεως της δοκού  $v(x, t)$  εξαρτάται και από τη θέση  $x$  κατά μήκος της, αλλά και από το χρόνο  $t$ ), βρίσκουμε και την εξής μικτή μερική παράγωγο:

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial}{\partial t} (Bx^5 \sin \omega t) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\omega Bx^5 \cos \omega t) = 5\omega Bx^4 \cos \omega t. \quad (1.1.9)$$

Ανάλογα μπορούμε να έχουμε μικτές μερικές παραγωγούς και ανωτέρων τάξεων. Το ευχάριστο πάντως είναι ότι εάν οι ζητούμενες μικτές μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε επιτρέπεται οποιαδήποτε αλλαγή στη σειρά των παραγωγίσεων, π.χ.

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x}. \quad (1.1.10)$$

Δηλαδή με σαφέστερη γραφή (συχνά γίνονται λάθη στη θεωρητική ερμηνεία της σειράς των παραγωγίσεων σε μικτές μερικές παραγωγούς!) η ισότητα (1.1.10) δηλώνει ότι

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right). \quad (1.1.11)$$

Τούτο πολύ εύκολα μπορεί να επαληθευθεί στο παράδειγμα της συναρτήσεως (1.1.7) ασφαλώς με αποτέλεσμα (και στα δύο μέλη της ισότητας (1.1.10) ή, ισοδύναμα, (1.1.11)) το (1.1.9).

Σημειώνεται ότι αντίθετα με το συμβολισμό (1.1.10) (αναλυτικότερα (1.1.11)), όταν χρησιμοποιείται ο συμβολισμός των μερικών παραγώγων χωρίς το σύμβολο της μερικής παραγωγίσεως  $\partial$ , αλλ' απλά με δείκτες, τότε ο πρώτος δείκτης δηλώνει τη μεταβλητή στην πρώτη μερική παραγωγή, ο δεύτερος στη δεύτερη, κλπ. Έτσι η σχέση (1.1.10) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$v_{tx} = v_{xt} \quad (1.1.12)$$

που είναι μάλιστα και συντομότερη.

#### **Β1.1.4. Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς**

Η εξίσωση (1.1.5), την επαναλαμβάνουμε μεταφέροντας τη χρονική μερική παράγωγο του δεξιού μέλους της στο αριστερό μέλος της (βέβαια με πρόσημο συν τώρα)

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad (1.1.13)$$

είναι φυσικά μια διαφορική εξίσωση, αλλ' έχει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού και το χρόνο  $t$ . Επομένως, όπως ήδη σαφώς εξηγήσαμε, περιέχει μερικές παραγώγους (και όχι συνήθεις παραγώγους) της άγνωστης συναρτήσεως  $v(x, t)$ .

Συντομότερη γραφή της ίδιας διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους (1.1.13) είναι δυνατή με τη χρήση δεικτών για τη δήλωση των μερικών παραγώγων ως εξής:

$$EI v_{xxxx} + \rho A v_{tt} = p, \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.1.14)$$

Η γραφή αυτή είναι απόλυτα αποδεκτή και πραγματικά χρησιμοποιείται ευρύτατα τόσο από το Μαθηματικό όσο και από το Μηχανικό. Παρά ταύτα στα παρόντα διδακτικά βιβλία θα προτιμήσουμε την επισιμότερη (και σαφέστερη) γραφή (1.1.13). Μάλιστα μερικές φορές, για να αποφεύγονται συγχύσεις μεταξύ μερικών παραγώγων και απλών δεικτών, πριν από τις δηλώσεις των μερικών παραγώγων στους δείκτες μπαίνει κόμμα. Έτσι η εξίσωση (1.1.14) γράφεται και στη μορφή

$$EI v_{,xxxx} + \rho A v_{,tt} = p, \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.1.15)$$

Η τελευταία γραφή (1.1.15) συνιστάται, ιδίως όταν χρησιμοποιούμε ταυτόχρονα μερικές παραγώγους και απλούς δείκτες. Για παράδειγμα, στη Μηχανική των Υλικών απλοί δείκτες χρησιμοποιούνται για τις τάσεις  $\sigma_{ij}$ , τις μετατοπίσεις  $u_i$ , τις παραμορφώσεις  $\epsilon_{ij}$  και τις ροπές αδρανείας  $I_{ij}$  (συνήθως με  $i, j \in \{x, y, z\}$ ). Στην περίπτωση αυτή και σε παρόμοιες περιπτώσεις (όπου συνήθως οι δείκτες αναφέρονται στις συνιστώσες διανυσματικών και τανυστικών μεγεθών) η χρήση του κόμματος πριν από τις μεταβλητές των μερικών παραγώγων είναι αναγκαία. (Προφανώς αυτό βέβαια ισχύει στην περίπτωση που οι μερικές παράγωγοι δηλώνονται με τη χρήση δεικτών.)

Τέτοιες διαφορικές εξισώσεις καλούνται **διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους**. Μάλιστα σχετικά πρόσφατα τείνει να επικρατήσει ο πιο σύντομος όρος **μερικές διαφορικές εξισώσεις**, όμως ίσως με κάποια σύγχυση για το αν έχουμε μερικές (κάποιες) συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ή πραγματικά διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Στα Αγγλικά υπάρχουν δύο φράσεις με ξεχωριστές έννοιες: (i) some differential equations και (ii) partial differential equations, στα Ελληνικά όμως προκύπτει σύγχυση. Αυτό συμβαίνει, επειδή και η λέξη «some» και η λέξη «partial» στα Αγγλικά μεταφράζονται και οι δύο στα Ελληνικά με τη λέξη «μερικές». Εν πάση περιπτώσει, και οι δύο όροι είναι αποδεκτοί, αλλ' ο γράφων (όπως και άλλοι) δείχνει προτίμηση στον πρώτο: **διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους**. Αυτός φαίνεται να είναι και ο σαφέστερος. Επομένως ο γράφων θα χρησιμοποιεί σ' αυτό το διδακτικό βιβλίο, όπως και στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ, αποκλειστικά τον όρο αυτό.

Στο παρόν και στα επόμενα κεφάλαια θα εξετάσουμε τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, οι οποίες αποτελούν γενίκευση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Ένα πρώτο παράδειγμα απετέλεσε η εξίσωση των καμπυτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού (1.1.13). Ένα άλλο παράδειγμα διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους είναι η εξής διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (1.1.16)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια πάρα πολύ γνωστή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και καλείται εξίσωση του Laplace στις δύο διαστάσεις (ή απλούστερα διδιάστατη εξίσωση του Laplace). Αυτό που παρατηρούμε στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace είναι η ύπαρξη δύο ανεξάρτητων μεταβλητών θέσεως: των  $x$  και  $y$ , που δηλώνουν τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$  στο επίπεδο  $Oxy$ . Από αυτές τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές εξαρτάται η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή)  $u = u(x, y)$ . (Ο χρόνος  $t$  δεν υπεισέρχεται σαν ανεξάρτητη μεταβλητή στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (1.1.16).) Επειδή έχουμε και μερικές παραγώγους στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (1.1.16), χρησιμοποιήθηκε σ' αυτήν το σύμβολο της μερικής παραγώγου  $\partial$  για τις δύο μερικές παραγώγους αντί για το συνηθισμένο σύμβολο  $d$  για τις συνήθεις παραγώγους.

Η εξίσωση του Laplace στις δύο διαστάσεις (1.1.16) γενικεύεται βέβαια και στις τρεις διαστάσεις: τριδιάστατη εξίσωση του Laplace. Εκεί παίρνει την προφανή μορφή

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1.17)$$

με τρεις τώρα ανεξάρτητες μεταβλητές θέσεως: τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  στον τριδιάστατο χώρο. Εναλλακτικές μορφές της ισχύουν στις περιπτώσεις των πολικών συντεταγμένων  $(r, \theta)$  στις δύο διαστάσεις και των κυλινδρικών συντεταγμένων  $(r, \theta, z)$  καθώς και των σφαιρικών συντεταγμένων  $(\rho, \theta, \varphi)$  στις τρεις διαστάσεις. Θα μελετήσουμε τις μορφές αυτές στο Κεφάλαιο Β9.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι σε πολλές περιπτώσεις ο Πολιτικός Μηχανικός έχει ανάγκη να χρησιμοποιεί δύο, τρεις ή και τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές, όπως τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  (ή και άλλες συντεταγμένες θέσεως) ή/και το χρόνο  $t$  φθάνοντας το πολύ στις τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές. Παραδείγματος χάρη, η κάθε συνιστώσα  $V_x, V_y$  και  $V_z$  της διανυσματικής ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ανέμου που επηρεάζει μια γέφυρα (όπως τη γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου) ή τον πύργο ελέγχου ενός αεροδρομίου εξαρτάται και από τις τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές  $x, y, z$  και  $t$ , δηλαδή  $V_x = V_x(x, y, z, t)$ , κλπ. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και για τη συγκέντρωση  $c = c(x, y, z, t)$  ενός ρύπου (δηλαδή μιας ρυπαίνουσας ουσίας) σε ποταμό ή σε λίμνη ή ακόμη και στη θάλασσα, όπου αποβάλλονται διάφορες ουσίες από παρακείμενες βιομηχανίες ή άλλα απόβλητα (π.χ. αστικά απόβλητα).

Επομένως πάρα πολλά τεχνικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού αναγκαστικά χρησιμοποιούν στη μαθηματική μοντελοποίησή τους δύο, τρεις ή και τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές. Αυτές οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι συνήθως μία, δύο ή ακόμη και τρεις από τις μεταβλητές θέσεως:  $x, y$  και  $z$  (χωρικές μεταβλητές) σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (ανάλογα και σε άλλα συστήματα συντεταγμένων) ή/και ο χρόνος  $t$  (χρονική μεταβλητή). Οδηγούν επίσης σε διαφορετικές εξισώσεις εξαιτίας των φυσικών νόμων που ισχύουν και που συχνά περιέχουν παραγώγους (συνήθεις ή μερικές).

Παραδείγματος χάρη, τέτοιοι πολύ γνωστοί νόμοι που περιέχουν παραγώγους είναι οι εξής: (α) ο τόσο θεμελιώδης δεύτερος νόμος του Νεύτωνα (1686) στη Μηχανική, (β) ο νόμος της διαχύσεως του Fick (1855), που χρησιμοποιείται σαν βασικός νόμος και στην Περιβαλλοντική Υδραυλική, (γ) ο νόμος του Darcy (1856) στην Εδαφομηχανική (γραμμένος στη μορφή του με τη χρήση του υδραυλικού φορτίου  $h$ ), κλπ., κλπ. Ο νόμος του Darcy οδήγησε επίσης και στη γνωστή θεωρία του Terzaghi για τη στερεοποίηση εδάφους. Αυτή η θεωρία, ως σημειωθεί αυτό το «παράξενο», καταλήγει στην τελική εξίσωσή της στην ίδια μαθηματικά εξίσωση (ουσιαστικά στην εξίσωση της διαχύσεως) με το νόμο της διαχύσεως του Fick!

Το προφανές συμπέρασμα είναι ότι εξίσου αναγκαστικά ο Πολιτικός Μηχανικός οδηγείται σε διαφορετικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Παραδείγματος χάρη, τέτοιες είναι η εξίσωση των (εξαναγκασμένων) καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού (1.1.13) και η εξίσωση του Laplace στις δύο διαστάσεις (1.1.16) καθώς και στις τρεις διαστάσεις (1.1.17). Τέτοιες διαφορετικές εξισώσεις (με μερικές παραγώγους) έχει συχνά προς επίλυση αναλυτική ή προσεγγιστική ή ακόμη και αριθμητική ο Πολιτικός Μηχανικός. Η προσεγγιστική και ιδίως η αριθμητική επίλυση χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά σε πολύπλοκα, σε σύνθετα τεχνικά προβλήματα που δεν επιδέχονται ακριβή αναλυτική λύση. Πολύ λίγα στοιχεία για τις προσεγγιστικές και τις αριθμητικές μεθόδους επίλυσεως γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές θα αναφερθούν στο Κεφάλαιο Β12.

## Β1.2. ΒΑΣΙΚΟΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΙ

Περιορίζουμε την προσοχή μας στην εξίσωση των (εξαναγκασμένων) καμπτικών ταλαντώσεων

δοκού (1.1.13)

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad (1.2.1)$$

και στην τριδιάστατη εξίσωση του Laplace (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ ) (1.1.17)

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} = 0. \quad (1.2.2)$$

Στην εξίσωση της δοκού (1.2.1) (στο δυναμικό βέβαια πρόβλημα της κάμψεως συνήθους δοκού) οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η θέση  $x$  και ο χρόνος  $t$ , όπως ήδη αναφέρθηκε, ενώ η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η συνάρτηση  $v = v(x, t)$ . Από φυσικής απόψεως η συνάρτηση αυτή παριστάνει το βέλος κάμψεως, δηλαδή την εγκάρσια (την κάθετη) μετατόπιση των σημείων της δοκού, η οποία δημιουργεί μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t$  την ελαστική γραμμή της δοκού με  $0 \leq x \leq L$ . (Φυσικά εδώ η ελαστική αυτή γραμμή μεταβάλλεται με το χρόνο  $t$ .) Θα δώσουμε τώρα μερικούς ορισμούς για χαρακτηρισμούς και ταξινομήσεις των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

### B1.2.1. Τάξη

Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους καλείται η τάξη της μεγαλύτερης σε τάξη μερικής παραγώγου που παρουσιάζεται στη διαφορική εξίσωση. Παραδείγματος χάρη, η εξίσωση των καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού (1.2.1) είναι τετάρτης τάξεως εξαιτίας της παρουσίας της τετάρτης μερικής παραγώγου  $\partial^4 v(x, t)/\partial x^4$  στον πρώτο όρο του αριστερού μέλους της. Αντίθετα η τριδιάστατη εξίσωση του Laplace (1.2.2) είναι δευτέρας τάξεως, επειδή και οι τρεις μερικές παράγωγοι  $\sigma'$  αυτήν (ως προς  $x$ , ως προς  $y$  και ως προς  $z$ ) είναι δευτέρας τάξεως και δεν υπάρχει καμία παράγωγος τάξεως μεγαλύτερης της δευτέρας. Συνήθως οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που παρουσιάζονται στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού είναι μέχρι τετάρτης τάξεως. Αυτό όμως δε συμβαίνει πάντοτε. Παραδείγματος χάρη, σε ένα πρόβλημα κυκλικού κυλινδρικού κελύφους παρουσιάζεται μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ογδός τάξεως.

### B1.2.2. Γραμμικότητα

Μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους χαρακτηρίζεται σαν γραμμική, εάν η άγνωστη συνάρτηση  $\sigma'$  αυτήν και κάθε μερική παράγωγός της παρουσιάζεται (σε όσους όρους η καθεμία παρουσιάζεται) υψωμένη ακριβώς στην πρώτη δύναμη. Επίσης δεν πρέπει να υπάρχουν καθόλου γινόμενα της άγνωστης συναρτήσεως με τις μερικές παραγώγους της ούτε και των μερικών παραγώγων της μεταξύ τους. Η άγνωστη συνάρτηση και οι μερικές παράγωγοί της πρέπει επίσης να μην εμφανίζονται όχι μόνο σε δυνάμεις (διαφορετικές της πρώτης), σε ρίζες, κλπ., αλλ' ούτε και μέσα σε οποιαδήποτε συνάρτηση όπως στις συναρτήσεις  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\tan$ ,  $\sinh$ ,  $\cosh$ ,  $\tanh$ , τις αντίστροφές τους, στις συναρτήσεις  $\exp$ ,  $\ln$ ,  $\text{erf}$  (error function, συνάρτηση σφάλματος), κλπ., κλπ.

Με την έννοια αυτή οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (1.2.1) και (1.2.2) είναι και οι δύο γραμμικές. Αυτό ισχύει, επειδή οι άγνωστες συναρτήσεις  $\sigma'$  αυτές  $v(x, t)$  και  $u(x, y, z)$  αντίστοιχα παρουσιάζονται (σε όσους όρους παρουσιάζονται) στη μορφή μερικών παραγώγων υψωμένων στην πρώτη δύναμη. Αντίθετα η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\left( \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \right)^3 + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (1.2.3)$$

είναι μη γραμμική. Αυτό συμβαίνει, επειδή ο πρώτος όρος της στο αριστερό μέλος είναι μερική παράγωγος της άγνωστης συναρτήσεως  $u = u(x, y)$  υψωμένη στην τρίτη δύναμη. Επίσης και

η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\sinh u(x, y, z) + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = x + y + z \quad (1.2.4)$$

είναι και αυτή μη γραμμική. Αυτό ισχύει, επειδή η άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x, y, z)$  στον πρώτο όρο του αριστερού μέλους της εμφανίζεται σαν όρισμα στη συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο ( $\sinh$ ). Η πολύ γνωστή σειρά Maclaurin της συναρτήσεως υπερβολικό ημίτονο

$$\sinh u = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \frac{u^9}{9!} + \frac{u^{11}}{11!} + \dots \quad (1.2.5)$$

καταδεικνύει το μη γραμμικό χαρακτήρα της διαφορικής εξισώσεως (1.2.4), γιατί παρουσιάζονται δυνάμεις της εξαρτημένης μεταβλητής  $u$ :  $u^3, u^5, u^7$ , κλπ.

Μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους συναντά μερικές φορές ο Πολιτικός Μηχανικός στην πράξη. Παραδείγματος χάρη, οι τόσο βασικές και χρήσιμες εξισώσεις των Navier–Stokes στη Ρευστομηχανική (Μηχανική των Ρευστών) αποτελούν ένα σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων εξαιτίας της παρουσίας γινομένων των αγνώστων συναρτήσεων (των συνιστωσών της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού) με τις μερικές παραγώγους τους. Τις εξισώσεις των Navier–Stokes στο γήινο πεδίο βαρύτητας θα τις αναφέρουμε στην Παράγραφο Β3.3.2 του Κεφαλαίου Β3. Μια άλλη (και πιο απλή) μη γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως που αφορά στην Κυκλοφοριακή Ροή οχημάτων (αυτοκινήτων) που κινούνται ελεύθερα σε αυτοκινητόδρομο θα την αναφέρουμε πιο κάτω στο κεφάλαιο αυτό.

Ας σημειωθεί επίσης ότι η γενική γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$  και  $y$  έχει την εξής μορφή:

$$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y) u = S(x, y). \quad (1.2.6)$$

Στην εξίσωση αυτή  $x$  και  $y$  είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές και  $u = u(x, y)$  η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή). Οι συναρτήσεις  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$ ,  $R(x, y)$  και  $S(x, y)$  θεωρούνται γνωστές συναρτήσεις επίσης των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$  και  $y$ . Μπορεί βέβαια η μία από τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$  και  $y$  να είναι ο χρόνος  $t$  (π.χ. αντί για τη μεταβλητή  $y$ ).

Με όμοιο τρόπο διαπιστώνεται εύκολα ότι η γενική γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως επίσης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$  και  $y$  έχει την ακόλουθη μορφή:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = S. \quad (1.2.7)$$

Τα σύμβολα  $x$  και  $y$  δηλώνουν και πάλι τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Η συνάρτηση  $u = u(x, y)$  είναι η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή), ενώ οι συναρτήσεις  $A = A(x, y)$ ,  $B = B(x, y)$ ,  $C = C(x, y)$ ,  $D = D(x, y)$ ,  $E = E(x, y)$ ,  $F = F(x, y)$  και  $S = S(x, y)$  είναι γνωστές συναρτήσεις επίσης των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$  και  $y$ . Αρκετές φορές και οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$  και  $y$  αναφέρονται στο χώρο, είναι δηλαδή χωρικές μεταβλητές. Πολλές φορές όμως η μία μόνο (π.χ. η  $x$ ) αναφέρεται στο χώρο, ενώ η δεύτερη (π.χ. η  $y$ ) αναφέρεται στο χρόνο. Φυσικά στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται το σύμβολο  $t$  αντί του  $y$  για τη χρονική ανεξάρτητη μεταβλητή.

Στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ θα περιορίσουμε σχεδόν πλήρως την προσοχή μας στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Αυτές είναι και οι πιο εύκολες στην επίλυσή τους, αλλά, ταυτόχρονα, και οι πιο συχνά παρουσιαζόμενες στα τεχνικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Βέβαια είναι ακριβές ότι σε πολλές περιπτώσεις, στις περισσότερες μάλιστα περιπτώσεις, η εμφάνιση μιας γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (είτε συνήθους είτε με μερικές παραγώγους) αποτελεί τη συνέπεια κάποιων παραδοχών και απλουστεύσεων που γραμμικοποιούν μια καταρχήν μη γραμμική διαφορική εξίσωση. Η διαδικασία αυτή καλείται γραμμικοποίηση και ο Πολιτικός Μηχανικός πρέπει να έχει επίγνωση των σχετικών περιορισμών

και των ορίων της ισχύος της (τελικά) γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που προκύπτει (είτε αυτή είναι συνήθης είτε με μερικές παραγώγους).

Παραδείγματος χάρι, για την κλασική διαφορική εξίσωση των καμπτικών ταλαντώσεων της δοκού (1.2.1) ο πρώτος όρος της

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} \quad (1.2.8)$$

προέκυψε κατόπιν παραδοχών, αλλά και γραμμικοποίησεως στον ακόλουθο τύπο για την (προσημασμένη) καμπυλότητα της δοκού:

$$\kappa(x, t) = \frac{v''(x, t)}{\left[\sqrt{1 + v'^2(x, t)}\right]^3} \equiv \frac{v''(x, t)}{\left[1 + v'^2(x, t)\right]^{3/2}}. \quad (1.2.9)$$

Στον τύπο αυτό οι τόνοι στην άγνωστη συνάρτηση  $v(x, t)$  δηλώνουν παραγωγίσεις ως προς τη χωρική μεταβλητή (τη μεταβλητή θέσεως)  $x$ , όχι ως προς τη χρονική μεταβλητή  $t$ . (Αντίθετα για τις χρονικές παραγώγους συνήθως χρησιμοποιούνται από τον Πολιτικό Μηχανικό τελείες, π.χ.  $\ddot{v} = \ddot{v}(x, t)$  για τη δεύτερη χρονική παράγωγο αντί  $v'' = v''(x, t)$  για τη δεύτερη χωρική παράγωγο.) Τώρα για τη γραμμικοποίηση στον τύπο της καμπυλότητας (1.2.9) ο όρος  $v'^2(x, t)$  στην τετραγωνική ρίζα στον παρονομαστή του δεξιού μέλους του τύπου αυτού απλά αγνοείται συγκρινόμενος με τη μονάδα στην ίδια ρίζα. Επομένως

$$\kappa(x, t) \approx v''(x, t) \equiv \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}. \quad (1.2.10)$$

Στη συνέχεια για την καμπτική ροπή (ή ροπή κάμψεως)  $M(x, t)$  στη δοκό έχουμε

$$M(x, t) = EI \kappa(x, t) \approx EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.2.11)$$

κλπ. μέχρι να φθάσουμε (με άλλες δύο παραγωγίσεις) στον πρώτο όρο (1.2.8) της διαφορικής εξίσωσης (1.2.1).

Είναι μάλιστα αρκετά δικαιολογημένη η τόσο γνωστή αυτή γραμμικοποίηση. Και τούτο γιατί η πρώτη χωρική (ως προς τη θέση  $x$ ) παράγωγος  $v'(x, t)$  σε μια δοκό (που παριστάνει την κλίση της δοκού) είναι συνήθως πολύ μικρή, έστω  $|v'(x, t)| < 0.1$  (και ακόμη μικρότερη). Άρα για το τετράγωνό της  $v'^2(x, t)$  έχουμε  $v'^2(x, t) < 0.1^2 = 0.01$ . Επομένως δικαιολογημένα το αγνοούμε σε σύγκριση με τη μονάδα στην τετραγωνική ρίζα στον παρονομαστή του τύπου (1.2.9) για την (προσημασμένη) καμπυλότητα  $\kappa(x, t)$  της δοκού. Πάρα πολύ σπάνια θα μπορούσε αυτή η γραμμικοποίηση να προκαλέσει κάποια ουσιαστική μείωση της ακρίβειας επιλύσεως (είτε αναλυτικής είτε αριθμητικής) ενός προβλήματος συνήθους δοκού. Γι' αυτό και σχεδόν πάντοτε υιοθετείται από τον Πολιτικό Μηχανικό.

Συνοψίζοντας, μετά από ορισμένες εξιδανικεύσεις και γραμμικοποιήσεις, ο Πολιτικός Μηχανικός αρκείται συνήθως σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (είτε συνήθεις είτε με μερικές παραγώγους). Στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III εξετάζουμε τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

### **B1.2.3. Σταθερότητα των συντελεστών**

Ειδικά στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (όπως και στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις) μια γραμμική διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται με σταθερούς συντελεστές, απλά εάν οι συντελεστές των όρων της είναι σταθεροί. Εννοείται ότι οι συντελεστές αυτοί πολλαπλασιάζουν είτε την ίδια την άγνωστη συνάρτηση  $u$  είτε τις μερικές παραγώγους της.

Για παράδειγμα, οι γενικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως (1.2.6) και δεύτερας τάξεως (1.2.7) υπετέθησαν γενικά με μη σταθερούς (με μεταβλητούς) συντελεστές. Αναφέρθηκε μάλιστα ρητά η εξάρτηση των συντελεστών τους από τις ανεξάρτητες

μεταβλητές. Η ίδια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (1.2.6) μπορεί βέβαια να γραφεί και στη μορφή

$$P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + Ru = S(x, y) \quad (1.2.12)$$

και να δηλωθεί σαφώς ότι οι ποσότητες  $P$ ,  $Q$  και  $R$  είναι σταθερές. Πρόκειται τώρα για γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές  $P$ ,  $Q$  και  $R$ .

Ανάλογα η δήλωση ότι οι ποσότητες  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$  και  $F$  είναι σταθερές αρκεί για το χαρακτηρισμό της γενικής γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως (1.2.7) σαν εξισώσεως με σταθερούς (όχι πια μη σταθερούς, μεταβλητούς) συντελεστές. Εννοείται ότι οι συναρτήσεις  $S = S(x, y)$  στα δεξιά μέλη των εξισώσεων (1.2.6) και (1.2.7) δεν επηρεάζουν το χαρακτηρισμό τους σαν γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές ακόμη και όταν εξαρτώνται πραγματικά από τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$  και  $y$ .

Ας επανέλθουμε προς στιγμή στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (1.2.1)

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.2.13)$$

Αυτή η εξίσωση αφορά, επαναλαμβάνεται, στις (εξαναγκασμένες) καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού και είναι πάρα πολύ μεγάλης σπουδαιότητας για τον Πολιτικό Μηχανικό στη Δυναμική των Κατασκευών. Πρόκειται προφανώς για γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, όπως ήδη αναφέρθηκε. Εάν οι συντελεστές  $EI$  (η δυσκαμψία της δοκού) και  $\rho A$  (η γραμμική πυκνότητα κατά μήκος της) είναι σταθεροί, τότε η ίδια γραμμική διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται και με σταθερούς συντελεστές. Η φόρτιση  $p(x, t)$  στο δεξιό μέλος μπορεί φυσικά να εξαρτάται και από τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού (τη χωρική μεταβλητή) και το χρόνο  $t$  (τη χρονική μεταβλητή). Έτσι όπως είναι γραμμένη η εξίσωση (1.2.13) δηλώνει ότι έχει σταθερούς συντελεστές  $EI$  και  $\rho A$ . Εάν οι ποσότητες  $EI$  και  $\rho A$  δεν είναι σταθερές κατά μήκος της δοκού, τότε αποδεικνύεται στη Δυναμική των Κατασκευών ότι η εξίσωση (1.2.13) παίρνει την τροποποιημένη μορφή

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E(x) I(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho(x) A(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.2.14)$$

Αν και μαθηματικά είναι σοβαρό λάθος και έντονα κατακριτέο, εντούτοις στην πράξη ο Πολιτικός Μηχανικός δεν αποκλείεται να θεωρήσει τη δυσκαμψία  $EI$  και τη γραμμική πυκνότητα  $\rho A$  σαν ενιαία σύμβολα αντί γινόμενα. Γράφει έτσι την εξίσωση (1.2.14) στην κάπως ασαφή μορφή της

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad (1.2.15)$$

εννοώντας τη δυσκαμψία  $EI$  και τη γραμμική πυκνότητα  $\rho A$  μεταβλητές κατά μήκος της δοκού. Από μαθηματικής απόψεως η εξίσωση αυτή (1.2.15) σίγουρα είναι γραμμική και με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές. Παρά ταύτα η μεταβλητότητα των συντελεστών οφείλεται αποκλειστικά στη μεταβλητή ροπή αδρανείας  $I = I(x)$  της διατομής  $S$  της δοκού περί τον ουδέτερο άξονα της  $Oz$  στην κάμψη και στο μεταβλητό εμβαδόν  $A = A(x)$  της ίδιας διατομής. Επιπλέον και πάλι από μαθηματικής απόψεως (όχι πάντοτε από της σκοπιάς του Πολιτικού Μηχανικού) το μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young)  $E$  και η πυκνότητα  $\rho$  του υλικού της δοκού είναι σταθερά κατά μήκος της. Βέβαια, αφού η γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (1.2.15) (μετά την πλήρη εκτέλεση των παραγωγίσεων στον πρώτο όρο της) έχει έτσι κι αλλιώς μεταβλητούς συντελεστές, το σχόλιο που προηγήθηκε δεν είναι ουσιαστικής σημασίας στην πράξη.

Ας παρατηρηθεί τέλος ότι δεν είναι ασυνήθης η χρήση μιας δοκού μεταβλητής διατομής, π.χ. μιας δοκού ορθογωνικής διατομής σταθερού πλάτους  $b$  και ύψους  $h$  με το ύψος αυτό  $h$  μεταβαλλόμενο με τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού, δηλαδή με  $h = h(x)$ . Αυτό όμως συμβαίνει ιδίως

σε προβόλους με το  $h$  μειούμενο καθώς απομακρυνόμαστε από την πάκτωση, έστω στο άκρο  $x = 0$  του προβόλου. Οι στηρίξεις στους εξώστες (στα μπαλκόνια) των λιγιστών νεοκλασικών κτιρίων που επέζησαν της ανοικοδομήσεως αποτελούν τέτοιο παράδειγμα. Στην περίπτωση αυτή προφανώς ισχύουν οι τύποι

$$A = A(x) = bh(x) \quad \text{και} \quad I = I(x) = \frac{bh^3(x)}{12}. \quad (1.2.16)$$

Ο μεν πρώτος τύπος, για το εμβαδόν  $A$  της διατομής  $S$  της δοκού, είναι προφανής από τη Γεωμετρία. Όσον αφορά στο δεύτερο τύπο, για τη ροπή αδρανεΐας  $I$  της ίδιας διατομής  $S$  ως προς τον ουδέτερο άξονά της  $Oz$  στην κάμψη, είναι γνωστός από την Τεχνική Μηχανική-Στατική. Θα επαναληφθεί επίσης σύντομα στη Μηχανική των Υλικών στο 4ο Εξάμηνο Σπουδών. Έντονη είναι λοιπόν η επιρροή του ύψους  $h = h(x)$  ιδίως στη δυσκαμψία  $EI = EI(x)$  στο παράδειγμα ορθογωνικής διατομής που μελετούμε.

Αυτό που πρέπει να συγκρατήσει στη μνήμη του ο Πολιτικός Μηχανικός είναι ότι οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές, όπως η (1.2.14) ή η κάπως ασαφής μορφή της (1.2.15), παρουσιάζονται μερικές φορές στην επιστήμη του. Εντούτοις από μαθηματικής απόψεως η μεταβλητότητα των συντελεστών προκαλεί προφανώς σημαντικότερη δυσκολία στην επίλυσή τους. Το ίδιο ακριβώς συνέβαινε και στις συνηθείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας ή και ανωτέρας τάξεως, όπου καταφεύγαμε στη μέθοδο των δυναμοσειρών σε περιπτώσεις μη σταθερών (μεταβλητών) συντελεστών με αξιοσημείωτη εξαίρεση την εξίσωση των Cauchy-Euler. Ειδικά αυτή η εξίσωση επιλύεται κατευθείαν με τη χρήση κατάλληλης χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\rho(\theta) = 0$  ή, έστω, ανάγεται σε γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές κατόπιν αλλαγής της ανεξάρτητης μεταβλητής της.

#### B1.2.4. Ομογένεια

Και πάλι ειδικά στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ακριβώς όπως και στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις) μια γραμμική διαφορική εξίσωση (είτε με σταθερούς είτε με μεταβλητούς συντελεστές) καλείται ομογενής, εάν όλοι οι όροι της περιέχουν ή την άγνωστη συνάρτηση ή κάποια από τις μερικές παραγώγους της. (Εννοείται βέβαια χωρίς υψώσεις σε δυνάμεις, ρίζες, γινόμενα, τριγωνομετρικές, εκθετικές και υπερβολικές συναρτήσεις και αντίστροφές τους, κλπ., κλπ., γιατί έχουμε υποθέσει γραμμική διαφορική εξίσωση.) Επίσης είναι προφανές ότι αυτό πρέπει να συμβαίνει είτε οι όροι αυτοί βρίσκονται στο αριστερό μέλος της εξίσωσης είτε στο δεξιό. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εάν κάποιος όρος (ή κάποιοι όροι) δεν περιέχουν την άγνωστη συνάρτηση ή μερικές παραγώγους της, η γραμμική διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται σαν μη ομογενής.

Επομένως η γενική γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως και με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$  και  $y$  (1.2.6), την επαναλαμβάνουμε

$$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y) u = S(x, y), \quad (1.2.17)$$

είναι προφανώς μη ομογενής. Τούτο συμβαίνει, επειδή υπάρχει ο όρος  $S(x, y)$  στο δεξιό μέλος της. Αντίθετα, εάν ο όρος αυτός μηδενισθεί εκ ταυτότητας ( $S(x, y) \equiv 0$ ), δηλαδή εάν έχουμε

$$P(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + R(x, y) u = 0, \quad (1.2.18)$$

τότε η ίδια γραμμική διαφορική εξίσωση έχει καταστεί ομογενής. Πολύ σπάνια χρησιμοποιείται επίσης στην Επιστήμη του Μηχανικού και ο όρος πλήρης αντί του μη ομογενής. Καλό όμως είναι τούτο να αποφεύγεται. Επίσης πάρα πολύ σπάνια ο όρος ομογενής χρησιμοποιείται και με εντελώς διαφορετική έννοια ανάλογη με εκείνη που είχαμε συναντήσει στις ομογενείς συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως, δηλαδή σε συσχέτισμό με τις ομογενείς συναρτήσεις. Δε θα υπάρξει



όμως τέτοιο θέμα στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ. Στο μάθημα αυτό ο όρος ομογενής θα χρησιμοποιείται αποκλειστικά με την έννοια αυτής της παραγράφου.

Σαν δεύτερο παράδειγμα παρατηρούμε ότι η γραμμική διαφορική εξίσωση των (εξαναγκασμένων) καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού (1.1.5), την επαναλαμβάνουμε

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = p(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad (1.2.19)$$

είναι μη ομογενής. Τούτο ισχύει αποκλειστικά εξαιτίας του όρου  $p(x, t)$  (της κατανεμημένης κάθετης φορτίσεως) στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της. Η αντίστοιχη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση έχει την εξής μορφή (προφανώς με  $p(x, t) \equiv 0$ ):

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = -\rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.2.20)$$

Φυσικά πάρα πολύ συχνά οι όροι που περιέχουν την άγνωστη συνάρτηση και τις μερικές παραγώγους της βρίσκονται (ή μεταφέρονται) στο αριστερό μέλος της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους. Για παράδειγμα, η εξίσωση (1.2.19) γράφεται συνήθως στη μορφή (1.2.1), την επαναλαμβάνουμε και αυτή

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.2.21)$$

Οπτικά μια τέτοια γραφή (εντελώς ανάλογα με ό,τι συνέβαινε και στις γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις) μας βοηθάει άμεσα να διαπιστώνουμε, αν η διαφορική αυτή εξίσωση είναι ομογενής ή όχι. Συγκεκριμένα η εξίσωση (1.2.21) δεν είναι ομογενής. Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι η εξής:

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.2.22)$$

Σ' αυτήν δεν υπάρχει ο όρος της κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x, t)$  στο δεξιό μέλος (αλλ' ούτε βέβαια και στο αριστερό, εκεί φυσικά θα εμφανιζόταν με μείον). Όταν δεν υπάρχει φόρτιση  $p(x, t)$ , οπότε η παρούσα διαφορική εξίσωση της συνήθους δοκού είναι ομογενής, δηλαδή  $p(x, t) \equiv 0$ , τότε μιλάμε για ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις της δοκού. Αντίθετα, όταν είναι μη ομογενής, με  $p(x, t) \neq 0$ , τότε μιλάμε για εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις της δοκού.

Μια ειδική περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων (χωρίς συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες για  $t = 0$  στο δυναμικό πρόβλημα κάμψεως της δοκού που εξετάζουμε) αποτελούν οι καλούμενες ιδιοταλαντώσεις. Στις ιδιοταλαντώσεις προφανώς δεν υπάρχει εξωτερική φόρτιση  $p(x, t)$ . Έτσι κι αλλιώς το πρόθεμα «ιδιο» στη λέξη ιδιοταλαντώσεις το αποκαλύπτει αυτό. Επίσης στις ιδιοταλαντώσεις δοκού δεν υπάρχουν συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες. Επομένως στο πρόβλημα των ιδιοταλαντώσεων δοκού δεν είναι γνωστές (δεν έχει έννοια να είναι!) η αρχική θέση  $f(x)$  και η αρχική ταχύτητα  $g(x)$  των σημείων της  $x$  την αρχική χρονική στιγμή, συνήθως τη στιγμή  $t = 0$ . (Στις ιδιοταλαντώσεις ενδιαφερόμαστε ουσιαστικά απλά για τους δυνατούς τρόπους ταλαντώσεως της δοκού.) Εντούτοις και στις ιδιοταλαντώσεις λαμβάνονται πλήρως υπόψη οι συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα της δοκού, συνήθως στα σημεία  $x = 0$  και  $x = L$ . Οι συνοριακές συνθήκες παίζουν ιδιαίτερα κρίσιμο ρόλο στις ιδιοταλαντώσεις δοκών, αλλά και στις ελεύθερες ταλαντώσεις και στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις γενικότερα. Επομένως με κανέναν τρόπο δεν επιτρέπεται να αγνοούνται ή, έστω, να μη λαμβάνονται απόλυτα σωστά υπόψη από τον Πολιτικό Μηχανικό.

Σημειώνουμε βέβαια ότι οι ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, όπως είναι η εξίσωση (1.2.22), είναι πολύ πιο εύκολο να λυθούν από τις μη ομογενείς, όπως είναι η εξίσωση (1.2.21), όταν χρησιμοποιούμε την κλασική μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Για το λόγο αυτό στα Κεφάλαια Β5 και Β6 παρακάτω θα εξετάσουμε πρώτα τις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με τη μέθοδο αυτή και στη συνέχεια (και σε μικρότερο

βαθμό μάλιστα) τις μη ομογενείς. Παρά ταύτα αναγνωρίζουμε πλήρως τη σπουδαιότητα και των μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και έχουμε την πρόθεση να αφιερώσουμε κάποιο χώρο και σ' αυτές ιδίως στα Κεφάλαια Β5 (στο τέλος) και Β6 (δοκοί, κλπ.).

Ας σημειωθεί παρενθετικά ότι η γραφή (1.2.19) αυτής της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους απέβλεπε βασικά στο να δείξει ότι στο δυναμικό πρόβλημα της δοκού πέρα από την κατανεμημένη φόρτιση  $p(x, t)$  η «ισορροπία» επιτυγχάνεται με την προσθήκη στη φόρτιση αυτή και της αδρανειακής κατανεμημένης δυνάμεως

$$p_I(x, t) = -\rho A a(x, t) = -\rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}. \quad (1.2.23)$$

(Ο δείκτης  $I$  στο σύμβολο  $p_I(x, t)$  προέρχεται από τη λέξη inertia, αδράνεια.) Στη σχέση αυτή (1.2.23) το γινόμενο  $\rho A$  δηλώνει βέβαια την ανά μονάδα μήκους μάζα της δοκού (συνήθης πυκνότητα  $\rho$  επί εμβαδόν  $A$  της διατομής  $S$  της δοκού). Επίσης η συνάρτηση  $a = a(x, t)$  δηλώνει την επιτάχυνση των σημείων της δοκού, εννοείται κατά τη διεύθυνση  $Oy$  της καμπτικής παραμορφώσεως της κάθετα στον άξονα  $Ox$  της δοκού και στο κατακόρυφο επίπεδο  $Oxy$ . Άρα

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}. \quad (1.2.24)$$

Συνεπώς με τον τρόπο γραφής (1.2.19) της εξισώσεως των καμπτικών ταλαντώσεων της δοκού ο Πολιτικός Μηχανικός κατανοεί καλύτερα τη μετάβαση από το στατικό πρόβλημα στο δυναμικό. Σημειώνεται ότι το στατικό πρόβλημα διέπεται από τη γνωστή συνήθη διαφορική εξίσωση

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = p(x), \quad 0 < x < L. \quad (1.2.25)$$

Εδώ απλά με  $v = v(x)$  υπάρχει ανεξαρτησία από το χρόνο  $t$  για το βέλος κάμψεως που σχηματίζει την ελαστική γραμμή της δοκού. Αντίθετα το δυναμικό πρόβλημα διέπεται από τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (1.2.19), την επαναλαμβάνουμε

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = p(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.2.26)$$

Επομένως η μετάβαση από το στατικό πρόβλημα στο δυναμικό στη συνήθη δοκό κατορθώθηκε απλά (α) με την ένδειξη ότι τώρα  $v = v(x, t)$  για το βέλος κάμψεως  $v$  (όχι πλέον  $v = v(x)$ , κάτι που ισχύει μόνο στο στατικό πρόβλημα) και (β) με την ένδειξη  $p(x, t)$  αντί  $p(x)$  (κάτι που είναι όμως δευτερεύον) για την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p$ . Το σημαντικότερο, το κύριο είναι η προσθήκη στο δεξιό μέλος της στατικής εξισώσεως (1.2.25) της αδρανειακής κατανεμημένης δυνάμεως  $p_I(x, t)$ . Αυτή δίνεται από τη σχέση (1.2.23) με πρόσημο πλην μάλιστα, επειδή είναι αδρανειακή δύναμη! Άρα τελικά στο δεξιό μέλος εμφανίζεται η συνολική κατανεμημένη φόρτιση

$$p_0(x, t) = p(x, t) + p_I(x, t) = p(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2}. \quad (1.2.27)$$

(Προσοχή στο πρόσημο πλην της εκφράσεως (1.2.23) της αδρανειακής δυνάμεως  $p_I(x, t)$ , είναι πλην όχι συν!) Φυσικά η πιο πάνω έκφραση (1.2.23) της κατανεμημένης αδρανειακής δυνάμεως  $p_I(x, t)$  οφείλεται απλά στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα και δηλώνει το γινόμενο μάζας επί επιτάχυνση (επαναλαμβάνεται με πρόσημο πλην σε αδρανειακές δυνάμεις). Ειδικά εδώ πρόκειται για κατανεμημένη μάζα, δηλαδή για μάζα ανά μονάδα μήκους της δοκού (γραμμική πυκνότητα  $\rho A$ ).

Τελειώνοντας σημειώνουμε ότι οι μη ομογενείς όροι στις μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους δηλώνουν συνήθως κάποια είσοδο, κάποια εξωτερική διέγερση στο μηχανικό σύστημα που εξετάζουμε. Παραδείγματος χάρη, στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκού ο όρος  $p(x, t)$  στη μη ομογενή εξίσωση (1.2.21) δηλώνει την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση (εξωτερική δύναμη σε N/m ή σε kN/m) ανά μονάδα μήκους της δοκού. Επομένως μιλάμε για εξαναγκασμένες

καμπτικές ταλαντώσεις. Εάν ο όρος αυτός  $p(x, t)$  λείπει, όπως συμβαίνει στην αντίστοιχη ομογενή εξίσωση (1.2.22), τότε μιλάμε για ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις. Σε περίπτωση απουσίας αρχικών συνθηκών και εξετάζοντας μεμονωμένα κάθε δυνατό τρόπο ταλαντώσεως της δοκού, μιλάμε για καμπτικές ιδιοταλαντώσεις. Με υπέρθεση (επαλληλία) ιδιοταλαντώσεων και λαμβάνοντας υπόψη και τις αρχικές συνθήκες, οδηγούμαστε στη λύση ενός προβλήματος ελεύθερων καμπτικών ταλαντώσεων στην ίδια δοκό. Ανάλογα ισχύουν και για τις αξονικές ταλαντώσεις (όπως και για τις στρεπτικές ταλαντώσεις). Θα μελετήσουμε λεπτομερώς τα θέματα αυτά στο Κεφάλαιο Β6.

### **B1.2.5. Αριθμός ανεξάρτητων μεταβλητών**

Ένας ακόμη χαρακτηρισμός μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (είτε γραμμικής είτε μη γραμμικής) αφορά στον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών της. Για παράδειγμα, η εξίσωση των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού (1.2.1), δηλαδή η εξίσωση

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad (1.2.28)$$

έχει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τη θέση κατά μήκος της δοκού  $x$  (τη χωρική μεταβλητή) και το χρόνο  $t$  (τη χρονική μεταβλητή). Αντίθετα η τριδιάστατη εξίσωση του Laplace (1.2.2), δηλαδή η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2.29)$$

έχει τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές: τις  $x, y$  και  $z$ . Οι τρεις αυτές ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες, αφορούν στη θέση, είναι δηλαδή χωρικές μεταβλητές. Εδώ υπάρχει ανεξαρτησία από το χρόνο  $t$ .

Συνήθως ο αριθμός των ανεξάρτητων μεταβλητών που παρουσιάζονται σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους του Πολιτικού Μηχανικού δεν υπερβαίνει τις τέσσερις: θέση (με τρεις το πολύ ανεξάρτητες μεταβλητές) και χρόνος (με μία ανεξάρτητη μεταβλητή). Βέβαια συχνά μία ή δύο από αυτές λείπουν. Τούτο συμβαίνει σε μονοδιάστατα και διδιάστατα δυναμικά προβλήματα (με εξάρτηση από το χρόνο  $t$ ) καθώς και σε διδιάστατα και τριδιάστατα προβλήματα που αφορούν σε μόνιμες καταστάσεις (με ανεξαρτησία από το χρόνο  $t$ ). Προφανώς, όταν υπάρχει μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή σε μια διαφορική εξίσωση, τότε χρησιμοποιούμε γι' αυτήν το χαρακτηρισμό συνήθους διαφορική εξίσωση και όχι διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους.

Στις εξισώσεις (1.2.28) και (1.2.29) έχουμε βέβαια και από μία άγνωστη συνάρτηση (που καλείται επίσης και εξαρτημένη μεταβλητή): τη  $v$  και τη  $u$  αντίστοιχα. Αυτό συμβαίνει πάντοτε σε μεμονωμένες διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Πολλές φορές όμως παρουσιάζονται και συστήματα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και μάλιστα προερχόμενα κατευθείαν από θεμελιώδεις φυσικούς νόμους. Θα αναφερθούμε σύντομα σε ένα τέτοιο σύστημα σε επόμενη ενότητα του κεφαλαίου αυτού. Πιο λεπτομερώς θα αναφερθούμε σε τέτοια συστήματα στο Κεφάλαιο Β3, συγκεκριμένα στις Ενότητες του Β3.1 (που αφορά στη Μηχανική των Υλικών) καθώς και Β3.3 και Β3.4 (που αφορούν και τα δύο στη Ρευστομηχανική ή Μηχανική των Ρευστών).

## **B1.3. ΤΥΠΟΙ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ**

### **B1.3.1. Εξισώσεις υπερβολικού, παραβολικού και ελλειπτικού τύπου**

Ο τύπος μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως και με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές (υπερβολικός, παραβολικός ή ελλειπτικός τύπος, όπως θα τους ορίσουμε παρακάτω) αποτελεί έναν ακόμη, αλλ' ιδιαίτερα σημαντικό, χαρακτηρισμό μιας τέτοιας εξίσωσης. Τούτο συμβαίνει κυρίως, γιατί ο τύπος της εξίσωσης αυτής καθορίζει και τη μορφή των λύσεων της που διαφέρουν έντονα σε εξισώσεις διαφορετικού τύπου. Γι' αυτό και αφιερώνουμε ξεχωριστή ενότητα (και όχι απλά μια παράγραφο) στο χαρακτηρισμό αυτό αντί να τον

έχουμε ενσωματώσει στην προηγούμενη Ενότητα Β1.2.

Θεωρούμε και πάλι τη γενική γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (1.2.7) με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τις  $x$  και  $y$ . Η εξίσωση αυτή, την επαναλαμβάνουμε, έχει τη μορφή

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = S. \quad (1.3.1)$$

Η ίδια εξίσωση (1.3.1) είναι είτε με σταθερούς είτε με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές  $A = A(x, y)$ ,  $B = B(x, y)$ ,  $C = C(x, y)$ ,  $D = D(x, y)$ ,  $E = E(x, y)$  και  $F = F(x, y)$ . Επίσης το δεξιό μέλος της  $S = S(x, y)$ , εφόσον υπάρχει, μπορεί να είναι και αυτό σταθερά ή συνάρτηση των ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$  και  $y$ . Η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η  $u = u(x, y)$ .

Ειδικά, αποκλειστικά για τη γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (1.3.1) ορίζουμε τον τύπο της ανάλογα με τους τρεις συντελεστές  $A$ ,  $B$  και  $C$  των δευτέρων (μόνο των δευτέρων!) μερικών παραγώγων: ως προς  $x$ , ως προς  $y$  και της σχετικής μικτής μερικής παραγώγου αντίστοιχα. Πιο συγκεκριμένα ο τύπος της εξισώσεως (1.3.1) που αναφέραμε καθορίζεται αποκλειστικά από τη διακρίνουσα

$$\Delta = B^2 - 4AC. \quad (1.3.2)$$

Σημειώνεται ότι η διακρίνουσα αυτή  $\Delta$  μπορεί σε μερικές περιπτώσεις να εξαρτάται και από τις ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$  και  $y$ , δηλαδή να είναι  $\Delta = \Delta(x, y)$ . Για να είμαστε σαφείς, αυτό συμβαίνει, εάν η γραμμική εξίσωση (1.3.1) έχει μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές  $A$ ,  $B$  και  $C$  των δευτέρων μερικών παραγώγων της (τουλάχιστον ένα μη σταθερό συντελεστή). Ακόμη πιο συγκεκριμένα η γραμμική διαφορική εξίσωση (1.3.1) χαρακτηρίζεται σαν υπερβολικού, παραβολικού ή ελλειπτικού τύπου (απλούστερα σαν υπερβολική, παραβολική ή ελλειπτική αντίστοιχα), εφόσον η διακρίνουσά της  $\Delta$  είναι θετική, μηδέν ή αρνητική αντίστοιχα. Επομένως:

$$\begin{aligned} \text{Εάν } \Delta = B^2 - 4AC > 0, & \quad \text{τότε η εξίσωση (1.3.1) καλείται υπερβολικού τύπου.} \\ \text{Εάν } \Delta = B^2 - 4AC = 0, & \quad \text{τότε η εξίσωση (1.3.1) καλείται παραβολικού τύπου.} \\ \text{Εάν } \Delta = B^2 - 4AC < 0, & \quad \text{τότε η εξίσωση (1.3.1) καλείται ελλειπτικού τύπου.} \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Οι ορισμοί αυτοί αντιστοιχούν στους ορισμούς των κωνικών τομών: υπερβολής, παραβολής και ελλείψεως αντίστοιχα στην Αναλυτική Γεωμετρία στο επίπεδο  $Oxy$ . Φυσικά δεν είναι αναγκαίο οι ανεξάρτητες μεταβλητές να είναι οι  $x$  και  $y$ . Θα μπορούσαν να ήσαν και άλλες, π.χ. η θέση  $x$  και ο χρόνος  $t$ . Ανάλογα και για την εξαρτημένη μεταβλητή  $u$ . Θα μπορούσε να είναι η  $v$ , η  $w$ , κλπ.

### **B1.3.2. Τρία κλασικά παραδείγματα**

Τα τρία κλασικά σχετικά παραδείγματα αφορούν:

#### **(α) Στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.3.4)$$

η οποία είναι ομογενής, και στην αντίστοιχη **διδιάστατη εξίσωση του Poisson**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (1.3.5)$$

Η εξίσωση του Poisson (αντίθετα με την εξίσωση του Laplace) είναι μη ομογενής. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της παρουσίας της γνωστής συναρτήσεως  $f(x, y)$  στο δεξιό μέλος της, η οποία όμως δεν επηρεάζει τον τύπο της. Εν πάση περιπτώσει, οι δύο αυτές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους είναι ελλειπτικού τύπου, επειδή και στις δύο έχουμε

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad \text{οπότε } \Delta = B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -4 < 0. \quad (1.3.6)$$

Αυτό διαπιστώνεται άμεσα στις παρούσες δύο απλές περιπτώσεις της γενικής γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως (1.3.1) βάσει και των ορισμών (1.3.3).

**(β) Στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση)**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.3.7}$$

με το  $c$  γνωστή θετική σταθερά: την απόλυτο τιμή της ταχύτητας διαδόσεως του κύματος. Η άγνωστη συνάρτηση είναι η  $u = u(x, t)$  με  $x$  τη θέση και  $t$  το χρόνο. (Τώρα έχουμε τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$  και  $t$  αντί των  $x$  και  $y$  στην αρχική εξίσωση (1.3.1).) Η εξίσωση αυτή (1.3.7) μπορεί να γραφεί και στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή της

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{1.3.8}$$

Η μορφή αυτή μας θυμίζει καλύτερα τη γενική γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (1.3.1). Στην εξίσωση του κύματος (1.3.7) ή, καλύτερα, (1.3.8) ισχύουν προφανώς τα εξής:

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{c^2}, \quad \text{οπότε} \quad \Delta = B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{c^2}\right) = \frac{4}{c^2} > 0. \tag{1.3.9}$$

Άρα πάλι βάσει των ορισμών (1.3.3) η διαφορική εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση) είναι υπερβολικού τύπου.

**(γ) Στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως**, η οποία αναφέρεται και στη μονοδιάστατη μετάδοση θερμότητας

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.3.10}$$

με το  $a$  γνωστή θετική σταθερά. Την ξαναγράφουμε μεταφέροντας πάλι το δεξιό μέλος στο αριστερό στη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1.3.11}$$

απλά για έναν κάπως καλύτερο συσχετισμό της με τη γενική γραμμική διαφορική εξίσωση (1.3.1). Παρατηρούμε ότι η χρονική μερική παράγωγος (ως προς το χρόνο  $t$ ) είναι μερική παράγωγος πρώτης τάξεως. Άρα δεν επηρεάζει καθόλου τον τύπο της εξίσωσης της διαχύσεως (1.3.10) και, ισοδύναμα, (1.3.11). Πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους παραβολικού τύπου. Τούτο συμβαίνει, επειδή τώρα

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \text{οπότε} \quad \Delta = B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0. \tag{1.3.12}$$

Σημειώνουμε ότι έχουμε επίσης  $E = -1/a^2$ , αλλ' ο συντελεστής αυτός  $E$  δεν επεμβαίνει καθόλου στους ορισμούς (1.3.3) του τύπου της γενικής γραμμικής διαφορικής εξίσωσης (1.3.1), εν προκειμένω της εξίσωσης της διαχύσεως (1.3.10).

**B1.3.3. Μεταβαλλόμενος τύπος της διαφορικής εξίσωσης**

Ασφαλώς, όπως ήδη αναφέρθηκε, η διακρίνουσα  $\Delta$  μπορεί να εξαρτάται από τη μία ή και από τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, π.χ. τις  $x$  και  $y$ . Τότε η διαφορική μας εξίσωση (1.3.1) θα είναι (α) υπερβολικού τύπου στην περιοχή (ή τις περιοχές) του επιπέδου  $Oxy$  όπου  $\Delta = \Delta(x, y) > 0$ , (β) παραβολικού τύπου στην περιοχή (συνήθως την καμπύλη ή τις καμπύλες) του ίδιου επιπέδου  $Oxy$  όπου  $\Delta = \Delta(x, y) = 0$  και, τέλος, (γ) ελλειπτικού τύπου στην περιοχή (ή τις περιοχές) του ίδιου επιπέδου  $Oxy$  όπου  $\Delta = \Delta(x, y) < 0$ . Αυτά είναι εύλογα, αλλά συνήθως ο Πολιτικός Μηχανικός συναντά γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως της μορφής

(1.3.1) με σταθερούς συντελεστές. Προφανώς τότε ο τύπος της εξίσωσης (1.3.1) (υπερβολικός, παραβολικός ή ελλειπτικός) είναι ο ίδιος σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της στο επίπεδο  $Oxy$ .

Παραδείγματος χάρη, η γνωστή εξίσωση του Tricomi

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3.13)$$

έχει

$$A = y, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad \text{οπότε} \quad \Delta = B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot y \cdot 1 = -4y. \quad (1.3.14)$$

Συνεπώς η εξίσωση του Tricomi είναι (α) ελλειπτικού τύπου (απλούστερα ελλειπτική) για  $y > 0$  (άνω ημιεπίπεδο, όπου  $\Delta < 0$  βάσει του πιο πάνω αποτελέσματος (1.3.14) για τη διακρίνουσα αυτή  $\Delta$ ), (β) παραβολικού τύπου (απλούστερα παραβολική) για  $y = 0$  (άξονας  $Ox$ , όπου  $\Delta = 0$ ) και (γ) υπερβολικού τύπου (απλούστερα υπερβολική) για  $y < 0$  (κάτω ημιεπίπεδο, όπου  $\Delta > 0$ ).

Σε μια εντελώς διαφορετική περίπτωση θεωρούμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δευτέρας επίσης τάξεως

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.3.15)$$

Η εξίσωση αυτή απαντάται σε ένα πρόβλημα μόνιμης (σταθερής) διδιάστατης ροής συμπιεστού (αλλά χωρίς συνεκτικότητα, ιξώδες) ρευστού με σταθερή ταχύτητα  $\mathbf{V}_0 = V_0 \mathbf{i}$  (με  $V_0 > 0$ ) κατά τον άξονα  $Ox$ . Η ταχύτητα αυτή  $\mathbf{V}_0$  θεωρείται ότι μεταβάλλεται ελαφρά κατά  $\mathbf{v}$  (και παίρνει την τελική έκφρασή της  $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{v}$ ) λόγω της παρουσίας ενός μικρού (και με ήπια επιρροή στη ροή) εμποδίου στη διδιάστατη αυτή ροή. Το σύμβολο  $M$  δηλώνει εδώ τον αριθμό Mach της ροής (που στη Ρευστομηχανική συμβολίζεται συχνότερα με  $Ma$  από το όνομα Mach). Ο αριθμός αυτός ορίζεται στη Ρευστομηχανική σαν το πηλίκο του μέτρου  $V_0$  της βασικής ταχύτητας  $\mathbf{V}_0$  του ρευστού (εδώ κατά τον άξονα  $Ox$ ) δια της ταχύτητας  $V_s$  του ήχου στο ρευστό, δηλαδή

$$M = \frac{V_0}{V_s}. \quad (1.3.16)$$

Με βάση τον ορισμό αυτό η ροή του ρευστού χαρακτηρίζεται (α) σαν υπερηχητική αν  $M > 1$  (δηλαδή  $V_0 > V_s$ ), (β) σαν ηχητική αν  $M = 1$  (δηλαδή  $V_0 = V_s$ ) και (γ) σαν υποηχητική αν  $M < 1$  (δηλαδή  $V_0 < V_s$ ).

Παραπέρα η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή)  $\Phi = \Phi(x, y)$  στην ίδια πιο πάνω εξίσωση (1.3.15) παριστάνει το δυναμικό ταχύτητας της ροής. Από το δυναμικό αυτό προκύπτει (σαν κλίση ή βαθμίδα: grad) η «διορθωση»  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y)$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}_0$  μέσω του τύπου

$$\mathbf{v}(x, y) = \text{grad } \Phi(x, y) \equiv \nabla \Phi(x, y) \quad \iff \quad v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \text{και} \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (1.3.17)$$

με  $v_x = v_x(x, y)$  και  $v_y = v_y(x, y)$  της συνιστώσες της «διορθώσεως» αυτής  $\mathbf{v}$ . Σημειώνεται επίσης ότι η εξίσωση (1.3.15) είναι προσεγγιστική (αναλυτικότερα προήλθε από γραμμικοποίηση) και ισχύει μόνο για μικρές «διορθώσεις»  $\mathbf{v}$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}_0$  που οφείλονται σε ελαφρό (ήπιο) εμπόδιο στη ροή.

Αυτό που πρέπει να τονισθεί στην περίπτωση της εξίσωσης (1.3.15) είναι ότι με τον αριθμό Mach  $M$  (ή  $Ma$ ) να υποτίθεται σταθερός, δηλαδή με την εξίσωση αυτή να έχει σταθερούς συντελεστές:  $1 - M^2$  και  $1$ , ο αριθμός αυτός Mach χαρακτηρίζει (ανάλογα με τις τιμές που παίρνει) τον τύπο της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως (1.3.15). Συγκεκριμένα για την εξίσωση αυτή ισχύει

$$A = 1 - M^2, \quad B = 0, \quad C = 1, \quad \text{οπότε} \quad \Delta = B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot (1 - M^2) \cdot 1 = 4(M^2 - 1). \quad (1.3.18)$$

Σύμφωνα με το αποτέλεσμα αυτό για τη διακρίνουσα  $\Delta$  στο παρόν πρόβλημα ροής για μεν υπερηχητικές ροές (με  $M > 1$ , ισοδύναμα με  $V_0 > V_s$  λόγω του πιο πάνω ορισμού (1.3.16) του

αριθμού Mach  $M$  ή  $Ma$ ), η εξίσωση (1.3.15) είναι υπερβολικού τύπου, γιατί, προφανώς, τότε  $\Delta > 0$ . Αντίθετα, για υποηχητικές ροές (με  $M < 1$ , ισοδύναμα με  $V_0 < V_s$ ) η ίδια εξίσωση (1.3.15) είναι ελλειπτικού τύπου, επειδή τότε  $\Delta < 0$ . Στην ενδιάμεση περίπτωση της ηχητικής ροής (με  $M = 1$ , ισοδύναμα με  $V_0 = V_s$ ) η ίδια εξίσωση (1.3.15) είναι παραβολικού τύπου, καθόσον στην περίπτωση αυτή  $\Delta = 0$ . Δυστυχώς όμως λόγω του προσεγγιστικού χαρακτήρα της εξισώσεως αυτής (1.3.15) που ήδη αναφέρθηκε, η ειδική αυτή περίπτωση  $M = 1$  και ο σχετικός χαρακτηρισμός της εξισώσεως (1.3.15) σαν παραβολικού τύπου πρέπει να αποφεύγονται ιδίως στη Ρευστομηχανική.

### B1.3.4. Γενίκευση των ορισμών τύπου

Ας σημειωθεί τέλος ότι οι πιο πάνω χαρακτηρισμοί (1.3.3) του τύπου: (α) υπερβολικός, (β) παραβολικός ή (γ) ελλειπτικός μιας γραμμικής διαφορικής εξισώσεως δευτέρας τάξεως της μορφής (1.3.1) επεκτείνονται κατάλληλα και σε περισσότερες ανεξάρτητες μεταβλητές, όχι όμως σε μεγαλύτερη της δευτέρας τάξεως. Για παράδειγμα, η τριδιάστατη εξίσωση του Laplace (1.1.17) ή (1.2.29) χαρακτηρίζεται και αυτή (όπως και η διδιάστατη ανάλογή της (1.1.16) ή (1.3.4)) σαν ελλειπτικού τύπου (ή, απλούστερα, ελλειπτική). Ο χαρακτηρισμός αυτός δίνεται, παρόλο που η εξίσωση αυτή έχει τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές: τις  $x, y$  και  $z$ . Το ίδιο ισχύει και για την εξίσωση του Poisson (1.3.5).

Ανάλογα ισχύουν και για τις μονοδιάστατες εξισώσεις του κύματος (κυματική εξίσωση) (1.3.7) (που είναι υπερβολικού τύπου) και της διαχύσεως (1.3.10) (που είναι παραβολικού τύπου). Συγκεκριμένα και οι εξισώσεις αυτές διατηρούν τους ίδιους ακριβώς χαρακτηρισμούς ως προς τον τύπο τους και στις διδιάστατες και στις τριδιάστατες μορφές τους, τώρα όμως με δύο ή τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές θέσεως αντίστοιχα: σε Καρτεσιανές συντεταγμένες τις  $x$  και  $y$  (στις διδιάστατες μορφές τους) ή τις  $x, y$  και  $z$  (στις τριδιάστατες μορφές τους) πλέον τον χρόνο  $t$ . Παραμένουν δηλαδή οι αρχικοί χαρακτηρισμοί τους από τις μονοδιάστατες μορφές τους, εκεί με δύο μόνο ανεξάρτητες μεταβλητές: τις  $x$  και  $t$ . Δε θα επεκταθούμε όμως σ' αυτό το διδακτικό βιβλίο σε περισσότερες από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές όσον αφορά στον τύπο μιας γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως.

## B1.4. ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΥΠΕΡΘΕΣΕΩΣ (Ή ΕΠΑΛΛΗΛΙΑΣ) ΛΥΣΕΩΝ

### B1.4.1. Διατύπωση της αρχής της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων

Μόνο για τις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (είτε συνήθεις είτε με μερικές παραγώγους και ακόμη είτε με σταθερούς είτε μη σταθερούς, μεταβλητούς συντελεστές) ισχύει η αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων. Η αρχή αυτή δηλώνει ότι

• **Αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων:** Θεωρούμε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση είτε συνήθη είτε με μερικές παραγώγους, επίσης είτε με σταθερούς είτε με μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές και οποιασδήποτε τάξεως. Εάν οι  $n$  διαφορετικές συναρτήσεις  $u_1, u_2, \dots, u_n$  είναι λύσεις της ομογενούς εξισώσεως αυτής, τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους

$$u = \sum_{k=1}^n c_k u_k \tag{1.4.1}$$

(με τα  $c_1, c_2, \dots, c_n$  αυθαίρετες σταθερές) είναι επίσης λύση της ίδιας διαφορικής εξισώσεως.

Έχουμε εύκολα αποδείξει και χρησιμοποιήσει την αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων στις ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Ισχύει ακριβώς το ίδιο και για τις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. (Όχι για τις μη ομογενείς βέβαια!)

**B1.4.2. Απόδειξη στην εξίσωση των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού**

Σαν παράδειγμα, θα αποδείξουμε την ισχύ της αρχής της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων στη διαφορική εξίσωση των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων (και των ελεύθερων ταλαντώσεων γενικότερα) συνήθους δοκού μήκους  $L$  (1.2.22) για δύο διαφορετικές λύσεις της  $v_1 = v_1(x, t)$  και  $v_2 = v_2(x, t)$ . Η τόσο βασική αυτή εξίσωση για τον Πολιτικό Μηχανικό στη Δυναμική των Κατασκευών έχει τη μορφή

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.4.2)$$

Προφανώς είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Είναι επίσης τετάρτης τάξεως, με σταθερούς συντελεστές:  $EI$ , τη δυσκαμψία της δοκού, και  $\rho A$ , τη γραμμική πυκνότητα της δοκού (που είναι βέβαια ίση με το γινόμενο της συνήθους πυκνότητας του υλικού της  $\rho$  επί το εμβαδόν της διατομής της  $A$ ). Έχει ακόμη δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τις  $x$  και  $t$ . Εντούτοις όλες οι τελευταίες αυτές ιδιότητες δε μας αφορούν ιδιαίτερα. Μας αφορά απλά ότι είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση. Θα αποδείξουμε (πολύ εύκολα μάλιστα) ότι εάν οι συναρτήσεις  $v_1 = v_1(x, t)$  και  $v_2 = v_2(x, t)$  είναι λύσεις της, τότε και ο γραμμικός συνδυασμός τους

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^2 c_k v_k(x, t) = c_1 v_1(x, t) + c_2 v_2(x, t) \quad (1.4.3)$$

(με τα  $c_1$  και  $c_2$  αυθαίρετες σταθερές) είναι και αυτός λύση της ίδιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (1.4.2).

**Απόδειξη:** Αφού εξ υποθέσεως οι συναρτήσεις  $v_1(x, t)$  και  $v_2(x, t)$  είναι λύσεις της διαφορικής εξισώσεως των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού (1.4.2), θα ισχύει για τη  $v_1(x, t)$

$$EI \frac{\partial^4 v_1(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v_1(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.4.4)$$

Το ίδιο βέβαια θα ισχύει και για τη συνάρτηση-λύση  $v_2(x, t)$ . Άρα

$$EI \frac{\partial^4 v_2(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v_2(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.4.5)$$

Αυτές οι δύο σχέσεις (1.4.4) και (1.4.5) αποτελούν τις υποθέσεις μας. Τώρα πρέπει να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $v = v(x, t)$  που δίνεται από το γραμμικό συνδυασμό (1.4.3) είναι και αυτή λύση της ίδιας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους (1.4.2). Χρειάζεται δηλαδή να αποδειχθεί ότι για το γραμμικό αυτό συνδυασμό (1.4.3) και μάλιστα για οποιοσδήποτε σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  σ' αυτόν ισχύει

$$EI \frac{\partial^4 [c_1 v_1(x, t) + c_2 v_2(x, t)]}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 [c_1 v_1(x, t) + c_2 v_2(x, t)]}{\partial t^2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.4.6)$$

Γνωρίζουμε όμως από το διαφορικό λογισμό (τις παραγώγους) ότι η παράγωγος (συνήθης ή μερική ως προς συγκεκριμένη μεταβλητή ή μεταβλητές) ενός γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των σχετικών συνήθων ή μερικών παραγώγων. Επομένως για τις παραγώγους στη σχέση (1.4.6): αυτή της τετάρτης τάξεως (ως προς τη μεταβλητή θέσεως ή, καλύτερα, χωρική μεταβλητή  $x$ ) και εκείνη της δευτέρας τάξεως (ως προς τη μεταβλητή χρόνου ή, καλύτερα, χρονική μεταβλητή  $t$ ) θα ισχύουν οι τύποι

$$\frac{\partial^4 [c_1 v_1(x, t) + c_2 v_2(x, t)]}{\partial x^4} = c_1 \frac{\partial^4 v_1(x, t)}{\partial x^4} + c_2 \frac{\partial^4 v_2(x, t)}{\partial x^4}, \quad (1.4.7)$$

$$\frac{\partial^2 [c_1 v_1(x, t) + c_2 v_2(x, t)]}{\partial t^2} = c_1 \frac{\partial^2 v_1(x, t)}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial^2 v_2(x, t)}{\partial t^2}. \quad (1.4.8)$$



Με βάση τους τύπους αυτούς παραγωγίσεως η προς απόδειξη σχέση (1.4.6) παίρνει τη μορφή

$$EI \left[ c_1 \frac{\partial^4 v_1(x, t)}{\partial x^4} + c_2 \frac{\partial^4 v_2(x, t)}{\partial x^4} \right] + \rho A \left[ c_1 \frac{\partial^2 v_1(x, t)}{\partial t^2} + c_2 \frac{\partial^2 v_2(x, t)}{\partial t^2} \right] = 0. \quad (1.4.9)$$

Η ευθύς παραπάνω προς απόδειξη σχέση γράφεται άμεσα (απλά με αναδιάταξη των όρων στο αριστερό της μέλος) στη μορφή

$$c_1 \left[ EI \frac{\partial^4 v_1(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v_1(x, t)}{\partial t^2} \right] + c_2 \left[ EI \frac{\partial^4 v_2(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v_2(x, t)}{\partial t^2} \right] = 0. \quad (1.4.10)$$

Αλλά και οι δύο όροι μέσα στις αγκύλες είναι μηδενικοί, γιατί οι συναρτήσεις  $v_1(x, t)$  και  $v_2(x, t)$  υπετέθησαν και οι δύο από την αρχή ότι είναι λύσεις της εξισώσεως (1.4.2). Τούτο δηλώθηκε και ρητά με τις σχέσεις (1.4.4) και (1.4.5) αντίστοιχα. Άρα και οι δύο όροι μέσα στις αγκύλες της προς απόδειξη σχέσεως (1.4.10) είναι μηδενικοί εκ ταυτότητας, επειδή το ίδιο ακριβώς συμβαίνει για τις σχέσεις (1.4.4) και (1.4.5): ισχύουν εκ ταυτότητας. Επομένως η προς απόδειξη σχέση (1.4.10) καταλήγει στην προφανή ταυτότητα

$$0 = 0. \quad (1.4.11)$$

Η σχέση (ταυτότητα) αυτή δείχνει ότι και η σχέση (1.4.10) ισχύει εκ ταυτότητας. Επομένως αποδείχθηκε ότι ο γραμμικός συνδυασμός  $v = v(x, t)$  που ορίστηκε στη σχέση (1.4.3) είναι λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (1.4.2) των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού. Έχει γίνει βέβαια ήδη η υπόθεση ότι και οι δύο συναρτήσεις  $v_1(x, t)$  και  $v_2(x, t)$  στο γραμμικό αυτό συνδυασμό (1.4.3) είναι λύσεις της ίδιας εξισώσεως (1.4.2) (σχέσεις (1.4.4) και (1.4.5)).

Στο παράδειγμα αυτό αποδείξαμε την αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων σε ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς στην ειδική περίπτωση της εξισώσεως (1.4.2) των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού και με δύο μόνο συναρτήσεις-λύσεις ( $n = 2$ ) στο γραμμικό συνδυασμό (1.4.3). Η γενίκευση της αποδείξεως αυτής σε περισσότερες, γενικά σε  $n$  (όχι μόνο σε δύο), συναρτήσεις-λύσεις στο γραμμικό συνδυασμό (1.4.3) είναι άμεση (με  $n$  αντί του 2). Δεν παρουσιάζει καμία επιπλέον ουσιαστική δυσκολία.

Με όμοιο τρόπο μπορεί να αποδειχθεί η αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων και σε οποιαδήποτε άλλη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση οποιασδήποτε τάξεως (η εξίσωση (1.4.2) ήταν τετάρτης τάξεως) με σταθερούς ή και με μη σταθερούς (με μεταβλητούς) συντελεστές. Η ίδια εξίσωση (1.4.2) ισχύει όμως μόνο με σταθερούς συντελεστές:  $EI$  (δυσκαμψία της δοκού) και  $\rho A$  (γραμμική πυκνότητα της δοκού).

### B1.4.3. Μια σημαντική γενίκευση

Η τόσο χρήσιμη αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων γενικεύεται και σε σειρές της μορφής

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k, \quad (1.4.12)$$

δηλαδή με άπειρους όρους (με  $n \rightarrow \infty$ ) στη σχέση (1.4.1). Φυσικά υποθέτουμε ότι όλες οι συναρτήσεις  $u_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) είναι λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως που εξετάζεται κάθε φορά. Στην περίπτωση όμως αυτή (της σειράς (1.4.12)) πρέπει να αποδειχθεί πρώτα η σύγκλιση της σειράς σε συγκεκριμένη συνάρτηση  $u$ . Πρέπει επίσης να αποδειχθεί και η δυνατότητα μερικών παραγωγίσεων αυτής της συναρτήσεως  $u$  μέσω των αντίστοιχων παραγωγίσεων των συναρτήσεων  $u_k$  μία προς μία στη σειρά (1.4.12). Βέβαια, εννοείται, η απόδειξη αυτή χρειάζεται μόνο σε όσο βαθμό οι μερικές παραγωγίσεις είναι απαραίτητες στη διαφορική εξίσωση που εξετάζεται. Η αναγκαιότητα των μερικών παραγωγίσεων που απαιτούνται σημαίνει ασφαλώς ότι πρέπει να αποδειχθεί και η δυνατότητα εναλλαγής των συμβόλων της μερικής παραγωγίσεως  $\partial$  και του αθροίσματος απείρων όρων  $\sum_{k=1}^{\infty}$  στις αναγκαίες μερικές παραγωγίσεις της σειράς (1.4.12).

Γενικά πάντως δεχόμαστε, παραλείποντας τη μαθηματική απόδειξη, ότι οι σειρές της μορφής (1.4.12) που θα συναντήσουμε συγκλίνουν σε συνάρτηση  $u$  και μάλιστα μπορούν να παραγωγι-σθούν μερικά όρο προς όρο. Παραδείγματος χάρη, για την τέταρτη μερική παράγωγο ως προς τη μεταβλητή  $x$  (που παρουσιάζεται στην εξίσωση των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού (1.4.2)) δεχόμαστε ότι ισχύει

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\partial^4 u_k}{\partial x^4}. \quad (1.4.13)$$

Ανάλογα και για κάθε άλλη μερική παράγωγο (είτε ως προς μια μόνο μεταβλητή είτε μικτή μερική παράγωγο). Αυτά απλά τα δεχόμαστε ότι ισχύουν και συνήθως πραγματικά ισχύουν. Δεν ισχύουν όμως πάντοτε! Αντίθετα, όπως ήδη είδαμε, η αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) πεπερασμέ-νου αριθμού  $n$  λύσεων (1.4.1) ισχύει πάντοτε για ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις είτε συνήθεις είτε με μερικές παραγώγους.

### B1.5. ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΟΥΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΙΣΩΣΕΩΣ

Θεωρούμε τώρα μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, π.χ. την εξίσωση

$$\mathcal{A}u = f. \quad (1.5.1)$$

Το καλλιγραφικό σύμβολο  $\mathcal{A}$  δηλώνει το συνολικό γραμμικό διαφορικό τελεστή (εδώ με μερικές παραγώγους βέβαια) στο αριστερό μέλος που εφαρμόζεται στην άγνωστη συνάρτηση  $u$  (των ανεξάρτητων μεταβλητών, π.χ. των  $x, y, z, t$ , κλπ.). Επίσης το σύμβολο  $f$  δηλώνει μια γνωστή συνάρτηση (επίσης των ανεξάρτητων μεταβλητών).

Σαν παράδειγμα θεωρούμε και πάλι τη γνωστή διαφορική εξίσωση των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού (1.1.13), δηλαδή την εξίσωση

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.5.2)$$

Στην εξίσωση αυτή ο γραμμικός διαφορικός τελεστής  $\mathcal{A}$  της γενικής εξισώσεως (1.5.1) είναι τε-τάρτης τάξεως, όπως ακριβώς και η ίδια η διαφορική εξίσωση (1.5.2). Ο τελεστής αυτός  $\mathcal{A}$  έχει τώρα προφανώς τη μορφή

$$\mathcal{A} = EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (1.5.3)$$

Οι ποσότητες  $EI$  (η δυσκαμψία της δοκού) και  $\rho A$  (η γραμμική πυκνότητα της δοκού) υποτίθενται ότι είναι γνωστές σταθερές. Αυτός ο γραμμικός διαφορικός τελεστής  $\mathcal{A}$  εφαρμόζεται στην άγνωστη συνάρτηση, εδώ στο βέλος κάμψεως της δοκού  $v = v(x, t)$ . Η χρήση του γραμμικού διαφορικού τελεστή  $\mathcal{A}$  στη γενική εξίσωση (1.5.1) αποτελεί απλά ένα μάλλον χρήσιμο συμβολισμό για γενικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις.

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε βρει τη γενική λύση  $v_h = v_h(x, t)$  της ομογενούς διαφορικής εξισώ-σεως (με  $p(x, t) \equiv 0$ ) που είναι αντίστοιχη της μη ομογενούς εξισώσεως (1.5.2). Για παράδειγμα, η λύση αυτή  $v_h = v_h(x, t)$  μπορεί να είναι γνωστή σε μορφή ανάλογη της σειράς (1.4.12) με την υπέρ-θεση (επαλληλία) μερικών λύσεων που δηλώνονται εδώ σαν  $v_k = v_k(x, t)$ . Έστω επίσης ότι έχουμε προσδιορίσει και μια μερική (ή ειδική) λύση  $v_p = v_p(x, t)$  της μη ομογενούς (της αρχικής) διαφορικής εξισώσεως (1.5.2) (με  $p(x, t) \neq 0$ ). Επομένως οι δύο αυτές λύσεις  $v_h = v_h(x, t)$  και  $v_p = v_p(x, t)$  θα επαληθεύουν αντίστοιχα τις εξής δύο γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους:

$$EI \frac{\partial^4 v_h}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v_h}{\partial t^2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad (1.5.4)$$

$$EI \frac{\partial^4 v_p}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v_p}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.5.5)$$

Προσθέτουμε τώρα κατά μέλη αυτές τις δύο εξισώσεις και λαμβάνουμε υπόψη τη γραμμική ιδιότητα στην παραγωγή παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Διαπιστώνουμε έτσι ότι η συνάρτηση

$$v_t = v_h + v_p \quad \text{σαφέστερα} \quad v_t(x, t) = v_h(x, t) + v_p(x, t) \quad (1.5.6)$$

επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$EI \frac{\partial^4 v_t}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v_t}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.5.7)$$

Άρα η συνάρτηση αυτή  $v_t = v_h + v_p$ , δηλαδή το άθροισμα της γενικής λύσεως  $v_h = v_h(x, t)$  της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς συν μια μερική (ή ειδική) λύση  $v_p = v_p(x, t)$  της αντίστοιχης μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς, είναι λύση της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς. (Ανάλογα ίσχυαν βέβαια και στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, όπως γνωρίζουμε από την Ενότητα A5.7 στο Μέρος A των διδακτικών αυτών βιβλίων.) Φυσικά αυτή η παρατήρηση έχει γενική ισχύ για μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις και δεν περιορίζεται στο παρόν παράδειγμα.

Πιο επίσημα τώρα θεωρούμε τη γενική λύση  $v_g$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς (1.5.2) καθώς και μια μερική λύση της  $v_p$ . Προφανώς θα έχουμε

$$EI \frac{\partial^4 v_g}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L, \quad (1.5.8)$$

$$EI \frac{\partial^4 v_p}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v_p}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.5.9)$$

(Η δεύτερη σχέση είναι η (1.5.5).) Αφαιρούμε τις δύο αυτές σχέσεις κατά μέλη, οπότε στο δεξιό μέλος  $p(x, t) - p(x, t) = 0$ . Λαμβάνουμε επίσης υπόψη ότι η παράγωγος (εδώ μερική παράγωγος) διαφοράς δύο συναρτήσεων ισούται με τη διαφορά των αντίστοιχων παραγώγων. Έτσι προκύπτει

$$EI \frac{\partial^4 (v_g - v_p)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 (v_g - v_p)}{\partial t^2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (1.5.10)$$

Επομένως η διαφορά  $v_g - v_p$  είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς, εδώ με  $p(x, t) = 0$ . Άρα η γενικότερη μορφή της διαφοράς  $v_g - v_p$  είναι η γενική λύση  $v_h$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης που περιλαμβάνει και αυθαίρετες συναρτήσεις σε αριθμό ίσες με την τάξη  $n$  της διαφορικής εξίσωσης. Κατά συνέπεια έχουμε

$$v_g - v_p = v_h \quad \text{και τελικά} \quad v_g = v_h + v_p. \quad (1.5.11)$$

Προφανώς οι συλλογισμοί μας αυτοί είναι γενικής ισχύος για τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς (1.5.1) και δεν περιορίζονται στην παρούσα εξίσωση (1.5.2) της δοκού.

## B1.6. ΑΡΧΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

Γνωρίζουμε ήδη από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πως πολύ συχνά μια τέτοια εξίσωση συνοδεύεται και από αρχικές ή συνοριακές συνθήκες. Τότε λέμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών ή ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών αντίστοιχα. Σε τέτοια προβλήματα έχουμε ήδη αναφερθεί στην Ενότητα A1.9 του Μέρους A για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις: Παράγραφος A1.9.1 για τα προβλήματα αρχικών τιμών και Παράγραφος A1.9.2 για τα προβλήματα συνοριακών τιμών. Συναντήσαμε επίσης και πάρα πολλά σχετικά παραδείγματα και εφαρμογές σε ολόκληρο το Μέρος A. Ας αναφερθούμε και εδώ σε δύο ακόμη εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού:

▼ **Εφαρμογή B1.1 (Ταλαντώσεις: Μηχανικό Σύστημα Υλικού Σημείου-Ελατηρίου):** Οι τρεις εξισώσεις

$$m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + ku(t) = p(t), \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0 \quad (1.6.1)$$

αποτελούν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών με δύο αρχικές συνθήκες. Συγκεκριμένα δηλώνουν το πρόβλημα των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων (με φόρτιση  $p(t)$ ) σε μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας  $m$ ) και ελατηρίου (σταθεράς  $k$ ) χωρίς απόσβεση (με  $\xi = 0$ ). Η πρώτη από τις τρεις αυτές εξισώσεις είναι η συνήθης διαφορική εξίσωση, ενώ οι επόμενες δύο εξισώσεις είναι οι δύο αρχικές συνθήκες τη χρονική στιγμή  $t = 0$  με αρχική θέση της μάζας τη θέση  $u_0$  και αρχική ταχύτητά της την ταχύτητα  $v_0$ . Επισημαίνεται τέλος ότι οι αρχικές συνθήκες είναι εδώ δύο, απλά επειδή η συνήθης διαφορική εξίσωση, η πρώτη εξίσωση (1.6.1), είναι εδώ δευτέρας τάξεως. Τέλος υπενθυμίζεται ότι το ίδιο ακριβώς πρόβλημα αφορά και σε μονώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως με τη μάζα του  $m$  να υποτίθεται συγκεντρωμένη στο ύψος  $h$  της πλάκας του. ▲

▼ **Εφαρμογή Β1.2 (Μηχανική των Υλικών: Τεχνική Θεωρία Κάμψεως: Δοκοί):** Ανάλογα μπορεί να έχουμε τις πέντε εξισώσεις

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = p(x), \quad v(0) = 0, \quad v''(0) = 0, \quad v(L) = 0, \quad v'(L) = 0. \quad (1.6.2)$$

Αυτές αποτελούν ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών. Συγκεκριμένα αφορούν σε ένα στατικό πρόβλημα συνήθους δοκού, εδώ μιας μονόπακτης υπερστατικής δοκού με κύλιση στο αριστερό άκρο της  $x = 0$  και πάκτωση στο δεξιό άκρο της  $x = L$ . Το μήκος της δοκού είναι  $L$  και η δυσκαμψία της  $EI$ . Η κάθετη κατανεμημένη φόρτιση που ασκείται πάνω στη δοκό είναι  $p(x)$ . Το πρόβλημα αυτό περιλαμβάνει τέσσερις συνοριακές συνθήκες: δύο στο σημείο  $x = 0$  (στο αριστερό άκρο της δοκού) και δύο στο σημείο  $x = L$  (στο δεξιό άκρο της δοκού). Εδώ μιλάμε για πρόβλημα συνοριακών τιμών (και όχι για πρόβλημα αρχικών τιμών), επειδή οι συνθήκες είναι σε δύο διαφορετικά σημεία: στα σημεία  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού. Αν και οι τέσσερις αυτές συνθήκες ήσαν σε ένα μόνο σημείο, π.χ. στο σημείο  $x = 0$  της δοκού, τότε θα μιλούσαμε κι εδώ για ένα πρόβλημα αρχικών τιμών. Σημειώνεται τέλος ότι οι συνοριακές συνθήκες είναι τέσσερις, απλά επειδή η συνήθης διαφορική εξίσωση της δοκού, η πρώτη εξίσωση (1.6.2), είναι εδώ τετάρτης τάξεως. ▲

Εντελώς ανάλογα πολύ συχνά ιδίως σε ένα εφαρμοσμένο πρόβλημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους συνοδεύεται από αρχικές ή/και συνοριακές συνθήκες. Αυτές επιτρέπουν την εύρεση μιας μόνο λύσεως του σχετικού προβλήματος, που είναι συνήθως ένα φυσικό πρόβλημα, εδώ παρμένο από την Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Δηλαδή στην πράξη δε θέλουμε τη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους. Θέλουμε μια μερική λύση της: ακριβώς τη λύση του προβλήματος που έχουμε. Όπως συμβαίνει και στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, έτσι και στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους έχουμε τόσες συνθήκες όσες προβλέπουν οι εμφανιζόμενες μερικές παράγωγοι με τις τάξεις τους. Μόνο που αυτές είναι εδώ ως προς δύο τουλάχιστον μεταβλητές. Γινόμαστε τώρα πιο σαφείς με αναφορά μας σε τρεις συγκεκριμένες εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού:

▼ **Εφαρμογή Β1.3 (Περιβαλλοντική Υδραυλική: Μεταφορά Ρύπου σε Υδατόρρευμα):** Θεωρούμε τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με (α) διάχυσή του (με συντελεστή μοριακής διαχύσεως  $D$ , που μπορεί να περιλαμβάνει και τη διασπορά του) και (β) μεταγωγή του (με ταχύτητα του νερού  $V$ ). Παρουσιάζεται επίσης και αποδόμηση πρώτης τάξεως του ρύπου (με σταθερά του ρυθμού αποδόμησης  $k$ ). Τότε μπορεί να προκύψει το ακόλουθο πρόβλημα με τέσσερις συνολικά εξισώσεις:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc, \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad c(x_1, t) = f_1(t), \quad c(x_2, t) = f_2(t). \quad (1.6.3)$$

Άγνωστη συνάρτηση είναι η συγκέντρωση του ρύπου  $c = c(x, t)$  στο υδατόρρευμα. Αυτή εξαρτάται τόσο από τη θέση  $x$  κατά μήκος του υδατορρέυματος, εδώ με  $x_1 \leq x \leq x_2$ , όσο και από το χρόνο  $t$ , εδώ με  $t \geq 0$ . Είναι δηλαδή συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών: των  $x$  και  $t$ .

Προφανώς η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους είναι η πρώτη από τις εξισώσεις αυτές (1.6.3). Οι όροι της κατά σειρά αφορούν: στη συσσώρευση, στη διάχυση, στη μεταγωγή και

στην αποδόμηση του ρύπου. Ως προς το χρόνο  $t$  η μόνη μερική παράγωγος που παρουσιάζεται είναι πρώτης τάξεως. Άρα θα έχουμε μόνο μία αρχική συνθήκη ως προς το χρόνο  $t$ , εδώ για  $t = 0$ . Αυτή είναι η δεύτερη εξίσωση

$$c(x, 0) = c_0(x) \tag{1.6.4}$$

από τις πιο πάνω τέσσερις εξισώσεις και εκφράζει την αρχική συγκέντρωση του ρύπου  $c_0(x)$  στο υδατόρρευμα, δηλαδή τη συγκέντρωσή του για  $t = 0$ . (Η πρώτη εξίσωση (1.6.3) είναι η ίδια η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους στο παρόν πρόβλημα μεταγωγής-διαχύσεως-αποδομήσεως ρύπου σε υδατόρρευμα.)

Προχωράμε τώρα στη θέση  $x$  κατά μήκος του υδατορρεύματος εδώ έχοντας υποθέσει ότι  $x_1 \leq x \leq x_2$ . Όμως ως προς τη μεταβλητή  $x$  η διαφορική εξίσωσή μας με μερικές παραγώγους, η πρώτη εξίσωση (1.6.3), περιλαμβάνει και δεύτερη παράγωγο. (Για το λόγο αυτό και η διαφορική εξίσωση χαρακτηρίζεται σαν δευτέρας τάξεως.) Ωραία! Τώρα όμως πρέπει (εξαιτίας της δευτέρας παραγώγου ως προς  $x$ ) να έχουμε δύο συνθήκες ως προς  $x$ . Εδώ θεωρούμε τις συνθήκες αυτές στις διαφορετικές θέσεις  $x_1$  και  $x_2$  κατά μήκος του υδατορρεύματος. Επομένως, επειδή έχουμε στις συνθήκες μας ως προς  $x$  δύο θέσεις και όχι μόνο μία, εδώ μιλάμε για συνοριακές συνθήκες και όχι για αρχικές συνθήκες. Πρόκειται για τις δύο τελευταίες εξισώσεις (1.6.3), τις εξισώσεις

$$c(x_1, t) = f_1(t) \quad \text{και} \quad c(x_2, t) = f_2(t). \tag{1.6.5}$$

Αυτές αναφέρονται στις συγκεντρώσεις του ρύπου  $f_1(t)$  και  $f_2(t)$  στις θέσεις  $x = x_1$  και  $x = x_2$  του υδατορρεύματος. Εδώ τις υποθέτουμε γνωστές, π.χ. από συνεχείς μετρήσεις της συγκεντρώσεως του ρύπου  $c(x, t)$  στις δύο αυτές θέσεις  $x_1$  και  $x_2$ . Έχουμε δύο συνθήκες ως προς τη θέση  $x$ , απλά επειδή έχουμε δεύτερη παράγωγο ως προς  $x$  στη διαφορική μας εξίσωση με μερικές παραγώγους.

Αν υποθετικά έλειπε το φαινόμενο της διαχύσεως, δηλαδή είχαμε  $D = 0$  στη μεταφορά του ρύπου, τότε θα είχαμε μόνο μία συνθήκη ως προς  $x$ , ως υποθέσουμε τη συνθήκη  $c(x_1, t) = f_1(t)$  στη θέση  $x_1$ . Θα τη χαρακτηρίζαμε μάλιστα σαν αρχική συνθήκη και αυτή, επειδή θα αναφερόμασταν μόνο στη θέση  $x_1$  και όχι σε δύο διαφορετικές θέσεις  $x_1$  και  $x_2$ , όπως συμβαίνει στο παρόν πρόβλημα.

Εντούτοις αντίθετα αν έλειπε το φαινόμενο της μεταγωγής, δηλαδή είχαμε  $V = 0$  στη μεταφορά του ρύπου (ενώ  $D > 0$ : παρουσία του φαινομένου της διαχύσεως), ε τότε θα συνεχίζαμε να χρειαζόμαστε να έχουμε δύο συνθήκες ως προς  $x$ , συγκεκριμένα και τις δύο παραπάνω συνθήκες (1.6.5), δηλαδή και τις δύο τελευταίες εξισώσεις (1.6.3). Αυτό θα συνέβαινε, γιατί η διαφορική μας εξίσωση θα συνέχιζε να έχει δεύτερη παράγωγο ως προς τη θέση  $x$  παραμένοντας έτσι δευτέρας τάξεως. ▲

▼ **Εφαρμογή Β1.4 (Μετάδοση Θερμότητας):** Τώρα θεωρούμε τη Μετάδοση Θερμότητας σε τοίχο πάχους  $L$  με  $0 \leq x \leq L$ . Η αρχική θερμοκρασιακή κατανομή στον τοίχο είναι γνωστή:  $\theta(x, 0) = f(x)$ . Επίσης ο τοίχος έχει γνωστή σταθερή θερμοκρασία  $\theta(0, t) = \theta_0$  για  $x = 0$  και είναι απόλυτα μονωμένος για  $x = L$ , οπότε  $(\partial\theta/\partial x)(L, t) = 0$ . Η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που ισχύει στο πρόβλημα αυτό είναι η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως με άγνωστη συνάρτηση τη θερμοκρασία  $\theta = \theta(x, t)$  στον τοίχο. Την εξίσωση της διαχύσεως θα την εξετάσουμε εκτενώς στην Παράγραφο Β2.1.4 του επόμενου Κεφαλαίου Β2 και σε παραπέρα επόμενα κεφάλαια. Έχουμε λοιπόν το εξής πρόβλημα αρχικής τιμής και συνοριακών τιμών:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial\theta}{\partial t}, \quad \theta(x, 0) = f(x), \quad \theta(0, t) = \theta_0, \quad \frac{\partial\theta}{\partial x}(L, t) = 0 \tag{1.6.6}$$

με  $\theta = \theta(x, t)$  και με τέσσερις συνολικά εξισώσεις: μία διαφορική εξίσωση και τρεις συνθήκες.

Η πρώτη εξίσωση είναι η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της διαχύσεως με  $a^2$  το συντελεστή διαδόσεως θερμότητας. Η δεύτερη εξίσωση είναι η αρχική συνθήκη του προβλήματος για  $t = 0$  που ήδη την αναφέραμε. Είναι μόνο μία, επειδή η χρονική παράγωγος στην εξίσωση της διαχύσεως είναι, όπως παρατηρούμε, πρώτης τάξεως. Οι άλλες δύο εξισώσεις (η τρίτη και η τέταρτη) είναι οι δύο συνοριακές συνθήκες του προβλήματος (για  $x = 0$  και  $x = L$ ) που ήδη τις

έχουμε αναφέρει και αυτές. Είναι δύο εδώ οι συνοριακές συνθήκες, επειδή η χωρική (ως προς τη θέση  $x$ ) μερική παράγωγος στην εξίσωση της διαχύσεως είναι, όπως βλέπουμε, δευτέρας τάξεως. ▲

▼ **Εφαρμογή Β1.5 (Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί):** Σαν τελευταία εφαρμογή εξετάζουμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις μιας συνήθους δοκού μήκους  $L$ , δυσκαμψίας  $EI$  και γραμμικής πυκνότητας  $\rho A$ . Τη δοκό τη θεωρούμε μονόπακτη υπερστατική δοκό με κύλιση στο αριστερό άκρο της  $x = 0$  και πάκτωση στο δεξιό άκρο της  $x = L$ . Η κάθετη κατανεμημένη φόρτίσή της είναι  $p(x, t)$ . Εδώ έχουμε ξανά τη δεύτερη Εφαρμογή Β1.2. Τώρα όμως μεταφερθήκαμε από το ευκολότερο στατικό πρόβλημα στο δυσκολότερο δυναμικό πρόβλημα. Εδώ το βέλος κάμψεως της δοκού  $v = v(x, t)$  εξαρτάται και από τη θέση  $x$  (με  $0 \leq x \leq L$  όπως και πριν) και από το χρόνο  $t$  (με  $t \geq 0$ ).

Έχουμε επτά συνολικά εξισώσεις στο παρόν πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t), \quad v(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

$$v(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0 \quad (1.6.7)$$

με πρώτη τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (1.1.13) που αφορά στο παρόν πρόβλημα. (Πρόκειται για μια από τις πιο γνωστές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.) Οι δύο συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  για την αρχική θέση και την αρχική ταχύτητα (για  $t = 0$ ) των σημείων της δοκού είναι γνωστές. Ουσιαστικά σε σύγκριση με την Εφαρμογή Β1.2 πέρα από το χρόνο  $t$ , τώρα  $v = v(x, t)$  και  $p = p(x, t)$ , υπάρχουν και οι δύο αρχικές συνθήκες. Είναι μάλιστα εύλογο αυτό, επειδή η χρονική μερική παράγωγος (ως προς το χρόνο  $t$ ) στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, δηλαδή στην πρώτη από τις επτά πιο πάνω εξισώσεις (1.6.7), είναι δευτέρας τάξεως. Επίσης οι συνοριακές συνθήκες είναι τέσσερις, ακριβώς όπως και στην Εφαρμογή Β1.2. Είναι και αυτό προφανές, επειδή η χωρική μερική παράγωγος (ως προς τη θέση  $x$ ) είναι τετάρτης τάξεως, ακριβώς όπως συνέβαινε και στο στατικό πρόβλημα. ▲

Θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε και σε πάρα πολλές ακόμη εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού όπου να παρουσιάζονται αρχικές ή/και συνοριακές συνθήκες, αλλά προφανώς δε θα το κάνουμε. Απλά περιοριζόμαστε να επαναλάβουμε ότι ο αριθμός των συνθηκών που αφορά σε μια μεταβλητή  $y$  θα πρέπει να είναι ο σωστός, δηλαδή να αντιστοιχεί στην τάξη της μερικής παραγώγου ανώτερης τάξεως ως προς τη μεταβλητή  $y$ . Σε καθαρά χωρικά προβλήματα, π.χ. με  $u = u(x, y)$ , όπως συμβαίνει στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{με} \quad u = u(x, y), \quad (1.6.8)$$

έχουμε συχνά αποκλειστικά συνοριακές συνθήκες (εδώ τέσσερις συνοριακές συνθήκες: δύο για τη μεταβλητή  $x$  και δύο για τη μεταβλητή  $y$ ) και καμία αρχική συνθήκη.

## Β1.7. ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Για τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις  $n$  τάξεως με ανεξάρτητη μεταβλητή την  $x$  και άγνωστη συνάρτηση την  $y = y(x)$  ξέρουμε (από την Ενότητα Α1.6 του Μέρους Α) ότι η **γενική λύση** τους  $y_g(x)$  περιλαμβάνει  $n$  αυθαίρετες σταθερές  $C_1, C_2, \dots, C_n$ . Από τούτη τη γενική λύση  $y_g(x)$  με καθορισμό των  $n$  αυτών σταθερών (μέσω αρχικών ή συνοριακών συνθηκών) προκύπτουν **μερικές λύσεις** (ή **ειδικές λύσεις**)  $y_p(x)$  της συνήθους διαφορικής εξίσωσης. Σε μερικές περιπτώσεις παρουσιάζονται επίσης και **ιδιάζουσες λύσεις**  $y_s(x)$ . Αυτές δε μπορούν να προκύψουν από τη γενική λύση  $y_g(x)$ . (Όμως οι γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δεν έχουν ποτέ ιδιάζουσες λύσεις!) Όλες μαζί οι λύσεις συνιστούν την **πλήρη λύση** της συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

Αυτά γενικεύονται και στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Θεωρούμε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους  $n$  τάξεως με  $m$  ανεξάρτητες μεταβλητές  $x_1, x_2, \dots, x_m$  και

άγνωστη συνάρτηση τη  $u = u(x_1, x_2, \dots, x_m)$ . Στην περίπτωση αυτή η **γενική λύση**  $u_g(x_1, x_2, \dots, x_m)$  της διαφορικής αυτής εξισώσεως περιλαμβάνει  $n$  αυθαίρετες (αλλά κατάλληλα παραγωγίσιμες) συναρτήσεις αντί για  $n$  αυθαίρετες σταθερές. (Αυτό αποτελεί ουσιώδη διαφορά σχετικά με τις συνηθεις διαφορικές εξισώσεις!) Με τον καθορισμό των αυθαίρετων συναρτήσεων προκύπτουν **μερικές λύσεις** (ή **ειδικές λύσεις**)  $u_p(x_1, x_2, \dots, x_m)$  της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους. Αυτός ο καθορισμός γίνεται συνήθως μέσω αρχικών ή συνοριακών συνθηκών για την άγνωστη συνάρτηση, όπως τις είδαμε αναλυτικά στις εφαρμογές της προηγούμενης Ενότητας B1.6. Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορούν επίσης να παρουσιασθούν και **ιδιάζουσες λύσεις**  $u_s(x_1, x_2, \dots, x_m)$  που δεν προκύπτουν από τη γενική λύση  $u_g(x_1, x_2, \dots, x_m)$  για συγκεκριμένες συναρτήσεις στις θέσεις των αυθαίρετων συναρτήσεων. Όμως οι ιδιάζουσες λύσεις δε θα μας απασχολήσουν εδώ. Τέλος το σύνολο όλων ανεξαιρέτως των λύσεων της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους αποτελεί την **πλήρη λύση** της. Ας γίνουμε τώρα σαφέστεροι σε όλα αυτά με μια απλή εφαρμογή:

▼ **Εφαρμογή B1.6 (Διδιάστατη Εξίσωση του Laplace):** Πρόκειται για την εξίσωση (1.6.8) της προηγούμενης Ενότητας B1.6, την επαναλαμβάνουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{με} \quad u = u(x, y). \quad (1.7.1)$$

Αυτή είναι η τόσο γνωστή **διδιάστατη εξίσωση του Laplace** και παρουσιάζεται σε πάρα πολλά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού (και όχι μόνο!) που θα τα αναφέρουμε στην Παράγραφο B2.1.1 του επόμενου Κεφαλαίου B2. Είναι επίσης διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως. Επομένως η γενική λύση της θα πρέπει να περιλαμβάνει δύο αυθαίρετες συναρτήσεις.

Τη γενική αυτή λύση θα την προσδιορίσουμε πιο κάτω στην Παράγραφο B4.4.3 του Κεφαλαίου B4: εξίσωση (4.4.17). Αυτή έχει τη μορφή

$$u_g(x, y) = \varphi(x + iy) + \chi(x - iy) \quad \text{με} \quad i = \sqrt{-1} \quad (1.7.2)$$

τη φανταστική μονάδα (με  $i^2 = -1$ ). Οι δύο αυθαίρετες συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις  $\varphi(z)$  και  $\chi(z)$  μιας μόνο μεταβλητής  $z$ . Φυσικά υποτίθεται ότι διαθέτουν δεύτερες παραγώγους  $\varphi''(z)$  και  $\chi''(z)$ , έτσι ώστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (1.7.1).

Ο προσδιορισμός τους γίνεται με τη χρήση αρχικών και εδώ (στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace) συνηθέστερα συνοριακών συνθηκών. Για παράδειγμα, από τη γενική λύση (1.7.2) της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace (1.7.1) με τις συγκεκριμένες συναρτήσεις

$$\varphi(z) = \chi(z) = z^2 \quad \text{με} \quad z = x + iy \quad (1.7.3)$$

προκύπτει η ακόλουθη μερική λύση (ή ειδική λύση) της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace (1.7.1):

$$u_p(x, y) = (x + iy)^2 + (x - iy)^2 = (x^2 - y^2 + 2ixy) + (x^2 - y^2 - 2ixy) = 2(x^2 - y^2). \quad (1.7.4)$$

Παρακάτω στην Παράγραφο B2.1.1 θα αναφέρουμε και αρκετές ακόμη μερικές λύσεις της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace (1.7.1). Είναι στ' αλήθεια πάμπλουτη σε μερικές λύσεις  $u_p(x, y)$  η διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Αρκεί απλά να βάλουμε δύο συγκεκριμένες συναρτήσεις  $\varphi(z)$  και  $\chi(z)$  (που να διαθέτουν όμως δεύτερες παραγώγους  $\varphi''(z)$  και  $\chi''(z)$ ) στη γενική λύση (1.7.2). ▲

## B1.8. ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΛΥΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Το ουσιαστικό έργο μας με τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους είναι βέβαια να μάθουμε να τις λύνουμε τουλάχιστον σε όσες περιπτώσεις αυτό είναι εφικτό και όχι ιδιαίτερα κοπιαστικό από απόψεως υπολογιστικού κόστους. Σε τούτη την ενότητα του εισαγωγικού αυτού Κεφαλαίου B1 θα κάνουμε και την αντίστροφη εργασία. Θα δούμε σε δύο εφαρμογές ότι γενικά εύκολα μπορούμε να επαληθεύουμε γνωστές λύσεις διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

Απλά πρέπει παραγωγίζοντάς τις να βρούμε τις μερικές παραγώγους που παρουσιάζονται στη διαφορική εξίσωση και να τις αντικαταστήσουμε σ' αυτήν. Θα πρέπει να προκύψει ταυτότητα, τελικά  $0 = 0$ . Αν είναι αναγκαίο, χρησιμοποιούμε και τον υπολογιστή για τις μερικές παραγωγίσεις που χρειάζονται, συγκεκριμένα ένα πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών, όπως είναι π.χ. η *Mathematica* ή η *Maxima*. Εξάλλου δεν πρέπει να αποκρύπτεται ότι ο Πολιτικός Μηχανικός που θέλει να είναι σίγουρος για τα αποτελέσματά του (ακόμη και όταν χρησιμοποιεί τον υπολογιστή!) θα πρέπει να μην αμελεί να τα επαληθεύει. Αυτό γίνεται εδώ με άμεση αντικατάσταση της λύσεως που βρέθηκε στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Προχωράμε λοιπόν στις δύο εφαρμογές μας: πρώτα μια εύκολη και μετά μια λίγο δυσκολότερη:

▼ **Εφαρμογή Β1.7 (Διδιάστατη Εξίσωση του Laplace):** Να επαληθευθεί ότι οι δύο συναρτήσεις

$$u_1(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{και} \quad u_2(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{με} \quad x \neq 0 \quad (1.8.1)$$

είναι λύσεις της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace (1.6.8) ή (1.7.1), δηλαδή της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{με} \quad u = u(x, y). \quad (1.8.2)$$

**Λύση:** Ξεκινάμε με την πρώτη συνάρτηση (1.8.1), η οποία είναι ουσιαστικά (με διαφορά του παράγοντα 2) η λύση (1.7.4) που βρήκαμε στην προηγούμενη Εφαρμογή Β1.6. Απλά έχουμε το καθήκον να κάνουμε δύο παραγωγίσεις ως προς  $x$  και δύο ως προς  $y$  και να αντικαταστήσουμε τις δεύτερες μερικές παραγώγους που προκύπτουν (ως προς  $x$  και ως προς  $y$ ) στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (1.8.2). Αυτοί είναι οι μόνοι υπολογισμοί μας και είναι τόσο μα τόσο απλοί:

$$u_1(x, y) = x^2 - y^2 \implies \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -2 \implies \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0 \implies 0 = 0. \quad (1.8.3)$$

Συνεχίζουμε τώρα με τη δεύτερη συνάρτηση: τη συνάρτηση

$$u_2(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{με} \quad x \neq 0. \quad (1.8.4)$$

(Θυμίζουμε βέβαια πως το σύμβολο  $\tan^{-1}$  δηλώνει την αντίστροφη συνάρτηση της εφαπτομένης, το τόξο εφαπτομένης: δηλαδή  $\tan^{-1} \equiv \arctan$ .) Και αρχίζουμε τη δουλειά μας βρίσκοντας ότι

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{-y/x^2}{1 + (y/x)^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \implies \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (1.8.5)$$

και ανάλογα

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = \frac{1/x}{1 + (y/x)^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} \implies \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (1.8.6)$$

Άρα τελικά

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \implies 0 = 0. \quad (1.8.7)$$

Ολοκληρώθηκαν λοιπόν με επιτυχία και οι δύο επαληθεύσεις σ' αυτήν εδώ την απλή εφαρμογή. ▲

▼ **Εφαρμογή Β1.8 (Περιβαλλοντική Μηχανική: Διάχυση Ρύπου):** Σε πρόβλημα μονοδιάστατης διαχύσεως ρύπου για τη συγκέντρωση  $c(x, t)$  του ρύπου προκύπτει η λύση

$$c(x, t) = c_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) \quad (1.8.8)$$

με  $D$  το συντελεστή μοριακής διαχύσεως και  $c_0$  γνωστή θετική σταθερά. Το σύμβολο  $\operatorname{erfc}$  δηλώνει τη **συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος**, στην οποία θα αναφερθούμε εκτενώς παρακάτω στην Παράγραφο Β10.4.5 του Κεφαλαίου Β10. Εδώ απλά αναφέρουμε τον τύπο υπολογισμού της

$$\operatorname{erfc}(x) := 1 - \operatorname{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi, \quad (1.8.9)$$



όπου η συνάρτηση

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (1.8.10)$$

είναι η **συνάρτηση σφάλματος (error function)**. Ζητείται να επαληθευθεί ότι η πιο πάνω συνάρτηση  $c(x, t)$  είναι πραγματικά μια λύση (προφανώς μια μερική λύση) της εξίσωσης της διαχύσεως

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (1.8.11)$$

**Λύση:** Για την απόδειξη αυτή αρκεί να παραγωγίσουμε την πιθανή λύση  $c(x, t)$  που μας δόθηκε στη σχέση (1.8.8), συγκεκριμένα να υπολογίσουμε την πρώτη μερική παράγωγό της ως προς το χρόνο  $t$  και τη δεύτερη μερική παράγωγό της ως προς τη θέση  $x$ . Τις μερικές αυτές παραγωγούς πρέπει στη συνέχεια να τις αντικαταστήσουμε στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (1.8.11), ώστε να ελέγξουμε εάν αυτή ισχύει ή όχι ελπίζοντας ότι θα ισχύει. Τίποτε άλλο!

Ξεκινάμε λοιπόν! Πρώτα παραγωγίζουμε τη συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος (1.8.9) με χρήση και του τύπου για την παράγωγο ενός αόριστου ολοκληρώματος. Έτσι προκύπτει ότι

$$\frac{d \operatorname{erfc}(x)}{dx} \equiv \operatorname{erfc}'(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (1.8.12)$$

Με βάση και αυτόν τον τύπο προσδιορίζουμε την πρώτη χρονική (ως προς το χρόνο  $t$ ) μερική παράγωγο της πιθανής λύσεως  $c(x, t)$  που μας δόθηκε στη σχέση (1.8.8). Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = c_0 \left( -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \left( -\frac{x}{4\sqrt{D}} t^{-3/2} \right) = \frac{c_0 x}{2\sqrt{\pi D}} t^{-3/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (1.8.13)$$

Με ανάλογο τρόπο προσδιορίζουμε την πρώτη και από αυτήν και τη δεύτερη μερική παράγωγο της ίδιας συναρτήσεως, της συγκεντρώσεως  $c(x, t)$ , τώρα όμως ως προς τη θέση  $x$ . Προκύπτει

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial x} = c_0 \left( -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \right) \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \frac{1}{2\sqrt{Dt}} = -\frac{c_0}{\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \quad (1.8.14)$$

και μετά

$$\frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} = -\frac{c_0}{\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \frac{-2x}{4Dt} = \frac{c_0 x}{2\sqrt{\pi D}} \frac{1}{D} t^{-3/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right). \quad (1.8.15)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις δύο μερικές παραγωγούς που βρήκαμε (την πρώτη (1.8.13) ως προς το χρόνο  $t$  και τη δεύτερη (1.8.15) ως προς τη θέση  $x$ ) στη μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως (1.8.11). Διαπιστώνουμε έτσι εύκολα ότι αυτή επαληθεύεται εκ ταυτότητας. Επομένως η συνάρτηση  $c(x, t)$  στη σχέση (1.8.8) είναι στ' αλήθεια λύση της παρούσας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς (1.8.11), δηλαδή της μονοδιάστατης εξίσωσης της διαχύσεως. ▲

## Β1.9. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

### Β1.9.1. Εισαγωγικά σχόλια

Σε πολλές περιπτώσεις ένα πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού ανάγεται σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς ως προς μία άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή). Φυσικά στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι πάνω από μία. (Αλλιώς θα είχαμε συνήθη διαφορική εξίσωση.) Γενικά οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x, y$  και  $z$  (ή άλλες κατάλληλες συντεταγμένες) και ο χρόνος  $t$  ή κάποιες από αυτές. (Για παράδειγμα, σε στατικά προβλήματα και γενικότερα σε προβλήματα μόνιμων καταστάσεων λείπει ο χρόνος  $t$ , ενώ σε διδιάστατα προβλήματα λείπει η μεταβλητή θέσεως  $z$ .)

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε πολύ σύντομα στο γεγονός ότι σε μερικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζονται συστήματα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγωγούς (που έχουν πάνω από μία άγνωστη συνάρτηση) αντί για απλές διαφορικές εξισώσεις με μερικές

παραγώγους (με μία μόνο άγνωστη συνάρτηση). Περιοριζόμαστε στην αναφορά δύο απλών τέτοιων προβλημάτων: ένα από τη Ρευστομηχανική (ή Μηχανική των Ρευστών) και ένα από την Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών. Στο βιβλίο αυτό δεν πρόκειται να ασχοληθούμε με την επίλυση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Όμως είχαμε ασχοληθεί με το αντίστοιχο πρόβλημα στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις: Κεφάλαια Α12 (θεωρία) και Α13 (εφαρμογές κυρίως στη Δυναμική των Κατασκευών) του Μέρους Α.

### **B1.9.2. Ένα απλό σύστημα στη Ρευστομηχανική**

Στη Ρευστομηχανική θεωρούμε τη μόνιμη (σταθερή, ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$ ) αστρόβιλη (χωρίς στροβιλισμό, χωρίς περιστροφή) διδιάστατη (επίπεδη) ροή ενός ιδεατού ρευστού (με σταθερή πυκνότητα  $\rho$  και χωρίς συνεκτικότητα, ιξώδες  $\mu$ :  $\mu = 0$ ). Την παρούσα ροή ρευστού θα τη μελετήσουμε εκτενώς παρακάτω στην Ενότητα Β3.4 του Κεφαλαίου Β3 και ειδικότερα στις Παραγράφους Β3.4.3 και Β3.4.4 που αναφέρονται μόνο σε διδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού.

Εδώ περιοριζόμαστε να αναφέρουμε ότι στην πιο πάνω ροή ισχύουν η **εξίσωση της συνεχείας**, εξίσωση (3.4.20),

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.9.1)$$

και η **εξίσωση του αστρόβιλου της ροής**, εξίσωση (3.4.18),

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (1.9.2)$$

που τη γράψαμε εδώ σε ελάχιστα διαφορετική μορφή. Οι άγνωστες συναρτήσεις είναι οι δύο συνιστώσες  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$  της διανυσματικής ταχύτητας  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y)$  του ρευστού. Έχουμε λοιπόν ένα σύστημα δύο ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως και με σταθερούς συντελεστές: (α) την εξίσωση της συνεχείας (1.9.1) και (β) την εξίσωση του αστρόβιλου της ροής (1.9.2).

Για την επίλυση του συστήματος αυτού μπορούμε να το αναγάγουμε σε δύο διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με μία μόνο άγνωστη συνάρτηση η καθεμία. Προς το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε την εξίσωση της συνεχείας (1.9.1) ως προς  $x$  και την εξίσωση του αστρόβιλου (1.9.2) ως προς  $y$  και τις προσθέτουμε. Υποθέτουμε τις μικτές μερικές παραγώγους της άγνωστης συναρτήσεως  $v(x, y)$  ότι είναι συνεχείς συναρτήσεις και θυμόμαστε ότι τότε ισχύει η ισότητα

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}, \quad (1.9.3)$$

δηλαδή ότι επιτρέπεται η εναλλαγή των μερικών παραγωγίσεων. Έτσι η πιο πάνω πρόσθεση μας οδηγεί αμέσως στην εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1.9.4)$$

δηλαδή στη γνωστή μας διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Εντελώς ανάλογα και εξίσου εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι και η άλλη άγνωστη συνάρτηση  $v(x, y)$  επαληθεύει και αυτή την ίδια ακριβώς εξίσωση: τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (1.9.4).

Έτσι το αρχικό μας σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (1.9.1) και (1.9.2) με δύο άγνωστες συναρτήσεις, τις  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$ , έχει αναχθεί σε δύο χωριστές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Μόνο που αυτές (κι οι δυο τους συμπίπτουν με τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace) είναι δευτέρας τάξεως, ενώ το αρχικό σύστημα (1.9.1) και (1.9.2) ήταν πρώτης τάξεως, δηλαδή κι οι δύο εξισώσεις του είχαν μερικές παραγώγους μόνο πρώτης τάξεως. Αυτό (η αύξηση της τάξεως) είναι το κόστος μας για να μετατρέψουμε το σύστημα των δύο διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (1.9.1) και (1.9.2) σε δύο χωριστές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Τί να κάνουμε; Πάρα πολλά πράγματα έχουν κάποιο κόστος ...

Το βασικό μειονέκτημα στην πιο πάνω διαδικασία είναι πως αναγκασθήκαμε να παραγωγί-  
σουμε τις διαφορικές μας εξισώσεις στο αρχικό σύστημα (1.9.1) και (1.9.2), ώστε να οδηγηθούμε  
στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (1.9.4) για την άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x, y)$ . (Ανάλογα  
ισχύουν και για τη δεύτερη άγνωστη συνάρτηση  $v = v(x, y)$ .) Αυτό δεν ήταν ιδιαίτερα έξυπνο,  
επειδή οι παραγωγίσεις διαφορικών εξισώσεων εισάγουν στις διαφορικές εξισώσεις που προκύ-  
πτουν πρόσθετες λύσεις που δεν είναι γενικά αποδεκτές. Για να αντιμετωπισθεί αυτή η δυσκολία  
στο παρόν πρόβλημα ροής, εισάγεται κατάλληλα μια νέα άγνωστη συνάρτηση  $\Phi = \Phi(x, y)$  που  
μπορεί να αποδειχθεί ότι και αυτή επαληθεύει τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Αυτήν την  
αντιμετώπιση του προβλήματος θα τη δούμε πιο αναλυτικά στις Παραγράφους Β3.4.2 και Β3.4.3  
του Κεφαλαίου Β3. Επίσης μια απόλυτα εναλλακτική δυνατότητα με μια διαφορετική νέα άγνωστη  
συνάρτηση  $\Psi = \Psi(x, y)$  (ξανά για το παρόν πρόβλημα ροής ιδεατού ρευστού) θα τη δούμε στην  
Παράγραφο Β3.4.4 πάλι του Κεφαλαίου Β3. Αρκετά όμως ως εδώ για τη Ρευστομηχανική!

### Β1.9.3. Ένα απλό σύστημα στην Ελαστικότητα

Στην Επίπεδη Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών στο στατικό (όχι δυναμικό) πρόβλημα  
οι βασικές άγνωστες ποσότητες του Πολιτικού Μηχανικού είναι οι τρεις τάσεις  $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$ ,  
 $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$  (ορθές τάσεις) και  $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$  (διατμητική τάση). Πρόκειται για τρεις άγνωστες  
συναρτήσεις που πέρα από τις συνοριακές συνθήκες επαληθεύουν και ένα σύστημα τριών γραμ-  
μικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Αυτές είναι οι δύο **εξισώσεις ισορροπίας**  
(κατά τις διευθύνσεις των αξόνων  $Ox$  και  $Oy$  στο επίπεδο  $Oxy$ ) και η **εξίσωση του συμβιβαστού**  
**των παραμορφώσεων** γραμμένη όμως εδώ τελικά συναρτήσει των τάσεων σαν να ήταν εξίσωση  
συμβιβαστού των τάσεων, ενώ προφανώς δεν είναι.

Στην περίπτωση που δεν έχουμε καθόλου καθολικές δυνάμεις (συνήθως το βάρος του ελαστι-  
κού μέσου που γενικά αγνοείται) προκύπτει το εξής σύστημα των τριών διαφορικών εξισώσεων  
με μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = 0. \quad (1.9.5)$$

(Οι εξισώσεις ισορροπίας είναι η δύο πρώτες, η εξίσωση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων  
η τρίτη.) Το σύστημα αυτό είναι ένα γραμμικό και με σταθερούς συντελεστές ομογενές σύστημα  
τριών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με τρεις άγνωστες συναρτήσεις: τις τάσεις  
 $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$  και  $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$ . Χαρακτηρίζεται επίσης σαν δευτέρας τάξεως, απλά  
επειδή η εξίσωση του συμβιβαστού (η τρίτη εξίσωση) είναι δευτέρας τάξεως. (Κι ας είναι οι δύο  
εξισώσεις ισορροπίας διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους μόλις πρώτης τάξεως!)

Αυτό το συγκεκριμένο και τόσο ενδιαφέρον σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές πα-  
ραγώγους του Πολιτικού Μηχανικού θα το μελετήσουμε εκτενώς παρακάτω στην Ενότητα Β3.1.  
Εκεί θα αποδείξουμε ότι μπορούμε τα να αναγάγουμε σε μία μόνο απόλυτα ισοδύναμη διαφορική  
εξίσωση με μερικές παραγώγους. Πρόκειται για την εξίσωση (3.1.41). Ας την αναφέρουμε και εδώ

$$\frac{\partial^4 A}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 A}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 A}{\partial y^4} = 0. \quad (1.9.6)$$

Αυτή η εξίσωση έχει μια νέα άγνωστη συνάρτηση  $A = A(x, y)$  που καλείται **τασική συνάρτηση**  
**του Airy** ή μερικές φορές **τασεοσυνάρτηση του Airy**. Μόλις υπολογισθεί, υπολογίζονται άμεσα με  
μερικές παραγωγίσεις και οι τρεις τάσεις  $\sigma_x = \sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y = \sigma_y(x, y)$  και  $\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y)$ .

Πρέπει όμως να αναφερθεί ότι οι αρχικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (1.9.5)  
ήσαν μόλις πρώτης τάξεως (οι δύο πρώτες: οι εξισώσεις ισορροπίας) και δευτέρας τάξεως (η τρίτη:  
η εξίσωση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων). Φυσικά έχουμε  $1 + 1 + 2 = 4$  και πραγματικά  
η τελική εξίσωση (1.9.6) για την τασική συνάρτηση του Airy  $A(x, y)$  προκύπτει τετάρτης τάξεως.  
Αυτό είναι το κόστος μας. Και οφείλουμε να το υπομείνουμε. Άλλωστε τι εναλλακτική δυνατότητα  
έχουμε; Τι καλύτερο θα μπορούσαμε να κάνουμε;

### B1.10. ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

Όπως συμβαίνει και στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, έτσι και στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους οι γραμμικές εξισώσεις είναι αυτές που θα ήθελε πάντα να έχει ο Πολιτικός Μηχανικός. Κι αυτό συμβαίνει, επειδή οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους μπορούν συχνά να λυθούν αναλυτικά, ενώ οι μη γραμμικές γενικά δε μπορούν. Κι έτσι ο Πολιτικός Μηχανικός αναγκάζεται να προσφεύγει σε αριθμητικές μεθόδους επίλυσεως που δεν έχουν καμία γενικότητα: ισχύουν αποκλειστικά για τις συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές για τις οποίες βρέθηκαν. Κάτι να αλλάξει λίγο και (γενικά μιλώντας) οι αριθμητικοί υπολογισμοί πρέπει να επαναληφθούν.

Δυστυχώς όμως συχνά παρουσιάζονται και μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που, επαναλαμβάνουμε, γενικά δε μπορούν να λυθούν αναλυτικά. Τέτοιες εξισώσεις (μη γραμμικές) είναι οι εξαιρετικά σημαντικές και γενικές τρεις **εξισώσεις των Navier-Stokes** στη Ρευστομηχανική ασυμπίεστου ρευστού με συνεκτικότητα (με ιξώδες:  $\mu > 0$ ) ή και χωρίς συνεκτικότητα (με μηδενικό ιξώδες:  $\mu = 0$ ). Αυτές τις μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους θα τις αναφέρουμε εκτενέστερα παρακάτω στην Παράγραφο Β3.3.2 του Κεφαλαίου Β3: εξισώσεις (3.3.7) έως (3.3.9) για συνεκτικό ρευστό (με ιξώδες:  $\mu > 0$ ) και (3.3.23) έως (3.3.25) για μη συνεκτικό ρευστό (χωρίς ιξώδες:  $\mu = 0$ ). Μαζί με την εξίσωση της συνεχείας (που αυτή ευτυχώς είναι γραμμική) αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους δυστυχώς όμως μη γραμμικό εξαιτίας των τριών εξισώσεων των Navier-Stokes. Προφανώς εμείς ούτε καν θα διανοηθούμε να αποπειραθούμε την επίλυσή του με αναλυτικές μεθόδους.

### B1.11. ΑΛΛΑΓΗ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Μερικές φορές σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους η αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών οδηγεί σε απλούστερη διαφορική εξίσωση που μπορεί μάλιστα να διαθέτει και κλειστή λύση με εύκολο προσδιορισμό της. Τέτοιες αλλαγές μεταβλητών θα δούμε αναλυτικά παρακάτω στο Κεφάλαιο Β4. Εδώ περιοριζόμαστε στο να αναφέρουμε τις τρεις πιο ενδιαφέρουσες από αυτές.

▼ **Εφαρμογή Β1.9 (Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος):** Θεωρούμε πρώτα τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{με} \quad u = u(x, t) \quad (1.11.1)$$

και το  $c$  γνωστή θετική σταθερά που δηλώνει την ταχύτητα του κύματος. Εφαρμογές αυτής της εξισώσεως στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού θα αναφέρουμε αναλυτικά στην Παράγραφο Β2.1.3 του επόμενου Κεφαλαίου Β2.

Όπως θα δούμε αναλυτικά στην Παράγραφο Β4.1.2 του Κεφαλαίου Β4, η αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct \quad (1.11.2)$$

μετατρέπει τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (1.11.1) στην πολύ πιο απλή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (1.11.3)$$

Στην εξίσωση αυτή διατηρήσαμε (μάλλον κακώς ...) το σύμβολο  $u$  για την άγνωστη συνάρτηση.

Πρόκειται τώρα για μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που τη γενική λύση της μπορούμε εύκολα να την προσδιορίσουμε με δύο ολοκληρώσεις: μία ως προς  $\xi$  και μία ως προς  $\eta$ . Έτσι προκύπτει εύκολα η γενική λύση της μονοδιάστατης εξισώσεως του κύματος (1.11.1)

$$u_g(x, t) = \varphi(x - ct) + \chi(x + ct), \quad (1.11.4)$$

όπως θα δούμε αναλυτικότερα παρακάτω στην Παράγραφο Β4.1.3 του Κεφαλαίου Β4. ▲

▼ **Εφαρμογή B1.10 (Διδιάστατη Εξίσωση του Laplace):** Για  $c = i$  (ή  $c = -i$ ) μια αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών ανάλογη με την (1.11.2), συγκεκριμένα η αλλαγή μεταβλητών (με  $c = i$  και  $t = y$ )

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad (1.11.5)$$

απλοποιεί τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (1.7.1) μετατρέποντάς τη στην απλούστερη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0. \quad (1.11.6)$$

(Και πάλι κακώς ίσως διατηρήσαμε για διευκόλυνσή μας το σύμβολο  $u$  για την άγνωστη συνάρτηση.) Από αυτήν την νέα μορφή (1.11.6) της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace (1.7.1) προκύπτει η γενική λύση της (1.7.2). Αυτό διαπιστώνεται εύκολα με δύο ολοκληρώσεις της απλοποιημένης τώρα διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (1.11.6): μία ως προς  $z$  και μία ως προς  $\bar{z}$ . Βέβαια δεν πρέπει να ξεχνιούνται και οι αλλαγές μεταβλητών (1.11.5):  $z = x + iy$  και  $\bar{z} = x - iy$ . ▲

▼ **Εφαρμογή B1.11 (Περιβαλλοντική Υδραυλική: Μεταφορά Ρύπου σε Υδατόρρευμα):** Σαν μια τρίτη και τελευταία εφαρμογή της μεθόδου της αλλαγής των ανεξάρτητων μεταβλητών θεωρούμε τώρα την **εξίσωση της μεταγωγής-διαχύσεως-αποδομήσεως** ρύπου σε υδατόρρευμα:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad (1.11.7)$$

με  $c = c(x, t)$  τη συγκέντρωση του ρύπου στο νερό του υδατορρεύματος. Τούτη η εξίσωση είναι η πρώτη εξίσωση (1.6.3). Εδώ θεωρούμε την αλλαγή των ανεξάρτητων μεταβλητών

$$\xi = x - Vt, \quad \tau = t. \quad (1.11.8)$$

Αυτή θα τη μελετήσουμε εκτενώς παρακάτω στην Παράγραφο B4.3.3 του Κεφαλαίου B4. Από φυσικής απόψεως η αλλαγή αυτή δηλώνει κίνηση του παρατηρητή της συγκέντρωσης του ρύπου ακριβώς με την ταχύτητα  $V$  του νερού στο υδατόρρευμα, δηλαδή σαν να ήταν ο παρατηρητής μέσα σε μια βάρκα (χωρίς κουπιά!). Η βάρκα απλά παρασύρεται με τη ροή του νερού στο υδατόρρευμα.

Μπορεί έτσι αρκετά εύκολα να αποδειχθεί ότι η πιο πάνω εξίσωση (1.11.7) της μεταγωγής-διαχύσεως-αποδομήσεως ρύπου απλοποιείται στη μορφή

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} - kc \quad (1.11.9)$$

(με τη διατήρηση του συμβόλου  $c$  για τη συγκέντρωση του ρύπου). Παρατηρούμε ότι τώρα πια απουσιάζει εντελώς ο όρος της μεταγωγής του ρύπου: ο όρος με την ταχύτητα  $V$  του νερού. Άρα ήταν χρήσιμη αυτή η αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών (1.11.8). «Κινηθήκαμε» μαζί με το νερό στο υδατόρρευμα (και το ρύπο που αυτό παρασύρει με μεταγωγή) και καταφέραμε να απαλλαγούμε από τον όρο της μεταγωγής του ρύπου  $-V(\partial c/\partial x)$ . Στην αμέσως επόμενη Ενότητα B1.12 θα μάθουμε πώς μπορούμε να απαλλαγούμε επιπλέον κι από τον όρο αποδομήσεως του ρύπου  $-kc$ . ▲

## B1.12. ΑΛΛΑΓΗ ΑΓΝΩΣΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους πέρα και ανεξάρτητα από την αλλαγή των ανεξάρτητων μεταβλητών σε μερικές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να αλλάζουμε και την ίδια την άγνωστη συνάρτηση. Τη δυνατότητα αυτή τη δείχνουμε και πάλι στην Περιβαλλοντική Υδραυλική και συγκεκριμένα στη γνωστή μας πια εξίσωση της μεταγωγής-διαχύσεως-αποδομήσεως ρύπου.

▼ **Εφαρμογή B1.12 (Περιβαλλοντική Υδραυλική: Μεταφορά Ρύπου σε Υδατόρρευμα):** Θεωρούμε κι εδώ τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με μεταγωγή και διάχυση (που περιλαμβάνει και τη διασπορά), ενώ παρουσιάζεται και πάλι και αποδόμηση του ρύπου. Η σχετική διαφορική

εξίσωση με μερικές παραγώγους είναι η πρώτη εξίσωση (1.6.3) που έχει επίσης επαναληφθεί και σαν εξίσωση (1.11.7). Ας την ξαναεπαναλάβουμε κι εδώ, αν και κοντεύουμε να τη μάθουμε απέξω!

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad (1.12.1)$$

με  $c = c(x, t)$  τη συγκέντρωση του ρύπου που, δυστυχώς, έχει ρυπάνει το νερό στο υδατόρρευμα.

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την έκφραση της άγνωστης συναρτήσεως

$$c(x, t) = \hat{c}(x, t)e^{-kt} \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \hat{c}(x, t) = c(x, t)e^{kt}. \quad (1.12.2)$$

Αυτή ουσιαστικά αλλάζει την άγνωστη συνάρτηση από  $c(x, t)$  σε  $\hat{c}(x, t)$ . Για να δούμε και τι καταφέρνουμε έτσι. Παραγωγίζοντας την πρώτη σχέση (1.12.2) ως προς  $t$  (μία φορά μας φθάνει, ισχύει και ο γνωστός μας κανόνας παραγωγίσεως γινομένου) και ως προς  $x$  (τώρα δύο φορές: έχουμε και δεύτερη χωρική παράγωγο στη διαφορική εξίσωση (1.12.1)), παίρνουμε πολύ εύκολα

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} e^{-kt} - k\hat{c}e^{-kt}, \quad \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial \hat{c}}{\partial x} e^{-kt}, \quad \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial x^2} e^{-kt} \quad \text{με} \quad c = c(x, t) \quad \text{και} \quad \hat{c} = \hat{c}(x, t). \quad (1.12.3)$$

Τώρα απλά αντικαθιστούμε αυτές τις τρεις μερικές παραγώγους (1.12.3) καθώς και την αλλαγή άγνωστης συναρτήσεως (1.12.2) στη διαφορική εξίσωση (1.12.1). Τότε αυτή παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t} e^{-kt} - k\hat{c}e^{-kt} = D \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial x^2} e^{-kt} - V \frac{\partial \hat{c}}{\partial x} e^{-kt} - k\hat{c}e^{-kt}. \quad (1.12.4)$$

Δε μας απομένει παρά να διαπιστώσουμε ότι ο όρος αποδομήσεως  $-k\hat{c}e^{-kt}$  παρουσιάζεται ολόιδιος τόσο στο αριστερό μέλος όσο και στο δεξιό μέλος. Επομένως μπορούμε να τον απλοποιήσουμε. Μπορούμε επίσης να απλοποιήσουμε και τον εκθετικό παράγοντα  $e^{-kt}$  (σημειώνουμε ότι  $e^{-kt} > 0$ ) που παρουσιάζεται σε όλους τους όρους. Παίρνουμε έτσι τελικά τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial x^2} - V \frac{\partial \hat{c}}{\partial x} \quad (1.12.5)$$

χωρίς πια (ω τι χαρά μας!) τον όρο αποδομήσεως  $-kc$ . Δεν πρέπει βέβαια να ξεχνάμε πως τελικά  $c(x, t) = \hat{c}(x, t)e^{-kt}$  με την αλλαγή της άγνωστης συνάρτησης (ή εξαρτημένης μεταβλητής) (1.12.2).

Σημειώνουμε τέλος πως αν αυτήν την εργασία την είχαμε εκτελέσει στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (1.11.19), την επαναλαμβάνουμε κι αυτή

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} - kc, \quad (1.12.6)$$

που δεν έχει όρο μεταγωγής (τον απαλείψαμε ήδη!), θα παίρναμε ανάλογα την ισοδύναμη εξίσωση

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial \xi^2}. \quad (1.12.7)$$

Δηλαδή δε θα είχαμε ούτε όρο μεταγωγής ούτε όρο αποδομήσεως. Μόνο οι όροι συσσωρεύσεως του ρύπου (αριστερά) και διαχύσεως του ρύπου (δεξιά) θα ήσαν παρόντες. Δηλαδή θα είχαμε οδηγηθεί από την αρχική εξίσωση της μεταγωγής-διαχύσεως-αποδομήσεως ρύπου (1.12.1) στην απλή και τόσο κλασική μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως. Εφαρμογές της τελευταίας διαφορικής εξισώσεως θα αναφέρουμε στην Παράγραφο Β2.1.4 του επόμενου Κεφαλαίου Β2. ▲

► **Παρατήρηση Β1.1:** Και αντίστροφα, εάν εφαρμόσουμε την αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών (1.11.8) στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (1.12.5), πετυχαίνουμε με λίγο διαφορετικό, εναλλακτικό τρόπο να εξαλείψουμε και τον όρο μεταγωγής του ρύπου. Καταλήγουμε έτσι και πάλι στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (1.12.7). Είναι δηλαδή ισοδύναμες εργασίες (α) να εξαλείψουμε πρώτα τον όρο μεταγωγής (με αλλαγή των ανεξάρτητων μεταβλητών) και μετά τον όρο αποδομήσεως (με αλλαγή της άγνωστης συνάρτησης) ή (β) αντίστροφα. Το ίδιο κάνει!

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β2

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο Κεφάλαιο αυτό Β2 θα αναφέρουμε ορισμένες βασικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και συστήματα τέτοιων εξισώσεων που παρουσιάζονται σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Σχεδόν όλες οι εξισώσεις αυτές θα είναι γραμμικές και με σταθερούς συντελεστές. Στην αρχή αναφερόμαστε σε τέσσερις κλασικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως που ανήκουν στις καλούμενες διαφορικές εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής. Έχουν όμως και εντονότατη εφαρμογή σε τεχνικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Πρόκειται για τις διαφορικές εξισώσεις: (α) του Laplace (ελλειπτικού τύπου), (β) την αντίστοιχη (τη μη ομογενή) εξίσωση του Poisson (επίσης ελλειπτικού τύπου), (γ) του κύματος ή κυματική εξίσωση (υπερβολικού τύπου) και (δ) της διαχύσεως (παραβολικού τύπου). Για τις εξισώσεις αυτές πέραν της αναλυτικής μορφής τους στη μία ή δύο ή τρεις διαστάσεις (και το χρόνο όπου απαιτείται), παρέχονται και οι χαρακτηρισμοί τους σύμφωνα με όσα αναφερθήκανε προηγουμένως.

Εξίσου σημαντικές για τον Πολιτικό Μηχανικό είναι οι λεπτομερείς αναφορές των προβλημάτων όπου παρουσιάζονται (από τις οποίες προκύπτουν) οι διαφορικές αυτές εξισώσεις με μερικές παραγώγους: (α) στην Κλασική Μηχανική, (β) στη Μηχανική των Υλικών και στην Ελαστικότητα (εδώ με ισχύ του νόμου του Hooke), (γ) στη Μετάδοση Θερμότητας (ή Διάδοση Θερμότητας), (δ) στη Ρευστομηχανική (ή Μηχανική των Ρευστών), (ε) στην Εδαφομηχανική, (στ) στην Περιβαλλοντική Υδραυλική, (ζ) στην Κυκλοφοριακή Ροή, κλπ. Δεν αποδεικνύεται εδώ η ισχύς των εξεταζόμενων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους στις παραπάνω περιοχές της επιστήμης, εδώ, ειδικότερα, καταρχήν του Πολιτικού Μηχανικού. Εντούτοις παρέχεται μια σαφής εικόνα για το ιδιαίτερο ενδιαφέρον που παρουσιάζουν οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους για τον Πολιτικό Μηχανικό. Το ενδιαφέρον αυτό είναι τουλάχιστον εξίσου σημαντικό (και ίσως κάπως σημαντικότερο) από το αντίστοιχο ενδιαφέρον που παρουσιάζουν οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Στη συνέχεια στο παρόν Κεφάλαιο Β2 αναφερόμαστε και σε τρεις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους τετάρτης τάξεως τώρα, που παρουσιάζουν και αυτές σημαντικό ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό. Συγκεκριμένα αναφερόμαστε: (α) στην **εξίσωση των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού** στη **Δυναμική των Κατασκευών** (που ήδη την εξετάσαμε και στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β1), (β) στη **διαρμονική εξίσωση**, την οποία επαληθεύει η τασική συνάρτηση του Airy στην **επίπεδη Ελαστικότητα** στη **Μηχανική των Υλικών**, (γ) στη **στατική εξίσωση της συνήθους πλάκας** στις **Πλάκες**, που είναι ουσιαστικά το μη ομογενές ανάλογο της διαρμονικής εξισώσεως, και (δ) στη **δυναμική εξίσωση της συνήθους πλάκας**, στην εξίσωση των ταλαντώσεων της πλάκας.

Στο τέλος δίνουμε δύο παραδείγματα συστημάτων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και ένα παράδειγμα μη γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους. Μερικά συγκεκριμένα θέματα ευρέσεως (κατασκευής) των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους που ισχύουν σε συγκεκριμένα προβλήματα θα αναφερθούν εκτενώς στο επόμενο Κεφάλαιο Β3.

## B2.1. ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ

Οι τέσσερις βασικότερες εξισώσεις δευτέρας τάξεως της Μαθηματικής Φυσικής οι οποίες παρουσιάζονται σε προβλήματα της Φυσικής και της Επιστήμης του Μηχανικού είναι: (α) η εξίσωση του Laplace, (β) η εξίσωση του Poisson, (γ) η εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση) και (δ) η εξίσωση της διαχύσεως.

### B2.1.1. Η εξίσωση του Laplace

**Μορφή:** Η διδιάστατη εξίσωση του Laplace σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$  έχει τη μορφή (1.1.16), την επαναλαμβάνουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1.1)$$

Η άγνωστη συνάρτηση είναι η  $u = u(x, y)$ . Στις τρεις διαστάσεις και πάλι σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  η εξίσωση του Laplace παίρνει την προφανή γενικευμένη μορφή της (1.2.2)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1.2)$$

Τώρα η άγνωστη συνάρτηση  $u$  εξαρτάται και από τις τρεις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ , δηλαδή  $u = u(x, y, z)$ . Σημειώνεται ότι πολύ σπάνια η εξίσωση του Laplace καλείται και αρμονική εξίσωση σε αντιστοιχία με τη διαρμονική εξίσωση, που θα την αναφέρουμε παρακάτω. Οι λύσεις  $u$  της εξισώσεως του Laplace (ή αρμονικής εξισώσεως) καλούνται αρμονικές συναρτήσεις είτε αναφερόμαστε στις δύο διαστάσεις είτε στις τρεις. Ειδικά στις δύο διαστάσεις θα εξετάσουμε τις αρμονικές συναρτήσεις λεπτομερώς και στο Μέρος Δ αυτών των διδακτικών βιβλίων Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς. Το μέρος αυτό αφορά στις Μιγαδικές Συναρτήσεις.

**Παραδείγματα λύσεων:** Η εξίσωση του Laplace έχει πάρα πολλές λύσεις και στις δύο και στις τρεις διαστάσεις. Παραδείγματος χάρη, στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$  η πιο πάνω εξίσωση (2.1.1) έχει μεταξύ πάρα πολλών λύσεων και τις εξής συναρτήσεις  $u = u(x, y)$ : (α) πολυωνυμικές λύσεις, π.χ.

$$x^2 - y^2, \quad 2xy, \quad x^3 - 3xy^2, \quad 3x^2y - y^3, \quad x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad x^3y - xy^3, \quad (2.1.3)$$

(β) λύσεις που περιέχουν την εκθετική συνάρτηση, υπερβολικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις, π.χ.

$$e^x \cos y, \quad \cos x \cosh y, \quad \sin x \cosh y \quad (2.1.4)$$

και παραπέρα

$$x \cosh x \cos y - y \sinh x \sin y, \quad x \sinh x \sin y + y \cosh x \cos y. \quad (2.1.5)$$

(γ) Τη λογαριθμική συνάρτηση:  $\ln$ , τη συνάρτηση τόξο εφαπτομένης:  $\tan^{-1}$

$$\ln(x^2 + y^2) \quad (\text{φυσικά με } x^2 + y^2 \neq 0), \quad \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad (\text{φυσικά με } x \neq 0) \quad (2.1.6)$$

καθώς και (δ) πάρα πολλές, άπειρες άλλες συναρτήσεις απλές έως και εξαιρετικά πολύπλοκες.

Το Μέρος Δ αυτών των διδακτικών βιβλίων αφορά στη Μιγαδική Ανάλυση. Εκεί πέρα θα εξηγήσουμε ότι τόσο (α) το πραγματικό μέρος (real part,  $\text{Re}$ ,  $\Re$ )  $u = u(x, y)$  όσο και (β) το φανταστικό μέρος (imaginary part,  $\text{Im}$ ,  $\Im$ )  $v = v(x, y)$  μιας αναλυτικής μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z) = u + iv$  με  $z = x + iy$  (όπου  $i = \sqrt{-1}$  δηλώνει τη φανταστική μονάδα) είναι και τα δύο διδιάστατες αρμονικές συναρτήσεις. Επομένως επαληθεύουν τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (2.1.1).

Ας σημειωθεί τέλος ότι αποτελεί απλούστατο καθήκον η επαλήθευση ότι όλες οι παραπάνω συναρτήσεις (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5) και (2.1.6) είναι διδιάστατες αρμονικές συναρτήσεις  $u = u(x, y)$ . Αυτό πετυχαίνεται απλά με τον υπολογισμό σ' αυτές: (α) της δεύτερης μερικής παραγώγου ως προς  $x$  και (β) ανάλογα και της δεύτερης μερικής παραγώγου ως προς  $y$  και άθροιση των αποτελεσμάτων. Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνεται η ισχύς της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace (2.1.1). Οι μερικές αυτές παραγωγίσεις μπορούν να γίνουν είτε με το χέρι είτε με κάποιο πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών (computer algebra system), όπως είναι η *Mathematica*. (Ο γράφων, για να είναι



ειλικρινής, προτιμάει τη δεύτερη αυτή δυνατότητα, που είναι χρονικά πολύ οικονομικότερη και υπολογιστικά πολύ ασφαλέστερη. Αυτά ισχύουν ιδίως για πολύπλοκες αρμονικές συναρτήσεις.)

**Επτά χαρακτηρισμοί:** Η εξίσωση του Laplace είναι ομογενής, γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, δευτέρας τάξεως, με σταθερούς συντελεστές, ελλειπτικού τύπου (Παράγραφος Β1.3.2α του προηγούμενου Κεφαλαίου Β1) και με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$  στη διδιάστατη μορφή της (2.1.1). Ανάλογα, αλλά με τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές: τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  στην τριδιάστατη μορφή της (2.1.2).

**Πού παρουσιάζεται:** Πρόκειται για μια πάρα πολύ συνηθισμένη και χρήσιμη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους στη Μαθηματική Φυσική και, αυτό που μας ενδιαφέρει εδώ, στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Συγκεκριμένα η άγνωστη συνάρτηση  $u$  μπορεί να δηλώνει:

(α) Στην **Κλασική Μηχανική** το δυναμικό βαρύτητας (ή βαρυτικό δυναμικό)  $\Phi = \Phi(x, y, z)$ . Αυτό επαληθεύει την τριδιάστατη εξίσωση του Laplace (2.1.2), δηλαδή

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (2.1.7)$$

εφόσον βέβαια δεν υπάρχει κατανεμημένη μάζα στην τριδιάστατη περιοχή ισχύος της εξίσωσης αυτής. Τούτο είναι συνέπεια του νόμου της παγκοσμίου έλξης στη Βαρύτητα. Ακριβώς το ίδιο ισχύει στον Ηλεκτρισμό για το ηλεκτρικό δυναμικό  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ , εφόσον βέβαια δεν υπάρχει κατανεμημένο ηλεκτρικό φορτίο στην περιοχή ισχύος της ίδιας εξίσωσης. Παρόμοια και για το μαγνητικό δυναμικό. Για το λόγο αυτό η εξίσωση του Laplace αποκαλείται μερικές φορές (ιδίως αποκαλείτο παλαιότερα) και εξίσωση του δυναμικού.

(β) Στη **Μετάδοση Θερμότητας (ή Διάδοση Θερμότητας)** στη θερμοκρασία στη μόνιμη (σταθερή) κατάσταση (χωρίς εξάρτηση από το χρόνο  $t$ ) είτε στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$ : διδιάστατη μορφή (2.1.1) είτε στις τρεις διαστάσεις  $(x, y, z)$ : τριδιάστατη μορφή (2.1.2). Η άγνωστη συνάρτηση  $u$  παριστάνει τώρα τη θερμοκρασία. Η απόλυτη θερμοκρασία συχνά δηλώνεται και με το σύμβολο  $T$ , δηλαδή  $u = T$ . Η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου συχνά δηλώνεται και με το σύμβολο  $\theta$ , δηλαδή  $u = \theta$ . Συγκεκριμένα τότε έχουμε

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1.8)$$

στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$ . Ανάλογα και στις τρεις διαστάσεις  $(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1.9)$$

Ο Πολιτικός Μηχανικός είναι υποχρεωμένος να μελετάει ο ίδιος μέχρι ενός σημείου τα προβλήματα θερμομονώσεως σε ένα κτίριο. Προς το σκοπό αυτό πρέπει να επιλέγει κατάλληλα θερμομονωτικά υλικά, αν είναι δυνατόν και ηχομονωτικά ταυτόχρονα, τους κατάλληλους υαλοπίνακες, κλπ.

(γ) Στη **Ρευστομηχανική (ή Μηχανική των Ρευστών)** για ιδεατό ρευστό. Συγκεκριμένα στη μόνιμη (σταθερή) αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  είναι αρμονική συνάρτηση. Επαληθεύει δηλαδή την εξίσωση του Laplace (2.1.1) στις δύο διαστάσεις και σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$  ή (2.1.2) στις τρεις διαστάσεις και πάλι σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ . Άρα στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1.10)$$

Η άγνωστη συνάρτηση είναι η  $\Phi = \Phi(x, y)$ . Στις τρεις διαστάσεις και πάλι σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  η εξίσωση (2.1.10) παίρνει την προφανή γενικευμένη μορφή της (ανάλογη της (2.1.2)) τώρα με  $\Phi = \Phi(x, y, z)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1.11)$$

Επίσης στη Ρευστομηχανική ιδεατού ρευστού και ξανά στη μόνιμη διδιάστατη αστρόβιλη ροή και η ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής)  $\Psi = \Psi(x, y)$  επαληθεύει την εξίσωση του Laplace (2.1.1), είναι δηλαδή και αυτή αρμονική συνάρτηση. Άρα

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1.12)$$

Τονίζεται με έμφαση ότι η ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής)  $\Psi = \Psi(x, y)$  αφορά μόνο σε διδιάστατα (όχι και σε τριδιάστατα) προβλήματα μόνιμης (σταθερής) αστρόβιλης ροής ιδεατού ρευστού.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ήδη προσδιορίσει το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  από την επίλυση της εξίσωσης του Laplace (2.1.10) ή (2.1.11) μαζί με τις σχετικές συνοριακές συνθήκες. Στη συνέχεια μπορούμε εύκολα (με απλές παραγωγίσεις) να προσδιορίσουμε και τις συνιστώσες της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού σε κάθε σημείο της μόνιμης ροής που εξετάζουμε. Θα επεκταθούμε στα θέματα αυτά στην Ενότητα Β3.4 του επόμενου Κεφαλαίου Β3. Εκεί μάλιστα θα αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις  $\Phi$  και  $\Psi$  πραγματικά επαληθεύουν την εξίσωση του Laplace: είναι αρμονικές συναρτήσεις.

(δ) Στην **Εδαφομηχανική** στην Υδραυλική των Εδαφών και συγκεκριμένα στο φαινόμενο της διηθήσεως, της ροής νερού (ύδατος) ή, σπάνια, άλλου ρευστού μέσω του εδάφους με  $z$  ( $z > 0$ ) το βάθος μέσα στο έδαφος. Γίνονται οι υποθέσεις ασυμπίεστου ρευστού (συνήθως του νερού) και ασυμπίεστου και διαπερατού πορώδους εδάφους, επίσης δε η υπόθεση διδιάστατης και μόνιμης (σταθερής) ροής του ρευστού μέσα στο έδαφος. Τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει η εξίσωση της συνεχείας για τις συνιστώσες  $v_x = v_x(x, z)$  και  $v_z = v_z(x, z)$  της διανυσματικής ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού. Με βάση την εξίσωση της συνεχείας προκύπτει ότι οι συνιστώσες αυτές  $v_x = v_x(x, z)$  και  $v_z = v_z(x, z)$  (κατά την οριζόντια διεύθυνση  $x$  και την κατακόρυφη διεύθυνση  $z$  αντίστοιχα) μπορούν να θεωρηθούν ότι προέρχονται από δυναμικό ταχύτητας  $\Phi = \Phi(x, z)$ . Αμέσως πιο πάνω είδαμε ότι ακριβώς το ίδιο ισχύει και στη Ρευστομηχανική ιδεατού ρευστού. Το δυναμικό αυτό ταχύτητας  $\Phi$  επαληθεύει και εδώ, στο φαινόμενο της διηθήσεως του νερού στο έδαφος στην Εδαφομηχανική, την εξίσωση του Laplace (2.1.10) (τώρα όμως με  $z$  αντί  $y$  για το βάθος εντός του εδάφους). Την ίδια εξίσωση επαληθεύει και στη Ρευστομηχανική ιδεατού ρευστού. Ακριβώς ανάλογα ισχύουν και για τη συνάρτηση ροής ή ροϊκή συνάρτηση  $\Psi = \Psi(x, z)$  στο ίδιο φαινόμενο της διηθήσεως. Δηλαδή και η συνάρτηση αυτή  $\Psi(x, z)$  επαληθεύει την εξίσωση του Laplace (2.1.12) βέβαια πάλι με  $z$  αντί  $y$ .

Το νέο στοιχείο στο φαινόμενο της διηθήσεως στην Εδαφομηχανική σχετικά με τη Ρευστομηχανική είναι ότι στην Εδαφομηχανική ισχύει υπό σχετικά ήπιες προϋποθέσεις ο νόμος του Darcy (1856). Σύμφωνα με το θεμελιώδη αυτό νόμο στην Εδαφομηχανική ισχύει για ισότροπο έδαφος

$$v_x = ki_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_z = ki_z = -k \frac{\partial h}{\partial z} \implies \mathbf{V} = -k \text{grad } h \equiv -k \nabla h. \quad (2.1.13)$$

Στις σχέσεις αυτές τα σύμβολα  $v_x$  και  $v_z$  δηλώνουν, όπως ήδη αναφέρθηκε, τις συνιστώσες της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του νερού (του ύδατος) που διηθείται εντός του εδάφους. Τονίζεται ότι η ταχύτητα αυτή  $\mathbf{V}$  είναι η φαινομενική μέση ταχύτητα κινήσεως του νερού: παροχή ανά μονάδα επιφανείας του εδάφους, ειδική παροχή, που καλείται συχνά **ταχύτητα Darcy**. Αντίθετα η πραγματική μέση ταχύτητα κινήσεως του νερού  $\mathbf{V}_s$  (η ταχύτητα διηθήσεως) είναι πολύ μεγαλύτερη:  $\mathbf{V}_s = \mathbf{V}/n$  με  $n$  το πορώδες του εδάφους: διατομή διακένων  $A_k$  στο έδαφος δια της συνολικής διατομής  $A$ :  $n = A_k/A$ . Δηλαδή στο πορώδες  $n$  λαμβάνεται υπόψη το ποσοστό των διακένων (των πόρων) σε μια διατομή του εδάφους. Φυσικά μόνο σ' αυτά τα διάκενα ρέει πραγματικά το νερό! Παραπέρα το σύμβολο  $k$  δηλώνει το **συντελεστή διαπερατότητας του εδάφους** υπό τις προϋποθέσεις που συνήθως το χρησιμοποιεί ο Πολιτικός Μηχανικός. Επίσης τα σύμβολα  $i_x = -\partial h/\partial x$  και  $i_z = -\partial h/\partial z$  δηλώνουν τις **υδραυλικές κλίσεις** κατά την οριζόντια διεύθυνση  $x$  και την κατακόρυφη  $z$  αντίστοιχα. Τέλος το σύμβολο  $h$  δηλώνει το **υδραυλικό φορτίο** (ή τη **διαφορά πιεζομετρικής στάθμης**) στο παρόν πρόβλημα διηθήσεως.

Το τελικό συμπέρασμα από το νόμο του Darcy (2.1.13) είναι ότι η ταχύτητα  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, z)$  του νερού

(του ύδατος) το οποίο διηθείται μέσω του εδάφους υπολογίζεται σαν η κλίση (ή βαθμίδα, grad,  $\nabla$ ) του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$ . Υπολογίζεται επίσης και σαν η κλίση του υδραυλικού φορτίου  $h$ , πολλαπλασιασμένου όμως επί  $-k$  (με  $k$  το συντελεστή διαπερατότητας του εδάφους). Δηλαδή

$$\mathbf{V}(x, z) = \text{grad } \Phi(x, z) = -k \text{ grad } h(x, z), \quad \text{ισοδύναμα} \quad \mathbf{V}(x, z) = \nabla \Phi(x, z) = -k \nabla h(x, z) \quad (2.1.14)$$

με τη χρήση του συμβόλου  $\nabla$  για την κλίση (βαθμίδα, grad). Άρα το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi = \Phi(x, z)$  και το υδραυλικό φορτίο  $h = h(x, z)$  πρέπει να συνδέονται μέσω της σχέσεως

$$\Phi(x, z) = -kh(x, z) + C \quad (2.1.15)$$

με το  $C$  σταθερά ολοκληρώσεως. Εντούτοις η σταθερά αυτή  $C$  δεν έχει ιδιαίτερη πρακτική σημασία, ιδίως όταν γίνονται παραγωγίσεις, όπως συμβαίνει εδώ λόγω των σχέσεων (2.1.13) ή (2.1.14). Άρα, εφόσον το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi = \Phi(x, z)$  επαληθεύει την εξίσωση του Laplace (2.1.10), ακριβώς το ίδιο πρέπει να συμβαίνει και με το υδραυλικό φορτίο  $h = h(x, z)$ . Συγκεκριμένα αντικαθιστώντας τη σχέση (2.1.15) στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (2.1.10) (αλλά τώρα με  $z$  αντί  $y$ ) και διαιρώντας με  $-k$ , παίρνουμε και πάλι τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace, τώρα στη μορφή

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1.16)$$

Τώρα βέβαια η εξίσωση αυτή ισχύει για το υδραυλικό φορτίο  $h = h(x, z)$ .

Ως εδώ είχαμε υποθέσει ισότροπο έδαφος και, επομένως, είχαμε τον ίδιο συντελεστή διαπερατότητας  $k$  τόσο κατά την οριζόντια διεύθυνση  $x$  όσο και κατά την κατακόρυφη διεύθυνση  $z$  στο παρόν φαινόμενο διηθήσεως. Τούτο όμως γενικά δεν ισχύει: το έδαφος είναι ανισότροπο με δύο διαφορετικούς συντελεστές διαπερατότητας:  $k_x$  και  $k_z$  κατά τις διευθύνσεις  $x$  (οριζόντια) και  $z$  (κατακόρυφη) αντίστοιχα. Σ' αυτήν την περίπτωση, δηλαδή του ανισότροπου εδάφους, ο νόμος του Darcy (2.1.13) παίρνει την εξής γενικευμένη μορφή του:

$$v_x = k_x i_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}, \quad v_z = k_z i_z = -k_z \frac{\partial h}{\partial z} \quad \implies \quad \mathbf{V} = v_x \mathbf{i} + v_z \mathbf{k} = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \mathbf{i} - k_z \frac{\partial h}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.1.17)$$

με διαφορετικούς συντελεστές διαπερατότητας  $k_x$  και  $k_z$  κατά τις διευθύνσεις  $x$  και  $z$  αντίστοιχα.

Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της συνεχείας για τις συνιστώσες  $v_x$  και  $v_z$  της διανυσματικής ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του νερού που διηθείται παίρνει, όπως μάλλον εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί, την εξής τελική μορφή της:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1.18)$$

Η εξίσωση αυτή δεν είναι βέβαια η ίδια η διδιάστατη εξίσωση του Laplace (2.1.1) ή μάλλον (2.1.16), όμως μοιάζει αρκετά μαζί της. Έχει επίσης ακριβώς τους ίδιους χαρακτηρισμούς συμπεριλαμβανόμενου και του τύπου: είναι προφανώς ελλειπτικού τύπου (ή, απλούστερα, ελλειπτική). Αυτό βέβαια ισχύει, επειδή οι συντελεστές διαπερατότητας  $k_x$  και  $k_z$  είναι θετικοί:  $k_x, k_z > 0$ .

(ε) Στη **Μηχανική των Υλικών (ή Αντοχή των Υλικών)** υποθέτοντας την ισχύ του θεμελιώδους νόμου του Hooke στη γραμμική Ελαστικότητα. Υποθέτουμε επίσης ότι το ελαστικό πρόβλημα είναι επίπεδο, δηλαδή ότι έχουμε συνθήκες είτε (α) επίπεδης εντάσεως: ένα πάρα πολύ λεπτό ελαστικό μέσον είτε (β) επίπεδης παραμορφώσεως: ένα πάρα πολύ παχύ ελαστικό μέσον. Τέλος υποθέτουμε ότι το ελαστικό μέσον είναι ισότροπο. Τότε αποδεικνύεται ότι το άθροισμα των ορθών τάσεων  $s = \sigma_x + \sigma_y$  επαληθεύει και αυτό τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (2.1.1). Σημειώνεται ότι το ίδιο άθροισμα  $s = s(x, y)$  είναι ίσο και με το άθροισμα των κυρίων τάσεων  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ , δηλαδή  $s = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$ . Και αυτό αποδεικνύεται στη Μηχανική των Υλικών. Επομένως

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 0, \quad \text{ισοδύναμα} \quad \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1.19)$$

με  $s = s(x, y) = \sigma_x(x, y) + \sigma_y(x, y)$ , επειδή αναφερόμαστε στο επίπεδο πρόβλημα, δηλαδή στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$ . Το αποτέλεσμα αυτό δε γενικεύεται άμεσα στο τριδιάστατο πρόβλημα της Ελαστικότητας, παρόλο που και εκεί παρουσιάζονται πάρα πολύ συχνά αρμονικές συναρτήσεις  $u$ .

(στ) Πραγματικά στην **τριδιάστατη Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών** πάλι με την ισχύ του νόμου του Hooke αποδεικνύεται ότι οι συνιστώσες των μετατοπίσεων  $u$ ,  $v$  και  $w$  μπορούν άμεσα να προσδιορισθούν με βάση τέσσερις συναρτήσεις: τις  $\varphi_0 = \varphi_0(x, y, z)$ ,  $\varphi_1 = \varphi_1(x, y, z)$ ,  $\varphi_2 = \varphi_2(x, y, z)$  και  $\varphi_3 = \varphi_3(x, y, z)$ . Είναι και οι τέσσερις αρμονικές. (Βέβαια τώρα αναφερόμαστε στις τρεις διαστάσεις  $(x, y, z)$ .) Επομένως επαληθεύουν την τριδιάστατη εξίσωση του Laplace (2.1.2)

$$\frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial z^2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (2.1.20)$$

Ασφαλώς με γνωστές τις συναρτήσεις αυτές  $\varphi_k = \varphi_k(x, y, z)$  και τις μετατοπίσεις  $u$ ,  $v$  και  $w$ , που άμεσα μπορούν να προκύψουν από αυτές, είναι δυνατόν στη συνέχεια να προσδιορισθούν οι παραμορφώσεις  $\varepsilon_{ij}$  καθώς και οι τάσεις  $\sigma_{ij}$  στο τριδιάστατο ισότροπο ελαστικό μέσον.

(ζ) Παραμένουμε στη **Μηχανική των Υλικών (ή Αντοχή των Υλικών)**, τώρα όμως αναφερόμαστε στη στρέψη συνήθους ράβδου. Με τον όρο συνήθης ράβδος εννοούμε εδώ μια λεπτή ευθύγραμμη ράβδο, πεπερασμένου μήκους  $L$  (με  $0 \leq z \leq L$ ), σταθερής διατομής  $S$ , από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό και με συνοριακές συνθήκες μόνο στα δύο άκρα της  $z = 0$  και  $z = L$ . Στο πρόβλημα αυτό η συνάρτηση στρεβλώσεως  $\psi = \psi(x, y)$  της αρχικά επίπεδης διατομής  $S$  της ράβδου υπό στρεπτική καταπόνηση πληροί, επαληθεύει και αυτή τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (2.1.1) στο επίπεδο  $Oxy$  της διατομής  $S$  της καταπονούμενης σε στρέψη ράβδου. Άρα

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1.21)$$

Με την επίλυση της εξίσωσης αυτής (μαζί με τις σχετικές συνοριακές συνθήκες) προκύπτει η συνάρτηση στρεβλώσεως  $\psi = \psi(x, y)$ . Στη συνέχεια οι διατμητικές τάσεις  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$  προσδιορίζονται άμεσα από τους τύπους

$$\tau_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \quad \text{και} \quad \tau_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right) \quad (2.1.22)$$

με  $G$  το μέτρο διατμήσεως του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της ράβδου και  $\theta$  την ανά μονάδα μήκους γωνία στρέψεως της (ή στροφής της). Ας σημειωθεί παρεμπιπτόντως ότι όλες οι υπόλοιπες τάσεις (συνιστώσες του ταυνοστή των τάσεων) είναι μηδενικές σε πρόβλημα καθαρής στρέψεως ράβδου, δηλαδή ισχύει ότι  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0$  (με απλούστερο συμβολισμό για τις τρεις ορθές τάσεις:  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ ) σε ολόκληρη τη διατομή  $S$  της ράβδου. Άρα με γνωστή τη συνάρτηση στρεβλώσεως  $\psi(x, y)$  στη διατομή  $S$  της ράβδου υπό στρεπτική καταπόνηση όλες οι τάσεις (ουσιαστικά οι δύο μη μηδενικές διατμητικές τάσεις  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$ ) προσδιορίζονται άμεσα βάσει των τύπων (2.1.22). Οι υπόλοιπες τάσεις είναι μηδενικές σε ολόκληρη τη διατομή  $S$ .

**Ειδικός συμβολισμός:** Είναι πάρα πολύ γνωστή και χρήσιμη η εξίσωση του Laplace (2.1.1) (στις δύο διαστάσεις) και (2.1.2) (στις τρεις διαστάσεις) και παρουσιάζεται πάρα πολύ συχνά σε προβλήματα της Μαθηματικής Φυσικής και της Επιστήμης του Μηχανικού. (Πιο πάνω δόθηκε βέβαια κάποια έμφαση σε προβλήματα που πραγματικά συναντά ο Πολιτικός Μηχανικός στην επιστήμη του.) Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται συχνότατα το σύμβολο  $\nabla^2$  για τον τελεστή του Laplace (τον αρμονικό τελεστή, τη Λαπλασιανή, Laplacian) με ορισμό

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.1.23)$$

στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$ , αλλά και στις τρεις διαστάσεις  $(x, y, z)$  με το ίδιο ακριβώς σύμβολο

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.1.24)$$

(Σημειώνεται ότι το ίδιο το σύμβολο  $\nabla$  καλείται ανάδελτα και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στη Διανυσματική Ανάλυση.) Άρα η εξίσωση του Laplace στις δύο διαστάσεις (2.1.1) και η αντίστοιχη εξίσωση στις τρεις διαστάσεις (2.1.2) μπορούν πλέον να γραφούν στην ενιαία μορφή

$$\nabla^2 u = 0. \quad (2.1.25)$$

Ας σημειωθεί ότι αρκετές φορές ιδίως στη μαθηματική βιβλιογραφία, παλαιότερα και στην τεχνική βιβλιογραφία, χρησιμοποιείται και το σύμβολο  $\Delta$  αντί του  $\nabla^2$ , δηλαδή  $\Delta \equiv \nabla^2$ . Το σύμβολο  $\Delta$  είναι βέβαια και αυτό καταρχήν αποδεκτό, αν και συχνά χρησιμοποιείται με εντελώς διαφορετική έννοια, κυρίως για μικρές πεπερασμένες (όχι απειροστές) διαφορές, π.χ.  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Τούτο συμβαίνει ιδίως στην κατασκευή διαφορικών εξισώσεων, όπως, π.χ., στην Ενότητα B3.2 του επόμενου Κεφαλαίου B3 για τις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου. Επίσης και στην Αριθμητική Ανάλυση για τις πεπερασμένες διαφορές και την αριθμητική παραγωγή με τη χρήση πεπερασμένων διαφορών.

Ο ενιαίος συμβολισμός (2.1.25) για την εξίσωση του Laplace είτε στη διδιάστατη μορφή της (2.1.1) είτε στην τριδιάστατη μορφή της (2.1.2) είναι ασφαλώς και ενδιαφέρων και χρήσιμος. Προϋποθέτει όμως ότι ο χρήστης της διαφορικής αυτής εξισώσεως με μερικές παραγώγους (2.1.25) είναι ήδη ενημερωμένος και επομένως γνωρίζει εκ των προτέρων πού ακριβώς αναφέρεται η εξίσωση του Laplace (2.1.25). Μπορεί να αναφέρεται είτε (α) στις δύο διαστάσεις (π.χ. για τη ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$  στη Ρευστομηχανική) είτε (β) τόσο στις δύο όσο και στις τρεις διαστάσεις (π.χ. για το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  επίσης στη Ρευστομηχανική) είτε (γ) αποκλειστικά στις τρεις διαστάσεις (π.χ. για τις τέσσερις αρμονικές συναρτήσεις  $\varphi_k$ , με  $k = 0, 1, 2, 3$ , στην τριδιάστατη Ελαστικότητα).

### B2.1.2. Η εξίσωση του Poisson

**Μορφή:** Η εξίσωση του Poisson είναι μη ομογενής σε αντίθεση με την εξίσωση του Laplace, που είναι ομογενής. Συγκεκριμένα αποτελεί απλά τη γενίκευση της εξισώσεως του Laplace, όταν υπάρχει και γνωστό δεξιό μέλος, που την καθιστά μη ομογενή. Θα μπορούσε επομένως να είχε χαρακτηριστεί σαν η μη ομογενής εξίσωση του Laplace. Η εξίσωση του Poisson έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (2.1.26)$$

στις δύο διαστάσεις με τη συνάρτηση  $f = f(x, y)$  το δεξιό μέλος γνωστή. Η μορφή αυτή αποτελεί φυσικά γενίκευση της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace (2.1.1). Απολύτως ανάλογα στις τρεις διαστάσεις η εξίσωση του Poisson παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z). \quad (2.1.27)$$

Η μορφή αυτή συνιστά γενίκευση της τριδιάστατης εξισώσεως του Laplace (2.1.2). Και οι δύο αυτές εξισώσεις (2.1.26) και (2.1.27) μπορούν βέβαια να γραφούν και με τον ενιαίο συμβολισμό

$$\nabla^2 u = f. \quad (2.1.28)$$

Ο συμβολισμός αυτός χρησιμοποιεί το σύμβολο  $\nabla$  (ανάδελτα) και αποτελεί γενίκευση της εξισώσεως του Laplace (2.1.25). Φυσικά στην εξίσωση του Poisson (2.1.28) η άγνωστη συνάρτηση  $u$ , όπως επίσης και η γνωστή συνάρτηση  $f$  στο δεξιό μέλος, είναι συναρτήσεις είτε των δύο μεταβλητών  $(x, y)$  είτε και των τριών μεταβλητών  $(x, y, z)$ . Βέβαια αυτό εξαρτάται από την ερμηνεία της εξισώσεως αυτής (2.1.28) σαν της διδιάστατης ή της τριδιάστατης εξισώσεως του Poisson.

**Χαρακτηρισμοί:** Όπως και στην εξίσωση του Laplace, αλλ' η εξίσωση του Poisson είναι μη ομογενής. (Υποτίθεται ότι αυτό δικαιολογεί και την εντελώς διαφορετική ονομασία της!)

**Πού παρουσιάζεται:** Όπου υπάρχει και γνωστό δεξιό μέλος  $f = f(x, y)$  (στις δύο διαστάσεις) ή  $f = f(x, y, z)$  (στις τρεις διαστάσεις) στην εξίσωση του Laplace, δηλαδή η εξίσωση του Laplace

καθίσταται μη ομογενής. Το δεξιό αυτό μέλος  $f$  είναι βέβαια πάντοτε μια γνωστή συνάρτηση στην εξίσωση του Poisson και μπορεί να παριστάνει:

(α) Μια κατανεμημένη μάζα στην **Κλασική Μηχανική** στο πεδίο βαρύτητας. Δηλαδή ο χώρος ισχύος της εξίσωσης του Poisson έχει πυκνότητα (εννοείται μάζας, συνηθισμένη πυκνότητα)  $\rho = \rho(x, y, z)$ . Αναφερόμαστε φυσικά στις τρεις διαστάσεις. (Ανάλογα ένα κατανεμημένο ηλεκτρικό φορτίο στον Ηλεκτρισμό επίσης στις τρεις διαστάσεις.)

(β) Μια κατανεμημένη πηγή (ή απαγωγή) θερμότητας στη **Μετάδοση Θερμότητας** (ή **Διάδοση Θερμότητας**) τώρα είτε στις δύο είτε στις τρεις διαστάσεις.

(γ) Ίσως πολύ πιο ενδιαφέρουσα για τον Πολιτικό Μηχανικό είναι η εμφάνιση της διδιάστατης εξίσωσης του Poisson (2.1.26) στο πρόβλημα της στρέψεως συνήθους ράβδου στη **Μηχανική των Υλικών** (ή **Αντοχή των Υλικών**). Στο ενδιαφέρον αυτό φαινόμενο της στρέψεως εξετάζουμε τη στρέψη συνήθους ευθύγραμμης ράβδου (φυσικά σταθερής διατομής) από ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό. Η συνάρτηση στρεβλώσεως  $\psi = \psi(x, y)$  της αρχικά επίπεδης διατομής της ράβδου υπό στρεπτική καταπόνηση πληροί, επαληθεύει και αυτή τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (2.1.1). Στο πρόβλημα αυτό αναφερθήκαμε ήδη με τη χρήση της συναρτήσεως στρεβλώσεως  $\psi = \psi(x, y)$ , που επαληθεύει την εξίσωση του Laplace (2.1.21), δηλαδή

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1.29)$$

Οι δύο μη μηδενικές διατμητικές τάσεις  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$  δίνονται από τους τύπους (2.1.22), συγκεκριμένα

$$\tau_{xz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - y \right) \quad \text{και} \quad \tau_{yz} = G\theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + x \right). \quad (2.1.30)$$

Αντί για τη συνάρτηση στρεβλώσεως  $\psi(x, y)$  συνήθως ο Πολιτικός Μηχανικός (αλλά και ο Μηχανολόγος Μηχανικός) χρησιμοποιούν στην πράξη την τασική συνάρτηση του Prandtl  $\varphi(x, y)$  ακριβώς για το ίδιο πρόβλημα στρέψεως συνήθους ράβδου. Η τασική συνάρτηση του Prandtl στη στρέψη  $\varphi(x, y)$  αναφέρεται και αυτή στο επίπεδο  $Oxy$  της διατομής της καταπονούμενης σε στρέψη ράβδου, αλλά πληροί την ακόλουθη εξίσωση του Poisson:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta. \quad (2.1.31)$$

Δηλαδή εδώ  $f(x, y) = -2G\theta$  στο δεξιό μέλος της εξίσωσης αυτής. Το γινόμενο αυτό  $-2G\theta$  είναι σταθερά με το σύμβολο  $G$  να δηλώνει το μέτρο διατμήσεως του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της υπό στρέψη συνήθους ράβδου, το δε σύμβολο  $\theta$  την ανά μονάδα μήκους γωνία στρέψεως (ή στροφής) της ίδιας ράβδου. (Σημειώνεται ότι η γωνία στρέψεως  $\theta$  μετριέται σε ακτίνια ανά μέτρο, rad/m, ή σε αντίστοιχη μονάδα με ακτίνια, όχι όμως με μοίρες.) Η ίδια συνάρτηση  $\varphi(x, y)$  παίρνει σταθερά (συνήθως μηδενική) τιμή στο σύνορο  $C$  της διατομής  $S$  της ράβδου. Με γνωστή την τασική συνάρτηση  $\varphi(x, y)$  οι διατμητικές τάσεις  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$  προσδιορίζονται τώρα από τους εξής απλούς τύπους:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{και} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2.1.32)$$

Οι τύποι αυτοί είναι απλούστεροι από τους τύπους (2.1.30), που βασίζονται στη συνάρτηση στρεβλώσεως  $\psi(x, y)$ . Επιπλέον δικαιολογούν και το χαρακτηρισμό της συναρτήσεως  $\varphi(x, y)$  του Prandtl σαν τασικής συναρτήσεως, δηλαδή σαν μιας συναρτήσεως που εύκολα μας δίνει τις τάσεις, εδώ, στο πρόβλημα της στρέψεως, τις δύο διατμητικές τάσεις  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$ . (Όλες οι υπόλοιπες τάσεις είναι μηδενικές!) Είναι λοιπόν αρκετά χρήσιμη η τασική συνάρτηση του Prandtl  $\varphi(x, y)$  σε συνήθεις ράβδους καταπονούμενες σε στρέψη!

Επ' ευκαιρία, ας γίνουν και δυο-τρεις παρατηρήσεις: Η γενική λύση  $\varphi(x, y)$  της εξίσωσης του Poisson (2.1.31) είναι αναμφίβολα ίση με το άθροισμα: (α) της γενικής λύσεως  $\varphi_h(x, y)$  της

αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης (με δεξιό μέλος μηδέν), δηλαδή της εξίσωσης του Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_h}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1.33)$$

συν (β) μια μερική (ή ειδική) λύση  $\varphi_p(x, y)$  της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (2.1.31) του Poisson. Σε περίπτωση που η συνάρτηση  $f(x, y)$  στο δεξιό μέλος είναι σταθερά: π.χ.  $f(x, y) = -2G\theta$ , όπως συμβαίνει εδώ, τέτοιες μερικές λύσεις μπορούν να κατασκευασθούν πολύ εύκολα.

Για παράδειγμα, δύο τέτοιες διαφορετικές μερικές λύσεις είναι της μορφής

$$\varphi_{px}(x, y) = Ax^2, \quad \varphi_{py}(x, y) = By^2 \quad (2.1.34)$$

με το  $A$  στην πρώτη ή το  $B$  στη δεύτερη προσδιοριστέο συντελεστή. Παραγωγίζοντας έτσι δύο φορές την πρώτη συνάρτηση  $\varphi_{px}(x, y)$  (ως προς  $x$  εννοείται), βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\varphi_{px}(x, y) = Ax^2 \implies \frac{\partial \varphi_{px}(x, y)}{\partial x} = 2Ax \implies \frac{\partial^2 \varphi_{px}(x, y)}{\partial x^2} = 2A. \quad (2.1.35)$$

Προφανώς οι μερικές παράγωγοι ως προς τη μεταβλητή  $y$  είναι μηδενικές, απλά επειδή η συνάρτηση αυτή  $\varphi_{px}(x, y)$  δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή  $y$ . Άρα, αντικαθιστώντας τη δεύτερη μερική παράγωγο  $\partial^2 \varphi_{px}(x, y) / \partial x^2 = 2A$  στην εξίσωση του Poisson (2.1.31), διαπιστώνουμε ευθύς ότι

$$2A + 0 = -2G\theta \implies A = -G\theta \implies \varphi_{px}(x, y) = -G\theta x^2. \quad (2.1.36)$$

Επομένως η γενική λύση της εξίσωσης του Poisson (2.1.31) για την τασική συνάρτηση του Prandtl  $\varphi(x, y)$  έχει τη μορφή

$$\varphi(x, y) = \varphi_h(x, y) - G\theta x^2 \quad \text{ή} \quad \varphi(x, y) = \varphi_h(x, y) - G\theta y^2, \quad (2.1.37)$$

εάν είχαμε προτιμήσει τη δεύτερη μερική λύση  $\varphi_{py}(x, y) = By^2$  στις σχέσεις (2.1.34). Προφανώς στις γενικές λύσεις (2.1.37) η συνάρτηση  $\varphi_h(x, y)$  δηλώνει τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Αυτή δεν είναι άλλη από την εξίσωση του Laplace (2.1.33). (Η ομογενής εξίσωση που αντιστοιχεί σε μια εξίσωση του Poisson είναι απλά η αντίστοιχη εξίσωση του Laplace!)

Πολύ εύκολα μπορεί να επαληθευθεί ότι το ημίθροισμα των δύο μορφών (2.1.37) της γενικής λύσεως  $\varphi(x, y)$  της εξίσωσης του Poisson (2.1.31) εκφράζει και αυτό τη γενική λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους. Άρα μια τρίτη μορφή (και τώρα, ίσως καλύτερα, συμμετρική στην εμφάνιση) της γενικής λύσεως  $\varphi(x, y)$  της εξίσωσης του Poisson (2.1.31) είναι η ακόλουθη:

$$\varphi(x, y) = \varphi_h(x, y) - \frac{G\theta}{2} (x^2 + y^2). \quad (2.1.38)$$

Μπορεί επομένως να προτιμήσει κανείς τη γενική λύση της εξίσωσης του Poisson (2.1.31) στην πρώτη μορφή της (2.1.37) ή στη δεύτερη μορφή της (2.1.37) ή στη συμμετρική μορφή της (2.1.38). Εάν μάλιστα υπάρχει κυκλική συμμετρία, π.χ. σε κυκλική ή σε δακτυλιοειδή διατομή  $S$  της ράβδου, καλύτερη είναι η συμμετρική μορφή (2.1.38), παρόλο που το θέμα δεν είναι και πολύ μεγάλης πρακτικής σημασίας.

### B2.1.3. Η εξίσωση του κύματος

**Μορφή:** Η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση) έχει τη μορφή (1.3.7) με  $x$  τη θέση (στη μία διάσταση) και  $t$  το χρόνο. Την επαναλαμβάνουμε και αυτή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.1.39)$$

Άγνωστη συνάρτηση είναι η  $u = u(x, t)$ . Η γνωστή θετική σταθερά  $c$  ( $c > 0$ ) δηλώνει την ταχύτητα διαδόσεως του κύματος (κατ' απόλυτο τιμή). Η διδιάστατη μορφή της εξίσωσης του κύματος (ή κυματικής εξίσωσης) είναι προφανώς η ακόλουθη γενίκευση της εξίσωσης (2.1.39):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.1.40)$$

Άγνωστη συνάρτηση είναι πάλι η  $u = u(x, y, t)$ . Τώρα όμως εξαρτάται από δύο χωρικές ανεξάρτητες μεταβλητές: τις  $x$  και  $y$  και μία πάλι χρονική: την  $t$ . Ανάλογη είναι και η τριδιάστατη μορφή της εξίσωσης του κύματος (ή κυματικής εξίσωσης)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.1.41)$$

Τώρα όμως έχει προστεθεί και τρίτη χωρική ανεξάρτητη μεταβλητή: η  $z$ . Επομένως η άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x, y, z, t)$  έχει πλέον τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές: τις  $x, y, z$  και  $t$ . Η διδιάστατη και η τριδιάστατη μορφή της εξίσωσης του κύματος (ή κυματικής εξίσωσης) γράφονται συχνά και με τη χρήση του τελεστή του Laplace (της Laplacian, Λαπλασιανής)  $\nabla^2$  στη μορφή

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.1.42)$$

ακριβώς όπως είδαμε ότι συμβαίνει και στις εξισώσεις του Laplace (2.1.25) και του Poisson (2.1.28).

**Επτά χαρακτηρισμοί:** Πρόκειται για ομογενή, γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, δευτέρας τάξεως, με σταθερούς συντελεστές, υπερβολικού τύπου (όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β1, Παράγραφος Β1.3.2β για τη μονοδιάστατη περίπτωση (2.1.39)) και με δύο, τρεις ή τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές (τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$  ή/και  $y$  ή/και  $z$  και το χρόνο  $t$ ) στη μονοδιάστατη μορφή της (2.1.39), στη διδιάστατη (2.1.40) και στην τριδιάστατη (2.1.41) αντίστοιχα. Ανάλογα ισχύουν σε πολικές συντεταγμένες (διδιάστατη μορφή) καθώς και σε κυλινδρικές και σε σφαιρικές συντεταγμένες (τριδιάστατη μορφή).

**Πού παρουσιάζεται:** Πρόκειται επίσης για μια πάρα πολύ χρήσιμη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους στη Μαθηματική Φυσική και στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Συγκεκριμένα η άγνωστη συνάρτηση  $u$  μπορεί να δηλώνει:

(α) Στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (2.1.39) την εγκάρσια (κάθετη) μετατόπιση των σημείων  $x$  χορδής στο σχετικό δυναμικό πρόβλημα. Γι' αυτό και η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (2.1.39) καλείται συχνά και εξίσωση της χορδής. Στην περίπτωση αυτή η σταθερά  $c^2$  είναι το πηλίκο της τάσεως  $T$  κατά μήκος της χορδής δια της γραμμικής πυκνότητάς της  $m$ , δηλαδή

$$c = \sqrt{\frac{T}{m}}. \quad (2.1.43)$$

Φυσικά η σταθερά αυτή  $c$  έχει μονάδες ταχύτητας, π.χ. m/sec. (Ας σημειωθεί ότι εδώ η λέξη τάση εννοείται με την έννοια της εφελκυστικής δυνάμεως  $T$  που ασκείται στη χορδή, όχι όπως στη Μηχανική των Υλικών.)

(β) Στη διδιάστατη εξίσωση του κύματος (2.1.40) και πάλι την εγκάρσια (κάθετη) μετατόπιση, αλλά τώρα σε μεμβράνη στο σχετικό δυναμικό πρόβλημα. Γι' αυτό και η διδιάστατη εξίσωση του κύματος (2.1.40) καλείται συχνά και εξίσωση της μεμβράνης (ή του τυμπάνου). Στην περίπτωση αυτή η σταθερά  $c^2$  είναι το πηλίκο της τάσεως ανά μονάδα μήκους  $T$  στη μεμβράνη δια της επιφανειακής πυκνότητάς της  $\sigma$ , δηλαδή

$$c = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}. \quad (2.1.44)$$

Ασφαλώς η σταθερά  $c$  έχει και εδώ μονάδες ταχύτητας, κάτι που επαληθεύεται εύκολα. Σημειώνεται επίσης ότι η τάση ανά μονάδα μήκους  $T$  υποτίθεται σταθερή σε όλα τα σημεία  $(x, y)$  της μεμβράνης, προς όλες τις κατευθύνσεις και κάθε χρονική στιγμή  $t$ .



(γ) Επιστρέφοντας στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (2.1.39), η άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x, t)$  μπορεί επίσης να αναφέρεται σε αξονικές (ή διαμήκεις) ταλαντώσεις συνήθους ράβδου, συγκεκριμένα σε ιδιοταλαντώσεις και σε ελεύθερες ταλαντώσεις της ράβδου. Η συνάρτηση αυτή  $u = u(x, t)$  δηλώνει τώρα την αξονική μετατόπιση των σημείων της ράβδου στο σχετικό δυναμικό πρόβλημα. Στην περίπτωση αυτή η σταθερά  $c^2$  είναι το πηλίκο του μέτρου ελαστικότητας (ή μέτρου του Young)  $E$  του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της ράβδου δια της πυκνότητας (της συνηθισμένης πυκνότητας, όχι της γραμμικής πυκνότητας  $m$ ) του ίδιου υλικού  $\rho$ . Δηλαδή

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (2.1.45)$$

φυσικά σε μονάδες ταχύτητας και πάλι. Στις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου, που αποτελούν σημαντικό θέμα για τον Πολιτικό Μηχανικό, θα αναφερθούμε εκτενώς στην Ενότητα Β3.2 του Κεφαλαίου Β3. Εκεί πραγματικά θα βρούμε (θα κατασκευάσουμε) τη διαφορική εξίσωση του κύματος (2.1.39) για τις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου. Επίσης στην Ενότητα Β6.1 του Κεφαλαίου Β6.

(δ) Εντελώς ανάλογα η ίδια μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (2.1.39) αφορά και στις στρεπτικές ταλαντώσεις (καλύτερα ιδιοταλαντώσεις) ράβδου με άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x, t)$  τώρα τη γωνία στρέψεως (ή στροφής)  $\theta = \theta(x, t)$  ανά μονάδα μήκους της ράβδου. Είναι και αυτό ένα χρήσιμο πρόβλημα για τον Πολιτικό Μηχανικό. Στις στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου θα αναφερθούμε με πολύ σύντομο τρόπο στην Παράγραφο Β3.2.7 του Κεφαλαίου Β3. Είναι εντελώς ανάλογες με τις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην περίπτωση των στρεπτικών ταλαντώσεων η σταθερά  $c^2$  είναι το πηλίκο του μέτρου διατμήσεως  $G$  του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της ράβδου (πολλαπλασιασμένου επί έναν αριθμητικό συντελεστή  $k$ ) δια της πυκνότητας  $\rho$  του ίδιου υλικού, δηλαδή

$$c = \sqrt{\frac{kG}{\rho}}. \quad (2.1.46)$$

Σημειώνουμε ότι ο συντελεστής  $k$  εξαρτάται από τη γεωμετρία της διατομής της συνήθους ράβδου υπό στρεπτική καταπόνηση που εξετάζουμε. Για κυκλικές διατομές ο συντελεστής αυτός  $k$  παίρνει τη «φυσική» του τιμή  $k = 1$  ή, ισοδύναμα, δεν εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση (2.1.46).

Ας παρατηρηθεί στο σημείο αυτό ότι το δυναμικό πρόβλημα της στρέψεως μιας συνήθους ράβδου για τον Πολιτικό Μηχανικό είναι συχνά εντελώς διαφορετικό από το πρόβλημα μιας στρεφόμενης και συνήθως κυκλικής ατράκτου σε μια μηχανή με γωνιακή ταχύτητα  $\omega_0$ , συχνά σχεδόν σταθερή. Το δεύτερο αυτό πρόβλημα (της ατράκτου) το αντιμετωπίζει πολύ συχνά ο Μηχανολόγος Μηχανικός. Εδώ, για τον Πολιτικό Μηχανικό γίνεται αναφορά σε ιδιοταλαντώσεις και σε ελεύθερες ταλαντώσεις ράβδου υπό στρεπτική καταπόνηση γύρω από τη θέση ισορροπίας της σε κάποιο δυναμικό φαινόμενο και όχι στη συστηματική περιστροφή μιας ατράκτου σε μηχανή.

Ας αναφερθεί επίσης ότι σε μερικές περιπτώσεις σε ένα γραμμικό φορέα (όπως σε μια δοκό) τα φαινόμενα της καμπτικής, της αξονικής και της στρεπτικής καταπόνησεως μπορεί να παρουσιάζονται όχι μόνο μεμονωμένα, αλλά και σε συνδυασμούς. Τότε μιλάμε για σύνθετη καταπόνηση του φορέα. Μια τέτοια καταπόνηση μπορεί να είναι είτε στατική είτε δυναμική και να περιλαμβάνει και τις τρεις βασικές καταπονήσεις: καμπτική, αξονική και στρεπτική. Δε θα εξετάσουμε σ' αυτό το βιβλίο τη σύνθετη καταπόνηση ράβδου. Θα περιορισθούμε στις τρεις βασικές καταπονήσεις: (α) καμπτική, (β) αξονική και (γ) στρεπτική χωριστά την καθεμία: μεμονωμένα από τις άλλες δύο.

**Μη ομογενής μορφή:** Η εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση) στη μονοδιάστατη μορφή της (2.1.39) εμφανίζεται μερικές φορές γενικευμένη και στη μη ομογενή μορφή της, π.χ. στη μονοδιάστατη μη ομογενή μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (2.1.47)$$

Τώρα υπάρχει και μια γνωστή συνάρτηση  $f(x, t)$  στο αριστερό μέλος, που εύκολα μεταφέρεται και στο δεξιό με πρόσημο πλην. Η συνάρτηση αυτή  $f(x, t)$  καθιστά τη διαφορική εξίσωση (2.1.47)

μη ομογενή, παρόλο που είναι στο αριστερό της μέλος. Στις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου η ίδια συνάρτηση  $f(x, t)$  παριστάνει το εξωτερικό αξονικό φορτίο ανά μονάδα μήκους που ασκείται στην αξονικά ταλαντούμενη ράβδο. Τέτοιο φορτίο μπορεί να είναι ακόμη και το ίδιο βάρος της ράβδου (το δικό της βάρος). Στις θεμελιώσεις με πασσάλους ή κολώνες ανάλογο αξονικό φορτίο  $f(x, t)$  ανά μονάδα μήκους ασκείται από το έδαφος προς τη ράβδο (τον πάσσαλο ή την κολόνα) και μάλιστα μεταβάλλεται με τη θέση  $x$ , καλύτερα στο συγκεκριμένο παράδειγμα με το βάθος  $z$  (αντί  $x$ ) για τη θέση εντός του εδάφους. Σ' όλες αυτές τις περιπτώσεις μιλάμε για εξαναγκασμένες (όχι πια ελεύθερες) αξονικές ταλαντώσεις ράβδου. Και τη μη ομογενή εξίσωση του κύματος (2.1.47) θα την κατασκευάσουμε στην Ενότητα Β3.2 για αξονικές ταλαντώσεις ράβδου. Ανάλογα ισχύουν και για την εξίσωση της χορδής με  $f(x, t)$  να δηλώνει τώρα το κάθετο κατανεμημένο εξωτερικό φορτίο ανά μονάδα μήκους της χορδής σε εξαναγκασμένες και πάλι ταλαντώσεις. Τέλος ανάλογα (αλλά σπάνια στην πράξη) ισχύουν για κατανεμημένη εξωτερική ροπή στρέψεως  $f(x, t) \equiv \hat{m}_t(x, t)$  σε εξαναγκασμένες στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου.

Ας τονισθεί βέβαια ότι η λέξη ταλαντώσεις αναφέρεται γενικά σε κάθε δυναμικό φαινόμενο: όχι μόνο στις ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση, αλλά και στις ταλαντώσεις με απόσβεση: (α) ασθενή ή υποκρίσιμη, (β) κρίσιμη και (γ) ισχυρή ή υπερκρίσιμη. Ασφαλώς με την κλασική έννοια η κρίσιμη και η ισχυρή απόσβεση δεν προκαλούν ταλαντώσεις, αλλά χαρακτηρίζονται συνήθως και αυτές σαν ταλαντώσεις, παρόλο που δεν είναι. Στη μη ομογενή εξίσωση του κύματος (2.1.47) υφίσταται εξάλλου και η εξωτερική φόρτιση  $f(x, t)$  (ανά μονάδα μήκους), που και η ίδια προκαλεί κάποιας μορφής δυναμική απόκριση (ακόμη και στις συνηθισμένες ταλαντώσεις) στη ράβδο ή στη χορδή.

Πέρα από τη μονοδιάστατη μη ομογενή εξίσωση του κύματος (2.1.47) έχουμε φυσικά και τη διδιάστατη ανάλογη εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.1.48)$$

τώρα με  $u = u(x, y, t)$  την άγνωστη συνάρτηση και με τη συνάρτηση  $f(x, y, t)$  γνωστή συνάρτηση των τριών ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$ ,  $y$  και  $t$ . Στη μη ομογενή αυτή εξίσωση (2.1.48) η γνωστή συνάρτηση  $f(x, y, t)$  μπορεί να παριστάνει την κατανεμημένη (ανά μονάδα επιφανείας της μεμβράνης ή του τυμπάνου) κάθετη εξωτερική φόρτιση και ισχύουν ανάλογα με τη μονοδιάστατη περίπτωση (2.1.47). Δε θα δώσουμε έμφαση στην εξίσωση (2.1.48), επειδή πάρα πολύ συχνότερα ο Πολιτικός Μηχανικός έχει σαν βασικό επίπεδο επιφανειακό φορέα την πλάκα και όχι τη μεμβράνη. Η πλάκα (ακριβώς όπως και η δοκός) παρουσιάζει αντίσταση στην κάμψη (δυσκαμψία). Αντίθετα η μεμβράνη (ακριβώς όπως και η χορδή) δεν παρουσιάζει τέτοια αντίσταση, έχει δηλαδή μηδενική δυσκαμψία.

Μερικές φορές ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί τον όρο δοκός και για ράβδο μόνο υπό αξονικές ή/και στρεπτικές ταλαντώσεις, γιατί πρόκειται ουσιαστικά για τον ίδιο ακριβώς γραμμικό φορέα. Εντούτοις ο όρος δοκός υποδηλώνει συνήθως την ύπαρξη και κάποιας μορφής καμπτικής καταπόνησεως σε αντίθεση με τον όρο ράβδος. Βέβαια, όταν υπάρχει σύνθετη καταπόνηση που περιλαμβάνει και κάμψη (π.χ. και καμπτική και αξονική καταπόνηση ταυτόχρονα), τότε επιβάλλεται να χρησιμοποιείται ο όρος δοκός. Επίσης σε ράβδους υπό αξονική θλίψη που στηρίζουν κατασκευές χρησιμοποιείται βέβαια και ο όρος στύλος ή υποστύλωμα ή κολόνα με ελαφρά προτίμηση στα μαθήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III στον όρο στύλος.

#### B2.1.4. Η εξίσωση της διαχύσεως

**Μορφή:** Η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως πάλι με  $x$  τη θέση (στη μία διάσταση) και  $t$  το χρόνο έχει τη μορφή (1.3.10), συγκεκριμένα

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1.49)$$

με άγνωστη συνάρτηση τη  $u = u(x, t)$  και με τη θετική σταθερά  $a$  ( $a > 0$ ) γνωστή. Στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$  παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1.50)$$

με άγνωστη συνάρτηση τη  $u = u(x, y, t)$ . Παραπέρα στις τρεις διαστάσεις  $(x, y, z)$  παίρνει την ανάλογη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1.51)$$

τώρα με άγνωστη συνάρτηση τη  $u = u(x, y, z, t)$ . Η διδιάστατη και η τριδιάστατη μορφή της εξίσωσης της διαχύσεως γράφονται συχνά και με τη χρήση του τελεστή του Laplace (της Laplacian, Λαπλασιανής)  $\nabla^2$  στην ενιαία μορφή

$$\nabla^2 u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1.52)$$

Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και στις εξισώσεις του Laplace, του Poisson και του κύματος (την κυματική εξίσωση), όπως ήδη είδαμε.

**Σύγκριση με την εξίσωση του κύματος:** Παρατηρούμε ότι η εξίσωση της διαχύσεως μοιάζει πάρα πολύ με την εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση), στην οποία είχαμε αναφερθεί στην προηγούμενη Παράγραφο Β2.1.3. Η μόνη διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι τώρα η χρονική παράγωγος της άγνωστης συναρτήσεως  $u$  (δηλαδή η παράγωγος ως προς το χρόνο  $t$ ) είναι μόλις πρώτης τάξεως, ενώ στην εξίσωση του κύματος ήταν δευτέρας τάξεως. Από μαθηματικής απόψεως η διαφορά αυτή χαρακτηρίζει την εξίσωση της διαχύσεως σαν παραβολικού τύπου αντίθετα με την εξίσωση του κύματος που είναι υπερβολικού τύπου. Τούτο ήδη το διαπιστώσαμε στην Ενότητα Β1.3.2 για τις μονοδιάστατες μορφές των δύο αυτών εξισώσεων. Από φυσικής απόψεως η εξίσωση της διαχύσεως αναφέρεται στο φαινόμενο της διαχύσεως στη γενική του μορφή (με ξεκίνημα αρχικά από τη Μετάδοση Θερμότητας) και τούτο οδηγεί σε πρώτης τάξεως χρονική παράγωγο. Αντίθετα η εξίσωση του κύματος και αυτή στη γενική της μορφή (ταλαντούμενη χορδή, ράβδος, κλπ.) έχει τη βάση της στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα: δύναμη  $F$  ίσον μάζα  $m$  επί επιτάχυνση  $a$ . Όμως η επιτάχυνση  $a$ , που ισούται με τη δεύτερη χρονική παράγωγο της θέσεως, είναι αυτή που οδηγεί στη δεύτερη χρονική παράγωγο στην εξίσωση του κύματος σε όλα τα προβλήματα όπου αυτή παρουσιάζεται. Στα προβλήματα αυτά αναφερθήκαμε αρκετά εκτενώς στην προηγούμενη Παράγραφο Β2.1.3. Τέλος από πρακτικής, υπολογιστικής απόψεως ο παραβολικός τύπος της εξίσωσης της διαχύσεως οδηγεί σε εντελώς διαφορετικές λύσεις σε σύγκριση με εκείνες τις λύσεις που προκύπτουν στην εξίσωση του κύματος, η οποία είναι υπερβολικού τύπου.

**Επτά χαρακτηρισμοί:** Πρόκειται για ομογενή, γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, δευτέρας τάξεως, με σταθερούς συντελεστές, παραβολικού τύπου (όπως εξηγήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β1, Παράγραφος Β1.3.2γ στη μονοδιάστατη περίπτωση (2.1.49)) και με δύο, τρεις ή τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές (τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$  ή/και  $y$  ή/και  $z$  και το χρόνο  $t$ ) στη μονοδιάστατη μορφή της (2.1.49), στη διδιάστατη (2.1.50) και στην τριδιάστατη (2.1.51) αντίστοιχα. Ανάλογα σε πολικές συντεταγμένες (διδιάστατη μορφή) καθώς και σε κυλινδρικές και σε σφαιρικές συντεταγμένες (τριδιάστατη μορφή).

**Πού παρουσιάζεται:** Όπως και οι εξισώσεις του Laplace, του Poisson και του κύματος (κυματική εξίσωση), έτσι και η εξίσωση της διαχύσεως είναι μια πάρα πολύ χρήσιμη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους στη Μαθηματική Φυσική και στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Συγκεκριμένα η άγνωστη συνάρτηση  $u$  μπορεί να δηλώνει:

(α) Στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (2.1.49) τη θερμοκρασία  $u$  (σε βαθμούς Κελσίου  $\theta$ , την απόλυτη θερμοκρασία  $T$ , κλπ.) στη **Μετάδοση Θερμότητας** (ή **Διάδοση Θερμότητας**). Αυτό είναι και το βασικό πρόβλημα στο οποίο χρησιμοποιήθηκε αρχικά η εξίσωση της διαχύσεως. Για το λόγο αυτό η εξίσωση της διαχύσεως αναφέρεται πολύ συχνά στη βιβλιογραφία και σαν εξίσωση

της διαδόσεως θερμότητας. Στην περίπτωση αυτή η σταθερά  $a^2$  (που καλείται και **συντελεστής διαδόσεως θερμότητας**  $\kappa$  με  $\kappa = a^2$ ) είναι το πηλίκο της **θερμικής αγωγιμότητας**  $K$  του υλικού εντός του οποίου γίνεται η μετάδοση της θερμότητας δια του γινομένου  $\rho\sigma$ . Στο γινόμενο αυτό  $\rho\sigma$  το σύμβολο  $\rho$  δηλώνει την πυκνότητα του υλικού αυτού και το σύμβολο  $\sigma$  την ειδική θερμότητά του. Επομένως

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho\sigma}}. \quad (2.1.53)$$

Σημειώνεται με έμφαση βέβαια ότι η μετάδοση της θερμότητας μπορεί να αναφέρεται είτε (α) στη μία διάσταση, μονοδιάστατο πρόβλημα: εξίσωση (2.1.49) είτε (β) στις δύο διαστάσεις, διδιάστατο πρόβλημα: εξίσωση (2.1.50) είτε (γ) στις τρεις διαστάσεις, τριδιάστατο πρόβλημα: εξίσωση (2.1.51). Ισχύει δηλαδή και στις τρεις περιπτώσεις η εξίσωση της διαχύσεως με άγνωστη συνάρτηση την ίδια τη θερμοκρασία  $u$  και όχι βέβαια κάποιας μορφής παροχή θερμότητας  $q$ .

(β) Στην **Εδαφομηχανική** η εξίσωση της διαχύσεως αφορά στη **θεωρία στερεοποίησης** στην υδραυλική των εδαφών. Το φαινόμενο της στερεοποίησης, που είναι ιδιαίτερα σημαντικό στην Εδαφομηχανική, συνίσταται στην αποβολή του νερού (ή ύδατος) που πλεονάζει από στρώμα (ή στρώση) εδάφους με την αύξηση της πίεσεως (του φορτίου) που ασκείται επί συμπιεστού, πορώδους και κορεσμένου εδάφους. Με τον τρόπο αυτό το νερό που εισέρχεται στο θεωρούμενο στρώμα εδάφους είναι λιγότερο από το νερό που εξέρχεται και σιγά-σιγά το στρώμα αυτό του εδάφους στερεοποιείται. Η **πρόσθετη υδροστατική πίεση** που προκαλεί το φαινόμενο της στερεοποίησης καλείται πίεση στερεοποίησης. Χρησιμοποιείται η πολύ γνωστή θεωρία στερεοποίησης του Terzaghi (1923), η οποία βασίζεται βέβαια σε ορισμένες απλοποιητικές παραδοχές, καθώς και ο θεμελιώδης νόμος του Darcy (1856) στην Εδαφομηχανική. Αποδεικνύεται έτσι ότι η πρόσθετη υδροστατική πίεση  $u = u(z, t)$  (με  $z$  το βάθος εντός του εδάφους και  $t$  το χρόνο) μέσα στο στερεοποιούμενο στρώμα (ή στρώση) εδάφους επαληθεύει τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (2.1.49). Επομένως ισχύει η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c_v} \frac{\partial u}{\partial t} \iff \frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (2.1.54)$$

Στη διαφορική αυτή εξίσωση με μερικές παραγώγους η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η πρόσθετη υδροστατική πίεση  $u = u(z, t)$ , που ήδη αναφέρθηκε. Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι το βάθος  $z$  εντός του εδάφους και ο χρόνος  $t$ . Ο συντελεστής  $c_v$  καλείται **συντελεστής στερεοποίησης**. Ο συντελεστής αυτός δίνεται από τον τύπο

$$c_v = \frac{k}{\gamma_w m_v} = \frac{k}{\rho_w g m_v} \quad (2.1.55)$$

και θεωρείται προσεγγιστικά σταθερός κατά τη διαδικασία της στερεοποίησης, ακριβώς όπως και οι ποσότητες  $k$ ,  $\gamma_w$  και  $m_v$ .

Στον τύπο αυτό (2.1.55)  $k$  είναι ο **συντελεστής διαπερατότητας του εδάφους**, όπως τον χρησιμοποιεί συνήθως ο Πολιτικός Μηχανικός. (Προσοχή: δεν πρέπει να συγχέεται με τη **διαπερατότητα**  $K$  του εδάφους!) Επίσης  $\gamma_w = \rho_w g$  είναι το ειδικό βάρος του νερού (με  $\rho_w$  την πυκνότητά του και  $g$  την επιτάχυνση της βαρύτητας) και τέλος  $m_v$  είναι ο **συντελεστής της κατ' όγκο συμπίεστικότητας** του εδάφους. Τελικά οι μονάδες του συντελεστή στερεοποίησης  $c_v$  είναι  $\text{m}^2/\text{sec}$  και, πολύ καλύτερα στην πράξη του Πολιτικού Μηχανικού,  $\text{m}^2/\text{έτος}$ . Τούτο είναι εξάλλου προφανές από την εξίσωση της διαχύσεως (2.1.54), επειδή η χρονική μερική παράγωγος (ως προς το χρόνο  $t$ ) είναι πρώτης τάξεως, η δε χωρική μερική παράγωγος (ως προς το βάθος  $z$ ) είναι δευτέρας τάξεως.

(γ) Στην **Περιβαλλοντική Υδραυλική** η εξίσωση της διαχύσεως αφορά στη συγκέντρωση  $c$  ενός ρύπου και όχι πλέον στη θερμοκρασία  $u$ . Προκύπτει από το γνωστό νόμο του Fick (1855) για τη μοριακή διάχυση. Ο νόμος αυτός αποτελεί γενίκευση του αντίστοιχου νόμου του Fourier στη διάδοση θερμότητας. Και πάλι ισχύει η ίδια ακριβώς εξίσωση, δηλαδή: (α) η εξίσωση (2.1.49) στη

μία διάσταση  $x$ , όπου  $c = c(x, t)$ , (β) η εξίσωση (2.1.50) στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$ , όπου  $c = c(x, y, t)$ , και τέλος (γ) η εξίσωση (2.1.51) στις τρεις διαστάσεις  $(x, y, z)$ , όπου  $c = c(x, y, z, t)$ . Εδώ η μεταβολή της συγκεντρώσεως  $c$  οφείλεται αποκλειστικά σε μοριακή διάχυση του ρύπου και όχι σε μεταφορά του ρύπου με μεταγωγή. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα εφαρμογή της εξισώσεως της διαχύσεως στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Η σταθερά  $a^2$  δηλώνει τώρα το **συντελεστή μοριακής διαχύσεως**  $D$  (δηλαδή εδώ  $a^2 = D$ ). Για παράδειγμα, στη μία διάσταση η εξίσωση της διαχύσεως (2.1.49) παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t} \iff \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (2.1.56)$$

Στις δύο ή τρεις διαστάσεις η εξίσωση της διαχύσεως (2.1.52) γράφεται εδώ στη μορφή

$$\nabla^2 c = \frac{1}{D} \frac{\partial c}{\partial t} \iff \frac{\partial c}{\partial t} = D \nabla^2 c \quad (2.1.57)$$

με την άγνωστη συνάρτηση  $c$ , επαναλαμβάνεται, να δηλώνει τη συγκέντρωση του ρύπου. Απλή γενίκευση της εξισώσεως της διαχύσεως στην Περιβαλλοντική Υδραυλική αποτελεί η εξίσωση της μεταγωγής-διαχύσεως. Σ' αυτήν αναφερόμαστε αμέσως πιο κάτω.

### B2.1.5. Η εξίσωση της μεταγωγής-διαχύσεως

**Μορφή-Πού παρουσιάζεται:** Η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (2.1.56) στην Περιβαλλοντική Υδραυλική γενικεύεται, όταν υπάρχει όχι μόνο **διάχυση** του ρύπου, αλλά και **μεταγωγή** του (εξαιτίας της κινήσεως του ρευστού: του νερού με ταχύτητα  $V$ ) στη μορφή

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} \iff \frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (2.1.58)$$

Η εξίσωση αυτή καλείται εξίσωση της **μεταγωγής-διαχύσεως**. Η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι πάλι η συγκέντρωση  $c = c(x, t)$  του ρύπου, ενώ ανεξάρτητες μεταβλητές είναι ξανά η θέση  $x$  (εδώ στη μία διάσταση) και ο χρόνος  $t$ . Το σύμβολο  $D$  δηλώνει πάλι το συντελεστή μοριακής διαχύσεως και το σύμβολο  $V$  τη σταθερή ταχύτητα ροής του ρευστού (συνήθως του νερού, του ύδατος) στο παρόν μονοδιάστατο πρόβλημα. Συνήθως πρόκειται για ένα **υδατόρρευμα** (όπως είναι ένας ποταμός) με το νερό να περιέχει και ρύπο με συγκέντρωση  $c = c(x, t)$ . Στην περίπτωση αυτή η μονοδιάστατη ροή του νερού με ταχύτητα  $V$ , η οποία μεταφέρει και το ρύπο (με την ίδια ταχύτητα  $V$ ): **φαινόμενο μεταγωγής**, συνδυάζεται με τη διάχυση του ρύπου στο νερό (με συντελεστή μοριακής διαχύσεως  $D$ ): **φαινόμενο διαχύσεως**. Δηλαδή η μεταφορά του ρύπου οφείλεται σε συνδυασμό: (α) μεταγωγής του μαζί με το νερό του υδατορρεύματος και (β) διαχύσεως του μέσα στο ίδιο νερό του υδατορρεύματος.

**Επτά χαρακτηρισμοί:** Ισχύουν ακριβώς οι ίδιοι χαρακτηρισμοί με τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως. Ας σημειωθεί όμως ότι τώρα παρουσιάζεται και χωρική (ως προς τη θέση  $x$ ) πρώτη μερική παράγωγος: η  $\partial c / \partial x$ . Έχουμε επίσης δύο σταθερούς συντελεστές: (α) το συντελεστή μοριακής διαχύσεως  $D$  και (β) την ταχύτητα  $V$  του νερού στο υδατόρρευμα.

**Ειδικές περιπτώσεις: απλή διάχυση, απλή μεταγωγή:** Εάν δεν υπάρχει ροή:  $V = 0$ , δεν υπάρχει ούτε μεταγωγή του ρύπου. Τότε η εξίσωση της μεταγωγής-διαχύσεως (2.1.58) μεταπίπτει στην εξίσωση της διαχύσεως (2.1.56). Αντίθετα μπορεί να υπάρχει ροή στο υδατόρρευμα με σταθερή ταχύτητα  $V \neq 0$  (οπότε πραγματοποιείται και μεταγωγή του ρύπου), αλλά να μην υπάρχει διάχυση:  $D = 0$ . Τότε η εξίσωση της μεταγωγής-διαχύσεως (2.1.58) μεταπίπτει στην ακόμη πιο απλή εξίσωση της μεταγωγής

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = 0. \quad (2.1.59)$$

Και η εξίσωση αυτή της μεταγωγής (2.1.59) είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα για τον Πολιτικό Μηχανικό. Ασφαλώς πρόκειται για μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με

σταθερούς συντελεστές (τους 1 και  $V$ ) και πρώτης τάξεως σε αντίθεση με όλες τις προηγούμενες διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους στην ενότητα αυτή, οι οποίες ήσαν δευτέρας τάξεως. Επειδή μάλιστα είναι πρώτης τάξεως, η εξίσωση της μεταγωγής (2.1.59) δε μπορεί να χαρακτηριστεί σαν υπερβολικού, παραβολικού ή ελλειπτικού τύπου (ισοδύναμα υπερβολική, παραβολική ή ελλειπτική αντίστοιχα). Οι χαρακτηρισμοί αυτοί αναφέρονται αποκλειστικά σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως.

**Γενίκευση της εξίσωσης της μεταγωγής: μεταγωγή και αποδόμηση πρώτης τάξεως:** Μια απλή γενίκευση της εξίσωσης της μεταγωγής (2.1.59) αποτελεί η διαφορική εξίσωση της μεταγωγής με **αποδόμηση**  $-kc$  πρώτης τάξεως. Η αποδόμηση αυτή  $-kc$  θα παρουσιασθεί στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (2.1.59). Η σταθερά  $k$  καλείται **σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως**. Η νέα αυτή εξίσωση έχει τη μορφή

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = -kc \iff \frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} + kc = 0. \quad (2.1.60)$$

Και πάλι έχουμε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές και, φυσικά, πρώτης τάξεως. Ας σημειωθεί ότι ο όρος  $kc$  αφορά στην άγνωστη συνάρτηση  $c$ : στη συγκέντρωση του ρύπου. Δεν πρόκειται επομένως για μη ομογενή εξίσωση, αλλά για ομογενή. Μη ομογενής θα γινόταν η εξίσωση αυτή (2.1.60), εάν υπήρχε και συγκεκριμένη εξωτερική παραγωγή (ή απαγωγή) ρύπου κατά μήκος του υδατορρέυματος (κατά τη διεύθυνση  $x$ ) με γνωστή τη σχετική συνάρτηση  $f(x, t)$ . Όμως απλά η αποδόμηση πρώτης τάξεως του ρύπου με ρυθμό  $k$  δεν καθιστά τη σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (2.1.60) μη ομογενή.

Πλήρη μελέτη του θέματος της μεταφοράς ρύπου με διάχυσή του ή/και μεταγωγή του (εξισώσεις (2.1.56) έως (2.1.60)) μπορεί να βρει ο Πολιτικός Μηχανικός στις ενδιαφέρουσες Πανεπιστημιακές Παραδόσεις του Καθηγητή του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών Αλεξ. Κ. Δημητρακόπουλου: *Περιβαλλοντική Υδραυλική*, Πάτρα, 1999, ιδίως στο Κεφάλαιο 3 και στο Παράρτημα Δ των Πανεπιστημιακών αυτών Σημειώσεων.

Την απλή εξίσωση της μεταγωγής (χωρίς αποδόμηση) ρύπου σε υδατόρρευμα (2.1.59) θα τη λύσουμε λεπτομερώς στην Ενότητα Β10.2 του Κεφαλαίου Β10 με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace είτε (α) ως προς το χρόνο  $t$  είτε (β) ως προς τη θέση  $x$ . Με τη μέθοδο αυτή τη μετασχηματίζουμε σε συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή που απομένει ( $x$  ή  $t$  αντίστοιχα) χωρίς πια μερικές παραγώγους.

Σημειώνουμε τέλος ότι την εξίσωση της μεταγωγής-διάχυσεως (2.1.58) μπορούμε να την αναγάγουμε στην εξίσωση της διαχύσεως (2.1.56) απλά με αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών (μάλλον μόνο της χωρικής ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$ ). Τη σχετική διαδικασία για τη συγκεκριμένη αυτή εξίσωση (2.1.58) την εκθέσαμε λεπτομερώς στην Ενότητα Β1.14 του προηγούμενου Κεφαλαίου Β1.

## B2.2. ΟΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΕΤΑΡΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ

Οι τέσσερις βασικότερες διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους τετάρτης τάξεως που παρουσιάζονται σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού είναι οι εξής: (α) η εξίσωση των καμπικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού, (β) η διαρμονική εξίσωση για την τασική συνάρτηση του Airy, (γ) η εξίσωση της συνήθους πλάκας υπό στατικές συνθήκες και (δ) η αντίστοιχη εξίσωση υπό δυναμικές συνθήκες (σε ταλαντώσεις). Θα αναφερθούμε με συντομία και στις τέσσερις αυτές εξισώσεις.

### B2.2.1. Η εξίσωση των καμπικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού

**Μορφή και παρατηρήσεις:** Η τόσο σημαντική για τον Πολιτικό Μηχανικό εξίσωση των καμπικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού μήκους  $L$  παρουσιάζεται στη Δυναμική των Κατασκευών και έχει τη μορφή (1.1.5) ή (1.1.13). Σ' αυτήν έχουμε ήδη αναφερθεί εκτενώς στο προηγούμενο

Κεφάλαιο Β1. Την επαναλαμβάνουμε

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \text{με} \quad v = v(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (2.2.1)$$

Η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι το βέλος κάμψεως  $v = v(x, t)$ . Η γνωστή συνάρτηση  $p = p(x, t)$  στο δεξιό μέλος αφορά στην κάθετη κατανεμημένη φόρτιση (σε N/m ή σε kN/m) κατά μήκος της δοκού στο παρόν δυναμικό φαινόμενο για το γραμμικό φορέα, τη δοκό, που εξετάζουμε. Οι συντελεστές  $EI$  (**δυσκαμψία** της δοκού) και  $\rho A$  (**γραμμική πυκνότητα**  $m = \rho A$  της δοκού) θεωρούνται εδώ σταθεροί, όπως συνήθως συμβαίνει. Σε περίπτωση απουσίας της εξωτερικής φορτίσεως  $p(x, t)$  παίρνουμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{πάλι με} \quad v = v(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L. \quad (2.2.2)$$

Όταν αναφερόμαστε στη μη ομογενή εξίσωση (2.2.1), μιλάμε για **εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις** της δοκού (με την ευρεία έννοια του όρου ταλαντώσεις: ουσιαστικά έχουμε ένα δυναμικό φαινόμενο). Αντίθετα, όταν αναφερόμαστε στην αντίστοιχη ομογενή εξίσωση (2.2.2), μιλάμε για **ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις**. Ειδική περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων αποτελούν οι **ιδιοταλαντώσεις**. Στις ιδιοταλαντώσεις δεν υπάρχουν αρχικές συνθήκες (αντίθετα με τις ελεύθερες ταλαντώσεις), υπάρχουν όμως καθορισμένες συνοριακές συνθήκες (ακριβώς όπως και στις ελεύθερες ταλαντώσεις). Στις ιδιοταλαντώσεις δίνεται έμφαση στους διακεκριμένους (χωριστούς) δυνατούς τρόπους ταλαντώσεως. Θα αναφερθούμε εκτενώς σ' αυτές στο Κεφάλαιο Β6.

**Έξι χαρακτηρισμοί:** Πρόκειται για μη ομογενή (εξίσωση (2.2.1)) ή για ομογενή (εξίσωση (2.2.2)) γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, τετάρτης τάξεως, με σταθερούς συντελεστές: τους  $EI$ , τη δυσκαμψία, και  $\rho A$ , τη γραμμική πυκνότητα, και με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού και το χρόνο  $t$ . Επειδή η διαφορική εξίσωση είναι τετάρτης τάξεως, δε νοείται ο τύπος της. Δηλαδή δεν έχει έννοια να επιχειρήσουμε να τη χαρακτηρίσουμε σαν υπερβολικού, παραβολικού ή ελλειπτικού τύπου.

### B2.2.2. Η διαρμονική εξίσωση και η τασική συνάρτηση του Airy

**Σχηματισμός, μορφή και παρατηρήσεις:** Έχουμε ήδη αναφερθεί στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (2.1.1), την επαναλαμβάνουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \implies \quad \nabla^2 u = 0 \quad (2.2.3)$$

με τη χρήση επίσης και του συμβόλου  $\nabla^2$ , δηλαδή εδώ, στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$ , του διαφορικού τελεστή

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.2.4)$$

Ο τελεστής αυτός ονομάζεται, όπως ξέρουμε, τελεστής του Laplace ή, απλούστερα, Laplacian (Λαπλασιανή). Θα μπορούσε ίσως να είχε ονομασθεί και αρμονικός τελεστής, επειδή οι λύσεις της εξισώσεως του Laplace (2.2.3) καλούνται αρμονικές συναρτήσεις. Τον τελεστή αυτό τον έχουμε ήδη αναφέρει και στον ορισμό του (2.1.23) στις δύο διαστάσεις, που μόλις τον επαναλάβαμε.

Αν εφαρμόσουμε τον τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  (με ορισμό στις δύο διαστάσεις το (2.2.4)) στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (2.2.3), προκύπτει η νέα διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (2.2.5)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί βέβαια να γραφεί και στη συντομότερη μορφή

$$\nabla^2(\nabla^2 u) = 0. \quad (2.2.6)$$

Για να καταστεί σαφής η εξίσωση (2.2.5), θα πρέπει να γράψουμε καθαρότερα τις μερικές παραγωγίσεις. Έτσι ξαναγράφουμε την ίδια εξίσωση (2.2.5) στη σαφέστερη μορφή

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.2.7)$$

και ακόμη σαφέστερα στη μορφή

$$\left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) \equiv \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} \right) + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0. \quad (2.2.8)$$

Στη μορφή αυτή αλλάξαμε και τη σειρά των παρενθέσεων στους όρους της διαφορικής εξίσωσης.

Γνωρίζουμε όμως ότι υποθέτοντας τις μικτές παραγωγούς όχι μόνο ότι υπάρχουν, αλλ' επιπλέον ότι είναι και συνεχείς συναρτήσεις, τότε μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά των μερικών παραγωγίσεων. Με άλλα λόγια δύο μικτές μερικές παράγωγοι της ίδιας συναρτήσεως  $u$  και με τον ίδιο αριθμό μερικών παραγωγίσεων ως προς κάθε μία συγκεκριμένη ανεξάρτητη μεταβλητή είναι μεταξύ τους ίσες, εφόσον υπάρχουν και είναι συνεχείς. Άρα στην περίπτωση των μικτών μερικών παραγωγών στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς (2.2.8) ισχύει γενικά (για συνεχείς τις μικτές αυτές παραγωγούς, κάτι που το υποθέτουμε) ότι

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2}. \quad (2.2.9)$$

Συνεπώς η διαφορική εξίσωση (2.2.8) γράφεται και στην τελική της μορφή

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0. \quad (2.2.10)$$

Αυτή είναι η καλούμενη **διαρμονική εξίσωση** στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$ . Στις τρεις διαστάσεις  $(x, y, z)$  η μορφή της είναι πολυπλοκότερη (λόγω της παρουσίας και της τρίτης μεταβλητής  $z$ ). Δε θα ασχοληθούμε καθόλου με την περίπτωση των τριών διαστάσεων στη διαρμονική εξίσωση.

Συνοψίζοντας, στις δύο διαστάσεις η εξίσωση του Laplace (που πολύ σπάνια αποκαλείται και αρμονική εξίσωση) με λύσεις της τις αρμονικές συναρτήσεις έχει τη μορφή (2.2.3) με το διδιάστατο τελεστή του Laplace (2.2.4) να εφαρμόζεται στην άγνωστη συνάρτηση  $u$ . Μία εφαρμογή λοιπόν του τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  και παίρνουμε την εξίσωση του Laplace (2.2.3). Τώρα μία δεύτερη εφαρμογή του ίδιου τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  και φθάνουμε στη διαρμονική εξίσωση (2.2.10). Το γεγονός της διπλής εφαρμογής του τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  στη συνάρτηση  $u$  φαίνεται καθαρά και στη συνοπτική μορφή γραφής της (2.2.6). Αυτή μπορεί να γραφεί και στη συνοπτικότερη μορφή

$$\nabla^4 u = 0. \quad (2.2.11)$$

Φυσικά εδώ βρισκόμαστε στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$  με  $u = u(x, y)$  και, επαναλαμβάνουμε, αρκούμαστε εδώ σ' αυτές ως προς τη διαρμονική εξίσωση. Ο τελεστής  $\nabla^4$  στην εξίσωση (2.2.11) καλείται εύλογα διαρμονικός τελεστής και είναι ατυχές μάλιστα που ο τελεστής του Laplace (ή Laplacian, Λαπλασιανή) δεν καλείται συνήθως αρμονικός τελεστής. Έτσι χάνεται κάπως (μάλλον αρκετά!) η ομοιομορφία στην ορολογία.

Εν πάση περιπτώσει, με σύγκριση της διαρμονικής εξίσωσης στην αναλυτική της μορφή (2.2.10) και στη συνοπτική της μορφή (2.2.11) με τη χρήση του διαρμονικού τελεστή  $\nabla^4$ , διαπιστώνουμε ότι ο διαρμονικός τελεστής  $\nabla^4$  έχει (εννοείται στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$ ) τη μορφή

$$\nabla^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (2.2.12)$$

Η ισχύς της εκφράσεως αυτής του διδιάστατου διαρμονικού τελεστή  $\nabla^4$  προκύπτει επίσης απλά λαμβάνοντας υπόψη τις μερικές παραγωγίσεις που προηγήθηκαν (σχέσεις (2.2.5) έως (2.2.10))



για τη διπλή εφαρμογή του απλούστερου διδιάστατου τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  στη συνάρτηση  $u = u(x, y)$ . Ασφαλώς η συνάρτηση αυτή  $u$  θεωρείται μια κατάλληλα παραγωγίσιμη συνάρτηση.

Πολύ συχνά στη μαθηματική βιβλιογραφία (αλλά και στην τεχνική βιβλιογραφία ιδίως παλαιότερα) χρησιμοποιείται, όπως ήδη αναφέρθηκε, και το σύμβολο  $\Delta$  για τον τελεστή του Laplace  $\nabla^2$ . Άρα εύλογα για το διαρμονικό τελεστή  $\nabla^4$  χρησιμοποιείται και το σύμβολο  $\Delta^2$ . Επομένως

$$\Delta \equiv \nabla^2 \implies \Delta^2 \equiv \nabla^4. \quad (2.2.13)$$

Να μη λησμονείται βέβαια ότι σε τούτα τα διδακτικά βιβλία (όπως επίσης και σ' ένα μεγάλο μέρος της σύγχρονης τεχνικής βιβλιογραφίας) το σύμβολο  $\Delta$  έχει άλλο, εντελώς διαφορετικό ρόλο: χρησιμοποιείται για να δηλώνει πεπερασμένες διαφορές και όχι τον τελεστή του Laplace. Εκτενής χρήση του συμβόλου  $\Delta$  για πεπερασμένες διαφορές θα γίνει στην Ενότητα Β3.2 του επόμενου Κεφαλαίου Β3, η οποία αφορά στις αξονικές ταλαντώσεις συνήθους ράβδου. Ανάλογα και στο Κεφάλαιο Β12 στις αριθμητικές μεθόδους για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, όπου οι μερικές παράγωγοι θα προσεγγίζονται από πεπερασμένες διαφορές. Παραδείγματος χάρη,  $\Delta u = u_2 - u_1$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ , κλπ. Οι διαφορές αυτές θα είναι μεν πεπερασμένες, αλλά συνήθως ταυτόχρονα και επαρκώς μικρές.

**Έξι χαρακτηρισμοί:** Η διαρμονική εξίσωση (2.2.10) είναι ομογενής, γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, τετάρτης τάξεως, με σταθερούς συντελεστές: τους 1, 2 και 1, και με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$  στο επίπεδο  $Oxy$ . (Ας μην ξεχνάμε εξάλλου ότι έχουμε περιορισθεί στις δύο διαστάσεις!) Επειδή όμως η διαρμονική εξίσωση (2.2.10) είναι τετάρτης τάξεως, είναι αδύνατος ο χαρακτηρισμός της σαν υπερβολικού, παραβολικού ή ελλειπτικού τύπου. Οι τύποι αυτοί αναφέρονται μόνο σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως, καμίας άλλης.

**Πού παρουσιάζεται:** Η διαρμονική εξίσωση (2.2.10) είναι πάρα πολύ σημαντική για τον Πολιτικό Μηχανικό και θα αναφερθούμε και πάλι σ' αυτήν. Συγκεκριμένα παρουσιάζεται στην **τασική συνάρτηση** (ή **τασεοσυνάρτηση**) του Airy  $A = A(x, y)$  στην **επίπεδη Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών**. Δηλαδή ισχύει η διαρμονική εξίσωση (2.2.10) εν προκειμένω στη μορφή της

$$\frac{\partial^4 A}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 A}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 A}{\partial y^4} = 0 \iff \nabla^4 A = 0 \text{ με } A = A(x, y). \quad (2.2.14)$$

Στην τασική συνάρτηση (ή τασεοσυνάρτηση) του Airy  $A = A(x, y)$  θα αναφερθούμε εκτενώς στην Ενότητα Β3.1 του Κεφαλαίου Β3. Εκεί θα δείξουμε τη μεγάλη σπουδαιότητά της στο επίπεδο ελαστικό πρόβλημα. Αφιερώνουμε επίσης σ' αυτήν κι ολόκληρο το Notebook EN-EMIII-2 στο Φάκελο 4 με τη χρήση της *Mathematica*. Επιπλέον θα ασχοληθούμε σύντομα και με τη γενική λύση της διαρμονικής εξίσωσης (2.2.10), ισοδύναμα (2.2.14): (α) με τη χρήση δύο αρμονικών συναρτήσεων στην Ενότητα Β4.6 του Κεφαλαίου Β4 και (β) με τη χρήση δύο αναλυτικών μιγαδικών συναρτήσεων στις Εφαρμοσμένες Μιγαδικές Συναρτήσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς παρακάτω στο Μέρος Δ αυτών των διδακτικών βιβλίων Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς.

Ας προχωρήσουμε όμως τώρα στη γενίκευση της διαρμονικής εξίσωσης (2.2.10) ή (2.2.14) στη μη ομογενή της μορφή, δηλαδή και με γνωστό δεξιό μέλος. Η εξίσωση που προκύπτει είναι η στατική εξίσωση της συνήθους πλάκας.

### Β2.2.3. Η στατική εξίσωση της συνήθους πλάκας

**Μορφή και παρατηρήσεις:** Ο διαρμονικός τελεστής  $\nabla^4$  στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$  είναι επίσης πολύ χρήσιμος και στη στατική εξίσωση της συνήθους πλάκας. Λέγοντας συνήθη πλάκα εννοούμε μια λεπτή, επίπεδη (πριν την καταπόνησή της) πλάκα  $P$  σταθερού πάχους  $h$ , από ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό με σταθερές  $E$  (μέτρο ελαστικότητας) και  $\nu$  (λόγος του Poisson). Για την εύρεση της εντατικής και της παραμορφωσιακής καταστάσεως στη συνήθη πλάκα  $P$  υποθέτουμε επίσης ότι ισχύουν οι σχετικές απλοποιητικές παραδοχές στη Θεωρία των Πλακών, που τις

παραλείπουμε εδώ. Υπό στατικές συνθήκες φορτίσεως αποδεικνύεται ότι στο επίπεδο  $Oxy$  της συνήθους πλάκας ισχύει σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$  η εξής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους: η **στατική εξίσωση της συνήθους πλάκας** (Notebook EN-EMIII-1 πάλι στο Φάκελο 4):

$$\nabla^4 w = \frac{\rho(x, y)}{D} \iff \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{\rho(x, y)}{D} \quad \text{με } w = w(x, y), \quad (x, y) \in P. \quad (2.2.15)$$

Στην εξίσωση αυτή η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή)  $w = w(x, y)$  είναι το βέλος κάμψεως (ή κάθετη μετατόπιση ή βύθιση) της πλάκας σε κάθε σημείο της  $(x, y)$ . Το βέλος κάμψεως αυτό  $w(x, y)$  υποτίθεται σχετικά μικρό σε σύγκριση με τις διαστάσεις της πλάκας  $P$ . (Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$  και  $y$  είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές.) Το βέλος κάμψεως  $w(x, y)$  προκαλείται από την επίδραση της κατανεμημένης κάθετης φορτίσεως  $\rho(x, y)$  (σε  $N/m^2 \equiv Pa$  ή, καλύτερα, σε  $kN/m^2 \equiv kPa$ ) που ασκείται πάνω στην πλάκα. Η φόρτιση αυτή  $\rho(x, y)$  θεωρείται γνωστή συνάρτηση. Η επιφάνεια η οποία δημιουργείται από το βέλος κάμψεως  $w(x, y)$  σε ολόκληρη την πλάκα  $P$  καλείται **ελαστική επιφάνεια** της πλάκας. Η σταθερά  $D$  στο δεξιό μέλος της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης (2.2.15) είναι επίσης γνωστή. Πρόκειται για τη **δυσκαμψία**  $D$  της πλάκας  $P$ . Αυτή υπολογίζεται μέσω του τύπου

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (2.2.16)$$

Οι σταθερές  $E$  (μέτρο ελαστικότητας),  $\nu$  (λόγος του Poisson) και  $h$  (πάχος) έχουν ήδη αναφερθεί.

**Χαρακτηρισμοί:** Ισχύουν ακριβώς οι ίδιοι χαρακτηρισμοί με τη διαρμονική εξίσωση για την τασική συνάρτηση του Airy  $A(x, y)$ , μόνο που τώρα η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της συνήθους πλάκας (2.2.15) είναι μια μη ομογενής διαρμονική εξίσωση. Καμία άλλη διαφορά!

**Πού παρουσιάζεται:** Στο πρόβλημα της συνήθους πλάκας υπό στατική κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $\rho(x, y)$ , όπως ήδη εκτενώς εξηγήσαμε.

Προχωράμε τώρα στο αντίστοιχο δυναμικό πρόβλημα για την ίδια συνήθη πλάκα.

#### B2.2.4. Η εξίσωση των ταλαντώσεων της συνήθους πλάκας

**Μορφή και παρατηρήσεις:** Υπό δυναμική φόρτιση  $\rho = \rho(x, y, t)$  (με επιπλέον ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο  $t$ ) το βέλος κάμψεως  $w = w(x, y, t)$  της συνήθους πλάκας  $P$  θα εξαρτάται τώρα και από το χρόνο  $t$ . Θα έχουμε δηλαδή τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές: (α) τις δύο χωρικές μεταβλητές: τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$  και (β) τη χρονική μεταβλητή: το χρόνο  $t$ . Στο δυναμικό αυτό πρόβλημα, που οδηγεί σε ταλαντώσεις της πλάκας  $P$ , πέρα από την εξωτερική φόρτιση  $\rho = \rho(x, y, t)$  μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πλάκα φορτίζεται σε κάθε σημείο της  $(x, y)$  και για κάθε χρονική στιγμή  $t$  και από την κατανεμημένη αδρανειακή δύναμη  $\rho_i = \rho_i(x, y, t)$

$$\rho_i = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.2.17)$$

(με πρόσημο μείον). Η κατανεμημένη αυτή δύναμη  $\rho_i$  είναι ίση με το γινόμενο της **επιφανειακής πυκνότητας**  $\rho h$  της πλάκας (συνήθης πυκνότητα  $\rho$  του υλικού της επί το πάχος της  $h$ ) επί την κάθετη επιτάχυνση των σημείων  $(x, y)$  της πλάκας με πρόσημο μείον. Η κάθετη αυτή επιτάχυνση είναι προφανώς η δεύτερη χρονική μερική παράγωγος  $\partial^2 w / \partial t^2$  του βέλους κάμψεως  $w = w(x, y, t)$ . Άρα η στατική διαφορική εξίσωση της συνήθους πλάκας (2.2.15) γενικεύεται τώρα στη μορφή

$$\nabla^4 w = \frac{\rho + \rho_i}{D} \iff \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\rho}{D}, \quad (x, y) \in P, \quad t > 0, \quad (2.2.18)$$

εδώ βέβαια με  $w = w(x, y, t)$  και  $\rho = \rho(x, y, t)$ . Παρατηρούμε λοιπόν την ύπαρξη και του χρόνου  $t$  σαν ανεξάρτητης μεταβλητής καθώς και την παρουσία της δεύτερης χρονικής μερικής παραγώγου  $\partial^2 w / \partial t^2$  της άγνωστης συναρτήσεως (εξαρτημένης μεταβλητής)  $w = w(x, y, t)$ . Κατά τα υπόλοιπα οι χαρακτηρισμοί της **δυναμικής εξίσωσης της συνήθους πλάκας** (2.2.18) είναι ίδιοι με εκείνους της αντίστοιχης στατικής εξίσωσης (2.2.15).

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β3

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΠΟΛΙΤΙΚΟ ΜΗΧΑΝΙΚΟ

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Υπάρχουν εκατοντάδες ενδιαφέροντα παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και συστημάτων τέτοιων εξισώσεων που παρουσιάζονται στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με πέντε από τα παραδείγματα αυτά: (α) Την τασική συνάρτηση του Airy  $A(x, y)$ , που είναι θεμελιώδους σημασίας στο επίπεδο ελαστικό πρόβλημα στη Μηχανική των Υλικών. Η σημασία της οφείλεται στο ότι με τη χρήση της πληρούνται αυτόματα και οι δύο εξισώσεις ισορροπίας που ισχύουν. Τελικά το σχετικό σύστημα από τρεις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους ανάγεται σε μια μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους: τη διαρμονική εξίσωση. (β) Το πρόβλημα των αξονικών (ή διαμήκων) ταλαντώσεων συνήθους ράβδου. Το πρόβλημα αυτό, χρησιμοποιώντας το νόμο του Hooke και το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, ανάγεται στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση). (γ) Τις εξισώσεις του ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική (ή Μηχανική των Ρευστών) σε τριδιάστατη ροή, όπου είναι θεμελιώδους σημασίας η εξίσωση της συνεχείας και οι τρεις εξισώσεις των Navier–Stokes. (δ) Στη συνέχεια θα εξετάσουμε εκτενώς την αστρόβιλη και μόνιμη (σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου) ροή ιδεατού ρευστού εισάγοντας το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi(x, y, z)$ . Το δυναμικό αυτό πληροί την εξίσωση του Laplace (είναι δηλαδή αρμονική συνάρτηση) τόσο στην τριδιάστατη όσο και στη διδιάστατη αστρόβιλη και μόνιμη ροή. Ειδικά στη διδιάστατη μόνιμη ροή η εισαγωγή της ροϊκής συναρτήσεως  $\Psi(x, y)$  επιτρέπει την αυτόματη πλήρωση της εξισώσεως της συνεχείας. (ε) Τέλος θα εξετάσουμε σύντομα και το πρόβλημα της Κυκλοφοριακής Ροής σε αυτοκινητόδρομο. Στο πρόβλημα αυτό προκύπτει μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση για την πυκνότητα των αυτοκινήτων.

Σε όλα αυτά τα παραδείγματα του κεφαλαίου αυτού δεν επιδιώκουμε την επίλυση των τελικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Αυτή θα αποτελέσει αντικείμενο μελέτης σε επόμενα κεφάλαια όσον αφορά στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Εδώ επιδιώκουμε απλά να δείξουμε τη χρησιμότητα των τόσο σημαντικών εξισώσεων αυτών στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Επίσης να δείξουμε τη δυνατότητα (μερικές φορές) της απλοποιήσεως ενός γραμμικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με την αναγωγή του σε μια μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Ο στόχος αυτός όμως απαιτεί συχνά την εισαγωγή νέων άγνωστων συναρτήσεων. Ειδικά στην Ενότητα Β3.2 η ανάλυση για τις αξονικές (ή διαμήκεις) ταλαντώσεις συνήθους ράβδου αποβλέπει στην πλήρη κατάστρωση από καθαρά μηχανικές έννοιες και νόμους (συγκεκριμένα του Νεύτωνα και του Hooke) της ισχύουσας διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους. Συγκεκριμένα πρόκειται για τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση). Η ίδια ανάλυση με ελάχιστες τροποποιήσεις (με διαφορές μόνο στα χρησιμοποιούμενα μεγέθη) ισχύει και για τις στρεπτικές ταλαντώσεις συνήθους ράβδου. Μπορεί μάλιστα να γενικευθεί και στις κάπως δυσκολότερες καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού. Εντούτοις αυτή η γενίκευση δε θα αποτελέσει αντικείμενο λεπτομερούς μελέτης στο παρόν κεφάλαιο.

---

### Β3.1. Η ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ AIRY ΣΤΗΝ ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

#### Β3.1.1. Εισαγωγή στο επίπεδο ελαστικό πρόβλημα

Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα της επίπεδης ελαστικότητας στη Μηχανική των Υλικών για ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό μέσον  $D$  στο επίπεδο  $Oxy$ . Εξετάζουμε ταυτόχρονα δύο ειδών συνθήκες: (α) Συνθήκες (γενικευμένης) επίπεδης εντάσεως, δηλαδή ένα πάρα πολύ λεπτό ελαστικό μέσον κατά τον κάθετο  $s'$  αυτό άξονα  $Oz$ . Ένα τέτοιο ελαστικό μέσον καλείται ελαστικός δίσκος κατά την ορολογία του Πολιτικού Μηχανικού σε αντιστοιχία με τον όρο ελαστική πλάκα. (β) Συνθήκες επίπεδης παραμορφώσεως, δηλαδή ένα πάρα πολύ παχύ ελαστικό μέσον κατά τον ίδιο άξονα  $Oz$ .

Σε ένα τέτοιο ελαστικό μέσον  $D$  μας ενδιαφέρουν κυρίως οι τάσεις (ή, ακριβέστερα, οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων)  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  (δύο ορθές τάσεις) και  $\tau_{xy}$  (μια διατμητική τάση) στο επίπεδο  $Oxy$  του ελαστικού μέσου  $D$ . Μας ενδιαφέρουν επίσης και οι παραμορφώσεις (ή, ακριβέστερα, οι συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων)  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  (ορθές παραμορφώσεις) και  $\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}/2$ , οπότε και  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$  (διατμητική παραμόρφωση) στο ίδιο επίπεδο  $Oxy$ . Πρόκειται για το κλασικό πρόβλημα της επίπεδης ελαστικότητας, στατικής βέβαια (όχι δυναμικής) με τα μεγέθη αυτά ανεξάρτητα του χρόνου  $t$ . Χάρη διευκολύνσεως, υποθέτουμε επίσης ότι δεν υπάρχουν δυνάμεις μάζας (καθολικές δυνάμεις), όπως είναι η δύναμη της βαρύτητας, στα σημεία του ελαστικού μέσου  $D$  που εξετάζουμε.

Εδώ θα μελετήσουμε τις εξισώσεις που διέπουν το παρόν πρόβλημα για το ελαστικό μέσον  $D$ . Θα διαπιστώσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα εξισώσεων, κυρίως διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Το σύστημα αυτό θα το αναγάγουμε σε μια μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, την πολύ γνωστή διαρμονική εξίσωση (εννοείται στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$ )

$$\nabla^4 A \equiv \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 A}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 A}{\partial y^4} = 0 \quad \text{με} \quad A = A(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (3.1.1)$$

Άγνωστη συνάρτηση είναι η καλούμενη τασική συνάρτηση (ή τασεοσυνάρτηση)  $A = A(x, y)$  του Airy. Η συνάρτηση αυτή συχνά συμβολίζεται και με το σύμβολο  $\varphi$  αντί του  $A$ , που είναι το αρχικό του ονόματος Airy, ο οποίος την εισήγαγε στην ελαστικότητα. Ας ξεκινήσουμε όμως από την αρχή, για να καταλήξουμε τελικά στην εξίσωση (3.1.1), που είναι μια τόσο σημαντική γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους για τον Πολιτικό Μηχανικό.

#### Β3.1.2. Οι εξισώσεις του προβλήματος

Θεωρούμε το επίπεδο ελαστικό πρόβλημα, που ήδη περιγράψαμε σύντομα, για ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό χωρίς δυνάμεις μάζας (καθολικές δυνάμεις), όπως συνήθως υποτίθεται. Όπως είναι γνωστό από τη Μηχανική των Υλικών, στο επίπεδο αυτό πρόβλημα ισχύουν οι εξής εξισώσεις:

(α) Οι δύο εξισώσεις ισορροπίας:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (3.1.3)$$

Πρόκειται για δύο διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, αλλά με τρεις άγνωστες συναρτήσεις: τις ορθές τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και τη διατμητική τάση  $\tau_{xy}$ . Επομένως οι δύο αυτές εξισώσεις δεν αρκούν για την επίλυση του παρόντος επίπεδου ελαστικού προβλήματος.

(β) Η εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού των παραμορφώσεων:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.1.4)$$

Η εξίσωση αυτή μας βεβαιώνει ότι οι παραμορφώσεις  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  και  $\gamma_{xy}$  (με ορισμούς τους μέσω των μετατοπίσεων  $u$  και  $v$  κατά τους άξονες  $x$  και  $y$  αντίστοιχα) είναι συμβιβαστές. Με άλλα λόγια μας εξασφαλίζει το μονοσήμαντο των μετατοπίσεων  $u$  και  $v$ , εάν οι παραμορφώσεις αυτές θεωρηθούν γνωστές. Παρενθετικά σημειώνεται ότι η εξίσωση αυτή (3.1.4) προκύπτει από τους γνωστούς ορισμούς των παραμορφώσεων  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  και  $\gamma_{xy}$  σαν μερικών παραγώγων των μετατοπίσεων  $u$  και  $v$ :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.1.5)$$

Οι ορισμοί αυτοί δίνουν τις τρεις αυτές παραμορφώσεις από δύο μόνο μετατοπίσεις: τις  $u$  και  $v$ . Επομένως οι παραμορφώσεις αυτές ( $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  και  $\gamma_{xy}$ ) δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε εύκολα. Παραγωγίζουμε: (α) τον αμέσως πιο πάνω ορισμό της παραμορφώσεως  $\varepsilon_x$  δύο φορές ως προς  $y$ , (β) τον ορισμό της παραμορφώσεως  $\varepsilon_y$  δύο φορές ως προς  $x$  και (γ) τον ορισμό της παραμορφώσεως  $\gamma_{xy}$  (που είναι ίση με  $2\varepsilon_{xy}$ ) μια φορά ως προς  $x$  και μια ως προς  $y$ . Υποθέτοντας μάλιστα και τη δυνατότητα εναλλαγής της σειράς των παραγωγίσεων σε μικτές μερικές παραγώγους, παίρνουμε έτσι τις εξής τρεις σχέσεις:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}. \quad (3.1.6)$$

Προσθέτουμε τώρα τις δύο πρώτες από τις σχέσεις αυτές και αφαιρούμε την τρίτη. Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.1.7)$$

Η εξίσωση αυτή είναι πραγματικά η ζητούμενη συνθήκη συμβιβαστού των παραμορφώσεων και ταυτίζεται φυσικά με την τελική μορφή της (3.1.4), την οποία θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

**(γ) Ο νόμος του Hooke**, που συνδέει τις τάσεις με τις παραμορφώσεις στη γραμμική Ελαστικότητα. Ο νόμος αυτός στην παρούσα επίπεδη ειδική περίπτωση παίρνει τη μορφή:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad (3.1.8)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad (3.1.9)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}. \quad (3.1.10)$$

Περιορισθήκαμε στις καθαρά επίπεδες (και ουσιαστικά μόνες ενδιαφέρουσες στο παρόν πρόβλημα) τάσεις: τις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  και παραμορφώσεις: τις  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  και  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ . Ο παραπάνω νόμος του Hooke στο επίπεδο, (3.1.8) έως (3.1.10), είναι ο βασικός νόμος της γραμμικής Ελαστικότητας στη Μηχανική των Υλικών για ισότροπα ελαστικά μέσα. Στο νόμο αυτό το σύμβολο  $E$  δηλώνει το μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young), το σύμβολο  $G$  το μέτρο διατμήσεως (που είναι ίσο με τη δεύτερη σταθερά  $\mu$  του Lamé:  $G = \mu$ ) και το σύμβολο  $\nu$  το λόγο του Poisson ( $0 < \nu < 1/2$ ) του παρόντος ισότροπου ελαστικού υλικού. Ισχύει μάλιστα, όπως είναι γνωστό, η ήδη χρησιμοποιηθείσα στον τύπο (3.1.10) σχέση μεταξύ των τριών αυτών σταθερών

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.1.11)$$

Επομένως ουσιαστικά δύο μόνο είναι οι ανεξάρτητες σταθερές σε ένα ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό, έστω οι  $E$  και  $\nu$ .

Εν πάση περιπτώσει, τελικά έχουμε ένα σύστημα που αποτελείται από έξι συνολικά εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές είναι: (α) τρεις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους: οι δύο εξισώσεις ισορροπίας (3.1.2) και (3.1.3) και η μία εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού των παραμορφώσεων (3.1.4) και (β) τρεις εξισώσεις από το νόμο του Hooke στο επίπεδο: οι εξισώσεις (3.1.8), (3.1.9) και (3.1.10). Αυτές είναι συνήθεις γραμμικές αλγεβρικές (όχι διαφορικές) εξισώσεις.

Οι έξι αυτές εξισώσεις έχουν και έξι άγνωστες συναρτήσεις: τις τρεις τάσεις:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  και τις τρεις παραμορφώσεις:  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  και  $\gamma_{xy}$ . Εκ πρώτης όψεως, η διαθεσιμότητα έξι εξισώσεων (τριών διαφορικών και τριών αλγεβρικών, γραμμικών όμως όλων) με έξι άγνωστες συναρτήσεις στο παρόν επίπεδο ελαστικό μέσον  $D$  (είτε πεπερασμένο είτε άπειρο) ηχεί με θετικό τρόπο. Πραγματικά οι έξι αυτές εξισώσεις μπορούν να οδηγήσουν, καταρχήν τουλάχιστον, στη λύση του παρόντος προβλήματος λαμβάνοντας υπόψη και τις συνοριακές συνθήκες στο σύνορο  $C \equiv \partial D$  του ελαστικού μέσου  $D$ . Εμείς στην παρούσα ενότητα θα αγνοήσουμε τις συνοριακές συνθήκες. Θα περιορισθούμε απλά στην αναγωγή του πιο πάνω προβλήματος των έξι εξισώσεων με έξι άγνωστες συναρτήσεις σε μια μόνο εξίσωση: στη διαρμονική εξίσωση (3.1.1). Σ' αυτήν άγνωστη συνάρτηση είναι η τασική συνάρτηση (ή τασεοσυνάρτηση) του Airy  $A(x, y)$ . Όπως ήδη αναφέραμε, η συνάρτηση αυτή  $A(x, y)$  πολύ συχνά συμβολίζεται και με  $\varphi(x, y)$ .

Το πρώτο βήμα σχετικά με την αναγωγή αυτή είναι η απαλοιφή των αλγεβρικών εξισώσεων επ' ωφελεία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους εννοείται. Αυτό είναι ένα μάλλον πολύ ευχερές έργο παίρνοντας τις παραμορφώσεις από το νόμο του Hooke (3.1.8), (3.1.9) και (3.1.10) και αντικαθιστώντας τις κατευθείαν στην εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού των παραμορφώσεων (3.1.4). Απλοποιώντας μάλιστα στον παρονομαστή το μέτρο ελαστικότητας  $E$  του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού του μέσου  $D$  που εξετάζουμε, βρίσκουμε άμεσα από την εξίσωση (ή συνθήκη) (3.1.4) ότι

$$\frac{\partial^2(\sigma_x - \nu\sigma_y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\sigma_y - \nu\sigma_x)}{\partial x^2} = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (3.1.12)$$

Αυτή είναι η εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού των παραμορφώσεων (3.1.4) γραμμένη όμως τώρα με τη χρήση των τάσεων  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$ . Η εξίσωση αυτή μπορεί να αποκληθεί απλά και εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού. Μάλιστα για όποιον έχει κατανοήσει τί ακριβώς έγινε και έχει και το σχετικό θράσος, θα μπορούσε να αποκληθεί ακόμη και συνθήκη συμβιβαστού των τάσεων.

Τώρα πια έχουμε ένα σύστημα τριών ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους: (α) των δύο εξισώσεων ισορροπίας (3.1.2) και (3.1.3) και (β) της εξισώσεως συμβιβαστού (3.1.12). Τρεις μόνο είναι οι άγνωστες συναρτήσεις στις εξισώσεις αυτές: οι δύο ορθές τάσεις  $\sigma_x$  και  $\sigma_y$  και η διατμητική τάση  $\tau_{xy}$ . Διαθέτουμε λοιπόν τρεις διαφορικές εξισώσεις με τρεις άγνωστες συναρτήσεις. Επομένως θα θέλαμε να βρεθούν οι λύσεις τους  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  (οι τάσεις) είτε (α) γενικά: γενική λύση είτε (β) υπό τις συνοριακές συνθήκες που ισχύουν κάθε φορά: μερική λύση ή, καλύτερα, λύση του σχετικού προβλήματος συνοριακών τιμών. Στη συνέχεια οι παραμορφώσεις  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  και  $\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy}$  μπορούν και αυτές θαυμάσια να προσδιορισθούν από το νόμο του Hooke στο επίπεδο, στην περίπτωση μας από τους τύπους (3.1.8), (3.1.9) και (3.1.10). Τέλος λοιπόν και με τις παραμορφώσεις. Περιοριζόμαστε στη συνέχεια στις τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$ , εννοείται πάντοτε στο επίπεδο, μέσα στο ελαστικό μέσον  $D$  που εξετάζουμε.

### B3.1.3. Απλοποίηση της εξισώσεως συμβιβαστού

Όπως είδαμε, έχουμε τελικά το σύστημα των εξισώσεων (3.1.2), (3.1.3) και (3.1.12). Μπορούμε βέβαια να εργασθούμε με αυτό, αλλά δεν είμαστε ακόμη απόλυτα ευχαριστημένοι. Η εξίσωση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων (αλλά τώρα με τις τάσεις σ' αυτήν), η εξίσωση συμβιβαστού (ας περιορισθούμε στη φράση αυτή) (3.1.12) μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά. Αυτό το κατορθώνουμε λαμβάνοντας υπόψη και τις εξισώσεις ισορροπίας (3.1.2) και (3.1.3), που ισχύουν ταυτόχρονα. Πραγματικά από τις δύο αυτές εξισώσεις ισορροπίας με παραγωγίσεις ως προς  $x$  και  $y$  αντίστοιχα, προκύπτει ότι

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad (3.1.13)$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.1.14)$$

Στις σχέσεις αυτές οι μικτές μερικές παράγωγοι της διατμητικής τάσεως  $\tau_{xy}$  έχουν φυσικά θεωρηθεί ίσες μεταξύ τους. Προσθέτοντας τώρα τις δύο αυτές σχέσεις (3.1.13) και (3.1.14), βρίσκουμε επίσης εύκολα ότι

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right). \quad (3.1.15)$$

Επομένως μπορούμε τώρα να απαλείψουμε τη διατμητική τάση  $\tau_{xy}$  από την εξίσωση συμβιβαστού (3.1.12) αντικαθιστώντας την εκεί (στο δεξιό μέλος) από τη μόλις ευρεθείσα σχέση (3.1.15). Έτσι προκύπτει μετά μάλιστα χωριστή γραφή των παραγώγων των ορθών τάσεων  $\sigma_x$  και  $\sigma_y$  στο αριστερό μέλος (βάσει της πολύ γνωστής γραμμικής ιδιότητας στην παραγωγή) ότι

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} = -(1 + \nu) \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right). \quad (3.1.16)$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι που είναι πολλαπλασιασμένοι επί το λόγο του Poisson  $\nu$  απλοποιούνται. Επομένως απομένουν οι υπόλοιποι όροι

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = - \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right). \quad (3.1.17)$$

Μεταφέροντας μάλιστα το δεξιό μέλος στο αριστερό και αναδιατάσσοντας τους τέσσερις όρους στο πιο πάνω άθροισμα δευτέρων μερικών παραγώγων ως προς  $x$  και  $y$ , λαμβάνουμε

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0. \quad (3.1.18)$$

Εάν μάλιστα θυμηθούμε και τον ορισμό (2.1.23) του τελεστή  $\nabla^2$  ( $\nabla^2 \equiv \Delta$ ) του Laplace (της Λαπλασιανής, Laplacian) στις δύο διαστάσεις  $x$  και  $y$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3.1.19)$$

τότε η παραπάνω εξίσωση (3.1.18) γράφεται στη μορφή

$$\left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) \equiv \nabla^2 \sigma_x + \nabla^2 \sigma_y = 0. \quad (3.1.20)$$

Όμως το άθροισμα δύο ομοίων μερικών παραγώγων ισούται με την αντίστοιχη μερική παράγωγο του αθροίσματος. Αυτή, επαναλαμβάνουμε, είναι η πολύ γνωστή γραμμική ιδιότητα στην παραγωγή. Άρα η γραμμική και ομογενής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (3.1.20), στην οποία καταλήξαμε, παίρνει την τελική της μορφή

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) \equiv \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (3.1.21)$$

Συμπεραίνουμε επομένως ότι η εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού (3.1.12) (με τη χρήση των τάσεων) με την επικούρηση και των εξισώσεων ισορροπίας (3.1.2) και (3.1.3), που επίσης ισχύουν, μπορεί να πάρει την τελική της μορφή (3.1.21). Η μορφή αυτή δηλώνει σαφώς ότι τό άθροισμα των ορθών τάσεων  $\sigma_x + \sigma_y$  στο διδιάστατο πρόβλημα της Ελαστικότητας στη Μηχανική των Υλικών επαληθεύει την εξίσωση του Laplace, έχει Λαπλασιανή, Laplacian μηδέν. Είναι δηλαδή αρμονική συνάρτηση, ακριβώς όπως και το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  και η ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής)  $\Psi$  στη διδιάστατη Ρευστομηχανική ή Μηχανική των Ρευστών. (Αυτά θα τα δούμε λεπτομερώς και πιο κάτω στην Ενότητα Β3.4.) Επίσης αρμονική συνάρτηση είναι και η θερμοκρασία  $u$  (ή  $\theta$ ) σε μόνιμη (σταθερή) κατάσταση στη Μετάδοση Θερμότητας. Είναι επίσης και αρκετές άλλες συναρτήσεις ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού. Στο σημείο αυτό κάνουμε σχετική αναφορά στην Παράγραφο Β2.1.1 του προηγούμενου Κεφαλαίου Β2. Στην Παράγραφο εκείνη Β2.1.1 διαπιστώσαμε το πολύ μεγάλο ενδιαφέρον που πρέπει να επιδεικνύει ο Πολιτικός Μηχανικός για την εξίσωση του Laplace και στη διδιάστατη και στην τριδιάστατη μορφή της.

Από τα παραπάνω συνάγουμε ότι το επίπεδο ελαστικό πρόβλημα της Μηχανικής των Υλικών που εξετάζουμε έχει αναχθεί τελικά σε ένα σύστημα τριών ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (και με σταθερούς συντελεστές φυσικά). Πρόκειται για το σύστημα των εξισώσεων (3.1.2), (3.1.3) και (3.1.21), όπου βέβαια έχουμε αμελήσει τις δυνάμεις μάζας, που είναι καθολικές δυνάμεις. Στο σύστημα αυτό οι δύο πρώτες εξισώσεις (3.1.2) και (3.1.3), που είναι και πρώτης τάξεως, είναι οι εξισώσεις ισορροπίας. Η τρίτη εξίσωση (3.1.21), που είναι δευτέρας τάξεως, είναι η εξίσωση συμβιβαστού, τροποποιημένη όμως, όπως ήδη εξηγήθηκε πιο πάνω.

Επαναλαμβάνουμε λοιπόν το τελικό σύστημα των τριών εξισώσεων στο οποίο καταλήξαμε στο γενικό πρόβλημα της επίπεδης Ελαστικότητας είτε (α) υπό συνθήκες (γενικευμένης) επίπεδης εντάσεως είτε (β) υπό συνθήκες επίπεδης παραμορφώσεως

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (3.1.22)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (3.1.23)$$

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (3.1.24)$$

Πρόκειται για τις δύο εξισώσεις ισορροπίας: (3.1.22) και (3.1.23) καθώς και την εξίσωση συμβιβαστού: (3.1.24). Έχουμε τώρα χρησιμοποιήσει στην εξίσωση συμβιβαστού (3.1.24) μόνο τον αρμονικό τελεστή  $\nabla^2$  (τον τελεστή του Laplace, τη Λαπλασιανή, Laplacian).

#### B3.1.4. Βοηθητικές τασικές συναρτήσεις και η τασική συνάρτηση του Airy

Έχουμε ήδη προσδιορίσει το πιο πάνω σύστημα τριών ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (3.1.22), (3.1.23) και (3.1.24). Το σύστημα αυτό έχει τρεις άγνωστες συναρτήσεις: τις τάσεις (ή συνιστώσες του ταυστή των τάσεων)  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$ . Οι δύο πρώτες  $\sigma_x$  και  $\sigma_y$  είναι οι ορθές τάσεις και η τρίτη  $\tau_{xy}$  η διατμητική τάση. Θα προχωρήσουμε τώρα στην απόδειξη ότι με τη χρήση της τασικής συναρτήσεως (ή τασεοσυναρτήσεως) του Airy  $A = A(x, y)$  το παραπάνω σύστημα ανάγεται σε μια μόνο ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Αυτή είναι η διαρμονική εξίσωση (3.1.1) με άγνωστη συνάρτηση την  $A(x, y)$ , δηλαδή

$$\nabla^4 A \equiv \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 A}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 A}{\partial y^4} = 0 \quad \text{με} \quad A = A(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (3.1.25)$$

Η απόδειξη αυτή, αν και δεν είναι άμεσα προφανής, είναι όμως αρκετά απλή στην κατανόησή της.

Πράγματι, για την απόδειξη αυτή προχωρώντας με τη σειρά, θα επιζητήσουμε καταρχήν την πλήρωση της πρώτης εξισώσεως ισορροπίας (3.1.22). Για την πλήρωση της εξισώσεως αυτής λαμβάνουμε υπόψη ότι η σχετική αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι η ύπαρξη βοηθητικής τασικής συναρτήσεως  $p = p(x, y)$ , τέτοιας ώστε

$$\sigma_x = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (3.1.26)$$

Η σκέψη αυτή είναι απόλυτα αντίστοιχη εκείνης που έγινε στις πλήρεις (ή ακριβείς) συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως.

Αντικαθιστώντας τώρα τις τάσεις  $\sigma_x$  και  $\tau_{xy}$  στην πρώτη εξίσωση ισορροπίας (3.1.22), παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = 0. \quad (3.1.27)$$

Η τελευταία όμως εξίσωση πληρούται αυτόματα, γιατί οι μικτές μερικές παράγωγοι της βοηθητικής τασικής συναρτήσεως  $p = p(x, y)$  που εισαγάγαμε είναι ίσες. (Υποτίθεται βέβαια ότι υπάρχουν και είναι συνεχείς, όπως πάντοτε δεχόμαστε στην πράξη.) Άρα η εισαγωγή της βοηθητικής τασικής συναρτήσεως  $p = p(x, y)$  μας επέτρεψε να απαλλαγούμε από κάθε έγνοια ως προς την



πλήρωση της πρώτης εξίσωσης ισορροπίας (3.1.22), δηλαδή της πρώτης από τις τρεις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους του πιο πάνω συστήματος. Ασφαλώς και είμαστε ευχαριστημένοι από την επιτυχία μας αυτή, παρόλο βέβαια που δεν οφείλεται σ' εμάς!

Με εντελώς ανάλογο τρόπο πληρούται αυτόματα και η απόλυτα αντίστοιχη δεύτερη εξίσωση ισορροπίας (3.1.23). Αρκεί τώρα να εισαγάγουμε και δεύτερη (πέραν της  $p = p(x, y)$ ) παρόμοια βοηθητική τασική συνάρτηση  $q = q(x, y)$ , τέτοια ώστε οι τάσεις  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  να προκύπτουν από αυτή με βάση τους τύπους

$$\sigma_y = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial q}{\partial y}. \quad (3.1.28)$$

Οι τύποι αυτοί είναι απόλυτα ανάλογοι των τύπων (3.1.26).

Αντικαθιστώντας τώρα τις τάσεις  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  στη δεύτερη εξίσωση ισορροπίας (3.1.23), παρατηρούμε ότι

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \implies -\frac{\partial^2 q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 q}{\partial y \partial x} = 0. \quad (3.1.29)$$

Επομένως πληρούται και η εξίσωση αυτή ισορροπίας για κάθε επιλογή της βοηθητικής τασικής συναρτήσεως  $q = q(x, y)$ . Αρκεί βέβαια η συνάρτηση αυτή  $q = q(x, y)$  να διαθέτει δεύτερες συνεχείς μικτές μερικές παραγώγους, οπότε αυτές είναι και ίσες μεταξύ τους.

Άρα πληρούνται τώρα και οι δύο εξισώσεις ισορροπίας (3.1.22) και (3.1.23) μετά την εισαγωγή των δύο βοηθητικών τασικών συναρτήσεων: των  $p = p(x, y)$  και  $q = q(x, y)$  που πραγματοποιήσαμε. Από τις συναρτήσεις αυτές με απλές παραγωγίσεις προκύπτουν οι τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$ . Επομένως οι συναρτήσεις αυτές  $p$  και  $q$  δικαιολογημένα έχουν ήδη αποκληθεί βοηθητικές τασικές συναρτήσεις. Αυτό όμως δεν είναι ιδιαίτερης σημασίας. Τούτο συμβαίνει πρώτα μεν γιατί οι βοηθητικές τασικές συναρτήσεις  $p$  και  $q$  είναι δύο συναρτήσεις αντί μιας μόνο. Έχουμε δηλαδή δύο άγνωστες συναρτήσεις: τις  $p$  και  $q$  αντί τριών αρχικά: των τάσεων  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$ . Θα θέλαμε όμως να είχαμε μόνο μια άγνωστη συνάρτηση. Παραπέρα, δεύτερον, παρατηρούμε ότι η διατμητική τάση  $\tau_{xy}$  εκφράζεται τόσο σαν πρώτη μερική παράγωγος της  $p$  (ως προς  $x$ ) όσο σαν πρώτη μερική παράγωγος της  $q$  (ως προς  $y$ ). Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε πρόσημο μείον με βάση τους δεύτερους από τους τύπους (3.1.26) και (3.1.28) αντίστοιχα. Άρα πρέπει να ισχύει η εξίσωση

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y}, \quad (3.1.30)$$

που γράφεται άμεσα και στη μορφή

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0. \quad (3.1.31)$$

Η εξίσωση αυτή (3.1.31) είναι μια επιπλέον διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που μας εξασφαλίζει το συμβιβαστό της διατμητικής τάσεως  $\tau_{xy}$ , εάν χρησιμοποιηθούν ταυτόχρονα και οι δύο βοηθητικές τασικές συναρτήσεις  $p$  και  $q$ . Συγκρίνοντας τώρα την εξίσωση (3.1.31) με τις εξισώσεις ισορροπίας (3.1.22) και (3.1.23), παρατηρούμε ότι είναι σχεδόν του ίδιου με αυτές τύπου. Επομένως αναγκαία και ικανή συνθήκη για την πλήρωση της εξίσωσης (3.1.31) αποτελεί η ύπαρξη μιας νέας συναρτήσεως  $A = A(x, y)$ , από την οποία με πρώτες και πάλι μερικές παραγωγίσεις να προκύπτουν οι βοηθητικές τασικές συναρτήσεις  $p$  και  $q$  ως εξής:

$$p = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad q = \frac{\partial A}{\partial x}. \quad (3.1.32)$$

Τότε η εξίσωση αυτή (3.1.31) μας δίνει

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} = 0 \implies \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x} = 0 \implies \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}. \quad (3.1.33)$$

Αυτό ισχύει, επειδή οι μικτές αυτές μερικές παράγωγοι υποτίθενται ότι είναι ίσες και πραγματικά είναι, εάν υπάρχουν και είναι και συνεχείς, κάτι που γίνεται γενικά δεκτό. Άρα με τη χρήση

και της συναρτήσεως  $A = A(x, y)$  είμαστε πλήρως απαλλαγμένοι και από τις δύο εξισώσεις ισοροπίας (3.1.22) και (3.1.23) με την εισαγωγή μόνο μιας συναρτήσεως: της  $A(x, y)$ . Η συνάρτηση αυτή  $A(x, y)$  είναι πολύ γνωστή στην επίπεδη Ελαστικότητα για ισότροπο μέσον και αποκαλείται τασική συνάρτηση (ή, ίσως απλούστερα, τασεοσυνάρτηση) του Airy.

### B3.1.5. Προσδιορισμός των τάσεων

Με γνωστή τη συνάρτηση αυτή  $A(x, y)$  σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο ελαστικό πρόβλημα για ισότροπο μέσον  $D$  οι πρώτες από τις σχέσεις (3.1.26) και (3.1.32) μας δίνουν αμέσως για την πρώτη ορθή τάση  $\sigma_x$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}. \quad (3.1.34)$$

Ανάλογα η πρώτη από τις σχέσεις (3.1.28) και η δεύτερη από τις σχέσεις (3.1.32) μας δίνουν για τη δεύτερη ορθή τάση  $\sigma_y$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}. \quad (3.1.35)$$

Τέλος οι σχέσεις (3.1.30) και (3.1.32) μας επιτρέπουν εξίσου άμεσα τον προσδιορισμό και της διατμητικής τάσεως  $\tau_{xy}$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}. \quad (3.1.36)$$

(Όμως οι μικτές αυτές μερικές παράγωγοι είναι γενικά ίσες!) Με τις εκφράσεις (3.1.34), (3.1.35) και (3.1.36) ισχύουν (αυτόματα και ταυτόχρονα) και οι δύο εξισώσεις ισοροπίας (3.1.22) και (3.1.23), όπως πραγματικά ανεμενόταν.

### B3.1.6. Διαρμονικότητα της τασικής συναρτήσεως του Airy

Επομένως με την εισαγωγή της συναρτήσεως αυτής  $A(x, y)$ : της τασικής συναρτήσεως (ή τασεοσυναρτήσεως) του Airy, έχουμε πια να ασχοληθούμε αποκλειστικά με την πλήρωση της εξίσωσης (ή συνθήκης) συμβιβαστού (3.1.24). (Παρενθετικά σημειώνουμε ότι την τασική συνάρτηση του Airy  $A(x, y)$  δεν υπάρχει σοβαρός λόγος να την αποκαλούμε βοηθητική. Εντούτοις μας βοηθάει πολύ, πάρα πολύ στο έργο μας της επιλύσεως του επίπεδου ελαστικού προβλήματος στη Μηχανική των Υλικών.) Τώρα πια είναι εύκολη, πραγματικά πολύ εύκολη, η εργασία της πληρώσεως της εξίσωσης (ή συνθήκης) συμβιβαστού (3.1.24) συναρτήσεως των τάσεων και σ' αυτήν την τελική της, την απλοποιημένη μορφή (3.1.24), που μέχρι στιγμής είχαμε αγνοήσει. Προς το σκοπό αυτό αρκεί να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση αυτή (3.1.24) τις εκφράσεις των ορθών τάσεων (3.1.34) και (3.1.35). Τότε ευθύς προκύπτει ότι

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \implies \nabla^2 \left( \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (3.1.37)$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι, επειδή, όπως ξέρουμε: ορισμός (2.1.23) ή (3.1.19), στο επίπεδο  $Oxy$ ,

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3.1.38)$$

πρέπει να ισχύει και η εξίσωση

$$\nabla^2(\nabla^2 A) \equiv \nabla^4 A = 0. \quad (3.1.39)$$

Η εξίσωση αυτή γράφεται προφανώς και σε αναλυτικότερη μορφή ως εξής:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A = 0. \quad (3.1.40)$$

Δηλώνοντας μάλιστα τις παραγωγίσεις κατά σαφέστερο και πιο απλοποιημένο τρόπο και δεχόμενοι και πάλι τη δυνατότητα εναλλαγής της σειράς των παραγωγίσεων στις μικτές μερικές παραγώγους, διαπιστώνουμε ότι πραγματικά ισχύει η διαρμονική εξίσωση (3.1.1)

$$\nabla^4 A \equiv \frac{\partial^4 A}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 A}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 A}{\partial y^4} = 0 \quad \text{με} \quad A = A(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (3.1.41)$$

Αυτή είναι η εξίσωση που εξαρχής θέλαμε να αποδείξουμε ότι πρέπει να επαληθεύεται από την τασική συνάρτηση του Airy  $A(x, y)$ .

### Β3.1.7. Συμπεράσματα

Τα συμπεράσματά μας είναι πολύ απλά:

- Στο επίπεδο ελαστικό πρόβλημα η χρήση της τασικής συναρτήσεως (ή τασεοσυναρτήσεως) του Airy  $A(x, y)$  μας επιτρέπει την αυτόματη πλήρωση και των δύο εξισώσεων ισορροπίας (3.1.22) και (3.1.23) χωρίς κανέναν πρόσθετο κόπο. Αυτό ισχύει υπό συνθήκες είτε (γενικευμένης) επίπεδης εντάσεως είτε επίπεδης παραμορφώσεως και με την απουσία δυνάμεων μάζας (καθολικών δυνάμεων). Χρησιμοποιώντας την τασική συνάρτηση του Airy  $A(x, y)$  προσδιορίζουμε και τις τρεις τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  βάσει των τύπων (3.1.34), (3.1.35) και (3.1.36) αντίστοιχα. Οι τύποι αυτοί απαιτούν απλά τον υπολογισμό των δεύτερων μερικών παραγώγων: ως προς  $y$ , ως προς  $x$  και μικτής αντίστοιχα.
- Αντίθετα η εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού (3.1.24) απαιτεί για την ισχύ της τη διαρμονικότητα της τασικής συναρτήσεως του Airy  $A(x, y)$ , δηλαδή την πλήρωση της διαρμονικής εξισώσεως (3.1.39) και, αναλυτικότερα, (3.1.41). Είναι λοιπόν η συνάρτηση  $A(x, y)$  διαρμονική και όχι απλά αρμονική, όπως είναι, π.χ., το άθροισμα των ορθών τάσεων  $\sigma_x + \sigma_y$  λόγω της εξισώσεως (3.1.21).
- Σύμφωνα με αυτά το σύστημα των δύο εξισώσεων ισορροπίας και της εξισώσεως (ή συνθήκης) συμβιβαστού (3.1.22), (3.1.23) και (3.1.24) έχει αναχθεί σε μια μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους: τη διαρμονική εξίσωση (3.1.39) ή (3.1.41). Το σύστημα αυτό των τριών εξισώσεων (3.1.22), (3.1.23) και (3.1.24) είναι βέβαια ένα σύστημα τριών ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Από τις εξισώσεις αυτές οι δύο πρώτες είναι πρώτης τάξεως: οι εξισώσεις ισορροπίας (3.1.22) και (3.1.23) και η τρίτη δεύτερας τάξεως: η εξίσωση συμβιβαστού (3.1.24). Και οι τρεις αυτές εξισώσεις είναι με σταθερούς συντελεστές. Παραπέρα και η διαρμονική εξίσωση (3.1.39) ή (3.1.41) για την τασική συνάρτηση του Airy είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με σταθερούς επίσης συντελεστές. Όμως το κόστος για την απλοποίηση του επίπεδου ελαστικού προβλήματος που περιγράψαμε είναι η αύξηση της τάξεως της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους στην οποία καταλήξαμε. Πραγματικά η διαρμονική εξίσωση (3.1.41) είναι τετάρτης τάξεως. Η τάξη της είναι μάλιστα ίση με το άθροισμα των τάξεων:  $1 + 1 + 2$  των τριών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους του αρχικού συστήματος (3.1.22), (3.1.23) και (3.1.24). Ένα τέτοιο κόστος δεν είναι παράδοξο και συχνά παρουσιάζεται σαν αντιστάθμισμα κάποιων μαθηματικών απλοποιήσεων όπως η παρούσα.
- Υπάρχει όμως και ένα ακόμη κόστος με την εισαγωγή της τασικής συναρτήσεως (ή τασεοσυναρτήσεως) του Airy  $A(x, y)$ . Τούτο είναι ότι η συνάρτηση αυτή  $A(x, y)$  δεν έχει καμία φυσική σημασία αντίθετα με τις τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$ , τις οποίες αντικατέστησε σαν άγνωστη συνάρτηση. (Τώρα πια εργαζόμαστε με τη διαρμονική διαφορική εξίσωση (3.1.39) ή, αναλυτικότερα, (3.1.41).)
- Πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι και οι συνοριακές συνθήκες στο σύνορο  $C$  του ελαστικού μέσου  $D$  γίνονται πολυπλοκότερες ως προς τη γραφή τους, εάν χρησιμοποιηθεί σ' αυτές η τασική συνάρτηση του Airy  $A(x, y)$ .

- Παρ' όλα αυτά, η σημαντικότερη απλοποίηση του μαθηματικού προβλήματος με την αυτόματη ισχύ και των δύο εξισώσεων ισορροπίας (3.1.22) και (3.1.23) είναι τόσο μεγάλη που αντισταθμίζει τα τρία μειονεκτήματα εκ της χρήσεως της τασικής συναρτήσεως του Airy  $A(x, y)$  που προαναφέραμε. Η απλοποίηση αυτή καθιστά τη συνάρτηση αυτή  $A(x, y)$  ένα χρησιμότερο εργαλείο για τον Πολιτικό Μηχανικό στις περιπτώσεις που έχει να επιλύσει επίπεδα προβλήματα για ισότροπα και γραμμικά ελαστικά μέσα.

### B3.1.8. Ιστορικά σχόλια

Η εισαγωγή της τασικής συναρτήσεως του Airy  $A(x, y)$ , στην οποία αφιερώσαμε την παρούσα ενότητα (πιθανότατα δίκαια λόγω της μεγάλης σπουδαιότητάς της) έγινε από τον G. B. Airy το 1862. Ο Airy στη σχετική επιστημονική εργασία του πάνω σε επίπεδα προβλήματα δοκών (που θεωρήθηκαν σαν ορθογωνικά ελαστικά μέσα) προσδιόρισε τις εξισώσεις ισορροπίας (3.1.22) και (3.1.23). Απέδειξε επίσης την αυτόματη πλήρωσή τους με τη χρήση των τύπων (3.1.34), (3.1.35) και (3.1.36) για τον καθορισμό των τάσεων μέσω της τασικής συναρτήσεως  $A(x, y)$ . Η συνάρτηση αυτή  $A(x, y)$  φέρει σήμερα το όνομά του: τασική συνάρτηση του Airy. Όλα αυτά αναφέρονται από τον S. P. Timoshenko στο τόσο ενδιαφέρον βιβλίο του *History of Strength of Materials (Ιστορία της Αντοχής Υλικών)*. Dover Publications, 1983, σσ. 224–225.

Παρά ταύτα ο Airy δεν έλαβε υπόψη του την εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού. Επομένως η ανάλυσή του δεν ήταν πλήρης. Την τελευταία αυτή εξίσωση την πήρε αργότερα υπόψη του ο J. C. Maxwell. Αυτός πρώτος απέδειξε ότι η τασική συνάρτηση του Airy  $A(x, y)$  πρέπει να πληροί τη διαρμονική εξίσωση (3.1.39) ή (3.1.41), πρέπει δηλαδή να είναι διαρμονική συνάρτηση.

Ας σημειωθεί τέλος ότι η γενική πραγματική λύση της διαρμονικής εξισώσεως με τη χρήση δύο αυθαίρετων αναλυτικών μιγαδικών συναρτήσεων βρέθηκε από τον E. Goursat το 1898. Τέλος ο καθορισμός των τάσεων  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  με βάση τις δύο αυτές αναλυτικές μιγαδικές συναρτήσεις που παρουσιάζονται στη γενική πραγματική λύση της διαρμονικής εξισώσεως (3.1.39) ή (3.1.41) οφείλεται στον G. V. Kolosov και πραγματοποιήθηκε το 1909.

## B3.2. ΑΞΟΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΡΑΒΔΟΥ

### B3.2.1. Το φυσικό πρόβλημα

Θεωρούμε συνήθη ράβδο μήκους  $L$ , δηλαδή λεπτή ευθύγραμμη ράβδο από ομογενές και ισότροπο γραμμικά ελαστικό υλικό με πυκνότητα  $\rho$  (μάζα ανά μονάδα όγκου, όχι γραμμική πυκνότητα) και με μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young)  $E$ . Επιπλέον η διατομή  $S$  της ράβδου θεωρείται σταθερή και εμβαδού  $A$ . Μερικές φορές (αλλ' όχι πολλές) ο Πολιτικός Μηχανικός εξετάζει ράβδους (αλλά και δοκούς, που είναι επίσης γραμμικοί φορείς) μεταβλητής διατομής. Στην περίπτωση αυτή το εμβαδόν της διατομής τους  $A$  είναι συνάρτηση της θέσεως  $x$  κατά μήκος τους, δηλαδή  $A = A(x)$ . Επίσης (ακόμη σπανιότερα) εξετάζονται ράβδοι και δοκοί με μεταβλητές ελαστικές σταθερές του υλικού τους. Έτσι στην περίπτωση των ράβδων σε αξονικές ταλαντώσεις θα μπορούσε να είναι μεταβλητό το μέτρο ελαστικότητας  $E = E(x)$ . Η μαθηματική μοντελοποίηση του προβλήματος δεν είναι πολύ δυσκολότερη σ' αυτές τις περιπτώσεις. Εδώ όμως θα περιορισθούμε για λόγους απλότητας σε συνήθεις ράβδους με σταθερά κατά μήκος τους: (α) το εμβαδόν  $A$  της διατομής τους  $S$  και (β) το μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young)  $E$  του ισότροπου ελαστικού υλικού τους.

Θα εξετάσουμε τις αξονικές (που πολύ συχνά καλούνται και διαμήκεις) ταλαντώσεις μιας συνήθους ράβδου μήκους  $L$ . Στις ταλαντώσεις αυτές αναπτύσσεται μόνο αξονική (ισοδύναμα διαμήκης) μετατόπιση  $u = u(x, t)$  κατά μήκος της ράβδου με  $x$  τη θέση (συνήθως με  $0 \leq x \leq L$ ) και  $t$  το χρόνο (συνήθως με  $t \geq 0$ ). Η αξονική αυτή μετατόπιση  $u(x, t)$  οφείλεται στις αρχικές συνθήκες (συνήθως τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ) ή/και στις συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου (συνήθως τα σημεία  $x = 0$  και  $x = L$ ). Όχι τόσο συχνά, σπάνια, οφείλεται επίσης και σε εξωτερική αξονική

φόρτιση της ράβδου κατά μήκος της  $f(x, t)$  ανά μονάδα μήκους της ράβδου. Μια τέτοια εξωτερική φόρτιση  $f(x, t)$  παρουσιάζεται π.χ. σε πασσάλους που χρησιμοποιούνται σε θεμελιώσεις από την αντίδραση του εδάφους ή, απλούστερα, το ίδιο βάρος της ράβδου σε περίπτωση κατακόρυφης ράβδου: στύλου ή πασσάλου. Η καθαρά αξονική αυτή καταπόνηση της ράβδου  $f(x, t)$  θεωρείται επίσης ομοιόμορφα κατανεμημένη στη διατομή  $S$  της ράβδου με εμβαδόν  $A$  σταθερό. Δηλαδή αγνοείται η μικρή επιρροή του λόγου του Poisson  $\nu$  του ισότροπου ελαστικού υλικού της ράβδου ως προς τη μεταβολή του εμβαδού  $A$  της διατομής της  $S$ . Η αξονική μετατόπιση της ράβδου  $u(x, t)$ , την οποία ζητούμε, θα είναι η άγνωστη συνάρτηση στην υπό προσδιορισμό διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Υπάρχουν όμως και άλλα ακόμη μεγέθη ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού στην αξονικά ταλαντούμενη ράβδο.

Το πρώτο από τα μεγέθη αυτά είναι η ορθή αξονική (ή διαμήκης) παραμόρφωση  $\varepsilon_x$  κατά μήκος της ράβδου. Αυτή ορίζεται απλά σαν η πρώτη χωρική (εν προκειμένω ως προς τη θέση  $x$ ) παράγωγος της αξονικής μετατοπίσεως  $u = u(x, t)$  κατά μήκος της ίδιας ράβδου, δηλαδή

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.2.1)$$

(Στον ορισμό αυτό (3.2.1) παραλείψαμε το δείκτη  $x$ , δηλαδή γράψαμε  $\varepsilon \equiv \varepsilon_x$ , χάριν απλότητας στο συμβολισμό.) Το δεύτερο μέγεθος που ενδιαφέρει επίσης τον Πολιτικό Μηχανικό είναι η ορθή αξονική (ή διαμήκης) τάση  $\sigma$  και πάλι κατά μήκος της ράβδου:  $\sigma \equiv \sigma_x$ . Η τάση αυτή  $\sigma$  βάσει του πολύ γνωστού από την Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών νόμου του Hooke είναι εδώ ανάλογη της αξονικής παραμορφώσεως  $\varepsilon$  και προσδιορίζεται από τον τόσο θεμελιώδη τύπο

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (3.2.2)$$

Η σταθερά αναλογίας  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young) του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της εξεταζόμενης ράβδου που ήδη αναφέρθηκε.

Η συνολική (σε όλη την επιφάνεια  $A$  της διατομής) αξονική δύναμη  $N = N(x, t)$  σε μια διατομή  $x$  της ράβδου ισούται προφανώς με την αξονική τάση  $\sigma$  επί το εμβαδόν της διατομής  $A$ , που ήδη έχει υποθεθεί σταθερό, δηλαδή  $P = A\sigma$ . (Σημειώνεται ότι η δύναμη  $N$  θεωρείται θετική, εάν είναι εφελκυστική, όχι θλιπτική: τότε θεωρείται αρνητική). Ή αλλιώς η αξονική (και ορθή ασφαλώς) τάση  $\sigma$  είναι το πηλίκο της αξονικής δυνάμεως  $N$  δια του εμβαδού της διατομής  $A$ :

$$\sigma = \frac{N}{A} \iff N = A\sigma. \quad (3.2.3)$$

Συνδυάζοντας τις τόσο απλές σχέσεις (3.2.3), (3.2.2) και (3.2.1), διαπιστώνουμε επίσης ευκολότατα ότι

$$N = A\sigma = A(E\varepsilon) = (EA)\varepsilon \implies N = EA \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.2.4)$$

Η σημαντική σταθερά  $EA$  εξαρτάται και από τη γεωμετρία της ράβδου (το εμβαδόν της διατομής της  $A$ ), αλλά και από το υλικό της (το μέτρο ελαστικότητας  $E$ ). Για τη σταθερά αυτή  $EA$  χρησιμοποιείται (αν και, πρέπει να ομολογηθεί, όχι ιδιαίτερα συχνά) ο όρος *δυστένεια* της ράβδου ανάλογα με τους όρους *δυσκαμψία* στην κάμψη δοκού και *δυστρεψία* στη στρέψη ράβδου. Μεγάλες τιμές της δυστένειας  $EA$  της ράβδου δυσκολεύουν ασφαλώς την αύξηση του μήκους της σε εφελκυσμό (αλλά και τη μείωσή του σε θλίψη) υπό συγκεκριμένες συνθήκες αξονικής φορτίσεως.

### B3.2.2. Αναγωγή σε σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους

Σε μια τέτοια (συνήθη εννοείται) ράβδο απομονώνουμε ένα πάρα πολύ μικρό, απειροστό στοιχείο της μήκους  $\Delta x$  που περιορίζεται από τις διατομές της ράβδου στις θέσεις  $x$  (αριστερά) και  $x + \Delta x$  (δεξιά) κατά μήκος της (με  $\Delta x > 0$ ). Περιοριζόμαστε στο στοιχείο αυτό της ράβδου  $[x, x + \Delta x]$  και θα εξετάσουμε την ισορροπία του (κατά τον άξονα  $x$  της ράβδου) ακριβώς τη χρονική στιγμή  $t$ .

Δεν υπάρχουν τέμνουσες (εγκάρσιες, διατμητικές) δυνάμεις  $Q$  (συχνά χρησιμοποιείται και το σύμβολο  $V$  αντί του  $Q$ ) ούτε καμπτικές ροπές (ροπές κάμψεως)  $M$ . Αν υπήρχαν, θα μιλούσαμε για δοκό, όχι για ράβδο, ακόμη και με την παρουσία αξονικής δυνάμεως  $N$  σε σύνθετη καταπόνηση του γραμμικού αυτού φορέα.

Στο στοιχείο της ράβδου  $[x, x + \Delta x]$  που εξετάζουμε τη χρονική στιγμή  $t$  εφαρμόζονται οι εξής τρεις δυνάμεις: (α) Η αξονική δύναμη  $N(x, t)$  στο αριστερό σύνορο του στοιχείου  $x$  (δηλαδή στη διατομή της ράβδου στην θέση  $x$ ) με διεύθυνση προς τα αριστερά, εάν είναι θετική (δηλαδή έχουμε εφελκυσμό), (β) Η αντίστοιχη δύναμη  $N(x + \Delta x, t)$  την ίδια ακριβώς χρονική στιγμή  $t$ , αλλά τώρα στο δεξιό σύνορο του στοιχείου  $x + \Delta x$  με διεύθυνση προς τα δεξιά, και πάλι εάν είναι θετική και (γ) Το εξωτερικό αξονικό φορτίο  $f(x, t) \Delta x$  πάνω στο στοιχείο αυτό της ράβδου, που είναι φυσικά ίσο με το ανά μονάδα μήκους αξονικό φορτίο  $f(x, t)$  επί το μήκος του στοιχείου  $\Delta x$  (φυσικά με  $\Delta x > 0$ ). Αυτά βέβαια ισχύουν για πάρα πολύ μικρό, απειροστό μήκος  $\Delta x$  του στοιχείου  $[x, x + \Delta x]$  της ράβδου που απομονώσαμε και εξετάζουμε. Με τον τρόπο αυτό η συνάρτηση της εξωτερικής αξονικής φορτίσεως  $f(x, t)$  δε μεταβάλλεται ουσιαστικά στο μήκος  $\Delta x$  του στοιχείου.

Μπορούμε επομένως να υπολογίσουμε τη συνολική (και απειροστή και αυτή βέβαια) δύναμη  $\Delta F$  επί του απειροστού αυτού στοιχείου  $[x, x + \Delta x]$  της ράβδου, το οποίο απομονώσαμε από την όλη ράβδο, και ασφαλώς κατά τον άξονα  $x$  της ράβδου. Τη θεωρούμενη χρονική στιγμή  $t$  η δύναμη αυτή  $\Delta F$  θα ισούται προφανώς με

$$\Delta F = -N(x, t) + N(x + \Delta x, t) + f(x, t) \Delta x. \quad (3.2.5)$$

Αλλά σύμφωνα με τον τόσο γνωστό δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, η αξονική αυτή δύναμη  $\Delta F$  ισούται επίσης με τη (στοιχειώδη) μάζα  $\Delta m$  του στοιχείου αυτού της ράβδου επί την επιτάχυνσή του  $a$ :

$$\Delta F = \Delta m a. \quad (3.2.6)$$

Στη συνέχεια η μάζα  $\Delta m$  του στοιχείου είναι προφανώς ίση με τον όγκο του  $\Delta V = A \Delta x$  ( $A$  είναι το ήδη αναφερθέν σταθερό εμβαδόν της διατομής της ράβδου) επί την πυκνότητα  $\rho$  του υλικού της ράβδου, δηλαδή

$$\Delta m = \rho \Delta V \implies \Delta m = \rho A \Delta x. \quad (3.2.7)$$

Επίσης η αξονική επιτάχυνση  $a$  του στοιχείου (που και αυτή θεωρείται ότι δε μεταβάλλεται στο παρόν στοιχείο απειροστού μήκους  $[x, x + \Delta x]$ ) είναι προφανώς η δεύτερη χρονική παράγωγος (ως προς το χρόνο  $t$ , όχι τη θέση  $x$ ) της αξονικής (ή διαμήκους) μετατοπίσεως  $u = u(x, t)$  του στοιχείου:

$$a = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.2.8)$$

Άρα ο νόμος του Νεύτωνα (3.2.6) λόγω των σχέσεων (3.2.7) και (3.2.8) παίρνει τη μορφή

$$\Delta F = (\rho A \Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x. \quad (3.2.9)$$

Στη σχέση αυτή πρέπει τώρα να εισαγάγουμε τη δύναμη  $\Delta F$ , που η τιμή της είναι ήδη διαθέσιμη από τη σχέση (3.2.5). Τότε προκύπτει η παραπέρα σχέση

$$-N(x, t) + N(x + \Delta x, t) + f(x, t) \Delta x = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta x. \quad (3.2.10)$$

Αλλάζουμε τώρα τη σειρά των δύο πρώτων όρων (αξονικών δυνάμεων  $N$  στις διατομές  $x$  και  $x + \Delta x$  της ράβδου αντίστοιχα) στο αριστερό μέλος της σχέσεως (3.2.10). Διαιρούμε επίσης και τα δύο μέλη της δια του απειροστού μήκους  $\Delta x$  του στοιχείου  $[x, x + \Delta x]$  της παρούσας αξονικά καταπονούμενης και ταλαντούμενης ράβδου που εξετάζουμε. Έτσι διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$\frac{N(x + \Delta x, t) - N(x, t)}{\Delta x} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.2.11)$$

Στο όριο με  $\Delta x \rightarrow 0$ , όπως έχουμε ήδη υποθέσει (απειροστό στοιχείο μήκους  $\Delta x$ ), το αριστερό μέλος εκφράζει προφανώς την πρώτη χωρική (ως προς τη θέση  $x$  κατά μήκος της ράβδου) μερική παράγωγο  $\partial N/\partial x$  της αξονικής δυνάμεως  $N$ , επειδή

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{N(x + \Delta x, t) - N(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (3.2.12)$$

Αυτός είναι ο ορισμός της παρούσας (της πρώτης χωρικής) μερικής παραγώγου.

Άρα η σχέση (3.2.11) (με  $\Delta x \rightarrow 0$  φυσικά) μεταπίπτει στην εξής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial N}{\partial x} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.2.13)$$

Δυστυχώς όμως δε φθάσαμε ακόμη στη ζητούμενη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους λόγω της ταυτόχρονης παρουσίας δύο άγνωστων συναρτήσεων: της αξονικής δυνάμεως  $N$ , αλλά και της αξονικής μετατόπισης  $u$  στη ράβδο. Καταλήξαμε άραγε σε μια μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, αλλά με δύο άγνωστες συναρτήσεις; Όχι βέβαια, γιατί είναι ήδη διαθέσιμη και άλλη μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, η (3.2.4), την επαναλαμβάνουμε:

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.2.14)$$

Η εξίσωση αυτή συνδέει τις ίδιες δύο άγνωστες συναρτήσεις: την αξονική δύναμη  $N$  και την αξονική μετατόπιση  $u$  (στη μορφή μερικής παραγώγου  $\partial u/\partial x$ ) μέσω της δυστέλειας  $EA$  της ράβδου.

◆ **Συμπέρασμα:** Προς το παρόν είναι διαθέσιμο ένα σύστημα δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Συγκεκριμένα έχουμε καταρχήν την εξίσωση (3.2.13). Η εξίσωση αυτή είναι γενικά μη ομογενής, λόγω της παρουσίας στο αριστερό (όχι στο δεξιό) μέλος της της γνωστής εξωτερικής αξονικής φορτίσεως ανά μονάδα μήκους  $f(x, t)$ . Είναι επίσης δευτέρας τάξεως λόγω της δευτέρας χρονικής παραγώγου στο δεξιό μέλος της, που εκφράζει την αξονική επιτάχυνση  $a$ . Έχουμε επίσης και την εξίσωση (3.2.14), που είναι απλούστερη, ομογενής και προφανώς πρώτης τάξεως. Οι άγνωστες συναρτήσεις (ή εξαρτημένες μεταβλητές) είναι δύο: (α) η αξονική δύναμη  $N = N(x, t)$  και (β) η επίσης αξονική μετατόπιση  $u = u(x, t)$ . Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι και αυτές δύο: (α) η θέση  $x$  κατά μήκος της ράβδου ( $0 \leq x \leq L$ ) και (β) ο χρόνος  $t$  ( $t \geq 0$ ). Άρα έχουμε ένα απλό σύστημα δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές: τους  $\rho A$  και  $EA$ , και με δύο άγνωστες συναρτήσεις: τις  $N$  και  $u$ .

### B3.2.3. Αναγωγή στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος

Το παραπάνω σύστημα δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (3.2.13) και (3.2.14) πολύ εύκολα ανάγεται σε μια μόνο αντίστοιχη διαφορική εξίσωση. Πραγματικά, αντικαθιστώντας την αξονική δύναμη  $N$  από τη δεύτερη εξίσωση του συστήματος αυτού (3.2.14) στην πρώτη (3.2.13), διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.2.15)$$

Διαθέτουμε επομένως τώρα μια μόνο γραμμική και γενικά μη ομογενή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως. (Έχουμε δεύτερες μερικές παραγώγους τόσο ως προς τη θέση  $x$  όσο και ως προς το χρόνο  $t$ .) Η εξίσωση αυτή (3.2.15) έχει επίσης σταθερούς συντελεστές: τους  $EA$  και  $\rho A$  και, φυσικά, μια μόνο άγνωστη συνάρτηση: την αξονική (ή διαμήκη) μετατόπιση  $u$ .

Πολύ συχνά (αλλ' όχι πάντοτε) η εξωτερική αξονική φόρτιση ανά μονάδα μήκους  $f(x, t)$  είναι μηδενική ή αγνοείται. Βέβαια σε κατακόρυφους στύλους το ίδιο βάρος (δηλαδή το δικό τους βάρος) αποτελεί μια εξωτερική αξονική φόρτιση. Το ίδιο ισχύει επίσης σε πασσάλους, σ' αυτούς με εξωτερική αξονική φόρτιση την αντίδραση του εδάφους κατά μήκος τους εντός του εδάφους.

Καλύτερα όμως να μην επεκταθούμε στο θέμα αυτό. Τελικά με  $f(x, t) \equiv 0$  η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (3.2.15), στην οποία ήδη καταλήξαμε, καθίσταται ομογενής και απλοποιείται στη μορφή

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.2.16)$$

Διαιρούμε μάλιστα και τα δύο μέλη της με τη σταθερά  $\rho A$  του δεξιού μέλους. Ορίζουμε επίσης την ταχύτητα  $c$  των αξονικών (διαμήκων) κυμάτων στην παρούσα ράβδο (τύπος (2.1.45))

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (3.2.17)$$

Έτσι καταλήγουμε στην τόσο κλασική μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση)

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \iff \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.2.18)$$

Η εξίσωση αυτή (3.2.18) συνήθως αναφέρεται και σαν εξίσωση της χορδής στη μια διάσταση  $x$ , επειδή απαντάται και στο πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων χορδής. Η ίδια διαφορική εξίσωση ισχύει (προσεγγιστικά βέβαια) και για τις αντίστοιχες (εγκάρσιες) ταλαντώσεις ευθύγραμμου καλωδίου. Τέτοια καλώδια υπάρχουν, π.χ. στις καλωδιωτές γέφυρες, όπως είναι η γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου. Η προσέγγιση ενός καλωδίου από χορδή οφείλεται στο γεγονός ότι το καλώδιο παρουσιάζει μια πολύ μικρή δυσκαμψία. (Αντίθετα η χορδή δεν παρουσιάζει.)

Αλλά, να μη λησμονείται τούτο, στο πρόβλημα της χορδής η άγνωστη συνάρτηση  $u$  δηλώνει την εγκάρσια (κάθετη) μετατόπιση των σημείων  $x$  της χορδής. Αντίθετα στην παρούσα διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, την (3.2.18), η άγνωστη συνάρτηση  $u$  δηλώνει την αξονική (διαμήκη) μετατόπιση των σημείων  $x$  της ράβδου και όχι πια χορδής. Και στη σταθερά  $c$  υπάρχει βέβαια διαφορά. Ο ορισμός της είναι εντελώς διαφορετικός στο πρόβλημα της χορδής και στο παρόν πρόβλημα αξονικών ταλαντώσεων ράβδου. Συγκεκριμένα στο παρόν πρόβλημα ράβδου ισχύει, όπως ήδη είδαμε, ο ορισμός (3.2.17) μέσω του μέτρου ελαστικότητας  $E$  και της (συνήθους) πυκνότητας (όχι της γραμμικής πυκνότητας)  $\rho$  του ισότροπου και ελαστικού υλικού της ράβδου.

Βέβαια, όπως διαπιστώνεται εύκολα και είναι έτσι κι αλλιώς αναγκαίο, η σταθερά  $c$  και στο πρόβλημα της χορδής ή/και του καλωδίου (σε εγκάρσιες ταλαντώσεις) και στο παρόν πρόβλημα της ράβδου (σε αξονικές ταλαντώσεις) έχει διαστάσεις ταχύτητας (π.χ. m/sec). Στο παρόν πρόβλημα ράβδου πολύ εύκολα επαληθεύεται το γεγονός αυτό, γιατί: (α) Συνήθης μονάδα του μέτρου ελαστικότητας  $E$  είναι το Pascal:

$$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg m/sec}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m sec}^2} \quad (3.2.19)$$

(και τα πολύ συχνά χρησιμοποιούμενα πολλαπλάσιά του φυσικά όπως το kPa). (β) Συνήθης μονάδα της πυκνότητας  $\rho$  είναι το  $\text{kg/m}^3$ . Άρα σύμφωνα με τον ορισμό (3.2.17) της σταθεράς  $c$  στη διαφορική εξίσωση (3.2.18) συνήθης μονάδα της σταθεράς αυτής  $c$  θα είναι το m/sec, επειδή:

$$\sqrt{\frac{\text{Pa}}{\text{kg/m}^3}} = \sqrt{\frac{\text{N/m}^2}{\text{kg/m}^3}} = \sqrt{\frac{\text{kg}/(\text{m sec}^2)}{\text{kg/m}^3}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{sec}} \quad (3.2.20)$$

λόγω και της προηγούμενης σχέσεως μονάδων (3.2.19). Προκύπτει επομένως μονάδα ταχύτητας για την παρούσα σταθερά  $c$ . Το ίδιο ακριβώς ισχύει και σε κάθε εμφάνιση της μονοδιάστατης εξισώσεως του κύματος (σε ποικίλα φυσικά προβλήματα: Παράγραφος Β2.1.3 του Κεφαλαίου Β2) για τη σχετική σταθερά  $c$ . Άρα η διαφορική μας εξίσωση (3.2.18) (που είναι απλά η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος) είναι σωστή, όπως πραγματικά αναμενόταν, και από απόψεως διαστάσεων. Επ' ευκαιρία υπενθυμίζεται ότι μια μετατόπιση (όπως εδώ η  $u$ ) έχει μονάδες μήκους, έστω και αν είναι πάρα πολύ μικρή, ενώ η παραμόρφωση  $\varepsilon$  (ορισμός της στον τύπο (3.2.1)) είναι φυσικά ένα αδιάστατο μέγεθος.



**Β3.2.4. Εναλλακτικές μορφές της παρούσας εξίσωσης του κύματος**

Από το σύστημα των δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (3.2.13) και (3.2.14) πολύ εύκολα καταλήξαμε ήδη στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση) (3.2.18) με άγνωστη συνάρτηση την αξονική μετατόπιση  $u = u(x, t)$ . (Τελικά υποθέσαμε επίσης ότι  $f = f(x, t) \equiv 0$ .) Λαμβάνοντας υπόψη κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες και λύνοντας την εξίσωση (3.2.18), μπορούμε να προσδιορίσουμε (με μεθόδους που θα εξηγήσουμε σε επόμενα κεφάλαια) την άγνωστη συνάρτηση: την αξονική μετατόπιση  $u = u(x, t)$ . Τότε η αξονική δύναμη  $N = N(x, t)$  μπορεί πλέον και αυτή να προσδιορισθεί άμεσα από την εξίσωση (3.2.14) κατόπιν παραγωγίσεως της μετατοπίσεως  $u$  που βρήκαμε ως προς  $x$ .

Εντούτοις ο Πολιτικός Μηχανικός συνήθως ενδιαφέρεται για την τάση  $\sigma$ : την ορθή τάση  $\sigma = \sigma_x$  κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x$  της ράβδου. Τούτο συμβαίνει, γιατί με υψηλές τιμές της τάσεως αυτής  $\sigma$ , δηλαδή με  $\sigma \geq \sigma_0$  έστω και σε ένα μόνο σημείο  $x$  της ράβδου, η ράβδος θα αστοχήσει. (Το σύμβολο  $\sigma_0$  δηλώνει προφανώς το όριο της αντοχής του υλικού της ράβδου, συνήθως το όριο διαρροής.) Τελικά μπορεί και να θραυσθεί. Φυσικά ο κίνδυνος αυτός είναι ανάλογος και με την αντοχή του υλικού της ράβδου ως προς τη διαρροή και τη θραύση, ένα θέμα που εξετάζεται λεπτομερώς στη Μηχανική των Υλικών. Εν πάση περιπτώσει, για να μη συμβεί διαρροή ή θραύση, ο Πολιτικός Μηχανικός θα πρέπει να ελέγχει την τάση  $\sigma = \sigma(x, t)$  που αναπτύσσεται κατά μήκος της παρούσας αξονικά καταπονούμενης ράβδου (σε κάθε θέση  $x$  και για κάθε χρονική στιγμή  $t$ ). Πιο αναλυτικά θα πρέπει παντού (δηλαδή για  $0 \leq x \leq L$  με  $L$  το μήκος της ράβδου) και πάντοτε (δηλαδή για  $t \geq 0$  με  $t_0 = 0$  τη στιγμή ενάρξεως των ταλαντώσεων της ράβδου) να ισχύει ο περιορισμός

$$\sigma(x, t) < \sigma_0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0. \quad (3.2.21)$$

Αυτός είναι ένας ανισοτικός περιορισμός λόγω της παρουσίας ανισότητας σ' αυτόν. Στον περιορισμό αυτό (3.2.21) το σύμβολο  $\sigma_0$  δηλώνει φυσικά το όριο διαρροής του υλικού της ράβδου.

Επαναλαμβάνεται ότι αυτά αποτελούν ένα θέμα που αφορά στη Μηχανική των Υλικών. Εδώ απλά σημειώνεται ότι λόγω των βασικών τύπων (3.2.1) και (3.2.2) έχουμε για την τάση  $\sigma = \sigma(x, t)$

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.2.22)$$

Επομένως η λύση της εξίσωσης (3.2.18) (χωρίς να αγνοούνται βέβαια οι αρχικές και οι συνοριακές συνθήκες) μας δίνει και την τάση  $\sigma = \sigma(x, t)$  κατά μήκος όλης της ράβδου. Είμαστε έτσι σε θέση να ελέγχουμε την ισχύ του περιορισμού (της ανισότητας) (3.2.21) για τον αποκλεισμό της αστοχίας της ράβδου σε κάποιο σημείο της  $x$  μια χρονική στιγμή  $t$ . Λίγο πιο επίσημα (με τη χρήση και του συμβόλου  $\forall$ , που σημαίνει «για κάθε») ο περιορισμός (3.2.21) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$\forall x \in [0, L] \quad \text{και} \quad \forall t \in [0, \infty) \quad \sigma(x, t) < \sigma_0. \quad (3.2.23)$$

Αφετέρου, εάν ο Πολιτικός Μηχανικός μετά την αξονική μετατόπιση  $u$  προσδιόρισε πρώτα την αξονική δύναμη  $N$  μέσω του τύπου (3.2.14), τότε η αξονική (και ορθή ασφαλώς) τάση  $\sigma = \sigma(x, t)$  προσδιορίζεται απλά σαν το πηλίκο  $\sigma = N/A$  στον πρώτο τύπο (3.2.3).

Μια άλλη, τουλάχιστον θεωρητική (ας είμαστε ειλικρινείς: απλά θεωρητική) δυνατότητα για τον προσδιορισμό της αξονικής δυνάμεως  $N$  παρέχει η εύρεση της δικιάς της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους από το ίδιο σύστημα των εξισώσεων (3.2.13) και (3.2.14). Προς το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε ως προς  $x$  την εξίσωση (3.2.13), οπότε βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2}. \quad (3.2.24)$$

Παίρνουμε επίσης υπόψη και τη δυνατότητα εναλλαγής της σειράς των μερικών παραγωγίσεων σε μικτές μερικές παραγώγους, εδώ στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (3.2.24). Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας και την εξίσωση (3.2.14) (οπότε  $\partial u/\partial x = N/(EA)$ ) επίσης στο δεξιό μέλος της ίδιας εξίσωσης (3.2.24), διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 N}{\partial t^2}. \quad (3.2.25)$$

Επομένως πετύχαμε τώρα την απαλοιφή της αξονικής μετατόπισης  $u$  (αντί της αξονικής δυνάμεως  $N$  προηγουμένως) στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (3.2.13) και (3.2.14). Παρέμεινε έτσι μόνο η άγνωστη συνάρτηση  $N$  στην τελική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (3.2.25). Υποθέτοντας τώρα και πάλι ότι  $f = f(x, t) \equiv 0$ , όπως συχνά συμβαίνει στην πράξη, η εξίσωση (3.2.25) παίρνει την απλούστερη μορφή της

$$\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 N}{\partial t^2}, \quad (3.2.26)$$

αν θυμηθούμε και τον ορισμό (2.1.45) ή (3.2.17) της σταθεράς  $c$  (της ταχύτητας του κύματος), που είναι  $c = \sqrt{E/\rho}$ . Προέκυψε λοιπόν η ίδια (ακριβώς η ίδια) μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος, αλλά τώρα για την αξονική δύναμη  $N$  στη ράβδο που εξετάζουμε. Αντίθετα η εξίσωση (3.2.18) προηγουμένως αφορούσε στην αξονική μετατόπιση  $u$  στην ίδια ράβδο.

Ασφαλώς, σίγουρα έτσι είναι, όπως και άμεσα διαπιστώνεται παραγωγίζοντας την εξίσωση του κύματος (3.2.18) στο παρόν πρόβλημα ράβδου ως προς τη θέση  $x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \implies \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \implies EA \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{EA}{c^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \quad (3.2.27)$$

και μην ξεχνώντας από το δεύτερο τύπο (3.2.4) ότι  $EA(\partial u/\partial x) = N$ . Επομένως προκύπτει και πάλι η εξίσωση του κύματος (3.2.26).

Και ακόμη πιο πέρα, επειδή  $\sigma = N/A$  (πρώτος τύπος (3.2.3)), διαιρώντας με  $A$  (το σταθερό εμβαδόν της διατομής της ράβδου, όπως υποθέσαμε) και τα δύο μέλη της εξίσωσης (3.2.26), παίρνουμε την αντίστοιχη και πάλι μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος για την αξονική ορθή τάση  $\sigma$  κατά μήκος της ράβδου. (Ας μην αποκαλούμε την εξίσωση αυτή εξίσωση της χορδής, γιατί αναφερόμαστε σε αξονικές ταλαντώσεις συνήθους ράβδου.) Επομένως

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2}. \quad (3.2.28)$$

Η ίδια εξίσωση ισχύει βέβαια και για την αξονική παραμόρφωση  $\epsilon$  λόγω του τύπου ορισμού της (3.2.1) ή, απλούστερα, του νόμου του Hooke (3.2.2).

Πρακτικά βέβαια η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (3.2.18) για την αξονική μετατόπιση  $u$  αρκεί. Η αξονική δύναμη  $N$  προκύπτει στη συνέχεια από το δεύτερο τύπο (3.2.4) και, παραπέρα, η αξονική τάση  $\sigma$  από τον πρώτο τύπο (3.2.3). Η ίδια τάση  $\sigma$  προκύπτει επίσης και πιο άμεσα, κατευθείαν: χωρίς την παρέμβαση της αξονικής δυνάμεως  $N$ , από τον τύπο (3.2.22). Ο τύπος αυτός είναι ουσιαστικά ο διάσημος νόμος του Hooke στη Μηχανική των Υλικών για ισότροπα και γραμμικά ελαστικά υλικά. Τις δύο αυτές ιδιότητες (ισοτροπία και γραμμική ελαστικότητα) ο Πολιτικός Μηχανικός τις υποθέτει ότι ισχύουν για πάρα πολλά υλικά του, αλλ' όχι για όλα. Σε αρκετές όμως περιπτώσεις η υπόθεση αυτή αποτελεί απλά μια προσέγγιση της πραγματικότητας. Η προσέγγιση αυτή έχει όμως σαν στόχο ένα πολύ απλούστερο μαθηματικό μοντέλο. Αυτό και επιδιώκεται τουλάχιστον μέχρι την ακόμη παραπέρα εξέλιξη στις σημερινές δυνατότητες των ηλεκτρονικών υπολογιστών, ώστε να είναι υπολογιστικά εύχρηστα και πολύ πολυπλοκότερα μαθηματικά μοντέλα στη Μηχανική των Υλικών (ή Αντοχή των Υλικών)!

**B3.2.5. Χρήση θεωρημάτων μέσης τιμής**

Στην Παράγραφο B3.2.2 προηγουμένως χρησιμοποιήσαμε ένα απειροστό στοιχείο της ταλαντούμενης ράβδου, δηλαδή ένα στοιχείο απειροστού μήκους  $\Delta x$  ( $\Delta x > 0$ ), με σκοπό την αναγωγή του όλου προβλήματος τελικά (στην Παράγραφο B3.2.3) στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (3.2.15). Από την εξίσωση αυτή (3.2.15) στη συνέχεια (με  $f(x, t) \equiv 0$ ) οδηγηθήκαμε στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (3.2.18). Στην παράγραφο αυτή θα αποσύρουμε τον πιο πάνω περιορισμό: του απειροστού μήκους  $\Delta x$ , θεωρώντας γενικότερα ένα στοιχείο  $[x, x + \Delta x]$  (βέβαια πάλι με  $\Delta x > 0$ ) της ταλαντούμενης ράβδου χωρίς όμως αυτό να είναι καταρχήν απειροστό. Μόνο στο τέλος της όλης διαδικασίας θα υποθέσουμε ότι  $\Delta x \rightarrow 0$ . Φυσικά είναι αυτονόητο ότι  $0 \leq x < x + \Delta x \leq L$  για ράβδο  $[0, L]$  με αρχή το σημείο  $x = 0$  και μήκος  $L$ . Για την παρούσα αντιμετώπιση του προβλήματος της αξονικά ταλαντούμενης ράβδου θα χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα της μέσης τιμής στον Απειροστικό Λογισμό.

Πρώτα λαμβάνουμε υπόψη το θεώρημα της μέσης τιμής για παραγώγους στο Διαφορικό Λογισμό. Το θεώρημα αυτό αναφέρει ότι για συνάρτηση  $h(x)$  συνεχή στο κλειστό διάστημα  $[a, b]$  (με  $a < b$ ) και παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοικτό διάστημα  $(a, b)$  υπάρχει (έναν τουλάχιστον) αριθμός  $\xi$  στο ανοικτό διάστημα  $(a, b)$ , τέτοιος ώστε να ισχύει η σχέση

$$h(b) - h(a) = h'(\xi)(b - a), \quad a < \xi < b. \quad (3.2.29)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και λίγο πιο επίσημα με τη χρήση του μαθηματικού συμβόλου  $\exists$  (που σημαίνει «υπάρχει») ως εξής:

$$\exists \xi \in (a, b) \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad h(b) - h(a) = h'(\xi)(b - a), \quad a < b. \quad (3.2.30)$$

Γνωστή ειδική περίπτωση, πόρισμα του θεωρήματος αυτού της μέσης τιμής στο Διαφορικό Λογισμό αποτελεί το θεώρημα του Rolle, σύμφωνα με το οποίο, εάν  $h(a) = h(b)$ , τότε

$$\exists \xi \in (a, b) \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad h'(\xi) = 0, \quad h(a) = h(b), \quad a < b. \quad (3.2.31)$$

Εδώ δε θα χρησιμοποιήσουμε καθόλου το θεώρημα του Rolle, απλά το αναφέραμε. Θα χρησιμοποιήσουμε όμως το βασικό θεώρημα της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού (για παραγώγους) (3.2.29) ή (3.2.30) για συνάρτηση  $h(x)$  παραγωγίσιμη (άρα και συνεχή) στο στοιχείο  $[x, x + \Delta x]$  της ράβδου που εξετάζουμε. Την ιδιότητα της παραγωγισιμότητας ως προς  $x$  την έχουν πραγματικά οι συναρτήσεις που έχουμε στο στοιχείο αυτό για τη συνήθη ράβδο που υποθέσαμε. Τούτο βέβαια είναι αληθές, εφόσον και η εξωτερική φόρτιση  $f(x, t)$  (εάν υπάρχει) θεωρηθεί και αυτή παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για μια τέτοια συνάρτηση  $h(x)$  προκύπτει επομένως στο παραπάνω στοιχείο  $[x, x + \Delta x]$  της ράβδου (δηλαδή με  $a = x$  και  $b = x + \Delta x$ , οπότε  $b - a = \Delta x$ ) από τον τύπο (3.2.29) ότι

$$h(x + \Delta x) - h(x) = h'(x + \theta \Delta x) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1, \quad (3.2.32)$$

για μια τουλάχιστον τιμή του  $\theta$ . Σημειώνουμε ότι στον τύπο αυτό (3.2.32) θέσαμε  $x + \theta \Delta x$  (με  $0 < \theta < 1$ ) στη θέση του  $\xi$ .

Ανάλογα ισχύει και το αντίστοιχο θεώρημα της μέσης τιμής για ολοκληρώματα στον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Το θεώρημα αυτό αναφέρει ότι για συνάρτηση  $h(x)$  συνεχή στο κλειστό διάστημα  $[a, b]$  με  $a < b$  (δε χρειάζεται να είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση αυτή) υπάρχει (έναν τουλάχιστον) αριθμός  $\xi$  στο ανοικτό διάστημα  $(a, b)$ , τέτοιος ώστε να ισχύει η σχέση

$$\int_a^b h(\eta) d\eta = h(\xi) (b - a), \quad a < \xi < b. \quad (3.2.33)$$

Και πάλι λίγο πιο επίσημα με τη χρήση του μαθηματικού συμβόλου  $\exists$  («υπάρχει») η σχέση αυτή (3.2.33) γράφεται και πιο σύντομα ως εξής:

$$\exists \xi \in (a, b) \quad \text{τέτοιο ώστε} \quad \int_a^b h(\eta) d\eta = h(\xi) (b - a), \quad a < b. \quad (3.2.34)$$

Επομένως, υπάρχει  $\xi$  τέτοιο ώστε

$$h(\xi) = \frac{\int_a^b h(\eta) d\eta}{b - a}, \quad a < \xi < b. \quad (3.2.35)$$

Αυτή είναι η μέση τιμή της συναρτήσεως  $h$  στο διάστημα  $[a, b]$ . Γι' αυτό χρησιμοποιείται και η ονομασία θεώρημα της μέσης τιμής.

Στο δικό μας στοιχείο ράβδου  $[x, x + \Delta x]$  το θεώρημα της μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού (για ολοκληρώματα) (3.2.33) ή (3.2.34) με συνεχή τη συνάρτηση  $h(x)$  (αν και δεν την έχουμε καθορίσει ακόμη) παίρνει την ακόλουθη μορφή (με  $a = x$  και  $b = x + \Delta x$ , οπότε  $b - a = \Delta x$  και πάλι)

$$\int_x^{x+\Delta x} h(\eta) d\eta = h(x + \theta \Delta x) \Delta x, \quad 0 < \theta < 1. \quad (3.2.36)$$

Παρατηρούμε ότι η μορφή αυτή είναι ανάλογη με τη μορφή (3.2.32) του θεωρήματος της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού (για παραγώγους) στο ίδιο ακριβώς στοιχείο  $[x, x + \Delta x]$  της ράβδου που εξετάζουμε.

Επομένως όσον αφορά στις δυνάμεις που ασκούνται στο θεωρούμενο στοιχείο  $[x, x + \Delta x]$  της αξονικά ταλαντούμενης ράβδου (προς το παρόν όχι κατ' ανάγκη απειροστό) έχουμε τη χρονική στιγμή  $t$ :

(α) Την ελαστική δύναμη  $\Delta F_e$ , που οφείλεται στην αξονική δύναμη  $N$  στις δύο πλευρές  $x$  και  $x + \Delta x$  του στοιχείου αυτού,

$$\Delta F_e = N(x + \Delta x, t) - N(x, t) = \frac{\partial N}{\partial x}(x + \theta_1 \Delta x, t) \Delta x, \quad 0 < \theta_1 < 1. \quad (3.2.37)$$

Στη σχέση αυτή  $\theta_1$  είναι ένας (τουλάχιστον) κατάλληλος αριθμός, που υπάρχει όμως στο διάστημα  $(0, 1)$ . Πήραμε υπόψη τους σχετικούς με την αξονική δύναμη  $N$  όρους στη σχέση (3.2.5). Επίσης πήραμε υπόψη και το θεώρημα της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού (3.2.32) για το παρόν στοιχείο ράβδου ως προς την συνάρτηση  $N(x, t)$ . Στη συνάρτηση αυτή η θέση  $x$  (όχι ο χρόνος  $t$ ) έχει υποθεθεί ότι είναι η κύρια μεταβλητή, δηλαδή η μεταβλητή στο θεώρημα της μέσης τιμής τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t$  που θεωρούμε.

(β) Τη δύναμη  $\Delta F_a$  από την εξωτερική αξονική φόρτιση  $f(x, t)$  (ανά μονάδα μήκους) που ασκείται στο ίδιο στοιχείο  $[x, x + \Delta x]$  της αξονικά ταλαντούμενης ράβδου που εξετάζουμε στο παρόν δυναμικό φαινόμενο. Η δύναμη αυτή  $\Delta F_a$  πάνω σε ολόκληρο το στοιχείο  $[x, x + \Delta x]$  της ράβδου έχει την έκφραση

$$\Delta F_a = \int_x^{x+\Delta x} f(\eta, t) d\eta = f(x + \theta_2 \Delta x, t) \Delta x, \quad 0 < \theta_2 < 1. \quad (3.2.38)$$

Στη σχέση αυτή το  $\theta_2$  είναι ένας (τουλάχιστον) κατάλληλος αριθμός, που επίσης υπάρχει στο διάστημα  $(0, 1)$  και είναι γενικά διαφορετικός από τον αριθμό  $\theta_1$  στη σχέση (3.2.37). Πήραμε τώρα υπόψη το θεώρημα της μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού (3.2.36) για το παρόν στοιχείο ράβδου  $[x, x + \Delta x]$  ως προς τη συνάρτηση  $f(x, t)$  της εξωτερικής αξονικής φορτίσεως. Και πάλι η θέση  $x$  (και όχι ο χρόνος  $t$ ) είναι η κύρια μεταβλητή μας τη χρονική στιγμή  $t$ , στην οποία αναφερόμαστε.

(γ) Αλλάζοντας τη συμπεριφορά μας έναντι της Παραγράφου Β3.2.2, θεωρούμε τώρα ρητά και την αδρανειακή αξονική δύναμη  $\Delta F_i$  (μείον μάζα  $dm$  επί επιτάχυνση  $a = \partial^2 u / \partial t^2$ ) στο παρόν στοιχείο ράβδου  $[x, x + \Delta x]$ . Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το θεώρημα της μέσης τιμής του

Ολοκληρωτικού Λογισμού (3.2.36). Έτσι, ολοκληρώνοντας στο στοιχείο  $[x, x + \Delta x]$ , διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned}\Delta F_i &= -\rho A \int_x^{x+\Delta x} a(\eta, t) d\eta \\ &= -\rho A \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\eta, t) d\eta \\ &= -\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x + \theta_3 \Delta x, t) \Delta x, \quad 0 < \theta_3 < 1,\end{aligned}\quad (3.2.39)$$

όπου  $dm = \rho A dx$  με την πυκνότητα  $\rho$  του υλικού της ράβδου και το εμβαδόν της διατομής της  $A$  να έχουν υποθεθεί σταθερά. Στην πιο πάνω σχέση (3.2.39) υπάρχει ένας (τουλάχιστον) αριθμός  $\theta_3$  (με  $0 < \theta_3 < 1$ ). Ο αριθμός αυτός  $\theta_3$  γενικά δε συμπίπτει με τον αριθμό  $\theta_2$  (για το ίδιο θεώρημα της μέσης τιμής στη σχέση (3.2.38)) ούτε βέβαια και με τον αριθμό  $\theta_1$  (για το θεώρημα της μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού στη σχέση (3.2.37)).

Γίνεται υπενθύμιση να μη λησμονείται το πρόσημο μείον στις αδρανειακές δυνάμεις, όπως είναι η  $\Delta F_i$  στο παρόν στοιχείο ράβδου  $[x, x + \Delta x]$ . Επομένως εδώ δε θα χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στην κλασική του μορφή, εν προκειμένω

$$\Delta F_e + \Delta F_a = \Delta F_c. \quad (3.2.40)$$

Στη σχέση αυτή  $\Delta F_c = -\Delta F_i$ . Δηλαδή η δύναμη  $\Delta F_c$  είναι ίση με το ολοκλήρωμα του τύπου (3.2.39) χωρίς όμως το πρόσημο μείον, γιατί δεν αναφερόμαστε σε αδρανειακή δύναμη ειδικά στην αμέσως πιο πάνω σχέση (3.2.40). Θα μεταφέρουμε τώρα το δεξιό μέλος  $\Delta F_c$  της σχέσεως (3.2.40) στο αριστερό μέλος τώρα σαν αδρανειακή δύναμη  $\Delta F_i$  (με  $\Delta F_i = -\Delta F_c$ ). Συνεπώς έχουμε τρεις δυνάμεις να ασκούνται στο στοιχείο  $[x, x + \Delta x]$  της ράβδου που εξετάζουμε: (α) τη  $\Delta F_e$  (ελαστική αξονική δύναμη), (β) τη  $\Delta F_a$  (εξωτερική αξονική δύναμη) και (γ) τη  $\Delta F_i$  (αδρανειακή αξονική δύναμη). Οι τρεις αυτές δυνάμεις βρίσκονται σε «στατική» ισορροπία (με τη λέξη στατική μέσα σε εισαγωγικά, επειδή η δύναμη  $\Delta F_i$  είναι αδρανειακή δύναμη στο παρόν δυναμικό φαινόμενο: αξονικές ταλαντώσεις ράβδου), δηλαδή

$$\Delta F_e + \Delta F_a + \Delta F_i = 0. \quad (3.2.41)$$

Το πρόσημο συν ισχύει λοιπόν και για την αδρανειακή δύναμη  $\Delta F_i$ , αφού βέβαια έγκαιρα προνοήσαμε (και δε λησμονήσαμε) να θέσουμε το πρόσημο πλην στη σχέση υπολογισμού της (3.2.39).

Αντικαθιστούμε τώρα τις τελικές εκφράσεις (3.2.37), (3.2.38) και (3.2.39) για τις τρεις δυνάμεις:  $\Delta F_e$ ,  $\Delta F_a$  και  $\Delta F_i$  αντίστοιχα στην πιο πάνω συνθήκη «στατικής» ισορροπίας (3.2.41) του εξεταζόμενου στοιχείου  $[x, x + \Delta x]$  της ράβδου στο παρόν δυναμικό φαινόμενο. Διαιρούμε επίσης και με το μήκος  $\Delta x$  του στοιχείου αυτού. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x + \theta_1 \Delta x, t) + f(x + \theta_2 \Delta x, t) - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x + \theta_3 \Delta x, t) = 0, \quad 0 < \theta_{1,2,3} < 1. \quad (3.2.42)$$

Απομένει τώρα η οριακή διαδικασία, δηλαδή να πάρουμε το όριο για  $\Delta x \rightarrow 0$ . Τότε η πιο πάνω σχέση (3.2.42) απλουστεύεται στη μορφή

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, t) + f(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0. \quad (3.2.43)$$

Προκύπτει δηλαδή μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και μάλιστα η εξίσωση (3.2.13), εάν μεταφέρουμε τον αδρανειακό όρο  $-\rho A (\partial^2 u / \partial t^2)(x, t)$  στο δεξιό μέλος. Άρα καταλήξαμε στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα με εκείνο της Παραγράφου Β3.2.2. Εκεί είχαμε χρησιμοποιήσει απειροστό στοιχείο της ράβδου κατά μη αυστηρό μαθηματικά τρόπο αντίθετα με την παρούσα παράγραφο.

**B3.2.6. Χρήση της παραγώγου αορίστου ολοκληρώματος**

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε έναν εναλλακτικό και ίσως προτιμότερο τρόπο αυστηρού προσδιορισμού της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (3.2.13) ή (3.2.43) που ισχύει. Δε θα χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα της μέσης τιμής που είχαμε χρησιμοποιήσει στην προηγούμενη Παράγραφο Β3.2.5. Ούτε και τη μη αυστηρή μέθοδο της Παραγράφου Β3.2.2. Στην παρούσα παραγράφο θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της παραγωγίσεως αορίστου ολοκληρώματος. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε το τμήμα  $[0, x]$  της ράβδου από το αριστερό της άκρο  $x = 0$  μέχρι το τυχαίο σημείο της  $x$  (με  $0 < x \leq L$ ).

Ανάλογα με όσα ήδη αναφέρθηκαν στην προηγούμενη Παράγραφο Β3.2.5, στο τμήμα αυτό  $[0, x]$  της ράβδου ασκούνται: (α) Η ελαστική αξονική δύναμη  $F_e$ , που δίνεται από τη σχέση

$$F_e = N(x, t) - N(0, t), \quad (3.2.44)$$

(β) Η δύναμη  $F_a$  η οφειλόμενη στην εξωτερική αξονική φόρτιση  $f(x, t)$  (ανά μονάδα μήκους), που δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$F_a = \int_0^x f(\eta, t) d\eta \quad (3.2.45)$$

και (γ) Η αδρανειακή αξονική δύναμη  $F_i$ , που δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$F_i = -\rho A \int_0^x a(\eta, t) d\eta = -\rho A \int_0^x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\eta, t) d\eta. \quad (3.2.46)$$

Οι τύποι αυτοί είναι απόλυτα ανάλογοι με τους τύπους (3.2.37), (3.2.38) και (3.2.39) αντίστοιχα της προηγούμενης Παραγράφου Β3.2.5. Τώρα όμως δεν έχουμε κάνει καθόλου χρήση θεωρημάτων μέσης τιμής.

Επομένως η αξονική «στατική» ισορροπία του εξεταζόμενου τμήματος  $[0, x]$  της ράβδου απαιτεί να ισχύει η εξίσωση ισορροπίας

$$F_e + F_a + F_i = 0 \quad (3.2.47)$$

ανάλογα με τη σχέση (3.2.41). Αντικαθιστώντας σ' αυτήν την εξίσωση ισορροπίας τις εκφράσεις των τριών δυνάμεων  $F_e$ ,  $F_a$  και  $F_i$  από τις σχέσεις (3.2.44), (3.2.45) και (3.2.46) αντίστοιχα, διαπιστώνουμε ότι πρέπει να ισχύει η σχέση

$$N(x, t) - N(0, t) + \int_0^x f(\eta, t) d\eta - \rho A \int_0^x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\eta, t) d\eta = 0. \quad (3.2.48)$$

Βέβαια η σχέση αυτή πρέπει να ισχύει για οποιοδήποτε σημείο  $x$ , δηλαδή για οποιοδήποτε τμήμα  $[0, x]$  της θεωρούμενης ράβδου με  $0 < x \leq L$ . Με την έννοια αυτή τα ολοκληρώματα στην παραπάνω σχέση (3.2.48) μπορούν να θεωρηθούν αόριστα ολοκληρώματα, γιατί το άνω όριο ολοκλήρωσης  $x$  σ' αυτά είναι μεταβλητό με μόνο περιορισμό του τον  $0 < x \leq L$ . Ανάλογα και το σύμβολο  $x$  στην αξονική δύναμη  $N(x, t)$  στη θέση  $x$  δηλώνει την ίδια μεταβλητή. Με τη λογική αυτή μπορούμε επομένως να παραγωγίσουμε την εξίσωση ισορροπίας (3.2.48) ως προς τη μεταβλητή θέση  $x$  κατά μήκος της ράβδου (με  $0 < x < L$ ). Λαμβάνουμε επίσης υπόψη, όπως είναι γνωστό από τον Απειροστικό Λογισμό, το εξής θεμελιώδες θεώρημα: Για συνάρτηση  $h(x)$  συνεχή σε ένα διάστημα  $[a, b]$  η παράγωγος του αορίστου ολοκληρώματός της ως προς το άνω όριο ολοκλήρωσης  $x$  (και με σταθερό το κάτω όριο ολοκλήρωσης  $a$ ) υπάρχει σε κάθε σημείο  $x$  με  $a < x < b$  και δίνεται από τον τύπο

$$\frac{d}{dx} \int_a^x h(\eta) d\eta = h(x). \quad (3.2.49)$$

Προκύπτει συνεπώς η ίδια η ολοκληρωτέα συνάρτηση  $h(x)$  σαν αποτέλεσμα της παραγωγίσεως.

Σύμφωνα με αυτά με τη χρήση του τύπου παραγωγίσεως (3.2.49) (ως προς τη θέση  $x$ , όχι ως προς το χρόνο  $t$ ) από την εξίσωση ισορροπίας (3.2.48) με μερική παραγωγή της ως προς τη θέση  $x$  προκύπτει ότι

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, t) + f(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0. \quad (3.2.50)$$

Σημειώνεται επίσης ότι ο όρος  $N(0, t)$  στην εξίσωση ισορροπίας (3.2.48) δεν εξαρτάται από τη χωρική μεταβλητή (τη μεταβλητή θέσεως)  $x$ . Άρα έχει μηδενική μερική παράγωγο ως προς  $x$ .

Επομένως προκύπτει και πάλι η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (3.2.43) της προηγούμενης Παραγράφου Β3.2.5 (έχοντας όμως χρησιμοποιήσει εκεί θεωρήματα της μέσης τιμής) με ανάλογα συμπεράσματα. Μπορεί επίσης να γίνει η παρατήρηση ότι η μέθοδος της παρούσας παραγράφου, που χρησιμοποιεί το θεώρημα της παραγωγίσεως αορίστου ολοκληρώματος αντί για τα θεωρήματα της μέσης τιμής, είναι απλούστερη από εκείνη της προηγούμενης Παραγράφου Β3.2.5. Τούτο μάλιστα συμβαίνει χωρίς η παρούσα μέθοδος να υστερεί σε μαθηματική αυστηρότητα. Σημειώνεται επίσης ότι πιθανότατα η μέθοδος του απειροστού στοιχείου ράβδου  $[x, x + \Delta x]$  της Παραγράφου Β3.2.2 είναι πιο φυσική στη σκέψη και λίγο πιο κατανοητή στο χρήστη από τις δύο προαναφερθείσες μεθόδους. Δυστυχώς όμως υστερεί στη μαθηματική αυστηρότητα, αν και γενικά οδηγεί σε σωστά αποτελέσματα.

### Β3.2.7. Στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου

Όλα ακριβώς που αναφέρθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους της παρούσας Ενότητας Β3.2 είναι άμεσα γενικεύσιμα, με σαφέστερες λέξεις ισχύουν πλήρως στις στρεπτικές ταλαντώσεις συνήθους ράβδου επίσης στη Δυναμική των Κατασκευών. Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί μάλλον εύκολα να αποδειχθεί. Προς το σκοπό αυτό αρκεί βέβαια να χρησιμοποιηθούν τα μεγέθη και σύμβολα που αρμόζουν στις στρεπτικές ταλαντώσεις.

Πιο συγκεκριμένα: αντί για την αξονική παραμόρφωση  $u$  πρέπει να χρησιμοποιηθεί η γωνία στρέψεως (ή γωνία στροφής)  $\theta$ . Αντί για την αξονική δύναμη  $N$  η στρεπτική ροπή  $T$ , που συχνά δηλώνεται και με το σύμβολο  $M_t$ . Αντί για το μέτρο ελαστικότητας  $E$  το μέτρο διατμήσεως  $G$ . Αντί για το εμβαδόν της διατομής  $A$  η πολική ροπή αδρανείας  $J$  ως προς το κέντρο της κυκλικής διατομής και σε περίπτωση μη κυκλικών διατομών (αλλά με δύο άξονες συμμετρίας) πολλαπλασιασμένη επί έναν αριθμητικό συντελεστή  $\kappa$ , δηλαδή  $\kappa J$ . (Ο συντελεστής αυτός  $\kappa$  εξαρτάται από τη γεωμετρία της διατομής.) Γενικότερα η ποσότητα  $J^* = \kappa J$  δηλώνει μια γεωμετρική παράμετρο της διατομής (για κάθε σχήμα και διαστάσεις της διατομής) με μονάδες ροπής αδρανείας: μήκος στην τέταρτη δύναμη, π.χ.  $m^4$ . Επομένως αντί για τη δυστένεια  $EA$  στις αξονικές ταλαντώσεις πρέπει τώρα (στις στρεπτικές ταλαντώσεις) να χρησιμοποιηθεί η δυστρεψία  $GJ$  και για μη κυκλικές διατομές  $GJ^* = \kappa GJ$ . (Προφανώς η δυστρεψία εκφράζει τη στρεπτική αντίσταση της ράβδου.) Άρα η ταχύτητα  $c$  διαδόσεως του στρεπτικού κύματος στη ράβδο θα ισούται με

$$c = \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}} \quad (3.2.51)$$

με  $\kappa = 1$  για κυκλικές διατομές και με  $\rho$  και πάλι τη συνηθη πυκνότητα του υλικού της ράβδου. (Αυτή τουλάχιστον μένει η ίδια, ευτυχώς!) Τέλος αντί για την εξωτερική αξονική φόρτιση  $f(x, t)$  πρέπει να χρησιμοποιηθεί η αντίστοιχη στρεπτική φόρτιση  $f_t(x, t)$  μέσω κατανεμημένων ροπών, όχι πια κατανεμημένων δυνάμεων. Συνήθως όμως δεν ασκείται τέτοια εξωτερική φόρτιση  $f_t(x, t)$ .

Ας σημειώσουμε επίσης ότι ο βασικός τύπος (3.2.4) (ο δεύτερος τύπος (3.2.4)), που συνδέει την αξονική δύναμη  $N$  με την αξονική μετατόπιση  $u$  στις αξονικές ταλαντώσεις συνήθους ράβδου παίρνει σύμφωνα με τα παραπάνω στις στρεπτικές ταλαντώσεις της ίδιας ράβδου την ανάλογη μορφή

$$T = GJ^* \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad J^* = \kappa J. \quad (3.2.52)$$

Στον τύπο αυτό το σύμβολο  $T$  δηλώνει τη στρεπτική ροπή, το σύμβολο  $\theta$  τη γωνία στρέψεως και το γινόμενο  $GJ^*$  τη δυστρεψία.

Συμπερασματικά ως αναφέρουμε ότι η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (3.2.18) για τις αξονικές ταλαντώσεις συνήθους ράβδου παραμένει σε ισχύ και για τις στρεπτικές (χωρίς εξωτερικές κατανεμημένες ροπές  $f_t(x, t)$  κατά μήκος της ράβδου). Τώρα όμως άγνωστη συνάρτηση είναι η γωνία στρέψεως (ή στροφής)  $\theta$  αντί για την αξονική μετατόπιση  $u$ . Επίσης η σταθερά  $c$  παίρνει την πιο πάνω τιμή της (3.2.51).

### B3.2.8. Καμπτικές ταλαντώσεις δοκού

Με ανάλογη (αλλ' όχι ακριβώς την ίδια) διαδικασία με εκείνη που ακολουθήθηκε για τις αξονικές ταλαντώσεις συνήθους ράβδου μπορούν να μελετηθούν και οι καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού. (Εκεί βέβαια εξετάζεται η ισορροπία των καμπτικών ροπών στο στοιχείο ή τμήμα της δοκού που μελετάται.) Η όλη διαδικασία περιγράφεται στα βιβλία Δυναμικής των Κατασκευών.

Εδώ θα περιορισθούμε στο να σημειώσουμε ότι λαμβάνουμε υπόψη την πολύ γνωστή συνήθη διαφορική εξίσωση της κάμψεως δοκών υπό στατικές συνθήκες στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως στη Μηχανική των Υλικών

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = p(x), \quad 0 < x < L. \quad (3.2.53)$$

Στην εξίσωση αυτή το γινόμενο  $EI$  δηλώνει τη δυσκαμψία της δοκού. Η συνάρτηση  $v = v(x)$  δηλώνει το βέλος κάμψεως της (ή κάθετη μετατόπιση των σημείων της). Αυτή δημιουργεί την ελαστική γραμμή της δοκού. Τέλος η συνάρτηση  $p(x)$  δηλώνει την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση της δοκού. Προσθέτουμε τώρα στο δεξιό μέλος της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (3.2.53) την αδρανειακή κατανεμημένη φόρτιση

$$p_i(x, t) = -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3.2.54)$$

στην περίπτωση δυναμικής κάμψεως, δηλαδή σε καμπτική ταλάντωση της δοκού. Οδηγούμαστε έτσι στην ακόλουθη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = p(x, t) + p_i(x, t) = p(x, t) - \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L. \quad (3.2.55)$$

Χωρίς εξωτερική κάθετη φόρτιση  $p(x, t)$  η πιο πάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί και στην ισοδύναμη μορφή της

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L. \quad (3.2.56)$$

Στις εξισώσεις (3.2.55) και (3.2.56) άγνωστη συνάρτηση είναι και πάλι το βέλος κάμψεως  $v$  της δοκού. Τώρα όμως εξαρτάται τόσο από τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού όσο και από το χρόνο  $t$ , δηλαδή  $v = v(x, t)$ . Το ίδιο υποθέσαμε ότι ισχύει (στην εξίσωση (3.2.55)) και για την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p$ , δηλαδή ότι  $p = p(x, t)$ . Με την τόσο θεμελιώδη για τον Πολιτικό Μηχανικό εξίσωση (3.2.55) και ιδίως την ειδική περίπτωση της (3.2.56) θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στο Κεφάλαιο Β6. Το κεφάλαιο αυτό θα είναι αφιερωμένο σε ταλαντώσεις ράβδων και δοκών. Εκεί βέβαια θα μελετηθεί η επίλυσή τους και όχι απλά η κατάστρωσή τους.

## B3.3. ΙΔΕΑΤΟ ΡΕΥΣΤΟ ΣΤΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

### B3.3.1. Η εξίσωση της συνεχείας

Τα δύο προηγούμενα παραδείγματα για τον Πολιτικό Μηχανικό αφορούσαν στη Μηχανική των Στερεών: (α) επίπεδη Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών στην Ενότητα Β3.1 (με τη χρήση της τασικής συναρτήσεως του Airy) και (β) αξονικές (κυρίως) ταλαντώσεις συνήθους ράβδου στη Δυναμική των Κατασκευών στην Ενότητα Β3.2. Στην παρούσα Ενότητα Β3.3 καθώς και στην επόμενη



Ενότητα Β3.4 θα αναφερθούμε στη ροή ρευστού, κυρίως ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική (ή Μηχανική των Ρευστών). Θα ξεκινήσουμε από τη μη μόνιμη τριδιάστατη ροή γενικού ρευστού και βαθμιαία θα καταλήξουμε στη μόνιμη και αστρόβιλη διδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού.

Αρκετές φορές στη Ρευστομηχανική χρησιμοποιούμε (για μαθηματική κυρίως διευκόλυνση) την αρκετά απλή θεωρία ενός **ιδεατού ρευστού** (σε αντίθεση με ένα **πραγματικό ρευστό**). Ασφαλώς η συμπεριφορά του ιδεατού ρευστού στη ροή αποτελεί προσέγγιση της αληθινής συμπεριφοράς ενός πραγματικού ρευστού. Ένα ιδεατό ρευστό υποτίθεται ότι είναι: (α) **ομογενές**, (β) **ασυμπίεστο** (έχει σταθερή πυκνότητα  $\rho$ , δηλαδή  $\rho = \text{σταθερά}$ ) και (γ) **μη συνεκτικό** (δεν έχει **συνεκτικότητα**, **ιξώδες**  $\mu$ , δηλαδή  $\mu = 0$ ). Η ταχύτητα των σημείων του  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$  κατά τη ροή στη θέση  $(x, y, z)$  και τη χρονική στιγμή  $t$  έχει τη μορφή

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}. \quad (3.3.1)$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού κατά τους τρεις άξονες  $Ox$ ,  $Oy$  και  $Oz$  των Καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x, y, z)$  δηλώνονται με τα σύμβολα  $u$ ,  $v$  και  $w$  αντίστοιχα.

Γενικά στη ροή ρευστού (είτε ιδεατού είτε πραγματικού επίσης είτε εξαρτώμενη από το χρόνο  $t$ , δηλαδή μη μόνιμη, είτε μόνιμη, δηλαδή σταθερή, ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$ ) στη Ρευστομηχανική αποδεικνύεται ότι ισχύει η θεμελιώδης διαφορική **εξίσωση της συνεχείας**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left[ \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \right]. \quad (3.3.2)$$

Στην εξίσωση αυτή το σύμβολο  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  δηλώνει την **πυκνότητα** του ρευστού. Η εξίσωση της συνεχείας δηλώνει ότι η συνολική στοιχειώδης μάζα του ρευστού  $dm$  σε στοιχειώδη (αλλά σταθερό κατά το σχήμα και τη θέση) όγκο του  $dV = dx dy dz$  διατηρείται: διατήρηση της μάζας. (Ο στοιχειώδης αυτός όγκος θεωρείται σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και με απειροστές πλευρές  $dx$ ,  $dy$  και  $dz$  παράλληλες στους άξονες  $Ox$ ,  $Oy$  και  $Oz$  αντίστοιχα.) Η έννοια αυτής της διατηρήσεως της μάζας είναι ότι η μεταβολή  $(\partial \rho / \partial t) dV$  της μάζας του ρευστού  $dm$  που περιέχεται στο στοιχειώδη και σταθερό αυτό όγκο  $dV$  σε απειροστό χρόνο  $dt$  οφείλεται αποκλειστικά στη μάζα του ρευστού που συνολικά εισέρχεται στον όγκο  $dV$ . Δηλαδή πρόκειται για τη διαφορά της μάζας που εισέρχεται μείον τη μάζα που εξέρχεται: εισροή μείον εκροή ρευστού στον ίδιο στοιχειώδη και σταθερό όγκο  $dV$  του ρευστού από την επιφάνειά του όγκου αυτού  $dV$ . Γίνεται βέβαια η υπόθεση ότι δεν υπάρχει κάποια **πηγή** ή **καταβόθρα** του ρευστού στον εξεταζόμενο στοιχειώδη όγκο  $dV$ .

Η εξίσωση της συνεχείας (3.3.2) μπορεί φυσικά να γραφεί και στην ισοδύναμη μορφή της

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (3.3.3)$$

Η εξίσωση της συνεχείας (3.3.2) ή (3.3.3) εκφράζει την αρχή διατηρήσεως της μάζας σε κάθε σημείο  $(x, y, z)$  του ρευστού και για κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Η ίδια εξίσωση αποτελεί επίσης και μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που περιέχει τέσσερις άγνωστες συναρτήσεις (ή εξαρτημένες μεταβλητές). Αυτές είναι η πυκνότητα  $\rho$  του ρευστού (μία άγνωστη συνάρτηση) και οι τρεις συνιστώσες της ταχύτητάς του  $u$ ,  $v$  και  $w$  (τρεις άγνωστες συναρτήσεις) σε σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x, y, z)$ . Οι τέσσερις αυτές άγνωστες συναρτήσεις γενικά εξαρτώνται από τις τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές: τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  και το χρόνο  $t$ . Παρατηρούμε λοιπόν τη φυσική εμφάνιση μιας διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους: της εξισώσεως της συνεχείας (3.3.2) ή (3.3.3), που εκφράζει ένα φυσικό γεγονός. Συγκεκριμένα εκφράζει τη **διατήρηση** (ή μάλλον το **ισοζύγιο**) της μάζας στη ροή ενός ιδεατού ή πραγματικού ρευστού στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού και ειδικότερα στη Ρευστομηχανική, που είναι τόσο χρήσιμη για τον Πολιτικό Μηχανικό.

Στην ειδική περίπτωση ενός **ασυμπίεστου** ρευστού (όπως είναι ένα ιδεατό ρευστό), η πυκνότητα  $\rho$  του ρευστού είναι και χωρικά και χρονικά σταθερή:  $\rho = \text{σταθερά}$ . Τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι η εξίσωση της συνεχείας (3.3.3) απλοποιείται και παίρνει τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.3.4)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα διανυσματικό συμβολισμό με τη χρήση του τελεστή  $\text{div}$  για την απόκλιση (divergence) διανυσματικού πεδίου, εν προκειμένω της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού, δηλαδή με

$$\text{div } \mathbf{V} \equiv \nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (3.3.5)$$

Με το συμβολισμό αυτό η πιο πάνω εξίσωση (3.3.4) παίρνει την ισόδυναμη (αλλ' απλούστερη στην εμφάνιση) μορφή

$$\text{div } \mathbf{V} = 0. \quad (3.3.6)$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει στη ροή ασυμπίεστου ρευστού είτε αυτή είναι μόνιμη (σταθερή, ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$ ) είτε και μη μόνιμη. Η νέα αυτή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, η (3.3.4) (ισοδύναμη η (3.3.6)), έχει τώρα τρεις μόνο άγνωστες συναρτήσεις (ή εξαρτημένες μεταβλητές). Συγκεκριμένα οι άγνωστες συναρτήσεις είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού  $u$ ,  $v$  και  $w$ . Έχει επίσης τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές σε μόνιμη ροή: τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$ ,  $y$  και  $z$ . Σε μη μόνιμη ροή προστίθεται και ο χρόνος  $t$  στις τρεις αυτές ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$ ,  $y$  και  $z$ .

Σημειώνεται επίσης ότι οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (3.3.3) και (3.3.4) είναι προφανώς πρώτης τάξεως, γιατί περιέχουν μόνο πρώτες μερικές παραγώγους.

### B3.3.2. Οι εξισώσεις των Navier–Stokes

Φυσικά δεν έχει ιδιαίτερο νόημα μια απόπειρα επιλύσεως της εξισώσεως της συνεχείας για ασυμπίεστο ρευστό (3.3.4) μόνης της λόγω της υπάρξεως τριών αγνώστων συναρτήσεων σ' αυτήν. Η εξίσωση αυτή (3.3.4) πρέπει να συμπληρωθεί από τις τρεις εξίσου σημαντικές εξισώσεις των Navier–Stokes. Αυτές είναι οι γενικές εξισώσεις της κινήσεως του ρευστού. Πρόκειται για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και ισχύουν για ρευστά που είναι (α) ασυμπίεστα δηλαδή με πυκνότητα  $\rho$  σταθερή και (β) με σταθερή συνεκτικότητα (ιξώδες)  $\mu$ . Αποδεικνύεται στη Ρευστομηχανική ότι οι εξισώσεις των Navier–Stokes έχουν την εξής μορφή στο γήινο πεδίο βαρύτητας:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (3.3.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (3.3.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (3.3.9)$$

Στις εξισώσεις αυτές η συνάρτηση  $h$  δηλώνει το υψόμετρο ενός σημείου  $P$  του πεδίου ροής. Το υψόμετρο  $h$  εξαρτάται βέβαια από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  του σημείου αυτού  $P$ , δηλαδή  $h = h(x, y, z)$ , και είναι γνωστή συνάρτηση. Το σύμβολο  $g$  δηλώνει την επιτάχυνση της βαρύτητας. Το σύμβολο  $\rho$  δηλώνει τη σταθερή πυκνότητα του ρευστού. (Όπως ήδη έχει αναφερθεί, σε ασυμπίεστο ρευστό ισχύει  $\rho = \text{σταθερά}$ .) Τέλος το σύμβολο  $\mu$  δηλώνει τη **συνεκτικότητα** (ή το **συντελεστή συνεκτικότητας** ή **συντελεστή ιξώδους**, απλούστερα το **ιξώδες**) του ρευστού. Και η συνεκτικότητα  $\mu$  υποτίθεται ότι είναι σταθερή. Επιπλέον η συνάρτηση  $p = p(x, y, z, t)$  δηλώνει την πίεση του ρευστού. Αυτή είναι μια άγνωστη συνάρτηση, όπως ακριβώς είναι και οι τρεις συνιστώσες  $(u, v, w)$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού.

Στη Ρευστομηχανική πολύ συχνά μας διευκολύνει η χρήση και του συμβόλου  $D$  (ισοδύναμα  $d$ : το σύμβολο της συνήθους παραγωγίσεως) της **ολικής παραγωγού** (ή **υλικής παραγωγού**, γιατί αναφέρεται σε ένα ρευστό σωματίδιο) ως προς το χρόνο  $t$  για μια συνάρτηση  $f = f(x, y, z, t)$ . Η συνάρτηση αυτή εξαρτάται τόσο από το χρόνο  $t$  όσο και από τις τρεις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ . Η ολική (ή υλική) αυτή παράγωγος ορίζεται ως εξής:

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (3.3.10)$$

Στον ορισμό αυτό έχουν ληφθεί υπόψη και οι συνιστώσες  $(u, v, w)$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού με τους δικούς τους προφανείς ορισμούς

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}. \quad (3.3.11)$$

Η παραπάνω χρήση του συμβόλου  $D$  αναφέρεται σε παραγωγή μιας συναρτήσεως  $f(x, y, z, t)$  που εκφράζει μια ιδιότητα (όπως η πίεση) ή μια συνιστώσα της ταχύτητας ενός ρευστού σωματιδίου. Όμως η ιδιότητα αυτή ή η συνιστώσα της ταχύτητας θεωρείται ότι μεταβάλλεται με το χρόνο  $t$  σε μια συγκεκριμένη θέση  $(x, y, z)$  του πεδίου ροής (τοπική μεταβολή). Ταυτόχρονα όμως η ροή του ρευστού προκαλεί την κίνηση του ρευστού αυτού σωματιδίου, δηλαδή τη μεταβολή της θέσεώς του  $(x, y, z)$  με το χρόνο  $t$ . Άρα και η θέση του ρευστού σωματιδίου  $(x, y, z)$  είναι και αυτή συνάρτηση του χρόνου  $t$ . (Δεν πρόκειται βέβαια για ακίνητο σημείο!) Πρέπει επομένως και το γεγονός αυτό (δηλαδή η μεταβολή της συναρτήσεως  $f$  λόγω μεταγωγής, κινήσεως του ρευστού) να ληφθεί υπόψη στην ολική παραγωγή της ως προς το χρόνο  $t$ . Αυτό πραγματικά έγινε στον πιο πάνω τύπο (3.3.10) ορισμού της **ολικής παραγωγού** (ή **υλικής παραγωγού**)  $Df/Dt$  ως προς το χρόνο  $t$  με τη βοήθεια και των συνιστωσών (3.3.11) της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού.

Προχωράμε τώρα πέρα από τη βαθμωτή συνάρτηση  $f$ . Θα εξετάσουμε μια διανυσματική συνάρτηση, όπως είναι η ταχύτητα  $\mathbf{V}$  του ρευστού με συνιστώσες  $(u, v, w)$ :

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}. \quad (3.3.12)$$

Στην περίπτωση διανυσματικής συναρτήσεως  $\mathbf{V}$  η ολική (ή υλική) της παράγωγος  $D\mathbf{V}/Dt$  ως προς το χρόνο  $t$  εύλογα ορίζεται ως εξής:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \equiv \frac{d\mathbf{V}}{dt} := \frac{Du}{Dt}\mathbf{i} + \frac{Dv}{Dt}\mathbf{j} + \frac{Dw}{Dt}\mathbf{k}. \quad (3.3.13)$$

Λόγω μάλιστα και των τύπων (3.3.10) για βαθμωτές συναρτήσεις  $f = f(x, y, z, t)$  και (3.3.12), η ολική (ή υλική) αυτή παράγωγος μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \equiv \frac{d\mathbf{V}}{dt} := \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z}. \quad (3.3.14)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο  $D$  της ολικής (ή υλικής) παραγωγού που ήδη ορίστηκε. Επίσης θα χρησιμοποιήσουμε και το σύμβολο

$$\text{grad } f \equiv \nabla f := \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \quad (3.3.15)$$

για την **κλίση** ή **βαθμίδα** (gradient) βαθμωτής συναρτήσεως  $f = f(x, y, z, t)$ . Επίσης το σύμβολο

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (3.3.16)$$

για τον αρμονικό τελεστή  $\nabla^2$  (τελεστή του Laplace, Λαπλασιανή, Laplacian) για βαθμωτή συνάρτηση  $f = f(x, y, z, t)$ . Τον τελεστή αυτό  $\nabla^2$  τον έχουμε ήδη αναφέρει στην Ενότητα B2.1, ορισμός (2.1.24)

στις τρεις διαστάσεις  $(x, y, z)$ . Μπορούμε να γενικεύσουμε τη χρήση του αρμονικού τελεστή  $\nabla^2$  σε διανυσματική συνάρτηση, όπως είναι η ταχύτητα του ρευστού  $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z, t)$

$$\mathbf{V} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}. \quad (3.3.17)$$

Η γενίκευση αυτή θα είναι προφανώς η εξής:

$$\nabla^2 \mathbf{V} := \nabla^2 u \mathbf{i} + \nabla^2 v \mathbf{j} + \nabla^2 w \mathbf{k}. \quad (3.3.18)$$

Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουμε πως οι ήδη αναφερθείσες τόσο βασικές εξισώσεις των Navier-Stokes (3.3.7), (3.3.8) και (3.3.9) στη Ρευστομηχανική ενός ασυμπίεστου ρευστού (δηλαδή ρευστού με πυκνότητα  $\rho = \text{σταθερά}$ ) μπορούν να γραφούν και συντομότερα ως εξής:

$$\frac{Du}{Dt} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u, \quad (3.3.19)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v, \quad (3.3.20)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 w. \quad (3.3.21)$$

Η γραφή αυτή είναι η συνήθης βαθμωτή μορφή με τη χρήση των βαθμωτών άγνωστων συναρτήσεων  $u, v$  και  $w$ . Αυτές είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού κατά τους άξονες  $x, y$  και  $z$  αντίστοιχα του συστήματος των Καρτεσιανών συντεταγμένων, σχέση (3.3.17). Είναι επίσης δυνατή και η αντίστοιχη (και ακόμη πιο σύντομη) διανυσματική γραφή

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -g \text{grad } h - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{V}. \quad (3.3.22)$$

(Για τη διανυσματική αυτή γραφή των εξισώσεων των Navier-Stokes για ασυμπίεστο ρευστό έγινε χρήση της διανυσματικής συνάρτησεως  $\mathbf{V} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}$ .) Σημειώνεται βέβαια ότι και η πίεση  $p = p(x, y, z, t)$  του ρευστού είναι άγνωστη συνάρτηση.

Εν πάση περιπτώσει, ανεξάρτητα συντομευμένων γραφών το συμπέρασμά μας είναι ότι η ροή (στον τριδιάστατο γενικά χώρο) ενός ασυμπίεστου ρευστού στη Ρευστομηχανική ανάγεται στο σύστημα των εξισώσεων **της συνεχείας** (3.3.4) και **των Navier-Stokes** (3.3.7), (3.3.8) και (3.3.9). (Σημειώνεται επίσης ότι πράγματι τα περισσότερα ρευστά που συναντά ο Πολιτικός Μηχανικός, υγρά συνήθως και κυρίως το νερό, είναι ουσιαστικά ασυμπίεστα.) Οι πιο πάνω τέσσερις εξισώσεις (3.3.4), (3.3.7), (3.3.8) και (3.3.9) συνιστούν ένα σύστημα τεσσάρων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Το σύστημα αυτό είναι δευτέρας τάξεως λόγω της παρουσίας των δευτέρων μερικών παραγώγων στο δεξιό μέλος των τριών εξισώσεων των Navier-Stokes. Είναι επίσης μη γραμμικό λόγω των παρουσιαζόμενων γινομένων των αγνώστων συναρτήσεων  $u, v$  και  $w$  επί τις πρώτες μερικές παραγώγους τους στα αριστερά μέλη των τριών εξισώσεων των Navier-Stokes. Στις τέσσερις αυτές εξισώσεις υπάρχουν τέσσερις συνολικά άγνωστες συναρτήσεις (ή εξαρτημένες μεταβλητές). Αυτές είναι οι συνιστώσες της ταχύτητας  $(u, v, w)$  και η πίεση  $p$  του ρευστού σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ . Υπάρχουν επίσης τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές. Αυτές είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  στον τριδιάστατο χώρο και ο χρόνος  $t$ . Δεν πρόκειται για καθόλου εύκολο προς επίλυση σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Εντούτοις σίγουρα πρόκειται για ένα σαφές δείγμα της πρακτικής χρησιμότητας των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, στην περίπτωση μας στη Ρευστομηχανική (ή Μηχανική των Ρευστών).

Ήδη έχουν γίνει οι υποθέσεις ασυμπίεστου ρευστού (ρευστού με πυκνότητα  $\rho = \text{σταθερά}$ ) και γήινου πεδίου βαρύτητας (με επιτάχυνση  $g$ ). Μια άλλη ενδιαφέρουσα υπόθεση που μπορεί να απλοποιήσει σημαντικά τις εξισώσεις των Navier-Stokes (3.3.7), (3.3.8) και (3.3.9) (σε αρκετά

συντομότερη γραφή (3.3.19), (3.3.20) και (3.3.21) και διανυσματικά (3.3.22)) είναι η υπόθεση του μη συνεκτικού ρευστού. Υποθέτουμε δηλαδή ρευστό με μηδενική συνεκτικότητα (ή συντελεστή συνεκτικότητας ή ιξώδες)  $\mu$ :  $\mu = 0$ . Με την υπόθεση αυτή:  $\mu = 0$ , που ισχύει στα ιδεατά ρευστά (τα οποία είναι βέβαια ταυτόχρονα και ασυμπύεστα: με πυκνότητα  $\rho = \text{σταθερά}$ ), οι τρεις εξισώσεις των Navier–Stokes (3.3.7), (3.3.8) και (3.3.9) παίρνουν τις αρκετά απλούστερες μορφές τους

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.3.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.3.24)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.3.25)$$

Οι απλοποιημένες αυτές εξισώσεις των Navier–Stokes (με  $\mu = 0$ ) καλούνται πλέον εξισώσεις του Euler και έχουν το πρόσθετο πλεονέκτημα ότι είναι πρώτης τάξεως και όχι δευτέρας τάξεως. Η αντίστοιχη διανυσματική μορφή των εξισώσεων του Euler είναι η εξής:

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -g \text{grad } h - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (3.3.26)$$

Η εξίσωση αυτή προέκυψε έχοντας απλά θέσει  $\mu = 0$  για τη συνεκτικότητα (το ιξώδες)  $\mu$  στη συνοπτική, διανυσματική γραφή (3.3.22) των εξισώσεων των Navier–Stokes.

### B3.3.3. Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

Συμπερασματικά καταλήγουμε στην εξίσωση της συνεχείας (3.3.4) (διανυσματικά (3.3.6)) και στις εξισώσεις του Euler (3.3.23), (3.3.24) και (3.3.25) (διανυσματικά (3.3.26)). Οι τέσσερις αυτές εξισώσεις αποτελούν το θεμελιώδες σύστημα των τεσσάρων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως στην τριδιάστατη και γενικά μη μόνιμη (εξαρτώμενη από το χρόνο  $t$ ) ροή ιδεατού ρευστού. Έχουν τέσσερις άγνωστες συναρτήσεις: τις συνιστώσες της ταχύτητας ( $u, v, w$ ) και την πίεση  $p$  του ρευστού. Όπως όμως υποθέσαμε, το ρευστό είναι ταυτόχρονα και ασυμπύεστο:  $\rho = \text{σταθερά}$ , και μη συνεκτικό:  $\mu = 0$ . Οι εξισώσεις αυτές αφορούν βέβαια στη Ρευστομηχανική μέσα στο γήινο πεδίο βαρύτητας (με επιτάχυνση  $g$ ). Είναι προφανές ότι η επίλυση του συστήματος αυτού δεν είναι καθόλου απλή στις περισσότερες περιπτώσεις και δε θα επιχειρηθεί εδώ. Φυσικά η λύση του (οι άγνωστες συναρτήσεις μόλις βρεθούν) θα εξαρτάται και από τις τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές, δηλαδή και από τη θέση ( $x, y, z$ ) και από το χρόνο  $t$ .

## B3.4. ΜΟΝΙΜΗ ΑΣΤΡΟΒΙΛΗ ΡΟΗ ΙΔΕΑΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ

### B3.4.1. Οι βασικές εξισώσεις

Στην ενότητα αυτή θα θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση της μόνιμης (δηλαδή ανεξάρτητης από το χρόνο  $t$ ) ροής ιδεατού ρευστού ( $\rho = \text{σταθερά}$  και επίσης  $\mu = 0$ ) με την ισχύ της εξισώσεως της συνεχείας (3.3.4)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.4.1)$$

(Σημειώνεται ότι πάντοτε ισχύει η εξίσωση αυτή για ιδεατά ρευστά, ακόμη και σε μη μόνιμη ροή!) Η εξίσωση της συνεχείας (3.4.1) αφορά στις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού: τις  $u, v$  και  $w$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι η ροή είναι **αστρόβιλη**, δηλαδή έχει μηδενικές τις **γωνιακές ταχύτητες περιστροφής**  $\omega_x, \omega_y$  και  $\omega_z$  γύρω από τους άξονες  $x, y$  και  $z$  αντίστοιχα σε κάθε σημείο του ρευστού. Επομένως ισχύουν οι σχέσεις

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0, \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (3.4.2)$$

και ισοδύναμα

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.4.3)$$

Μια τέτοια ροή καλείται **αστρόβιλη ροή**. Σ' αυτήν το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\mathbf{\Omega}$  είναι και αυτό μηδενικό λόγω των τύπων (3.4.2)

$$\mathbf{\Omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k} = \mathbf{0}. \quad (3.4.4)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα και την έννοια του **στροβιλισμού** (της **στροβιλότητας**), όπως συνήθως καλείται η **περιστροφή**, το curl μιας διανυσματικής συναρτήσεως ιδίως στη Ρευστομηχανική. Έτσι το πιο πάνω διάνυσμα  $\mathbf{\Omega}$  είναι ίσο (και πάλι λόγω των τύπων (3.4.2)) και με το μισό του στροβιλισμού  $\zeta$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού με

$$\zeta = \text{curl } \mathbf{V} \equiv \nabla \times \mathbf{V}, \quad (3.4.5)$$

δηλαδή διαπιστώνουμε ότι

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \zeta = \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{V} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{bmatrix}. \quad (3.4.6)$$

Η ταχύτητα  $\mathbf{V}$  του ρευστού δίνεται από τη σχέση

$$\mathbf{V} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k} \quad (3.4.7)$$

μέσω των συνιστωσών της  $u$ ,  $v$  και  $w$ .

Άρα λόγω των τύπων (3.4.2) και (3.4.6) ο στροβιλισμός (ή περιστροφή, curl)  $\zeta$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ . Το ίδιο μάλιστα συμβαίνει, όπως ήδη αναφέρθηκε στη σχέση (3.4.4), και για το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής  $\mathbf{\Omega}$ . Επομένως, συνοψίζοντας έχουμε

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \zeta = \frac{1}{2} \text{curl } \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (3.4.8)$$

στην παρούσα αστρόβιλη ροή.

### B3.4.2. Το δυναμικό ταχύτητας $\Phi$

Εν πάση περιπτώσει στην **αστρόβιλη** και **μόνιμη** (σταθερή, ανεξάρτητη του χρόνου  $t$ ) ροή ενός ιδεατού ρευστού που εξετάζουμε ισχύουν οι τέσσερις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (3.4.1): μία εξίσωση και (3.4.3): τρεις εξισώσεις. Άγνωστες συναρτήσεις σ' αυτές είναι οι τρεις συνιστώσες  $u$ ,  $v$  και  $w$  της διανυσματικής ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ιδεατού ρευστού που εξετάζουμε. Έχουμε έτσι ένα σύστημα τεσσάρων και (ευτυχώς!) γραμμικών τώρα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως, όπως ευθύς διαπιστώνουμε. Έχουμε επίσης τρεις άγνωστες συναρτήσεις καθώς και τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές: τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$ ,  $y$  και  $z$ . Η ροή έχει υποθεθεί μόνιμη (σταθερή) και επομένως ο χρόνος  $t$  δε συμπεριλαμβάνεται στις ανεξάρτητες μεταβλητές. Για την επίλυση του συστήματος αυτού θεωρούμε την ταχύτητα  $\mathbf{V}$  του ιδεατού ρευστού σαν **κλίση** (ή **βαθμίδα**, gradient) μιας βαθμωτής συναρτήσεως  $\Phi = \Phi(x, y, z)$ :

$$\mathbf{V} = \text{grad } \Phi \equiv \nabla \Phi, \quad (3.4.9)$$

πιο συγκεκριμένα σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (3.4.10)$$

Η νέα αυτή συνάρτηση  $\Phi$ , που καλείται και **συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας** (ή **δυναμική συνάρτηση**) ή, απλούστερα και κατά προτίμηση, **δυναμικό ταχύτητας**, είναι πάρα πολύ χρήσιμη

στο παρόν πρόβλημα αστρόβιλης και μόνιμης ροής ιδεατού ρευστού. Πραγματικά, υποθέτοντας ότι οι μικτές μερικές παράγωγοι μιας συναρτήσεως υπάρχουν και είναι συνεχείς (όπως συνήθως ισχύει), η εναλλαγή της σειράς στις μερικές παραγωγίσεις δε μεταβάλλει καθόλου το αποτέλεσμα των παραγωγίσεων αυτών. Έτσι στην περίπτωση μας για το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right). \quad (3.4.11)$$

Οι σχέσεις αυτές γράφονται και με συντομότερο ισοδύναμο συμβολισμό (που είναι και ο πιο συνηθισμένος) για τις ίδιες ακριβώς μικτές μερικές παραγωγούς

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}. \quad (3.4.12)$$

Οι εξισώσεις (3.4.3) αφορούν στην υπόθεση ελλείψεως στροβιλισμού (ή περιστροφής, στο καλούμενο **αστρόβιλο**, η λέξη αστρόβιλο εδώ είναι ουσιαστικό!) της παρούσας ροής. Λαμβάνουμε υπόψη τις εξισώσεις αυτές σε συνδυασμό με τον ορισμό (3.4.10) των συνιστωσών ( $u, v, w$ ) της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού μέσω του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$ . Διαπιστώνουμε έτσι άμεσα ότι με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$  και οι τρεις εξισώσεις (3.4.3) (που ασφαλώς είναι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς) επαληθεύονται αυτόματα για οποιαδήποτε συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$  των Καρτεσιανών συντεταγμένων ( $x, y, z$ ). Αυτό συμβαίνει απλά γιατί με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$  οι εξισώσεις (3.4.3) ανάγονται στους τύπους (3.4.12), οι οποίοι ισχύουν. Αρκεί βέβαια η συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$ : (α) να ορίζεται στην περιοχή  $D$  του πεδίου ροής που μας ενδιαφέρει και (β) επιπλέον να διαθέτει τις αναγκαίες μερικές παραγωγούς με συνεχείς μάλιστα τις μικτές μερικές παραγωγούς των τύπων (3.4.11) και ισοδύναμα (3.4.12).

Διαπιστώνεται έτσι ότι το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγωγούς (3.4.3) έχει άπειρες λύσεις, μία για κάθε συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας (ή απλά για κάθε δυναμικό ταχύτητας)  $\Phi = \Phi(x, y, z)$ . Η συνάρτηση αυτή μπορεί να επιλεγεί σύμφωνα με τα παραπάνω. Στην ουσία είναι μια σχεδόν απόλυτα αυθαίρετη συνάρτηση. Επομένως η ιδέα να χρησιμοποιηθεί το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  μας επέτρεψε ουσιαστικά να παύσουμε να ασχολούμαστε με τις τρεις εξισώσεις (3.4.3) της αστρόβιλης και μόνιμης ροής του παρόντος ιδεατού ρευστού. Υπενθυμίζεται ότι το ιδεατό ρευστό είναι ένα ρευστό: (α) ασυμπίεστο: με πυκνότητα  $\rho =$  σταθερά και επίσης (β) μη συνεκτικό: με συνεκτικότητα ή ιξώδες  $\mu = 0$ .

Ας μην λησμονούμε εξάλλου ότι από τη Διανυσματική Ανάλυση είναι πολύ γνωστό ότι ισχύει ο βασικός τύπος

$$\text{curl}(\text{grad } \Phi) \equiv \nabla \times (\nabla \Phi) = \mathbf{0}. \quad (3.4.13)$$

Ο τύπος αυτός δηλώνει μηδενικό στροβιλισμό (περιστροφή) της κλίσεως ενός βαθμωτού πεδίου. Άρα, με διανυσματικό τώρα συμβολισμό, λόγω του τύπου (3.4.9) για την ταχύτητα  $\mathbf{V}$  του ρευστού καθώς και του τύπου (3.4.13), ισχύει

$$\text{curl } \mathbf{V} \equiv \nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \text{επειδή } \mathbf{V} = \text{grad } \Phi \equiv \nabla \Phi. \quad (3.4.14)$$

Πρόκειται απλά για μια συνοπτικότερη γραφή του γεγονότος ότι ισχύουν αυτόματα και οι τρεις εξισώσεις (3.4.3) με χρήση του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$ . Με τη βοήθεια του δυναμικού αυτού καθορίζονται οι συνιστώσες ( $u, v, w$ ) της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού στην παρούσα ροή: τύποι (3.4.10).

Θεωρούμε επομένως τώρα το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  σαν τη μόνη άγνωστη συνάρτησή μας στο πρόβλημα ροής που μελετάμε. Άρα η συνάρτηση αυτή  $\Phi$  πρέπει να επαληθεύει τώρα μόνο την **εξίσωση της συνεχείας** (3.4.1). Η εξίσωση αυτή (3.4.1) λόγω των πιο πάνω τύπων (3.4.10) για τις τρεις υνιστώσες ( $u, v, w$ ) της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού παίρνει τώρα τη μορφή

$$\nabla^2 \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.4.15)$$

Άρα το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση του Laplace, εδώ στις τρεις διαστάσεις: την τριδιάστατη εξίσωση του Laplace (3.4.15). Δηλαδή απαιτείται να είναι αρμονική συνάρτηση: συνάρτηση με Λαπλασιανή (Laplacian) ίση με το μηδέν. Με τον τρόπο αυτό, δηλαδή με την εισαγωγή του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$ , πετύχαμε να αναγάγουμε το όλο πρόβλημα του προσδιορισμού των συνιστωσών  $(u, v, w)$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους: στην τριδιάστατη εξίσωση του Laplace (3.4.15). Και μάλιστα η εξίσωση αυτή έχει και μία μόνο άγνωστη συνάρτηση: το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  στην τριδιάστατη περιοχή  $D$  της παρούσας μόνιμης ροής ιδεατού ρευστού.

Πέρα από την εξίσωση του Laplace (3.4.15) το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  πρέπει οπωσδήποτε να πληροί και τη σχετική συνοριακή συνθήκη στο σύνορο  $C \equiv \partial D$  του πεδίου ροής  $D$ . Υποθέτοντας το σύνορο αυτό  $C$  στερεό και ακίνητο, είναι φυσικά κατανοητό ότι το ρευστό δε μπορεί ούτε να εισέρχεται στην περιοχή  $D$  ούτε και να εξέρχεται από την περιοχή αυτή κατά μήκος του συνόρου της  $C$ . Πρέπει επομένως η κάθετη συνιστώσα  $V_n$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}$ , δηλαδή η προβολή της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  πάνω στο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  στο σύνορο  $C$  να είναι ίση με μηδέν. (Ας σημειωθεί ότι συνήθως αυτό το κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  έχει διεύθυνση προς τα έξω της περιοχής ροής  $D$ , αν και αυτό δεν έχει καμία σημασία εδώ.) Άρα

$$V_n = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (3.4.16)$$

με το σύμβολο  $\partial \Phi / \partial n$  να δηλώνει την παράγωγο κατά την κάθετο  $\mathbf{n}$ . Επομένως προκύπτει συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann για το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  υπό τις παρούσες υποθέσεις.

Συμπερασματικά το πρόβλημα της μόνιμης (ανεξάρτητης του χρόνου  $t$ ) και αστρόβιλης ροής ιδεατού (ασυμπίεστου:  $\rho = \text{σταθερά}$ , και μη συνεκτικού:  $\mu = 0$ ) ρευστού ανάγεται: (α) στη διαφορική εξίσωση του Laplace (3.4.15) στο πεδίο ροής  $D$  (εδώ τριδιάστατο) και (β) στη συνοριακή συνθήκη (3.4.16). Αυτή η συνθήκη ισχύει για στερεό και ακίνητο σύνορο  $C$  του πεδίου ροής  $D$ . (Εντούτοις η ίδια συνθήκη (3.4.16) μπορεί να τροποποιηθεί κατάλληλα για άλλους τύπους συνόρων του πεδίου ροής.) Πρέπει επίσης να πάρουμε υπόψη τις συνθήκες στο άπειρο (π.χ. ομοιόμορφη ταχύτητα  $\mathbf{V}_\infty$ ) για άπειρα πεδία ροής. Σημειώνουμε βέβαια ότι η εξίσωση του Laplace (3.4.15), στην οποία καταλήξαμε, είναι μια ιδιαίτερα γνωστή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως, γραμμική, ομογενής και με σταθερούς συντελεστές. Είναι επίσης ελλειπτικού τύπου, αν γενικεύσουμε τον τελευταίο όρο: ελλειπτικού τύπου από τις δύο διαστάσεις  $(x, y)$  στις τρεις  $(x, y, z)$ .

Πρέπει εξάλλου να σημειωθεί ότι στην παρούσα ροή αποδεικνύεται στη Ρευστομηχανική ότι οι τρεις εξισώσεις του Euler (3.3.23), (3.3.24) και (3.3.25) που ήδη αναφέραμε ανάγονται στην εξίσωση του Bernoulli

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + h = H = \text{σταθερά}. \quad (3.4.17)$$

Στην εξίσωση αυτή με  $V = |\mathbf{V}|$  δηλώνεται το μέτρο της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  και η σταθερά  $H$  καλείται **υδραυλικό φορτίο** ή **ολικό φορτίο**. Η εξίσωση αυτή, που είναι μια συνήθης αλγεβρική εξίσωση και όχι πια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, μας επιτρέπει τον υπολογισμό και της πίεσεως  $p$  σε κάθε σημείο  $(x, y, z)$  της ροής του ρευστού. Δεν επεμβαίνει όμως στον προσδιορισμό του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$ .

### B3.4.3. Η ειδική περίπτωση της διδιάστατης ροής

Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και στη διδιάστατη (επίπεδη) περίπτωση (στο επίπεδο  $Oxy$ ) της μόνιμης και αστρόβιλης ροής ιδεατού ρευστού. Μόνο που τώρα τα μεγέθη που υπεισέρχονται:  $u$  και  $v$  (οι συνιστώσες της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού),  $\Phi$  (το δυναμικό ταχύτητας) και  $p$  (η πίεση του ρευστού) εξαρτώνται μόνο από τις δύο Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$  και  $y$ . Από την άλλη πλευρά η συνιστώσα  $w$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού κατά τον άξονα  $Oz$  είναι μηδενική:  $w = 0$ .



Στην ειδική (αλλά και τόσο συνηθισμένη!) αυτή περίπτωση οι εξισώσεις (3.4.3) για την έλλειψη στροβιλισμού (το αστρόβιλο) της ροής προφανώς μειώνονται από τρεις σε μία μόνο: την τρίτη

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.4.18)$$

Επίσης οι τύποι (3.4.10), οι οποίοι αφορούν στον προσδιορισμό των συνιστωσών ( $u, v, w$ ) της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού, μειώνονται φυσικά και αυτοί σε δύο: στους δύο πρώτους (επειδή  $\Phi = \Phi(x, y)$ , οπότε και  $w = 0$ ), στους εξής:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (3.4.19)$$

Επιπλέον και η εξίσωση της συνεχείας (3.4.1) απλοποιείται και αυτή στη διδιάστατη μορφή της

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.4.20)$$

λόγω της μη υπάρξεως ταχύτητας  $w$  κατά τον άξονα  $Oz$ . Τέλος, ασφαλώς και η εξίσωση του Laplace (3.4.15) για το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  (που προκύπτει από την εξίσωση της συνεχείας (3.4.1)) παίρνει και αυτή διδιάστατη μορφή, την εξής:

$$\nabla^2 \Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3.4.21)$$

με  $\nabla^2 \Phi \equiv \text{div}(\text{grad } \Phi) \equiv \nabla \cdot (\nabla \Phi)$ . Το ζητούμενο δυναμικό ταχύτητας (ή συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας)  $\Phi = \Phi(x, y)$  είναι βέβαια και αυτό συνάρτηση μόνο δύο Καρτεσιανών συντεταγμένων: των  $x$  και  $y$ . (Στην παράγραφο αυτή αναφερόμαστε συνεχώς σε επίπεδη ροή.)

Και στην ειδική αυτή περίπτωση της επίπεδης ροής με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$  πληρούται αυτόματα η εξίσωση (3.4.18), που αφορά στην έλλειψη στροβιλισμού (στο αστρόβιλο) της ροής. Είναι όμως απαραίτητο να μην αγνοηθεί, να ληφθεί υπόψη η εξίσωση της συνεχείας (3.4.20). Αυτό οδηγεί στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (3.4.21). Τέλος, όσον αφορά στη συνηθισμένη συνοριακή συνθήκη (3.4.16) ( $V_n = \partial \Phi / \partial n = 0$ ) για στερεό και ακίνητο σύνορο  $C$  του πεδίου ροής  $D$  (αλλά διδιάστατου τώρα πεδίου ροής), αυτή παραμένει βέβαια σε ισχύ. Εντούτοις υπολογιστικά γίνεται απλούστερη, γιατί τώρα το σύνορο  $C$  του διδιάστατου πια πεδίου ροής  $D$  είναι μονοδιάστατο. Βέβαια όλες αυτές οι διαπιστώσεις είναι λίγο-πολύ προφανείς.

#### B3.4.4. Η ροϊκή συνάρτηση $\Psi$

Το καθαρά νέο στοιχείο στη διδιάστατη (επίπεδη) και μόνιμη (σταθερή) ροή ιδεατού ρευστού είναι μια επιπλέον δυνατότητα που δεν προέρχεται από την αντίστοιχη τριδιάστατη ροή ούτε και είναι γενικεύσιμη σ' αυτήν. Η δυνατότητα αυτή συνίσταται στην εισαγωγή και μιας νέας συναρτήσεως  $\Psi = \Psi(x, y)$ , που καλείται **ροϊκή συνάρτηση** (ή **συνάρτηση ροής**). Η συνάρτηση αυτή  $\Psi = \Psi(x, y)$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί για το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi = \Phi(x, y)$  ή/και παράλληλα με το δυναμικό αυτό. Η φιλοσοφία που υποκρύπτεται πίσω από την εισαγωγή της ροϊκής συναρτήσεως  $\Psi$  (επαναλαμβάνεται μόνο στη διδιάστατη και μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού που εξετάζουμε) είναι απλά η «αυτόματη» πλήρωση της εξισώσεως της συνεχείας (3.4.20) στη ροή αυτή από τη ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$ . Θέτουμε όμως και πάλι την προϋπόθεση ότι και η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$  διαθέτει συνεχείς μικτές μερικές παραγώγους ως προς  $y$  πρώτα και, στη συνέχεια, και ως προς  $x$  (και αντίστροφα ασφαλώς). Τότε έχουμε

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}, \quad (3.4.22)$$

κάτι που σχεδόν πάντοτε ισχύει για μια συνηθισμένη συνάρτηση  $\Psi = \Psi(x, y)$ .

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση της συνεχείας (3.4.20). Ας μην ξεχνάμε ότι αυτή είναι ουσιαστικά μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ως προς τις άγνωστες συνιστώσες  $u$  και  $v$  της

ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού. Συγκεκριμένα έχουμε έτσι ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με δύο άγνωστες συναρτήσεις: τις συνιστώσες αυτές  $u$  και  $v$ . Η πρώτη εξίσωση του συστήματος είναι η εξίσωση της συνεχείας (3.4.20) και η δεύτερη η εξίσωση της ελλείψεως στροβιλισμού στη ροή, του αστρόβιλου της ροής (3.4.18).

Παρατηρώντας την εξίσωση της συνεχείας (3.4.20), στην περίπτωση της ροϊκής συναρτήσεως  $\Psi$ , απλά υπολογίζουμε τις συνιστώσες  $u$  και  $v$  της ταχύτητας (διδιάστατης πλέον)  $\mathbf{V}$  του ρευστού μέσω των τύπων

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.4.23)$$

Οι τύποι αυτοί επιλέχθηκαν σκόπιμα, ώστε να πληρούται αυτόματα η εξίσωση της συνεχείας (3.4.20). Βέβαια πληρούται αυτόματα με την υπόθεση ισχύος του τύπου (3.4.22) για τη δυνατότητα εναλλαγής της σειράς των μερικών παραγωγίσεων κατά τον υπολογισμό της μικτής μερικής παραγώγου της ροϊκής συναρτήσεως  $\Psi$ . (Αυτή η δυνατότητα εναλλαγής είναι εδώ σχεδόν βέβαιη.) Η αυτόματη πλήρωση της εξισώσεως της συνεχείας (3.4.20) διαπιστώνεται πάρα πολύ εύκολα με την αντικατάσταση των τύπων (3.4.23) στην εξίσωση της συνεχείας (3.4.20). Άρα με τη χρήση της ροϊκής συναρτήσεως  $\Psi$  πληρούται αυτόματα η εξίσωση της συνεχείας (3.4.20). Εντούτοις δυστυχώς δε συμβαίνει το ίδιο και για τη συνθήκη (3.4.18) του αστρόβιλου της ροής (βέβαια με τη ροή να έχει υποθεθεί ότι είναι αστρόβιλη). Αντίθετα με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$  συνέβαινε ακριβώς το αντίστροφο, όπως ήδη λεπτομερώς διαπιστώσαμε.

Για την πλήρωση της συνθήκης του αστρόβιλου (μηδενικού στροβιλισμού, μηδενικής περιστροφής) (3.4.18) της παρούσας μόνιμης διδιάστατης ροής ιδεατού ρευστού πρέπει (δυστυχώς αναγκαστικά πρέπει!) να γίνει χρήση των τύπων (3.4.23). Από τους τύπους αυτούς καθορίζονται οι συνιστώσες  $u$  και  $v$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ιδεατού ρευστού μέσω της ροϊκής συναρτήσεως  $\Psi$ . Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες αυτές  $u$  και  $v$  στη συνθήκη του αστρόβιλου της ροής (3.4.18), εύκολα προκύπτει ότι

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right). \quad (3.4.24)$$

Τώρα, μεταφέροντας το δεξιό μέλος στο αριστερό και αλλάζοντας το πρόσημο, διαπιστώνουμε ότι η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$  πρέπει να είναι αρμονική, δηλαδή να επαληθεύει την εξίσωση του Laplace

$$\nabla^2 \Psi \equiv \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0. \quad (3.4.25)$$

Το ίδιο ακριβώς συνέβαινε στην ανάλογη εξίσωση (3.4.21) και για το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  υπό τις ίδιες ακριβώς συνθήκες ροής. Μόνο που το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  είναι χρήσιμο και στις τρεις διαστάσεις  $(x, y, z)$  (όχι μόνο στις δύο  $(x, y)$ ), ενώ η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$  αναφέρεται στις δύο μόνο διαστάσεις  $(x, y)$ . Δυστυχώς δεν είναι γενικεύσιμη και αυτή και στις τρεις διαστάσεις  $(x, y, z)$ .

### **B3.4.5. Ορθογωνιότητα των ισοδυναμικών γραμμών και των γραμμών ροής: δίκτυο ροής**

Στην παράγραφο αυτή περιοριζόμαστε στη μόνιμη και αστρόβιλη διδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού (στο επίπεδο  $Oxy$ ). Σημειώνουμε καταρχήν ότι τόσο το **δυναμικό ταχύτητας**  $\Phi = \Phi(x, y)$  όσο κι η **ροϊκή συνάρτηση**  $\Psi = \Psi(x, y)$  είναι ιδιαίτερα χρήσιμες συναρτήσεις. Αυτό είναι προφανές, επειδή οι συναρτήσεις αυτές (ή η μία ή η άλλη) επιτρέπουν, όπως ήδη είδαμε, την αναγωγή του όλου προβλήματος της ροής που υποθέσαμε στην επίλυση μιας μόνο διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους. Συγκεκριμένα η διαφορική αυτή εξίσωση είναι: (α) η εξίσωση του Laplace (3.4.21) για το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  και (β) η εξίσωση του Laplace (3.4.25) για τη ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$ .

Με την επίλυση είτε της μιας είτε της άλλης από τις δύο αυτές διδιάστατες εξισώσεις του Laplace και τον προσδιορισμό του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$  ή της ροϊκής συναρτήσεως  $\Psi$  πληρούνται οι εξισώσεις και της συνεχείας και του αστρόβιλου του πεδίου ροής. Επιπλέον όμως είναι δυνατός και ο προσδιορισμός και των συνιστωσών  $u$  και  $v$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού. Αυτό είναι

μια εύκολη εργασία που γίνεται με τον υπολογισμό των πρώτων μερικών παραγώγων είτε του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$  είτε της ροϊκής συναρτήσεως  $\Psi$ , επειδή ισχύουν οι τύποι

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (3.4.26)$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.4.27)$$

Οι τύποι αυτοί προέκυψαν με συνδυασμό των τύπων (3.4.19) και (3.4.23) με τους πρώτους να αναφέρονται στο δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  και τους δεύτερους στη ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$ .

Και οι δύο συναρτήσεις: (α) το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  και (β) η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$  στη ροή που εξετάζουμε πληρούν την **εξίσωση του Laplace**. Είναι επομένως **αρμονικές συναρτήσεις**. Επιπλέον όμως πληρούν και τις εξισώσεις (3.4.26) και (3.4.27), που γράφονται σαφέστερα (χωρίς τις συνιστώσες  $u$  και  $v$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  σ' αυτές) ως εξής:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad (3.4.28)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.4.29)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις καλούνται **εξισώσεις των Cauchy-Riemann**. Δύο αρμονικές συναρτήσεις που τις πληρούν ονομάζονται **συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις**. Άρα το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  και η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$  είναι συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις ή, ακριβέστερα, η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$  είναι συζυγής αρμονική συνάρτηση του δυναμικού ταχύτητας  $\Phi$ .

Μια καμπύλη  $m$  στο παρόν επίπεδο, αστρόβιλο και μόνιμο πεδίο ροής ιδεατού ρευστού, πάνω στην οποία το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  έχει σταθερή τιμή  $C_{\Phi,m}$  καλείται **ισοδυναμική γραμμή** του πεδίου ροής. Αποδεικνύεται επίσης εύκολα στη Ρεστομηχανική ότι η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$  έχει σταθερή τιμή  $C_{\Psi,n}$  σε κάθε **γραμμή ροής** (ή **ροϊκή γραμμή**)  $n$ . Επομένως σε μια ισοδυναμική γραμμή  $m$  με  $\Phi = C_{\Phi,m}$  και σε μια γραμμή ροής  $n$  με  $\Psi = C_{\Psi,n}$ , διαφορίζοντας αυτές τις δύο εξισώσεις:  $\Phi = C_{\Phi,m}$  και  $\Psi = C_{\Psi,n}$  αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0 \quad (\text{ισοδυναμική γραμμή}), \quad (3.4.30)$$

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = 0 \quad (\text{γραμμή ροής}). \quad (3.4.31)$$

Προφανώς τα δεξιά μέλη είναι ίσα με το μηδέν, γιατί τα διαφορικά των σταθερών  $C_{\Phi,m}$  και  $C_{\Psi,n}$  είναι ίσα με το μηδέν.

Υποθέτουμε τώρα ότι η ισοδυναμική γραμμή με  $\Phi = C_{\Phi,m}$  και η γραμμή ροής με  $\Psi = C_{\Psi,n}$  τέμνονται σε ένα σημείο  $(x_0, y_0)$  του πεδίου ροής. Τότε από τις δύο πιο πάνω σχέσεις (3.4.30) και (3.4.31) διαπιστώνουμε ότι

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_{\Phi,m}} = -\frac{\partial \Phi / \partial x}{\partial \Phi / \partial y} = -\frac{u}{v}, \quad (3.4.32)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_{\Psi,n}} = -\frac{\partial \Psi / \partial x}{\partial \Psi / \partial y} = -\frac{-v}{u} = \frac{v}{u} \quad (3.4.33)$$

λόγω των τύπων (3.4.19) και (3.4.23) αντίστοιχα ή απλά των συνδυασμένων τύπων (3.4.26) και (3.4.27). Είναι επομένως σαφές από τους δύο αυτούς τύπους (3.4.32) και (3.4.33) ότι στο σημείο τομής  $(x_0, y_0)$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_{\Phi,m}} \left(\frac{dy}{dx}\right)_{C_{\Psi,n}} = -1. \quad (3.4.34)$$

Άρα το γινόμενο των κλίσεων μιας ισοδυναμικής καμπύλης  $m$  (με  $\Phi = C_{\Phi,m}$ ) και μιας γραμμής ροής  $n$  (με  $\Psi = C_{\Psi,n}$ ) σε σημείο τομής τους  $(x_0, y_0)$  είναι ίσο με  $-1$ . Η διαπίστωση αυτή ισχύει γενικά

σε κάθε σημείο τομής οποιωνδήποτε δύο τέτοιων καμπύλων. Επομένως οι ισοδυναμικές γραμμές και οι γραμμές ροής στην παρούσα μόνιμη (σταθερή) και αστρόβιλη επίπεδη ροή ιδεατού ρευστού τέμνονται πάντοτε κατά ορθή γωνία. Συνεπώς αποτελούν **σύστημα ορθογωνίων τροχιών** και σχηματίζουν ένα **δίκτυο ροής**.

Σε εκτενέστερο βαθμό η μελέτη ροών όπως η παρούσα θα εξετασθεί στο τελευταίο μέρος του μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ, που αφορά στη Μιγαδική Ανάλυση. Η Μιγαδική Ανάλυση αποτελεί ένα ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο για τη μελέτη προβλημάτων που έχουν να κάνουν με αρμονικές συναρτήσεις, όπως στην παρούσα επίπεδη ροή ιδεατού ρευστού.

### B3.5. ΚΥΚΛΟΦΟΡΙΑΚΗ ΡΟΗ ΣΕ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΟΔΡΟΜΟ

#### B3.5.1. Διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε τη ροή αυτοκινήτων (οχημάτων) σε αυτοκινητόδρομο σε διάστημα  $[a, b]$  ( $a \leq x \leq b$ ) του αυτοκινητόδρομου χωρίς να υπάρχουν ούτε είσοδοι ούτε έξοδοι αυτοκινήτων στο διάστημα αυτό  $[a, b]$ . Δηλώνουμε την πυκνότητα (τη γραμμική πυκνότητα σε αυτοκίνητα/km) ή, ισοδύναμα, τη συγκέντρωση των αυτοκινήτων με το σύμβολο  $c$ . Προφανώς  $c = c(x, t)$  με  $x$  τη θέση (μετρούμενη σε km) κατά μήκος του αυτοκινητόδρομου στο διάστημα  $[a, b]$  και  $t$  το χρόνο (πιθανώς μετρούμενο σε ώρες και συνήθως με  $t \geq 0$ ). Δηλώνουμε επίσης την ταχύτητα των αυτοκινήτων (σε km/h, το σύμβολο  $h$  δηλώνει ώρα ή, σε άλλη περίπτωση, ώρες) με το σύμβολο  $v$ . Προφανώς  $v = v(x, t)$ . Για να είμαστε ακριβείς, στο παρόν πρόβλημα λέγοντας ταχύτητα  $v = v(x, t)$  εννοούμε τη μέση ταχύτητα των αυτοκινήτων στο σημείο  $x$  του αυτοκινητόδρομου και τη χρονική στιγμή  $t$ .

Υπό τις συνθήκες αυτές κυκλοφοριακής ροής η ροή  $q = q(x, t)$  των αυτοκινήτων (αυτοκίνητα/h, αυτοκίνητα ανά ώρα που περνούν από το σημείο  $x$ ) κατά μήκος του αυτοκινητόδρομου στο σημείο  $x$  και τη χρονική στιγμή  $t$  θα είναι ίση με

$$q = cv \quad \text{και με σαφέστερη γραφή} \quad q(x, t) = c(x, t)v(x, t). \quad (3.5.1)$$

Η ροή αυτή  $q$  θα έχει μονάδες (αυτοκίνητα/km)·(km/h), δηλαδή αυτοκίνητα/h, όπως είναι εύλογο. Η ταχύτητα  $v$  των αυτοκινήτων θεωρείται φυσικά θετική προς τις αυξανόμενες τιμές της θέσεως  $x$ . Το ίδιο συμβαίνει και με τη ροή  $q$ . Υποθέτουμε ότι αυτά ισχύουν εδώ.

Σκοπό της ενότητας αυτής αποτελεί απλά η εύρεση της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους που διέπει το παρόν πρόβλημα κυκλοφοριακής ροής. Στην τελική εξίσωση που θα βρούμε άγνωστη συνάρτηση θα είναι η πυκνότητα (ή συγκέντρωση)  $c = c(x, t)$  των αυτοκινήτων. Ενδιάμεσα θα προκύψει όμως και η εξίσωση της διατηρήσεως, μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα εξίσωση, εδώ με φυσική ερμηνεία της τη διατήρηση των αυτοκινήτων.

Πρέπει επίσης να παρατηρηθεί ότι η παρούσα μέθοδος για την Κυκλοφοριακή Ροή στηρίζεται στο αντίστοιχο υδροδυναμικό μοντέλο στη Ρευστομηχανική, γι' αυτό και η φράση κυκλοφοριακή ροή. Βέβαια στη Ρευστομηχανική παρουσιάζεται κατά τη ροή ρευστού κίνηση των μορίων του ρευστού, ενώ εδώ έχουμε κίνηση αυτοκινήτων (οχημάτων γενικότερα). Επίσης στην Κυκλοφοριακή Ροή γίνεται προσέγγιση ενός διακριτού μοντέλου με συνεχές. (Τα αυτοκίνητα είναι εντελώς διακριτά, πολύ πιο διακριτά από τα μόρια ενός ρευστού!) Παρά ταύτα τα αποτελέσματα που μπορούν να προκύψουν από το παρόν μοντέλο στην Κυκλοφοριακή Ροή σε αυτοκινητόδρομο είναι ενδιαφέροντα και έχουν αρκετή ακρίβεια αλλά και χρησιμότητα για τον Πολιτικό Μηχανικό.

#### B3.5.2. Εύρεση της εξίσωσης της διατηρήσεως

Περιορίζουμε τώρα στην προσοχή μας σε ένα πάρα πολύ μικρό, απειροστό τμήμα  $[x, x + \Delta x]$  του αυτοκινητόδρομου μέσα βέβαια στο διάστημα  $[a, b]$  που εξετάζουμε. Θεωρούμε επίσης ένα χρονικό διάστημα  $[t, t + \Delta t]$  με το  $\Delta t$  επίσης πάρα πολύ μικρό, απειροστό. Τη χρονική στιγμή  $t_1 = t$

ο αριθμός των αυτοκινήτων  $m = m(x, t)$  μέσα στο διάστημα  $[x, x + \Delta x]$  θα είναι ίσος με

$$m_1 \equiv m(x, t) = c(x, t) \Delta x. \quad (3.5.2)$$

Στη σχέση αυτή αγνοήσαμε τους όρους του  $\Delta x^2$  και ανώτερης τάξεως, επειδή το μήκος  $\Delta x$  του διαστήματος  $[x, x + \Delta x]$  που εξετάζουμε θεωρήθηκε απειροστό. Παραπέρα τη χρονική στιγμή  $t_2 = t + \Delta t$  ο αριθμός των αυτοκινήτων μέσα στο ίδιο ακριβώς διάστημα  $[x, x + \Delta x]$  θα είναι ίσος με

$$m_2 \equiv m(x, t + \Delta t) = c(x, t + \Delta t) \Delta x. \quad (3.5.3)$$

Και πάλι αγνοήσαμε τους όρους του  $\Delta x^2$  και ανώτερης τάξεως.

Αλλά για πάρα πολύ μικρό, απειροστό το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  ισχύει προφανώς ότι

$$c(x, t + \Delta t) = c(x, t) + \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) \Delta t \quad (3.5.4)$$

με περιορισμό μας στους δύο πρώτους όρους της σχετικής σειράς Taylor. (Δηλαδή τώρα αγνοούμε τον όρο που περιέχει το  $\Delta t^2$  και τους όρους ανώτερης τάξεως: που περιέχουν το  $\Delta t^3$ , το  $\Delta t^4$ , κλπ.). Άρα ο αύξηση  $\Delta m$  του αριθμού των αυτοκινήτων  $m = m(x, t)$  στο διάστημα  $[x, x + \Delta x]$  του αυτοκινητόδρομου που εξετάζουμε από τη χρονική στιγμή  $t$  μέχρι τη χρονική στιγμή  $t + \Delta t$  θα είναι ίση με

$$\begin{aligned} \Delta m &= m_2 - m_1 = m(x, t + \Delta t) - m(x, t) = c(x, t + \Delta t) \Delta x - c(x, t) \Delta x \\ &= [c(x, t + \Delta t) - c(x, t)] \Delta x = \left[ \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) \Delta t \right] \Delta x = \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) \Delta x \Delta t \end{aligned} \quad (3.5.5)$$

εξαιτίας του τύπου (3.5.4). Είναι βέβαια προφανές ότι για αύξηση του αριθμού των αυτοκινήτων στο διάστημα  $[x, x + \Delta x]$  η πιο πάνω ποσότητα  $\Delta m$  είναι θετική. Αντίθετα για μείωση είναι αρνητική.

Η παραπάνω σχέση (3.5.5) καθιστά σαφές ότι για αύξηση της πυκνότητας (ή συγκεντρώσεως) των αυτοκινήτων  $c = c(x, t)$  στη θέση  $x$  του αυτοκινητόδρομου με το χρόνο  $t$  (δηλαδή με τη μερική παράγωγο  $\partial c / \partial t$  θετική) θα υπάρχει και αύξηση  $\Delta m$  του αριθμού των αυτοκινήτων στο διάστημα  $[x, x + \Delta x]$  του αυτοκινητόδρομου. Η αύξηση αυτή  $\Delta m$  (ή μείωση για αρνητικές τιμές του  $\Delta m$ ) είναι βέβαια προφανής και δίνεται από τη σχέση (3.5.5). Πού οφείλεται όμως στην πραγματικότητα η αύξηση (ή μείωση) αυτή κατά τη διάρκεια  $\Delta t$  του χρονικού διαστήματος  $[t, t + \Delta t]$ ; Φυσικά στην είσοδο αυτοκινήτων στο διάστημα  $[x, x + \Delta x]$  στην αρχή του  $x_1 = x$  με ταχύτερο ρυθμό από την έξοδο αυτοκινήτων από το ίδιο διάστημα  $[x, x + \Delta x]$  στο τέλος του  $x_2 = x + \Delta x$ .

Πιο αναλυτικά η είσοδος αυτοκινήτων στο διάστημα αυτό  $[x, x + \Delta x]$  στην αρχή του  $x_1 = x$  από τη χρονική στιγμή  $t_1 = t$  μέχρι τη χρονική στιγμή  $t_2 = t + \Delta t$  θα ισούται με

$$n_1 = q(x, t) \Delta t \quad (3.5.6)$$

με  $q = q(x, t)$  τη ροή των αυτοκινήτων στη θέση  $x_1 = x$ . (Αγνοήσαμε πάλι τους όρους του  $\Delta t^2$  και ανώτερης τάξεως.)

Η ποσότητα  $n_1$  δηλώνει τα αυτοκίνητα που μπήκαν στο χωρικό διάστημα  $[x, x + \Delta x]$  του αυτοκινητόδρομου κατά το χρονικό διάστημα  $[t, t + \Delta t]$ . Πόσα όμως αυτοκίνητα βγήκαν από το ίδιο χωρικό διάστημα  $[x, x + \Delta x]$  κατά το ίδιο χρονικό διάστημα  $[t, t + \Delta t]$ ; Ο αριθμός τους  $n_2$  δίνεται προφανώς από τη σχέση

$$n_2 = -q(x + \Delta x, t) \Delta t. \quad (3.5.7)$$

Η σχέση αυτή είναι εντελώς ανάλογη με την (3.5.6) για τα αυτοκίνητα που εισήλθαν στην αρχή  $x_1 = x$  του χωρικού διαστήματος  $[x, x + \Delta x]$ . Τώρα όμως αναφερόμαστε στο τέλος  $x_2 = x + \Delta x$  του διαστήματος αυτού. Στη σχέση (3.5.7) υπάρχει επίσης το πρόσημο μείον, επειδή πρόκειται για έξοδο των αυτοκινήτων στο σημείο  $x_2 = x + \Delta x$ , όχι για είσοδο αντίθετα με τη σχέση (3.5.6).

Κατά συνέπεια η συνολική αύξηση  $\Delta n$  του αριθμού των αυτοκινήτων μέσα στο χωρικό διάστημα  $[x, x + \Delta x]$  του αυτοκινητόδρομου κατά τη διάρκεια  $\Delta t$  του χρονικού διαστήματος  $[t, t + \Delta t]$  θα είναι προφανώς ίση με

$$\Delta n = n_1 - n_2 = q(x, t) \Delta t - q(x + \Delta x, t) \Delta t = -[q(x + \Delta x, t) - q(x, t)] \Delta t. \quad (3.5.8)$$

Πρόκειται απλά για τη διαφορά  $n_1 - n_2$  των αριθμών των αυτοκινήτων  $n_1$  που εισήλθαν στο διάστημα αυτό  $[x, x + \Delta x]$  του αυτοκινητόδρομου (εννοείται από το σημείο του  $x_1 = x$ ) μείον τον αριθμό των αυτοκινήτων  $n_2$  που εξήλθαν από το ίδιο διάστημα  $[x, x + \Delta x]$  (εννοείται από το σημείο  $x_2 = x + \Delta x$  του αυτοκινητόδρομου). Είναι απόλυτα λογικό αυτό, αν θυμηθούμε ότι υποθέσαμε πως δεν υπάρχουν ούτε εισόδοι ούτε εξόδοι του αυτοκινητόδρομου σε ολόκληρο το εξεταζόμενο διάστημά του  $[a, b]$ . Του συνολικού αυτού διαστήματος  $[a, b]$  το διάστημα  $[x, x + \Delta x]$  αποτελεί ένα απειροστό υποσύνολο (ή υποδιάστημα).

Αλλά με απειροστό το  $\Delta x$  για τη ροή  $q$  των αυτοκινήτων (οχημάτων) ισχύει προφανώς ότι

$$q(x + \Delta x, t) = q(x, t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) \Delta x \quad (3.5.9)$$

με περιορισμό μας στους δύο πρώτους όρους της σχετικής σειράς Taylor. Ο τύπος αυτός (3.5.9) είναι πάλι η σειρά Taylor με δύο μόνο όρους, αλλά για τη ροή των αυτοκινήτων  $q(x, t)$  και ως προς τη θέση  $x$ . Ο αντίστοιχος τύπος (3.5.4) προηγούμενως αφορούσε στην πυκνότητα (ή συγκέντρωση) των αυτοκινήτων  $c(x, t)$  και ήταν ως προς το χρόνο  $t$ , όχι ως προς τη θέση  $x$ . Τώρα με βάση τον τύπο (3.5.9) η σχέση (3.5.8) παίρνει τη μορφή

$$\Delta n = n_1 - n_2 = - \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) \Delta x \Delta t. \quad (3.5.10)$$

Εν πάση περιπτώσει τα αυτοκίνητα ούτε εξαφανίζονται αλλ' ούτε και δημιουργούνται εκ του μηδενός σε ένα τμήμα  $[x, x + \Delta x]$  αυτοκινητόδρομου χωρίς εισόδους και εξόδους. Άρα η παραπάνω διαφορά  $\Delta n = n_1 - n_2$  των αυτοκινήτων (οχημάτων) που εισήλθαν στον αυτοκινητόδρομο μείον τα αυτοκίνητα που εξήλθαν πρέπει οπωσδήποτε να ισούται με την αύξηση του αριθμού των αυτοκινήτων  $\Delta m = m_2 - m_1$  στο ίδιο διάστημα  $[x, x + \Delta x]$ . (Υπενθυμίζεται ότι η αύξηση αυτή  $\Delta m$  θα είναι μείωση, εάν  $\Delta m < 0$ . Αυτό είναι κάτι το προφανές.) Επομένως

$$\Delta n = \Delta m \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \Delta m - \Delta n = 0. \quad (3.5.11)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα και τα αποτελέσματα (3.5.5) και (3.5.10) για τις διαφορές  $\Delta m$  και  $\Delta n$  αντίστοιχα

$$\Delta m = \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) \Delta x \Delta t, \quad \Delta n = - \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) \Delta x \Delta t. \quad (3.5.12)$$

Άρα η θεμελιώδης σχέση (3.5.11) γράφεται στη μορφή

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) \Delta x \Delta t + \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) \Delta x \Delta t = 0 \implies \left[ \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial q}{\partial x}(x, t) \right] \Delta x \Delta t = 0. \quad (3.5.13)$$

Τελικά διαιρούμε και με  $\Delta x \Delta t$  (έτσι κι αλλιώς  $\Delta x > 0$  και επίσης  $\Delta t > 0$ ). Έτσι προκύπτει η τελική μας εξίσωση

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (3.5.14)$$

Στην εξίσωση αυτή παραλείψαμε μάλιστα να δηλώσουμε ρητά την εξάρτηση της πυκνότητας (ή συγκεντρώσεως)  $c = c(x, t)$  των αυτοκινήτων καθώς και της ροής τους  $q = q(x, t)$  από τη θέση  $x$  (τη χωρική ανεξάρτητη μεταβλητή) και το χρόνο  $t$  (τη χρονική ανεξάρτητη μεταβλητή).

Αυτό που πρέπει επίσης να τονισθεί είναι ότι η παραπάνω εξίσωση (3.5.14) εκφράζει μια φυσική αρχή διατηρήσεως, στην περίπτωση μας την αρχή διατηρήσεως των αυτοκινήτων σε ένα

τμήμα  $[x, x + \Delta x]$  αυτοκινητόδρομου χωρίς ούτε εισόδους ούτε εξόδους. Βέβαια σε πολλά άλλα προβλήματα η ίδια εξίσωση διατηρήσεως (3.5.14) σε ένα φαινόμενο μεταφοράς αφορά σε άλλες, σε εντελώς διαφορετικές ποσότητες και όχι σε αυτοκίνητα. Κλασικό σχετικό παράδειγμα αποτελεί η διατήρηση της μάζας σε μονοδιάστατη ροή συμπιεστού ρευστού στη Ρευστομηχανική.

Σημειώνουμε επίσης με έμφαση ότι εργασθήκαμε στην Παράγραφο αυτή Β3.5.2 με μέθοδο αντίστοιχη με εκείνη της Παραγράφου Β3.2.2 στις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου. Θα μπορούσαμε όμως να είχαμε εργασθεί και με τις μεθόδους των Παραγράφων Β3.2.5 (χρήση θεωρημάτων μέσης τιμής) και Β3.2.6 (χρήση της παραγώγου αορίστου ολοκληρώματος), για να καταλήξουμε στην ίδια ακριβώς εξίσωση διατηρήσεως (3.5.14). Η μέθοδος της παραγράφου Β3.2.6 είναι μάλιστα συντομότερη από εκείνη της Παραγράφου Β3.2.5 και πολύ συχνά προτιμάται. Βέβαια και οι δύο αυτές μέθοδοι είναι μαθηματικά ακριβείς σε αντίθεση με την παρούσα, όπου υποθέσαμε πάρα πολύ μικρά, απειροστά τα διαστήματα  $\Delta x$  (χωρικό) και  $\Delta t$  (χρονικό). Το πλεονέκτημα όμως της παρούσας μεθόδου είναι ότι είναι πολύ απλή στη φυσική κατανόησή της, γιατί δε στηρίζεται σε μη άμεσα προφανή θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού. Επομένως η απλότητά της αυτή την καθιστά συχνά την προτιμότερη προς χρήση από τον Πολιτικό Μηχανικό σε ένα πρακτικό πρόβλημα όπως το παρόν πρόβλημα κυκλοφοριακής ροής.

### **Β3.5.3. Εύρεση της τελικής μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους**

Καταλήξαμε επομένως σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους: στην εξίσωση διατηρήσεως (3.5.14). Αυτή έχει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τις  $x$  και  $t$  και, δυστυχώς, επίσης δύο άγνωστες συναρτήσεις (ή εξαρτημένες μεταβλητές): τις  $c$  (πυκνότητα ή συγκέντρωση των αυτοκινήτων) και  $q$  (ροή των αυτοκινήτων). Είναι βέβαια αδύνατο να επιλύσουμε την εξίσωση αυτή (3.5.14), γιατί έχει δύο άγνωστες συναρτήσεις. Καμία φυσική σκέψη δε μπορεί να μας βοηθήσει στο θέμα αυτό. Από εδώ και πέρα η μέθοδος που ακολουθεί ο Πολιτικός Μηχανικός είναι να ορίσει τη ροή  $q$  των αυτοκινήτων συναρτήσει της πυκνότητάς τους  $c$  βάσει πειραματικών δεδομένων, δηλαδή αληθινών μετρήσεων πάνω σε αυτοκινητόδρομο. Οι μετρήσεις αυτές ακολουθούμενες από τη χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων μπορούν να οδηγήσουν σε μια προσεγγιστική συνάρτηση

$$q = q(c) = q(c(x, t)), \quad (3.5.15)$$

που την αποδέχεται ο Πολιτικός Μηχανικός. Άρα υιοθετώντας τη συνάρτηση αυτή  $q = q(c)$  χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο την πυκνότητα  $c$  των αυτοκινήτων στον αυτοκινητόδρομο. Αυτή είναι και η βασική μας άγνωστη συνάρτηση.

Δεν απομένει τώρα παρά μόνο η αντικατάσταση της άγνωστης συναρτήσεως  $q$  από την επίσης άγνωστη συνάρτηση  $c$  στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (3.5.14) (την εξίσωση της διατηρήσεως) με τη χρήση της συναρτήσεως (3.5.15). Η συνάρτηση αυτή  $q = q(c)$  (που θεωρείται τώρα συγκεκριμένη, γνωστή) βρέθηκε με βάση πειραματικά κυκλοφοριακά δεδομένα που προέρχονται από αληθινές μετρήσεις και προσέγγισή τους από συνηθισμένη συνάρτηση  $q = q(c)$ . Με τον τρόπο αυτό και με τη χρήση του κανόνα της αλυσίδας για τις παραγώγους (της αλληλουχίας των παραγώγων) στο Διαφορικό Λογισμό η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (3.5.14) παίρνει την τελική της μορφή

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{dq}{dc} \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial c}{\partial t} + V(c) \frac{\partial c}{\partial x} = 0. \quad (3.5.16)$$

Στην εξίσωση αυτή εισαγάγαμε στο τέλος και τη νέα συνάρτηση

$$V(c) = \frac{dq}{dc}, \quad (3.5.17)$$

η οποία έχει προφανώς μονάδες ταχύτητας.

Μια αρκετά καλή προσέγγιση της πραγματικότητας (των διαθέσιμων πειραματικών κυκλοφοριακών μετρήσεων σε αληθινούς αυτοκινητόδρομους) αποτελεί η τριτοβάθμια συνάρτηση  $q(c) = Ac - Bc^2 + Cc^3$  με τα  $A, B$  και  $C$  πειραματικά προσδιοριζόμενες θετικές σταθερές. Στην περίπτωση αυτή συνήθως έχουμε

$$q(c) = Ac - Bc^2 + Cc^3 \implies V(c) = \frac{dq}{dc} = A - 2Bc + 3Cc^2, \quad (3.5.18)$$

οπότε

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V(c) \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial c}{\partial t} + (A - 2Bc + 3Cc^2) \frac{\partial c}{\partial x} = 0. \quad (3.5.19)$$

Πρόκειται βέβαια γενικά για μια μη γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους σε αντίθεση με όλες τις προηγούμενες εξισώσεις στο κεφάλαιο αυτό. Η μη γραμμικότητα αυτή προκαλεί βέβαια πολύ σοβαρές δυσκολίες στην επίλυση της πιο πάνω εξισώσεως (3.5.19). Εδώ δε θα ασχοληθούμε με την επίλυση αυτή.

Η ειδική περίπτωση όπου

$$q(c) = Ac \implies V(c) = \frac{dq}{dc} = A \quad (3.5.20)$$

οδηγεί βέβαια στη γραμμική εξίσωση

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V(c) \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \implies \frac{\partial c}{\partial t} + A \frac{\partial c}{\partial x} = 0. \quad (3.5.21)$$

Ουσιαστικά πρόκειται για την εξίσωση της μεταγωγής (2.1.59), την επαναλαμβάνουμε

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \quad (3.5.22)$$

εδώ με τη χρήση του συμβόλου  $A$  αντί του  $V$ .

Δυστυχώς όμως η πιο πάνω γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (3.5.21) δεν είναι καθόλου ακριβής, δε συμφωνεί με τα αποτελέσματα των κυκλοφοριακών μετρήσεων σε αυτοκινητόδρομους και επομένως δεν είναι καθόλου αξιόπιστη. Αντίθετα η μη γραμμική εξίσωση (3.5.19) είναι πολύ αξιόπιστη και συνήθως επαρκής για τον Πολιτικό Μηχανικό υπό την προφανή βέβαια προϋπόθεση κυκλοφοριακών μετρήσεων προς καθορισμό των σταθερών  $A, B$  και  $C$  σ' αυτήν.

Τέλος ως μη λησμονήσουμε ότι και η εξίσωση (3.5.19) (και στην αριστερή γενική της μορφή και στη δεξιά ειδική της μορφή) εκφράζει τη διατήρηση των αυτοκινήτων. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με την ακόμη πιο θεμελιώδη και πραγματικά γενική εξίσωση διατηρήσεως (3.5.14), από την οποία προέκυψε η εξίσωση (3.5.19).

Από το αμέσως επόμενο Κεφάλαιο Β4 θα ξεκινήσουμε να περιγράφουμε τις διάφορες διαθέσιμες και ταυτόχρονα αποτελεσματικές μεθόδους για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Ταυτόχρονα θα τις εφαρμόζουμε και σε συγκεκριμένα προβλήματα της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *B4*

## ΓΕΝΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΕ ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετασθούν ορισμένες απλές μέθοδοι ευρέσεως γενικών λύσεων σε συγκεκριμένες ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και με σταθερούς συντελεστές. Στην Ενότητα Β4.1 εκτίθεται η κλασική μέθοδος του d'Alembert για την εύρεση της γενικής λύσεως της ενδιαφέρουσας μονοδιάστατης εξισώσεως του κύματος, που θεωρείται εδώ σαν εξίσωση της χορδής. Πέραν της γενικής λύσεως προσδιορίζεται και η λύση του d'Alembert για το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών στη χορδή. Στην Ενότητα Β4.2 η γενική λύση της εξισώσεως της χορδής, που ήδη βρέθηκε στην Ενότητα Β4.1, τροποποιείται, έτσι ώστε να προσδιορισθεί και η γενική λύση της εξίσου ενδιαφέρουσας διδιάστατης εξισώσεως του Laplace. Διερευνάται επίσης λεπτομερώς η φυσική απαίτηση από μια τέτοια λύση στην πράξη να είναι πραγματική συνάρτηση.

Στην Ενότητα Β4.3 παρουσιάζεται μια ενδιαφέρουσα γενική μέθοδος προσδιορισμού της γενικής λύσεως μιας ειδικής κατηγορίας ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές και με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Η μέθοδος αυτή βασίζεται σε χαρακτηριστική εξίσωση  $p(\mu) = 0$ , όπως περίπου συμβαίνει και στις ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Στην Ενότητα Β4.4 η ίδια ακριβώς μέθοδος γενικεύεται και σε αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως. Η μέθοδος είναι τώρα εφαρμόσιμη (και πραγματικά εφαρμόζεται στην ενότητα αυτή) τόσο στην εξίσωση της χορδής όσο και στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace.

Στην Ενότητα Β4.5 αναφέρεται μια εναλλακτική και κάπως γενικότερη μέθοδος που βασίζεται σε εκθετική αντικατάσταση (ανάλογα με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις). Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται στην εξίσωση των καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού: (α) στην ομογενή εξίσωση (σε ιδιοταλαντώσεις και σε ελεύθερες ταλαντώσεις δοκού) και (β) στη μη ομογενή εξίσωση (σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις δοκού όμως υπό ειδική εκθετική κατανεμημένη φόρτιση).

Τέλος στην Ενότητα Β4.6 η γενική λύση της διδιάστατης διαρμονικής εξισώσεως καθορίζεται μέσω δύο αρμονικών συναρτήσεων, δηλαδή μέσω δύο μερικών λύσεων της εξισώσεως του Laplace.

### Β4.1. ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΧΟΡΔΗΣ: ΛΥΣΗ ΤΟΥ D'ALEMBERT

#### Β4.1.1. Το πρόβλημα αρχικών τιμών

Πρόκειται για μια πολύ ειδική μέθοδο επιλύσεως διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (εύρεση γενικής λύσεως), που οφείλεται στο d'Alembert και είναι εφαρμόσιμη στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος. Εδώ θα εξετασθεί η εξίσωση αυτή στην περίπτωση της ταλαντούμενης (παλλόμενης) χορδής, δηλαδή, απλούστερα, η εξίσωση της χορδής. Αυτή έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \iff \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{με } u = u(x, t). \quad (4.1.1)$$

Η άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή)  $u = u(x, t)$  εκφράζει την εγκάρσια (κάθετη) μετατόπιση των σημείων της χορδής, που δημιουργεί το σχήμα της στις παρούσες ταλαντώσεις. Η ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  δηλώνει τη θέση κατά μήκος της χορδής, ενώ η επίσης ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  το χρόνο. Επίσης το σύμβολο  $c = \sqrt{T/m}$  δηλώνει γνωστή θετική σταθερά με διαστάσεις ταχύτητας. Στη σχέση αυτή για τη σταθερά  $c$  το σύμβολο  $T$  παραστάει τη σταθερή εφελκυστική τάση κατά μήκος της χορδής. (Εδώ πρόκειται ουσιαστικά για δύναμη, π.χ. σε Ν, όχι για τάση, π.χ. σε Pa = N/m<sup>2</sup>, με την έννοια της Μηχανικής των Υλικών.) Επίσης το σύμβολο  $m$  παριστάει τη γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους, π.χ. kg/m) κατά μήκος της χορδής. Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η σταθερά  $c$  έχει διαστάσεις ταχύτητας, m/sec, λαμβάνοντας υπόψη ότι  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{sec}^2$ . Τούτο άλλωστε οφείλει να συμβαίνει, όπως είναι προφανές από την ίδια την εξίσωση της χορδής (4.1.1), που είναι απλά η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος.

Στην ενότητα αυτή θα αγνοηθεί κάθε συνοριακή συνθήκη με τη χορδή να υποτίθεται ότι έχει άπειρο μήκος ( $-\infty < x < \infty$ ). Αντίθετα θα ληφθούν υπόψη οι δύο αρχικές συνθήκες (για  $t = 0$ )

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.1.2)$$

Οι συνθήκες αυτές εκφράζουν: (α) την αρχική (και κάθετη στη χορδή) μετατόπιση των σημείων της χορδής (δηλαδή το αρχικό σχήμα της): η συνάρτηση  $f(x)$ , και (β) την αρχική (και επίσης κάθετη στη χορδή) ταχύτητα των σημείων της: η συνάρτηση  $g(x)$ . Και οι δύο αυτές συναρτήσεις,  $f(x)$  και  $g(x)$ , θεωρούνται γνωστές. Έχουμε επομένως τη διαφορική εξίσωση της χορδής (4.1.1) και τις δύο αρχικές συνθήκες (4.1.2). Και οι τρεις μαζί συνιστούν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.

#### **Β4.1.2. Αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών: απλοποίηση της διαφορικής εξίσωσης**

Για την επίλυση της εξίσωσης της χορδής με την παρούσα μέθοδο του d'Alembert θα μετασχηματίσουμε αρχικά τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (4.1.1) με αλλαγή των ανεξάρτητων μεταβλητών (της θέσεως  $x$  και του χρόνου  $t$ ) της μορφής

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct. \quad (4.1.3)$$

Προσπαθούμε έτσι να φέρουμε την εξίσωση (4.1.1) σε απλούστερη μορφή. (Οι νέες ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι  $\xi$  και  $\eta$ .) Προς το σκοπό αυτό πρέπει να υπολογίσουμε τις δύο πρώτες μερικές παραγώγους (και ως προς τη θέση  $x$  και ως προς το χρόνο  $t$ ) της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$  χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας (ή κανόνα της αλυσιδωτής παραγωγίσεως ή τέλος κανόνα της αλληλουχίας των παραγώγων). Διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\partial \eta}{\partial t} = c. \quad (4.1.4)$$

Στη συνέχεια προσδιορίζουμε τις πρώτες μερικές παραγώγους της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad (4.1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = c \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right). \quad (4.1.6)$$

Διατηρήσαμε πιο πάνω το σύμβολο  $u$  για τη δήλωση της άγνωστης συναρτήσεως και ως προς τις νέες ανεξάρτητες μεταβλητές  $\xi$  και  $\eta$ , αν και μαθηματικά θα ήταν σαφώς ορθότερη η χρήση κάποιου νέου συμβόλου, π.χ. του  $\hat{u}$ . Τότε θα ίσχυει

$$u(x, t) \equiv \hat{u}(\xi, \eta) = \hat{u}(x + ct, x - ct) \quad (4.1.7)$$

λόγω των ορισμών (4.1.3) των νέων μεταβλητών  $\xi$  και  $\eta$ . Πρακτικά όμως η χρήση του ίδιου συμβόλου  $u$  για την άγνωστη συνάρτηση (τόσο με τις αρχικές μεταβλητές  $x$  και  $t$  όσο και με τις

νέες μεταβλητές  $\xi$  και  $\eta$ ) δεν προκαλεί συνήθως σύγχυση και συχνά υιοθετείται. Αυτό γίνεται και εδώ.

Θεωρούμε επίσης (όπως κάνουμε πάντοτε) τις μικτές μερικές παραγώγους της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$  συνεχείς συναρτήσεις, οπότε είναι και ίσες μεταξύ τους. Άρα

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \quad \text{και σε ισοδύναμη γραφή} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi}. \quad (4.1.8)$$

Ανάλογα υπολογίζουμε και τις δεύτερες μερικές παραγώγους (και ως προς  $x$  και ως προς  $t$ ) της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$  χρησιμοποιώντας βέβαια τις εκφράσεις (4.1.5) και (4.1.6) των πρώτων μερικών παραγώγων, τις οποίες μόλις βρήκαμε. Έτσι προκύπτουν οι τύποι

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = c \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ &= c \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} \right] \\ &= c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Ουσιαστικά πρόκειται για ιδιαίτερα απλές παραγωγίσεις, παρόλο που οι παραπάνω τύποι φαίνονται κάπως πολύπλοκοι. Το τελικό αποτέλεσμα θα είναι μάλιστα εντυπωσιακό. Πράγματι, αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα των αμέσως προηγούμενων παραγωγίσεων (4.1.9) και (4.1.10) στην αρχική διαφορική εξίσωση της χορδής (4.1.1), διαπιστώνουμε ευθύς ότι η εξίσωση αυτή μετασχηματίζεται στην ακόλουθη εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{c^2} \left[ c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \right]. \quad (4.1.11)$$

Άμεση απλοποίηση της εξισώσεως αυτής μας δίνει

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = -2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (4.1.12)$$

Επομένως, μεταφέροντας το δεξιό μέλος στο αριστερό και διαιρώντας με το 4, βρίσκουμε τελικά ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (4.1.13)$$

#### B4.1.3. Η γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως και η φυσική ερμηνεία της

Διαπιστώσαμε λοιπόν ότι οι αλλαγές ανεξάρτητων μεταβλητών (4.1.3) μας οδήγησαν σε μια νέα και ιδιαίτερα απλοποιημένη μορφή, την (4.1.13), της αρχικής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους (4.1.1) για τη χορδή που εξετάζουμε. Της νέας αυτής διαφορικής εξισώσεως (4.1.13) η κλειστή γενική λύση (χωρίς ούτε συνοριακές ούτε αρχικές συνθήκες: οι αρχικές συνθήκες (4.1.2) θα ληφθούν υπόψη αργότερα) μπορεί να βρεθεί πάρα πολύ εύκολα. Πραγματικά, γράφοντας λίγο σαφέστερα την τελική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (4.1.13)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (4.1.14)$$

παρατηρούμε ότι η πρώτη μερική παράγωγος  $\partial u / \partial \eta$  (ως προς  $\eta$ ) της άγνωστης συναρτήσεως  $u$  έχει μηδενική μερική παράγωγο ως προς  $\xi$ . Άρα είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή  $\xi$ . Επομένως ισχύει η σχέση

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi_0(\eta), \quad (4.1.15)$$

όπου  $\varphi_0(\eta)$  είναι μια καταρχήν αυθαίρετη συνάρτηση (που διαθέτει όμως συνεχή πρώτη παράγωγο). Με εντελώς ισοδύναμο νόημα αυτό που κάναμε ήταν να έχουμε ήδη ολοκληρώσει τη διαφορική εξίσωση (4.1.14) ως προς  $\xi$  χωρίς να έχουμε βέβαια αμελήσει τη σταθερά ολοκληρώσεως  $\varphi_0$ . Όμως η «σταθερά» αυτή μπορεί ασφαλώς εν προκειμένω (δηλαδή για ολοκλήρωση ως προς  $\xi$ ) να είναι συνάρτηση της δεύτερης ανεξάρτητης μεταβλητής  $\eta$ , γιατί προφανώς  $\partial \varphi_0(\eta) / \partial \xi = 0$ .

Η διαφορική εξίσωση (4.1.15) που προέκυψε είναι πρώτης τάξεως και εξαιρετικά απλή. Απαιτείται μόνο μια ολοκλήρωση, αυτήν τη φορά ως προς  $\eta$ , ώστε να προσδιορισθεί η άγνωστη συνάρτηση  $u$  συναρτήσει των δύο νέων ανεξάρτητων μεταβλητών  $\xi$  και  $\eta$ . Έτσι προκύπτει

$$u = \int \varphi_0(\eta) d\eta + \chi(\xi). \quad (4.1.16)$$

Εδώ η συνάρτηση  $\chi(\xi)$  είναι μια δεύτερη και επίσης καταρχήν αυθαίρετη συνάρτηση που διαθέτει όμως συνεχή δεύτερη παράγωγο. Δηλαδή πρόκειται για τη «σταθερά» ολοκληρώσεως, που μπορεί εντούτοις να είναι συνάρτηση της μεταβλητής  $\xi$ , όχι βέβαια και της μεταβλητής  $\eta$ , ως προς την οποία έγινε η ολοκλήρωση.

Χρησιμοποιώντας μάλιστα τη συνάρτηση  $\varphi(\eta)$ , που ορίζεται σαν η αντιπαράγωγος (σχεδόν ισοδύναμα το αόριστο ολοκλήρωμα) της  $\varphi_0(\eta)$ , δηλαδή

$$\varphi(\eta) = \int \varphi_0(\eta) d\eta, \quad (4.1.17)$$

μπορούμε να γράψουμε τον τελικό τύπο (4.1.16) στη μορφή

$$u = \varphi(\eta) + \chi(\xi). \quad (4.1.18)$$

Με τη βοήθεια των ορισμών (4.1.3) των νέων (και βοηθητικών) μεταβλητών  $\xi$  και  $\eta$  βρίσκουμε ευθύς την τελική γενική λύση

$$u = u(x, t) = \varphi(x - ct) + \chi(x + ct) \quad (4.1.19)$$

της αρχικής διαφορικής εξισώσεως (4.1.1) της χορδής, δηλαδή της μονοδιάστατης εξισώσεως του κύματος. Εδώ βέβαια γίνεται η υπόθεση ότι οι συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\chi$ , που, τονίζεται αυτό, είναι συναρτήσεις μιας μόνο μεταβλητής, όχι δύο, διαθέτουν συνεχείς δεύτερες παραγώγους.

Με τη μέθοδο του d'Alembert, η οποία περιγράφηκε πιο πάνω, οδηγηθήκαμε στην τελική (και γενική) λύση (4.1.19) (λύση του d'Alembert) της εξισώσεως της χορδής (4.1.1). Η λύση αυτή είναι μάλιστα μια πάρα πολύ απλή λύση ως προς τη μορφή της και, επιπλέον, εντελώς γενική. Έτσι μπορεί να ενσωματώσει κάθε αρχική ή συνοριακή συνθήκη μεταπίπτοντας από γενική λύση σε μερική λύση. Στην ενότητα αυτή έχουμε υποθέσει μια άπειρη χορδή και έτσι δε διαθέτουμε συνοριακές συνθήκες. Έχουμε όμως τις αρχικές συνθήκες (4.1.2): αρχική μετατόπιση  $f(x)$  και σχετική με αυτήν αρχική ταχύτητα  $g(x)$ . Σε λίγο θα τις λάβουμε και αυτές υπόψη.

Πριν όμως προχωρήσουμε στην εργασία μας αυτή, καλό είναι να επαληθεύσουμε τη γενική λύση (4.1.19) που προσδιορίσαμε αντικαθιστώντας την στην αρχική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της χορδής (4.1.1), δηλαδή στην εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (4.1.20)$$

Δεν πρέπει επίσης να ξεχνάμε ότι οι αυθαίρετες συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\chi$  υποτίθενται ότι διαθέτουν δεύτερες παραγωγούς. Έτσι με μερικές παραγωγίσεις της γενικής λύσεως (4.1.19) (δύο φορές ως προς  $x$  και ανεξάρτητα και δύο ως προς  $t$ ) προκύπτουν οι εκφράσεις των ζητούμενων παραγωγών:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x - ct) + \chi'(x + ct) \implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x - ct) + \chi''(x + ct), \quad (4.1.21)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c [-\varphi'(x - ct) + \chi'(x + ct)] \implies \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 [\varphi''(x - ct) + \chi''(x + ct)]. \quad (4.1.22)$$

Τώρα διαπιστώνεται άμεσα η ισχύς της διαφορικής εξισώσεως της χορδής (4.1.1) (ή (4.1.20)). Κατά συνέπεια, η επαλήθευση της λύσεως του d'Alembert (4.1.19) είναι πλήρης.

Επίσης, πριν προχωρήσουμε στην εύρεση της μερικής λύσεως που λαμβάνει υπόψη και τις δύο αρχικές συνθήκες (4.1.2), καλό είναι να σημειώσουμε σύντομα και την κλασική φυσική ερμηνεία των συναρτήσεων  $\varphi$  και  $\chi$ . Ξεκινώντας από τη συνάρτηση  $\varphi$ , παρατηρούμε ότι για δύο διαφορετικά σημεία  $x_1$  και  $x_2$  της χορδής και δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_2$ , στην περίπτωση που

$$x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2 \iff c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \text{ με } x_2 \neq x_1, \quad t_2 \neq t_1, \quad c \neq 0, \quad (4.1.23)$$

τότε, προφανώς, και

$$\varphi(x_1 - ct_1) = \varphi(x_2 - ct_2). \quad (4.1.24)$$

Η σχέση αυτή δηλώνει ότι η συνάρτηση  $\varphi$  παριστάνει κύμα που διαδίδεται προς τα δεξιά στην εξεταζόμενη χορδή και έχει σταθερή ταχύτητα  $V = c$ . Εντελώς ανάλογα, θέτοντας απλά  $-c$  αντί του  $c$  στις παραπάνω σχέσεις (4.1.23), διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση  $\chi$  εκφράζει κύμα που διαδίδεται προς τα αριστερά στην ίδια χορδή και έχει σταθερή ταχύτητα  $V = -c$ . Επομένως η πλήρης πιο πάνω γενική λύση (4.1.19) εκφράζει και τα δύο αυτά κύματα: και το προς τα δεξιά: συνάρτηση  $\varphi$ , και το προς τα αριστερά: συνάρτηση  $\chi$ . Τα κύματα αυτά διαδίδονται κατά μήκος της χορδής με ταχύτητες  $V_{\varphi, \chi} = \pm c$  αντίστοιχα.

#### B4.1.4. Η λύση του d'Alembert του προβλήματος αρχικών τιμών

Προχωράμε τώρα στην εύρεση της μερικής λύσεως  $u_p(x, t)$  της παρούσας διαφορικής εξισώσεως της χορδής (4.1.1) που να πληροί και τις δύο αρχικές συνθήκες (4.1.2), δηλαδή τις συνθήκες

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (4.1.25)$$

για την αρχική εγκάρσια (κάθετη) μετατόπιση  $f(x)$  και την ταχύτητα μεταβολής της  $g(x)$  αντίστοιχα.

Προς το σκοπό αυτό αρκεί ως προς την πρώτη μεν αρχική συνθήκη να θέσουμε απλά  $t = 0$  στη λύση του d'Alembert  $u = u(x, t)$  που ήδη βρήκαμε (εξίσωση (4.1.19)) εξισώνοντας το αποτέλεσμα  $u(x, 0)$  με τη γνωστή συνάρτηση  $f(x)$ . Η συνάρτηση αυτή  $f(x)$  εκφράζει το αρχικό σχήμα της ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής, ισοδύναμα την εγκάρσια, την κάθετη μετατόπιση των σημείων της. Τότε έχουμε από τη λύση (4.1.19)

$$u(x, 0) = \varphi(x) + \chi(x) = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.1.26)$$

Ως προς τη δεύτερη αρχική συνθήκη (4.1.25) παραγωγίζουμε τώρα καταρχήν την ίδια γενική λύση (4.1.19) ως προς το χρόνο  $t$ . Η πρώτη μερική αυτή παράγωγος έχει προφανώς τη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c [-\varphi'(x - ct) + \chi'(x + ct)]. \quad (4.1.27)$$

Θέτουμε τώρα  $t = 0$  στη μερική αυτή παράγωγο και εξισώνουμε το αποτέλεσμα με την αρχική (εγκάρσια) ταχύτητα  $g(x)$  των σημείων της ταλαντούμενης χορδής. Αμέσως βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = c [-\varphi'(x) + \chi'(x)] = g(x). \quad (4.1.28)$$

Με αόριστη ολοκλήρωση της σχέσεως αυτής ως προς τη θέση  $x$ , ξεκινώντας από μια τυχαία (και χωρίς σημασία) θέση  $x_0$ , και με διαίρεση δια της θετικής σταθεράς  $c$ , διαπιστώνουμε επίσης ότι

$$-\varphi(x) + \chi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(s) ds + K. \quad (4.1.29)$$

Στη σχέση αυτή το σύμβολο  $K$  δηλώνει τη σταθερά ολοκλήρωσης. Η μεταβλητή ολοκλήρωσης στο παραπάνω αόριστο ολοκλήρωμα δηλώθηκε με το νέο σύμβολο  $s$ . Έτσι αποφεύγεται η σύγχυση με τη μεταβλητή  $x$ , που είναι το άνω όριο ολοκλήρωσης στο πιο πάνω αόριστο ολοκλήρωμα.

Οι σχέσεις (4.1.26) (δεξιά ισότητα) και (4.1.29) αποτελούν ένα απλό σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων ως προς τις δύο άγνωστες συναρτήσεις  $\varphi(x)$  και  $\chi(x)$ . Η λύση του συστήματος αυτού προκύπτει εύκολα (αφαιρώντας και προσθέτοντας τις εξισώσεις αυτές) ως εξής:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left[ f(x) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(s) ds - K \right], \quad (4.1.30)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{2} \left[ f(x) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^x g(s) ds + K \right]. \quad (4.1.31)$$

Με γνωστές πλέον (εκπεφρασμένες συναρτήσεις των αρχικών συνθηκών  $f(x)$  και  $g(x)$ ) τις δύο αρχικά αυθαίρετες συναρτήσεις  $\varphi(x)$  και  $\chi(x)$ , αρκεί πια η αντικατάστασή τους στη γενική λύση (4.1.19). Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει η αντίστοιχη μερική λύση  $u_p(x, t)$  της εξίσωσης της χορδής (4.1.1), η οποία πληροί και τις αρχικές συνθήκες (4.1.2) (ή (4.1.25)). Η λύση αυτή  $u_p(x, t)$  λόγω των σχέσεων (4.1.30) και (4.1.31), που μόλις βρέθηκαν, είναι προφανώς η εξής:

$$u_p(x, t) = \frac{1}{2} \left[ f(x - ct) - \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x-ct} g(s) ds - K + f(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x_0}^{x+ct} g(s) ds + K \right]. \quad (4.1.32)$$

Εύκολα διαπιστώνεται (με αντικατάσταση των δύο ολοκληρωμάτων της συναρτήσεως  $g(s)$  από ένα μόνο ολοκλήρωμα) ότι η ίδια μερική λύση  $u_p(x, t)$  μπορεί να γραφεί και στην τελική της μορφή

$$u_p(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \quad (4.1.33)$$

Στη μορφή αυτή δεν εμφανίζεται πλέον το κάτω όριο ολοκλήρωσης  $x_0$ . Αυτή είναι η διάσημη λύση του d'Alembert του προβλήματος αρχικών τιμών (4.1.1) και (4.1.2) για την εξίσωση της ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής, που θεωρήθηκε εδώ ότι έχει άπειρο μήκος:  $-\infty < x < \infty$ .

#### B4.1.5. Μια απλή εφαρμογή

Σαν μια απλή εφαρμογή, ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση όπου η αρχική εγκάρσια ταχύτητα  $g(x)$  των σημείων της χορδής είναι μηδενική (η ταλάντωση της χορδής ξεκινά από την ηρεμία), ενώ το αρχικό σχήμα της έχει τη μορφή

$$f(x) = d_0 \exp \left[ - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right]. \quad (4.1.34)$$

Τα σύμβολα  $d_0$  και  $L$  παριστάνουν γνωστές σταθερές με διαστάσεις μήκους και  $\exp$  είναι η γνωστή εκθετική συνάρτηση (exponential function με  $\exp y \equiv e^y$ ). Τώρα η παραπάνω λύση  $u_p(x, t)$  (σχέση (4.1.33)) θα πάρει τη μορφή

$$u_p(x, t) = \frac{d_0}{2} \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{x - ct}{L} \right)^2 \right] + \exp \left[ - \left( \frac{x + ct}{L} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.1.35)$$

Επειδή όμως

$$(x \mp ct)^2 = x^2 + c^2 t^2 \mp 2ctx, \quad (4.1.36)$$

επίσης δε εξ ορισμού

$$\cosh y = \frac{\exp y + \exp(-y)}{2}, \quad (4.1.37)$$

η λύση (4.1.35) γράφεται και στη λίγο απλούστερη τελική της μορφή

$$u_p(x, t) = d_0 \exp\left(-\frac{x^2 + c^2 t^2}{L^2}\right) \cosh\left(\frac{2ctx}{L^2}\right). \quad (4.1.38)$$

Η λύση αυτή, όπως άμεσα παρατηρούμε στην τελική μορφή της: την (4.1.38), είναι βέβαια μια άρτια συνάρτηση της θέσεως  $x$  κατά μήκος της χορδής (επειδή  $\forall y \cosh(-y) = \cosh y$ ). Ακριβώς το ίδιο συνέβαινε και με το αρχικό σχήμα της χορδής  $f(x)$ , όπως το υποθέσαμε (σχέση (4.1.34)).

Ας σημειωθεί τέλος ότι ο δείκτης  $p$  στη πιο πάνω μερική (ή ειδική) λύση  $u_p(x, t)$  ασφαλώς θα μπορούσε να είχε παραλειφθεί. Αυτό είναι δυνατό με θεώρηση της λύσεως αυτής (4.1.33) σαν λύσεως του προβλήματος αρχικών τιμών (4.1.1) και (4.1.2): της μοναδικής του μάλιστα λύσεως. Αντίθετα ο ίδιος δείκτης  $p$  τέθηκε θεωρώντας την ίδια ακριβώς λύση (4.1.33) σαν τη μερική (ή ειδική) λύση της διαφορικής εξίσωσης της ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής (4.1.1) που προέκυψε από τη γενική λύση της  $u(x, t)$  (σχέση (4.1.19)) υπό τις αρχικές συνθήκες (4.1.2). Φυσικά η λεπτή αυτή διάκριση στο χαρακτηρισμό της λύσεως (4.1.33) είναι εντελώς επουσιώδης.

## B4.2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE

### B4.2.1. Η γενική λύση της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace

Όπως είναι γνωστό, η εξίσωση του Laplace παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό. Αρκετές σχετικές εφαρμογές της έχουμε ήδη αναφέρει στην Παράγραφο Β2.1.1 του Κεφαλαίου Β2. Η διδιάστατη μορφή της στις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$  είναι η (2.1.1), την επαναλαμβάνουμε και εδώ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (4.2.1)$$

με ανεξάρτητες μεταβλητές τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$  και  $y$ . Η μορφή αυτή μπορεί να θεωρηθεί μαθηματικά (όχι φυσικά) σαν μια κάπως ειδική περίπτωση της μονοδιάστατης εξίσωσης του κύματος (εξίσωσης της χορδής) (4.1.1) στην προηγούμενη Ενότητα Β4.1, δηλαδή της εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (4.2.2)$$

Πρέπει τώρα να τεθεί απλά  $c = -i$  (ή  $c = i$  με  $i$  τη φανταστική μονάδα:  $i = \sqrt{-1}$ ), οπότε  $c^2 = i^2 = -1$ , και επίσης να αντικατασταθεί ο χρόνος  $t$  από την Καρτεσιανή συντεταγμένη (την τετμημένη)  $y$ . Τότε η εξίσωση της χορδής (4.2.2) μεταπίπτει στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (4.2.1). Αρκεί επομένως να επαναληφθεί η διαδικασία του προηγούμενου Εδαφίου Β4.1 με  $c = -i$  (ή  $c = i$ ) ή, απλούστερα, να τεθεί  $c = -i$  στην τελική λύση (4.1.19) της εξίσωσης της χορδής (4.2.2). Τότε προκύπτει η εξής γενική λύση  $u(x, y)$  της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace (4.2.1):

$$u = u(x, y) = \varphi(x + iy) + \chi(x - iy). \quad (4.2.3)$$

Οι λύσεις  $u$  της διδιάστατης και της τριδιάστατης εξίσωσης του Laplace καλούνται **αρμονικές συναρτήσεις**. Έτσι κι αλλιώς αυτή η λύση (4.2.3) μπορεί εύκολα να επαληθευθεί με τις κατάλληλες μερικές παραγωγίσεις. Πιο συγκεκριμένα υπολογίζουμε τις πρώτες και τις δεύτερες μερικές παραγωγούς της πιο πάνω συναρτήσεως  $u = u(x, y)$  τόσο ως προς  $x$  όσο και ως προς  $y$ . Προκύπτει έτσι ότι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x + iy) + \chi'(x - iy) \implies \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x + iy) + \chi''(x - iy), \quad (4.2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = i[\varphi'(x + iy) - \chi'(x - iy)] \implies \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -[\varphi''(x + iy) + \chi''(x - iy)] \quad (4.2.5)$$

απολύτως ανάλογα με την προηγούμενη Ενότητα Β4.1 για την εξίσωση της χορδής (4.1.1). Στη συνέχεια για την επαλήθευση αρκεί απλά να αντικαταστήσουμε τις δεύτερες μερικές παραγωγούς (4.2.4) και (4.2.5) στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (4.2.1).

#### **Β4.2.2. Πραγματικές λύσεις της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace**

Μαθηματικά όλα είναι πλέον εντάξει, αλλ' από φυσικής απόψεως υπάρχει ένα σημαντικό πρόβλημα. Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στο ότι λόγω της παρουσίας της φανταστικής μονάδας  $i = \sqrt{-1}$  στην παρούσα λύση (4.2.3) της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace (4.2.1), η λύση αυτή, γενικά μιλώντας, δεν είναι πραγματική, αλλ' είναι συνήθως μιγαδική. Όμως αυτό είναι οχληρό ή μάλλον απαράδεκτο για τον Πολιτικό Μηχανικό, ο οποίος θέλει τα φυσικά μεγέθη του να είναι πραγματικά. Παραδείγματος χάρη, η θερμοκρασία  $u(x, y)$  είναι πάντοτε πραγματική συνάρτηση. Όπως είναι γνωστό, στο στατικό (και χωρίς πηγές θερμότητας) θερμοκρασιακό πρόβλημα (δηλαδή στη μόνιμη διδιάστατη κατάσταση) μέσα σε μια διδιάστατη περιοχή  $D$  η θερμοκρασία  $u(x, y)$  επαληθεύει επίσης την εξίσωση του Laplace (4.2.1). Άρα είναι απόλυτα αναγκαίο να περιορισθεί σε πραγματικές συναρτήσεις η γενικότητα της λύσεως (4.2.3) για την αρμονική συνάρτηση  $u(x, y)$ .

Τούτο επιτυγχάνεται πάρα πολύ εύκολα, αρκεί οι συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\chi$  στη λύση (4.2.3) να είναι και οι δύο πραγματικές και ίσες, δηλαδή

$$\varphi = \chi. \quad (4.2.6)$$

Αυτό όμως δεν είναι επιθυμητό, γιατί έτσι περιορίζεται υπερβολικά η γενικότητα της λύσεως  $u(x, y)$ . Εναλλακτική και πλήρως αποδεκτή δυνατότητα είναι, στην περίπτωση που οι συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\chi$  δεν είναι πραγματικές, αλλ' είναι μιγαδικές, να είναι τουλάχιστον συζυγείς μιγαδικές, δηλαδή

$$\varphi = \bar{\chi} \iff \chi = \bar{\varphi}. \quad (4.2.7)$$

Έτσι κάθε φορά που θα παρουσιάζεται η φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  στον πρώτο όρο  $\varphi(x + iy)$  της λύσεως (4.2.3), θα παρουσιάζεται με αρνητικό πρόσημο (δηλαδή σαν  $-i$ ) και στο δεύτερο όρο  $\chi(x - iy)$  της ίδιας λύσεως. Ακριβώς αυτό ήδη συμβαίνει στο όρισμα του όρου αυτού, που είναι  $x - iy$ , δηλαδή στο όρισμα της συναρτήσεως  $\chi$ , αντί του  $x + iy$  στο όρισμα της συναρτήσεως  $\varphi$ .

Επομένως η γενική πραγματική λύση της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace (4.2.1) έχει την εξής μορφή με  $\chi = \bar{\varphi}$  στη λύση (4.2.3):

$$u = u(x, y) = \varphi(x + iy) + \bar{\varphi}(x - iy) = 2 \operatorname{Re} [\varphi(x + iy)]. \quad (4.2.8)$$

Χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο  $\operatorname{Re}$  για το πραγματικό μέρος (real part,  $\operatorname{Re}$  ή  $\Re$ ), που είναι και αυτό ισοδύναμο σύμβολο) μιας μιγαδικής ποσότητας. Το σύμβολο αυτό θα το συναντήσουμε εκτενέστερα στις Εφαρμοσμένες Μιγαδικές Συναρτήσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς (που αποτελούν επίσης μέρος του μαθήματος Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III) στο Μέρος Δ αυτών των διδακτικών βιβλίων.

#### **Β4.2.3. Παράδειγμα πραγματικής λύσεως της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace**

Σαν ένα πολύ απλό παράδειγμα ας θεωρήσουμε τις συναρτήσεις της μεταβλητής  $w$

$$\varphi = \varphi(w) = w^2 + 2iw + 3 \quad \text{και} \quad \chi = \chi(w) = w^2 - 2iw + 3. \quad (4.2.9)$$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι προφανώς συζυγείς μιγαδικές συναρτήσεις, επειδή η δεύτερη, η  $\chi$ , προκύπτει θέτοντας  $-i$  στη θέση του  $i$  της πρώτης, της  $\varphi$ . Τότε  $\chi = \bar{\varphi}$  ή αντίστροφα, αλλ' ισοδύναμα,  $\varphi = \bar{\chi}$ . Για τις ειδικές αυτές συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\chi$  η λύση  $u(x, y)$  της εξίσωσης του Laplace στη σχέση (4.2.3) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} u = u(x, y) &= \varphi(x + iy) + \chi(x - iy) \\ &= [(x + iy)^2 + 2i(x + iy) + 3] + [(x - iy)^2 - 2i(x - iy) + 3]. \end{aligned} \quad (4.2.10)$$



Αυτή η μορφή μας δίνει εύκολα σαν αποτέλεσμα την αρμονική συνάρτηση

$$u(x, y) = 2(x^2 - y^2) - 4y + 6. \quad (4.2.11)$$

Η συνάρτηση αυτή  $u(x, y)$  είναι ασφαλώς μια πραγματική συνάρτηση και μάλιστα διδιάστατη αρμονική συνάρτηση και λύση της εξίσωσης του Laplace (4.2.1). Αυτό διαπιστώνεται πάρα πολύ εύκολα μετά τις σχετικές απλές μερικές παραγωγίσεις. Επομένως η συνάρτηση αυτή  $u(x, y)$  θα μπορούσε ίσως να παριστάνει: (α) τη θερμοκρασία (θερμοκρασιακή κατανομή  $u(x, y)$ ) σε μόνιμο (στατικό) επίπεδο θερμοκρασιακό πρόβλημα στη Μετάδοση Θερμότητας (ή Διάδοση Θερμότητας) ή (β) το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi$  ή τη ροϊκή συνάρτηση  $\Psi$  σε μόνιμη επίπεδη ροή ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική ή (γ) το άθροισμα των κυρίων τάσεων  $s = \sigma_x + \sigma_y$  σε επίπεδο ελαστικό πρόβλημα στην Επίπεδη Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών, κλπ. Βέβαια όλα αυτά θα μπορούσαν να ισχύουν μόνο υπό τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Αυτές όμως δε μας απασχόλησαν στη γενική πραγματική λύση (4.2.8) της εξίσωσης του Laplace (4.2.1), που μόλις προσδιορίσαμε. Εντούτοις θα μας απασχολήσουν εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια.

### B4.3. ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΓΙΑ ΕΙΔΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

#### B4.3.1. Προσδιορισμός της λύσεως μέσω χαρακτηριστικής εξίσωσης

Η ιδιαίτερα στοιχειώδης αυτή μέθοδος αφορά μόνο σε ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές και μάλιστα με την άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x, y)$  υπό τη μορφή μόνο μερικών παραγώγων και, επιπλέον, με όλες τις μερικές παραγώγους της ίδιας τάξεως. Θα την επιδείξουμε σε απλές εξισώσεις πρώτης τάξεως (στην Ενότητα αυτή B4.3) και δευτέρας τάξεως (στην επόμενη Ενότητα B4.4). Πρόκειται για μια ιδιαίτερα εξειδικευμένη μέθοδο επιλύσεως πολύ ειδικών περιπτώσεων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, αλλά συνάμα και πολύ χρήσιμη σε ορισμένες περιπτώσεις.

Θεωρούμε την ακόλουθη γενική ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως και με σταθερούς συντελεστές:

$$A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (4.3.1)$$

Στην εξίσωση αυτή οι συντελεστές  $A$  και  $B$  υποτίθενται σταθεροί και διάφοροι του μηδενός ( $A \neq 0$  και  $B \neq 0$ ), η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η  $u = u(x, y)$  και οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι  $x$  και  $y$ . Στην τόσο απλή αυτή εξίσωση υποθέτουμε λύση της μορφής

$$u(x, y) = \varphi(x + \mu y). \quad (4.3.2)$$

Η συνάρτηση  $\varphi(x + \mu y) = \varphi(s)$  θεωρείται παραγωγίσιμη συνάρτηση της μιας μεταβλητής  $s$  με

$$s = x + \mu y, \quad \text{οπότε προφανώς} \quad \frac{\partial s}{\partial x} = 1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial s}{\partial y} = \mu. \quad (4.3.3)$$

Η σταθερά  $\mu$  στη λύση (4.3.2) που υποθέσαμε και στη μεταβλητή  $s = x + \mu y$  δεν είναι προς το παρόν γνωστή. Όμως θα προσδιορισθεί εύκολα με τη βοήθεια πρωτοβάθμιας χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_1(\mu) = 0$ , ισοδύναμα μέσω χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_1(\mu)$  ίσου με το μηδέν.

Πραγματικά, παραγωγίζοντας την πιθανή λύση (4.3.2) που έχουμε υποθέσει τόσο ως προς  $x$  όσο και ως προς  $y$ , διαπιστώνουμε με χρήση και του γνωστού μας κανόνα της αλυσίδας (ή κανόνα της αλυσιδωτής παραγωγίσεως ή τέλος κανόνα της αλληλουχίας των παραγώγων) ότι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{\partial s}{\partial x} = \varphi'(s) \cdot 1 = \varphi'(s) = \varphi'(x + \mu y), \quad (4.3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{d\varphi}{ds} \frac{\partial s}{\partial y} = \varphi'(s) \cdot \mu = \mu \varphi'(s) = \mu \varphi'(x + \mu y). \quad (4.3.5)$$

Σημειώνουμε και πάλι ότι η συνάρτηση  $\varphi$  είναι συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής (έστω της  $s$ ), όχι δύο. Άρα χρησιμοποιούμε για τις παραγώγους της (όπως τη  $\varphi'$ ) το σύμβολο της συνήθους παραγωγίσεως  $d$  και όχι εκείνο της μερικής παραγωγίσεως  $\partial$ .

Αντικαθιστώντας τώρα τις μερικές παραγώγους (4.3.4) και (4.3.5) στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (4.3.1) που θέλουμε να επιλύσουμε, βρίσκουμε άμεσα ότι

$$A\varphi'(x + \mu y) + B\mu\varphi'(x + \mu y) = 0 \implies (A + B\mu)\varphi'(x + \mu y) = 0. \quad (4.3.6)$$

Προφανώς η παράγωγος  $\varphi'(x + \mu y)$  δε μπορεί να είναι εκ ταυτότητας ίση με το μηδέν σε μια μη τετριμμένη λύση  $\varphi(x + \mu y) \not\equiv C$  (με το σύμβολο  $C$  να δηλώνει απλά σταθερά). Άρα πρέπει οπωσδήποτε ο όρος  $A + B\mu$  να είναι αυτός ίσος με το μηδέν. Έτσι θα ισχύει η διαφορική εξίσωση (4.3.1). Προκύπτει επομένως μια πρωτοβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση  $p_1(\mu) = 0$ , η εξής:

$$p_1(\mu) = A + B\mu \equiv B\mu + A = 0 \implies \mu = \mu_1 = -\frac{A}{B}. \quad (4.3.7)$$

Αφού έχουμε ήδη υποθέσει ότι είναι  $A \neq 0$  και  $B \neq 0$ , η μοναδική λύση της εξισώσεως αυτής είναι φυσικά η πιο πάνω:  $\mu = \mu_1 = -A/B$ .

Άρα η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (4.3.1) έχει σαν λύση της κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση της μορφής (4.3.2) με  $\mu = \mu_1 = -A/B$ , δηλαδή

$$u(x, y) = \varphi(x + \mu_1 y) = \varphi(x - (A/B)y) = \varphi^*(Bx - Ay), \quad \text{όπου τέθηκε } \varphi^*(s) := \varphi(s/B), \quad (4.3.8)$$

με πολλαπλασιασμό της μεταβλητής  $x - (A/B)y$  επί  $B$ . Με τον τρόπο αυτό δεν εμφανίζεται στο τέλος, στη συνάρτηση  $\varphi^*(Bx - Ay)$ , ο παρονομαστής  $B$ . Αποδεικνύεται μάλιστα ότι η λύση αυτή  $u = u(x, y)$  είναι η γενική λύση της ειδικής μορφής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους (4.3.1) που εξετάζουμε. Άρα κάθε αυθαίρετη συνάρτηση  $\varphi^* = \varphi^*(s)$  που διαθέτει όμως συνεχή πρώτη παράγωγο δίνει και από μία λύση της εξισώσεως (4.3.1): συγκεκριμένα τη λύση (4.3.8).

Όπως διαπιστώσαμε, η μέθοδος αυτή καταλήγει στη χαρακτηριστική εξίσωση  $p_1(\mu) = 0$ , σχεδόν ισοδύναμα στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $p_1(\mu)$  στο αριστερό μέλος της χαρακτηριστικής εξισώσεως. Παρουσιάζει επομένως κάποια αναλογία με την ασφαλώς πολύ γενικότερη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p(\mu) = 0$  ή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p(\mu)$  στις ομογενείς γραμμικές συνήθειες διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Στην επόμενη Ενότητα B4.4 θα γενικεύσουμε την ίδια μέθοδο σε αντίστοιχες γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως.

### B4.3.2. Εφαρμογή στην εξίσωση της μεταγωγής

Σαν εφαρμογή της ειδικής αυτής μεθόδου της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_1(\mu) = 0$  θεωρούμε την εξίσωση της μεταγωγής (2.1.47) ρύπου (και γενικότερα οποιασδήποτε ουσίας) σε υδατόρρευμα στην Περιβαλλοντική Υδραυλική. Η εξίσωση αυτή είναι η εξής:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \iff V \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0 \quad (4.3.9)$$

με  $c = c(x, t)$  τη συγκέντρωση της του ρύπου και  $V$  την ταχύτητα του νερού (του ύδατος) στο υδατόρρευμα. Την ταχύτητα  $V$  την υποθέτουμε σταθερή. Υποθέτουμε επίσης ότι δεν υπάρχει ούτε δημιουργία ούτε αποβολή ούτε αποδόμηση (χημική καταστροφή) του ρύπου, αλλ' ούτε και διάχυσή του στο νερό. Απλά η κίνησή του οφείλεται αποκλειστικά στην κίνηση του νερού με ταχύτητα  $V$ . Επομένως πρόκειται για απλή μεταγωγή του ρύπου λόγω της κινήσεως του νερού στο υδατόρρευμα με ταχύτητα  $V$ .

Η εξίσωση (4.3.9) (προτιμάται η δεύτερη μορφή της) είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως ακριβώς της μορφής (4.3.1) με  $A = V$  και  $B = 1$ .

Η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η θέση  $x$  κατά μήκος του υδατορρέυματος και ο χρόνος  $t$ . Υποθέτουμε λύση της εξίσωσης (4.3.9) της μορφής (4.3.2), εν προκειμένω

$$c(x, t) = \varphi(x + \mu t) \quad (4.3.10)$$

τώρα με ανεξάρτητη μεταβλητή την  $t$  αντί της  $y$ . Αντικαθιστώντας τις δύο πρώτες μερικές παραγωγούς της στην εξίσωση της μεταγωγής (4.3.9) (έστω στην πρώτη μορφή της), βλέπουμε ότι

$$\mu \varphi'(x + \mu t) + V \varphi'(x + \mu t) = 0 \implies (\mu + V) \varphi'(x + \mu t) = 0. \quad (4.3.11)$$

Τώρα η πρωτοβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση  $\rho_1(\mu) = 0$  παίρνει στο παρόν πρόβλημα τη μορφή

$$\rho_1(\mu) = \mu + V = V + \mu = 0 \implies \mu = \mu_1 = -V. \quad (4.3.12)$$

Προφανώς η μοναδική λύση της είναι η  $\mu = \mu_1 = -V$ . Άρα η λύση της εξίσωσης της μεταγωγής (4.3.9) παίρνει τελικά τη μορφή

$$c = c(x, t) = \varphi(x - Vt). \quad (4.3.13)$$

Αυτό διαπιστώνεται αμέσως από τη σχέση (4.3.10). Το ότι η σχέση (4.3.13) αποτελεί λύση της εξίσωσης της μεταγωγής (4.3.9) μπορεί και άμεσα να επαληθευθεί απλά με αντικατάσταση της λύσεως αυτής (4.3.13) στην εξίσωση της μεταγωγής (4.3.9).

Εξάλλου από φυσικής απόψεως η λύση (4.3.13) είναι προφανής, αν σκεφθούμε ότι ο ρύπος απλά κινείται μαζί με το νερό στο υδατόρρευμα, αλλά δεν κινείται σχετικά με αυτό. Άρα η μεταβλητή  $s = x - Vt$  που παρουσιάζεται στη λύση (4.3.13) είναι εύλογη και αναμενόμενη. Δεν υπάρχει επίσης ούτε παραγωγή ούτε αποβολή ούτε αποδόμηση αλλ' ούτε και διάχυση του ρύπου. Επομένως ένας έμπειρος Πολιτικός Μηχανικός και γνώστης βέβαια των φυσικών φαινομένων θα μπορούσε ίσως να είχε μαντέψει τη λύση αυτή (4.3.13) χωρίς να καταφύγει σε μερικές παραγωγίσεις και στη χαρακτηριστική εξίσωση  $\rho_1(\mu) = \mu + V = 0$ .

Κατά κάποιον τρόπο η πιο πάνω λύση (4.3.13) είναι ανάλογη με την πρώτη αυθαίρετη συνάρτηση  $\varphi = \varphi(x - ct)$  στη γενική λύση (4.1.19) της μονοδιάστατης εξίσωσης του κύματος (της εξίσωσης της χορδής) (4.1.1) παρά το διαφορετικό συμβολισμό για την ταχύτητα: εδώ με  $V$  αντί για  $c$  στη λύση (4.1.19). Η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (4.1.1) είναι όμως δευτέρας τάξεως. Επομένως η γενική λύση της (4.1.19) περιέχει δύο αυθαίρετες (αλλά παραγωγίσιμες δύο φορές) συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\chi$ . Αντίθετα εδώ η εξίσωση της μεταγωγής (4.3.9) είναι πρώτης τάξεως. Άρα η λύση της (4.3.13) είναι εύλογο να περιέχει μόνο μία αυθαίρετη (και πάλι παραγωγίσιμη, αλλά τώρα μία φορά μόνο αρκεί) συνάρτηση  $\varphi$ . Εν πάση περιπτώσει, η λύση (4.3.13) μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει ένα απλό κύμα που διαδίδεται με το χρόνο  $t$  κατά τις αύξουσες τιμές της θέσεως  $x$ , δηλαδή προς την εκβολή του υδατορρέυματος. Αντίθετα η λύση (4.1.19) μπορεί να θεωρηθεί ότι εκφράζει δύο κύματα που διαδίδονται με το χρόνο  $t$ : (α) το πρώτο κατά τις αυξανόμενες τιμές της θέσεως  $x$  (δηλαδή προς τα δεξιά), ενώ (β) το δεύτερο κατά τις μειούμενες τιμές της θέσεως  $x$  (δηλαδή προς τα αριστερά). Τα δύο αυτά κύματα έχουν μάλιστα την ίδια κατά μέτρο ταχύτητα  $c$ .

#### B4.3.3. Γενικότητα της λύσεως της εξίσωσης της μεταγωγής

Η τόσο απλή λύση (4.3.13):  $c(x, t) = \varphi(x - Vt)$  της εξίσωσης της μεταγωγής (4.3.9), την οποία βρήκαμε πιο πάνω, είναι πραγματικά η γενική λύση της. Για την απόδειξη αυτού του μάλλον προφανώς ισχυρισμού μπορούμε να εργασθούμε με τη μέθοδο της Ενότητας B4.1, την οποία ήδη χρησιμοποιήσαμε για την εξίσωση της χορδής, λύνοντας τώρα την εξίσωση της μεταγωγής (4.3.9) με αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών. Από τη μορφή  $c(x, t) = \varphi(x - Vt)$  της λύσεως (4.3.13) που προσδιορίσαμε, συμπεραίνουμε ότι κατάλληλες αλλαγές ανεξάρτητων μεταβλητών είναι οι εξής:

$$\xi = x - Vt, \quad \tau = t. \quad (4.3.14)$$

Επομένως ουσιαστική αλλαγή μεταβλητής είναι μόνο η πρώτη:  $\xi = x - Vt$ . Είναι και εύλογη βέβαια από φυσικής απόψεως. Τούτο συμβαίνει, επειδή το νερό στο υδατόρρευμα κινείται με σταθερή ταχύτητα  $V$ . Τότε και η ο ρύπος κινείται με ακριβώς την ίδια ταχύτητα  $V$  και μάλιστα χωρίς διάχυση, όπως ήδη έχουμε υποθέσει. Άρα καλό είναι και ο Πολιτικός Μηχανικός που παρατηρεί το φαινόμενο της μεταγωγής αυτής να κινείται και αυτός κατά μήκος του υδατορρεύματος με την ίδια ταχύτητα  $V$ , που είναι σταθερή με το χρόνο  $t$  (εννοείται προς την εκβολή του υδατορρεύματος). Έτσι τη χρονική στιγμή  $t$  ο Πολιτικός Μηχανικός θα βρίσκεται στη θέση  $\xi = x - Vt$ , ακριβώς όπως δηλώνει η πρώτη αλλαγή μεταβλητής (4.3.14). Η δεύτερη αλλαγή μεταβλητής  $\tau = t$  είναι εντελώς βοηθητική (απλά χρήσιμη στις παραγωγίσεις), όχι ουσιαστική.

Εργαζόμαστε τώρα ανάλογα με την Παράγραφο Β4.1.2 για την εξίσωση της χορδής. Και εκεί έγινε αλλαγή μεταβλητών (με λίγο διαφορετικά όμως σύμβολα). Έτσι καταρχήν από τις αλλαγές μεταβλητών (4.3.14) βρίσκουμε πάρα πολύ εύκολα τις πρώτες μερικές παραγωγούς των νέων μεταβλητών  $\xi$  και  $\tau$  ως προς τις αρχικές μεταβλητές  $x$  και  $t$ . Προκύπτουν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = -V, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = 1. \quad (4.3.15)$$

Γράφουμε τώρα την άγνωστη συνάρτηση  $c(x, t)$  (τη συγκέντρωση του ρύπου στο υδατόρρευμα) και στην ισοδύναμη μορφή της  $\hat{c}(\xi, \tau)$  απλά με τη χρήση των νέων μεταβλητών  $\xi$  και  $\tau$ . Τότε έχουμε

$$\hat{c}(\xi, \tau) \equiv \hat{c}(x - Vt, t) \equiv c(x, t) \quad (4.3.16)$$

λόγω των αλλαγών μεταβλητών (4.3.14). Έτσι αποφεύγουμε κάθε περίπτωση συγχύσεως.

Σκοπό μας αποτελεί η αντικατάσταση των αρχικών ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$  και  $t$  από τις νέες  $\xi$  και  $\tau$  στη διαφορική εξίσωση της μεταγωγής (4.3.9), την επαναλαμβάνουμε

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = 0. \quad (4.3.17)$$

Για να πετύχουμε το σκοπό αυτό, εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσιδωτής παραγωγίσεως (ή της αλληλουχίας των παραγώγων) στην άγνωστη συνάρτηση  $c(x, t)$ . Μετά την αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών η άγνωστη συνάρτηση  $c(x, t)$  δηλώνεται με το νέο σύμβολο  $\hat{c}(\xi, \tau)$ , όπως είδαμε στη σχέση (4.3.16). Με τον τρόπο αυτό και με βάση τις πρώτες μερικές παραγωγούς (4.3.15), που προ ολίγου υπολογίσαμε, διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{c}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial \hat{c}}{\partial \tau} \cdot 0 = \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi}, \quad (4.3.18)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \hat{c}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} \cdot (-V) + \frac{\partial \hat{c}}{\partial \tau} \cdot 1 = -V \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{c}}{\partial \tau}. \quad (4.3.19)$$

Απομένει τώρα η αντικατάσταση των δύο αυτών πρώτων μερικών παραγώγων στην πιο πάνω εξίσωση της μεταγωγής (4.3.17). Έτσι προκύπτει

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = 0 \implies \left( -V \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{c}}{\partial \tau} \right) + V \frac{\partial \hat{c}}{\partial \xi} = 0. \quad (4.3.20)$$

Άρα με την προφανή απλοποίηση των αντίστοιχων όρων (αυτών που έχουν συντελεστές την ταχύτητα  $V$ ) παίρνουμε την τελική (και απλούστατη μάλιστα) εξίσωση

$$\frac{\partial \hat{c}}{\partial \tau} = 0. \quad (4.3.21)$$

Η γενική λύση της εξισώσεως αυτής προκύπτει άμεσα με ολοκλήρωση (φυσικά ως προς την εντελώς βοηθητική χρονική μεταβλητή  $\tau$ ). Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\hat{c} = \hat{c}(\xi, \tau) = \varphi(\xi) \implies c = c(x, t) = \varphi(x - Vt). \quad (4.3.22)$$

Στη λύση αυτή καταρχήν λάβαμε υπόψη μας ότι η ολοκλήρωση γίνεται ως προς  $t$ . Άρα το  $\xi$  δεν είναι η μεταβλητή ολοκληρώσεως. Επομένως η «σταθερά» (εντός εισαγωγικών) ολοκληρώσεως στο δεξιό μέλος της πρώτης σχέσεως (4.3.22) μπορεί να είναι συνάρτηση του  $\xi$ . Τη γράφουμε σαν αυθαίρετη συνάρτηση  $\varphi(\xi)$  της μεταβλητής αυτής  $\xi$ . Επιπλέον πρέπει να γυρίσουμε πίσω στις αρχικές μεταβλητές μας  $x$  και  $t$ , εάν δε θέλουμε να είμαστε και εμείς κινούμενοι παρατηρητές της ροής του νερού (μαζί με το ρύπο) στο υδατόρρευμα με ταχύτητα  $V$ , ακριβώς όπως είναι και το νερό. Άρα στη θέση της μεταβλητής  $\xi$  στη λύση (4.3.22) βάζουμε το  $x - Vt$  μην ξεχνώντας την αλλαγή μεταβλητής  $\xi = x - Vt$  που είχαμε κάνει (πρώτη σχέση (4.3.14)).

Έτσι καταλήξαμε στην τελική λύση  $c(x, t) = \varphi(x - Vt)$  με τη συνάρτηση  $\varphi(x - Vt)$  αυθαίρετη παραγωγίσιμη (μια φορά αρκεί!) συνάρτηση. Η λύση αυτή συμπίπτει απόλυτα με τη λύση (4.3.13), που είχαμε βρεί με την απλούστερη μέθοδο της πρωτοβάθμιας χαρακτηριστικής εξισώσεως (4.3.12):  $\rho_1(\mu) = \mu + V = 0$  στην προηγούμενη παράγραφο χωρίς αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών. Εδώ, σ' αυτήν την παράγραφο κάναμε την αλλαγή μεταβλητών (4.3.14) και με περισσότερο κόπο καταλήξαμε στην ίδια ακριβώς λύση (4.3.13), εδώ (4.3.22). Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ο επιπλέον κόπος που χρειάζεται για την αλλαγή των μεταβλητών, κυρίως οι σχετικές μερικές παραγωγίσεις.

Από την άλλη πλευρά το πλεονέκτημα της παρούσας μεθόδου είναι ότι ο τρόπος εργασίας μας διαβεβαιώνει ότι δε χάσαμε καμία απολύτως λύση της διαφορικής εξισώσεως της μεταγωγής (4.3.9) ή (4.3.17). Τούτο αποτελεί απόδειξη (όμως με εντελώς διαφορετική μέθοδο εργασίας) ότι η λύση (4.3.13) που προσδιορίστηκε με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $\rho_1(\mu) = 0$  της εξισώσεως της μεταγωγής (4.3.9) ή (4.3.17) είναι πραγματικά η γενική της λύση και όχι απλά μια μερική λύση. Αυτό βέβαια αναμενόταν, γιατί η εξίσωση της μεταγωγής είναι μόλις πρώτης τάξεως και πραγματικά υπάρχει μια αυθαίρετη συνάρτηση  $\varphi$  στη λύση της (4.3.13). Άρα ήταν πολύ πιθανό αυτή να ήταν η γενική της λύση. Στην παράγραφο αυτή αποδείξαμε το γεγονός αυτό, δηλαδή ότι ήταν η γενική λύση, αλλά με κάποιο υπολογιστικό κόπο. Δυστυχώς μερικές φορές είναι αναγκαίος ο υπολογιστικός κόπος για ορισμένες διαπιστώσεις. Αφετέρου η εναλλακτική μέθοδος επιλύσεως της εξισώσεως της μεταγωγής στην παράγραφο αυτή μας έδειξε επίσης ότι η μέθοδος της προηγούμενης Παραγράφου Β4.3.2 ήταν σωστή. Βρήκαμε δηλαδή ακριβώς την ίδια λύση με δύο εντελώς διαφορετικές μεθόδους. Η απευθείας επαλήθευση της λύσεως αυτής είναι στοιχειώδης και δεν αξίζει τον κόπο να τη γράψουμε εδώ.

## Β4.4. ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΓΙΑ ΕΙΔΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

### Β4.4.1. Προσδιορισμός της λύσεως μέσω χαρακτηριστικής εξισώσεως

Στην ενότητα αυτή απλά θα επεκτείνουμε τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $\rho(\mu) = 0$  (σχεδόν ισοδύναμα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $\rho(\mu)$ ) σε ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές δευτέρας τάξεως. Στη διαφορική μας εξίσωση υποθέτουμε επίσης την άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x, y)$  να εμφανίζεται υπό τη μορφή μόνο μερικών παραγώγων και μάλιστα αποκλειστικά δευτέρας τάξεως. Επαναλαμβάνουμε ότι πρόκειται για μια πολύ εξειδικευμένη μέθοδο επιλύσεως ορισμένων μόνο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως και με σταθερούς συντελεστές, αλλά και πρακτικά σημαντικών. Τέτοιες εξισώσεις είναι η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος και η διδιάστατη εξίσωση του Laplace.

Θεωρούμε τώρα τη γενική εξίσωση δευτέρας τάξεως της μορφής που μόλις περιγράψαμε

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (4.4.1)$$

Στην εξίσωση αυτή οι τρεις συντελεστές  $A$ ,  $B$  και  $C$  υποτίθενται σταθεροί, η άγνωστη συνάρτηση

(ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η  $u = u(x, y)$  και οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι πάλι οι  $x$  και  $y$ . Ακριβώς όπως κάναμε και στην προηγούμενη Ενότητα Β4.3 για την αντίστοιχη εξίσωση πρώτης τάξεως (4.3.1), έτσι υποθέτουμε και πάλι λύση της μορφής

$$u(x, y) = \varphi(x + \mu y). \quad (4.4.2)$$

Η συνάρτηση  $\varphi$  είναι συνάρτηση της μιας μεταβλητής  $s = x + \mu y$  καταρχήν μάλιστα αυθαίρετη συνάρτηση της μεταβλητής αυτής. Υποθέτουμε όμως ότι διαθέτει συνεχή δεύτερη παράγωγο.

Σημειώνουμε επίσης ότι η μορφή αυτή (4.4.2) της λύσεως  $u = u(x, y)$  που υποθέσαμε συμπίπτει με τη μορφή (4.3.2), την οποία είχαμε υιοθετήσει στην προηγούμενη Ενότητα Β4.3. Επομένως προφανώς ισχύουν οι τύποι (4.3.3), (4.3.4) και (4.3.5) της Ενότητας Β4.3 για τις σχετικές πρώτες μερικές παραγώγους. Φυσικά εδώ οι πρώτες μερικές παράγωγοι δεν αρκούν, γιατί η εξίσωση (4.4.1) είναι δευτέρας τάξεως. Παραγωγίζουμε επομένως τη σχέση (4.3.4) τόσο ως προς  $x$  όσο και ως προς  $y$ , ώστε να φθάσουμε σε δεύτερες μερικές παραγώγους. Εύκολα προκύπτει ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x + \mu y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \mu \varphi''(x + \mu y). \quad (4.4.3)$$

Ανάλογα παραγωγίζουμε και τη σχέση (4.3.5) πάλι και ως προς  $x$  και ως προς  $y$  και βρίσκουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \mu \varphi''(x + \mu y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \mu^2 \varphi''(x + \mu y). \quad (4.4.4)$$

Βέβαια ήταν αναμενόμενη η ισότητα αυτών των μικτών μερικών παραγώγων, δηλαδή η σχέση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \mu \varphi''(x + \mu y). \quad (4.4.5)$$

Σκοπό μας αποτελεί φυσικά ο προσδιορισμός της άγνωστης σταθεράς  $\mu$  στην υπόθεση λύσεως (4.4.2). Αυτό θα γίνει και πάλι με τη βοήθεια χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_2(\mu) = 0$ , τώρα όμως δευτέρου βαθμού. Πρόκειται για πολύ εύκολο καθήκον. Πραγματικά, αντικαθιστώντας τώρα τις δεύτερες μερικές παραγώγους (4.4.3) και (4.4.4) στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (4.4.1) που θέλουμε να επιλύσουμε, βρίσκουμε ότι

$$A\varphi''(x + \mu y) + B\mu\varphi''(x + \mu y) + C\mu^2\varphi''(x + \mu y) = 0 \implies (A + B\mu + C\mu^2)\varphi''(x + \mu y) = 0. \quad (4.4.6)$$

Επειδή όμως η παράγωγος  $\varphi''(x + \mu y)$  δε μπορεί και πάλι να είναι εκ ταυτότητος ίση με το μηδέν σε μη τετριμμένη λύση, πρέπει οπωσδήποτε ο όρος  $A + B\mu + C\mu^2$  να είναι αυτός ίσος με το μηδέν. Έτσι θα ισχύει (εκ ταυτότητος) η διαφορική εξίσωση (4.4.1). Προκύπτει επομένως μια χαρακτηριστική εξίσωση  $p_2(\mu) = 0$ , τώρα όμως δευτεροβάθμια, η εξής:

$$p_2(\mu) = A + B\mu + C\mu^2 \equiv C\mu^2 + B\mu + A = 0 \implies \mu_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C} = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2C} \quad (4.4.7)$$

με  $\Delta = B^2 - 4AC$  τη σχετική διακρίνουσα. Αυτή ακριβώς η διακρίνουσα  $\Delta$  καθορίζει και τον τύπο της διαφορικής εξισώσεως (4.4.1)! (Τούτο το γνωρίζουμε ήδη από την Ενότητα Β1.3.) Οι ρίζες της πιο πάνω δευτεροβάθμιας χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_2(\mu) = 0$  είναι φυσικά οι  $\mu_{1,2}$  πιο πάνω. Υποθέτουμε επιπλέον ότι είναι διακεκριμένες, δηλαδή δύο διαφορετικές λύσεις ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ) είτε πραγματικές (εάν  $\Delta = B^2 - 4AC > 0$ : εξίσωση (4.4.1) υπερβολικού τύπου) είτε μιγαδικές (εάν  $\Delta = B^2 - 4AC < 0$ : εξίσωση (4.4.1) ελλειπτικού τύπου). Εάν έχουμε μία μόνο ρίζα  $\mu = \mu_1 = \mu_2 = -B/(2C)$  (για μηδενική διακρίνουσα  $\Delta = B^2 - 4AC = 0$ : εξίσωση (4.4.1) παραβολικού τύπου), τότε απαιτείται χωριστή διαδικασία. Την περίπτωση αυτή: της μιας μόνο ρίζας  $\mu = \mu_1$  θα την παραλείψουμε εδώ.

Φυσικά η πιο πάνω δευτεροβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση  $p_2(\mu) = A + B\mu + C\mu^2 = 0$  για την παρούσα διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (4.4.1) δευτέρας τάξεως είναι απλά γενίκευση

της αντίστοιχης πρωτοβάθμιας χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_1(\mu) = A + B\mu = 0$  (εξίσωση (4.3.7)). Στην πρωτοβάθμια αυτή χαρακτηριστική εξίσωση (4.3.7) είχαμε καταλήξει στην προηγούμενη Ενότητα Β4.3 για την αντίστοιχη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (4.3.1).

Άρα η παρούσα διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (4.4.1) έχει σαν λύση της κάθε αυθαίρετη (αλλά διαθέτουμε συνεχή δεύτερη παράγωγο) συνάρτηση της μορφής (4.4.2). Προς τούτο απαιτείται βέβαια η σταθερά  $\mu$  να επιλεγεί σαν ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_2(\mu) = 0$ , δηλαδή είτε σαν  $\mu = \mu_1$  είτε σαν  $\mu = \mu_2$  με  $\mu_{1,2}$  τις λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4.4.7), που υπολογίστηκαν επίσης στην ίδια σχέση (4.4.7). Επομένως η λύση  $u(x, y)$  στη σχέση (4.4.2) της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (4.4.1) μπορεί να είναι ή της μιας ή της άλλης από τις παρακάτω δύο μορφές:

$$u_1(x, y) = \varphi(x + \mu_1 y) \quad \text{ή} \quad u_2(x, y) = \chi(x + \mu_2 y). \quad (4.4.8)$$

Στις λύσεις αυτές οι συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\chi$  δηλώνουν (σύμφωνα με όσα έχουν ήδη αναφερθεί) αυθαίρετες συναρτήσεις της μιας μεταβλητής  $s$  που διαθέτουν όμως συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους  $\varphi''$  και  $\chi''$  αντίστοιχα.

Όπως γνωρίζουμε όμως από την αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων (Ενότητα Β1.4), κάθε γραμμικός συνδυασμός της μορφής  $c_1 u_1 + c_2 u_2$  δύο λύσεων  $u_1$  και  $u_2$  (με τα  $c_1$  και  $c_2$  αυθαίρετους συντελεστές) σε μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση είναι και αυτός λύση. Άρα για την εξίσωση (4.4.1), η οποία διαθέτει αποδεδειγμένα τις λύσεις  $u_1(x, y)$  και  $u_2(x, y)$  (λύσεις (4.4.8)), ο γραμμικός συνδυασμός τους

$$u(x, y) = c_1 u_1(x, y) + c_2 u_2(x, y) = c_1 \varphi(x + \mu_1 y) + c_2 \chi(x + \mu_2 y) \quad \text{με} \quad \mu_1 \neq \mu_2 \quad (4.4.9)$$

αποτελεί προφανώς και αυτός λύση της ίδιας εξίσωσης (4.4.1). Ασφαλώς δεν υπάρχει κανένας λόγος, ώστε να μην ενσωματώσουμε τους σταθερούς συντελεστές  $c_1$  και  $c_2$  στις αντίστοιχες συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\chi$ . Έτσι η λύση (4.4.9) της εξίσωσης (4.4.1) γράφεται στην τελική της μορφή

$$u(x, y) = \varphi(x + \mu_1 y) + \chi(x + \mu_2 y) \quad \text{με} \quad \mu_1 \neq \mu_2. \quad (4.4.10)$$

Μπορεί να αποδειχθεί μάλιστα ότι η λύση αυτή (4.4.10) είναι η γενική λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (4.4.1) που μελετάμε. Το γεγονός αυτό θα εξηγηθεί στην περίπτωση της μονοδιάστατης εξίσωσης του κύματος (ή μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης). Την εξίσωση αυτή θα την εξετάσουμε αμέσως παρακάτω σαν παράδειγμα εφαρμογής της παρούσας μεθόδου της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_2(\mu) = 0$ .

Υπενθυμίζεται και πάλι ότι η παρούσα μέθοδος, η οποία χρησιμοποιεί τη χαρακτηριστική εξίσωση  $p_2(\mu) = 0$ , είναι αρκετά ανάλογη (όχι πλήρως βέβαια, υπάρχουν διαφορές από τη μία ανεξάρτητη μεταβλητή στις δύο!) της αντίστοιχης και τόσο γνωστής μεθόδου στις γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

Εκθέσαμε παραπάνω την ιδιαίτερα αποτελεσματική μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p_2(\mu) = 0$  (ή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_2(\mu)$ ) για κατάλληλες διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως. Στην ίδια μέθοδο είχαμε επίσης αναφερθεί και στην προηγούμενη Ενότητα Β4.3, εκεί όμως για αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι η μέθοδος της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $p(\mu) = 0$  γενικεύεται ανάλογα και σε αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις τάξεως ανωτέρας της δευτέρας. Τη γενίκευση αυτή, που είναι έτσι κι αλλιώς απλή και προφανής, θα την παραλείψουμε. Δεν παρουσιάζει άλλωστε ιδιαίτερο ενδιαφέρον ούτε από θεωρητικής, αλλ' ούτε και από πρακτικής απόψεως. Προχωράμε τώρα σε τρεις εφαρμογές της παρούσας μεθόδου της χαρακτηριστικής εξίσωσης.

**B4.4.2. Εφαρμογή στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος**

Η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή μονοδιάστατη κυματική εξίσωση ή εξίσωση της χορδής, που παρουσιάζεται και στις αξονικές καθώς και στις στρεπτικές ιδιοταλαντώσεις ράβδου, Παράγραφος B2.1.3) έχει επίσης τη μορφή (4.1.1), την ξαναγράφουμε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \iff \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (4.4.11)$$

Πρόκειται ασφαλώς για ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (μάλιστα παραγώγους αποκλειστικά δευτέρας τάξεως) της μορφής (4.4.1) και με σταθερούς συντελεστές

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = -\frac{1}{c^2}. \quad (4.4.12)$$

Παρατηρείται επίσης ότι η δεύτερη ανεξάρτητη μεταβλητή είναι εδώ ο χρόνος  $t$ , που παίρνει τη θέση της ανεξάρτητης μεταβλητής  $y$  στην εξίσωση (4.4.1)). Η εξίσωση του κύματος είναι μάλιστα υπερβολικού τύπου, όπως ήδη γνωρίζουμε μέσω της σχετικής διακρίνουσας  $\Delta = 4/c^2 > 0$  από την Παράγραφο B1.3.2β. Αυτό συμβαίνει, απλά επειδή  $\Delta > 0$ .

Η χαρακτηριστική εξίσωση (4.4.7) παίρνει τώρα τη μορφή

$$p_2(\mu) = 1 - \frac{1}{c^2} \mu^2 = 0 \implies \frac{\mu^2}{c^2} = 1 \implies \mu^2 = c^2 \implies \mu_{1,2} = \pm c \quad \text{ή} \quad \mp c. \quad (4.4.13)$$

(Το ίδιο κάνει και με  $\mp$  που μας διευκολύνει εδώ!) Έχουμε επομένως τις δύο ρίζες  $\mu_{1,2} = \mp c$ . Άρα η λύση της μονοδιάστατης εξισώσεως του κύματος (ή κυματικής εξισώσεως) (4.4.11), που παρουσιάζεται σε αρκετά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού, έχει τη μορφή (4.4.10), εν προκειμένω

$$u = u(x, t) = \varphi(x + \mu_1 t) + \chi(x + \mu_2 t) = \varphi(x - ct) + \chi(x + ct). \quad (4.4.14)$$

Συγκρίνουμε τη λύση αυτή (που βρέθηκε εδώ με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_2(\mu) = 0$ ) με τη λύση (4.1.19) στην Παράγραφο B4.1.3 (η οποία βρέθηκε εκεί με τη μέθοδο της αλλαγής των ανεξάρτητων μεταβλητών από  $x$  και  $t$  σε  $\xi$  και  $\eta$ ) της ίδιας ακριβώς εξισώσεως: της μονοδιάστατης εξισώσεως του κύματος ή εξισώσεως της χορδής (4.1.1) ή (4.4.11)). Διαπιστώνουμε απλά την πλήρη σύμπτωσή τους. Η παρούσα μέθοδος της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_2(\mu) = 0$  είναι πολύ απλούστερη στη χρήση της, αλλά, δυστυχώς, δεν αποδεικνύει σαφώς τη γενικότητα της λύσεως (4.4.14).

Αντίθετα η μέθοδος της αλλαγής των ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$  και  $t$ , που εφαρμόστηκε στην Ενότητα B4.1 στην ίδια εξίσωση, είναι πολύπλοκότερη στην εφαρμογή της. Όμως από της θετικής πλευράς μας βεβαιώνει για τη γενικότητα της λύσεως της μονοδιάστατης εξισώσεως του κύματος που προσδιορίστηκε (γενική λύση (4.1.19) ή (4.4.14)). Πρέπει όμως να σημειωθεί ότι και η παρούσα λύση (4.4.14) περιέχει δύο αυθαίρετες συναρτήσεις: τις  $\varphi$  και  $\chi$ . Βέβαια δεν αποδείχθηκε στην παράγραφο αυτή ότι είναι είναι η ζητούμενη γενική λύση της εξισώσεως του κύματος (ή κυματικής εξισώσεως) (4.4.11). Εντούτοις η παρουσία δύο αυθαίρετων συναρτήσεων σε λύση μιας διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως αποτελεί ισχυρή ένδειξη (αν και όχι απόδειξη) ότι πρόκειται για τη γενική λύση. Τέτοια (με παρούσες δύο αυθαίρετες συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\chi$ ) είναι η λύση (4.4.14) της εξισώσεως του κύματος (4.4.11) που εξετάζουμε.

**B4.4.3. Εφαρμογή στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace**

Απολύτως ανάλογα μπορούμε βέβαια να εργασθούμε και με τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace  $\nabla^2 u = 0$ . Αυτή είναι, όπως γνωρίζουμε από την Παράγραφο B1.3.2α, εξίσωση ελλειπτικού τύπου και έχει στις δύο διαστάσεις τη μορφή (1.1.16), την επαναλαμβάνουμε

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{με} \quad u = u(x, y). \quad (4.4.15)$$



Και η διδιάστατη εξίσωση του Laplace είναι ακριβώς της μορφής (4.4.1) (και μάλιστα με  $B = 0$ ). Επομένως μπορεί και αυτή να λυθεί με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_2(\mu) = 0$  στη σχέση (4.4.7). Δηλώνοντας με  $i$  τη φανταστική μονάδα:  $i = \sqrt{-1}$ , έχουμε

$$A = C = 1 \quad \text{και} \quad B = 0 \quad \implies \quad p_2(\mu) = 1 + \mu^2 = 0 \quad \implies \quad \mu^2 = -1 \quad \implies \quad \mu_{1,2} = \pm i. \quad (4.4.16)$$

Επομένως η γενική λύση της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace (4.4.15) είναι η εξής:

$$u = u(x, y) = \varphi(x + iy) + \chi(x - iy). \quad (4.4.17)$$

Φυσικά η λύση αυτή συμπίπτει πλήρως με τη λύση (4.2.3), που είχαμε βρει στην Ενότητα B4.2 με εντελώς διαφορετική μέθοδο. Σημειώνουμε και πάλι ότι για πραγματικές λύσεις  $u(x, y)$  της εξισώσεως του Laplace (αυτές που πραγματικά επιζητεί ο Πολιτικός Μηχανικός) θα πρέπει οι συναρτήσεις  $\varphi$  και  $\chi$  στη γενική λύση (4.4.17) να είναι συζυγείς μιγαδικές:  $\varphi = \bar{\chi}$ , ισοδύναμα  $\chi = \bar{\varphi}$  (συνθήκη (4.2.7) στην Ενότητα B4.2).

#### B4.4.4. Εφαρμογή σε μια εξίσωση μόνιμης ροής συμπιεστού ρευστού

Σαν τρίτη (και τελευταία) εφαρμογή θεωρούμε την εξίσωση

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (4.4.18)$$

Την εξίσωση αυτή ήδη την αναφέραμε στην παράγραφο B1.3.3 (εξίσωση (1.3.15)). Αφορά σε μόνιμη διδιάστατη ροή συμπιεστού ρευστού (αλλά χωρίς συνεκτικότητα, ιξώδες) με  $M$  ( $M > 0$ ) τον αριθμό Mach της ροής. Υπενθυμίζουμε ότι η εξίσωση αυτή (4.4.18) είναι: (α) υπερβολικού τύπου για  $M > 1$  (για υπερηχητικές ροές) και (β) ελλειπτικού τύπου για  $M < 1$  (για υποηχητικές ροές). Διαπιστώνουμε επίσης ότι είναι της μορφής (4.4.1) (πάλι με  $B = 0$ ) και θα προσδιορίσουμε τη γενική λύση της με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξισώσεως (4.4.7). Προφανώς έχουμε

$$A = 1 - M^2, \quad B = 0, \quad C = 1 \quad \implies \quad p_2(\mu) = 1 - M^2 + \mu^2 = 0 \quad \implies \quad \mu_{1,2} = \pm \sqrt{M^2 - 1}. \quad (4.4.19)$$

Άρα με βάση τον τελικό τύπο (4.4.10) η γενική λύση της εξισώσεως (4.4.18) έχει τη μορφή

$$u(x, y) = \varphi(x + \mu_0 y) + \chi(x - \mu_0 y) \quad \text{με} \quad \mu_0 = \sqrt{M^2 - 1}. \quad (4.4.20)$$

Για υπερηχητικές ροές:  $M > 1$ , οπότε το  $\mu_0$  είναι πραγματικός αριθμός, η γενική λύση (4.4.20) είναι επαρκής στη μορφή της αυτή. Αντίθετα για υποηχητικές ροές:  $M < 1$ , οπότε το  $\mu_0$  είναι καθαρά φανταστικός αριθμός:  $\mu_0 = i\sqrt{1 - M^2}$ , καλό είναι να ξαναγράψουμε τη λύση (4.4.20) στην ακόλουθη εναλλακτική μορφή της (με το σύμβολο  $i$  να δηλώνει τη φανταστική μονάδα:  $i = \sqrt{-1}$ )

$$u(x, y) = \varphi(x + i\mu_0^* y) + \chi(x - i\mu_0^* y), \quad \text{τώρα με} \quad \mu_0^* = \sqrt{1 - M^2}, \quad \text{αφού εδώ} \quad M < 1. \quad (4.4.21)$$

Η μορφή αυτή της λύσεως είναι αρκετά πιο σαφής από την αρχική της μορφή (4.4.20) στην περίπτωση αυτή. Από καθαρά μαθηματικής απόψεως για  $M = 0$  έχουμε  $\mu_0^* = 1$  (ή  $\mu_0 = i$ ) και η παρούσα διαφορική εξίσωση (4.4.18) μεταπίπτει στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (4.4.15). Στην πολύ ειδική αυτή περίπτωση επανερχόμαστε βέβαια στη γενική λύση (4.4.17) της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace. Σημειώνουμε τέλος ότι για  $0 < M < 1$  (για υποηχητική ροή) για πραγματικές λύσεις  $u(x, y)$  θα πρέπει να έχουμε και εδώ  $\varphi = \bar{\chi}$ , ισοδύναμα  $\chi = \bar{\varphi}$  στη γενική λύση (4.4.21). Αυτό ακριβώς συνέβαινε και στην αντίστοιχη λύση (4.4.17) στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace στην αμέσως προηγούμενη Παράγραφο B4.4.3.

## B4.5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΕΩΣ

### B4.5.1. Γενική λύση ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

Κάπως γενικότερη από τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης της προηγούμενης Ενότητας B4.4, που βασιζόταν σε αυθαίρετη παραγωγίσιμη συνάρτηση  $\varphi(x + \mu y)$ , είναι η μέθοδος της εκθετικής αντικατάστασης. Πιο συγκεκριμένα στη μέθοδο αυτή δοκιμάζουμε μια κατάλληλη εκθετική συνάρτηση σαν πιθανή λύση της προς επίλυση διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους. Η εξίσωση αυτή πρέπει συνήθως να είναι ομογενής, γραμμική και με σταθερούς συντελεστές. Στην ενότητα αυτή θα επιδείξουμε αρχικά τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης στην εξίσωση των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων (και ελεύθερων ταλαντώσεων, όχι εξαναγκασμένων) συνήθους δοκού. Στην επόμενη Παράγραφο B4.5.2 θα προσδιορίσουμε τη μερική λύση μιας αντίστοιχης μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με το δεξιό μέλος της να είναι ειδικής εκθετικής μορφής.

Η τόσο κλασική εξίσωση των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων ταλαντώσεων συνήθους δοκού έχει τη μορφή (1.2.22), την ξαναγράφουμε

$$\frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad \text{εδώ με} \quad a = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (4.5.1)$$

Στη συντομευμένη αυτή μορφή χρησιμοποιήσαμε προς διευκόλυνση και τη βοηθητική σταθερά  $a = \sqrt{EI/(\rho A)}$  με  $EI$  τη δυσκαμψία και  $\rho A$  τη γραμμική πυκνότητα της δοκού. Η εξίσωση αυτή (4.5.1) είναι προφανώς τετάρτης τάξεως, ομογενής, γραμμική και με σταθερούς συντελεστές.

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης, υποθέτουμε τώρα εκθετική λύση της μορφής

$$v(x, t) = \exp(i\lambda x + i\mu t) \quad (4.5.2)$$

με το σύμβολο  $\exp$  να δηλώνει την εκθετική συνάρτηση ( $\exp y \equiv e^y$ ) και με τις δύο σταθερές  $\lambda$  και  $\mu$  προς προσδιορισμό. Εξαιτίας των γνωστών τύπων του Euler

$$\exp(\pm i\theta) = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad (4.5.3)$$

προτιμήσαμε να θέσουμε και τη φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  σαν πολλαπλασιαστή των όρων του εκθέτη  $\lambda x + \mu t$  στην εκθετική συνάρτηση (4.5.2), την οποία υποθέτουμε σαν πιθανή λύση. Έτσι θα έχουμε τελικά τριγωνομετρικές συναρτήσεις αποφεύγοντας τις υπερβολικές συναρτήσεις, που δεν αρμόζουν σε ένα πρόβλημα ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων ταλαντώσεων γενικότερα.

Η παραγωγή της εκθετικής συναρτήσεως είναι πολύ απλή. Συγκεκριμένα προκύπτει

$$\frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = \lambda^4 \exp(i\lambda x + i\mu t), \quad \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = -\mu^2 \exp(i\lambda x + i\mu t) \quad (i^2 = -1 \implies i^4 = 1) \quad (4.5.4)$$

για την εκθετική λύση (4.5.2) που ήδη υποθέσαμε. Τώρα αντικαθιστούμε τις εκθετικής πάλι μορφής μερικές παραγώγους (4.5.4) στην αρχική διαφορική μας εξίσωση (4.5.1). Προκύπτει άμεσα

$$\lambda^4 \exp(i\lambda x + i\mu t) - \frac{\mu^2}{a^2} \exp(i\lambda x + i\mu t) = 0 \implies \left( \lambda^4 - \frac{\mu^2}{a^2} \right) \exp(i\lambda x + i\mu t) = 0. \quad (4.5.5)$$

Επομένως πρέπει να ισχύει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\lambda^4 - \frac{\mu^2}{a^2} = 0 \implies \mu^2 = a^2 \lambda^4 \implies \mu = \pm a \lambda^2 \quad (4.5.6)$$

μεταξύ των δύο σταθερών  $\lambda$  και  $\mu$  στην εκθετική λύση (4.5.2) που έχουμε υποθέσει. Άρα η σταθερά  $\mu$  έχει τώρα εκφραστεί συναρτήσει της άλλης σταθεράς, της  $\lambda$ , μέσω των σχέσεων  $\mu = \pm a \lambda^2$ . (Και το αντίστροφο είναι βέβαια δυνατό, αλλά δε συνιστάται, ώστε να αποφευχθούν οι τετραγωνικές ρίζες!) Επομένως η σταθερά  $\lambda$  παραμένει αυθαίρετη, μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή,

είτε πραγματική είτε μιγαδική, αν και εμείς προτιμούμε εδώ πραγματικές τιμές της. Τώρα η λύση (4.5.2) παίρνει τη μορφή

$$v(x, t) = \exp(i\lambda x \pm ia\lambda^2 t) = \exp(i\lambda x) \exp(\pm ia\lambda^2 t). \quad (4.5.7)$$

Στη μορφή αυτή χωρίστηκαν στο τέλος ο χωρικός όρος  $\exp(i\lambda x)$ , που εξαρτάται μόνο από τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού, και ο χρονικός όρος  $\exp(\pm ia\lambda^2 t)$ , που εξαρτάται μόνο από το χρόνο  $t$ . Επίσης πρόκειται ουσιαστικά για δύο λύσεις, τις εξής:

$$v_1(x, t) = \exp(i\lambda x) \cos(a\lambda^2 t) \quad \text{και} \quad v_2(x, t) = \exp(i\lambda x) \sin(a\lambda^2 t) \quad (4.5.8)$$

λόγω του προσήμου  $\pm$  στη διπλή λύση (4.5.7) και της ισχύος των τύπων του Euler (4.5.3).

Φυσικά, λόγω της ισχύος της αρχής της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων (Ενότητα Β1.4) κάθε γραμμικός συνδυασμός  $c_1 v_1 + c_2 v_2$  των λύσεων (4.5.8) είναι και αυτός λύση. Οι δύο σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  μπορούν μάλιστα να εξαρτώνται από την παράμετρο  $\lambda$ . Τούτο ισχύει, επειδή η παράμετρος αυτή  $\lambda$  δεν υπεισέρχεται στις παραγωγίσεις της διαφορικής εξισώσεως (4.5.1), δεν είναι ανεξάρτητη μεταβλητή, είναι απλά μια παράμετρος. Έτσι θεωρώντας κάθε πραγματική τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  ( $-\infty < \lambda < \infty$ ), διαπιστώνουμε ότι η γενική λύση της εξισώσεως (4.5.1) έχει τελικά τη μορφή

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda x) [C_1(\lambda) \cos(a\lambda^2 t) + C_2(\lambda) \sin(a\lambda^2 t)] d\lambda. \quad (4.5.9)$$

Η λύση αυτή προέρχεται από γενίκευση της αρχής της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων (Ενότητα Β1.4) με ολοκλήρωμα αντί για άθροισμα. Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί ότι η σχέση (4.5.9) πραγματικά είναι λύση της διαφορικής εξισώσεως (4.5.1) που εξετάζουμε με την άμεση αντικατάστασή της. Υποθέτουμε βέβαια ότι έχουμε τη δυνατότητα να εναλλάξουμε τη σειρά της μερικής παραγωγίσεως (ως προς  $x$  ή ως προς  $t$ ) και της ολοκληρώσεως (ως προς  $\lambda$ ) εκτελώντας πρώτα τη μερική παραγωγή και έπειτα την ολοκλήρωση. (Η υπόθεση αυτή ισχύει συνήθως!) Στην ίδια λύση (4.5.9) οι σταθερές  $c_1$  και  $c_2$  έχουν τώρα αντικατασταθεί από τις συναρτήσεις  $C_1(\lambda)$  και  $C_2(\lambda)$  αντίστοιχα. Επίσης ο χωρικός όρος  $\exp(i\lambda x)$  ( $\exp(i\lambda x) = \cos(\lambda x) + i \sin(\lambda x)$ ) τέθηκε κοινός παράγων στην ολοκληρωτέα συνάρτηση στη λύση (4.5.9).

Η τελική αυτή λύση (4.5.9) είναι παρόμοια με τη λύση (11.3.21) παρακάτω στην Ενότητα Β11.3 (εκεί με το σύμβολο  $\omega$  αντί του  $\lambda$  σαν μεταβλητή ολοκληρώσεως) για το ίδιο πρόβλημα καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού, αλλ' εκεί και με αρχικές συνθήκες σε ελεύθερες ταλαντώσεις. Τη λύση (11.2.21) θα την προσδιορίσουμε στην Ενότητα Β11.3 με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier. Αυτή είναι μια εντελώς διαφορετική και ίσως κάπως δυσκολότερη μέθοδος.

#### **B4.5.2. Μερική λύση ειδικής μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως**

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων δοκού υπό εξωτερική κατανεμημένη φόρτιση  $p(x, t)$  μιας πολύ ειδικής εκθετικής μορφής, συγκεκριμένα

$$p(x, t) = p_0 \exp\left(\frac{x - ct}{d}\right). \quad (4.5.10)$$

Στη συνάρτηση αυτή  $p(x, t)$  το  $p_0$  είναι γνωστή σταθερά φορτίσεως (σε N/m ή, καλύτερα, kN/m), το  $c$  δηλώνει την ταχύτητα «κινήσεως» της παρούσας κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x, t)$  προς τα δεξιά κατά μήκος της δοκού και το  $d$  παριστάνει μια σταθερά μήκους. Η σταθερά αυτή  $d$  είναι αναγκαία στη συνάρτηση κατανεμημένης φορτίσεως (4.5.10), επειδή η εκθετική συνάρτηση δε μπορεί να έχει άλλο όρισμα παρά μόνο αδιάστατο αριθμό. (Το ίδιο ισχύει και για όλες τις αντίστοιχες συναρτήσεις!)

Με δεδομένη τη φόρτιση αυτή  $p(x, t)$  η εξίσωση των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού (1.1.13), παίρνει τη εξής μορφή (πάλι με τη χρήση της βοηθητικής σταθεράς  $a$ ):

$$\frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\rho_0}{EI} \exp\left(\frac{x-ct}{d}\right) \quad \text{με} \quad a = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (4.5.11)$$

Η φόρτιση  $p(x, t)$  έχει εισαχθεί στο δεξιό μέλος. Πρόκειται τώρα για μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Η αντίστοιχη ομογενής ήταν η (4.5.1) και έχουμε ήδη προσδιορίσει τη γενική λύση της (4.5.9). Η γενική λύση  $v_g(x, t)$  της παρούσας μη ομογενούς εξίσωσης (4.5.11) (σε εξαναγκασμένη ταλάντωση) θα είναι προφανώς (Ενότητα Β1.5) ίση με το άθροισμα της γενικής λύσεως (4.5.9) της ομογενούς εξίσωσης (4.5.1) συν μια μερική λύση  $v_p(x, t)$  της μη ομογενούς εξίσωσης (4.5.11). Τη μερική αυτή λύση  $v_p(x, t)$  θα την προσδιορίσουμε στην παράγραφο αυτή.

Λόγω της πολύ ειδικής εκθετικής μορφής (4.5.10) της κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x, t)$  επί της δοκού (φορτίσεως που «κινείται» με ταχύτητα  $c$  προς τα δεξιά), μπορούμε εδώ να υποθέσουμε μερική λύση  $v_p(x, t)$  ανάλογης εκθετικής μορφής. Συγκεκριμένα υποθέτουμε λύση της μορφής

$$v_p(x, t) = B \exp\left(\frac{x-ct}{d}\right) \quad (4.5.12)$$

με τη σταθερά  $B$  προσδιοριστέο συντελεστή ανάλογα με τις αντίστοιχες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Θα προσδιορίσουμε εύκολα το συντελεστή αυτό  $B$ . Απλά παραγωγίζουμε τη μερική λύση  $v_p(x, t)$  που υποθέσαμε τέσσερις φορές ως προς τη θέση  $x$ . Επίσης παραγωγίζουμε την ίδια λύση δύο φορές ως προς το χρόνο  $t$ . Πρόκειται για πολύ απλές παραγωγίσεις και διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{\partial^4 v_p(x, t)}{\partial x^4} = \frac{B}{d^4} \exp\left(\frac{x-ct}{d}\right) \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 v_p(x, t)}{\partial t^2} = \frac{Bc^2}{d^2} \exp\left(\frac{x-ct}{d}\right). \quad (4.5.13)$$

Με αντικατάσταση των παραγώγων αυτών στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση (4.5.11) η εξίσωση αυτή ανάγεται (με απλοποίηση του εκθετικού όρου στα δύο μέλη της) στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{B}{d^4} + \frac{1}{a^2} \frac{Bc^2}{d^2} = \frac{\rho_0}{EI}, \quad \text{οπότε} \quad \frac{a^2 + c^2 d^2}{a^2 d^4} B = \frac{\rho_0}{EI} \quad \text{και τελικά} \quad B = \frac{a^2 d^4}{a^2 + c^2 d^2} \frac{\rho_0}{EI}. \quad (4.5.14)$$

Προσδιορίσθηκε έτσι ο άγνωστος συντελεστής  $B$  στη μερική λύση (4.5.12), που τώρα είναι πλέον απόλυτα γνωστή. Φυσικά η μερική αυτή λύση  $v_p(x, t)$  βρέθηκε τόσο εύκολα, απλά επειδή η κατανεμημένη φόρτιση  $p(x, t)$  ήταν ειδικής εκθετικής μορφής. (Ανάλογα ισχύουν και για όμοιες συνημιτονικές και ημιτονικές μορφές.) Ας μη λησμονείται βέβαια ότι στην ενότητα αυτή προσδιορίσαμε γενικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως έχοντας αγνοήσει τις συνθήκες (συνοριακές και αρχικές) που έχουμε σε ένα πρόβλημα ταλαντώσεων δοκού.

## B4.6. ΓΕΝΙΚΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗΣ ΔΙΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΜΕΣΩ ΔΥΟ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

### B4.6.1. Η διδιάστατη διαρμονική εξίσωση

Η διδιάστατη διαρμονική εξίσωση (στο επίπεδο, στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$ ) έχει τη μορφή (2.2.10) (Κεφάλαιο Β2), την επαναλαμβάνουμε

$$\nabla^4 \varphi = 0, \quad \varphi = \varphi(x, y). \quad (4.6.1)$$

Στην εξίσωση αυτή  $\varphi = \varphi(x, y)$  είναι η άγνωστη συνάρτηση, που καλείται διαρμονική συνάρτηση και αναφέρεται στο διαρμονικό τελεστή. Ο τελεστής αυτός, όπως ξέρουμε από την Ενότητα Β2.2 του Κεφαλαίου Β2, παρουσιάζεται σε προβλήματα ελαστικών δίσκων και πλακών και έχει τη μορφή

$$\nabla^4 \equiv \nabla^2 \nabla^2 = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (4.6.2)$$

Έχουμε επομένως στο διαρμονικό τελεστή  $\nabla^4$  την εφαρμογή (σε μια κατάλληλα παραγωγίσιμη συνάρτηση  $\varphi = \varphi(x, y)$ ) του διδιάστατου αρμονικού τελεστή ή τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  (της Λαπλασιανής, Laplacian) στις δύο διαστάσεις με τον ακόλουθο ορισμό:

$$\nabla^2 := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.6.3)$$

επί τόν εαυτό του ( $\nabla^2$  και πάλι). Τότε προκύπτουν μερικές παράγωγοι τετάρτης τάξεως, όπως παρατηρείται πιο πάνω. Σε ορισμένα, σε αρκετά συγγράμματα ο αρμονικός τελεστής (ή Λαπλασιανή, Laplacian)  $\nabla^2$  συμβολίζεται και σαν  $\Delta$ , δηλαδή  $\nabla^2 \equiv \Delta$ . Με το συμβολισμό αυτό ο διαρμονικός τελεστής  $\nabla^4$  συμβολίζεται και σαν  $\Delta^2$ , δηλαδή  $\nabla^4 \equiv \Delta^2$ .

Επομένως, λόγω του τύπου (4.6.2) η διαρμονική εξίσωση (4.6.1) στις δύο διαστάσεις ( $x, y$ ) γράφεται αναλυτικά ως εξής:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0, \quad (4.6.4)$$

όπως ήδη γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο Β2. Οι μικτές παράγωγοι: δύο φορές μερική παραγωγή της  $\varphi$  ως προς  $x$  και δύο επίσης φορές ως προς  $y$  και αντίστροφα θεωρήθηκαν βέβαια ίσες μεταξύ τους, δηλαδή, στην περίπτωση μας,

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^2 \partial x^2} \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \equiv \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}. \quad (4.6.5)$$

Τούτο γενικά ισχύει. Αρκεί βέβαια οι παράγωγοι αυτές να υπάρχουν και να είναι επιπλέον συνεχείς συναρτήσεις. Πρόκειται για επαρκή συνθήκη, η οποία θεωρείται γενικά ότι ισχύει στην πράξη.

#### **B4.6.2. Γενική λύση μέσω δύο διδιάστατων αρμονικών συναρτήσεων**

Θα προχωρήσουμε τώρα στην εύρεση μιας γενικής λύσεως της διδιάστατης διαρμονικής εξίσωσης  $\nabla^4 \varphi = 0$  στις δύο διαστάσεις  $x$  και  $y$  (με γενίκευση και στις τρεις διαστάσεις). Καταρχήν μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι, εάν οι συναρτήσεις  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$  είναι και οι δύο αρμονικές, δηλαδή εάν

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{και επίσης} \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (4.6.6)$$

και διαθέτουν τις απαιτούμενες τέταρτες μερικές παραγώγους, τότε κάθε μια από τις τρεις συναρτήσεις

$$\varphi_1 = xu + v, \quad \varphi_2 = yu + v, \quad \varphi_3 = r^2 u + v \quad \text{με} \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (4.6.7)$$

είναι διαρμονική συνάρτηση. Αποτελεί μάλιστα γενική λύση  $\varphi$  της διαρμονικής εξίσωσης (4.6.1):  $\nabla^4 \varphi = 0$ . Οι σχετικές αποδείξεις μόνο σε ό,τι αφορά στη διαρμονικότητα των τριών αυτών συναρτήσεων  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  και  $\varphi_3$  είναι άμεσες.

Θεωρούμε πρώτα τη συνάρτηση  $\varphi_1 = xu + v$  και την παραγωγίζουμε δύο φορές μερικά ως προς  $x$  (με το  $y$  σταθερό). Έτσι βρίσκουμε χωρίς καμία δυσκολία (οι κανόνες παραγωγίσεως αθροίσματος και γινομένου αρκούν!) ότι

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = x \frac{\partial u}{\partial x} + u + \frac{\partial v}{\partial x} \implies \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = \left( x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (4.6.8)$$

Ανάλογος και μάλιστα λίγο ακόμη απλούστερος είναι ο υπολογισμός των δύο πρώτων μερικών παραγώγων της ίδιας συναρτήσεως  $\varphi_1$ , αλλά τώρα ως προς  $y$ :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = x \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \implies \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (4.6.9)$$

Λόγω της μορφής (4.6.3) του διδιάστατου αρμονικού τελεστή  $\nabla^2$ , από τους τύπους (4.6.8) και (4.6.9) προκύπτει άμεσα ο εξής τύπος για τη συνάρτηση  $\nabla^2 \varphi_1$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_1 &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = \left( x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \left( x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ &= x \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = x \cdot 0 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 0 = 2 \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4.6.10)$$

Ο τύπος αυτός στηρίχθηκε στην αρμονικότητα που υποθέσαμε (επαληθεύση της εξισώσεως του Laplace: Λαπλασιανή ίση με το μηδέν) (4.6.6) και των δύο συναρτήσεων  $u$  και  $v$ , που υπεισέρχονται στις προς απόδειξη γενικές λύσεις (4.6.7) της διαρμονικής εξισώσεως (4.6.1). Άρα η συνάρτηση  $\nabla^2 \varphi_1 = 2(\partial u / \partial x)$  δεν είναι γενικά αρμονική. Θα αποδείξουμε όμως ότι είναι διαρμονική εφαρμόζοντας και πάλι τον αρμονικό τελεστή  $\nabla^2$  σ' αυτήν. Άρα έχουμε λόγω και του τύπου (4.6.10)

$$\nabla^4 \varphi_1 = \nabla^2(\nabla^2 \varphi_1) = \nabla^2 \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 u) = 2 \cdot 0 = 0, \quad (4.6.11)$$

επειδή η συνάρτηση  $u$  (όπως και η  $v$  φυσικά) υπετέθη αρμονική (πρώτη εκ των σχέσεων (4.6.6)).

Στην αμέσως πιο πάνω απόδειξη λάβαμε υπόψη ότι ο αρμονικός τελεστής  $\nabla^2$  είναι γραμμικός διαφορικός τελεστής με σταθερούς συντελεστές και έτσι έγινε δυνατή η εναλλαγή του με τον απλούστερο τελεστή  $\partial / \partial x$  της μερικής παραγωγίσεως ως προς  $x$ . Οι σχετικές απλές πράξεις αναλυτικότερα:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 2 \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \right) = 2 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u = 2 \frac{\partial}{\partial x} 0 = 2 \cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

λόγω της πρώτης σχέσεως (4.6.6). Έγινε βέβαια και αλλαγή της σειράς των μερικών παραγωγίσεων στη μικτή παράγωγο στην τρίτη πιο πάνω ισότητα. Συμπληρώθηκε έτσι η απόδειξη ότι η συνάρτηση  $\varphi_1 = xu + v$  είναι διαρμονική. Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί επίσης ότι η ίδια συνάρτηση  $\varphi_1$  είναι γενική λύση της διαρμονικής εξισώσεως (4.6.1). Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και για τη συνάρτηση  $\varphi_2$ , η οποία ορίζεται και αυτή στις σχέσεις (4.6.7). Ανάλογα ισχύουν και για τη συνάρτηση  $\varphi_3$  στις ίδιες σχέσεις, αλλά με τις μερικές παραγωγίσεις λίγο πιο δύσκολες τώρα.

Το συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι κάθε διδιάστατη διαρμονική συνάρτηση  $\varphi$  μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια δύο αρμονικών συναρτήσεων  $u$  και  $v$ . Ειδικότερα για τη συνάρτηση  $\varphi_3 = r^2 u + v = (x^2 + y^2)u + v$  (τρίτη σχέση (4.6.7)) αυτή παρουσιάζει συμμετρία στον ορισμό της ως προς  $x$  και  $y$  (επειδή  $r^2 = x^2 + y^2$ ) αντίθετα με τις  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$ . Μπορεί να αποδειχθεί επίσης ότι έχει και το επιπλέον σοβαρό πλεονέκτημα πως για κάθε συγκεκριμένη διαρμονική συνάρτηση  $\varphi_3$  της παραπάνω μορφής οι αντίστοιχες αρμονικές συναρτήσεις  $u$  και  $v$  είναι μονοσήμαντα καθορισμένες. Ο μονοσήμαντος καθορισμός των αρμονικών συναρτήσεων  $u$  και  $v$ , η μοναδικότητα του καθορισμού τους δεν ισχύει όμως για τις διαρμονικές συναρτήσεις  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$  (πρώτες δύο σχέσεις (4.6.7)). Επομένως οι διαρμονικές συναρτήσεις  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$  μειονεκτούν απ' αυτής της απόψεως ως προς την τρίτη και επίσης διαρμονική συνάρτηση  $\varphi_3$ .

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β5

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζεται η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών (ή των χωριζόμενων μεταβλητών), που μερικές φορές καλείται και μέθοδος του Fourier, για την επίλυση κυρίως ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Η επίλυση αυτή βασίζεται στο χωρισμό των ανεξάρτητων μεταβλητών στην άγνωστη συνάρτηση, π.χ.  $u(x, t) = X(x)T(t)$  για άγνωστη συνάρτηση  $u$  δύο ανεξάρτητων μεταβλητών: των  $x$  και  $t$ . Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η αναγωγή της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις: τόσες στον αριθμό όσες και οι ανεξάρτητες μεταβλητές. Ακολουθεί η επίλυση των συνήθων αυτών διαφορικών εξισώσεων και η υπέρθεση των μερικών λύσεων  $u_n(x, t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) που προκύπτουν. Έτσι καθορίζεται η λύση  $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$  σε μορφή σειράς. Οι συνοριακές ή/και αρχικές συνθήκες που ισχύουν λαμβάνονται επίσης κατάλληλα υπόψη. Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών είναι εφαρμόσιμη μόνο σε ορισμένες διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους: στις διαχωρίσιμες εξισώσεις. Εντούτοις η μέθοδος αυτή αποτελεί ίσως τη γενικότερη μέθοδο επίλυσεως τέτοιων εξισώσεων, που πάντοτε βέβαια συνοδεύονται από τις κατάλληλες συνοριακές ή/και αρχικές συνθήκες. Δηλαδή πάντοτε αναφερόμαστε σε προβλήματα συνοριακών ή/και αρχικών τιμών. Κατά την επίλυση τέτοιων προβλημάτων θα έχουμε την ευκαιρία να αναφερθούμε και στις τόσο βασικές έννοιες των ιδιοτιμών (ή χαρακτηριστικών τιμών) και των ιδιοσυναρτήσεων (ή χαρακτηριστικών συναρτήσεων) που προκύπτουν από τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

Μετά από μια σύντομη εισαγωγή στην Ενότητα Β5.1 θα επιδείξουμε εκτενώς τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (ή μέθοδο του Fourier) σε τρία κλασικά προβλήματα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (πλέον τις συνοριακές ή/και τις αρχικές συνθήκες). Πιο συγκεκριμένα στην Ενότητα Β5.2 θα λύσουμε το πρόβλημα της χορδής, δηλαδή τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος υπό δύο συνοριακές και δύο αρχικές συνθήκες. Στην Ενότητα Β5.3 θα λύσουμε ένα πρόβλημα Μεταδόσεως Θερμότητας σε τοίχο με ισχύ της μονοδιάστατης εξισώσεως της διαχύσεως υπό δύο συνοριακές συνθήκες και μία αρχική συνθήκη. Στη συνέχεια στην Ενότητα Β5.4 θα λύσουμε τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace σε ένα πρόβλημα Dirichlet, δηλαδή με γνωστές τις τιμές της άγνωστης συναρτήσεως στο σύνορο της εξεταζόμενης περιοχής τόσο για ορθογωνική περιοχή όσο και για ημιλωρίδα. Τέλος στις Ενότητες Β5.5 και Β5.6 θα αναφερθούμε στις επεκτάσεις της μεθόδου σε μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες και σε μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

Τα επόμενα τέσσερα κεφάλαια θα είναι επίσης αφιερωμένα στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών με παραπέρα εφαρμογές της. Οι εφαρμογές αυτές θα αφορούν: (α) στο Κεφάλαιο Β6 σε προβλήματα ράβδων και δοκών στη Δυναμική των Κατασκευών, (β) στο Κεφάλαιο Β7 σε προβλήματα ελαστικών δίσκων και πλακών και (γ) στο Κεφάλαιο Β8 σε άλλα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Τέλος στο Κεφάλαιο Β9 η ίδια μέθοδος θα χρησιμοποιηθεί και σε προβλήματα που αφορούν όχι πια σε Καρτεσιανές, αλλά σε πολικές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

---

### B5.1. ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΟΥ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών (ή των χωριζόμενων μεταβλητών ή μέθοδος του Fourier, όπως επίσης αποκαλείται) είναι μια ενδιαφέρουσα και αποτελεσματική μέθοδος για την αναλυτική επίλυση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους συνήθως ομογενούς. Η εξίσωση αυτή είναι επίσης γενικά (αλλ' όχι αναγκαία) με σταθερούς συντελεστές. Μια τέτοια εξίσωση μπορεί να είναι πρώτης ή ανωτέρας τάξεως. Πρακτικά συνήθως έχει δύο, τρεις ή τέσσερις ανεξάρτητες μεταβλητές, π.χ. τις  $x$ ,  $y$ ,  $z$  και  $t$ , δηλαδή τις τρεις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  στο χώρο και το χρόνο  $t$ . Ενδιαφερόμαστε φυσικά να προσδιορίσουμε την άγνωστη συνάρτηση. Ας τη θεωρήσουμε με τέσσερις ταυτόχρονα ανεξάρτητες μεταβλητές. Καταρχήν κάνουμε την υπόθεση ότι μια χρήσιμη μερική λύση  $u = u(x, y, z, t)$  της προς επίλυση διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους μπορεί ίσως να γραφεί απλούστερα σαν το γινόμενο τεσσάρων νέων συναρτήσεων της μιας μόνο μεταβλητής, π.χ. εδώ των  $X(x)$ ,  $Y(y)$ ,  $Z(z)$  και  $T(t)$ , δηλαδή

$$u(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t). \quad (5.1.1)$$

Με τον τρόπο αυτό οι ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$ ,  $y$ ,  $z$  και  $t$  άρχισαν να χωρίζονται, γιατί εμφανίζονται σαν ορίσματα σε χωριστές νέες συναρτήσεις της μιας μόνο μεταβλητής:  $X(x)$ ,  $Y(y)$ ,  $Z(z)$  και  $T(t)$  αντίστοιχα. Η επιλογή βέβαια των συμβόλων για τις συναρτήσεις της μιας μεταβλητής που αντιστοιχούν στις ανεξάρτητες μεταβλητές είναι καθήκον του χρήστη της μεθόδου. Συνήθως όμως γίνεται με λογικό τρόπο, όπως στην παρούσα περίπτωση.

Ακολουθούν τα επόμενα βήματα στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Αρχικά προσδιορίζονται οι αναγκαίες μερικές παράγωγοι με παραγωγή της σχέσεως (5.1.1). Βέβαια στη σχέση αυτή η κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή παρουσιάζεται σε μια μόνο συνάρτηση, π.χ. η μεταβλητή  $x$  παρουσιάζεται μόνο στη συνάρτηση  $X(x)$ . Στη συνέχεια οι μερικές αυτές παράγωγοι εισάγονται στην αρχική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Επόμενο βήμα αποτελεί η διαίρεση με το γινόμενο των συναρτήσεων της μιας μεταβλητής, π.χ.  $X(x)Y(y)Z(z)T(t)$  στη σχέση (5.1.1). Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτουν κλάσματα της μιας μόνο μεταβλητής, τα οποία πρέπει επομένως να είναι ίσα με σταθερές. Διαπιστώνεται ότι έτσι η αρχική γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους μπορεί να αναχθεί σε επίσης γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Οι εξισώσεις αυτές είναι ίσες στον αριθμό με τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών, π.χ. των τεσσάρων μεταβλητών  $x$ ,  $y$ ,  $z$  και  $t$  στην σχέση (5.1.1). Ακολουθεί η επίλυση των συνήθων αυτών διαφορικών εξισώσεων με προσδιορισμό των γενικών λύσεών τους. (Βέβαια οι γενικές αυτές λύσεις περιέχουν αυθαίρετες σταθερές!) Έπειτα εφαρμόζονται κατάλληλα οι διαθέσιμες συνήθως ομογενείς και γραμμικές συνοριακές συνθήκες. Έτσι προκύπτουν τελικά μερικές (ή ειδικές) λύσεις  $u_n$  της αρχικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους. Οι μερικές αυτές λύσεις πληρούν επίσης και τις ομογενείς από τις γραμμικές συνοριακές συνθήκες που ισχύουν.

Με βάση την αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων σε ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και σε αντίστοιχες ομογενείς συνοριακές συνθήκες, η ζητούμενη λύση  $u$  εκφράζεται σαν σειρά μερικών λύσεων, δηλαδή

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (5.1.2)$$

Η λύση αυτή  $u$  πληροί τόσο την αρχική ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους όσο και τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Οι διαθέσιμες στη λύση αυτή  $u$  σταθερές οφείλονται βέβαια στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που έχουν ήδη επιλυθεί. Οι σταθερές αυτές προσδιορίζονται τελικά από τις αρχικές ή/και τις συνοριακές συνθήκες που δεν πάθησαν ακόμη υπόψη, έτσι ώστε στο τέλος να επαληθευτεί και η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, αλλά και όλες οι συνθήκες που τη συνοδεύουν. Οι συνθήκες αυτές είναι: (α) οι αρχικές συνθήκες,



που αναφέρονται στο χρόνο  $t$ , εάν υπάρχουν (π.χ. στην εξίσωση του Laplace δεν υπάρχουν), και (β) οι συνοριακές συνθήκες, που αναφέρονται στη θέση, π.χ.  $(x, y, z)$  στον τριδιάστατο χώρο.

Η παραπάνω διαδικασία θα επιδειχθεί και ελπίζεται ότι θα διασαφηνισθεί στις τρεις κλασικές εφαρμογές που ακολουθούν και είναι αρκετά λεπτομερείς, ιδίως η πρώτη. Στη συνέχεια η ίδια διαδικασία θα χρησιμοποιηθεί και στις πιο εξειδικευμένες στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού εφαρμογές των επόμενων τριών κεφαλαίων.

Κατά βάση θα εξετασθούν ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς με σταθερούς συντελεστές. Εντούτοις στο τέλος αυτού του Κεφαλαίου Β5, συγκεκριμένα στις Ενότητες Β5.5 και Β5.6 και ιδίως στο επόμενο Κεφάλαιο Β6 θα υπάρξουν και απλές εφαρμογές της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών και σε μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες (Ενότητα Β5.5), επίσης και σε μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς με σταθερούς συντελεστές (Ενότητα Β5.6 και Κεφάλαιο Β6). Όμως για τις τελευταίες αυτές εφαρμογές (σε μη ομογενείς εξισώσεις) θα απαιτηθεί γενίκευση της μεθόδου. Η γενίκευση αυτή (στην Ενότητα Β5.6 παρακάτω) παρουσιάζει κάποια αναλογία (αλλ' όχι πλήρη αναλογία) με τη γνωστή μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων στις μη ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις.

## B5.2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ

### B5.2.1. Το πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών

Σαν πρώτο παράδειγμα των δυνατοτήτων της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών θα την εφαρμόσουμε στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος, πιο συγκεκριμένα στην εξίσωση της ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{με} \quad u = u(x, t). \quad (5.2.1)$$

Σημειώνουμε ότι η ίδια εξίσωση ισχύει προσεγγιστικά και για καλώδια, π.χ. σε καλωδιωτές γέφυρες, όπως είναι η γέφυρα Ρίου-Αντιρρίου. Στην εξίσωση αυτή, που είναι μια διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως, συμβολίζουμε με  $x$  τη θέση κατά μήκος της χορδής, με  $t$  το χρόνο και με  $u = u(x, t)$  την εγκάρσια (κάθετη) μετατόπιση των σημείων της χορδής. Το σύμβολο  $c$  δηλώνει γνωστή θετική σταθερά με διαστάσεις ταχύτητας, όπως έχει ήδη αναφερθεί στην Παράγραφο Β2.1.3. Τη χορδή αυτή τη θεωρούμε ότι κείται κατά μήκος του άξονα  $Ox$  και ότι έχει μήκος  $L$  με  $0 \leq x \leq L$ . Επίσης τα δύο άκρα της  $x = 0$  και  $x = L$  υποτίθενται στερεωμένα με την έννοια ότι οι εγκάρσιες μετατοπίσεις τους  $u$  κατά τον άξονα  $Oy$  (που είναι κάθετος στη χορδή) είναι συνεχώς μηδενικές. Έχουμε έτσι τις συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.2.2)$$

και στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της χορδής και μάλιστα για κάθε χρονική στιγμή  $t$  με  $t \geq 0$ .

Πέρα από τις συνοριακές αυτές συνθήκες υποθέτουμε επίσης γνωστές και τις αρχικές συνθήκες (για  $t = 0$ ), συγκεκριμένα τις αρχικές μετατοπίσεις και ταχύτητες των σημείων της χορδής

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (5.2.3)$$

αντίστοιχα. Στις αρχικές αυτές συνθήκες οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  είναι γνωστές. Λόγω των ομογενών συνοριακών συνθηκών (5.2.2), που μόλις αναφέρθηκαν, πρέπει ασφαλώς για τις συναρτήσεις  $f(x)$  (αρχική μορφή, αρχικό σχήμα της χορδής) και  $g(x)$  (αρχικές ταχύτητες των σημείων της χορδής) να ισχύουν οι περιορισμοί

$$f(0) = f(L) = 0, \quad g(0) = g(L) = 0 \quad (5.2.4)$$

στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της χορδής.

Ας σημειωθεί επίσης ότι είναι εύλογο να έχουμε δύο συνοριακές συνθήκες: τις (5.2.2) και δύο αρχικές συνθήκες: τις (5.2.3). Αυτά συμβαίνουν, επειδή η εξίσωση της χορδής (5.2.1) περιέχει και δεύτερη μερική παράγωγο ως προς τη θέση  $x$ : την παράγωγο  $\partial^2 u / \partial x^2$  στο αριστερό της μέλος. Επίσης η ίδια εξίσωση (5.2.1) περιέχει και δεύτερη μερική παράγωγο και ως προς το χρόνο  $t$ : την παράγωγο  $\partial^2 u / \partial t^2$  στο δεξιό μέλος. Επομένως είναι εύλογο να απαιτούνται δύο συνοριακές συνθήκες (εδώ για  $x = 0$  και  $x = L$ ): οι (5.2.2) και επίσης δύο αρχικές συνθήκες (για  $t = 0$ ): οι (5.2.3).

### B5.2.2. Χωρισμός των μεταβλητών

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε επομένως προς επίλυση το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών της ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής, που αποτελείται: (α) από τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (5.2.1), (β) από τις συνοριακές συνθήκες (5.2.2) και (γ) από τις αρχικές συνθήκες (5.2.3). Το κλασικό αυτό πρόβλημα θα το επιλύσουμε με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών ως προς τη διαφορική εξίσωση (5.2.1) της χορδής. Δεχόμαστε καταρχήν (μόνο καταρχήν) την άγνωστη συνάρτηση  $u(x, t)$  (που εκφράζει την εγκάρσια μετατόπιση των σημείων της χορδής, τη μορφή, το σχήμα της χορδής) σαν γινόμενο δύο επίσης αγνώστων συναρτήσεων: μιας συναρτήσεως  $X(x)$  της θέσεως  $x$  μόνο επί μια συνάρτηση  $T(t)$  του χρόνου  $t$  μόνο. Δεχόμαστε δηλαδή ότι

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (5.2.5)$$

Στη συνέχεια θα πάρουμε υπόψη μας πρώτα τις συνοριακές συνθήκες (5.2.2) και έπειτα και τις αρχικές συνθήκες (5.2.3) με αυτήν τη σειρά απλά για υπολογιστικούς λόγους. Δηλαδή υπολογιστικά πρέπει να ληφθούν υπόψη πρώτα οι συνοριακές συνθήκες (5.2.2), που είναι ομογενείς (δηλαδή με τα δεξιά τους μέλη μηδενικά), και έπειτα οι αρχικές συνθήκες (5.2.3), οι οποίες είναι μη ομογενείς (δηλαδή με τα δεξιά τους μέλη γνωστές συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$ ). Άρα οι αρχικές συνθήκες (5.2.3) είναι σαφώς πιο δύσκολες στο να ληφθούν υπόψη.

Ξεκινάμε τους υπολογισμούς μας από τη βασική εξίσωση (5.2.5) χωρισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$  και  $t$ . Προσδιορίζουμε εύκολα τη δεύτερη μερική παράγωγο της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$  ως προς τη θέση  $x$  (δεύτερη χωρική, ως προς  $x$ , μερική παράγωγος με το χρόνο  $t$  σταθερά). Στη συνέχεια προσδιορίζουμε και τη δεύτερη μερική παράγωγο της ίδιας συναρτήσεως  $u(x, t)$  ως προς το χρόνο  $t$  (δεύτερη χρονική, ως προς  $t$ , μερική παράγωγος με τη θέση  $x$  σταθερά). Έτσι πάρα πολύ εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = X''(x) T(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = X(x) \ddot{T}(t) \quad (5.2.6)$$

έχοντας επιλέξει για τη δήλωση των χρονικών μερικών παραγώγων τη χρήση της τελείας αντί της οξείας, του τόνου, που χρησιμοποιείται για τη δήλωση των χωρικών μερικών παραγώγων. (Εξάλλου αυτή η επιλογή συνηθίζεται να γίνεται!) Αντικαθιστώντας τώρα τα αποτελέσματα αυτά (5.2.6) στην αρχική διαφορική εξίσωση της χορδής (5.2.1), βρίσκουμε ότι

$$X''(x) T(t) = \frac{1}{c^2} X(x) \ddot{T}(t). \quad (5.2.7)$$

Ακολουθώς υποθέτουμε τις δύο νέες άγνωστες συναρτήσεις  $X(x)$  και  $T(t)$  συνεχώς μη μηδενικές και διαιρούμε με το γινόμενό τους  $X(x) T(t)$  την παραπάνω εξίσωση (5.2.7). Έτσι τη φέρνουμε στην εξής μορφή:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)}. \quad (5.2.8)$$

Πραγματικά στη μορφή αυτή στο κλάσμα του αριστερού μέλους παρουσιάζεται μόνο η χωρική μεταβλητή  $x$ , ενώ στο κλάσμα του δεξιού μέλους μόνο η χρονική μεταβλητή  $t$ . Έτσι πετύχαμε το χωρισμό των μεταβλητών στην ίδια τη διαφορική εξίσωση της χορδής (5.2.1) (όπως αναφέραμε, ισχύει προσεγγιστικά και για καλώδια!), που είναι βέβαια η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος.

Τώρα, παραγωγίζοντας την εξίσωση αυτή (5.2.8) ως προς τη θέση  $x$ , βρίσκουμε ότι

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{X''(x)}{X(x)} \right) = 0. \quad (5.2.9)$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει, γιατί η παράγωγος ως προς  $x$  του δεξιού κλάσματος  $\ddot{T}(t)/T(t)$  είναι προφανώς ίση με μηδέν, επειδή το κλάσμα αυτό είναι ανεξάρτητο από τη θέση  $x$ . Επομένως με την παράγωγο της συναρτήσεως  $X''(x)/X(x)$  της θέσεως  $x$  (μόνο) να είναι ίση με το μηδέν, ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή (5.2.9) (ως προς τη θέση  $x$  προφανώς), διαπιστώνουμε άμεσα ότι η ίδια η συνάρτηση αυτή  $X''(x)/X(x)$  πρέπει να είναι απλά μια σταθερά  $\lambda$ , δηλαδή

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda. \quad (5.2.10)$$

Ξέρουμε όμως από τη σχέση (5.2.8) ότι το κλάσμα αυτό είναι ίσο και με την αντίστοιχη παράσταση  $(1/c^2) \ddot{T}(t)/T(t)$  του χρόνου  $t$  στο δεξιό μέλος (με το  $c$  σταθερά). Άρα η σχέση (5.2.8), απλά λόγω της σχέσεως (5.2.10), παίρνει άμεσα τη μορφή

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \lambda. \quad (5.2.11)$$

Το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα μπορεί βέβαια να προκύψει παραγωγίζοντας τη σχέση (5.2.8) ως προς το χρόνο  $t$ . Τότε προκύπτει

$$\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} \right) = 0. \quad (5.2.12)$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή, που το αριστερό της μέλος είναι μια συνάρτηση του χρόνου  $t$ , ως προς το χρόνο  $t$ , προφανώς διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \lambda \quad (5.2.13)$$

με το  $\lambda$  σταθερά. Λόγω της αρχικής σχέσεως (5.2.8) (χωρισμός των μεταβλητών) οδηγούμαστε και πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα (5.2.11).

Το ότι τα δύο ίσα μέλη της εξισώσεως (5.2.8) είναι ίσα και με σταθερά, δηλαδή ότι η ποσότητα  $\lambda$  στη σχέση (5.2.11) είναι σταθερά: ούτε συνάρτηση του  $x$ , αλλ' ούτε και του  $t$ , προκύπτει και χωρίς παραγωγή, άμεσα και με κατανοητό τρόπο κατευθείαν από την εξίσωση (5.2.8). Στο συμπέρασμα αυτό οδηγούμαστε με τον ακόλουθο τρόπο σκέψεως: Στη σχέση αυτή (5.2.8) το αριστερό μέλος είναι συνάρτηση μόνο του  $x$ , το δε δεξιό μέλος μόνο του  $t$ . Άρα η ποσότητα  $\lambda$  στη σχέση (5.2.11) δε μπορεί να μεταβάλλεται με το  $t$ , γιατί η ποσότητα  $X''(x)/X(x)$ , με την οποία είναι ίση, δε μεταβάλλεται με το  $t$ , είναι ανεξάρτητη του  $t$ . Με ανάλογο τρόπο σκέψεως η ποσότητα  $\lambda$  στη σχέση (5.2.11) δε μπορεί να μεταβάλλεται ούτε και με το  $x$ , επειδή η ποσότητα  $(1/c^2) \ddot{T}(t)/T(t)$  δε μεταβάλλεται με το  $x$ , είναι ανεξάρτητη του  $x$ . Άρα η ποσότητα  $\lambda$  στη σχέση (5.2.11) δεν εξαρτάται ούτε από το  $t$ , αλλ' ούτε και από το  $x$ . Είναι επομένως σταθερά στη σχέση αυτή.

Και με άλλες, ισοδύναμες λέξεις, εάν το  $\lambda$  εξαρτιόταν από το  $t$  στη σχέση (5.2.11), τότε θα μεταβαλλόταν με το  $t$ . Αυτό όμως το συμπέρασμα είναι απολύτως άτοπο, γιατί το  $\lambda$  είναι ίσο με το κλάσμα  $X''(x)/X(x)$ , που σαφώς δε μεταβάλλεται με το  $t$  (εξαρτώμενο μόνο από το  $x$ ). Με όμοιο συλλογισμό, εάν το  $\lambda$  εξαρτιόταν από το  $x$  στην ίδια σχέση (5.2.11), τότε θα μεταβαλλόταν με το  $x$ . Και αυτό όμως το συμπέρασμα είναι εξίσου απολύτως άτοπο, γιατί το  $\lambda$  είναι ίσο με το κλάσμα  $(1/c^2) \ddot{T}(t)/T(t)$ , που σαφώς δε μεταβάλλεται με το  $x$  (εξαρτώμενο μόνο από το  $t$ ).

Με όλες αυτές τις αλληλοεπικαλυπτόμενες σκέψεις θεωρείται βέβαιο ότι η αρχή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών (ή, έστω, των χωριζόμενων μεταβλητών) έγινε πλήρως κατανοητή από το φοιτητή και τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό στο παρόν πρώτο παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου. Υπενθυμίζεται ότι η εφαρμογή αυτή αφορά στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (5.2.1) ή εξίσωση της ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής στην παρούσα ειδική εφαρμογή.

Η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος παρουσιάζεται βέβαια και σε αρκετά άλλα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού, όπως έχει ήδη εκτενώς αναφερθεί στην Παράγραφο Β2.1.3.

Θα προχωρήσουμε τώρα στην καθεαυτό εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών με σκοπό την επίλυση του παρόντος προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών. Θα ξεκινήσουμε από τη σχέση (5.2.11) και θα αναγάγουμε τη δευτέρας τάξεως ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (5.2.1) της χορδής σε δύο συνήθεις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις επίσης δευτέρας τάξεως. Οι συνήθεις αυτές διαφορικές εξισώσεις θα επιλυθούν εύκολα με τις διαθέσιμες γνώσεις από το προηγούμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II.

### **B5.2.3. Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις**

Πραγματικά λόγω της σχέσεως (5.2.5) και του σχετικού χωρισμού των μεταβλητών (της θέσεως  $x$  από το χρόνο  $t$ ) στην άγνωστη συνάρτηση (την εγκάρσια, κάθετη μετατόπιση των σημείων της χορδής)

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad (5.2.14)$$

οι νέες άγνωστες συναρτήσεις  $X(x)$  και  $T(t)$  πληρούν τη σχέση (5.2.11) με το  $\lambda$  σταθερά. Αυτό ήδη επεξηγήθηκε σαφώς. Άρα από τη σχέση (5.2.11) διαπιστώνουμε άμεσα ότι έχουμε τις εξής δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \lambda \quad (5.2.15)$$

με την ίδια ακριβώς σταθερά  $\lambda$ ! Οι εξισώσεις αυτές μετά από πολλαπλασιασμούς τους επί  $X(x)$  και  $c^2 T(t)$  αντίστοιχα γράφονται στις ισοδύναμες μορφές τους

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad (5.2.16)$$

και

$$\ddot{T}(t) - \lambda c^2 T(t) = 0. \quad (5.2.17)$$

Πρόκειται δηλαδή για ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές με δεδομένο ότι και οι δύο ποσότητες  $\lambda$  και  $c$  είναι σταθερές.

### **B5.2.4. Για τις συνοριακές συνθήκες**

Θα ξεκινήσουμε από την επίλυση της πρώτης από τις δύο αυτές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις: της (5.2.16). Αυτή αφορά στη θέση  $x$  κατά μήκος της χορδής. Αυτή η επιλογή γίνεται, επειδή οι σχετικές συνθήκες, οι συνοριακές συνθήκες (5.2.2)

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.2.18)$$

που ισχύουν στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της παρούσας χορδής, είναι πάρα πολύ απλές και ομογενείς (με μηδενικά τα δεξιά τους μέλη). Αντίθετα οι αρχικές συνθήκες (5.2.3) είναι μη ομογενείς. Περιλαμβάνουν μάλιστα δύο συναρτήσεις: τις  $f(x)$  και  $g(x)$ . Με άλλα λόγια θα εξασφαλίσουμε κατά την επίλυση της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (5.2.16) ως προς τη θέση  $x$  την πλήρωση των συνοριακών συνθηκών (5.2.18). Θα εξασφαλίσουμε δηλαδή ότι τα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της χορδής είναι στερεωμένα, δε μπορούν να υποστούν εγκάρσια μετατόπιση.

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι οι συνοριακές συνθήκες (5.2.18) λόγω του χωρισμού των μεταβλητών (5.2.14) γράφονται στη μορφή

$$u(0, t) = X(0) T(t) = 0, \quad u(L, t) = X(L) T(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.2.19)$$

Από την πρώτη από τις συνοριακές αυτές συνθήκες διαπιστώνουμε ότι στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της χορδής θα πρέπει να έχουμε  $X(0) T(t) = 0$  για κάθε χρονική στιγμή  $t$  ( $t \geq 0$ ). Είναι επομένως αναγκαίο να ισχύει τουλάχιστο μια από τις εξής δύο συνθήκες:

$$X(0) = 0, \quad T(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.2.20)$$

Η πρώτη από τις συνθήκες αυτές, η  $X(0) = 0$ , είναι φυσικά και μαθηματικά απόλυτα αποδεκτή. Είναι η συνθήκη που θα προτιμηθεί στην παραπέρα επίλυση του παρόντος προβλήματος της ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής. Αντίθετα η δεύτερη πιθανή συνθήκη  $T(t) = 0$  (για κάθε μη αρνητικό  $t$ , δηλαδή  $\forall t \geq 0 T(t) = 0$ ) παρουσιάζει το σημαντικό μειονέκτημα ότι εξαναγκάζει τη χρονική συνάρτηση  $T(t)$  στο χωρισμό των μεταβλητών (5.2.5) ή (5.2.14) να είναι συνεχώς (σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ ) μηδενική. Τότε άμεσα προκύπτει από αυτόν τον χωρισμό των μεταβλητών ότι η άγνωστη συνάρτηση  $u(x, t)$  πρέπει να είναι και αυτή συνεχώς μηδενική:  $u(x, t) = X(x) T(t) \equiv 0$ . Άρα με την ανεπιτυχή υιοθέτηση της δεύτερης από τις δυνατότητες (5.2.20) προκύπτει η τετριμμένη, η ταυτοτικά μηδενική λύση  $u(x, t) \equiv 0$  για τη ζητούμενη εγκάρσια μετατόπιση, τη μορφή της χορδής  $u(x, t)$ . Από μαθηματικής απόψεως η ταυτοτικά μηδενική λύση  $u(x, t) \equiv 0$  είναι αναμφισβήτητα μια προφανής λύση της διαφορικής εξίσωσης της χορδής (5.2.1) χωρίς βέβαια τις αρχικές συνθήκες (5.2.3). Ταυτόχρονα όμως είναι και μια λύση που δεν παρουσιάζει κανένα φυσικό ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό και εξάλλου μαθηματικά δε μπορεί να οδηγήσει σε λύση του παρόντος προβλήματος της χορδής υπό τις αρχικές συνθήκες (5.2.3).

Είμαστε επομένως αναγκασμένοι να αποδεχθούμε μόνο την πρώτη δυνατότητα στις σχέσεις (5.2.20):  $X(0) = 0$ . Η δυνατότητα αυτή μας εξασφαλίζει την πλήρωση της συνοριακής συνθήκης  $u(0, t) = 0$  στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της χορδής, που είναι ένα στερεωμένο άκρο. Με απόλυτα ανάλογες σκέψεις οφείλουμε να αποδεχθούμε και την αντίστοιχη δυνατότητα  $X(L) = 0$  στο δεξιό και επίσης στερεωμένο άκρο  $x = L$  της χορδής. Άρα συμπερασματικά είμαστε απόλυτα ευχαριστημένοι (και τούτο εξάλλου αποτελεί τη μοναδική μας ρεαλιστική επιλογή) με την αντικατάσταση των συνοριακών συνθηκών (5.2.19) στα δύο στερεωμένα άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της χορδής από τις αντίστοιχες καθαρά χωρικές συνθήκες

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \quad (5.2.21)$$

Είναι προφανές ότι αυτές οι δύο συνθήκες εξασφαλίζουν απόλυτα την πλήρωση των δύο συνοριακών συνθηκών (5.2.2) ή (5.2.18) ή (5.2.19) (μετά το χωρισμό των δύο μεταβλητών: της θέσεως  $x$  και του χρόνου  $t$ ).

### **Β5.2.5. Επίλυση της χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης**

Τώρα για την επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (5.2.16), που σχετίζεται με τη χωρική, δηλαδή αναφερόμενη στη θέση  $x$ , μεταβολή της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$ , υπάρχουν τρεις δυνατότητες ως προς τη σταθερά  $\lambda$  στην εξίσωση αυτή: (α) Να έχει μηδενική τιμή:  $\lambda = 0$ , (β) Να έχει θετική τιμή:  $\lambda > 0$  και (γ) Να έχει αρνητική τιμή:  $\lambda < 0$ . Θα εξετάσουμε χωριστά τις τρεις αυτές περιπτώσεις. Αποβλέπουμε όμως συνεχώς στη δυνατότητα πληρώσεως και των συνοριακών συνθηκών (5.2.21).

**(α) Πρώτη δυνατότητα:**  $\lambda = 0$ : Εάν η σταθερά  $\lambda$  έχει μηδενική τιμή (μια ομολογουμένως πολύ ειδική περίπτωση), η εξίσωση (5.2.16) απλοποιείται ως εξής:

$$X''(x) = 0, \quad 0 < x < L. \quad (5.2.22)$$

Τότε άμεσα με δύο ολοκληρώσεις ή με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\mu^2 = 0$  (με διπλή ρίζα της το μηδέν:  $\mu_{1,2} = 0$ ) συνάγεται ότι

$$X(x) = Ax + B \quad (5.2.23)$$

με τα  $A$  και  $B$  αυθαίρετες σταθερές. Έχουμε επομένως στην παρούσα περίπτωση μια γραμμική μεταβολή της συναρτήσεως  $X(x)$  κατά μήκος της χορδής. Όμως μια τέτοια μεταβολή είναι απαράδεκτη από φυσικής απόψεως για στερεωμένα άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της χορδής αυτής.

Πράγματι από τις συνοριακές συνθήκες (5.2.21) προκύπτει για την παραπάνω λύση  $X(x)$  ότι

$$X(0) = A \cdot 0 + B = B = 0 \implies B = 0, \quad X(L) = AL + B = AL = 0 \implies A = 0. \quad (5.2.24)$$

Η σχέση αυτή,  $A = 0$ , ισχύει, επειδή  $B = 0$ , όπως ήδη βρέθηκε, και επίσης ασφαλώς ισχύει ότι  $L > 0$ . Άρα

$$A = B = 0 \implies X(x) \equiv 0 \implies u(x, t) = X(x) T(t) \equiv 0. \quad (5.2.25)$$

Επομένως οδηγηθήκαμε στην τετριμμένη και προφανή μηδενική λύση  $u(x, t) \equiv 0$  της διαφορικής εξίσωσης (5.2.1). Προφανώς αυτή δεν είναι η επιθυμητή λύση που αναζητούμε ούτε και είναι δυνατόν να πάρουμε στη συνέχεια υπόψη τις μη ομογενείς αρχικές συνθήκες (5.2.3). Άρα η παρούσα πρώτη δυνατότητα, αν και καταλήγει σε πολύ απλή συνήθη διαφορική εξίσωση, στην (5.2.22), απλά απορρίπτεται.

**(β) Δεύτερη δυνατότητα:**  $\lambda > 0$ : Εάν τώρα η σταθερά  $\lambda$  έχει θετική τιμή, π.χ.  $\lambda = p^2$  (με το  $p$  έστω θετική σταθερά:  $p > 0$ ), η εξίσωση (5.2.16) απλοποιείται ως εξής:

$$X''(x) - p^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < L. \quad (5.2.26)$$

Στην περίπτωση αυτή με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\mu^2 - p^2 = 0$ , που έχει δύο πραγματικές ρίζες:  $\mu_{1,2} = \pm p$  (ή, εναλλακτικά, με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace) συνάγεται ότι

$$X(x) = A_0 e^{px} + B_0 e^{-px}. \quad (5.2.27)$$

Τα  $A_0$  και  $B_0$  είναι επίσης αυθαίρετες σταθερές, ακριβώς όπως ίσχυε και για τις σταθερές  $A$  και  $B$  στην περίπτωση (α), αλλά τώρα για διαφορετική συνήθη διαφορική εξίσωση: την (5.2.26).

Πάρα πολύ συχνά (φυσικά και εδώ) είναι εύλογο ο Πολιτικός Μηχανικός να προτιμάει τη γραφή της παραπάνω λύσεως (5.2.27) με τη χρήση υπερβολικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα το υπερβολικό συνημίτονο  $\cosh z$  και το υπερβολικό ημίτονο  $\sinh z$  ορίζονται ως εξής:

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}. \quad (5.2.28)$$

Τώρα διαπιστώνεται άμεσα ότι

$$e^z = \cosh z + \sinh z, \quad e^{-z} = \cosh z - \sinh z. \quad (5.2.29)$$

Επομένως η λύση (5.2.27) της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (5.2.26) μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη ισοδύναμη υπερβολική μορφή, δηλαδή με τη χρήση υπερβολικών συναρτήσεων αντί της εκθετικής συναρτήσεως:

$$X(x) = A \cosh px + B \sinh px. \quad (5.2.30)$$

Στη μορφή αυτή βέβαια έχουμε προφανώς υποθέσει ότι  $A = A_0 + B_0$  και  $B = A_0 - B_0$ . Αφού όμως και οι σταθερές  $A$  και  $B$  είναι αυθαίρετες, ακριβώς όπως ήσαν και οι  $A_0$  και  $B_0$  στη λύση (5.2.27), οι σχέσεις αυτές δεν έχουν ιδιαίτερη σημασία. Θα μπορούσαν μάλιστα να χρησιμοποιηθούν τα ίδια σύμβολα, έστω  $A$  και  $B$ , και στις δύο (απόλυτα ισοδύναμες) μορφές (5.2.27) και (5.2.30) της λύσεως  $X(x)$  της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (5.2.26). Έτσι όμως υπάρχει κίνδυνος συγχύσεως από τον ακόμη άπειρο στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους Πολιτικό Μηχανικό.

Περιοριζόμαστε στη μορφή (5.2.30) της λύσεως  $X(x)$ . Αυτή είναι ασφαλώς η γενική λύση της παρούσας συνήθους διαφορικής εξίσωσης (5.2.26). Επιζητούμε τώρα, με  $\lambda = p^2 > 0$ , την πλήρωση των συνοριακών συνθηκών (5.2.21) (στερεωμένα άκρα της χορδής  $x = 0$  και  $x = L$ ). Στην πλήρωση αυτή αποτύχαμε στην πρώτη προσπάθειά μας με τη δυνατότητα ( $\alpha$ ), δηλαδή με  $\lambda = 0$ . Τώρα για την παραπάνω λύση  $X(x)$  προκύπτει από τις συνοριακές συνθήκες (5.2.21) ότι

$$X(0) = A \cosh 0 + B \sinh 0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A = 0 \implies A = 0, \quad (5.2.31)$$

$$X(L) = A \cosh pL + B \sinh pL = B \sinh pL = 0 \implies B = 0, \quad (5.2.32)$$

επειδή  $A = 0$ , όπως ήδη βρέθηκε, και επιπλέον  $\sinh pL > 0$ , γιατί  $p > 0$  και  $L > 0$ . Βέβαια λήφθηκε υπόψη ότι  $\cosh 0 = 1$  και  $\sinh 0 = 0$ , επίσης δε ότι  $\sinh z > 0$  για  $z > 0$ . Άρα, ακριβώς όπως και στην παραπάνω δυνατότητα ( $\alpha$ ),

$$A = B = 0 \implies X(x) \equiv 0 \implies u(x, t) = X(x) T(t) \equiv 0. \quad (5.2.33)$$

Επομένως οδηγηθήκαμε (δυστυχώς) και πάλι στην τετριμμένη και προφανή μηδενική λύση  $u(x, t) \equiv 0$  της διαφορικής εξίσωσης (5.2.1), της μονοδιάστατης εξίσωσης του κύματος, με επανάληψη των αρνητικών συμπερασμάτων της δυνατότητας ( $\alpha$ ) (για  $\lambda = 0$ ). Άρα και η παρούσα δεύτερη δυνατότητα (με  $\lambda > 0$ ) απλά απορρίπτεται. Από εκπαιδευτικής απόψεως όμως, πέρα από τη χρήση των υπερβολικών συναρτήσεων συνημίτονο και ημίτονο, μας έδειξε και το πόσο προσεκτικός πρέπει να είναι ο Πολιτικός Μηχανικός κατά την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους που συνοδεύεται από συνοριακές συνθήκες. Πρέπει να είναι αρκετά προσεκτικός, ώστε να μην οδηγηθεί σε τετριμμένες, μηδενικές λύσεις. Αυτό δεν αποφεύχθηκε ούτε στην παρούσα δεύτερη δυνατότητα, αλλά πρέπει οπωσδήποτε να αποφευχθεί στην τρίτη δυνατότητα ευθύς πιο κάτω, που είναι και η τελευταία που απομένει.

**(γ) Τρίτη δυνατότητα:**  $\lambda < 0$ : Στην τελευταία αυτή δυνατότητα η σταθερά  $\lambda$  υποτίθεται ότι έχει αρνητική τιμή, π.χ.  $\lambda = -p^2 < 0$  (με το  $p$  έστω θετική σταθερά:  $p > 0$ ). Στην περίπτωση αυτή η χωρική διαφορική εξίσωση (5.2.16) που εξετάζεται απλοποιείται ως εξής:

$$X''(x) + p^2 X(x) = 0, \quad 0 < x < L. \quad (5.2.34)$$

Με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης  $\mu^2 + p^2 = 0$ , που έχει τώρα δύο φανταστικές ρίζες:  $\mu_{1,2} = \pm ip$  με  $i = \sqrt{-1}$  (ή, εναλλακτικά, με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace) συμπεραίνουμε ότι

$$X(x) = A_0 e^{ipx} + B_0 e^{-ipx}. \quad (5.2.35)$$

Στη γενική αυτή λύση τα  $A_0$  και  $B_0$  παριστάνουν και πάλι αυθαίρετες σταθερές, ακριβώς όπως είχε συμβεί και στις δυνατότητες ( $\alpha$ ) και ( $\beta$ ). Τώρα όμως έχουμε διαφορετική συνήθη διαφορική εξίσωση: την (5.2.34).

Σχεδόν πάντοτε (και εδώ φυσικά) είναι αναγκαίο ο Πολιτικός Μηχανικός να προτιμά τη γραφή της παραπάνω λύσεως (5.2.35) με τη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων: του συνημιτόνου και του ημιτόνου (αντί της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως). Οι τριγωνομετρικές αυτές συναρτήσεις επαληθεύουν τους τύπους

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (5.2.36)$$

Από τους τύπους αυτούς διαπιστώνεται άμεσα η ισχύς των τύπων του Euler

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (5.2.37)$$

Επομένως η λύση (5.2.35) της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (5.2.34) μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη ισοδύναμη (και έντονα προτιμητέα) τριγωνομετρική μορφή της, δηλαδή με τη χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων αντί της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως:

$$X(x) = A \cos px + B \sin px. \quad (5.2.38)$$

Βέβαια στη μορφή αυτή θέσαμε  $A = A_0 + B_0$  και  $B = i(A_0 - B_0)$ , αλλά, ακριβώς όπως και στην προηγούμενη περίπτωση (β), τούτο δεν έχει ιδιαίτερη σημασία.

Αυτό που έχει σημασία για τον Πολιτικό Μηχανικό είναι ότι η συνάρτηση  $X(x)$  (η χωρική συνάρτηση, η συνάρτηση της θέσεως  $x$ ) στη λύση  $u(x, t)$  που επιθυμούμε να προσδιορίσουμε στην εξεταζόμενη εξίσωση της χορδής πρέπει οπωσδήποτε να είναι πραγματική. (Αλίμονο μάλιστα αν δεν ήταν: η άγνωστη συνάρτηση  $u(x, t)$  παριστάνει την εγκάρσια μετατόπιση των σημείων της χορδής συναρτήσει της θέσεως  $x$  κατά μήκος της και του χρόνου  $t$ . Είναι πραγματική συνάρτηση!) Επομένως η μορφή (5.2.35) της λύσεως  $X(x)$  της διαφορικής εξίσωσης (5.2.34) είναι πολύ δύσχρηστη, γιατί περιλαμβάνει τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση (με ορίσματα  $\pm ipx$ ). Άρα στη λύση αυτή (5.2.35) οι δύο αυθαίρετες σταθερές  $A_0$  και  $B_0$  πρέπει να επιλεγούν σαν κατάλληλες μιγαδικές σταθερές. Μόνο έτσι θα προκύψει τελικά πραγματική λύση  $X(x)$ , που να είναι και από φυσικής απόψεως αποδεκτή σε ένα πρόβλημα χορδής. Τούτο, αν και είναι εφικτό, απαιτεί εντούτοις κάποια εμπειρία, αντίθετα με τη μορφή (5.2.38) της ίδιας λύσεως  $X(x)$ , που οδηγεί άμεσα σε πραγματικές μερικές (ειδικές) λύσεις. Η σταθερά  $p$  έχει ήδη υποθεθεί θετική. (Θα μπορούσε βέβαια να είχε υποθεθεί και αρνητική.) Ασφαλώς αρκεί πια και οι σταθερές  $A$  και  $B$  στη γενική λύση (5.2.38) της διαφορικής εξίσωσης (5.2.34) να είναι και αυτές πραγματικές.

### B5.2.6. Οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις

Σύμφωνα με αυτές τις σκέψεις περιοριζόμαστε στη μορφή (5.2.38) της λύσεως  $X(x)$ . Επιζητούμε και πάλι (τώρα όμως έχοντας επιλέξει  $\lambda = -p^2 < 0$ ) την πλήρωση των δύο συνοριακών συνθηκών (5.2.21). (Επαναλαμβάνεται ότι αυτές απλά δηλώνουν στερεωμένα άκρα της χορδής:  $x = 0$  και  $x = L$ .) Ως προς την πλήρωση των δύο αυτών συνθηκών (5.2.21) σημειώνουμε ότι είχαμε αποτύχει τόσο στην πρώτη προσπάθειά μας με τη δυνατότητα (α), έχοντας υποθέσει  $\lambda = 0$ , όσο και στη δεύτερη με τη δυνατότητα (β), έχοντας υποθέσει  $\lambda > 0$ . Με την πιο πάνω λύση (5.2.38) για τη χωρική συνάρτηση  $X(x)$  προκύπτει από τις συνοριακές συνθήκες (5.2.21) ότι

$$X(0) = A \cos 0 + B \sin 0 = A \cdot 1 + B \cdot 0 = A = 0 \quad \implies \quad A = 0, \quad (5.2.39)$$

$$X(L) = A \cos pL + B \sin pL = B \sin pL = 0, \quad (5.2.40)$$

επειδή  $A = 0$ , όπως ήδη βρέθηκε.

Άρα δύο υποδυνατότητες είναι τώρα διαθέσιμες. (i) Πρώτη υποδυνατότητα αποτελεί η υπόθεση ότι  $B = 0$ , ακριβώς όπως και στις παραπάνω δυνατότητες (α) και (β). Με την υπόθεση αυτή δυστυχώς προκύπτει ότι

$$A = B = 0 \quad \implies \quad X(x) \equiv 0 \quad \implies \quad u(x, t) = X(x) T(t) \equiv 0. \quad (5.2.41)$$

Καταλήγουμε επομένως και πάλι στην τετριμμένη και προφανή μηδενική λύση  $u(x, t) \equiv 0$  της διαφορικής εξίσωσης (5.2.1). (ii) Δεύτερη υποδυνατότητα αποτελεί η υπόθεση ότι

$$\sin pL = 0 \quad \implies \quad pL = n\pi \quad \implies \quad p = p_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.2.42)$$

με το  $n$  θετικό ακέραιο αριθμό, έτσι ώστε  $p > 0$ , όπως ήδη υποθέσαμε στην παρούσα δυνατότητα (γ). Τις τιμές αυτές του  $p$  (μια τιμή για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό  $n$ ) τις συμβολίζουμε εύλογα με  $p_n$  και, όπως διαπιστώσαμε, είναι ίσες με  $n\pi/L$ .



Με τον τρόπο αυτό επιλογής των τιμών της θετικής σταθεράς  $p$ , δηλαδή σαν

$$p = p_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.2.43)$$

προσδιορίζουμε και τις αντίστοιχες εκφράσεις των λύσεων  $X(x)$  της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (5.2.34). Η εξίσωση (5.2.34) προέκυψε από την αρχική μορφή της (5.2.16) έχοντας θέσει σ' αυτή  $\lambda = -p^2$ , δηλαδή στην περίπτωση μας με βάση τις σχέσεις (5.2.43) έχοντας θέσει

$$\lambda = \lambda_n = -p_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (5.2.44)$$

Καλούμε  $X_n(x)$  τη λύση  $X(x)$  που αντιστοιχεί σε μια τιμή  $p_n$  ή στην αντίστοιχη τιμή  $\lambda_n$ . Παίρνουμε υπόψη τη γενική λύση (5.2.38), που συνοδεύεται από το αποτέλεσμα  $A = 0$  από τη σχέση (5.2.39). (Η σχέση αυτή (5.2.39) δηλώνει απλά τη στήριξη, την αδυναμία κινήσεως στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της χορδής.) Λαμβάνουμε επίσης υπόψη και το παραπέρα αποτέλεσμα  $p = p_n = n\pi/L$  από τη σχέση (5.2.42) ή την (5.2.43). (Η σχέση (5.2.42) δηλώνει επίσης στήριξη, επομένως και αδυναμία κινήσεως, επιπλέον και στο δεξιό άκρο  $x = L$  της χορδής.) Άρα έχουμε

$$X(x) = X_n(x) = B_n \sin p_n x = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (5.2.45)$$

Στις εκφράσεις αυτές των συναρτήσεων  $X_n(x)$  πήραμε την πρωτοβουλία να δηλώσουμε τη σταθερά  $B$  σαν  $B_n$ . Δείχνουμε έτσι ότι η σταθερά αυτή μπορεί να διαφέρει από μια συνάρτηση  $X_n(x)$  σε μια άλλη συνάρτηση  $X_m(x)$ , δηλαδή για άλλη τιμή  $m \neq n$  του θετικού ακέραιου αριθμού  $n$ . Αυτό όμως δεν είναι εδώ το θέμα με τη μεγαλύτερη σημασία.

Το βασικό συμπέρασμά μας από τις παραπάνω μερικές λύσεις  $X_n(x)$ , που δίνονται από τους τύπους (5.2.45), είναι ότι οι συναρτήσεις αυτές επαληθεύουν τόσο τη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (5.2.16) όσο και τις συνοριακές συνθήκες (5.2.21). Αυτά μπορούν να επαληθευθούν πολύ εύκολα. (Σημειώνεται βέβαια ότι αυτά ισχύουν για τις προσδιορισθείσες τιμές  $\lambda_n$  του  $\lambda$  στις σχέσεις (5.2.44).) Πραγματικά

$$X_n''(x) - \lambda_n X_n(x) = -B_n \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = 0 \quad (5.2.46)$$

ως προς την επαλήθευση της συνήθους διαφορικής εξίσώσεως (5.2.16). Τα πράγματα είναι ακόμη ευκολότερα ως προς την επαλήθευση των συνοριακών συνθηκών (5.2.21):

$$X_n(0) = B_n \sin \frac{n\pi \cdot 0}{L} = \sin 0 = 0, \quad X_n(L) = B_n \sin \frac{n\pi L}{L} = \sin n\pi = 0, \quad (5.2.47)$$

γιατί το  $n$  είναι θετικός ακέραιος αριθμός.

Για το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \implies X''(x) = \lambda X(x), \quad X(0) = X(L) = 0, \quad (5.2.48)$$

που προαναφέρθηκε και που γράφεται ισοδύναμα σαν

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda\right) X(x) = 0, \quad X(0) = X(L) = 0, \quad (5.2.49)$$

οι ειδικές τιμές  $\lambda_n$  του  $\lambda$  που ήδη βρέθηκαν: σχέσεις (5.2.44) καλούνται **ιδιοτιμές** ή **χαρακτηριστικές τιμές**. Ως εκ τούτου το παραπάνω πρόβλημα (5.2.48) καλείται και **πρόβλημα ιδιοτιμών** ή **χαρακτηριστικών τιμών**. Οι αντίστοιχες (στις ιδιοτιμές  $\lambda_n$ ) συναρτήσεις  $X_n(x)$  καλούνται **ιδιοσυναρτήσεις** ή **χαρακτηριστικές συναρτήσεις**. Εντούτοις ο Πολιτικός Μηχανικός μπορεί, όπως θα γίνει καλύτερα κατανοητό στο επόμενο Κεφάλαιο Β6, να αποκαλεί τις συναρτήσεις  $X_n(x)$  και **ιδιομορφές ταλαντώσεως** (ή απλά **ιδιομορφές**) της παρούσας χορδής. Ο όρος ιδιομορφές είναι εύλογος, γιατί οι συναρτήσεις  $X_n(x)$  δείχνουν τη μορφή την οποία παίρνει η χορδή κατά την κίνηση

των σημείων της (ανεξάρτητα βέβαια από τη χρονική συνάρτηση  $T(t)$ ) έπειτα από το χωρισμό των μεταβλητών (5.2.14) ή αλλιώς σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή  $t = t_0$ . Οι ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  καλούνται επίσης και τρόποι ταλαντώσεως. Το γιατί όμως πρόκειται για ταλάντωση της χορδής θα εξηγηθεί αμέσως πιο κάτω.

### Β5.2.7. Επίλυση της χρονικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης

Με γνωστές τώρα τις ιδιοτιμές  $\lambda = \lambda_n = -p_n^2 = -(n\pi/L)^2$  (σχέσεις (5.2.44)), μπορούμε πλέον να προχωρήσουμε στην παρούσα μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών με σκοπό την επίλυση και της χρονικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης (5.2.17), που αφορά στη χρονική συνάρτηση  $T(t)$ . Η εξίσωση αυτή παίρνει τώρα τη μορφή

$$\ddot{T}_n(t) - \lambda_n c^2 T_n(t) = 0 \implies \ddot{T}_n(t) + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.2.50)$$

για τις ιδιοτιμές  $\lambda_n$  που ήδη βρέθηκαν στις σχέσεις (5.2.44). Για τη συνήθη διαφορική εξίσωση (5.2.50) χρησιμοποιούμε τη χαρακτηριστική εξίσωση  $p^*(\mu) = 0$  και τις ρίζες της  $\mu_{1,2}$ :

$$p^*(\mu) = \mu^2 + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 = 0 \implies \mu = \mu_{1,2} = \pm \frac{i n\pi c}{L}. \quad (5.2.51)$$

Έτσι διαπιστώνουμε αμέσως (απολύτως ανάλογα με ό,τι ήδη έγινε στη διαφορική εξίσωση (5.2.34)) ότι οι ζητούμενες συναρτήσεις  $T_n(t)$  δίνονται από τους τύπους

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{n\pi c t}{L} + D_n \sin \frac{n\pi c t}{L}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (5.2.52)$$

Στους τύπους αυτούς τα σύμβολα  $C_n$  και  $D_n$  παριστάνουν αυθαίρετες σταθερές που θα προσδιορισθούν στη συνέχεια από τις μη ομογενείς αρχικές συνθήκες (5.2.3).

Οι πιο πάνω τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $T_n(t)$  είναι φυσικά αποδεκτές σε πρόβλημα χορδής και δηλώνουν ιδιοταλαντώσεις της χορδής χωρίς χρονική αύξηση, αλλ' ούτε και μείωση, του εύρους τους. Έτσι κι αλλιώς δεν υπεισέρχεται απόσβεση στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της χορδής (5.2.1) ούτε βέβαια και στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (5.2.50).

Στο σημείο αυτό ας γίνει μια παρατήρηση. Η ήδη απορριφθείσα επιλογή  $\lambda = 0$  (πρώτη δυνατότητα) για τις χωρικές συναρτήσεις  $X(x)$  οδηγεί στην ακόλουθη σχετική χρονική διαφορική εξίσωση, που προκύπτει από τη συνήθη διαφορική εξίσωση (5.2.17):

$$\ddot{T}(t) = 0 \quad \text{με γενική λύση} \quad T(t) = Ct + D, \quad t \geq 0 \quad (\lambda = 0). \quad (5.2.53)$$

Στη λύση αυτή τα σύμβολα  $C$  και  $D$  δηλώνουν αυθαίρετες σταθερές. Όμως οι συναρτήσεις  $T(t)$  για τις σχετικές χρονικές μεταβολές της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t) = X(x) T(t)$  είναι προφανώς απαράδεκτες από φυσικής απόψεως, επειδή αυξάνουν (κατ' απόλυτο τιμή) με το χρόνο  $t$ .

Εντελώς ανάλογα ισχύουν και για την επιλογή  $\lambda = p^2$  (δεύτερη δυνατότητα), που οδηγεί στην εξής διαφορική εξίσωση και τη γενική λύση της  $T(t)$ :

$$\ddot{T}(t) - p^2 c^2 T(t) = 0 \quad \text{με γενική λύση} \quad T(t) = C \cosh pct + D \sinh pct \quad (\lambda = p^2 > 0). \quad (5.2.54)$$

Και οι συναρτήσεις αυτές  $T(t)$  για τις χρονικές μεταβολές της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t) = X(x) T(t)$  είναι εξίσου απαράδεκτες από φυσικής απόψεως, γιατί και αυτές αυξάνουν (κατ' απόλυτο τιμή) με το χρόνο  $t$ .

Αυτά είναι εμφανή, επειδή, επαναλαμβάνεται, παρουσιάζεται το φυσικά απαράδεκτο φαινόμενο της κατ' απόλυτο τιμή χρονικής αυξήσεως (σε κάθε θέση  $x = x_0$  επί της χορδής) της συναρτήσεως  $u(x, t)$ , δηλαδή της εγκάρσιας μετατοπίσεως των σημείων  $x$  της χορδής. Τούτο δε δικαιολογείται με κανέναν τρόπο χωρίς την παρουσία κατάλληλης εξωτερικής φορτίσεως  $p(x, t)$  επί των σημείων  $x$  της χορδής κάθε χρονική στιγμή  $t$  είτε κατανεμημένης είτε συγκεντρωμένης.

Η παρατήρηση αυτή αποτελεί και επαλήθευση του γεγονότος (τώρα από της χρονικής σκοπιάς βέβαια) ότι πράγματι οι ιδιοτιμές  $\lambda = \lambda_n$  πρέπει οπωσδήποτε να είναι αρνητικές. Τελικά το όλο πρόβλημα αποδείχθηκε (μέσω της λύσεως μέχρι το παρόν σημείο) ότι είναι πρόβλημα ιδιοσταλαντώσεων της χορδής. Καλύτερα θα λέγαμε ότι είναι πρόβλημα ελεύθερων (όχι εξαναγκασμένων) ταλαντώσεων, όπως θα γίνει σαφές αμέσως πιο κάτω, όπου θα ληφθούν υπόψη και οι αρχικές συνθήκες (5.2.3).

### B5.2.8. Μερικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους

Μετά την παραπάνω παρατήρηση προχωράμε στην επίλυση του παρόντος προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών. Το πρόβλημα αυτό αποτελείται: (α) από τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (5.2.1) της ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής, (β) από τις δύο συνοριακές συνθήκες (5.2.2), που αφορούν στα στηριζόμενα (σταθερά) άκρα της χορδής και (γ) από τις δύο αρχικές συνθήκες (5.2.3), που αφορούν στην αρχική θέση  $f(x)$  και στην αρχική ταχύτητα  $g(x)$  των σημείων  $x$  της χορδής τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Είναι ήδη γνωστές οι συναρτήσεις (καλύτερα οι ιδιοσυναρτήσεις)  $X_n(x)$  (από τη λύση (5.2.45)) και  $T_n(t)$  (από τη λύση (5.2.52)). Επομένως οι αντίστοιχες λύσεις

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \quad (5.2.55)$$

της διαφορικής εξίσωσης (5.2.1) (σύμφωνα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (5.2.5)) που επαληθεύουν και τις συνοριακές συνθήκες (5.2.2) (είναι και αυτές οι λύσεις ιδιοσυναρτήσεις) παίρνουν τη μορφή

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \left( C_n^* \cos \frac{n\pi ct}{L} + D_n^* \sin \frac{n\pi ct}{L} \right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.56)$$

Εδώ η σταθερά  $B_n$  στη συνάρτηση  $X_n(x)$  στη λύση (5.2.45) έχει ενσωματωθεί στις σταθερές  $C_n$  και  $D_n$  στη συνάρτηση  $T_n(t)$  στη λύση (5.2.52), δηλαδή τέθηκε

$$C_n^* = B_n C_n, \quad D_n^* = B_n D_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.57)$$

Εξάλλου δεν υπήρχε κανένας λόγος ανεξάρτητης παρουσίας της σταθεράς  $B_n$  στη λύση (5.2.56)!

Εύκολα διαπιστώνεται ότι πραγματικά η συνάρτηση  $u_n(x, t)$  στη λύση (5.2.56) επαληθεύει και τη διαφορική εξίσωση της χορδής (5.2.1), αλλά και τις συνοριακές συνθήκες (5.2.2) της στερεωμένης (στα δύο άκρα της εννοείται) χορδής. Επομένως απομένει η πλήρωση των δύο αρχικών συνθηκών (5.2.3). Πράγματι υπάρχουν δύο σταθερές, οι  $C_n^*$  και  $D_n^*$ , στη λύση (5.2.56), που θα φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες για το σκοπό αυτό με τον τρόπο που θα εκτεθεί αμέσως παρακάτω.

### B5.2.9. Υπέρθηση των μερικών λύσεων

Στο σημείο αυτό πρέπει επίσης να παρατηρηθεί ότι οι δύο αρχικές συνθήκες (5.2.3)

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5.2.58)$$

περιλαμβάνουν δύο συναρτήσεις: (α) την  $f(x)$  (αρχική εγκάρσια μετατόπιση) και (β) τη  $g(x)$  (αρχική εγκάρσια ταχύτητα) όλων των σημείων  $x$  της χορδής. Επομένως δύο μόνο σταθερές δεν αρκούν, ώστε να ληφθούν πλήρως υπόψη οι αρχικές αυτές συνθήκες. Άρα είναι αναγκαίο να ληφθεί υπόψη όχι μόνο μια μερική λύση (ιδιοσυνάρτηση)  $u_n(x, t)$  (έστω για κάποια θετική ακέραια τιμή  $n = n_0$ ), αλλ' ένας πλήρης γραμμικός συνδυασμός άπειρων τέτοιων λύσεων της μορφής

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n^* \cos \frac{n\pi ct}{L} + D_n^* \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (5.2.59)$$

Ένας τέτοιος γραμμικός συνδυασμός πληροί βέβαια τη διαφορική εξίσωση της χορδής (5.2.1), γιατί αυτή είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Πληροί όμως και

τις συνοριακές συνθήκες (5.2.2) στα άκρα της χορδής, επειδή και αυτές είναι ομογενείς. Τούτο παρατηρείται απλά θέτοντας  $x = 0$  και  $x = L$  στον πιο πάνω τύπο (5.2.59). Έγινε λοιπόν στον τύπο αυτό υπέρθεση (ή επαλληλία) άπειρων μερικών λύσεων  $u_n(x, t)$ .

Έχουμε τώρα διαθέσιμες για την πλήρωση των αρχικών συνθηκών (5.2.3) τόσο (α) την απειρία των προς το παρόν αυθαίρετων σταθερών  $C_n^*$  όσο και (β) την απειρία των επίσης αυθαίρετων σταθερών  $D_n^*$ . Φυσικά, εύλογα ο Πολιτικός Μηχανικός σημειώνει ότι λέγοντας αυθαίρετες σταθερές εννοούμε πραγματικές σταθερές, γιατί η εγκάρσια μετατόπιση  $u(x, t)$  των σημείων της χορδής πρέπει να είναι πραγματική συνάρτηση. Αυθαίρετες μεν σταθερές, αλλά μέσα στο φυσικό περιβάλλον του Πολιτικού Μηχανικού σε ένα πρόβλημα ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής. Βέβαια σε ένα τέτοιο πρόβλημα και οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  στις αρχικές συνθήκες (5.2.3) είναι ασφαλώς και αυτές πραγματικές και αυτό πράγματι οδηγεί σε πραγματικές σταθερές  $C_n^*$  και  $D_n^*$ .

### B5.2.10. Πλήρωση και των αρχικών συνθηκών

Προφανώς, όπως ήδη αναφέρθηκε, για την πλήρωση και των δύο αρχικών συνθηκών (5.2.3) θα υπολογισθούν κατάλληλα οι σταθερές  $C_n^*$  και  $D_n^*$  στη λύση (5.2.59), που είναι σε μορφή σειράς. Για το αρχικό σχήμα της χορδής  $f(x)$  (αρχικές εγκάρσιες μετατοπίσεις των σημείων της) θέτουμε απλά  $t = 0$  στη λύση (5.2.59) (σημειώνοντας ότι  $\cos 0 = 1$  και  $\sin 0 = 0$ ). Τότε προκύπτει

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x). \quad (5.2.60)$$

Για τον προσδιορισμό τώρα των σταθερών  $C_n^*$  θα χρησιμοποιήσουμε απλά τη γνωστή έκφραση του αναπτύγματος μιας γνωστής συναρτήσεως  $h(x)$  σε ημιτονική σειρά Fourier στο διάστημα  $[0, L]$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.2.61)$$

Στην έκφραση αυτή οι συντελεστές  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) προσδιορίζονται από τους τύπους

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.62)$$

Έτσι στην περίπτωση μας του αναπτύγματος (5.2.60) για το αρχικό σχήμα της χορδής με γνωστή τη συνάρτηση  $f(x)$  προσδιορίζουμε τους συντελεστές  $C_n^*$  βάσει των αντίστοιχων τύπων

$$C_n^* = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.63)$$

Ήδη απομένει η αρχική συνθήκη για την εγκάρσια αρχική ταχύτητα  $g(x)$  των σημείων της χορδής (η δεύτερη από τις αρχικές συνθήκες (5.2.3)). Προς το σκοπό αυτό παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο  $t$  (μερική παράγωγος) τη σχεδόν τελική λύση (5.2.59). Έτσι βρίσκουμε εύκολα για την ταχύτητα (ακριβέστερα την εγκάρσια ταχύτητα) των σημείων  $x$  της χορδής τη χρονική στιγμή  $t$  τη σχέση

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} \left( -C_n^* \sin \frac{n\pi c t}{L} + D_n^* \cos \frac{n\pi c t}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (5.2.64)$$

Βέβαια στη σχέση αυτή (5.2.64) οι συντελεστές  $C_n^*$  είναι ήδη γνωστοί από τις πιο πάνω σχέσεις (5.2.63). Θέτοντας τώρα  $t = 0$  στη σχέση (5.2.64), βρίσκουμε για την αρχική εγκάρσια ταχύτητα  $g(x)$  ότι

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} D_n^* \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{D}_n^* \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x), \quad (5.2.65)$$

όπου οι νέοι συντελεστές  $\hat{D}_n^*$  ορίσθηκαν προφανώς ως εξής:

$$\hat{D}_n^* = \frac{n\pi c}{L} D_n^* \implies D_n^* = \frac{L}{n\pi c} \hat{D}_n^*. \quad (5.2.66)$$

Η σχέση (5.2.65) είναι εκφρασμένη με τους νέους συντελεστές  $\hat{D}_n^*$ . Είναι επίσης απόλυτα ανάλογη με την (5.2.60) για το αρχικό σχήμα  $f(x)$  της χορδής. Επομένως η σχέση αυτή (5.2.65) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τους άγνωστους συντελεστές  $\hat{D}_n^*$  επίσης σαν συντελεστές ημιτονικής σειράς Fourier βάσει των τύπων (5.2.62) και πάλι. Τώρα όμως έχουμε στο δεξιό μέλος τη γνωστή συνάρτηση  $g(x)$  των αρχικών ταχυτήτων των σημείων της χορδής. Έτσι προκύπτει ότι

$$\hat{D}_n^* = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.67)$$

Οι σχέσεις αυτές (5.2.67) είναι απόλυτα ανάλογες των σχέσεων (5.2.63) και μάλιστα (ακριβώς όπως και οι (5.2.63)) παίρνοντας τις πληροφορίες τους (μέσω της ολοκλήρωσής) κατά μήκος ολόκληρης της ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής  $[0, L]$ . Τούτο ισχύει σε όλες τις σειρές Fourier, όπως είναι και οι παρούσες ημιτονικές σειρές Fourier. Αντίθετα οι σειρές Taylor δημιουργούνται με βάση πληροφορίες από ένα μόνο σημείο  $x = x_0$  για τη συνάρτηση και τις παραγώγους της. Άρα οι σειρές Fourier γενικά πλεονεκτούν των σειρών Taylor στο σημείο αυτό.

Με τη χρήση των δεύτερων από τις σχέσεις (5.2.66) επιστρέφουμε τώρα από τους βοηθητικούς συντελεστές  $\hat{D}_n^*$  στους αρχικούς συντελεστές  $D_n^*$  των τύπων (5.2.59) και (5.2.64). Έτσι απλά πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (5.2.67) επί  $L/(n\pi c)$  βρίσκουμε ότι

$$D_n^* = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2.68)$$

Το παρόν πρόβλημα της χορδής είναι ένα πρόβλημα συνωριακών και αρχικών τιμών που αποτελείται: (α) από τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (5.2.1) (τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος ή εξίσωση της χορδής), (β) από τις δύο συνωριακές συνθήκες (5.2.2) στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της χορδής και (γ) από τις δύο αρχικές συνθήκες (5.2.3) για  $t = 0$ . Ο τελικός τύπος για τη λύση  $u(x, t)$  του προβλήματος αυτού είναι ο τύπος (5.2.59). Υπενθυμίζουμε ότι οι συντελεστές  $C_n^*$  και  $D_n^*$  στον τύπο αυτό (5.2.59) προσδιορίζονται από τους τύπους (5.2.63) και (5.2.68) αντίστοιχα, που προέκυψαν με τη χρήση ημιτονικών σειρών Fourier.

### B5.2.11. Επαλήθευση της λύσεως

Η επαλήθευση του τελικού αυτού τύπου (5.2.59) είναι εντελώς άμεση ως προς τις συνωριακές συνθήκες (γι' αυτό και χρησιμοποιήθηκε κατάλληλη ημιτονική σειρά Fourier ως προς τη θέση  $x$ ). Είναι επίσης πολύ εύκολη ως προς τις αρχικές συνθήκες. Εντούτοις απαιτεί τις αναγκαίες μερικές παραγωγίσεις (δηλαδή τον υπολογισμό των δευτέρων μερικών παραγώγων ως προς τη θέση  $x$  και το χρόνο  $t$ ) για την επαλήθευση της ίδιας της διαφορικής εξίσωσης (5.2.1). Πράγματι, παραγωγίζοντας τη λύση (5.2.59) δύο φορές ως προς τη θέση  $x$ , βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = - \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left( C_n^* \cos \frac{n\pi ct}{L} + D_n^* \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (5.2.69)$$

Ανάλογα με δύο παραγωγίσεις ως προς το χρόνο  $t$  βρίσκουμε εξίσου εύκολα ότι

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = - \left( \frac{\pi c}{L} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left( C_n^* \cos \frac{n\pi ct}{L} + D_n^* \sin \frac{n\pi ct}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (5.2.70)$$

Αντικατάσταση αυτών των δεύτερων μερικών παραγώγων στη διαφορική εξίσωση της ταλαντούμενης (παλλόμενης) χορδής (5.2.1) μας βεβαιώνει άμεσα για την ισχύ της, όπως διαπιστώνουμε αμέσως. Αποτελεί επίσης μερική επαλήθευση της λύσεως (5.2.59) που βρέθηκε για την εγκάρσια μετατόπιση  $u(x, t)$  των σημείων  $x$  της χορδής ( $0 \leq x \leq L$ ) κάθε θετική χρονική στιγμή  $t$  ( $t \geq 0$ ).

Θα προχωρήσουμε τώρα σε μια δεύτερη (και εξίσου κλασική) εφαρμογή της τόσο χρήσιμης μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών: στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως.

### B5.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΧΥΣΕΩΣ

#### B5.3.1. Το πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών

Σαν δεύτερο παράδειγμα των δυνατοτήτων της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών (ή των χωριζόμενων μεταβλητών), θα την εφαρμόσουμε στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως. Πιο συγκεκριμένα θα μελετήσουμε τη μονοδιάστατη εξίσωση της μεταδόσεως θερμότητας (ή μεταφοράς θερμότητας):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u = u(x, t), \quad (5.3.1)$$

έστω κατά μήκος τοίχου πάχους  $L$  με  $0 \leq x \leq L$  και με δυνατότητα μεταδόσεως της θερμότητας μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονα  $x$  κατά το πάχος του τοίχου. Υποθέτουμε δηλαδή τον τοίχο να εκτείνεται προσεγγιστικά στο άπειρο κατά τις διευθύνσεις των αξόνων  $Oy$  και  $Oz$ . Ισοδύναμο πρόβλημα είναι εκείνο της λεπτής συνήθους ράβδου μήκους  $L$ , αλλά με πλήρη πλευρική μόνωση, ώστε η μετάδοση της θερμότητας να γίνεται μόνο κατά τη διεύθυνση του άξονα  $Ox$ . Η διαφορική εξίσωση (5.3.1) είναι φυσικά μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δεύτερας τάξεως (δεύτερη παράγωγος ως προς τη θέση  $x$  στο αριστερό μέλος και πρώτη παράγωγος ως προς το χρόνο  $t$  στο δεξιό μέλος) και με σταθερούς συντελεστές: 1 και  $1/a^2$ . Η άγνωστη συνάρτηση  $u$  αυτήν παριστάνει τη θερμοκρασία  $u = u(x, t)$  σε κάθε σημείο  $x$  του τοίχου που εξετάζουμε ( $0 < x < L$ ) και για κάθε θετική χρονική στιγμή  $t$  ( $t > 0$ ).

Όπως ήδη είδαμε στην Παράγραφο Β1.3.2γ, πρόκειται για διαφορική εξίσωση παραβολικού τύπου. Η ουσιαστική διαφορά της από τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή εδώ εξίσωση της χορδής) (5.2.1), την οποία εξετάσαμε στην προηγούμενη Ενότητα Β5.2, είναι η ύπαρξη τώρα πρώτης χρονικής παραγώγου (στο δεξιό μέλος) αντί δεύτερας χρονικής παραγώγου, που είχαμε στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (5.2.1). Ως προς τη θετική σταθερά  $a^2$  (υποθέτοντας και ότι  $a > 0$ ), αυτή προσδιορίζεται φυσικά ως

$$a^2 = \kappa = \frac{K}{\sigma\rho}. \quad (5.3.2)$$

Ο συντελεστής  $\kappa$  καλείται **συντελεστής μεταδόσεως της θερμότητας**. Επίσης το σύμβολο  $K$  δηλώνει τη **θερμική αγωγιμότητα**, το σύμβολο  $\sigma$  την **ειδική θερμότητα** και το σύμβολο  $\rho$  την **πυκνότητα** του υλικού του τοίχου, που ασφαλώς υποτίθεται ότι είναι ομογενής.

Η διαφορική εξίσωση της μεταδόσεως της θερμότητας στο παρόν μονοδιάστατο πρόβλημα τοίχου συνοδεύεται από δύο συνοριακές συνθήκες στις επίπεδες επιφάνειες  $x = 0$  και  $x = L$  του τοίχου. Οι συνοριακές αυτές συνθήκες θεωρούνται ομογενείς (αφορούν σε μηδενικές θερμοκρασίες) και είναι οι εξής:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.3.3)$$

Κατά συνέπεια και οι δύο επιφάνειες του τοίχου  $x = 0$  και  $x = L$  βρίσκονται σε μηδενική θερμοκρασία κάθε θετική χρονική στιγμή  $t > 0$ . Πρόκειται για ομογενείς συνοριακές συνθήκες και είναι ασφαλώς οι απλούστερες δυνατές. Σημειώνεται ότι από φυσικής απόψεως είναι εύλογο να έχουμε διαθέσιμες δύο συνοριακές συνθήκες, γιατί ο εξεταζόμενος τοίχος έχει δύο επιφάνειες: την  $x = 0$  και την  $x = L$ . Αλλά και από μαθηματικής απόψεως είναι εύλογη η ύπαρξη δύο συνοριακών συνθηκών, γιατί η παραπάνω διαφορική εξίσωση της μεταδόσεως θερμότητας (5.3.1) περιλαμβάνει δεύτερη παράγωγο ως προς τη θέση  $x$  κατά το πάχος του τοίχου.

Πέραν των συνοριακών συνθηκών (5.3.3) έχουμε επίσης διαθέσιμη και μία αρχική συνθήκη: αυτή για την αρχική θερμοκρασία  $f(x)$  στα σημεία  $x$  του τοίχου, δηλαδή

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.3.4)$$

Και η αρχική αυτή συνθήκη είναι αναγκαία από φυσικής απόψεως, επειδή πρέπει να ξέρουμε την αρχική θερμοκρασία  $f(x)$  κατά το πάχος του τοίχου στο παρόν μονοδιάστατο πρόβλημα μεταδόσεως θερμότητας. Αλλά και από μαθηματικής απόψεως είναι εξίσου αναγκαία, γιατί η μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση της μεταδόσεως θερμότητας (της διαχύσεως γενικότερα) (5.3.1) περιλαμβάνει πρώτη παράγωγο ως προς το χρόνο  $t$ .

### B5.3.2. Χωρισμός των μεταβλητών και οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

Για την επίλυση του παρόντος προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών (5.3.1), (5.3.3) και (5.3.4) θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (ή των χωριζόμενων μεταβλητών). Το ίδιο ακριβώς κάναμε ήδη και στην προηγούμενη Ενότητα B5.2 για τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (την εξίσωση της χορδής) (5.2.1), που είναι μια διαφορική εξίσωση υπερβολικού τύπου (Παράγραφος B1.3.2β). Αντίθετα η παρούσα μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (ή, εν προκειμένω, της μεταδόσεως θερμότητας) (5.3.1) είναι παραβολικού τύπου (Παράγραφος B1.3.2γ). Η διαφορά αυτή στον τύπο της εξισώσεως θα επηρεάσει σημαντικά τη λύση που θα βρούμε ως προς τη χρονική μεταβολή της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$  του προβλήματος που εξετάζουμε. Συγκεκριμένα στην ενότητα αυτή δε θα διαπιστωθεί καμία ταλάντωση ή διάδοση κύματος. Κατά τα υπόλοιπα η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών είναι ουσιαστικά η ίδια και στην προηγούμενη εφαρμογή της και στην παρούσα ως προς τη μεθοδολογία που θα ακολουθηθεί. Αυτό θα μας δώσει την ευκαιρία να είμαστε κάπως ταχύτεροι και λεκτικά κάπως λιτότεροι στην παρούσα εφαρμογή σε σύγκριση με εκείνη της προηγούμενης Ενότητας B.5.2.

Έτσι στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών θεωρούμε για την άγνωστη συνάρτηση  $u(x, t)$  και πάλι ότι

$$u(x, t) = X(x) T(t). \tag{5.3.5}$$

Τώρα βέβαια η άγνωστη αυτή συνάρτηση  $u(x, t)$  παριστάνει τη θερμοκρασία (θερμοκρασιακή κατανομή) κατά το πάχος του τοίχου ( $0 \leq x \leq L$ ) για κάθε θετική χρονική στιγμή  $t > 0$ . Αντίθετα στην προηγούμενη εφαρμογή στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος η άγνωστη συνάρτηση (που εκ προθέσεως είχε δηλωθεί με το ίδιο ακριβώς σύμβολο  $u(x, t)$ ) παρίστανε την εγκάρσια μετατόπιση κατά μήκος της χορδής που εξετάσθηκε εκεί και πάλι για κάθε θετική χρονική στιγμή  $t > 0$ .

Εκτελούμε τώρα δύο μερικές παραγωγίσεις της σχέσεως (5.3.5) ως προς τη θέση  $x$ . Επίσης μια μερική παραγωγή της ίδιας σχέσεως (5.3.5) ως προς το χρόνο  $t$  (με τη χρονική παράγωγο να δηλώνεται με τελεία και πάλι, όχι με οξεία). Αντικαθιστώντας και τις δύο αυτές μερικές παραγωγούς στην παρούσα μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως (5.3.1), βρίσκουμε ότι

$$X''(x) T(t) = \frac{1}{a^2} X(x) \dot{T}(t). \tag{5.3.6}$$

Διαιρώντας τώρα με το γινόμενο  $X(x) T(t)$  (υποθέτοντας ότι δεν είναι μηδέν), έχουμε πλέον επιτύχει το χωρισμό των μεταβλητών (τη θέση  $x$  από το χρόνο  $t$ ) ως εξής:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \lambda. \tag{5.3.7}$$

Στη σχέση αυτή (5.3.7) το σύμβολο  $\lambda$  δηλώνει προφανώς μια σταθερά, επειδή δε μπορεί να εξαρτάται από τη θέση  $x$ , γιατί το δεύτερο κλάσμα:  $(1/a^2)(\dot{T}(t)/T(t))$ , με το οποίο η ποσότητα  $\lambda$  είναι ίση, δεν εξαρτάται από τη θέση  $x$ . Επιπλέον δε μπορεί να εξαρτάται ούτε και από το χρόνο  $t$ , επειδή το πρώτο κλάσμα:  $X''(x)/X(x)$ , με το οποίο η ίδια ποσότητα  $\lambda$  είναι επίσης ίση, δεν εξαρτάται από το χρόνο  $t$ . Άρα μόνη δυνατότητα για την ποσότητα  $\lambda$  αποτελεί η ανεξαρτησία της και από τη θέση  $x$  (κατά το πάχος του τοίχου) και από το χρόνο  $t$ . Επομένως πρόκειται απλά για μια σταθερά.

Διασπούμε τώρα τη διπλή ισότητα (5.3.7) σε δύο χωριστές διαφορικές εξισώσεις και μάλιστα ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Η πρώτη είναι δευτέρας τάξεως (ως προς

τη θέση  $x$ ), είναι η χωρική συνήθης διαφορική εξίσωση

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L. \quad (5.3.8)$$

Η δεύτερη είναι πρώτης τάξεως (ως προς το χρόνο  $t$ ), είναι η χρονική συνήθης διαφορική εξίσωση

$$\dot{T}(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.3.9)$$

### B5.3.3. Επίλυση της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως

Θα ξεκινήσουμε την επίλυση από τη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (5.3.8), γιατί αυτή συνοδεύεται από τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες (5.3.3), δηλαδή μηδενικές θερμοκρασίες και στις δύο επιφάνειες  $x = 0$  και  $x = L$  του τοίχου. Η εργασία είναι εντελώς ανάλογη με εκείνη που εκθέσαμε στην εφαρμογή της προηγούμενης Ενότητας Β5.2 για την ταλαντούμενη (ή παλλόμενη) χορδή. Διαπιστώνουμε ότι για τη δυνατότητα ευρέσεως μη ταυτοτικά μηδενικής λύσεως  $u(x, t)$  (δηλαδή ζητώντας  $u(x, t) \neq 0$ ) είναι αναγκαίο να απαιτήσουμε στη συνήθη διαφορική εξίσωση (5.3.8) να ισχύουν οι συνθήκες

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (5.3.10)$$

Με τον τρόπο αυτό θα ισχύουν οι αρχικά ορισθείσες συνοριακές συνθήκες (5.3.3).

Προχωράμε στη σχετική διερεύνηση για τις δυνατές τιμές της σταθεράς  $\lambda$ : (α) μηδενική:  $\lambda = 0$ , (β) θετική:  $\lambda > 0$  ή (γ) αρνητική:  $\lambda < 0$ . Οδηγούμαστε έτσι εύκολα και πάλι (εντελώς ανάλογα με την προηγούμενη εφαρμογή στο πρόβλημα της ταλαντούμενης ή παλλόμενης χορδής) στις εξής τρεις διαπιστώσεις: (α) Η πρώτη δυνατότητα:  $\lambda = 0$  με λύση της διαφορικής εξισώσεως (5.3.8) την

$$X(x) = Ax + B \quad (5.3.11)$$

οδηγεί στην τετριμμένη λύση  $X(x) \equiv 0$  λόγω των συνοριακών συνθηκών (5.3.10). (β) Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και για τη δεύτερη δυνατότητα:  $\lambda = p^2 > 0$  (με  $p > 0$ ) με υπερβολική (εναλλακτικά εκθετική) λύση της ίδιας διαφορικής εξισώσεως (που συμπίπτει με την (5.2.30)), τη λύση

$$X(x) = A \cosh px + B \sinh px. \quad (5.3.12)$$

(γ) Επομένως μόνη εφικτή δυνατότητα είναι η τρίτη:  $\lambda = -p^2 < 0$  (με  $p > 0$ ), ακριβώς όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή, με τριγωνομετρική λύση της διαφορικής εξισώσεως (5.3.8) (που συμπίπτει με την (5.2.38)) την

$$X(x) = A \cos px + B \sin px. \quad (5.3.13)$$

Η λύση αυτή είναι και η πραγματικά αποδεκτή, γιατί είναι πια δυνατή η πλήρωση των συνοριακών συνθηκών (5.3.3) με απαίτηση λόγω των ουσιαστικά ισοδύναμων συνοριακών συνθηκών (5.3.10) να ισχύει

$$X(0) = A = 0, \quad X(L) = A \cos pL + B \sin pL = B \sin pL = 0. \quad (5.3.14)$$

Αποφεύγοντας τώρα τη μηδενική λύση (δηλαδή υποθέτοντας ότι  $B \neq 0$ ), έχουμε τις εξής αποδεκτές τιμές  $p = p_n$  της θετικής σταθεράς  $p$ :

$$\sin pL = 0 \implies pL = n\pi \implies p = p_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.15)$$

Οι τιμές αυτές  $p = p_n$  μηδενίζουν την ημιτονική έκφραση  $\sin pL$  στις σχέσεις (5.3.14) και επιτρέπουν έτσι την πλήρωση και των δύο συνοριακών συνθηκών (5.3.3) (τελικά (5.3.10)) στο παρόν πρόβλημα μεταδόσεως θερμότητας. Επομένως οι ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές)  $\lambda = \lambda_n$  στο παρόν



πρόβλημα δίνονται και πάλι (ακριβώς όπως και στο πρόβλημα της χορδής που εξετάστηκε στην προηγούμενη Ενότητα Β5.2, σχέσεις (5.2.44)) από τους τύπους

$$\lambda = \lambda_n = -p_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.16)$$

Άρα η λύση  $X(x)$  του προβλήματος συνοριακών τιμών (5.3.8) και (5.3.10) που εξετάζουμε έχει και πάλι (λόγω της τριγωνομετρικής λύσεως (5.3.13) και των σχέσεων (5.3.14)) την εξής μορφή, που είναι ανάλογη της (5.2.45):

$$X(x) = X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.17)$$

Με βάση τον τρόπο συλλογισμού που έχει εκτεθεί στην προηγούμενη Ενότητα Β5.2 στη μορφή αυτή (5.3.17) της λύσεως πήραμε μάλιστα την πρωτοβουλία να παραλείψουμε τη σταθερά  $B_n$ . Θεωρήσαμε έτσι κατά κάποιον τρόπο ότι η σταθερά  $B_n$  ενσωματώνεται στη σταθερά  $C_n$  που θα προκύψει κατά την εύρεση της αντίστοιχης χρονικής συναρτήσεως  $T_n(t)$  από τη δεύτερη, τη χρονική συνήθη διαφορική εξίσωση (5.3.9). Δεν είναι ανάγκη να έχουμε το γινόμενο  $B_n C_n$  δύο σταθερών: των  $B_n$  και  $C_n$  στη μερική λύση  $u_n(x, t)$  που θέλουμε να βρούμε. Η σταθερά  $C_n$  αρκεί! Ασφαλώς, ειδικά στο παρόν πρόβλημα, και η σταθερά  $B_n$  θα αρκούσε. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να αφήσουμε τη σταθερά  $B_n$  να είναι παρούσα στη λύση (5.3.17), αλλά και την αντίστοιχη σταθερά  $C_n$  στην αντίστοιχη λύση  $T_n(t)$  της χρονικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης (5.3.9). Στην περίπτωση αυτή στο γινόμενο  $u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$  θα είχαμε τη δυνατότητα να θέσουμε  $C_n^* = B_n C_n$  ανάλογα με ό,τι επιλέξαμε να κάνουμε στην προηγούμενη εφαρμογή στο πρόβλημα της χορδής (σχέσεις (5.2.57)).

Εδώ βέβαια, στο μονοδιάστατο πρόβλημα της διαχύσεως, η κατάσταση είναι σαφώς απλούστερη. Είναι απλούστερη, επειδή η χρονική συνήθης διαφορική εξίσωση (5.3.9) είναι πρώτης τάξεως. (Άρα η λύση της περιέχει μια μόνο σταθερά  $C_n$ .) Αντίθετα η ακριβώς αντίστοιχη συνήθης διαφορική εξίσωση στο πρόβλημα της χορδής (η εξίσωση (5.2.50)) ήταν δευτέρας τάξεως. Άρα η λύση της όφειλε να περιέχει δύο σταθερές: τις  $C_n$  και  $D_n$  και πραγματικά αυτό είχε συμβεί στην προηγούμενη Ενότητα Β5.2 στη λύση (5.2.52). Συμπερασματικά εδώ επιλέξαμε να ενσωματώσουμε τις σταθερές  $B_n$  στις αντίστοιχες σταθερές  $C_n$  και να μην τις εμφανίσουμε στη λύση (5.3.17).

Ας σημειωθεί επίσης ότι στις ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές)  $\lambda_n$ , που δίνονται από τις σχέσεις (5.3.16), αντιστοιχούν οι ιδιοσυναρτήσεις (ή χαρακτηριστικές συναρτήσεις)  $X_n(x)$ , που δίνονται από τους τύπους (5.3.17). Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές  $X_n(x)$  πληρούν και τη συνήθη διαφορική εξίσωση (5.3.8) (για  $\lambda = \lambda_n$  ασφαλώς), αλλά και τις δύο συνοριακές συνθήκες (5.3.10) στις δύο επιφάνειες  $x = 0$  και  $x = L$  του τοίχου.

Ας προσθέσουμε ότι ήταν πράγματι αφέλεια, αλλ' έγινε για εκπαιδευτικούς λόγους, να εξετάσουμε και τις δυνατότητες μηδενικής και θετικής τιμής της σταθεράς  $\lambda$ . Έπρεπε εξ αρχής να είχαμε αποκλειστικά στραφεί στην αρνητική τιμή  $\lambda = -p^2$  της σταθεράς αυτής. Τούτο ισχύει, γιατί και η γραμμική συνάρτηση (5.3.11) αλλά και η υπερβολικού τύπου συνάρτηση (5.3.12) είναι απολύτως αδύνατο να μηδενίζονται ταυτόχρονα σε δύο σημεία: στις δύο επιφάνειες  $x = 0$  και  $x = L$  στον τοίχο που εξετάζουμε. Τους μηδενισμούς αυτούς τους απαιτούν οι δύο ομογενείς συνοριακές συνθήκες (5.3.3) ή, καλύτερα, (5.3.10). Καταρχήν ως προς τη γραμμική συνάρτηση (5.3.11), τούτο είναι ασφαλώς προφανές: μια ευθεία γραμμή που περνάει από δύο σημεία του άξονα  $Ox$  συμπίπτει με τον άξονα αυτό, είναι η μηδενική συνάρτηση. Αφετέρου ως προς την υπερβολικού τύπου συνάρτηση (5.3.12), πρόκειται πάλι για τη μηδενική συνάρτηση. Αυτό συμβαίνει, επειδή το μεν υπερβολικό συνημίτονο  $\cosh z$  είναι συνεχώς θετικό (με ελάχιστη τιμή το 1 για  $z = 0$ ), το δε υπερβολικό ημίτονο  $\sinh z$  που απομένει μηδενίζεται μόνο για  $z = 0$ . Αντίθετα οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos z$  και  $\sin z$  έχουν απειρία πραγματικών ριζών. Άρα είναι οι κατάλληλες συναρτήσεις στο παρόν πρόβλημα μεταδόσεως θερμότητας, ακριβώς όπως υπήρξαν και στο πρόβλημα της χορδής υπό ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες, ακριβώς όπως οι παρούσες (5.3.3) ή

μάλλον (5.3.10). Κατά συνέπεια η δυνατότητα ( $\gamma$ ) (αρνητική τιμή του  $\lambda$ :  $\lambda = -p^2 < 0$ ) θα έπρεπε να είχε επιλεγεί εξαρχής στο παρόν πρόβλημα χωρίς ιδιαίτερα λεπτομερή διερεύνηση.

#### B5.3.4. Επίλυση της χρονικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης

Εν πάση περιπτώσει, ας προχωρήσουμε τώρα στην επίλυση και της χρονικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης (5.3.9)

$$\dot{T}(t) - \lambda a^2 T(t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.3.18)$$

ως προς το χρόνο  $t$  στην παρούσα εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών  $x$  και  $t$ . Πρόκειται για μια ομογενή γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως με σταθερό συντελεστή: το  $-\lambda a^2$ . Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί άμεσα, π.χ. με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$$\rho_1(\mu) = \mu - \lambda a^2 = 0 \implies \mu = \mu_1 = \lambda a^2 \quad (5.3.19)$$

με μια μόνο ρίζα: τη  $\mu_1 = \lambda a^2$ . Τότε η λύση της συνήθους διαφορικής αυτής εξίσωσης είναι

$$T(t) = C e^{\mu_1 t} = C e^{\lambda a^2 t} \equiv C \exp(\lambda a^2 t), \quad t \geq 0, \quad (5.3.20)$$

με τη χρήση και του συμβόλου  $\exp$  για τη συνήθη εκθετική συνάρτηση:  $\exp y \equiv e^y$ ).

Ας διακόψουμε και πάλι προς στιγμή τους υπολογισμούς μας και ας παρατηρήσουμε τη λύση (5.3.20), που μόλις προσδιορίσαμε, για τη χρονική μεταβολή  $T(t)$  της θερμοκρασίας  $u = u(x, t)$  σε κάποιο σημείο  $x = x_0$  κατά το πάχος του τοίχου που εξετάζουμε:  $0 \leq x \leq L$ . Τί πρέπει να παρατηρήσει άμεσα ο κάθε Πολιτικός Μηχανικός; Απλά ότι, εάν από αβλεψία η σταθερά  $\lambda$  υποτεθεί θετική, τότε η εκθετική συνάρτηση που (ασφαλώς σωστά) παρουσιάζεται στη λύση αυτή  $T(t)$  οδηγεί σε μια εξαιρετικά γρήγορη αύξηση της θερμοκρασίας  $u$  στο σημείο  $x = x_0$  που θεωρούμε με την πάροδο του χρόνου  $t$  προς το συν άπειρο ( $+\infty$ ), εάν η σταθερά  $C$  είναι θετική. (Ας θυμηθούμε και τη γραφική παράσταση της εκθετικής συναρτήσεως  $\exp x \equiv e^x$  για θετικές τιμές της μεταβλητής  $x$ .) Ανάλογα παρουσιάζεται ταχεία μείωση προς το πλην άπειρο ( $-\infty$ ), εάν η σταθερά  $C$  είναι αρνητική. Και οι δύο αυτοί απειρισμοί (προς το συν ή το πλην άπειρο) είναι απολύτως απαράδεκτοι από φυσικής απόψεως. Τούτο ισχύει ιδίως μάλιστα επειδή οι επιφάνειες  $x = 0$  και  $x = L$  του τοίχου διατηρούνται σε μηδενική θερμοκρασία  $u = 0$  εξαιτίας των συνοριακών συνθηκών (5.3.3). Υπό τις συνθήκες αυτές (5.3.3) εύλογα προσδοκάται ότι με την πάροδο του χρόνου  $t$  η θερμοκρασία  $u$  σε κάθε σημείο  $x = x_0$  κατά το πάχος του τοίχου πρέπει και αυτή να τείνει στο μηδέν. Ούτε να τείνει στο συν άπειρο, αλλ' ούτε και στο πλην άπειρο. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις παραβιάζεται κατά το χειρότερο τρόπο η αρχή διατηρήσεως της ενεργείας λόγω της παρουσίας της εκθετικής συναρτήσεως  $\exp(\lambda a^2 t)$  στην λύση  $T(t)$  που βρήκαμε.

Απεναντίας, εάν η σταθερά  $\lambda$  είναι αρνητική:  $\lambda = -p^2 < 0$ , όπως ήδη διαπιστώθηκε και ρητά εκφράσθηκε μέσω των σχέσεων (5.3.16), η λύση  $T(t) = C e^{\lambda a^2 t}$  που προσδιορίσθηκε τείνει στο μηδέν για  $t \rightarrow \infty$ . Τούτο αναμενόταν φυσικά βάσει των συλλογισμών που κάναμε. Με άλλα λόγια το ότι η σταθερά  $\lambda$  πρέπει να είναι αρνητική δεν αποτελεί μόνο «χωρική» απαίτηση των συνοριακών συνθηκών (5.3.3) (μηδενική θερμοκρασία  $u = 0$  και στις δύο μάλιστα επιφάνειες  $x = 0$  και  $x = L$  του τοίχου). Αποτελεί ταυτόχρονα με ανεξάρτητο τρόπο σκέψεως και «χρονική» απαίτηση, ώστε να μην παραβιασθεί η αρχή διατηρήσεως της ενεργείας.

Ανάλογα βέβαια ισχύουν και για το πρόβλημα της ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής στην προηγούμενη Ενότητα Β5.2. Μόνο που εκεί η έκφραση της χρονικής συναρτήσεως  $T(t)$ , σχέσεις (5.2.52), είναι λίγο συνθετότερη (με δύο αυθαίρετες σταθερές  $C_n$  και  $D_n$  σ' αυτήν). Πάντως και εκεί πρέπει να έχουμε λύση τριγωνομετρικού τύπου  $T(t)$  (όπως και ήδη πραγματικά διαπιστώσαμε) και όχι υπερβολικού τύπου. Μια λύση υπερβολικού τύπου θα παραβίαζε και αυτή την αρχή διατηρήσεως της ενεργείας, της μηχανικής ενεργείας βέβαια στο πρόβλημα της χορδής που εξετάζαμε.

Ας είναι επομένως προσεκτικός ο Πολιτικός Μηχανικός ή, μάλλον, ας σκέπτεται ότι μπορεί μερικές φορές να διερευνά και από φυσικής απόψεως τους μαθηματικούς συλλογισμούς του και να ελέγχει τα αποτελέσματα των υπολογισμών του και με φυσικές σκέψεις.

**B5.3.5. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους**

Μετά την πιο πάνω παρατήρηση, ας προχωρήσουμε στην επίλυση του παρόντος προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών. Οι ιδιοτιμές  $\lambda = \lambda_n = -\rho_n^2 = -(n\pi/L)^2$  ήδη προσδιορίστηκαν και δίνονται από τους τύπους (5.3.16). Επομένως η χρονική συνάρτηση  $T(t)$ , που ήδη βρέθηκε στη λύση (5.3.20), παίρνει την εξής τελική της μορφή:

$$T_n(t) = C_n \exp \left[ - \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 t \right], \quad t \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \text{με} \quad \exp y \equiv e^y, \quad (5.3.21)$$

για τις αντίστοιχες συναρτήσεις  $T_n(t)$ .

Άρα οι μερικές λύσεις (οι ιδιοσυναρτήσεις)  $u_n(x, t)$  της παρούσας μονοδιάστατης εξίσωσης της διαχύσεως (5.3.1) παίρνουν με την παρούσα μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών  $x$  (για τη θέση) και  $t$  (για το χρόνο) στη σχέση (5.3.5) τη μορφή

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \exp \left[ - \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 t \right], \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.22)$$

(Σημειώνεται ότι εδώ η διάχυση αφορά σε θερμική διάχυση, ροή, μεταφορά, μετάδοση θερμότητας.) Στη μορφή αυτή (5.3.22) πήραμε υπόψη τις λύσεις (5.3.17) και (5.3.21) που βρέθηκαν πιο πάνω των σχετικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τις αντίστοιχες χωρικές,  $X_n(x)$ , και χρονικές,  $T_n(t)$ , συναρτήσεις. Υπενθυμίζεται ότι οι σχετικές σταθερές  $B_n$  των χωρικών λύσεων  $X_n(x)$  ουσιαστικά ενσωματώθηκαν στις αντίστοιχες σταθερές  $C_n$  των χρονικών λύσεων  $T_n(t)$ . Έτσι αποφεύγεται η παρουσία γινομένων  $B_n C_n$ , που έτσι κι αλλιώς δεν εξυπηρετούν κανένα σκοπό.

Οι παραπάνω λύσεις  $u_n(x, t)$  προφανώς επαληθεύουν τις ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες (5.3.3). Αυτό ισχύει, επειδή, όπως εύκολα παρατηρούμε,

$$u_n(0, t) = u_n(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.3.23)$$

Επαληθεύουν επίσης και την ίδια τη μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της διαχύσεως (5.3.1). Τούτο συμβαίνει, επειδή, όπως εύκολα διαπιστώνεται με μερικές παραγωγίσεις στις λύσεις (5.3.22),

$$\frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2} = X_n''(x) T_n(t) = -C_n \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \exp \left[ - \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 t \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.24)$$

(επαναλαμβάνεται με  $\exp y \equiv e^y$ ) και επίσης

$$\frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} = X_n(x) \dot{T}_n(t) = -C_n \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \exp \left[ - \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 t \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.25)$$

Επομένως προφανώς επαληθεύεται η εξίσωση της διαχύσεως (εδώ της θερμικής αγωγιμότητας) (5.3.1), όπως διαπιστώνεται άμεσα.

Το μόνο που απομένει πια είναι η πλήρωση και της αρχικής συνθήκης (5.3.4) για  $t = 0$ : γνωστή αρχική θερμοκρασιακή κατανομή, απλούστερα αρχική θερμοκρασία,  $f(x)$  στον τοίχο που εξετάζουμε εδώ με  $0 \leq x \leq L$ . Προς το σκοπό αυτό μία μόνο ιδιοσυνάρτηση  $u_n(x, t)$  προφανώς δεν αρκεί, αν και, όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως, είναι επαρκής για τη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως (5.3.1) και τις συνοριακές συνθήκες (5.3.3). Είμαστε επομένως αναγκασμένοι κι εδώ, ακριβώς όπως και στην εξίσωση της ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής στην προηγούμενη

Ενότητα Β5.2 (και γενικότερα σχεδόν σε κάθε εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών), να δεχθούμε άθροισμα άπειρων ιδιοσυναρτήσεων  $u_n(x, t)$ . Έχουμε επομένως σειρά  $u(x, t)$  τέτοιων ιδιοσυναρτήσεων  $u_n(x, t)$  (με το δείκτη  $n$  από 1 έως άπειρο) της μορφής

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \exp \left[ - \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 t \right], \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0. \quad (5.3.26)$$

Έτσι πετυχαίνουμε την πλήρωση και της αρχικής συνθήκης (5.3.4) και, επομένως, την πλήρη επίλυση του παρόντος προβλήματος μεταδόσεως θερμότητας. Προφανώς και η συνάρτηση αυτή  $u(x, t)$  είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (5.3.1) (της εξίσωσης της διαχύσεως). Αυτό συμβαίνει, επειδή πρόκειται για ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, όπου ισχύει η αρχή της υπερθέσεως (ή της επαλληλίας) λύσεων (5.1.2). Επίσης η ίδια συνάρτηση  $u(x, t)$  πληροί και τις ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες (5.3.3).

### Β5.3.6. Πλήρωση και της αρχικής συνθήκης

Τώρα στο τελικό στάδιο της όλης διαδικασίας χωρισμού των μεταβλητών  $x$  και  $t$  θα προσδιορίσουμε κατάλληλα τις σταθερές  $C_n$  στην παραπάνω λύση (5.3.26), ώστε να πληρούται και η αρχική συνθήκη (αρχική θερμοκρασιακή κατανομή  $f(x)$ ) (5.3.4). Θέτοντας  $t = 0$  στην υπό μορφή σειράς λύση (5.3.26), παίρνουμε

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x) \quad (5.3.27)$$

(επειδή  $e^0 = 1$ ) με γνωστή τη συνάρτηση  $f(x)$  από την αρχική συνθήκη (5.3.4). Επομένως οι σταθερές  $C_n$  πρέπει να είναι οι συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier της γνωστής συναρτήσεως  $f(x)$  στο διάστημα  $[0, L]$ . (Σημειώνεται ότι τούτο ισχύει και εδώ ανάλογα με το πρόβλημα της ταλαντούμενης χορδής στην προηγούμενη Ενότητα Β5.2, μόνο που εκεί είχαμε δύο αρχικές συνθήκες: τις (5.2.3) για τις αρχικές μετατοπίσεις  $f(x)$  και τις σχετικές ταχύτητες  $g(x)$ , ενώ εδώ έχουμε μόνο μία: την (5.3.4).) Φυσικά εδώ το διάστημα  $[0, L]$  αφορά τώρα στο πάχος του τοίχου, κατά το οποίο ζητούμε να βρούμε τη θερμοκρασιακή κατανομή  $u(x, t)$  σε κάθε σημείο  $x$  ( $0 \leq x \leq L$ ) και για κάθε θετική χρονική στιγμή  $t$  ( $t > 0$ ). Άρα, με βάση το γνωστό τύπο για τους συντελεστές ημιτονικών σειρών Fourier στο βασικό διάστημα  $[0, L]$ , από τη σχέση (5.3.27) (που ισχύει για  $t = 0$ ) προκύπτει

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.28)$$

Οι τύποι αυτοί είναι απολύτως ανάλογοι με τους τύπους (5.2.63) στην προηγούμενη Ενότητα Β5.2.

Επομένως με γνωστή τη συνάρτηση  $f(x)$  και με υπολογισμό των παραπάνω ολοκληρωμάτων (5.3.28) υπολογίζονται οι συντελεστές  $C_n$ . (Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων αυτών είναι κάτι που θεωρείται γνωστό και εφικτό. Συνήθως γίνεται αναλυτικά με το χέρι ή με τη βοήθεια και του υπολογιστή. Μερικές φορές όμως, σε δύσκολες περιπτώσεις, προχωράμε σε αριθμητικό υπολογισμό των ολοκληρωμάτων με τη χρήση αριθμητικής ολοκληρώσεως.) Με τους συντελεστές  $C_n$  προσδιορισμένους η λύση του όλου προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών για τη θερμοκρασιακή κατανομή  $u(x, t)$  στον τοίχο που εξετάζουμε δίνεται από τον τελικό τύπο (5.3.26).

Ανοίγοντας μια μικρή παρένθεση στους μαθηματικούς υπολογισμούς, ας σημειώσουμε ότι από φυσικής απόψεως η λύση (5.3.26) είναι απόλυτα αποδεκτή. Καταρχήν η λύση αυτή (5.3.26) επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως (5.3.1). Επαληθεύει επίσης την αρχική συνθήκη (5.3.4) (με χρήση των τύπων (5.3.28) για τους συντελεστές  $C_n$ ) και τις δύο συνοριακές συνθήκες (5.3.3). Είναι επίσης σημαντικό το ότι η λύση αυτή (5.3.26) μας δείχνει ότι με την πάροδο του χρόνου  $t$  η θερμοκρασία  $u(x, t)$  στον τοίχο (κατά το πάχος  $x$  του τοίχου) θα φθάσει για μεγάλες τιμές του χρόνου  $t$  (καθώς  $t \rightarrow \infty$ ) τη θερμοκρασία των δύο επιφανειών του τοίχου  $x = 0$  και  $x = L$ . Θα φθάσει δηλαδή τη μηδενική θερμοκρασία  $u = 0$ . (Αυτό είναι προφανές, επειδή ο εκθετικός όρος συνεχώς μειώνεται, γιατί  $\lim_{z \rightarrow \infty} e^{-z} = 0$ .) Τούτο είναι απόλυτα εύλογο από φυσικής απόψεως, επειδή

η θερμοκρασία σε ένα μέσον μεταβάλλεται χρονικά σε ένα σημείο με τέτοιο τρόπο, ώστε να εξισορροπούνται με το χρόνο οι υπάρχουσες θερμοκρασιακές διαφορές. Επίσης στην εξεταζόμενη περίπτωση δεν υπάρχει καμία πηγή θερμότητας (θετική ή αρνητική, για παραγωγή ή απώλεια θερμότητας αντίστοιχα) μέσα στον τοίχο που θεωρούμε. Εάν υπήρχε, τότε η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (5.3.1) θα ήταν διαφορετική, συγκεκριμένα θα ήταν μη ομογενής, έτσι ώστε η σχετική πηγή (ή πηγές) θερμότητας να είχε (είχαν) ληφθεί και αυτές κατάλληλα υπόψη.

## B5.4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE

### B5.4.1. Η διδιάστατη εξίσωση του Laplace

Σαν τρίτο παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών (ή των χωριζόμενων μεταβλητών) θα εξετάσουμε τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace στο επίπεδο  $Oxy$ . Όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην Παράγραφο Β2.1.1, η διδιάστατη εξίσωση του Laplace είναι μια κλασική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που παρουσιάζεται σε πολλά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Έχει τη μορφή

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{με} \quad u = u(x, y). \quad (5.4.1)$$

Στην εξίσωση αυτή το σύμβολο  $\nabla^2$  παριστάνει τον εξής διαφορικό τελεστή:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (5.4.2)$$

Ο τελεστής αυτός δηλώνεται μερικές φορές και με το ισοδύναμο σύμβολο  $\Delta$ , δηλαδή  $\Delta \equiv \nabla^2$ .

Η εξίσωση (5.4.1) είναι και πάλι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως και με σταθερούς συντελεστές. Η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η  $u = u(x, y)$ . Ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι  $x$  και  $y$ . Οι δύο αυτές μεταβλητές αναφέρονται στο επίπεδο  $Oxy$  στις δύο διαστάσεις: είναι οι Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$  και  $y$ . Με την έννοια αυτή η εξίσωση του Laplace (5.4.1) είναι κάπως διαφορετική από τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος και τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, που εξετάστηκαν στις δύο προηγούμενες Ενότητες Β5.2 και Β5.3 αντίστοιχα. Αυτό συμβαίνει, γιατί οι εξισώσεις εκείνες εκτός από τη θέση  $x$  στο χώρο, πρώτη ανεξάρτητη μεταβλητή, είχαν και το χρόνο  $t$  σαν δεύτερη ανεξάρτητη μεταβλητή. Αντίθετα η παρούσα εξίσωση του Laplace (5.4.1) αναφέρεται μόνο στο χώρο, συγκεκριμένα εδώ στο επίπεδο  $Oxy$ , δηλαδή σε στατικά φαινόμενα, ισοδύναμα σε μόνιμες (δηλαδή μη χρονικά μεταβαλλόμενες) καταστάσεις. Σημειώνεται επίσης ότι η εξίσωση του Laplace (5.4.1) θα μπορούσε ίσως να αποκληθεί (και μερικές φορές, όχι όμως πολλές, πραγματικά αποκαλείται) και αρμονική εξίσωση κατ' αναλογία με τη διαρμονική εξίσωση  $\Delta^2 u \equiv \nabla^4 u = 0$ . Βέβαια κάθε λύση  $u = u(x, y)$  της εξισώσεως του Laplace (5.4.1) (ασφαλώς με  $\Delta u \equiv \nabla^2 u = 0$ ) καλείται (σε όλα τα συγγράμματα) αρμονική συνάρτηση.

Πρέπει επίσης να τονισθεί ότι, ενώ η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (5.2.1) είναι υπερβολικού τύπου και η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.3.1) είναι παραβολικού τύπου, η διδιάστατη εξίσωση του Laplace (5.4.1) είναι ελλειπτικού τύπου (Παράγραφος Β1.3.2).

### B5.4.2. Χωρισμός των μεταβλητών και οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

Θα επιχειρήσουμε τώρα την επίλυση της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace (5.4.1) με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Η όλη διαδικασία είναι ουσιαστικά ανάλογη με εκείνη που ήδη ακολουθήθηκε στις δύο προηγούμενες Ενότητες Β5.2 και Β5.3 για τις μονοδιάστατες εξισώσεις του κύματος και της διαχύσεως αντίστοιχα. Σύμφωνα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών θεωρούμε την άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x, y)$  σαν γινόμενο μιας συναρτήσεως  $X(x)$  της (χωρικής)

μεταβλητής  $x$  επί μια συνάρτηση  $Y(y)$  της (επίσης χωρικής) μεταβλητής  $y$ . Υποθέτουμε δηλαδή ότι

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (5.4.3)$$

Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουμε ότι η εξίσωση του Laplace (5.4.1) παίρνει τώρα τη μορφή

$$\frac{\partial^2 (X(x)Y(y))}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (X(x)Y(y))}{\partial y^2} = 0 \implies X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0. \quad (5.4.4)$$

Υποθέτουμε στη συνέχεια το γινόμενο  $X(x)Y(y)$  συνεχώς διάφορο του μηδενός και διαιρούμε με το γινόμενο αυτό. Πετυχαίνουμε έτσι το χωρισμό των μεταβλητών  $x$  και  $y$ . Πιο συγκεκριμένα

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (5.4.5)$$

και τελικά

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda. \quad (5.4.6)$$

Απολύτως ανάλογα με τις δύο προηγούμενες Ενότητες Β5.2 και Β5.3 χρησιμοποιήσαμε το βοηθητικό σύμβολο  $\lambda$  για τα δύο ίσα (όπως ήδη διαπιστώσαμε) πηλίκα  $X''(x)/X(x)$  και  $-Y''(y)/Y(y)$ .

Εάν το  $\lambda$  (υποθετικά) εξαρτιόταν από το  $x$ , δηλαδή εάν  $\lambda = \lambda(x)$ , τότε από τις εξισώσεις (5.4.6) θα προέκυπτε αμέσως ότι

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda(x). \quad (5.4.7)$$

Τούτο είναι όμως άτοπο, επειδή το αριστερό μέλος εμφανίζεται καταρχήν να είναι συνάρτηση του  $y$ , ενώ το δεξιό μέλος συνάρτηση του  $x$ . Ανάλογα, εάν το  $\lambda$  εξαρτιόταν (πάλι υποθετικά) από το  $y$ , δηλαδή εάν  $\lambda = \lambda(y)$ , και πάλι από τις εξισώσεις (5.4.6) θα προέκυπτε ότι

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda(y), \quad (5.4.8)$$

που για ανάλογο λόγο είναι επίσης άτοπο. Άρα η μοναδική δυνατότητα που μας απομένει για την ποσότητα  $\lambda$  είναι να είναι σταθερά: ούτε συνάρτηση του  $x$ , αλλ' ούτε και του  $y$ .

Και με άλλη, παραπλήσια αιτιολόγηση, παραγωγίζοντας τη δεύτερη εξίσωση (5.4.5) ως προς  $x$  και εύλογα προτιμώντας για την παράγωγο στην παρούσα περίπτωση το σύμβολο  $d$  από το  $\partial$ , διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{X''(x)}{X(x)} \right) = 0. \quad (5.4.9)$$

Αυτό ισχύει, γιατί η παράγωγος ως προς  $x$  του δεξιού κλάσματος της δεύτερης εξισώσεως (5.4.5) είναι προφανώς μηδέν. Η σχέση (5.4.9) είναι μια πολύ στοιχειώδης συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως με άγνωστη συνάρτηση την  $\Omega(x) = X''(x)/X(x)$  και ανεξάρτητη μεταβλητή την  $x$ . Άρα, ολοκληρώνοντας τη σχέση (5.4.9) (εννοείται ως προς  $x$ ), διαπιστώνουμε ότι

$$\Omega(x) = \lambda \implies \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad (5.4.10)$$

με το  $\lambda$  αυθαίρετη σταθερά. Επομένως, λόγω και της εξισώσεως (5.4.5), προκύπτει η εξίσωση (5.4.6). Εντελώς ανάλογη εργασία μπορεί να γίνει και με βάση το λόγο  $\Omega^*(y) = -Y''(y)/Y(y)$ .

Το τελικό συμπέρασμα είναι και πάλι σαφές: η ποσότητα  $\lambda$  στις εξισώσεις (5.4.6) είναι σταθερά. Πιο συγκεκριμένα δεν υπάρχει άλλη δυνατότητα για μια συνάρτηση της ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$ : τη συνάρτηση  $\Omega(x) = X''(x)/X(x)$  να είναι εκ ταυτότητας (δηλαδή για κάθε τιμή του  $x$ ) ίση με μια συνάρτηση της άλλης ανεξάρτητης μεταβλητής  $y$  (και μάλιστα για κάθε τιμή του  $y$ ): τη συνάρτηση  $\Omega^*(y) = -Y''(y)/Y(y)$ . Από 'δώ και πέρα ο αναγνώστης Πολιτικός Μηχανικός θα θεωρείται εξοικειωμένος με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών δίχως άλλες λεπτομερείς επεξηγήσεις της διαδικασίας αυτής, που είναι τόσο μα τόσο κλασική στις διαφορικές εξισώσεις

με μερικές παραγώγους! Οι επεξηγήσεις που δόθηκαν κινδυνεύουν ήδη να θεωρηθούν ιδιαίτερα επαναληπτικές.

Χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω τις εξισώσεις (5.4.6) και τη βοηθητική σταθερά  $\lambda$ , τη σταθερά διαχωρισμού,  $\sigma'$  αυτές. Κατορθώσαμε έτσι να αναγάγουμε με χωρισμό των μεταβλητών  $x$  και  $y$  τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (5.4.1), που είναι μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως, σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις επίσης δευτέρας τάξεως. Οι συνήθεις αυτές διαφορικές εξισώσεις προκύπτουν άμεσα από τις σχέσεις (5.4.6) και είναι οι ακόλουθες:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \tag{5.4.11}$$

και

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0. \tag{5.4.12}$$

Η σταθερά  $\lambda$  είναι μεν αυθαίρετη, αλλ' είναι η ίδια και στις δύο αυτές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως (5.4.11) και (5.4.12). Σημειώνουμε επίσης τη διαφορά προσήμου πριν από το  $\lambda$  στα αριστερά μέλη αυτών των δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Για φυσικούς λόγους ο Πολιτικός Μηχανικός αναφέρεται συνήθως σε πραγματικές συναρτήσεις, όπως είναι, π.χ., η άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x, y)$  στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (5.4.1). Θα πρέπει επομένως η σταθερά  $\lambda$  να είναι και αυτή πραγματική, ώστε και οι δύο συναρτήσεις  $X(x)$  και  $Y(y)$  να μπορούν να είναι καταρχήν πραγματικές. Κατ' αυτόν τον τρόπο τελικά και το γινόμενο τους

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \tag{5.4.13}$$

θα είναι και αυτό μια πραγματική συνάρτηση.

### B5.4.3. Οι συνοριακές συνθήκες Dirichlet

Θα προχωρήσουμε λίγο παρακάτω στην επίλυση των δύο τόσο απλών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (5.4.11) και (5.4.12), στις οποίες καταλήξαμε με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών  $x$  και  $y$ : σχέση (5.4.13) για την άγνωστη συνάρτηση  $u(x, y)$ . Προηγούμενως όμως καλό είναι να καθορίσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών το οποίο έχουμε την πρόθεση να επιλύσουμε, δηλαδή την περιοχή (το χωρίο)  $D$  του επιπέδου  $Oxy$  στην οποία θα εργασθούμε. Πρέπει επίσης να καθορίσουμε και τις συνοριακές συνθήκες στο σύνορο  $C \equiv \partial D$  της περιοχής αυτής  $D$ . Σημειώνουμε επίσης ότι το σύμβολο  $\partial D$  δηλώνει απλά το σύνορο  $C$  της περιοχής  $D$ .

Χάρην απλότητας στην παρούσα εφαρμογή, σαν περιοχή  $D$  θεωρούμε την ορθογωνική περιοχή  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  (με τα  $a$  και  $b$  θετικές σταθερές), ισοδύναμα την περιοχή  $[0, a] \times [0, b]$ . Η περιοχή αυτή  $D$  μας διευκολύνει εξαιρετικά στο έργο μας της επιλύσεως των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (5.4.11) και (5.4.12). Αυτό συμβαίνει, επειδή το διάστημα  $[0, a]$  για τη μεταβλητή  $x$  είναι συγκεκριμένο (σταθερό), όταν μεταβάλλεται το  $y$ , δηλαδή δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή  $y$ . Ανάλογα και το διάστημα  $[0, b]$  για τη μεταβλητή  $y$  είναι και αυτό συγκεκριμένο (σταθερό), όταν μεταβάλλεται το  $x$ , δηλαδή δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή  $x$ .

Τώρα ως προς τις συνοριακές συνθήκες στο σύνορο  $C \equiv \partial D$  της ορθογωνικής περιοχής  $D$ , θεωρούμε ότι γνωρίζουμε στο σύνορο αυτό τις τιμές της άγνωστης συναρτήσεως  $u = u(x, y)$ . Ένα τέτοιο πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση του Laplace, δηλαδή με γνωστές τις τιμές της άγνωστης συναρτήσεως  $u$  στο σύνορο  $C$  της περιοχής  $D$ , καλείται πρόβλημα Dirichlet, όπως ήδη γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο Β1. Αντίθετα, εάν ήσαν γνωστές οι τιμές  $\partial u / \partial n$  της παραγώγου της άγνωστης συναρτήσεως  $u$  κατά την κάθετο  $\mathbf{n}$  στο ίδιο σύνορο  $C$  (παραγώγος κατά την κάθετο), τότε θα είχαμε ένα πρόβλημα Neumann, όπως επίσης γνωρίζουμε. Φυσικά δεν αποκλείονται και μικτά προβλήματα συνοριακών τιμών με συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet σε ένα τμήμα  $C_1$  του συνόρου  $C$  και συνοριακή συνθήκη τύπου Neumann στο υπόλοιπο τμήμα  $C_2$  του συνόρου  $C$  (με  $C_1 \cup C_2 = C$ : όλο το σύνορο  $C$ , και  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ : το κενό σύνολο). Επίσης μερικές φορές παρουσιάζονται και πιο πολύπλοκες συνοριακές συνθήκες από τις συνθήκες Dirichlet και

Neumann, οι οποίες είναι ομολογουμένως απλές (ιδίως η συνοριακή συνθήκη Dirichlet) και τις έχουμε ήδη αναφέρει.

Στο παρόν πρόβλημα Dirichlet (διδιάστατη εξίσωση του Laplace (5.4.1) και συνοριακές συνθήκες Dirichlet) υποθέτουμε ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες Dirichlet στις τρεις πλευρές  $x = 0$ ,  $y = 0$  και  $x = a$  του συνόρου  $C$  της ορθογωνικής περιοχής  $D$  που μελετάμε. Όμως στην τέταρτη πλευρά  $y = b$  της ίδιας περιοχής  $D$  θεωρούμε μη μηδενική συνοριακή συνθήκη Dirichlet:  $u(x, b) = f(x)$ . Πιο συγκεκριμένα συνολικά έχουμε τις εξής τέσσερις συνοριακές συνθήκες:

$$u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, \quad u(x, 0) = 0 \quad \text{και} \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (5.4.14)$$

με γνωστή και υποτιθέμενη τμηματικά συνεχή τη συνάρτηση  $f(x)$ .

#### B5.4.4. Επίλυση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

Ας εξετάσουμε πρώτα τη συνήθη διαφορική εξίσωση (5.4.11) υπό ομογενείς (ή ισοδύναμα μηδενικές) συνοριακές συνθήκες για  $x = 0$  και  $x = a$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \quad \text{με} \quad X(0) = X(a) = 0. \quad (5.4.15)$$

Οι συνθήκες αυτές (5.4.15) προκύπτουν πολύ εύκολα από το χωρισμό των μεταβλητών (5.4.13):  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  σε συνδυασμό με τις δύο πρώτες συνοριακές συνθήκες Dirichlet (5.4.14).

Κάνουμε ακριβώς την ίδια διερεύνηση για τις αποδεκτές τιμές της σταθεράς  $\lambda$ , όπως και στις δύο προηγούμενες Ενότητες Β5.2 και Β5.3, τώρα όμως για το πιο πάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών (5.4.15). Η πρώτη δυνατότητα: (α)  $\lambda = 0$  οδηγεί ασφαλώς στην ακόλουθη γενική λύση της διαφορικής εξισώσεως (5.4.15):

$$X(x) = Ax + B \quad (5.4.16)$$

με τα  $A$  και  $B$  αυθαίρετες πραγματικές σταθερές. Μόλις όμως ληφθούν υπόψη και οι μηδενικές συνοριακές συνθήκες  $X(0) = X(a) = 0$ , που συνοδεύουν τη διαφορική εξίσωση (5.4.15), οδηγούμαστε στην τετριμμένη, στην ταυτοτικά μηδενική λύση  $X(x) \equiv 0$ . Αυτό είναι προφανές, γιατί η εξίσωση μιας ευθείας γραμμής με δύο ρίζες (εδώ τις  $x = 0$  και  $x = a$ ) είναι απλά ο ίδιος ο άξονας  $Ox$ .

Με όμοιο τρόπο και η δεύτερη δυνατότητα: (β)  $\lambda = p^2 > 0$  (με  $p > 0$ , αν και τούτο δεν έχει στην παρούσα περίπτωση ιδιαίτερη σημασία) απορρίπτεται επίσης. Αυτό συμβαίνει, επειδή η σχετική γενική λύση της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (5.4.15)

$$X(x) = A \cosh px + B \sinh px \quad (5.4.17)$$

(με τα  $A$  και  $B$  επίσης αυθαίρετες σταθερές) οδηγεί και πάλι στη μηδενική λύση  $X(x) \equiv 0$ . Η μηδενική αυτή λύση οφείλεται στις ίδιες συνοριακές συνθήκες:  $X(0) = X(a) = 0$  στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (5.4.15), πιο απλά στις δύο κατακόρυφες πλευρές  $x = 0$  και  $x = a$  της ορθογωνικής περιοχής  $D$  που εξετάζεται. (Οι συνοριακές αυτές συνθήκες οδηγούν στο αποτέλεσμα  $A = 0$  λόγω της πρώτης και, στη συνέχεια, και  $B = 0$  λόγω και της δεύτερης.) Και το γεγονός τούτο, δηλαδή η μηδενική λύση  $X(x) \equiv 0$ , ήταν αναμενόμενο για την παρούσα ακατάλληλη επιλογή  $\lambda = p^2 > 0$  της σταθεράς διαχωρισμού  $\lambda$ . Η κακή αυτή επιλογή οδήγησε σε υπερβολικές συναρτήσεις στη σχετική λύση (5.4.17) (εναλλακτικά, ισοδύναμα στην εκθετική συνάρτηση), που στερούνται ριζών. Συγκεκριμένα η συνάρτηση υπερβολικό συνημίτονο ( $\cosh z$ ) δεν έχει καθόλου πραγματικές ρίζες, ενώ η συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο ( $\sinh z$ ) έχει μόνη πραγματική ρίζα την προφανή ρίζα  $z = 0$ .

Επομένως ο Πολιτικός Μηχανικός θα πρέπει να καταλήξει στην τρίτη (και τελευταία που του απομένει) επιλογή για τη σταθερά  $\lambda$ : (γ)  $\lambda = -p^2 > 0$  (με  $p > 0$  και πάλι, απλά χάριν ευκολίας). Τώρα η γενική λύση της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (5.4.15) θα είναι η

$$X(x) = A \cos px + B \sin px \quad (5.4.18)$$



με τα  $A$  και  $B$  ξανά αυθαίρετες σταθερές. Όμως οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο σ' αυτήν την λύση (5.4.18) είναι πολύ πιο «ευέλικτες» ως προς τις ρίζες τους από τις αντίστοιχες υπερβολικές συναρτήσεις στην προαναφερθείσα και ήδη απορριφθείσα λύση (5.4.17).

Συνεπώς υπό τις ίδιες συνοριακές συνθήκες στο πρόβλημα (5.4.15):  $X(0) = X(a) = 0$  οδηγούμαστε εύκολα στο εξής τόσο στοιχειώδες σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων:

$$A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0, \quad A \cos pa + B \sin pa = 0. \quad (5.4.19)$$

Το σύστημα αυτό έχει προφανή λύση: τη λύση

$$A = 0 \quad \text{και} \quad \sin pa = 0 \implies p = p_n = \frac{n\pi}{a} \implies \lambda_n = -p_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.4.20)$$

εφόσον δεν επιθυμούμε να έχουμε ταυτόχρονα και  $B = 0$  και να καταλήξουμε και πάλι στη μηδενική λύση  $X(x) \equiv 0$ . Η λύση (5.4.20) είναι εντελώς ανάλογη με τις αντίστοιχες λύσεις στις προηγούμενες δύο Ενότητες Β5.2 και Β5.3, αλλά τώρα με τη χρήση του συμβόλου  $a$  αντί του  $L$ . Οι ποσότητες  $\lambda_n$  είναι βέβαια οι ιδιοτιμές (ή χαρακτηριστικές τιμές) στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών (5.4.15). Στις ιδιοτιμές αυτές  $\lambda_n$  αντιστοιχούν οι ιδιοσυναρτήσεις (ή χαρακτηριστικές συναρτήσεις)

$$X_n(x) = B_n \sin p_n x = B_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (5.4.21)$$

που προκύπτουν τώρα από τη λύση (5.4.18). Επομένως η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών (5.4.13):  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  οδηγεί στην πλήρωση των δύο πρώτων ομογενών (μηδενικών) συνοριακών συνθηκών Dirichlet (5.4.14) στις πλευρές  $x = 0$  και  $x = a$  της ορθογωνικής περιοχής  $D$ , την οποία μελετάμε στο παρόν πρόβλημα Dirichlet.

Μπορούμε να προχωρήσουμε πλέον στην επίλυση και της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (5.4.12) κατά την κατεύθυνση  $y$ . Η εξίσωση αυτή παίρνει τώρα, λόγω των ιδιοτιμών  $\lambda_n = -p_n^2$ , που ήδη προσδιορίστηκαν στις σχέσεις (5.4.20), τη μορφή

$$Y_n''(y) - p_n^2 Y_n(y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b. \quad (5.4.22)$$

Η γενική λύση  $Y_n(y)$  αυτής της συνήθους διαφορικής εξίσωσης είναι η συνάρτηση

$$Y_n(y) = C_{0n} e^{p_n y} + D_{0n} e^{-p_n y} = C_n \cosh p_n y + D_n \sinh p_n y. \quad (5.4.23)$$

Δείχνουμε προτίμηση στη δεύτερη έκφραση της λύσεως αυτής με τη χρήση υπερβολικών συναρτήσεων (υπερβολικό συνημίτονο:  $\cosh$ , και υπερβολικό ημίτονο:  $\sinh$ ) αντί της πρώτης εκφράσεώς της με τη χρήση εκθετικών συναρτήσεων. Σημειώνουμε επίσης ότι στη δεύτερη αυτή έκφραση έχει γίνει η απλή αλλαγή των αυθαίρετων σταθερών από  $C_{0n}$  και  $D_{0n}$  σε  $C_n$  και  $D_n$  αντίστοιχα.

Επειδή μάλιστα η συνοριακή συνθήκη Dirichlet για την άγνωστη συνάρτηση  $u(x, y)$  έχει υποθεθεί ομογενής (μηδενική) και στην κάτω πλευρά  $y = 0$  της ορθογωνικής περιοχής  $D$ , προκύπτει εύκολα ότι θα πρέπει να ισχύει

$$Y_n(0) = 0 \implies C_n \cdot 1 + D_n \cdot 0 = 0 \implies C_n = 0. \quad (5.4.24)$$

Επομένως τώρα

$$Y_n(y) = D_n \sinh p_n y = D_n \sinh \frac{n\pi y}{a} \quad (5.4.25)$$

λόγω και των σχέσεων (5.4.20) για τις ιδιοτιμές  $\lambda_n = -p_n^2$ , τις οποίες ήδη προσδιορίσαμε.

#### **Β5.4.5. Μερικές λύσεις της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους**

Σύμφωνα με τα παραπάνω, λόγω των λύσεων (5.4.21) και (5.4.25) που ήδη βρήκαμε, μπορούμε πλέον να θεωρήσουμε τις εξής ιδιοσυναρτήσεις  $u_n(x, y)$  για τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace

(διδιάστατη αρμονική εξίσωση) (5.4.1) που εξετάζουμε στο παρόν πρόβλημα Dirichlet:

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = E_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}. \quad (5.4.26)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές  $u_n(x, y)$  προέκυψαν από το χωρισμό των μεταβλητών (5.4.13), τον επαναλαμβάνουμε:  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ . Για διευκόλυνσή μας έχουμε επίσης θέσει  $E_n = B_n D_n$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι ίδιες ιδιοσυναρτήσεις  $u_n(x, y)$  είναι πραγματικά αρμονικές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα ισχύει

$$\nabla^2 u_n = \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = -E_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} + E_n \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} = 0, \quad (5.4.27)$$

γιατί, όπως είναι γνωστό από το διαφορικό λογισμό, με το  $c$  σταθερά ισχύουν οι εξής απλοί τύποι παραγωγίσεως:

$$\frac{d^2 \sin cz}{dz^2} = -c^2 \sin cz \quad \text{και} \quad \frac{d^2 \sinh cz}{dz^2} = c^2 \sinh cz. \quad (5.4.28)$$

Αφετέρου άμεσα διαπιστώνεται από τις λύσεις (5.4.26) ότι οι ίδιες ιδιοσυναρτήσεις  $u_n(x, y)$  πληρούν τις τρεις πρώτες από τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες Dirichlet (5.4.14) του παρόντος προβλήματος Dirichlet. (Το πρόβλημα αυτό Dirichlet αποτελείται από τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (5.4.1) στην ορθογωνική περιοχή  $D$  πλέον τις γνωστές τιμές (5.4.14) της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, y)$  στο σύνορο  $C \equiv \partial D$  της ίδιας περιοχής  $D$ .) Άρα πληρούνται οι δύο ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες Dirichlet για  $x = 0$  και  $x = a$ . Τις συνθήκες αυτές τις είχαμε πάρει πρώτες υπόψη στο πρόβλημα συνοριακών τιμών (5.4.15) για τη συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $X(x)$  στο πρόβλημα αυτό. Πληρούται επίσης και η τρίτη ομογενής (μηδενική) συνοριακή συνθήκη Dirichlet για  $y = 0$ . Και αυτήν τη συνθήκη τη λάβαμε ήδη υπόψη στη λύση (5.4.25) για την άγνωστη συνάρτηση  $Y_n(y)$  της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (5.4.22). Επομένως και στις τρεις αυτές πλευρές:  $x = 0$ ,  $x = a$  και  $y = 0$  της ορθογωνικής περιοχής  $D$  που εξετάζουμε ισχύει ότι  $u_n = 0$ . Άρα ισχύουν οι τρεις πρώτες συνοριακές συνθήκες Dirichlet (5.4.14). Μας απομένει εντούτοις η τέταρτη συνοριακή συνθήκη:  $u(x, b) = f(x)$  για  $y = b$ . Αυτή είναι μη ομογενής (μη μηδενική) συνοριακή συνθήκη. Σ' αυτή θα αναφερθούμε στην επόμενη παράγραφο.

#### **Β5.4.6. Υπέρθεση μερικών λύσεων και πλήρωση και της μη ομογενούς συνοριακής συνθήκης**

Αναφέραμε ήδη ότι μας απομένει η πλήρωση και της κάπως δυσκολότερης (της μη ομογενούς) συνοριακής συνθήκης Dirichlet

$$u(x, b) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (5.4.29)$$

Αυτή είναι η τέταρτη και τελευταία από τις συνοριακές μας συνθήκες Dirichlet (5.4.14) και πρέπει να ισχύει στην επάνω πλευρά  $y = b$  της ορθογωνικής περιοχής  $D$  (με  $0 \leq x \leq a$ ) που εξετάζουμε. Η συνθήκη αυτή είναι δυστυχώς μη ομογενής, δηλαδή μη μηδενική συνοριακή συνθήκη, σε αντίθεση με τις άλλες τρεις: τις τρεις πρώτες συνοριακές συνθήκες Dirichlet (5.4.14), οι οποίες είναι ομογενείς (μηδενικές) και ήδη ληφθήκανε πλήρως υπόψη. Για την πλήρωση και της τέταρτης συνοριακής συνθήκης (5.4.29), η οποία είναι ασφαλώς κάπως πολυπλοκότερη από τις άλλες τρεις, η διαθέσιμη αυθαίρετη σταθερά  $E_n$  στην ιδιοσυνάρτηση  $u_n(x, y)$  στη λύση (5.4.26) δεν αρκεί. Θα αρκούσε μόνο στην εξαιρετικά ειδική περίπτωση όπου η γνωστή συνάρτηση  $f(x)$  ήταν της μορφής

$$f(x) = F \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (5.4.30)$$

για κάποια ακέραιη τιμή του  $n$  και με το  $F$  σταθερά. Τότε από τη λύση (5.4.26) θα προέκυπτε (για  $y = b$  φυσικά) ότι

$$E_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a} = F \sin \frac{n\pi x}{a} \implies E_n = \frac{F}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} = F \operatorname{csch} \frac{n\pi b}{a}. \quad (5.4.31)$$

(Υπενθυμίζεται ότι το σύμβολο  $\operatorname{csch}$  δηλώνει την υπερβολική συντέμνουσα.) Πρόκειται για έναν πολύ απλό τύπο στην πολύ ειδική αυτή περίπτωση για τη συνοριακή συνθήκη  $u(x, b) = f(x)$ .

Γενικά όμως, δηλαδή για τυχαία συνάρτηση  $f(x)$ , θα χρειασθεί να χρησιμοποιήσουμε την αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων (5.1.2). (Σημειώνεται ότι στην αρχή της υπερθέσεως έχουμε εκτενώς αναφερθεί στην Ενότητα Β1.4.) Θα υποθέσουμε δηλαδή σαν λύση  $u(x, y)$  της παρούσας διαφορικής εξίσωσης του Laplace (5.4.1) (και η λύση αυτή θα είναι βέβαια αρμονική συνάρτηση!) ένα γραμμικό συνδυασμό των μερικών λύσεων (ιδιοσυναρτήσεων)  $u_n(x, y)$ , που δίνονται μέσω του τύπου (5.4.26). Ανάλογα με ό,τι έγινε και στις δύο προηγούμενες εφαρμογές του Κεφαλαίου αυτού Β5 ο γραμμικός αυτός συνδυασμός θα περιέχει άπειρους όρους (σε μορφή σειράς) και θα έχει προφανώς τη μορφή

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}. \quad (5.4.32)$$

Πρόκειται βέβαια για αρμονική συνάρτηση. Δηλαδή πληρούται η διαφορική εξίσωση του Laplace (5.4.1), που μερικές φορές καλείται και αρμονική εξίσωση. (Η εξίσωση του Laplace (5.4.1) είναι βέβαια μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως.) Ο πιο πάνω γραμμικός συνδυασμός (5.4.32) πληροί, επαληθεύει επίσης και τις τρεις πρώτες, τις ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες Dirichlet (5.4.14): (α) στις δύο κατακόρυφες πλευρές  $x = 0$  και  $x = a$  και (β) στην κάτω οριζόντια πλευρά  $y = 0$  της ορθογωνικής περιοχής  $D$ .

Με τη χρήση του γραμμικού συνδυασμού  $u(x, y)$  στη λύση (5.4.32) έχουμε πια διαθέσιμες άπειρες αυθαίρετες σταθερές  $E_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) προς καθορισμό. Ο καθορισμός αυτός θα γίνει κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να πληρούται και η τελευταία, η μη ομογενής (μη μηδενική) συνοριακή συνθήκη (5.4.29) για  $y = b$ . Αρκεί επομένως να θέσουμε  $y = b$  στη λύση (5.4.32) σε συνδυασμό με τη συνοριακή συνθήκη (5.4.29) για  $y = b$ . Τότε προκύπτει άμεσα η σχέση

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a} = f(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (5.4.33)$$

Με τη χρήση των ακόλουθων βοηθητικών σταθερών  $F_n$  στη σχέση αυτή (5.4.33):

$$F_n = E_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \quad (5.4.34)$$

παίρνουμε τη συνήθη ημιτονική σειρά Fourier

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin \frac{n\pi x}{a} = f(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (5.4.35)$$

Γνωρίζουμε όμως από τις ημιτονικές σειρές Fourier (αρχικά στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II) ότι οι συντελεστές  $F_n$  στη σειρά (5.4.35) πρέπει να δίνονται από τους τύπους

$$F_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.4.36)$$

Επιστρέφοντας τώρα στις αρχικές σταθερές  $E_n$  μέσω των σχέσεων (5.4.34), διαπιστώνουμε ότι

$$E_n = \frac{F_n}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.4.37)$$

Αυτές είναι οι τελικές εκφράσεις των άγνωστων συντελεστών  $E_n$  στη λύση (5.4.32) του παρόντος προβλήματος Dirichlet: εξίσωση του Laplace (5.4.1) στην ορθογωνική περιοχή  $D$  και συνοριακές συνθήκες Dirichlet (5.4.14) στο σύνορό της  $C \equiv \partial D$ . (Υπενθυμίζεται ότι εδώ το σύμβολο  $\partial D$  αναφέρεται στο σύνορο της περιοχής  $D$ .) Εύκολα διαπιστώνεται ότι η λύση  $u(x, y)$  στη σχέση (5.4.32) επαληθεύει τόσο (α) την εξίσωση του Laplace (5.4.1), που εξετάζουμε στην παρούσα

ορθογωνική περιοχή  $D$ , όσο και  $(\beta)$  τις συνοριακές συνθήκες Dirichlet (5.4.14) και στις τέσσερις πλευρές της περιοχής αυτής:  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  και  $y = b$ . Επαναλαμβάνουμε ότι από τις συνθήκες αυτές (5.4.14) μη ομογενής (μη μηδενική) είναι αποκλειστικά η συνοριακή συνθήκη  $u(x, b) = f(x)$  στην επάνω πλευρά  $y = b$  της ορθογωνικής περιοχής  $D$ . Τονίζουμε επίσης ότι η λύση (5.4.32) προέκυψε εν προκειμένω με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (5.4.13):  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , που αποδείχθηκε έτσι ιδιαίτερα αποτελεσματική και στο πρόβλημα αυτό: ένα πρόβλημα Dirichlet, που αφορά φυσικά στην εξίσωση του Laplace (5.4.1).

Ας σημειωθεί επίσης ότι στη λύση (5.4.32) που προέκυψε τελικά για την άγνωστη αρμονική συνάρτηση  $u(x, y)$  παρουσιάζονται τόσο η συνάρτηση τριγωνομετρικό ημίτονο (η απλή ημιτονική συνάρτηση) όσο και η συνάρτηση υπερβολικό ημίτονο. Αντίθετα στην εφαρμογή της Ενότητας Β5.2 (εξίσωση της ταλαντούμενης ή παλλόμενης χορδής) παρουσιάστηκαν μόνο τριγωνομετρικές συναρτήσεις (συνημίτονο και ημίτονο) στην εκεί τελική λύση (5.2.59). Επίσης στην εφαρμογή της Ενότητας Β5.3 (μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως) παρουσιάστηκε στην εκεί τελική λύση (5.3.26) και πάλι η τριγωνομετρική συνάρτηση ημίτονο σε συνδυασμό όμως με την εκθετική συνάρτηση. Οι διαφορές αυτές εξηγούνται πολύ εύκολα με τις παρατηρήσεις ότι: (α) η εξίσωση της ταλαντούμενης (ή παλλόμενης) χορδής (5.2.1) είναι υπερβολικού τύπου, (β) η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.3.1) είναι παραβολικού τύπου, ενώ (γ) η παρούσα διδιάστατη εξίσωση του Laplace (5.4.1) είναι ελλειπτικού τύπου. Πρόκειται για τους τρεις βασικούς τύπους γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως, στις παρούσες εφαρμογές μάλιστα και με σταθερούς συντελεστές. Στους τρεις αυτούς τύπους αναφερθήκαμε ήδη στην Ενότητα Β1.3, ειδικότερα μάλιστα στην Παράγραφο Β1.3.2 για τις τρεις πιο πάνω τόσο γνωστές εξισώσεις (5.2.1), (5.3.1) και (5.4.1).

#### **B5.4.7. Παράδειγμα**

Σαν παράδειγμα στο πρόβλημα Dirichlet που μόλις επιλύθηκε για την ορθογωνική περιοχή  $D = [0, a] \times [0, b]$ , εξετάζουμε την ειδική περίπτωση όπου η συνάρτηση  $f(x)$  που δίνεται στο επάνω όριο  $y = b$  της περιοχής αυτής  $D$  είναι σταθερά  $u_0$ , δηλαδή,

$$u(x, b) = f(x) = u_0, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (5.4.38)$$

Παραδείγματος χάρη, στο μόνιμο (στατικό) θερμοκρασιακό πρόβλημα έχουμε τώρα την ορθογωνική περιοχή  $D = [0, a] \times [0, b]$  με μηδενική θερμοκρασία  $u = 0$  στις τρεις πλευρές της  $x = 0$ ,  $x = a$  και  $y = 0$  και σταθερή θερμοκρασία  $u = u_0$  στην τέταρτη πλευρά της  $y = b$ .

Σε ένα αντίστοιχο πρόβλημα επίπεδης ελαστικότητας στη Μηχανική των Υλικών έχουμε αντί θερμοκρασίας  $u = u(x, y)$  το άθροισμα

$$s = s(x, y) = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (5.4.39)$$

των ορθών τάσεων  $\sigma_x$  και  $\sigma_y$ , που είναι βέβαια ίσο και με το άθροισμα των κυρίων τάσεων  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$ . (Αυτό είναι γνωστό από τη Μηχανική των Υλικών.) Επομένως το άθροισμα αυτό  $s = s(x, y)$  υποτίθεται εδώ ότι είναι μηδενικό στις τρεις προαναφερθείσες πλευρές:  $x = 0$ ,  $x = a$  και  $y = 0$  της περιοχής  $D$ , δηλαδή  $\sigma_x = -\sigma_y$  και  $\sigma_1 = -\sigma_2$  στις πλευρές αυτές. Εδώ υποτίθεται επίσης ότι το ίδιο άθροισμα  $s(x, y)$  είναι ίσο με  $u_0$  (ή με κάποιο καταλληλότερο σύμβολο, π.χ.  $s_0$  αντί του  $u_0$ ) στην τέταρτη πλευρά  $y = b$  της ίδιας περιοχής  $D$  που εξετάζουμε στη Μηχανική των Υλικών τώρα. Συνεπώς η γνώση της τιμής  $s_0$  θα μας επιτρέψει τον προσδιορισμό της κατανομής του αθροίσματος των ορθών (και των κυρίων) τάσεων  $s(x, y)$  σε ολόκληρη την ορθογωνική περιοχή  $D$ . (Η γνώση αυτή της τιμής  $s_0$  μπορεί να προέρχεται π.χ. από γνωστή εξωτερική φόρτιση ταυτόχρονα με πειραματικές μετρήσεις.) Ασφαλώς αυτά ισχύουν (α) τόσο σε περίπτωση επίπεδης παραμορφώσεως, δηλαδή σε θεωρητικά άπειρο κατά το πάχος  $h$  ελαστικό μέσον  $D$ , όσο και (β) σε περίπτωση (γενικευμένης) επίπεδης εντάσεως, δηλαδή σε εξαιρετικά λεπτό κατά το πάχος  $h$  ελαστικό μέσον.

Χρησιμοποιώντας το σύμβολο  $u_0$  (αντί του  $s_0$ ), ως προσδιορίσουμε τώρα τους συντελεστές  $F_n$  της παρούσας ημιτονικής σειράς Fourier με τη χρήση των τύπων (5.4.36). Έχοντας υποθέσει ότι  $f(x) = u_0$ , εύκολα υπολογίζουμε τα σχετικά ολοκληρώματα για  $n = 1, 2, \dots$ :

$$F_n = \frac{2}{a} \int_0^a u_0 \sin \frac{n\pi x}{a} dx = -\frac{2u_0}{a} \frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}{\frac{n\pi}{a}} \Bigg|_0^a = \frac{2u_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.4.40)$$

Τώρα για άρτιες τιμές του  $n$  ( $n = 2k$ ) προκύπτει ότι

$$F_{2k} = \frac{2u_0}{2k\pi} (1 - \cos 2k\pi) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.4.41)$$

επειδή, όπως είναι γνωστό,  $\cos 2k\pi = \cos 0 = 1$  για ακέραιες τιμές του  $k$ . Αντίστοιχα για περιττές τιμές του  $n$  ( $n = 2k - 1$ ) προκύπτει ότι

$$F_{2k-1} = \frac{2u_0}{(2k-1)\pi} [1 - \cos (2k-1)\pi] = \frac{2u_0}{(2k-1)\pi} [1 - (-1)] = \frac{4u_0}{(2k-1)\pi}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.4.42)$$

γιατί, όπως είναι επίσης γνωστό,  $\cos (2k-1)\pi = \cos \pi = -1$  και πάλι για ακέραιες τιμές του  $k$ . Άρα μόνο για περιττές τιμές του  $n$  ( $n = 2k - 1$ ) έχουμε μη μηδενικούς συντελεστές  $F_n$ .

Στη συνέχεια, με βάση τους τύπους (5.4.37), προσδιορίζουμε άμεσα και τους αντίστοιχους συντελεστές περιττής τάξεως  $E_{2k-1}$  χρησιμοποιώντας όμως και τους τύπους (5.4.42), δηλαδή απλά διαιρώντας τους με  $\sinh((2k-1)\pi b/a)$ . (Οι συντελεστές άρτιας τάξεως  $E_{2k}$  είναι προφανώς ίσοι με το μηδέν λόγω των πιο πάνω σχέσεων (5.4.41) για τους αντίστοιχους συντελεστές  $F_{2k}$ .) Στη συνέχεια τους συντελεστές αυτούς  $E_{2k-1}$  τους εισάγουμε στη λύση (5.4.32) του παρόντος προβλήματος Dirichlet (διδιάστατη εξίσωση του Laplace και συνοριακές συνθήκες Dirichlet), που ήδη έχουμε προσδιορίσει. Έτσι βρίσκουμε το εξής τελικό αποτέλεσμα στο παρόν απλό παράδειγμα:

$$u(x, y) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi x}{a} \sinh \frac{(2k-1)\pi y}{a}}{(2k-1) \sinh \frac{(2k-1)\pi b}{a}}, \quad (x, y) \in D = [0, a] \times [0, b]. \quad (5.4.43)$$

Ο υπομονετικός αναγνώστης Πολιτικός Μηχανικός μπορεί να επαληθεύσει ότι η παραπάνω λύση  $u(x, y)$  πληροί τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (5.4.1). Η επαλήθευση της πληρώσεως των τριών ομογενών (μηδενικών) συνοριακών συνθηκών Dirichlet (5.4.14) στις πλευρές  $x = 0$ ,  $x = a$  και  $y = 0$  της περιοχής  $D$  είναι προφανής. Για την επαλήθευση της πληρώσεως και της τέταρτης συνοριακής συνθήκης Dirichlet (5.4.14), δηλαδή της συνθήκης  $u(x, b) = u_0$ , πρέπει να τεθεί  $y = b$  στην πιο πάνω τελική λύση (5.4.43) και να γίνει η σχετική απλοποίηση στο κλάσμα της λύσεως αυτής. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι

$$u(x, b) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi x}{a}}{2k-1}. \quad (5.4.44)$$

Πρέπει τέλος να ληφθεί υπόψη και η ημιτονική σειρά Fourier (5.4.35), που μόλις προσδιορίστηκε (στο παρόν παράδειγμα), με συντελεστές που δίνονται από τους τύπους (5.4.42). Διαπιστώνεται επίσης ότι η παραπάνω λύση  $u(x, y)$ , σχέση (5.4.43) στην πεπερασμένη ορθογωνική περιοχή μας  $D = [0, a] \times [0, b]$  είναι φραγμένη βέβαια υπό την προϋπόθεση ότι και η συνάρτηση  $f(x)$  είναι φραγμένη, όπως συμβαίνει π.χ. με τη συνάρτηση  $f(x) = u_0$ .

Ας παρατηρηθεί επίσης ότι, ασφαλώς, η ίδια τελική λύση (5.4.43) μπορεί εύκολα να γραφεί και με τη χρήση του αρχικού δείκτη  $n$  (αντί του  $k$ ) με  $n = 2k - 1$ . Αρκεί να σημειωθεί ρητά στη σχετική σειρά (στο άθροισμα) ότι ο δείκτης  $n$  περιορίζεται σε περιττές θετικές τιμές (π.χ. γράφοντας ρητά  $n = 1, 3, 5, \dots$ ). Τούτο θα οδηγήσει σε μια κάπως συντομευμένη έκφραση της ίδιας λύσεως  $u(x, y)$ , την οποία συχνά (πάρα πολύ συχνά!) και δικαιολογημένα προτιμάει ο Πολιτικός Μηχανικός.

**B5.4.8. Παρατηρήσεις**

Είναι ίσως λίγο παράδοξο πώς (α) μια τόσο απλή περιοχή: η ορθογωνική περιοχή  $D$ , (β) μια τόσο απλή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους: η εξίσωση του Laplace (5.4.1) στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$  και  $(y)$  οι τόσο απλές συνοριακές συνθήκες Dirichlet (5.4.14) (τρεις ομογενείς, μηδενικές, και μια σταθερά:  $u(x, b) = u_0$ ) οδήγησαν στην εμφάνιση τριγωνομετρικών και υπερβολικών ημιτόνων στη λύση (5.4.43). Η λύση αυτή είναι επίσης σε μορφή σειράς (αθροίσματος με άπειρους όρους) και μάλιστα χωρίς τη δυνατότητα απλοποιήσεώς της. Δυστυχώς αυτό είναι το μαθηματικό αποτέλεσμα για τη λύση  $u(x, y)$  του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών, που είναι ένα πρόβλημα Dirichlet και δεν υπάρχει καμία δυνατότητα ουσιαστικής αλλαγής του. Υπενθυμίζεται ότι ένα τέτοιο πρόβλημα μπορεί να αφορά είτε (α) στη Μετάδοση Θερμότητας σε μόνιμη, στατική κατάσταση, είτε (β) στην επίπεδη ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών, επίσης σε στατικό πρόβλημα, είτε (γ) σε κάποιο άλλο φυσικό πρόβλημα με ισχύ της εξισώσεως του Laplace, όπως, π.χ., στη Ρευστομηχανική ιδεατού ρευστού. (Θυμίζουμε επίσης ότι ορισμένα τέτοια προβλήματα που συναντά ο Πολιτικός Μηχανικός έχουν αναφερθεί στην Παράγραφο B2.1.1 του Κεφαλαίου B2.)

Ας παρατηρηθεί σχετικά ότι ανάλογα ισχύουν και στην περίπτωση μιας ορθογωνικής (ή και τετραγωνικής για  $a = b$ ) συνήθους πλάκας, η οποία τόσο πολύ ενδιαφέρει τον Πολιτικό Μηχανικό και θα μελετηθεί με σύντομο τρόπο στο Κεφάλαιο B7. Η ορθογωνική (και η τετραγωνική φυσικά) πλάκα  $P$  υπό σταθερή κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x, y) = p_0$  και υπό απλή στήριξη (ή πάκτωση) σε ολόκληρο το σύνορό της  $C \equiv \partial P$  αποτελεί ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα προς επίλυση. Η επίλυσή του οδηγεί επίσης σε σειρές για το βέλος κάμψεως (την κάθετη μετατόπιση, τη βύθιση)  $w(x, y)$ , όπως και εδώ, με τη χρήση κάποιας μορφής χωρισμού των μεταβλητών  $x$  και  $y$ , όπως περίπου και εδώ. Τούτο συμβαίνει σε αντίθεση με την κυκλική πλάκα, την ελλειπτική πλάκα και την τριγωνική πλάκα σε μορφή ισόπλευρου τριγώνου (πάλι υπό απλή στήριξη ή πάκτωση στο σύνορό τους  $C$ ) και ξανά υπό σταθερή κατανεμημένη φόρτιση  $p_0$ . Και οι τρεις αυτές πλάκες διαθέτουν απλές, κλειστές λύσεις  $w(x, y)$ . Αλλά σ' αυτά τα σημεία θα επανέλθουμε στο Κεφάλαιο B7.

Σημειώνουμε επίσης ότι στο παρόν πρόβλημα Dirichlet θεωρήσαμε ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες στις τρεις από τις τέσσερις πλευρές της ορθογωνικής περιοχής  $D = [0, a] \times [0, b]$ , συγκεκριμένα στις πλευρές  $x = 0$ ,  $x = a$  και  $y = 0$  (τρεις πρώτες συνοριακές συνθήκες (5.4.14)). Μόνο στην πλευρά  $y = b$  θεωρήσαμε μη ομογενή (μη μηδενική) συνοριακή συνθήκη:  $u(x, b) = f(x)$  (τέταρτη συνοριακή συνθήκη (5.4.14)). Με αρκετά ανάλογο τρόπο μπορούμε ασφαλώς να εργασθούμε και πάλι για τρεις ομογενείς και μία μη ομογενή συνοριακές συνθήκες, αλλά τώρα με τη μη ομογενή συνοριακή συνθήκη στην πλευρά  $y = 0$  της ορθογωνικής περιοχής  $D$ . Ανάλογα και για τις πλευρές  $x = a$  και  $x = 0$  (αντί των  $y = b$  και  $y = 0$  πιο πάνω αντίστοιχα), όπου κατά βάση εναλλάσσονται οι ρόλοι των ανεξάρτητων μεταβλητών  $x$  και  $y$ .

Η γενική περίπτωση του παρόντος προβλήματος Dirichlet με μη ομογενείς (μη μηδενικές) συνοριακές συνθήκες και στις τέσσερις πλευρές της ορθογωνικής περιοχής  $D$  αντιμετωπίζεται με τον εξής τρόπο: Καταρχήν λύνουμε χωριστά τα τέσσερα απλά προβλήματα που προαναφέρθηκαν: με μη ομογενή (μη μηδενική) συνοριακή συνθήκη σε μια μόνο πλευρά της ορθογωνικής περιοχής  $D$ : στις άλλες τρεις με ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες. Έτσι προσδιορίζουμε τις τέσσερις σχετικές λύσεις  $u_{1,2,3,4}(x, y)$ . Τη μία ήδη τη βρήκαμε πιο πάνω, τελικός τύπος είναι ο (5.4.32). (Στο παράδειγμα της Παραγράφου B5.4.7 τελικός τύπος είναι ο (5.4.43).) Στη συνέχεια απλά αθροίζουμε τις τέσσερις αυτές λύσεις. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει η τελική λύση

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^4 u_m(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (5.4.45)$$

Η λύση αυτή προφανώς θα είναι λύση της διδιάστατης διαφορικής εξισώσεως του Laplace (5.4.1) στο παρόν πρόβλημα Dirichlet. Αυτό ισχύει, γιατί η εξίσωση του Laplace (5.4.1) είναι μια ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Συνεπώς το άθροισμα δύο (ή και

περισσότερων, όπως συμβαίνει στο εξεταζόμενο πρόβλημα) λύσεων θα είναι και αυτό προφανώς λύση βάσει της αρχής της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) λύσεων. Αφετέρου στις τέσσερις πλευρές της ορθογωνικής περιοχής  $D$  το ίδιο άθροισμα  $u_0(x, y)$  θα πληροί την ισχύουσα σε κάθε πλευρά μη ομογενή συνοριακή συνθήκη. Αυτό ισχύει, επειδή οι τρεις από τις τέσσερις συναρτήσεις  $u_m(x, y)$  πληρούν την ομογενή (μηδενική) συνοριακή συνθήκη στην πλευρά αυτή, εξαιτίας της προαναφερθείσας κατασκευής τους, η δε τέταρτη πληροί τη μη ομογενή συνοριακή συνθήκη που πραγματικά ισχύει στην ίδια πλευρά.

**B5.4.9. Ημιάπειρη λωρίδα**

Στην προηγούμενη εφαρμογή της παρούσας Ενότητας Β5.4 εξετάσαμε λεπτομερώς το πρόβλημα Dirichlet (διδιάστατη εξίσωση του Laplace και συνοριακές συνθήκες Dirichlet) στην ορθογωνική περιοχή  $D = [0, a] \times [0, b]$ . Τώρα θα εξετάσουμε το συγγενές πρόβλημα της ημιάπειρης λωρίδας (ημιλωρίδας)  $D^* = [0, a] \times [0, \infty)$ , όπου είναι επίσης εφαρμόσιμη η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών για την εξίσωση του Laplace, παρόλο που τώρα  $0 < y < \infty$ . Πολύ λίγες είναι οι διαφορές στη διαδικασία επιλύσεως σε σύγκριση με την ορθογωνική περιοχή  $D$ . Στις κατακόρυφες πλευρές της ημιλωρίδας  $x = 0$  και  $x = a$  θα θεωρήσουμε πάλι ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες για την άγνωστη συνάρτηση  $u(x, y)$ . Αντίθετα στη βάση  $y = 0$  της ημιλωρίδας θα θεωρήσουμε τη μη ομογενή (μη μηδενική) συνοριακή συνθήκη Dirichlet

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a, \tag{5.4.46}$$

με την  $f(x)$  γνωστή φραγμένη και τμηματικά συνεχή συνάρτηση. Θα υποθέσουμε επίσης ότι η άγνωστη συνάρτηση  $u(x, y)$  στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (5.4.1) είναι φραγμένη στο επάνω άκρο  $y \rightarrow \infty$  της ημιλωρίδας. Αυτό είναι εύλογο από φυσικής απόψεως.

Επίσης από φυσικής απόψεως το παραπάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών (που είναι ένα πρόβλημα Dirichlet) μπορεί να ερμηνευθεί σαν ο προσδιορισμός της θερμοκρασίας  $u(x, y)$  στην ημιάπειρη λωρίδα  $D^* = [0, a] \times [0, \infty)$  που ήδη αναφέρθηκε. Στην ημιλωρίδα αυτή η θερμοκρασία  $u(x, 0) = f(x)$  στη βάση της  $y = 0$  θεωρείται γνωστή. Επίσης οι θερμοκρασίες  $u = 0$  και στις δύο ημιάπειρες πλευρές,  $x = 0$  και  $x = a$ , της ημιλωρίδας υποτίθενται ότι είναι μηδενικές. Πρόκειται ασφαλώς για τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (5.4.1) υπό συνοριακές συνθήκες Dirichlet, που αφορά σε μόνιμη (σταθερή) κατάσταση μεταδόσεως θερμότητας, όχι σε μεταβατικό φαινόμενο. Δηλαδή δεν εμφανίζεται ο χρόνος  $t$ . Υποθέτοντας προς στιγμήν ότι η συνάρτηση  $f(x)$  είναι θετική για  $0 \leq x \leq a$ , έχουμε προφανώς μετάδοση θερμότητας από τη βάση  $y = 0$  της ημιλωρίδας  $D^*$  κυρίως προς τις δύο ημιάπειρες πλευρές της  $x = 0$  και  $x = a$ , οι οποίες ασφαλώς δεν είναι μονωμένες θερμικά. Αν ήσαν, τότε δε θα είχαμε συνοριακές συνθήκες Dirichlet στις πλευρές αυτές. Θα είχαμε συνοριακές συνθήκες Neumann και μάλιστα ομογενείς της μορφής

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0. \tag{5.4.47}$$

Αυτό θα συνέβαινε, επειδή το κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  στις πλευρές αυτές  $x = 0$  και  $x = a$  έχει σαν διεύθυνση τη διεύθυνση του άξονα  $Ox$  (προς τα αρνητικά και τα θετικά  $x$  αντίστοιχα). Αλλά δεν έχουμε την πρόθεση να εξετάσουμε εδώ αυτό το πρόβλημα Neumann.

Στο πρόβλημα Dirichlet που πραγματικά μελετάμε εδώ βασιζόμαστε και πάλι στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών μέσω της σχέσεως (5.4.3):  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ . (Ακριβώς το ίδιο είχαμε κάνει και στην ορθογωνική περιοχή  $D$ .) Οδηγούμαστε έτσι και πάλι στις ίδιες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (5.4.11) για τη συνάρτηση  $X(x)$  και (5.4.12) για τη συνάρτηση  $Y(y)$ . Υπό τις ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες Dirichlet στις ημιάπειρες (με  $0 \leq y < \infty$ ) κατακόρυφες πλευρές  $x = 0$  και  $x = a$  της ημιλωρίδας  $D^*$  που ήδη υποθέσαμε, προκύπτουν και πάλι οι ιδιοσυναρτήσεις

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a. \tag{5.4.48}$$

Ακριβώς τις ίδιες ιδιοσυναρτήσεις  $X_n(x)$  είχαμε βρει και πρωτύτερα στις λύσεις (5.4.21), κάτι το αναμενόμενο, έτσι ώστε να έχουμε στις δύο αυτές πλευρές  $x = 0$  και  $x = a$

$$X_n(0) = X_n(a) = 0 \implies u_n(0, y) = u_n(a, y) = 0. \quad (5.4.49)$$

Αφετέρου για τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις  $Y_n(y)$  ισχύει και πάλι η λύση (5.4.23), μόνο που τώρα θα προτιμήσουμε την πρώτη, την εκθετική μορφή της

$$Y_n(y) = C_{0n} e^{p_n y} + D_{0n} e^{-p_n y}, \quad p_n = \frac{n\pi}{a}, \quad 0 \leq y < \infty. \quad (5.4.50)$$

Τώρα δηλαδή χρησιμοποιούμε την εκθετική συνάρτηση αντί των υπερβολικών συναρτήσεων υπερβολικό συνημίτονο (cosh) και υπερβολικό ημίτονο (sinh). Τούτο μας διευκολύνει στην παρούσα ημίαπειρη λωρίδα (ημιλωρίδα)  $D^*$ , επειδή, όπως ήδη σημειώσαμε, θέλουμε η άγνωστη συνάρτησή μας  $u(x, y)$  να είναι φραγμένη για  $y \rightarrow \infty$ . Άρα ο όρος  $C_{0n} e^{p_n y} = C_{0n} e^{n\pi y/a}$  στην αμέσως πιο πάνω λύση (5.4.50) πρέπει να εξαλειφθεί. Αυτό το πετυχαίνουμε απλά θέτοντας  $C_{0n} = 0$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ). Επομένως σεβόμαστε και τη συνθήκη φραγμένης, πεπερασμένης άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, y)$  στο άπειρο (για  $y \rightarrow \infty$ ) στο επάνω μέρος της ημιλωρίδας  $D^*$ . Άρα με  $C_{0n} = 0$  η σχέση (5.4.50) παίρνει τώρα την απλοποιημένη μορφή της

$$Y_n(y) = D_{0n} e^{-p_n y} = D_{0n} e^{-n\pi y/a}, \quad 0 \leq y < \infty. \quad (5.4.51)$$

Έτσι οι ιδιοσυναρτήσεις  $u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y)$  παίρνουν τώρα, λόγω των λύσεων (5.4.48) και (5.4.51) που προέκυψαν με την παρούσα μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, τη διαφορετική μορφή

$$u_n(x, y) = X_n(x)Y_n(y) = E_n^* \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-n\pi y/a}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad y \geq 0. \quad (5.4.52)$$

Στις ιδιοσυναρτήσεις αυτές χρησιμοποιήθηκαν οι νέες σταθερές  $E_n^* = B_n D_{0n}$ , οι οποίες και πρέπει να προσδιορισθούν. Σημειώνεται ότι δεν θα εξυπηρετούσε σε τίποτε το ίδιο το γινόμενο  $B_n D_{0n}$ .

Ο προσδιορισμός αυτός θα γίνει απλά μέσω της μη ομογενούς συνοριακής συνθήκης (5.4.46) στη βάση  $y = 0$  (με  $0 \leq x \leq a$ ) της ημιλωρίδας  $D^*$ . Βέβαια προηγουμένως πρέπει να γίνει υπέρθεση (επαλληλία) των λύσεων  $u_n(x, y)$  με την άγνωστη συνάρτηση  $u(x, y)$  τελικά τη μορφή της σειράς

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^* \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-n\pi y/a}, \quad (x, y) \in D^*. \quad (5.4.53)$$

Θέτουμε τώρα  $y = 0$  στη λύση αυτή, οπότε η εκθετική συνάρτηση γίνεται μονάδα:  $e^0 = 1$ . Λαμβάνουμε επίσης υπόψη τη συνοριακή συνθήκη (5.4.46), δηλαδή ότι  $u(x, 0) = f(x)$ . Διαπιστώνουμε έτσι ότι

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n^* \sin \frac{n\pi x}{a} = f(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (5.4.54)$$

Άρα οι ζητούμενοι συντελεστές  $E_n$  είναι απλά οι συντελεστές του αναπτύγματος της γνωστής συναρτήσεως  $f(x)$  σε ημιτονική σειρά Fourier στο διάστημα  $[0, a]$ , δηλαδή σε όλο το πλάτος της ημιλωρίδας  $D^*$  στη βάση της  $y = 0$ . Επομένως ισχύουν οι τύποι

$$E_n^* = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.4.55)$$

Οι τύποι αυτοί συμπίπτουν ουσιαστικά με τους τύπους (5.4.36) και είναι, δικαιολογημένα, κάπως απλούστεροι από τους αντίστοιχους τύπους (5.4.37), που ισχύουν για την ορθογωνική περιοχή  $D$ . Αλλά στους τύπους (5.4.37) είχαμε διαφορετική γεωμετρία και διαφορετικές συνοριακές συνθήκες.

Τώρα πια η τελική λύση (5.4.53) για την άγνωστη συνάρτηση  $u(x, y)$  του παρόντος προβλήματος Dirichlet είναι πλήρως καθορισμένη. Άρα αυτό που απομένει για τον αναγνώστη Πολιτικό Μηχανικό είναι η επαλήθευση της λύσεως αυτής. Πρέπει δηλαδή να δειχθεί ότι αυτή επαληθεύει:



(α) τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (5.4.1) (οι σχετικές μερικές παραγωγίσεις είναι απλούστατες!), (β) τις συνοριακές συνθήκες στις τρεις πλευρές  $x = 0$ ,  $x = a$  και  $y = 0$  της ημιλωρίδας  $D^*$  και (γ) επιπλέον την απαίτηση η λύση αυτή  $u(x, y)$  να είναι φραγμένη στο συν άπειρο, δηλαδή για  $y \rightarrow \infty$ . Και το καθήκον αυτό είναι πολύ απλό για τη λύση  $u(x, y)$  στη σχέση (5.4.53) εξαιτίας και των εκφράσεων (5.4.55) για τους συντελεστές  $E_n$  και θα παραλειφθεί εδώ. Το συμπέρασμα πάντως είναι ότι η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών είναι εφαρμόσιμη και σε ημιάπειρες περιοχές όπως η παρούσα ημιλωρίδα  $D^*$ . Δεν παρουσιάζεται καμία νέα δυσκολία εκτός από την οφειλόμενη προσοχή, ώστε η άγνωστη συνάρτηση  $u(x, y)$  να προκύπτει φραγμένη στο άπειρο. Τούτο είτε απαιτείται ρητά είτε υπονοείται με την έννοια ότι πρέπει να ισχύει για φυσικούς λόγους.

Ας παρατηρηθεί επίσης ότι από τη λύση (5.4.53) συνάγεται ότι καθώς το  $y$  μεγαλώνει (δηλαδή απομακρυνόμαστε από τη βάση  $y = 0$  της ημιλωρίδας  $D^*$ ), τόσο η άγνωστη συνάρτηση  $u(x, y)$  τείνει στο μηδέν ( $u \rightarrow 0$ ) σε όλο το πλάτος  $[0, a]$  της ημιλωρίδας  $D^*$ . (Αυτό οφείλεται στους εκθετικούς όρους, με αρνητικούς εκθέτες, στη λύση (5.4.53).) Το ίδιο ακριβώς ( $u = 0$ ) ισχύει και στις πλευρές  $x = 0$  και  $x = a$  της ημιλωρίδας για κάθε τιμή του  $y$  ασφαλώς με  $y > 0$ . Αυτό στη Μετάδοση Θερμότητας (ή Διάδοση Θερμότητας) σημαίνει απλά ότι η μεταφορά, η ροή θερμότητας στο παρόν πρόβλημα συντελείται από τη βάση  $y = 0$  της ημιλωρίδας προς το κάτω κυρίως μέρος των κατακόρυφων πλευρών της  $x = 0$  και  $x = a$ , που είναι πιο κοντά στη βάση  $y = 0$  (ή αντίστροφα). Τούτο είναι φυσικό. Καθώς όμως το  $y$  μεγαλώνει, οι πλευρές αυτές  $x = 0$  και  $x = a$ , που βρίσκονται συνεχώς σε μηδενική θερμοκρασία, έχουν «απορροφήσει» (αν επιτρέπεται η λέξη αυτή) χωρικά τις θερμοκρασίες των σημείων της βάσεως  $y = 0$  της ημιλωρίδας  $D^*$ . Οι θερμοκρασίες αυτές οφείλονται γενικά στη μη μηδενική θερμοκρασιακή κατανομή  $f(x)$  στη βάση αυτή  $y = 0$ . Δεν έχουμε βέβαια χρονικές μεταβολές, επειδή αναφερόμαστε σε μόνιμη, σταθερή κατάσταση στο παρόν πρόβλημα Μεταδόσεως Θερμότητας. Γι' αυτό και ισχύει η διδιάστατη εξίσωση του Laplace (5.4.1), που δεν περιέχει το χρόνο  $t$ . Έχουμε επομένως μια μόνιμη ροή θερμότητας.

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάσαμε ήδη τρεις εφαρμογές της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών στην επίλυση ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Συγκεκριμένα εφαρμόσαμε τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών: (α) στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος, (β) στην επίσης μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως και (γ) στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Οι τρεις αυτές εξισώσεις αποτελούν σίγουρα τις πιο κλασικές εφαρμογές της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών που μελετάμε. Πολύ πιο εξειδικευμένες εφαρμογές της ίδιας μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού θα εξετασθούν λεπτομερώς στα αμέσως επόμενα τρία κεφάλαια. Αναλυτικότερα θα εξετασθούν: (α) στο Κεφάλαιο Β6 εφαρμογές σε ταλαντώσεις ράβδων και δοκών), (β) στο Κεφάλαιο Β7 εφαρμογές σε προβλήματα δίσκων και πλακών και (γ) στο Κεφάλαιο Β8 άλλες εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού.

Η γενίκευση της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών σε πολικές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες θα εξετασθεί στο Κεφάλαιο Β9. Οποσδήποτε η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών είναι η πιο δημοφιλής μέθοδος αναλυτικής επίλυσεως γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους σε όσες βέβαια από τις εξισώσεις αυτές είναι εφαρμόσιμη. (Οι εξισώσεις αυτές καλούνται **διαχωρίσιμες εξισώσεις**.) Να μη λησμονείται επίσης ότι πέραν της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών συχνά χρησιμοποιούνται και οι μέθοδοι των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών, κυρίως των μετασχηματισμών Laplace και Fourier. Οι μέθοδοι των δύο αυτών μετασχηματισμών για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους θα εξετασθούν στα Κεφάλαια Β10 και Β11 αντίστοιχα. Στη συνέχεια στο Κεφάλαιο Β12 θα εξετασθούν και ορισμένες απλές προσεγγιστικές και αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση των εξισώσεων αυτών.

Προς το παρόν, για να συμπληρώσουμε το Κεφάλαιο αυτό Β5, θα αναφερθούμε σύντομα και σε δύο απλές γενικεύσεις της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών. Συγκεκριμένα θα εξετάσουμε: (α) απλές μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες στην επόμενη Ενότητα Β5.5 και (β) απλές μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους στη μεθεπόμενη Ενότητα Β5.6.

Και οι δύο αυτές γενικεύσεις παρουσιάζουν πρακτικό ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό. Μάλιστα τη δεύτερη γενίκευση θα τη μελετήσουμε εκτενέστερα στο επόμενο Κεφάλαιο Β6. Πιο συγκεκριμένα η εφαρμογή της σε δυναμικά (όχι απλά στατικά) προβλήματα συνήθων δοκών πεπερασμένου μήκους  $L$  είναι εξαιρετικά ενδιαφέροντα και χρήσιμη στην τόσο συνηθισμένη για τον Πολιτικό Μηχανικό περίπτωση εξωτερικής κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x, t)$  πάνω στη δοκό. Στην ειδική αυτή εφαρμογή, που αφορά στη Δυναμική των Κατασκευών, θα επιμείνουμε στο επόμενο Κεφάλαιο Β6.

## B5.5. ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

### B5.5.1. Το πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την περίπτωση των μη ομογενών (μη μηδενικών) συνοριακών συνθηκών. Θα επιδείξουμε τη σχετική μέθοδο στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως. Πιο συγκεκριμένα, ακριβώς όπως και στην Ενότητα Β5.3, θα μελετήσουμε και εδώ τη μονοδιάστατη εξίσωση της Μεταδόσεως Θερμότητας ή Διαδόσεως Θερμότητας (5.3.1):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u = u(x, t), \quad (5.5.1)$$

έστω κατά το πάχος τοίχου συνολικού πάχους  $L$  με  $0 \leq x \leq L$ . Την εξίσωση αυτή την υποθέσαμε στην Ενότητα Β5.3 ότι συνοδεύεται από τις δύο συνοριακές συνθήκες (5.3.3), δηλαδή τις συνθήκες

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.5.2)$$

στις δύο επιφάνειες  $x = 0$  και  $x = L$  του τοίχου. Πρόκειται για ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες. Αυτές είναι φυσικά και οι πιο απλές από όλες τις συνοριακές συνθήκες. Πέρα από τις δύο συνοριακές συνθήκες (5.5.2) στην Ενότητα Β5.3 είχαμε επίσης διαθέσιμη και μία αρχική συνθήκη (για  $t = 0$ ): τη συνθήκη (5.3.4) για την αρχική θερμοκρασία  $f(x)$  στα σημεία  $x$  του τοίχου, δηλαδή

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.5.3)$$

Είχαμε επομένως προς επίλυση ένα πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών που αποτελείτο από: (α) την εξίσωση (5.5.1): τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, εδώ τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, (β) τις εξισώσεις (5.5.2): τις συνοριακές συνθήκες και (γ) την εξίσωση (5.5.3): την αρχική συνθήκη. Το πρόβλημα αυτό το επιλύσαμε ήδη στην Ενότητα Β5.3 με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα υποθέσαμε στη σχέση (5.3.5) ότι

$$u(x, t) = X(x) T(t) \quad (5.5.4)$$

και βρήκαμε τελικά σαν λύση του προβλήματος τη σειρά (5.3.26), την επαναλαμβάνουμε

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \exp \left[ - \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 t \right], \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0. \quad (5.5.5)$$

Παρατηρούμε ότι ως προς τη θέση  $x$  η σειρά αυτή μπορεί να χαρακτηριστεί και σαν ημιτονική σειρά Fourier.

Στη συνέχεια στη σειρά αυτή θέσαμε  $t = 0$  και πήραμε επίσης υπόψη μας την αρχική συνθήκη (5.5.3). Τότε προέκυψε η σχέση (5.3.27), συγκεκριμένα η σχέση

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x). \quad (5.5.6)$$

Με τον τρόπο αυτό διαπιστώσαμε ότι οι συντελεστές  $C_n$  δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι συντελεστές Fourier της ημιτονικής σειράς Fourier της γνωστής συναρτήσεως  $f(x)$  στην αρχική συνθήκη (5.5.3). Επομένως προσδιορίστηκαν από τους τύπους (5.3.28), τους επαναλαμβάνουμε και αυτούς

$$C_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.5.7)$$

Στην παρούσα Ενότητα Β5.5 θα γενικεύσουμε λίγο το πιο πάνω πρόβλημα και τη λύση του  $u(x, t)$  στην περίπτωση των εξής μη ομογενών (μη μηδενικών) συνοριακών συνθηκών:

$$u(0, t) = \Theta_1, \quad u(L, t) = \Theta_2, \quad t > 0. \quad (5.5.8)$$

Δεχόμαστε δηλαδή εδώ και μη μηδενικές θερμοκρασίες  $\Theta_1$  και  $\Theta_2$  στις δύο επιφάνειες  $x = 0$  και  $x = L$  του τοίχου αντίστοιχα. Τις γενικά μη μηδενικές αυτές θερμοκρασίες  $\Theta_1$  και  $\Theta_2$  τις υποθέτουμε όμως σταθερές και όχι συναρτήσεις του χρόνου  $t$ . Το πρόβλημα των χρονικά εξαρτημένων συνοριακών συνθηκών  $\Theta_1 = \Theta_1(t)$  και  $\Theta_2 = \Theta_2(t)$  είναι αρκετά πιο δύσκολο στην αντιμετώπισή του και δε θα αναφερθούμε καθόλου σ' αυτό.

Συνοψίζοντας, έχουμε εδώ προς επίλυση το πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών (5.5.1), (5.5.8) και (5.5.3). Το πρόβλημα αυτό διαφέρει από το πρόβλημα της Ενότητας Β5.3 μόνο ως προς το σημείο των μη ομογενών συνοριακών συνθηκών (5.5.8). Με την ουσιώδη αυτή διαφορά και η λύση (5.5.5) με τους συντελεστές  $C_n$  σ' αυτή να προσδιορίζονται από τους τύπους (5.5.7) θα πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα. Η τροποποίηση αυτή θα βασίζεται στις καινούργιες, τις μη ομογενείς (μη μηδενικές) συνοριακές συνθήκες (5.5.8). Πρόκειται για ένα πρακτικά χρήσιμο πρόβλημα, γιατί δεν είναι δυνατόν να δεχόμαστε πάντοτε ομογενείς συνοριακές συνθήκες  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  στις δύο επιφάνειες του τοίχου. Χωρίς καμία άλλη χρονοτριβή, ας προχωρήσουμε τώρα στην επίλυση του προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών (5.5.1), (5.5.8) και (5.5.3) που καταστρώσαμε.

### **Β5.5.2. Επίλυση του προβλήματος στη μόνιμη κατάσταση**

Ξεκινώντας την επίλυση του προβλήματος που μόλις θέσαμε, κάνουμε στην αρχή την εσφαλμένη υπόθεση ότι έχουμε ένα θερμοκρασιακό πρόβλημα σε μόνιμη, σταθερή κατάσταση (steady state) ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$ . Τη σχετική λύση θα την αποκαλέσουμε  $\theta_s(x)$  και φυσικά αυτή δε θα εξαρτάται από το χρόνο  $t$ .

Στη μόνιμη, σταθερή, «στατική» αυτή περίπτωση η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.5.1) θα απλοποιηθεί παίρνοντας τη μορφή μιας συνήθους διαφορικής εξίσώσεως

$$\frac{d^2\theta_s}{dx^2} = 0, \quad \theta_s = \theta_s(x). \quad (5.5.9)$$

Η μορφή αυτή ισχύει, απλά επειδή η άγνωστη συνάρτηση  $\theta_s(x)$  έχει υποθεθεί ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$ . Η γενική λύση της συνήθους διαφορικής αυτής εξίσώσεως (5.5.9) είναι προφανώς ένα πρωτοβάθμιο πολυώνυμο της θέσεως  $x$  κατά το πάχος του τοίχου  $0 \leq x \leq L$ , δηλαδή

$$\theta_s(x) = Ax + B. \quad (5.5.10)$$

Για να προσδιορίσουμε τις δύο προς το παρόν άγνωστες σταθερές  $A$  και  $B$ , θα χρησιμοποιήσουμε τις δύο μη ομογενείς (μη μηδενικές) συνοριακές συνθήκες (5.5.8) για την παρούσα συνάρτηση  $\theta_s(x)$ . Θα έχουμε επομένως τώρα και τις συνοριακές συνθήκες

$$\theta_s(0) = \Theta_1, \quad \theta_s(L) = \Theta_2. \quad (5.5.11)$$

Σημειώνουμε ότι τις συνοριακές θερμοκρασίες  $\Theta_1$  και  $\Theta_2$  ήδη τις υποθέσαμε σταθερές, ανεξάρτητες από το χρόνο  $t$ . Θέτοντας τώρα  $x = 0$  στη γενική λύση (5.5.10) για την άγνωστη συνάρτηση  $\theta_s(x)$  της μόνιμης καταστάσεως (δηλαδή για  $t \rightarrow \infty$ ), διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$\theta_s(0) = B = \Theta_1, \quad \text{οπότε} \quad \theta_s(x) = Ax + \Theta_1. \quad (5.5.12)$$

Εύκολος είναι ο προσδιορισμός και της δεύτερης σταθεράς  $B$ . Πραγματικά, θέτοντας  $x = L$  στη συνάρτηση  $\theta_s(x) = Ax + \Theta_1$ , την οποία μόλις βρήκαμε στην ενδιάμεση αυτή λύση (5.5.12), και παίρνοντας υπόψη και τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη (5.5.11), συμπεραίνουμε ότι

$$\theta_s(L) = AL + \Theta_1 = \Theta_2 \quad \implies \quad AL = \Theta_2 - \Theta_1 \quad \implies \quad A = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{L}. \quad (5.5.13)$$

Άρα έχουμε τελικά για τις σταθερές  $A$  και  $B$  στην αρχική και γενική λύση (5.5.10) τις τιμές

$$B = \Theta_1 \quad \text{και} \quad A = \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{L}. \quad (5.5.14)$$

Επίσης για τη συνάρτηση  $\theta_s(x)$  στη μόνιμη, τη σταθερή, τη «στατική», την ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$  κατάσταση έχουμε τώρα

$$\theta_s(x) = \Theta_1 + \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{L} x. \quad (5.5.15)$$

Αν θέλουμε μάλιστα, μπορούμε άμεσα να επαληθεύσουμε τη λύση αυτή όχι μόνο ως προς τις συνοριακές συνθήκες (5.5.11), αλλά και ως προς την ίδια τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.5.1). Βέβαια σ' αυτήν την εξίσωση η χρονική παράγωγος στο δεξιό μέλος είναι μηδενική για τη λύση μας  $\theta_s(x)$ , που έχει υποτεθεί συνάρτηση μόνο της θέσεως  $x$  και ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$ .

### B5.5.3. Πλήρης επίλυση του προβλήματος με τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες

Προχωράμε τώρα στην πλήρη επίλυση του προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών που εξετάζουμε, δηλαδή του προβλήματος των εξισώσεων (5.5.1), (5.5.8) και (5.5.3) με τις συνοριακές συνθήκες (5.5.8) μη ομογενείς (μη μηδενικές). Προς το σκοπό αυτό θα πάρουμε υπόψη μας τη λύση (5.5.15), που βρήκαμε στην προηγούμενη παράγραφο για τη συνάρτηση  $\theta_s(x)$  της μόνιμης καταστάσεως, τη χρονικά τελική συνάρτηση (για  $t \rightarrow \infty$ ) μετά από το μεταβατικό φαινόμενο.

Βέβαια η χρονικά εξαρτημένη λύση  $u(x, t)$  του πλήρους προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών (5.5.1), (5.5.8) και (5.5.3) θα εξαρτάται και από το χρόνο  $t$  (όχι μόνο από τη θέση  $x$ ) αντίθετα με τη συνάρτηση  $\theta_s(x)$  της μόνιμης, σταθερής, «στατικής» καταστάσεως. Δηλώνουμε τη διαφορά μεταξύ των δύο αυτών συναρτήσεων με τη βοηθητική συνάρτηση  $\theta(x, t)$ , οπότε

$$\theta(x, t) = u(x, t) - \theta_s(x) \quad \iff \quad u(x, t) = \theta(x, t) + \theta_s(x). \quad (5.5.16)$$

Με γνωστή όμως τη συνάρτηση  $\theta_s(x)$  από τη λύση (5.5.15), απομένει πια ο προσδιορισμός της βοηθητικής συναρτήσεως  $\theta(x, t)$ . Η συνάρτηση αυτή εκφράζει τη διαφορά, την απόκλιση μεταξύ της αληθινής και πλήρους λύσεως του προβλήματός μας  $u(x, t)$  και της τελικής και ανεξάρτητης από το χρόνο  $t$  (για  $t \rightarrow \infty$ ) γνωστής συναρτήσεως  $\theta_s(x)$ .

Αντικαθιστούμε επομένως την άγνωστη και χρονικά εξαρτημένη συνάρτηση  $u(x, t)$  από τη δεύτερη σχέση (5.5.16) στις εξισώσεις (5.5.1), (5.5.8) και (5.5.3). Τώρα εύκολα παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (5.5.1), η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, θα πάρει τη ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \implies \quad \frac{\partial^2 (\theta + \theta_s)}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial (\theta + \theta_s)}{\partial t} \quad \implies \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{d^2 \theta_s}{dx^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} + 0, \quad (5.5.17)$$

δηλαδή τελικά

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (5.5.18)$$

Για την εύρεση της μορφής αυτής πήραμε φυσικά υπόψη μας την ισχύ της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (5.5.9) για τη συνάρτηση  $\theta_s(x)$  της μόνιμης καταστάσεως. Αυτή είναι ασφαλώς ένα πρωτοβάθμιο πολυώνυμο. Αυτό το διαπιστώσαμε ήδη στη λύση της (5.5.10) και τελικά (5.5.15).

Ανάλογα οι μη ομογενείς (μη μηδενικές) συνοριακές συνθήκες (5.5.8) παίρνουν τώρα τη μορφή

$$u(0, t) = \theta(0, t) + \theta_s(0) = \Theta_1 \implies \theta(0, t) = 0, \quad (5.5.19)$$

$$u(L, t) = \theta(L, t) + \theta_s(L) = \Theta_2 \implies \theta(L, t) = 0. \quad (5.5.20)$$

Αυτό συμβαίνει, επειδή η ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$  συνάρτηση  $\theta_s(x)$  επαληθεύει ήδη τις μη ομογενείς (μη μηδενικές) συνοριακές συνθήκες (5.5.8). (Έτσι την κατασκευάσαμε στην προηγούμενη Παράγραφο Β5.5.2: με τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες (5.5.11).) Άρα η διαφορά της  $\theta(x, t)$  από την πλήρη λύση  $u(x, t)$  θα επαληθεύει τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$\theta(0, t) = \theta(L, t) = 0. \quad (5.5.21)$$

Με τον τρόπο αυτό (μάλλον το τέχνασμα αυτό) πετύχαμε να καταστήσουμε ομογενείς τις συνοριακές συνθήκες στις δύο επιφάνειες  $x = 0$  και  $x = L$  του τοίχου. «Ομογενοποιήσαμε» έτσι το πρόβλημά μας ως προς τις συνοριακές συνθήκες, αν επιτρέπεται η χρήση της λέξεως αυτής αντί για την πολύ πιο δόκιμη φράση «καταστήσαμε ομογενές».

Ας αναφερθούμε τελικά και στην αρχική συνθήκη (5.5.3). Αυτή παίρνει τώρα τη μορφή

$$u(x, 0) = \theta(x, 0) + \theta_s(x) = f(x) \implies \theta(x, 0) = f^*(x) := f(x) - \theta_s(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.5.22)$$

Λόγω της λύσεως (5.5.15):  $\theta_s(x) = \Theta_1 + (\Theta_2 - \Theta_1)x/L$  έχουμε στην αρχική αυτή συνθήκη τη νέα χωρική συνάρτηση

$$f^*(x) := f(x) - \theta_s(x) = f(x) - \Theta_1 - \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{L}x, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.5.23)$$

Άρα η ζητούμενη βοηθητική συνάρτηση, η απόκλιση

$$\theta(x, t) = u(x, t) - \theta_s(x), \quad (5.5.24)$$

η διαφορά της πλήρους λύσεως  $u(x, t)$  μείον την τελική της έκφραση  $\theta_s(x)$  (για  $t \rightarrow \infty$ , που είναι, επαναλαμβάνεται, ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$ ) θα επαληθεύει και αυτή, η απόκλιση  $\theta(x, t)$ , τη μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως (5.5.18). Αυτό το αποδείξαμε ήδη. Τώρα όμως οι συνοριακές συνθήκες για τη βοηθητική άγνωστη συνάρτηση  $\theta(x, t)$  θα είναι ομογενείς: συνοριακές συνθήκες (5.5.21). (Το πρόβλημά μας έχει ευτυχώς καταστεί ομογενές!) Τέλος η αρχική συνθήκη (5.5.3) έχει πάρει τώρα την τροποποιημένη μορφή (5.5.22). Στη μορφή αυτή παρατηρούμε ότι η συνάρτηση των αρχικών τιμών  $f(x)$  έχει απλά τροποποιηθεί στη μορφή (5.5.23). Ουσιαστικά έχει αντικατασταθεί από τη νέα και επίσης βοηθητική συνάρτηση αρχικών τιμών  $f^*(x) := f(x) - \theta_s(x)$ .

Συμπεραίνουμε επομένως πως η ζητούμενη βοηθητική συνάρτηση  $\theta(x, t)$ , η οποία αναφέρεται τώρα στις ομογενείς συνοριακές συνθήκες (5.5.21), θα δίνεται από τη γνωστή λύση (5.5.5) του ομογενούς ως προς τις συνοριακές συνθήκες προβλήματος. Δηλαδή θα έχουμε

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^* \sin \frac{n\pi x}{L} \exp \left[ - \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 t \right], \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0. \quad (5.5.25)$$

Εντούτοις οι συντελεστές  $C_n^*$  της σειράς αυτής να μην θα δίνονται από τους τύπους (5.5.7), αλλά τώρα με συνάρτηση αρχικών τιμών τη βοηθητική συνάρτηση  $f^*(x) := f(x) - \theta_s(x)$  αντί για την αρχική συνάρτηση  $f(x)$ . Προκύπτει επομένως ότι

$$C_n^* = \frac{2}{L} \int_0^L f^*(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.5.26)$$

Προφανώς η πλήρης λύση του προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών (5.5.1), (5.5.8) και (5.5.3) θα δίνεται από τη δεύτερη σχέση (5.5.16). Δηλαδή λόγω και της λύσεως (5.5.15) τελικά θα έχουμε

$$u(x, t) = \theta(x, t) + \theta_s(x) = \theta(x, t) + \Theta_1 + \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{L} x \quad (5.5.27)$$

με τη συνάρτηση  $\theta(x, t)$  να έχει καθορισθεί από τη λύση (5.5.25) του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος σε συνδυασμό με τους τύπους (5.5.26). Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε την ορθότητα της λύσεως αυτής (5.5.27): (α) ως προς τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.5.1), (β) ως προς τις συνοριακές συνθήκες (5.5.8) και (γ) ως προς την αρχική συνθήκη (5.5.3).

Ας παρατηρήσουμε επίσης ότι μετά την εξάλειψη του μεταβατικού φαινομένου (μαθηματικότερα για  $t \rightarrow \infty$ ) ισχύει προφανώς το όριο

$$\theta(x, \infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} \theta(x, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.5.28)$$

Η παρατήρηση αυτή προκύπτει άμεσα από τη σχετική λύση (5.5.25) για  $t \rightarrow \infty$ , οπότε οι αρνητικοί εκθετικοί χρονικοί παράγοντες στους όρους της μηδενίζονται. Διαπιστώνεται επομένως από την πλήρη λύση (5.5.27) του μη ομογενούς προβλήματος ότι

$$u(x, \infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \theta_s(x) = \Theta_1 + \frac{\Theta_2 - \Theta_1}{L} x, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.5.29)$$

Συνεπώς επαληθεύεται, ήταν απόλυτα δικαιολογημένος ο ισχυρισμός μας ότι η λύση  $\theta_s(x)$  αφορά στη μόνιμη (στη σταθερή) κατάσταση μετά την εξάλειψη του μεταβατικού φαινομένου, που εκφράζεται από τη συνάρτηση  $\theta(x, t)$ . Αυτό το μεταβατικό φαινόμενο εξαλείφεται με την πάροδο του χρόνου  $t$ .

Σαν υποσημείωση ας παρατηρηθεί τέλος ότι με κατάλληλη τη συνάρτηση αρχικών τιμών  $f(x)$ , συγκεκριμένα για την ειδική συνάρτηση  $f(x) = \theta_s(x)$  θα ισχύει και  $f^*(x) = f(x) - \theta_s(x) \equiv 0$ , οπότε και  $\theta(x, t) \equiv 0$ . Σ' αυτήν την πολύ ειδική περίπτωση, και μόνο σ' αυτή, δεν υπάρχει μεταβατικό φαινόμενο. Έχουμε δηλαδή από την αρχή  $t = 0$  του χρόνου τη μόνιμη κατάσταση  $\theta_s(x)$  για τη θερμοκρασιακή κατανομή (τη θερμοκρασία)  $u(x, t)$  κατά το πάχος του τοίχου που εξετάζουμε.

Ανάλογα ισχύουν φυσικά και για ράβδο μήκους  $L$  (επίσης με  $0 \leq x \leq L$ ) υπό τις ίδιες συνθήκες. Αρκεί βέβαια η ράβδος αυτή να είναι πλευρικά απόλυτα μονωμένη. Τότε θα ισχύει πράγματι από θερμικής απόψεως η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.5.1) με μετάδοση της θερμότητας μόνο κατά μήκος της ράβδου: κατά τη διεύθυνση  $x$  και όχι και εγκάρσια προς το περιβάλλον.

## B5.6. ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

### B5.6.1. Το πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών

Στην προηγούμενη Ενότητα Β5.5 διαπιστώσαμε ότι η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών είναι εφαρμόσιμη και σε προβλήματα με μη ομογενείς (μη μηδενικές) συνοριακές συνθήκες με τη χρήση βοηθητικής συναρτήσεως. Στην παρούσα Ενότητα Β5.6 θα δούμε ότι είναι επίσης γενικεύσιμη και σε μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές. Δυστυχώς η παρούσα γενίκευση είναι κάπως πιο δύσκολη από εκείνη της προηγούμενης Ενότητας Β5.5. Είναι όμως και πάρα πολύ χρήσιμη λόγω της αρκετά συχνής εμφανίσεως μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων.

Θεωρούμε ξανά τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.3.1), όπως και στην Ενότητα Β5.3, ερμηνεύοντάς την και πάλι σαν εξίσωση της μεταδόσεως θερμότητας ή διαδόσεως θερμότητας. Υπάρχει όμως τώρα η αξιοσημείωτη διαφορά ότι θα έχουμε και έναν επιπλέον όρο  $p(x, t)$ : μια γνωστή συνάρτηση της θέσεως  $x$  ( $0 \leq x \leq L$ ) και του χρόνου  $t$  ( $t \geq 0$ ). Ο γνωστός αυτός όρος  $p(x, t)$  στο δεξιό μέλος θα καταστήσει την εξίσωση της διαχύσεως (5.3.1) μη ομογενή. (Σημειώνεται ότι δεν υπάρχει ειδική ονομασία για τη μη ομογενή εξίσωση της διαχύσεως. Αντίθετα υπάρχει για τη μη ομογενή εξίσωση του Laplace, η οποία καλείται **εξίσωση του Poisson**.) Θα έχουμε συνεπώς τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - p(x, t), \quad u = u(x, t), \quad (5.6.1)$$

έστω και πάλι κατά το πάχος τοίχου συνολικού πάχους  $L$  με  $0 \leq x \leq L$ .

Ακριβώς όπως κάναμε και στην Ενότητα Β5.3, υποθέτουμε και εδώ ότι η πιο πάνω μη ομογενής εξίσωση (5.6.1) συνοδεύεται από τις ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες (5.3.3), δηλαδή από τις συνθήκες

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.6.2)$$

και στις δύο επιφάνειες  $x = 0$  και  $x = L$  του τοίχου. Πέρα από τις συνοριακές αυτές συνθήκες (5.6.2) θεωρείται φυσικά επίσης διαθέσιμη και μία αρχική συνθήκη: η συνθήκη (5.3.4) για την αρχική (για  $t = 0$ ) θερμοκρασία  $f(x)$  στα σημεία  $x$  του τοίχου, δηλαδή

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.6.3)$$

Έχουμε επομένως και πάλι προς επίλυση ένα πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών που αποτελείται από: (α) τη μη ομογενή εξίσωση (5.6.1): τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, εδώ τη μη ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, (β) τις εξισώσεις (5.6.2): τις συνοριακές συνθήκες και (γ) την εξίσωση (5.6.3): την αρχική συνθήκη. (Παρατηρούμε ότι οι συνοριακές συνθήκες (5.6.2) είναι φυσικά δύο, επειδή η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.6.1) έχει δεύτερη μερική παράγωγο ως προς τη θέση  $x$ . Αντίθετα η αρχική συνθήκη (5.6.3) είναι μόνο μία, επειδή η ίδια εξίσωση (5.6.1) έχει μόνο πρώτη μερική παράγωγο ως προς το χρόνο  $t$ .) Το παραπάνω πρόβλημα (5.6.1), (5.6.2) και (5.6.3) το επιλύσαμε ήδη στην Ενότητα Β5.3 με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών για την ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.3.1), δηλαδή με  $p(x, t) \equiv 0$  στη μη ομογενή εξίσωση (5.6.1), οπότε αυτή μεταπίπτει στην αντίστοιχη ομογενή εξίσωση. Εδώ θα εξετάσουμε το αρκετά γενικότερο πρόβλημα αυτής της μη ομογενούς εξισώσεως (5.6.1) (με  $p(x, t) \neq 0$ ).

Στη Μετάδοση Θερμότητας (ή Διάδοση Θερμότητας) η συνάρτηση  $p(x, t)$  είναι ανάλογη της παραγωγής για  $p(x, t) > 0$  (ή της απαγωγής για  $p(x, t) < 0$ ) θερμότητας (θετική ή αρνητική κατανεμημένη πηγή θερμότητας αντίστοιχα). Αυτή θεωρείται γενικά συνάρτηση της θέσεως  $x$  και του χρόνου  $t$ . Φυσικά για τον Πολιτικό Μηχανικό πολύ πιο ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση φορτίσεως  $p(x, t)$  στις αξονικές (διαμήκεις) εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ράβδου και, ιδίως, στις εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις δοκού. Τα θέματα αυτά θα εξετασθούν στο επόμενο Κεφάλαιο Β6: στις Ενότητες Β6.1 (ταλαντώσεις ράβδου) και Β6.2 (ταλαντώσεις δοκού) αντίστοιχα.

Εδώ θα περιορισθούμε στο πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών (5.6.1), (5.6.2) και (5.6.3) για τη μη ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.6.1). Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, όπως ήδη κάναμε (επιτυχώς μάλιστα) και στην Ενότητα Β5.3 στην περίπτωση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος με  $p(x, t) \equiv 0$ . Πιο συγκεκριμένα στην Ενότητα Β5.3 υποθέσαμε στη σχέση (5.3.5) το χωρισμό των ανεξάρτητων μεταβλητών

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (5.6.4)$$

Βρήκαμε τελικά σαν λύση τη σειρά (5.3.26), την επαναλαμβάνουμε, αλλά τώρα με την εμφάνιση του χρονικού όρου (του αρνητικού εκθετικού όρου) πριν από το χωρικό όρο (τον ημιτονικό όρο):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp \left[ - \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 t \right] \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0. \quad (5.6.5)$$

Αναφέρουμε και πάλι ότι ως προς τη θέση  $x$  η σειρά αυτή θα μπορούσε να χαρακτηριστεί και σαν ημιτονική σειρά Fourier. Γενικά μιλώντας, μια ημιτονική σειρά Fourier, έστω για τη γνωστή συνάρτηση  $f(x)$  στην αρχική συνθήκη (5.6.3), έχει τη μορφή

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (5.6.6)$$

Οι συντελεστές  $F_n$  στην ημιτονική αυτή σειρά Fourier δίνονται από τους γνωστούς τύπους

$$F_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.7)$$

Ανάλογα υπάρχουν βέβαια και οι συνημιτονικές σειρές Fourier, οι πλήρεις τριγωνομετρικές σειρές Fourier, οι μιγαδικές ή εκθετικές σειρές Fourier, κλπ. Τις σειρές Fourier τις εξετάσαμε αρχικά στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II: στα Κεφάλαια Α16 (θεωρία και παραδείγματα) και Α17 (εφαρμογές) του Μέρους Α. Στο Κεφάλαιο αυτό Β5 τις εφαρμόσαμε ήδη στην επίλυση ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές. Στην τελευταία αυτή Ενότητα Β5.6 του παρόντος Κεφαλαίου Β5 θα δείξουμε τη χρησιμότητα και την εφαρμογή των σειρών Fourier και σε μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Συγκεκριμένα θα επιλύσουμε το πρόβλημα συνωριακών και αρχικών τιμών (5.6.1), (5.6.2) και (5.6.3), το οποίο ήδη θέσαμε.

### **Β5.6.2. Η μέθοδος του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις**

Στο παρόν πρόβλημα (5.6.1), (5.6.2) και (5.6.3) με τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.6.1) μη ομογενή θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τις ιδιοσυναρτήσεις

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.8)$$

Τις ιδιοσυναρτήσεις αυτές τις βρήκαμε αρχικά στις σχέσεις (5.3.17) της Παραγράφου Β5.3.3 της Ενότητας Β5.3 για την ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.3.1). Είναι πραγματικά σκόπιμο να χρησιμοποιήσουμε και εδώ τις χωρικές αυτές ιδιοσυναρτήσεις  $X_n(x)$ . Αυτό συμβαίνει, επειδή αυτές προέκυψαν από τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (5.6.4) και, το σημαντικότερο, πληρούν και τις δύο συνωριακές συνθήκες (5.6.2). Η αλλαγή που θα κάνουμε εδώ είναι απλά η τροποποίηση της σειράς στη λύση (5.6.5) στη νέα, γενικευμένη της μορφή

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0. \quad (5.6.9)$$

Στη μορφή αυτή οι συντελεστές  $C_n$  και οι αρνητικοί εκθετικοί όροι στη λύση (5.6.5) αντικαταστάθηκαν από τις γενικότερες χρονικές συναρτήσεις  $q_n(t)$ . Οι συναρτήσεις αυτές είναι προς το παρόν άγνωστες, αν και γνωρίζουμε από τη λύση (5.6.5) ότι για την ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (με  $p(x, t) \equiv 0$ ) έχουν τη μορφή

$$q_n(t) = C_n \exp \left[ - \left( \frac{an\pi}{L} \right)^2 t \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.10)$$

Δίνουμε λοιπόν μεγάλη ελευθερία στην υπό μορφή σειράς λύση (5.6.9) που υποθέτουμε εδώ για τη μη ομογενή περίπτωση:  $p(x, t) \neq 0$  στη μη ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.6.1). Συγκεκριμένα έχουμε διαθέσιμες προς προσδιορισμό άπειρες χρονικές συναρτήσεις  $q_n(t)$ .



Ελπίζουμε ότι αυτές οι άπειρες και ακόμη απροσδιόριστες χρονικές συναρτήσεις  $q_n(t)$  θα μας επιτρέψουν με τον κατάλληλο προσδιορισμό τους να «αντιμετωπίσουμε» το μη ομογενή όρο  $p(x, t)$  στην αρχική μας διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (5.6.1). Ευτυχώς θα αποδειχθεί πιο κάτω αληθινή η ελπίδα μας αυτή.

Ας παρατηρήσουμε βέβαια ότι δίνοντας βαρύτητα στη χωρική (ως προς τη θέση) ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ , η λύση (5.6.9) είναι μια ημιτονική σειρά Fourier της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$  με συντελεστές  $q_n(t)$ . Ο χρόνος  $t$  είναι απλά μια παράμετρος στην ημιτονική αυτή σειρά Fourier. Αν ξέραμε τους συντελεστές αυτούς  $q_n(t)$ , που δεν είναι βέβαια σταθερές, αλλά συναρτήσεις του χρόνου  $t$ , θα είχαμε διαθέσιμη την πλήρη λύση (5.6.9) του προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών (5.6.1), (5.6.2) και (5.6.3). Δεν τους ξέρουμε όμως! Έχουμε εντούτοις την πρόθεση και τη δυνατότητα να τους προσδιορίσουμε.

Από μια διαφορετική οπτική γωνία οι άγνωστες συναρτήσεις  $q_n(t)$  στην πιθανή λύση (5.6.9), την οποία υποθέσαμε για την άγνωστη συνάρτηση  $u(x, t)$ , μας θυμίζουν λίγο τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Τούτο γίνεται αρκετά σαφέστερο, αν θεωρήσουμε τους αρχικά σταθερούς συντελεστές  $C_n$  στη λύση (5.6.5) του ομογενούς προβλήματος (με  $p(x, t) \equiv 0$ ) σαν συναρτήσεις του χρόνου  $t$ , δηλαδή  $C_n = C_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Σκοπό μας αποτελεί η επίλυση του αντίστοιχου μη ομογενούς προβλήματος (με  $p(x, t) \neq 0$ ). Οι πιο πάνω συναρτήσεις  $C_n(t)$  στη θέση των σταθερών  $C_n$  πραγματικά μας θυμίζουν τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Στη συνέχεια ορίζουμε τα γινόμενα

$$q_n(t) = C_n(t) \exp \left[ - \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 t \right], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.6.11)$$

σαν τις συνολικές άγνωστες χρονικές συναρτήσεις μας στη σειρά (5.6.9). Τη σειρά αυτή την έχουμε ήδη υποθέσει σαν την πιθανή λύση του προβλήματός μας (5.6.1), (5.6.2) και (5.6.3).

Έχοντας υποθέσει τη λύση  $u(x, t)$  στη μορφή της ημιτονικής σειράς Fourier (5.6.9), θα αντικαταστήσουμε τη λύση αυτή στη μη ομογενή εξίσωση της διαχύσεως (5.6.1). Προσδοκούμε έτσι να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε τις χρονικές συναρτήσεις  $q_n(t)$ , δηλαδή τους προς το παρόν άγνωστους συντελεστές της σειράς Fourier (5.6.9). Προς το σκοπό αυτό πρέπει να υπολογίσουμε και εκείνες τις παραγώγους της πιθανής λύσεως  $u(x, t)$  που εμφανίζονται στην εξίσωση (5.6.1), δηλαδή: (α) τη δεύτερη μερική παράγωγο ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  (δεύτερη χωρική παράγωγο) και (β) την πρώτη μερική παράγωγο ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  (πρώτη χρονική παράγωγο). Υποθέτουμε, όπως συνήθως συμβαίνει, ότι οι μερικές παράγωγοι της σειράς (5.6.9) είναι ίσες με τις σειρές των αντίστοιχων μερικών παραγώγων: όρο προς όρο παραγώγιση στη σειρά. Έτσι, επειδή  $d^2 \sin ax/dx^2 = -a^2 \sin ax$ , με  $a = n\pi/L$  από τη σειρά (5.6.9) βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (5.6.12)$$

Επίσης για την πρώτη χρονική μερική παράγωγο της ίδιας συναρτήσεως  $u(x, t)$  έχουμε

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (5.6.13)$$

με  $\dot{q}_n(t)$  την πρώτη παράγωγο (εννοείται συνήθη παράγωγο) της χρονικής συναρτήσεως  $q_n(t)$ .

Στη διαφορική εξίσωση (5.6.1), τη μη ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, την οποία επιδιώκουμε να λύσουμε, υπάρχει επίσης και ο όρος  $p(x, t)$  στο δεξιό μέλος. Αυτός είναι βέβαια ο όρος που την καθιστά μη ομογενή και δημιουργήσε την ανάγκη να γραφεί η παρούσα ενότητα. Ακριβώς όπως θεωρήσαμε ότι η άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x, t)$  διαθέτει ημιτονική σειρά Fourier της μορφής (5.6.9), ανάλογα θεωρούμε ότι και η γνωστή συνάρτηση  $p(x, t)$  διαθέτει και αυτή αντίστοιχη

ημιτονική σειρά Fourier και πάλι βέβαια ως προς τη θέση  $x$ . Δηλαδή έχουμε

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0. \quad (5.6.14)$$

Τώρα βέβαια η συνάρτηση  $p(x, t)$  είναι γνωστή και όχι άγνωστη αντίθετα με τη συνάρτηση  $u(x, t)$ , που είναι ακόμη άγνωστη. Επομένως οι συντελεστές  $P_n(t)$  στην πιο πάνω ημιτονική σειρά Fourier (5.6.14) είναι και αυτοί γνωστοί. Συγκεκριμένα μπορούν να προσδιορισθούν από τους τύπους (5.6.7). Στη συγκεκριμένη όμως περίπτωση της συναρτήσεως  $p(x, t)$  στη σειρά (5.6.14) (αντί για τη συνάρτηση  $f(x)$  στη σειρά (5.6.6)) οι τύποι (5.6.7) παίρνουν την αντίστοιχη μορφή

$$P_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L p(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.15)$$

Αντικαθιστούμε λοιπόν τόσο την άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x, t)$  όσο και τη γνωστή συνάρτηση  $p(x, t)$  στη μη ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.6.1). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις ημιτονικές σειρές Fourier (5.6.12), (5.6.13) και (5.6.14) ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ , τις οποίες μόλις βρήκαμε. Έτσι προκύπτει ότι

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} - \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (5.6.16)$$

Μπορεί να γραφεί και απλούστερα η σειρά αυτή (5.6.16), στην οποία μετατρέψαμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (5.6.1). Αυτό το πετυχαίνουμε συγκεντρώνοντας όλους τους όρους της σε μία μόνο σειρά (αντί για τρεις πιο πάνω) και βγάζοντας κοινό παράγοντα το χωρικό όρο  $\sin(n\pi x/L)$ . Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε την απλοποιημένη εξίσωση

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{a^2} \dot{q}_n(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 q_n(t) - P_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{L} = 0 \quad (5.6.17)$$

πάλι βέβαια σε μορφή ημιτονικής σειράς Fourier ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ . Επειδή μάλιστα το δεξιό μέλος της εξισώσεως (5.6.17) είναι το μηδέν, η σειρά στο αριστερό μέλος είναι απλά η ημιτονική σειρά Fourier (ως προς  $x$  επαναλαμβάνεται) της μηδενικής συναρτήσεως. Άρα όλοι οι συντελεστές μέσα στις αγκύλες στο αριστερό μέλος, που δεν είναι βέβαια συναρτήσεις της θέσεως  $x$  (είναι μόνο του χρόνου  $t$ ), πρέπει να μηδενίζονται με βάση τους τύπους (5.6.7), εδώ με τη μηδενική συνάρτηση αντί για την  $f(x)$  στα ολοκληρώματα. Επομένως θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{1}{a^2} \dot{q}_n(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 q_n(t) - P_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.18)$$

Είναι εξάλλου προφανές ότι αφού η ημιτονική σειρά Fourier (5.6.17) είναι εκ ταυτότητας μηδενική, πρέπει να μηδενίζονται όλοι οι συντελεστές της. Πρέπει δηλαδή να ισχύουν οι σχέσεις (5.6.18).

Για το σκοπό που επιδιώκουμε εδώ, δηλαδή για τον προσδιορισμό των άγνωστων χρονικών συναρτήσεων  $q_n(t)$ , οι σχέσεις (5.6.18) δεν είναι απλές σχέσεις. Είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως προς τις άπειρες άγνωστες συναρτήσεις  $q_n(t)$ . Επειδή μάλιστα η συνάρτηση  $p(x, t)$  στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (5.6.1) είναι γνωστή, το ίδιο ισχύει και για τους συντελεστές  $P_n(t)$  στην ημιτονική σειρά Fourier (5.6.15), όπως ήδη αναφέραμε. Είναι επομένως σκόπιμο να μεταφέρουμε αυτούς τους γνωστούς συντελεστές  $P_n(t)$  από τα αριστερά μέλη των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (5.6.18) στα δεξιά τώρα μάλιστα με πρόσημα συν. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε τις άπειρες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{1}{a^2} \dot{q}_n(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 q_n(t) = P_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.19)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και μια κάπως εναλλακτική δυνατότητα για το σχηματισμό των ίδιων συνήθων διαφορικών εξισώσεων (5.6.19). Και αυτή η δυνατότητα βασίζεται στη

λύση (5.6.9) υπό τη μορφή ημιτονικής σειράς Fourier που υποθέσαμε για την άγνωστη συνάρτηση  $u(x, t)$  και στις σχετικές μερικές παραγώγους της (5.6.12) και (5.6.13) προς χρήση στη μη ομογενή μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως (5.6.1). Αντικαθιστώντας και τώρα τις μερικές παραγώγους (5.6.12) και (5.6.13) στην εξίσωση (5.6.1), παίρνουμε την εξίσωση

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} - p(x, t) \quad (5.6.20)$$

χωρίς να έχουμε χρησιμοποιήσει την ημιτονική σειρά Fourier (5.6.14) της γνωστής χρονικής συναρτήσεως  $p(x, t)$ . Ξαναγράφουμε την εξίσωση (5.6.20) συμπύσσοντας τώρα τις δύο ημιτονικές σειρές Fourier σε μία και αναδιατάσσοντας τους όρους της στα δύο μέλη της. Εύκολα προκύπτει ότι

$$p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{a^2} \dot{q}_n(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 q_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (5.6.21)$$

Είναι τώρα προφανές ότι καταλήξαμε στην ημιτονική σειρά Fourier (ως προς τη μεταβλητή  $x$ ) της γνωστής συναρτήσεως  $p(x, t)$ . Επομένως οι όροι μέσα στις αγκύλες στη σειρά αυτή (5.6.21) είναι προφανώς οι σχετικοί συντελεστές Fourier. Άρα

$$\frac{1}{a^2} \dot{q}_n(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 q_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L p(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.22)$$

Αν μάλιστα δηλώσουμε τα ολοκληρώματα στα δεξιά μέλη με  $P_n(t)$ , όπως ήδη το κάναμε στις σχέσεις (5.6.15), καταλήγουμε και πάλι ακριβώς στις ίδιες άπειρες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (5.6.19). Αυτός είναι ένας δεύτερος και προτιμότερος τρόπος για την εύρεση των εξισώσεων αυτών (5.6.19).

### B5.6.3. Επίλυση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

Στην παράγραφο αυτή θα επιλύσουμε τις εξισώσεις (5.6.19). Πρόκειται για μη ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως και με σταθερούς συντελεστές. Είναι επομένως εύκολη η επίλυσή τους, π.χ. με το σχετικό γενικό τύπο, με ολοκληρωτικό παράγοντα, με μετασχηματισμό Laplace, κλπ. Εδώ θα προτιμήσουμε τη γνωστή μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης και της σχετικής χαρακτηριστικής εξισώσεως για τις αντίστοιχες ομογενείς εξισώσεις

$$\frac{1}{a^2} \dot{q}_n(t) + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 q_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.23)$$

Επίσης για τις μη ομογενείς εξισώσεις θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω την πολύ γενική μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου ή των παραμέτρων: για γραμμικές μη ομογενείς συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ανωτέρας της πρώτης τάξεως.

Ας ξεκινήσουμε από τις ομογενείς διαφορικές εξισώσεις (5.6.23), οι οποίες αντιστοιχούν στις μη ομογενείς εξισώσεις (5.6.19) που θέλουμε να λύσουμε. Υποθέτουμε τις εκθετικές αντικαταστάσεις

$$q_n(t) = e^{\mu_n t} \implies \dot{q}_n(t) = \mu_n e^{\mu_n t}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.6.24)$$

και αντικαθιστούμε τις εκθετικές αυτές εκφράσεις στις ομογενείς διαφορικές εξισώσεις (5.6.23). Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{a^2} \mu_n e^{\mu_n t} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 e^{\mu_n t} = 0 \implies \left[ \mu_n + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 \right] e^{\mu_n t} = 0. \quad (5.6.25)$$

Απλοποιώντας μάλιστα τους εκθετικούς όρους  $e^{\mu_n t}$  (που δε μηδενίζονται ποτέ), παίρνουμε τις αντίστοιχες χαρακτηριστικές εξισώσεις και τις λύσεις τους  $\mu_n$ . Συγκεκριμένα

$$\mu_n + \left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 = 0 \implies \mu_n = -\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 = -(p_n a)^2 = -p_n^2 a^2, \quad (5.6.26)$$

αν θυμηθούμε και τους τύπους (5.3.15) στην Παράγραφο Β5.3.3 για τις χαρακτηριστικές τιμές  $p_n = n\pi/L$  στο αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα.

Επομένως οι γενικές λύσεις  $q_{nh}(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) των ομογενών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (5.6.23) θα έχουν τις μορφές

$$q_{nh}(t) = A_n e^{\mu_n t} \equiv A_n \exp \mu_n t = A_n \exp \left[ - \left( \frac{n\pi a}{L} \right)^2 t \right] = A_n \exp (-p_n^2 a^2 t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.6.27)$$

επαναλαμβάνουμε με  $p_n = n\pi/L$ . Πρόκειται βέβαια για γενικές λύσεις και οι συντελεστές  $A_n$  σ' αυτές είναι προς το παρόν αυθαίρετες σταθερές. Θα τους προσδιορίσουμε σε λίγο.

Το πρώτο μας μέλημα τώρα είναι να προσδιορίσουμε και μερικές (ή ειδικές) λύσεις  $q_{np}(t)$  των μη ομογενών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (5.6.19): μία μερική λύση  $q_{np}(t)$  για καθεμία από τις άπειρες αυτές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (με  $n = 1, 2, \dots$ ). Υπάρχουν διάφορες σχετικές μέθοδοι, όπως: η μέθοδος των ολοκληρωτικών παραγόντων, η μέθοδος της μεταβολής της παραμέτρου και η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace. Είναι ακόμη διαθέσιμος και ο τελικός τύπος. Εδώ θα προτιμήσουμε, όπως ήδη αναφέραμε, τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου.

Υποθέτουμε επομένως τις αυθαίρετες σταθερές  $A_n$  στις λύσεις (5.6.27) των αντίστοιχων ομογενών εξισώσεων (5.6.23) ότι μεταβάλλονται, είναι συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ : του χρόνου  $t$ . Έτσι σύμφωνα με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου (ή των παραμέτρων γενικότερα) έχουμε για τις ζητούμενες μερικές (ή ειδικές) λύσεις  $q_{np}(t)$

$$q_{np}(t) = A_n(t) \exp (-p_n^2 a^2 t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.28)$$

Πρέπει τώρα να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις  $A_n(t)$ . Αυτό θα το πετύχουμε χρησιμοποιώντας τις ίδιες τις μη ομογενείς συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (5.6.19). Καταρχήν παραγωγίζουμε αυτές τις μερικές λύσεις (5.6.28)

$$\dot{q}_{np}(t) = \dot{A}_n(t) \exp (-p_n^2 a^2 t) - p_n^2 a^2 A_n(t) \exp (-p_n^2 a^2 t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.29)$$

(Επαναλαμβάνεται ότι η τελεία ή οι δύο τελείες πάνω από το σύμβολο μιας συναρτήσεως μας δηλώνουν την πρώτη και τη δεύτερη χρονική παράγωγο αντίστοιχα της συναρτήσεως αυτής.)

Τώρα απλά αντικαθιστούμε τις σχέσεις (5.6.28) και (5.6.29) στις μη ομογενείς συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (5.6.19). Έτσι προκύπτει εύκολα, αφού μάλιστα  $(1/a^2)a^2 = 1$ , ότι

$$\left[ \frac{1}{a^2} \dot{A}_n(t) - p_n^2 A_n(t) + p_n^2 A_n(t) \right] \exp (-p_n^2 a^2 t) = P_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.6.30)$$

με τους εκθετικούς παράγοντες  $\exp (-p_n^2 a^2 t)$  κοινούς παράγοντες στα αριστερά μέλη. Μετά μάλιστα την προφανή απλοποίηση των αντίθετων όρων  $\mp p_n^2 A_n(t)$  στις αγκύλες στα αριστερά μέλη και τη μεταφορά της σταθεράς  $a^2$  και των εκθετικών όρων στα δεξιά μέλη, παίρνουμε τελικά

$$\dot{A}_n(t) = a^2 P_n(t) \exp (p_n^2 a^2 t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.31)$$

Κατά συνέπεια με ολοκληρώσεις (εδώ στο χρονικό διάστημα από 0 έως  $t$ ) προκύπτουν αμέσως οι χρονικές συναρτήσεις (οι χρονικές παράμετροι)  $A_n(t)$

$$A_n(t) = a^2 \int_0^t P_n(\tau) \exp (p_n^2 a^2 \tau) d\tau + E_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.32)$$

Οι σταθερές της ολοκληρώσεως  $E_n$  είναι φυσικά αυθαίρετες σταθερές. Έτσι παίρνουμε από τις σχέσεις (5.6.28) τις γενικές λύσεις

$$q_{ng}(t) = \left[ E_n + a^2 \int_0^t P_n(\tau) \exp (p_n^2 a^2 \tau) d\tau \right] \exp (-p_n^2 a^2 t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.33)$$

Έχοντας επιλέξει να διατηρήσουμε τις σταθερές  $E_n$  των ολοκληρώσεων των σχέσεων (5.6.31) (αντί να τις μηδενίσουμε), καταλήξαμε στις γενικές λύσεις (5.6.33) των μη ομογενών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (5.6.19). Αντίθετα, αν είχαμε επιλέξει να παραλείψουμε τις σταθερές αυτές  $E_n$  στις λύσεις (5.6.32), τότε οι πιο πάνω λύσεις  $q_{ng}(t)$  (με  $E_n = 0$ ) θα ήταν πραγματικά μερικές (ή ειδικές) λύσεις  $q_{np}(t)$ . Όμως στην περίπτωση αυτή θα έπρεπε να προστεθούν σ' αυτές οι γενικές λύσεις  $q_{nh}(t)$  των αντίστοιχων ομογενών εξισώσεων (5.6.23) από τις σχέσεις (5.6.27), ώστε να προκύψουν οι γενικές λύσεις  $q_{ng}(t)$  των σχέσεων (5.6.33). Είναι όμως ακριβώς το ίδιο απλά να μην απαλείψουμε τις σταθερές ολοκληρώσεως  $E_n$  στις λύσεις, στα ολοκληρώματα (5.6.32). Παίρνουμε έτσι κατευθείαν τις γενικές λύσεις  $q_{ng}(t)$  αντί για τις αντίστοιχες μερικές (ή ειδικές) λύσεις  $q_{np}(t)$ .

**Β5.6.4. Η λύση του προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών**

Για να καταλήξουμε στην πλήρη λύση του προβλήματός μας συνοριακών και αρχικών τιμών (5.6.1), (5.6.2) και (5.6.3), θα πρέπει βέβαια να έχουμε προσδιορίσει και τις αυθαίρετες σταθερές  $E_n$  στις πιο πάνω χρονικές συναρτήσεις  $q_{ng}(t)$ . Αυτές είναι οι γενικές λύσεις των μη ομογενών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (5.6.19) (για  $n = 1, 2, \dots$ ). Εμείς δε θέλουμε τις γενικές αυτές λύσεις  $q_{ng}(t)$ . Θέλουμε τις λύσεις  $q_n(t)$  που πληρούν και την αρχική συνθήκη (5.6.3), δηλαδή τη συνθήκη

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \tag{5.6.34}$$

Την αρχική αυτή συνθήκη δεν τη λάβαμε ακόμη καθόλου υπόψη. Αυτό όμως θα το κάνουμε τώρα. Πιο συγκεκριμένα θέτουμε  $t = 0$  στη λύση (5.6.9) (υπό τη μορφή ημιτονικής σειράς Fourier) που ήδη υποθέσαμε και παίρνουμε

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(0) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \tag{5.6.35}$$

έχοντας χρησιμοποιήσει ταυτόχρονα και την παραπάνω αρχική συνθήκη (5.6.34).

Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουμε ότι οι αρχικές τιμές  $q_n(0)$  των χρονικών συντελεστών  $q_n(t)$  στη λύση, στην ημιτονική σειρά Fourier (5.6.9), δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι συντελεστές Fourier  $F_n$  της ημιτονικής σειράς Fourier της γνωστής συναρτήσεως  $f(x)$  των αρχικών θερμοκρασιών  $u(x, 0)$  στον τοίχο τον οποίο εξετάζουμε. Κατά συνέπεια, με βάση και τους τύπους (5.6.7) γι' αυτούς τους συντελεστές Fourier  $F_n$ , έχουμε τελικά

$$q_n(0) = F_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \tag{5.6.36}$$

Άρα για τις χρονικές συναρτήσεις  $q_n(t)$ , τους συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier (5.6.9), υπό την οποία έχουμε παραστήσει τη λύση του παρόντος προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών (5.6.1), (5.6.2) και (5.6.3) διαθέτουμε πια και τις αρχικές τιμές τους  $q_n(0) = F_n$ . Μας είναι πραγματικά πολύτιμες οι τιμές αυτές  $q_n(0) = F_n$ . Μόνο έτσι θα μπορούσαμε να καθορίσουμε πλήρως τις χρονικές συναρτήσεις  $q_n(t)$ . Πραγματικά, θέτοντας  $t = 0$  στις γενικές λύσεις (5.6.33) για τις συναρτήσεις αυτές, προκύπτει άμεσα ότι

$$q_n(0) = E_n = F_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots, \tag{5.6.37}$$

με τη χρήση και των σχέσεων (5.6.36).

Επομένως επιλέγουμε τις αυθαίρετες σταθερές  $E_n$  σαν  $E_n = F_n$  στις γενικές λύσεις (5.6.33) για τις συναρτήσεις  $q_n(t)$ . Τότε οι λύσεις αυτές μεταπίπτουν στις ζητούμενες μερικές (ή ειδικές) λύσεις  $q_n(t)$ , οι οποίες σέβονται και την αρχική συνθήκη (5.6.34). Πιο συγκεκριμένα ισχύει ότι

$$q_n(t) = \left[ F_n + a^2 \int_0^t P_n(\tau) \exp(p_n^2 a^2 \tau) d\tau \right] \exp(-p_n^2 a^2 t), \quad n = 1, 2, \dots \tag{5.6.38}$$

Επαναλαμβάνουμε ότι οι λύσεις (5.6.33) ήσαν οι γενικές λύσεις των μη ομογενών συνήθων διαφορικών εξισώσεων (5.6.19) για τις συναρτήσεις  $q_n(t)$  με αυθαίρετες σταθερές  $s'$  αυτές τις  $E_n$ . Αντίθετα οι λύσεις (5.6.38) είναι οι μερικές λύσεις  $q_n(t)$  των ίδιων εξισώσεων (5.6.19) που επιζητούσαμε να βρούμε. Σ' αυτές τις μερικές λύσεις  $q_n(t)$  οι σταθερές  $F_n$  δηλώνουν απλά τους γνωστούς από τους ολοκληρωτικούς τύπους (5.6.7) ή (5.6.36) ημιτονικούς συντελεστές Fourier της επίσης γνωστής συναρτήσεως αρχικών τιμών  $f(x)$  στην αρχική συνθήκη (5.6.3) ή (5.6.34).

Επομένως η τελική λύση  $u(x, t)$  του προβλήματός μας (5.6.1), (5.6.2) και (5.6.3) (ή (5.6.34)) έχει τη μορφή της ημιτονικής σειράς Fourier (5.6.9) (ως προς τη χωρική μεταβλητή: τη θέση  $x$ ), δηλαδή

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0. \quad (5.6.39)$$

Οι συντελεστές  $q_n(t)$  στη λύση αυτή δίνονται από τις πιο πάνω μερικές λύσεις (5.6.38) και είναι πια απόλυτα γνωστοί. Έτσι το πρόβλημά μας είναι οριστικά λυμένο με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών μαζί με την κατάλληλη χρήση ημιτονικών σειρών Fourier ως προς τη θέση  $x$ .

### B5.6.5. Τελικές παρατηρήσεις

Καταρχήν παρατηρούμε ότι στην ειδική περίπτωση όπου  $p(x, t) \equiv 0$ , δηλαδή στην ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, οι χρονικοί συντελεστές  $q_n(t)$  στις σχέσεις (5.6.38) μεταπίπτουν στους αντίστοιχους συντελεστές (5.6.10) (εκεί με το σύμβολο  $C_n$  στη θέση του συμβόλου  $F_n$ ).

Μπορούμε να σημειώσουμε επίσης ότι οι ιδιοσυναρτήσεις  $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$  μας εξασφαλίζουν την πλήρωση των συνοριακών συνθηκών (5.6.2). Επίσης οι σχέσεις (5.6.36) ή/και (5.6.37) μας εξασφαλίζουν την πλήρωση και της αρχικής συνθήκης (5.6.3) ή (5.6.34). Τέλος ο τρόπος σχηματισμού των άπειρων συνήθων διαφορικών εξισώσεων (5.6.19) ως προς τις χρονικές συναρτήσεις, τους χρονικούς συντελεστές  $q_n(t)$  στην Παράγραφο Β5.6.2 μας εξασφαλίζει την πλήρωση της ίδιας της μη ομογενούς μονοδιάστατης εξίσωσης της διαχύσεως (5.6.1). Αυτό το κατορθώσαμε μέσω του αναπτύγματος της εξίσωσης (5.6.1) στην ημιτονική σειρά Fourier (5.6.17). Μπορεί φυσικά να γίνει σχετικά εύκολα και η επαλήθευση όλων αυτών των ισχυρισμών.

Η παρούσα διαδικασία αναφέρεται συνήθως σαν **μέθοδος του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις**. Το κάπως αρνητικό σημείο στη διαδικασία αυτή είναι το γεγονός ότι το όλο πρόβλημα το αναγάγαμε στις άπειρες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (5.6.19) ως προς τους χρονικούς συντελεστές Fourier  $q_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), που θέλαμε να προσδιορίσουμε. Κάτι τέτοιο δεν είχε χρειασθεί στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών για ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, όπως ήταν η εξίσωση της διαχύσεως (5.3.1). Απαιτείται μόνο για μη ομογενείς εξισώσεις, όπως είναι η αντίστοιχη μη ομογενής εξίσωση της διαχύσεως (5.6.1).

Στο επόμενο Κεφάλαιο Β6, όπως ήδη αναφέραμε, θα έχουμε την ευκαιρία να χρησιμοποιήσουμε την παρούσα μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις σε προβλήματα: (α) εξαναγκασμένων αξονικών ταλαντώσεων συνήθων ράβδων και επίσης (β) εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθων δοκών. Στις περιπτώσεις ράβδων και δοκών οι σχετικές ιδιοσυναρτήσεις (ή χαρακτηριστικές συναρτήσεις)  $X_n(x)$  καλούνται **ιδιομορφές** (ή **ιδιομορφές ταλαντώσεων**) από τον Πολιτικό Μηχανικό και είναι ιδιαίτερα σημαντικές σε δυναμικά προβλήματα στις κατασκευές.

Σημειώνουμε τέλος ότι η παρούσα μέθοδος του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις  $X_n(x)$  είναι ασφαλώς εφαρμόσιμη και υπό διαφορετικές συνοριακές συνθήκες στις δύο πλευρές  $x = 0$  και  $x = L$  του τοίχου. Διαφορετικές συνοριακές συνθήκες αφορούν π.χ. στην περίπτωση θερμικά μονωμένων πλευρών  $x = 0$  και  $x = L$ . Βέβαια στην τελευταία αυτή περίπτωση οι παραπάνω ημιτονικές σειρές Fourier θα αντικατασταθούν από αντίστοιχες συνημιτονικές σειρές. Σε πιο δύσκολες περιπτώσεις προκύπτουν ασφαλώς ειδικές ιδιοσυναρτήσεις  $X_n(x)$ , που δεν είναι απλά τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Τέτοιες ιδιοσυναρτήσεις  $X_n(x)$  θα συναντήσουμε σε προβλήματα εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθων δοκών στο αμέσως επόμενο Κεφάλαιο Β6: στην Ενότητα Β6.2.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β6

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΡΑΒΔΩΝ ΚΑΙ ΔΟΚΩΝ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό επιδεικνύεται η χρήση της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών στην επίλυση προβλημάτων αξονικών (ή διαμήκων) ταλαντώσεων σε συνήθεις ράβδους καθώς και προβλημάτων καμπτικών ταλαντώσεων σε συνήθεις δοκούς. (Ανάλογες με τις αξονικές ταλαντώσεις σε ράβδους είναι και οι στρεπτικές ταλαντώσεις.) Και οι ράβδοι και οι δοκοί αποτελούν γραμμικούς φορείς στην ορολογία του Πολιτικού Μηχανικού. Χρησιμοποιούμε εδώ τον όρο ράβδος στην περίπτωση των αξονικών ταλαντώσεων (αξονική καταπόνηση) ή/και των στρεπτικών ταλαντώσεων (στρεπτική καταπόνηση). Τη χρήση του όρου δοκός την περιορίζουμε στην περίπτωση καμπτικών ταλαντώσεων (καμπτική καταπόνηση) και σχετικών σύνθετων δυναμικών καταπονήσεων.

Η μέθοδος που εφαρμόζεται τόσο στις αξονικές όσο και στις καμπτικές ταλαντώσεις είναι η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Η μέθοδος αυτή ήδη εξηγήθηκε λεπτομερώς στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β5. Στο ίδιο κεφάλαιο έγινε μάλιστα και επίδειξη της στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος, που είναι δευτέρας τάξεως και δίδει τις εγκάρσιες ταλαντώσεις χορδών και καλωδίων. Η ίδια εξίσωση ισχύει και στις αξονικές ταλαντώσεις ράβδων, που εξετάζονται στο κεφάλαιο αυτό. Αντίθετα για τις καμπτικές ταλαντώσεις δοκών η διαφορική εξίσωση είναι τετάρτης τάξεως.

Το παρόν κεφάλαιο δεν αποτελείται απλά μόνο από εφαρμογές της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών και της υπερθέσεως (επαλληλίας) των σχετικών μερικών λύσεων. Δίνεται επίσης έμφαση στις συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου ή της δοκού, στις σχετικές ιδιοσυχνότητες, στις ιδιομορφές (τις ιδιοσυναρτήσεις) ταλαντώσεως και στην ορθογωνιότητά τους. Εξετάζονται επίσης χωριστά: (α) οι ιδιοταλαντώσεις, δηλαδή οι φυσικοί τρόποι ταλαντώσεως, (β) οι ελεύθερες ταλαντώσεις (με την υπέρθεση ιδιοταλαντώσεων και υπό αρχικές συνθήκες) και (γ) οι εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με την υπέρθεση ιδιομορφών. Σημειώνεται ότι στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις οι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που ισχύουν καθίστανται μη ομογενείς. Επομένως η επίλυσή τους (με την υπέρθεση ιδιομορφών) είναι κάτι που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

Οι παρούσες εφαρμογές αποτελούν παραδείγματα της χρήσεως της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών και της υπερθέσεως των μερικών λύσεων (μεθόδου του Fourier) στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, ομογενείς και μη ομογενείς με οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες και με ποικίλες συνοριακές συνθήκες. Επιπλέον όμως από της απόψεως του Πολιτικού Μηχανικού οι παρούσες εφαρμογές σε ταλαντώσεις γραμμικών φορέων (εδώ απλών ευθύγραμμων συνήθων ράβδων και δοκών) βοηθούν στην εισαγωγή στις σχετικές έννοιες. Τέτοιες είναι οι έννοιες: (α) των αξονικών και των καμπτικών ταλαντώσεων, (β) των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιομορφών ταλαντώσεων, (γ) των ιδιοταλαντώσεων, των ελεύθερων και των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων, (δ) των κανονικών ή κύριων συντεταγμένων, κλπ. Η εισαγωγή στις έννοιες αυτές ίσως φανεί χρήσιμη στην εκτενή χρήση τους αργότερα στη Δυναμική των Κατασκευών και στη σωστή δυναμική (που περιλαμβάνει και την αντισεισμική) μελέτη σύνθετων κατασκευών, όπως, π.χ., πολυώροφων κτιρίων.

## B6.1. ΑΞΟΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΡΑΒΔΟΥ

### B6.1.1. Η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

Θεωρούμε συνήθη ράβδο, δηλαδή ευθύγραμμη ράβδο μήκους  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ) από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό πυκνότητας  $\rho$  και μέτρου ελαστικότητας (ή μέτρου του Young)  $E$  και με σταθερή διατομή εμβαδού  $A$ . Η συνήθης αυτή ράβδος καταπονείται σε αξονικές ταλαντώσεις. (Ισοδύναμος και εξίσου αποδεκτός είναι ο όρος διαμήκεις ταλαντώσεις.) Συμβολίζουμε με  $f(x, t)$  την κατανεμημένη αξονική εξωτερική φόρτιση που εφαρμόζεται ανά μονάδα μήκους της ράβδου. Το όλο πρόβλημα διέπεται από την εξής μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6.1.1)$$

Την εξίσωση αυτή είχαμε την ευκαιρία να την καταστρώσουμε με τρεις διαφορετικούς τρόπους στην Ενότητα B3.2 (εξίσωση (3.2.15) της Παραγράφου B3.2.3). Φυσικά η άγνωστη συνάρτηση είναι η αξονική μετατόπιση  $u(x, t)$  των σημείων της ράβδου κατά μήκος της και όχι η εγκάρσια μετατόπιση, όπως είχαμε στο πρόβλημα της χορδής στην εξίσωση (5.2.1). Το γινόμενο  $EA$  στην πιο πάνω εξίσωση (6.1.1) το έχουμε αποκαλέσει **δυστένεια**. Ο όρος αυτός είναι ανάλογος των αντίστοιχων όρων **δυσκαμψία** σε κάμψη και **δυστρεψία** σε στρέψη παραμορφώσιμων γραμμικών φορέων, όπως είναι και η παρούσα ράβδος. Σημειώνουμε ότι οι αντίστοιχοι όροι **ατένεια**, **ακαμψία** και **αστρεψία** (με πρόθεμα «α» για άρνηση αντί «δυσ» για δυσκολία) προφανώς αφορούν σε μη παραμορφώσιμους (απόλυτα στερεούς) γραμμικούς φορείς.

Κατανεμημένη αξονική φόρτιση  $f(x, t)$  της ράβδου κατά μήκος της παρουσιάζεται μόνο σε ορισμένα προβλήματα ράβδων. Τέτοια είναι π.χ. τα προβλήματα πασσάλων μπηγμένων στο έδαφος για θεμελιώσεις κατασκευών με πασσάλους υπό δυναμική (π.χ. κρουστική ή σεισμική) φόρτιση. Εάν δεν υπάρχει τέτοια φόρτιση,  $f(x, t) \equiv 0$ , η παραπάνω μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.1) απλοποιείται στη μορφή (3.2.16), δηλαδή στη μορφή

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{με} \quad u = u(x, t), \quad (6.1.2)$$

και καθίσταται ομογενής. Με την εισαγωγή μάλιστα και της ταχύτητας των αξονικών ελαστικών κυμάτων (3.2.17), δηλαδή με

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (6.1.3)$$

προκύπτει άμεσα η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (3.2.18) στην κλασική της μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (6.1.4)$$

Αυτή ακριβώς είναι η εξίσωση που διέπει και τις εγκάρσιες ταλαντώσεις της χορδής (η εξίσωση της χορδής) και με κάποια μικρή προσέγγιση και του καλωδίου, όπως συμβαίνει στα καλώδια των καλωδιωτών γεφυρών, π.χ. της γέφυρας Ρίου-Αντιρρίου. Την εξίσωση της χορδής είχαμε την ευκαιρία να τη μελετήσουμε πολύ συστηματικά με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών στην Ενότητα B5.2 του προηγούμενου Κεφαλαίου B5.

Στην παρούσα Ενότητα B6.1 θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, τώρα όμως για τις αξονικές (ή διαμήκεις) ταλαντώσεις ράβδου. Επίσης δε θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε συνοριακές συνθήκες μηδενισμού της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$  και στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της ράβδου, όπως ίσχυε στο πρόβλημα της χορδής στην Ενότητα B5.2. Προς το σκοπό αυτό θα αλλάξουμε λίγο τη διαδικασία επιλύσεως. Θα αναφερθούμε επίσης και στη μη ομογενή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.1) επεκτείνοντας όσα αναφέρθηκαν για μη ομογενείς εξισώσεις στην Ενότητα B5.6 του προηγούμενου Κεφαλαίου B5.



Αυτή είναι μια σημαντική και μάλλον ενδιαφέρουσα επέκταση της βασικής μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών. Συνήθως καλείται μέθοδος υπερθέσεως (ή επαλληλίας) ιδιοσυναρτήσεων, στις παρούσες εφαρμογές υπερθέσεως (ή επαλληλίας) ιδιομορφών. Επίσης η μέθοδος αυτή αποτελεί κατά κάποιον τρόπο γενίκευση και της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων από τις μη ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις στις μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

Σημειώνεται επίσης ότι η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (6.1.4) διαθέτει και κλειστή γενική λύση (χωρίς χρήση σειρών): τη λύση με τη μέθοδο του d'Alembert (4.1.19), την επαναλαμβάνουμε

$$u(x, t) = \varphi(x - ct) + \chi(x + ct). \quad (6.1.5)$$

Στη λύση αυτή γίνεται χρήση δύο αυθαίρετων συναρτήσεων  $\varphi$  και  $\chi$  της μιας μεταβλητής που διαθέτουν συνεχείς δεύτερες παραγώγους. (Εδώ η σταθερά  $c$  δίνεται από τον τύπο (6.1.3).) Όμως η γενική αυτή λύση (που ήδη βρήκαμε και μελετήσαμε στην Παράγραφο Β4.1.3) δεν είναι και η πιο πρόσφορη σε προβλήματα συνοριακών τιμών όπως στην παρούσα πεπερασμένη ράβδος μήκους  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ). Σε τέτοια προβλήματα πλεονεκτεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών σε συνδυασμό βέβαια με την υπέρθεση (ή επαλληλία) μερικών λύσεων. Αυτή είναι η μέθοδος του Fourier.

### **B6.1.2. Χωρισμός των μεταβλητών**

Στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση) (5.2.1) ή (6.1.4) στο πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων της χορδής στην Ενότητα Β5.2 του προηγούμενου Κεφαλαίου Β5 είχαμε χρησιμοποιήσει το χωρισμό των μεταβλητών  $x$  (χωρική μεταβλητή) και  $t$  (χρονική μεταβλητή). Ακριβώς το ίδιο θα κάνουμε και εδώ στο πρόβλημα των αξονικών (διαμήκων) ταλαντώσεων ράβδου με το χωρισμό των μεταβλητών (5.2.5), τον ξαναγράφουμε και εδώ

$$u(x, t) = X(x) T(t). \quad (6.1.6)$$

Αντικαθιστούμε αυτό το χωρισμό των μεταβλητών στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.4). Υποθέτουμε επιπλέον ότι δεν υπάρχει κατανεμημένη εξωτερική αξονική φόρτιση:  $f(x, t) = 0$ . Έτσι προκύπτει εύκολα (με διαίρεση με  $X(x) T(t)$  και πολλαπλασιασμό επί  $c^2$ ) η σχέση

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2. \quad (6.1.7)$$

Στη σχέση αυτή πήραμε μάλιστα την πρωτοβουλία να υποθέσουμε τη σταθερά  $\lambda$  του διαχωρισμού των μεταβλητών αρνητική και ίση με  $\lambda = -\omega^2$ . Θα παραλείψουμε τη σχετική διερεύνηση της Παραγράφου Β5.2.5 στο πρόβλημα της χορδής. Αρκούμεστε στην παρατήρηση ότι αναμένουμε να έχουμε αξονικές (ή διαμήκειες) ταλαντώσεις της παρούσας ράβδου και τούτο είναι εφικτό με τη σταθερά  $-\omega^2$  (δηλαδή με αρνητική σταθερά) στα δύο ίσα κλάσματα (το χωρικό και το χρονικό) της σχέσεως (6.1.7). Πραγματικά από τη δεύτερη ισότητα της ίδιας σχέσεως προκύπτει άμεσα η πολύ γνωστή ομογενής και γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως της αρμονικής ταλαντώσεως

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0. \quad (6.1.8)$$

Η εξίσωση αυτή έχει την εξίσου γνωστή γενική λύση

$$T(t) = C \cos \omega t + D \sin \omega t = E \cos(\omega t - \alpha) \quad (6.1.9)$$

(με τα  $C$  και  $D$  ή  $E$  και  $\alpha$  σταθερές,  $\alpha$  είναι η γωνία φάσεως). Η λύση αυτή δηλώνει αρμονική ταλάντωση με συχνότητα (κυκλική συχνότητα)  $\omega$ . Συνεπώς υπήρξε λογική η επιλογή του συμβόλου  $\omega$  στον όρο  $-\omega^2$  δεξιά στη σχέση (6.1.7), η οποία προέκυψε από το χωρισμό των μεταβλητών  $x$  και  $t$ .

Αυτά για τη χρονική συνήθη διαφορική εξίσωσή μας (6.1.8). Θα προχωρήσουμε τώρα και στη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (για τη θέση  $x$  κατά μήκος της ράβδου), που προσδιορίζεται και πάλι από τη σχέση (6.1.7) χωρισμού των μεταβλητών. Η εξίσωση αυτή έχει προφανώς τη μορφή

$$X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0 \quad (6.1.10)$$

και είναι επίσης ομογενής και γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως. Έτσι ακριβώς ήταν και η αντίστοιχη εξίσωση (5.2.34) στην Παράγραφο Β5.2.5 για τη χορδή (στην τρίτη και επιτυχή δυνατότητα που διερευνήθηκε εκεί). Εδώ όμως έχουμε το σύμβολο  $\omega/c$  αντί για το  $\rho$ . Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής (6.1.10) είναι προφανώς η εξής:

$$X(x) = A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}. \quad (6.1.11)$$

### Β6.1.3. Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα της ράβδου

Στη σχέση (6.1.7) παρατηρούμε την κατευθείαν χρήση του συμβόλου  $\omega$  στο χωρισμό των μεταβλητών  $x$  και  $t$ . Παρατηρούμε όμως τώρα και μια χρονοτριβή, ένα μικρό διαταγμό ως προς τη χωρική λύση (6.1.11) έχοντας βρει τη χρονική λύση (6.1.9) πριν από τη χωρική (6.1.11). Αυτό είναι αντίθετο από ό,τι συνέβη στην Ενότητα Β5.2. Δε συμβιβάζεται επίσης με την ήδη διαθέσιμη σχετική εμπειρία στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών για τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (6.1.4). Η εξίσωση αυτή ισχύει τόσο στην Ενότητα Β5.2 στο πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων της χορδής (ή του καλωδίου) όσο και στην παρούσα Ενότητα Β6.1, εδώ στο πρόβλημα των αξονικών (ή διαμήκων) ταλαντώσεων της ράβδου. Γιατί άραγε αυτή η απόκλιση στον τρόπο εργασίας;

Η απάντηση, χωρίς καθυστέρηση, είναι πολύ απλή. Στην Ενότητα Β5.2 στο πρόβλημα της χορδής (ή του καλωδίου) η χορδή θεωρήθηκε στερεωμένη και στα δύο άκρα της  $x = 0$  και  $x = L$ . Αυτό ήταν κάτι το εύλογο για έναν απόλυτα εύκαμπτο γραμμικό φορέα (ουσιαστικά με μηδενικό εμβαδόν διατομής  $A$ ). Δεν ισχύει όμως το ίδιο και στη ράβδο που εξετάζεται εδώ (σε αξονικές ταλαντώσεις). Η ράβδος αυτή έχει πεπερασμένο εμβαδόν διατομής  $A$ . Το εμβαδόν αυτό  $A$  υπεισέρχεται βέβαια στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (6.1.1): τη μη ομογενή, και (6.1.2): την αντίστοιχη ομογενή. Με άλλα λόγια εδώ στη ράβδο και σε αξονικές ταλαντώσεις έχουμε τις εξής δύο κύριες συνοριακές συνθήκες στα άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της ράβδου: είτε (α) στήριξη (ή πάκτωση) σε ένα άκρο  $x = a$ , οπότε προφανώς

$$u(a, t) = 0 \implies X(a) = 0 \quad (6.1.12)$$

από το χωρισμό των μεταβλητών (6.1.6), είτε (β) ελεύθερο άκρο  $x = a$ , οπότε

$$N(a, t) = EA \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0 \implies X'(a) = 0. \quad (6.1.13)$$

Για το τελευταίο αποτέλεσμα:  $X'(a) = 0$  πρέπει να θυμηθούμε: (α) ξανά το χωρισμό των μεταβλητών (6.1.6), (β) τον τύπο (3.2.4) της Ενότητας Β3.2 (που προέκυψε από τη Μηχανική των Υλικών, συγκεκριμένα από το νόμο του Hooke στη μια διάσταση  $x$ ) και (γ) το προφανές γεγονός ότι σε ελεύθερο άκρο ράβδου η αξονική δύναμη  $N$  είναι μηδέν.

Συνδυάζουμε τώρα τις δύο αυτές κύριες συνοριακές συνθήκες (6.1.12) και (6.1.13). (Υπάρχουν βέβαια και άλλες, όπως είναι η στήριξη ενός άκρου ράβδου μέσω ελατηρίου σταθεράς  $k$  κατά τον άξονα της ράβδου.) Με το συνδυασμό αυτό παίρνουμε τελικά τις ακόλουθες τέσσερις δυνατές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών στην αξονικά ταλαντούμενη ράβδο:

**(α) Στερεωμένα και τα δύο άκρα**  $x = 0$  και  $x = L$  της ράβδου (αμφίπακτη ράβδος), οπότε

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \implies X(0) = X(L) = 0. \quad (6.1.14)$$

**(β) Στερεωμένο το αριστερό άκρο**  $x = 0$  και **ελεύθερο το δεξιό**  $x = L$  της ράβδου (πρόβολος), οπότε

$$u(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \implies X(0) = X'(L) = 0. \quad (6.1.15)$$

**(γ) Ελεύθερο το αριστερό άκρο**  $x = 0$  και **στερεωμένο το δεξιό**  $x = L$  της ράβδου (επίσης πρόβολος), οπότε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u(L, t) = 0 \implies X'(0) = X(L) = 0. \quad (6.1.16)$$

Φυσικά η περίπτωση αυτή (γ) είναι απόλυτα ανάλογη της περιπτώσεως (β) ευθύς πιο πάνω και επομένως δε χρειάζεται ειδική μελέτη.

**(δ) Ελεύθερα και τα δύο άκρα**  $x = 0$  και  $x = L$  της ράβδου (ελεύθερη ράβδος, που υπόκειται προφανώς και σε κίνηση στερεού σώματος πέρα από τις αξονικές ταλαντώσεις, γιατί δεν υπάρχει στήριξή της), οπότε

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \implies X'(0) = X'(L) = 0. \quad (6.1.17)$$

Στη χορδή (ή, προσεγγιστικά, και στο καλώδιο, στο οποίο συνήθως αγνοούμε την πάρα πολύ μικρή δυσκαμψία του) που μελετήθηκε στην Ενότητα Β5.2 είχαμε μόνο την περίπτωση στηρίξεως στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$ . Αντίθετα εδώ στην αξονικά ταλαντούμενη ράβδο παρατηρούμε ότι έχουμε τέσσερις περιπτώσεις στηρίξεως (βέβαια με την πρώτη απόλυτα ανάλογη εκείνης στο πρόβλημα της χορδής και με τη δεύτερη και την τρίτη παρόμοιες μεταξύ τους). Το γεγονός αυτό μας επιβάλλει να προσφύγουμε σε δυο-τρεις κατάλληλους μαθηματικούς χειρισμούς που θα τους δούμε στη συνέχεια και που δεν υπήρξαν αναγκαίοι στο πρόβλημα της χορδής στην Ενότητα Β5.2. Οι ίδιοι ουσιαστικά μαθηματικοί χειρισμοί θα είναι εξίσου αναγκαίοι και στο αρκετά δυσκολότερο (και φυσικά πολύ πιο χρήσιμο για τον Πολιτικό Μηχανικό) πρόβλημα της καμπτικά ταλαντούμενης δοκού. Το ενδιαφέρον αυτό πρόβλημα θα το εξετάσουμε στην αμέσως επόμενη Ενότητα Β6.2.

#### **Β6.1.4. Στερεωμένη και στα δύο άκρα (αμφίπακτη) ράβδος**

Πρόκειται για την ευκολότερη περίπτωση με συνοριακές συνθήκες τις (6.1.14). Η περίπτωση αυτή είναι απόλυτα ανάλογη με εκείνη της χορδής στην Ενότητα Β5.2. (Εκεί όμως αναφερόμασταν σε εγκάρσιες ταλαντώσεις, όχι σε αξονικές ταλαντώσεις!) Από τη χωρική λύση (6.1.11) και τις συνοριακές συνθήκες (6.1.14) προκύπτει αμέσως ότι  $A = 0$  (λόγω της πρώτης συνθήκης (6.1.14)). Προκύπτει επίσης και η στοιχειώδης εξίσωση (λόγω της δεύτερης συνθήκης (6.1.14))

$$\sin \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (6.1.18)$$

για μη τετριμμένες λύσεις  $X(x) \neq 0$  (με  $B \neq 0$ ). Άρα οι ιδιοσυχνότητες (κυκλικές ιδιοσυχνότητες εννοείται)  $\omega_n$  στο παρόν πρόβλημα ταλαντώσεων θα είναι άπειρες, διακεκριμένες και οι εξής:

$$\frac{\omega_n L}{c} = n\pi \implies \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.19)$$

Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις  $X_n(x)$  προκύπτουν αμέσως από τη λύση (6.1.11) (με  $A = 0$ , όπως ήδη σημειώθηκε) στη μορφή

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{\omega_n x}{c} = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (6.1.20)$$

Φυσικά η τιμή  $n = 0$  οδηγεί στην τετριμμένη λύση  $X_0(x) \equiv 0$ , η οποία απορρίπτεται. (Έτσι κι αλλιώς η τιμή  $n = 0$  δεν αφορά σε ταλαντώσεις!)

Αφετέρου για τη χρονική συνάρτηση  $T(t)$  η σχετική λύση (6.1.9) παίρνει τώρα τη μορφή

$$T_n(t) = C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t = C_n \cos \frac{n\pi c t}{L} + D_n \sin \frac{n\pi c t}{L} \quad (6.1.21)$$

με τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  ήδη καθορισμένες από τις σχέσεις (6.1.19).

Επομένως η λύση της μονοδιάστατης εξίσωσης του κύματος (6.1.4) στο παρόν πρόβλημα των αξονικών ταλαντώσεων στερεωμένης και στα δύο άκρα (αμφίπακτης) ράβδου με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (6.1.6) έχει τελικά τη μορφή

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \sin \frac{\omega_n x}{c} (C_n^* \cos \omega_n t + D_n^* \sin \omega_n t) \quad (6.1.22)$$

για την ιδιοσυχνότητα  $\omega_n$ . Σημειώνεται ότι η σταθερά  $B_n$  στην ιδιοσυνάρτηση  $X_n(x)$  έχει ενσωματωθεί στις σταθερές  $C_n$  και  $D_n$  (με  $C_n^* = B_n C_n$  και  $D_n^* = B_n D_n$ ). Ισοδύναμη μορφή της παραπάνω λύσεως (6.1.22) (με τη χρήση γωνίας φάσεως  $\alpha_n$  και νέας σταθεράς  $E_n^*$ ) είναι και η εξής:

$$u_n(x, t) = E_n^* \sin \frac{\omega_n x}{c} \cos(\omega_n t - \alpha_n). \quad (6.1.23)$$

Μερικές φορές μάλιστα η μορφή αυτή προτιμάται από τον Πολιτικό Μηχανικό.

Επίσης ευκολότατα διαπιστώνεται από τη σχέση (6.1.20) ότι

$$X_n(0) = X_n(L) = 0 \implies u(0, t) = u(L, t) = 0. \quad (6.1.24)$$

Άρα επαληθεύεται ότι πρόκειται για ράβδο στερεωμένη και στα δύο άκρα της  $x = 0$  και  $x = L$ . Στα άκρα αυτά η συνάρτηση  $X_n(x)$ , η οποία παριστάνει το «σχήμα» της αξονικά ταλαντούμενης ράβδου χωρίς όμως τη χρονική εξάρτησή του  $T_n(t)$ , προφανώς μηδενίζεται. Επιπλέον όμως η ίδια συνάρτηση  $X_n(x)$  μηδενίζεται (για  $n > 1$ ) και στα σημεία

$$x_k = \frac{kL}{n}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (6.1.25)$$

της ράβδου. Ακριβώς όπως και τα άκρα  $x = x_0 = 0$  και  $x = x_n = L$  της ράβδου, έτσι και τα σημεία  $x_k$  αποτελούν κόμβους των αξονικών αυτών ταλαντώσεων, δηλαδή σημεία της ράβδου που μένουν συνεχώς εντελώς ακίνητα. (Βέβαια δεν πρέπει να συγχέονται οι κόμβοι στις ταλαντώσεις χορδών, ράβδων και δοκών με τους κόμβους στην ανάλυση των κατασκευών ή με τους κόμβους στην αριθμητική ολοκλήρωση, στα πεπερασμένα και τα συνορικά στοιχεία, κλπ. Η λέξη **κόμβος** χρησιμοποιείται σε πολλές περιπτώσεις από τον Πολιτικό Μηχανικό με διαφορετικές σημασίες!)

### B6.1.5. Ιδιομορφές ταλαντώσεως και ιδιοταλαντώσεις

Αναφερθήκαμε ήδη στις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  της αξονικά ταλαντούμενης ράβδου. Οι αντίστοιχες συναρτήσεις σχήματος, οι ιδιοσυναρτήσεις  $X_n(x)$  στις σχέσεις (6.1.20), πολύ συχνά καλούνται **ιδιομορφές των αξονικών ταλαντώσεων της ράβδου** και απλούστερα **ιδιομορφές ταλαντώσεως** ή, ακόμη πιο απλά, **ιδιομορφές**. Τους όρους αυτούς (ιδιομορφές ταλαντώσεως ή ιδιομορφές) τους προκρίνουμε, τους προτιμάμε και θα τους χρησιμοποιήσουμε εκτενώς στο κεφάλαιο αυτό. Συγκεκριμένα θα κάνουμε χρήση των όρων αυτών τόσο για τις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου (στην παρούσα ενότητα) όσο και για τις καμπτικές ταλαντώσεις δοκού (στην επόμενη ενότητα και αρκετά πιο ενδιαφέρουσα για τον Πολιτικό Μηχανικό).

Σημειώνουμε επίσης ότι η καθεμία μερική λύση  $u_n(x, t)$  που δίνεται από τη σχέση (6.1.22) εκφράζει έναν τρόπο, ένα φυσικό τρόπο αξονικής (ή διαμήκου) ταλαντώσεως της ράβδου. Κάθε τέτοια λύση (ή φυσικός τρόπος ταλαντώσεως) πληροί τόσο τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.4) όσο και τις συνοριακές συνθήκες, στην περίπτωση μας τις (6.1.14). Όταν αλλάζει το  $n$ , δηλαδή αλλάζει η ιδιοσυχνότητα ταλαντώσεως  $\omega_n$ , τότε παίρνουμε έναν άλλο φυσικό τρόπο αξονικής ταλαντώσεως της ράβδου. Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές  $u_n(x, t)$  εκφράζουν τους φυσικούς τρόπους ταλαντώσεως της ράβδου (χωρίς αρχικές συνθήκες ούτε και κατανομημένη αξονική φόρτιση  $f(x, t)$  της ράβδου), δηλαδή τις ιδιοταλαντώσεις της ράβδου. Αυτές είναι άπειρες στον αριθμό ακριβώς μία για κάθε τιμή του  $n$ .

Υπέρθεση (ή επαλληλία) των ιδιοταλαντώσεων αυτών θα μας επιτρέψει να αντιμετωπίσουμε σε επόμενη παράγραφο της ενότητας αυτής το γενικό πρόβλημα των ελεύθερων αξονικών ταλαντώσεων της ράβδου υπό αρχικές συνθήκες. Αυτό ήδη το κάναμε και στο πρόβλημα της χορδής στην Παράγραφο Β5.2.10. Το πρόβλημα των εξαναγκασμένων αξονικών ταλαντώσεων ράβδου είναι ακόμη πιο δύσκολο. Η δυσκολία αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.1) που το διέπει είναι μη ομογενής. Το πρόβλημα των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων θα αντιμετωπισθεί και αυτό σε επόμενη παράγραφο της παρούσας ενότητας με βάση τις ίδιες ακριβώς ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$ . Τούτο αποτελεί επέκταση της μεθοδολογίας που αναφέρθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β5 για μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και με σταθερούς συντελεστές βέβαια.

### Β6.1.6. Στερεωμένη στο ένα άκρο και ελεύθερη στο άλλο (πρόβολος) ράβδος

Θεωρούμε πρώτα στερεωμένο (πακτωμένο) το αριστερό άκρο της ράβδου  $x = 0$  και ελεύθερο το δεξιό  $x = L$ . Τότε ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες (6.1.15), συγκεκριμένα

$$X(0) = X'(L) = 0. \quad (6.1.26)$$

Τώρα από τη γενική λύση (6.1.11) της χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης (6.1.10), επαλαμβάνουμε τη γενική αυτή λύση

$$X(x) = A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}, \quad (6.1.27)$$

προκύπτει ευθύς (λόγω της πρώτης συνοριακής συνθήκης (6.1.26)) ότι

$$A = 0 \implies X(x) = B \sin \frac{\omega x}{c}. \quad (6.1.28)$$

Στη συνέχεια από την πρώτη παράγωγο της ίδιας λύσεως (6.1.11) (ή (6.1.27))

$$X'(x) = -\frac{A\omega}{c} \sin \frac{\omega x}{c} + \frac{B\omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c} \quad (6.1.29)$$

με  $A = 0$  (πρώτη σχέση (6.1.28)) προκύπτει αμέσως ότι

$$X'(x) = \frac{B\omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c}. \quad (6.1.30)$$

Τώρα η δεύτερη συνοριακή συνθήκη (6.1.26) (για ένα ελεύθερο άκρο  $x = L$ ) απαιτεί να ισχύει

$$X'(L) = 0 \implies \cos \frac{\omega L}{c} = 0 \quad (6.1.31)$$

για μη τετριμμένη λύση:  $X(x) \neq 0$  (δηλαδή με  $B \neq 0$ ). Τότε οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  δίνονται προφανώς από τους τύπους

$$\frac{\omega_n L}{c} = \frac{(2n-1)\pi}{2} \implies \omega_n = \frac{(2n-1)\pi c}{2L} = \frac{[n - (1/2)]\pi c}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.32)$$

Επίσης λόγω της δεύτερης σχέσεως (6.1.28) οι ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  δίνονται από τους τύπους

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{\omega_n x}{c} = B_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.33)$$

Συγκρίνουμε τώρα τις σχέσεις (6.1.19) για τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  στην αμφίπακτη ράβδο και (6.1.32) για τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  στην παρούσα περίπτωση ράβδου με το αριστερό άκρο της στερεωμένο (πακτωμένο) και το δεξιό ελεύθερο (πρόβολος). Παρατηρούμε ότι οι ιδιοσυχνότητες (6.1.32) κείνται ακριβώς στα μέσα των διαστημάτων που ορίζουν η τετριμμένη (και μη ισχύουσα) ιδιοσυχνότητα  $\omega_0 = 0$  και οι αληθινές ιδιοσυχνότητες (6.1.19) για τη ράβδο και με τα δύο άκρα της στερεωμένα (την αμφίπακτη ράβδο).

Απολύτως ανάλογα ισχύουν και στην περίπτωση όπου το αριστερό άκρο της ράβδου  $x = 0$  είναι ελεύθερο, ενώ το δεξιό  $x = L$  είναι στερεωμένο (πακτωμένο). Τώρα βέβαια θα ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες (6.1.16) αντί για τις (6.1.15). Τότε εύκολα διαπιστώνεται ότι  $B = 0$ . Επίσης εύκολα προκύπτει ότι οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  δίδονται και πάλι από τους τύπους (6.1.32), ακριβώς τους ίδιους τύπους! Αντίθετα οι ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  είναι τώρα συνημιτονικές και έχουν τη μορφή

$$X_n(x) = A_n \cos \frac{\omega_n x}{c} = A_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.1.34)$$

ενώ οι προηγούμενες ιδιομορφές (6.1.33) ήσαν ημιτονικές. Φυσικά δεν υπάρχει καμία ουσιαστική διαφορά μεταξύ των εκφράσεων (6.1.33) και (6.1.34) για τις ιδιομορφές  $X_n(x)$ .

### Β6.1.7. Ελεύθερη και στα δύο άκρα ράβδος

Η τελευταία βασική περίπτωση ράβδου, αυτή χωρίς καθόλου στηρίξεις, ίσως να ξενίζει λίγο εκ πρώτης όψεως και πραγματικά περιλαμβάνει και κίνηση στερεού σώματος, όπως θα δούμε αμέσως πιο κάτω. Οι σχετικές συνοριακές συνθήκες είναι τώρα οι (6.1.17), δηλαδή

$$X'(0) = X'(L) = 0. \quad (6.1.35)$$

Η γενική λύση της χωρικής συνθήκης διαφορικής εξίσωσης (6.1.10) είναι πάλι η (6.1.11), ισοδύναμα (6.1.27), δηλαδή

$$X(x) = A \cos \frac{\omega x}{c} + B \sin \frac{\omega x}{c}. \quad (6.1.36)$$

Η παράγωγος της λύσεως αυτής  $X(x)$  είναι η (6.1.29), την ξαναγράφουμε και αυτή

$$X'(x) = -\frac{A\omega}{c} \sin \frac{\omega x}{c} + \frac{B\omega}{c} \cos \frac{\omega x}{c}. \quad (6.1.37)$$

Ασφαλώς όμως τώρα  $B = 0$  λόγω της πρώτης από τις συνοριακές συνθήκες (6.1.35): της συνθήκης  $X'(0) = 0$ . Επομένως η πιο πάνω σχέση (6.1.37) παίρνει την απλούστερη μορφή

$$X'(x) = -\frac{A\omega}{c} \sin \frac{\omega x}{c}. \quad (6.1.38)$$

Στη συνέχεια η δεύτερη από τις ίδιες συνοριακές συνθήκες (6.1.35): η συνθήκη  $X'(L) = 0$  μας δίνει την εξίσωση για τις ιδιοσυχνότητες

$$X'(L) = 0 \implies \omega \sin \frac{\omega L}{c} = 0. \quad (6.1.39)$$

Επομένως οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  δίνονται από τις σχέσεις

$$\frac{\omega_n L}{c} = n\pi \implies \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1.40)$$

Στις σχέσεις αυτές δε λησμονήσαμε και τη μηδενική ιδιοσυχνότητα  $\omega_0 = 0$ . Εντούτοις ουσιαστικά αυτή δεν είναι ιδιοσυχνότητα αξονικής ταλαντώσεως της ράβδου, αλλά δηλώνει απλά την κίνηση της ράβδου σαν στερεού σώματος. Η κίνηση αυτή είναι προφανής, όπως ήδη αναφέρθηκε, εξαιτίας την πλήρους ελλείψεως στηρίξεων στη ράβδο. Δηλαδή η ράβδος μπορεί να κινείται και σαν στερεό σώμα και να ταλαντώνεται αξονικά ταυτόχρονα. Σημειώνεται επίσης ότι οι πιο πάνω ιδιοσυχνότητες (6.1.40) για την ελεύθερη ράβδο (εκτός από τη μηδενική  $\omega_0 = 0$ ) συμπίπτουν με τις ιδιοσυχνότητες (6.1.19) για την αμφίπακτη ράβδο. Βέβαια, όπως θα φανεί και αμέσως πιο κάτω, δεν ισχύει το ίδιο και για τις αντίστοιχες ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$ , που διαφέρουν.

Από τις ιδιοσυχνότητες (6.1.40) προκύπτουν και οι ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  λόγω της σχέσεως (6.1.36) με  $B = 0$ , όπως ήδη διαπιστώθηκε. Συγκεκριμένα οι ιδιομορφές αυτές  $X_n(x)$  δίνονται από τους τύπους

$$X_n(x) = A_n \cos \frac{\omega_n x}{c} = A_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1.41)$$

Η κίνηση της ράβδου σαν στερεό σώμα (σε αντίθεση με τις ελαστικές ιδιοταλαντώσεις της) προκύπτει φυσικά για  $n = 0$ , οπότε  $\omega_n = \omega_0 = 0$ . Έχει επομένως τη μορφή

$$X_0(x) = A_0 \quad (6.1.42)$$

με το  $A_0$  σταθερά. (Η ειδική ιδιομορφή  $X_0(x)$  καλείται και **στερεά ιδιομορφή**.) Ασφαλώς, επαναλαμβάνεται, η κίνηση της ράβδου σαν στερεό σώμα δεν αποτελεί ταλάντωση, συγκεκριμένα  $\omega_0 = 0$ . Άρα, αν θέλει, ο Πολιτικός Μηχανικός την αγνοεί στις παρούσες αξονικές ταλαντώσεις. Από φυσικής όμως απόψεως η κίνηση στερεού σώματος είναι απόλυτα δυνατή στην παρούσα περίπτωση πλήρους ανυπαρξίας στηρίξεων της ράβδου.

Με την περίπτωση της ελεύθερης ράβδου συμπληρώσαμε τη μελέτη των αξονικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους ράβδου έχοντας εξετάσει και τις τέσσερις βασικές περιπτώσεις στηρίξεως (α) έως και (δ) της Παραγράφου Β6.1.3 με συνοριακές συνθήκες τις (6.1.14) έως και (6.1.17) αντίστοιχα. Πέρα από τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  σε καθεμία από τις περιπτώσεις αυτές προσδιορίσαμε και τις αντίστοιχες ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$ . Αυτές σε όλες τις περιπτώσεις προέκυψαν με πολύ απλές τριγωνομετρικές εκφράσεις. Τελικά οι ιδιοταλαντώσεις προσδιορίζονται βάσει των γενικότερων τύπων

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.43)$$

Στους τύπους αυτούς οι χρονικές ιδιοσυναρτήσεις  $T_n(t)$  δίνονται από τους τύπους (6.1.21), συγκεκριμένα

$$T_n(t) = C_n \cos \omega_n t + D_n \sin \omega_n t = E_n \cos(\omega_n t - \alpha_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.44)$$

(Φυσικά οι σταθερές  $\alpha_n$  παριστάνουν γωνίες φάσεως.) Η μοναδική σταθερά  $A_n$  ή  $B_n$  των ιδιομορφών ταλαντώσεως  $X_n(x)$  μπορεί εύκολα να ενσωματωθεί στις σταθερές  $C_n$  και  $D_n$  ή στη σταθερά  $E_n$ . Άρα οι ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  συνήθως γράφονται χωρίς τη σταθερά αυτή, δηλαδή με  $A_n = 1$  ή  $B_n = 1$  ή με κάποια άλλη κατάλληλη τιμή της σταθεράς αυτής. Στο σημείο αυτό θα επανέλθουμε στη μεθεπόμενη Παράγραφο Β6.1.9, η οποία αφορά στην ορθογωνιότητα (ή ορθογωνικότητα) των ιδιομορφών ταλαντώσεως  $X_n(x)$ .

### **Β6.1.8. Μια απλούστερη ειδική δυνατότητα στο χωρισμό των μεταβλητών**

Έχοντας λύσει τη χρονική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.1.8) που προέκυψε με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, διαπιστώσαμε ότι η χρονική εξάρτηση  $T(t)$  των αξονικών ταλαντώσεων που εξετάζουμε είναι τριγωνομετρικής μορφής (σχέση (6.1.9)). Τούτο δεν μας εκπλήσσει, θα λέγαμε μάλλον εμείς το επιδιώξαμε μετά και από τη λεπτομερή ανάλυση της Παραγράφου Β5.2.5 στο πρόβλημα των εγκάρσιων ταλαντώσεων της χορδής. Στο πρόβλημα εκείνο είχε γίνει διάκριση των τριών δυνατοτήτων: (α) μηδενικής, (β) θετικής και (γ) αρνητικής σταθεράς διαχωρισμού  $\lambda$  στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών  $x$  και  $t$ . Έγινε επιλογή της τρίτης δυνατότητας (αρνητική σταθερά  $\lambda$ ,  $\lambda < 0$ ) και στην Ενότητα Β5.2 και στην παρούσα Ενότητα Β6.1, όπου ήδη επιλέξαμε αρνητική σταθερά διαχωρισμού  $\lambda$ , συγκεκριμένα τη σταθερά  $\lambda = -\omega^2$  στη σχέση (6.1.7).

Ασφαλώς πολύ σωστά ενεργήσαμε και στην Ενότητα Β5.2 και στην παρούσα Ενότητα Β6.1. Με τον τρόπο αυτό οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της ράβδου μπορούν να πληρωθούν με τις τριγωνομετρικές ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$ . Κάτι τέτοιο θα ήταν ανέφικτο με υπερβολικές συναρτήσεις,  $\cosh$  ή/και  $\sinh$ , στις ιδιομορφές αυτές  $X_n(x)$ . Το κυριότερο όμως είναι ότι με την επιλογή αρνητικής σταθεράς διαχωρισμού, συγκεκριμένα με  $\lambda = -\omega^2$ , παίρνουμε πραγματικά ταλαντώσεις. Δηλαδή παίρνουμε τριγωνομετρικές συναρτήσεις ( $\cos$  και  $\sin$ ) στις χρονικές συναρτήσεις  $T_n(t)$  στους τύπους (6.1.44) και όχι υπερβολικές συναρτήσεις ( $\cosh$  και  $\sinh$ ). Οι τελευταίες θα οδηγούσαν όχι μόνο σε πλήρη έλλειψη των αναμενόμενων ταλαντώσεων, αλλά επίσης και σε απειρισμό των αντίστοιχων αξονικών μετατοπίσεων  $u_n(x, t)$  για  $t \rightarrow \infty$  λόγω των

σχέσεων (6.1.43). Σαφέστερα οι συνοριακές συνθήκες και στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της ράβδου δε θα μπορούσαν να πληρωθούν ταυτόχρονα. Επιπλέον η αρχή διατηρήσεως της ενέργειας θα παραβιαζόταν και αυτή λόγω του απειρισμού των συναρτήσεων  $u_n(x, t)$  για  $t \rightarrow \infty$  σε κάθε σημείο  $0 < x < L$  της ράβδου. Αυτό μάλιστα θα συνέβαινε υπό συνθήκες ανυπαρξίας κάθε μορφής κατανεμημένης εξωτερικής αξονικής φορτίσεως  $f(x, t)$ .

Με την εισαγωγή αυτή γίνεται κατανοητό ότι αρχικά μεν ο Πολιτικός Μηχανικός είναι πολύ καλό να κάνει την πλήρη διερεύνηση της Παραγράφου Β5.2.5 στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Στη συνέχεια όμως μπορεί να επιλέγει κατευθείαν αρνητική σταθερά διαχωρισμού των μεταβλητών  $\lambda = -\omega^2$  σε προβλήματα ταλαντώσεων, όπως ήδη έγινε στη σχέση (6.1.7). Με επαρκή πλέον εμπειρία στο θέμα αυτό ο Πολιτικός Μηχανικός μπορεί παραπέρα να υποθέτει μόνος του (εξαρχής και χωρίς διερεύνηση) τριγωνομετρική μορφή της χρονικής συναρτήσεως  $T(t)$  σε προβλήματα ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση, π.χ. τη μορφή

$$T(t) = \cos(\omega t - \alpha). \quad (6.1.45)$$

(Τέτοιας μορφής είναι και οι παρούσες αξονικές ταλαντώσεις.) Τότε στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η σχέση (6.1.6) απλοποιείται στη μορφή

$$u(x, t) = X(x) \cos(\omega t - \alpha). \quad (6.1.46)$$

Η απλοποίηση αυτή συνίσταται στο ότι τώρα μια μόνο συνάρτηση είναι άγνωστη, η χωρική συνάρτηση  $X(x)$  των ιδιομορφών ταλαντώσεως. Η χρονική συνάρτηση  $T(t)$  έχει ορθά υποτεθεί εξαρχής στη μορφή (6.1.45) ή σε κάποια ανάλογη τριγωνομετρική μορφή, όπως με ημίτονο αντί με συνημίτονο, ή στην αναλυτικότερη μορφή  $C \cos \omega t + D \sin \omega t$ .

Παραγωγίζοντας τώρα δύο φορές και ως προς τη θέση  $x$  και ως προς το χρόνο  $t$  τη σχέση (6.1.46), βρίσκουμε εύκολα ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) \cos(\omega t - \alpha), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 X(x) \cos(\omega t - \alpha). \quad (6.1.47)$$

Τώρα με τη χρήση των δευτέρων αυτών μερικών παραγώγων η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.4) (η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος) για τις παρούσες αξονικές ταλαντώσεις μας οδηγεί σε μια μόνο συνήθη διαφορική εξίσωση, την εξίσωση (6.1.10), που έχει τη μορφή

$$X''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) = 0. \quad (6.1.48)$$

Ακριβώς το ίδιο συνέβαινε και προηγουμένως. Πετύχαμε έτσι την απλούστευση του προβλήματός μας έχοντας απαλλαγεί από τη χρονική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.1.8). Βέβαια οι συνοριακές συνθήκες (6.1.14) ή (6.1.15) ή (6.1.16) ή (6.1.17) στα άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της αξονικά ταλαντούμενης ράβδου πρέπει να ληφθούν και τώρα υπόψη, ακριβώς όπως έγινε και προηγουμένως.

Υποθέτουμε προς στιγμή ότι ενδιαφερόμαστε μόνο για τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  και τις ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  σε ιδιοταλαντώσεις. Οι ιδιοταλαντώσεις δηλώνουν ότι δεν υπάρχει εξωτερική αξονική φόρτιση  $f(x, t)$  και ότι επίσης δεν υπάρχουν αρχικές συνθήκες στη ράβδο. (Δεν αγνοούνται όμως στις ιδιοταλαντώσεις οι συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα της ράβδου!) Με την υπόθεση αυτή θα μπορούσαμε να πάρουμε μια οποιαδήποτε τριγωνομετρική συνάρτηση  $T(t)$  στο χωρισμό των μεταβλητών (6.1.46), π.χ. τη συνάρτηση

$$T(t) = \cos \omega t \quad \text{ή/και} \quad T(t) = \sin \omega t. \quad (6.1.49)$$

Αν μάλιστα καταλαβαίνουμε τί κάνουμε, θα μπορούσαμε να πάρουμε ακόμη και μιγαδική συνάρτηση της μορφής

$$T(t) = e^{i\omega t}. \quad (6.1.50)$$



Αναγνωρίζουμε βέβαια ότι από φυσικής απόψεως μια τέτοια έκφραση (δηλαδή μια μιγαδική έκφραση) είναι απαράδεκτη. Η έννοια της μιγαδικής αυτής συναρτήσεως  $T(t)$  είναι ότι η αληθινή χρονική εξάρτηση των αξονικών ταλαντώσεων που εξετάζουμε είναι είτε (α) το πραγματικό μέρος  $\cos \omega t$  είτε (β) το φανταστικό μέρος  $\sin \omega t$  της πιο πάνω μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^{i\omega t}$ . Αυτό είναι δυνατόν, επειδή σύμφωνα με τον τύπο του Euler

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t, \quad \text{οπότε} \quad \cos \omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t} \quad \text{και} \quad \sin \omega t = \operatorname{Im} e^{i\omega t}. \quad (6.1.51)$$

Σημειώνεται επίσης ότι τα σύμβολα  $\operatorname{Re}$  (επισημότερα από απόψεως κλασικής στοιχειοθεσίας  $\Re$ ) και  $\operatorname{Im}$  (επισημότερα  $\Im$ ) δηλώνουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα μιας μιγαδικής συναρτήσεως. Ειδικά εδώ πρόκειται για την εκθετική μιγαδική συνάρτηση  $e^{i\omega t}$  εννοείται πάντοτε για την κυκλική συχνότητα  $\omega$ .

Παρατηρείται επίσης και με έμφαση μάλιστα ότι η απλοποιημένη διαδικασία της παρούσας παραγράφου υπήρξε δυνατή εξαιτίας της μη υπάρξεως αποσβέσεως των ταλαντώσεων. Με πιο μαθηματικούς όρους αυτό επιτεύχθηκε, επειδή η χρονική παράγωγος στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.4) (στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος) ήταν δευτέρας τάξεως με την πρώτη χρονική μερική παράγωγο (όπως και κάθε χρονική παράγωγο περιττής τάξεως) απύσα. Τούτο είναι εύλογο (υπό την ανυπαρξία αποσβέσεων) για τις αδρανειακές δυνάμεις. Αυτό συμβαίνει, επειδή οι αδρανειακές δυνάμεις είναι ανάλογες της επιταχύνσεως  $a(x, t)$ , στην περίπτωση μας της δεύτερης χρονικής μερικής παραγώγου  $\partial^2 u / \partial t^2$  της μετατοπίσεως  $u(x, t)$ . Πιο συγκεκριμένα η παράγωγος αυτή  $\partial^2 u / \partial t^2$  εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της αρχικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (6.1.1) υπό μια κατανεμημένη αξονική φόρτιση,  $f(x, t) \neq 0$ , ή (6.1.2) χωρίς αξονική φόρτιση,  $f(x, t) = 0$ , σε ιδιοταλαντώσεις και σε ελεύθερες ταλαντώσεις.

### **B6.1.9. Ορθογωνιότητα των ιδιομορφών: η κλασική μέθοδος της Τριγωνομετρίας**

Εξετάσαμε προηγουμένως τις τέσσερις βασικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών και στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  μιας αξονικά ταλαντούμενης συνήθους ράβδου (χωρίς κατανεμημένη εξωτερική αξονική φόρτιση  $f(x, t)$ ). Οι σχετικές ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  ήδη προσδιορίστηκαν στις Παραγράφους B6.1.4, B6.1.6 και B6.1.7. Μπορεί να αποδειχθεί μάλιστα ότι οι ιδιομορφές αυτές αποτελούν συστήματα ορθογωνίων συναρτήσεων κατά μήκος της ράβδου, δηλαδή στο διάστημα  $[0, L]$ . Δεν υπάρχει μάλιστα συνάρτηση βάρους  $w(x)$ , δηλαδή  $w(x) = 1$ . Για μια συγκεκριμένη περίπτωση συνήθους ράβδου ισχύουν επομένως οι σχέσεις ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας)

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.52)$$

Με συντομότερο (και λίγο μαθηματικότερο) συμβολισμό για το παραπάνω ολοκλήρωμα οι ίδιες σχέσεις ορθογωνιότητας μπορούν να γραφούν και στη μορφή

$$\langle X_m, X_n \rangle = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.53)$$

Οι αποδείξεις είναι ιδιαίτερα απλές για τις τόσο στοιχειώδεις τριγωνομετρικές ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$ , τις οποίες προσδιορίσαμε, με τη χρήση των πολύ γνωστών τριγωνομετρικών τύπων

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta)], \quad (6.1.54)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)]. \quad (6.1.55)$$

Παραδείγματος χάρι, για τη στερεωμένη και στα δύο άκρα (αμφίπακτη) ράβδο της Παραγράφου B6.1.4 οι ιδιομορφές ταλαντώσεως έχουν τη μορφή (6.1.20), δηλαδή (με τη σταθερά  $B_n = 1$ )

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (6.1.56)$$

Επομένως η προς απόδειξη ιδιότητα ορθογωνιότητας (από το επίθετο ορθογώνιος ή ορθογωνικό-τητας από το επίθετο ορθογωνικός, που είναι ισοδύναμος όρος) (6.1.52) παίρνει τη μορφή

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.57)$$

Τώρα με τη χρήση του κλασικού τριγωνομετρικού τύπου (6.1.55) μετατρέπουμε το γινόμενο των ημιτονικών συναρτήσεων σε διαφορά συνημιτονικών συναρτήσεων και στη συνέχεια υπολογίζουμε εύκολα το σχετικό ολοκλήρωμα. Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \cos \frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{L}{2(m-n)\pi} \sin \frac{(m-n)\pi x}{L} \Big|_0^L - \frac{L}{2(m+n)\pi} \sin \frac{(m+n)\pi x}{L} \Big|_0^L \\ &= 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6.1.58)$$

Αυτή η σχέση ορθογωνιότητας ισχύει, επειδή  $\sin k\pi = 0$  για ακέραιες τιμές του  $k$ , όπως πράγματι είναι οι τιμές  $k = 0$ ,  $k = m - n$  και  $k = m + n$  (με  $m \neq n$ ) στην πιο πάνω σχέση (6.1.58).

Άρα αποδείχθηκε η ιδιότητα ορθογωνιότητας των ιδιομορφών αξονικών ταλαντώσεων  $X_n(x)$  για την αμφίπακτη ράβδο. Τίποτε το παράδοξο! Ήταν αναμενόμενη η ιδιότητα αυτή, ήταν λίγο-πολύ γνωστή από τις σειρές Fourier για τις ημιτονικές συναρτήσεις, που έχουν εξετασθεί στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II: Μέρος Α αυτών των διδακτικών βιβλίων, Κεφάλαιο Α16. Εντελώς ανάλογα ισχύουν και στην περίπτωση της ελεύθερης ράβδου με τις αντίστοιχες συνημιτονικές ιδιομορφές ταλαντώσεως (6.1.41). Η απόδειξη είναι απολύτως παρόμοια και εξίσου απλή, τώρα όμως με τη χρήση του τριγωνομετρικού τύπου (6.1.54) αντί του (6.1.55).

Φυσικά η ιδιότητα της ορθογωνιότητας (6.1.52) (ή (6.1.53) με συντομότερο συμβολισμό) έχει νόημα μόνο για διαφορετικές ιδιομορφές ( $m \neq n$ ), όπως ήδη έχουμε τονίσει. Δηλαδή για  $m = n$  το σχετικό ολοκλήρωμα δεν είναι μηδέν και υπολογίζεται (και πάλι με τη χρήση του τριγωνομετρικού τύπου (6.1.55), τώρα όμως με  $\alpha = \beta$ ) για αμφίπακτη ράβδο ως εξής:

$$\int_0^L X_n^2(x) dx = \int_0^L \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \left( 1 - \cos \frac{2n\pi x}{L} \right) dx = \frac{L}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.59)$$

(Το ίδιο αποτέλεσμα,  $L/2$ , ισχύει και για την περίπτωση της ελεύθερης ράβδου.) Επομένως με συνδυασμό των σχέσεων (6.1.52) (ή (6.1.57)) και (6.1.59) η ιδιότητα της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών ταλαντώσεως  $X_n(x)$  παίρνει τη γενική της μορφή

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = \frac{L}{2} \delta_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.60)$$

Στη σχέση αυτή το σύμβολο  $\delta_{mn}$  δηλώνει το γνωστό δέλτα του Kronecker, που ορίζεται ως εξής:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{εάν } m \neq n, \\ 1, & \text{εάν } m = n. \end{cases} \quad (6.1.61)$$

Σημειώνεται ότι το δέλτα του Kronecker  $\delta_{mn}$  δεν έχει καμία σχέση με την ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση δέλτα του Dirac, που την έχουμε συχνά χρησιμοποιήσει στο μετασχηματισμό Laplace.

Η γενικευμένη ιδιότητα ορθογωνιότητας (6.1.60) για τις ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  ισχύει με τις σχετικές σταθερές (τις  $B_n$  στην αμφίπακτη ράβδο, τις  $A_n$  στην ελεύθερη ράβδο) να έχουν παραλειφθεί στις ιδιομορφές  $X_n(x)$ , δηλαδή να έχουν θεωρηθεί ίσες με τη μονάδα. Αυτό δεν είναι βέβαια υποχρεωτικό: η σημαντική αυτή ιδιότητα (με μηδέν δεξιά, όταν  $m \neq n$ ) ισχύει φυσικά και με πολλαπλασιαστικές σταθερές στις ιδιομορφές  $X_n(x)$ : απλά, όταν  $m = n$ , αλλάζει το δεξιό μέλος.

Συνήθως στην πράξη ο Πολιτικός Μηχανικός προτιμάει τη σχέση ορθογωνιότητας των ιδιομορφών  $X_n(x)$  στη μορφή της (6.1.60), αλλά με το κλάσμα του δεξιού μέλους  $L/2$  γραμμένο σαν

$$\frac{L}{2} = \frac{\rho AL}{2\rho A} = \frac{\rho AL/2}{\rho A} = \frac{M_n}{\rho A} \quad \text{με} \quad M_n := \frac{\rho AL}{2} \quad \text{και} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.62)$$

φυσικά με  $\rho A$  τη γραμμική πυκνότητα (πυκνότητα ανά μονάδα μήκους) της ράβδου. Έτσι εισάγονται οι καλούμενες **γενικευμένες μάζες**  $M_n$  για τις παρούσες αξονικές ταλαντώσεις ράβδου. Πρόκειται για μια ενδιαφέρουσα σχέση για τον Πολιτικό Μηχανικό, που είναι φυσικά πλήρως εξοικειωμένος με φυσικές έννοιες όπως τη γραμμική πυκνότητα  $\rho A$  και τη μάζα  $M$ .

Από την άλλη πλευρά για το Μαθηματικό είναι ίσως πολύ καλύτερα η σταθερά  $A_n$  ή  $B_n$  στις ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  να επιλεγεί ίση με  $\sqrt{2/L}$ . Τότε εύλογα οι σχέσεις ορθογωνιότητας (6.1.60) θα πάρουν μια παρόμοια, αλλά μαθηματικά πιο κανονική μορφή με το δεξιό μέλος  $1 \cdot \delta_{mn}$ . Έχουμε τότε τις κανονικοποιημένες ιδιομορφές  $\hat{X}_n(x)$ , που δεν είναι όμως ιδιαίτερα σημαντικές για τον Πολιτικό Μηχανικό, δηλαδή δεν προκαλούν σημαντική απλοποίηση στους υπολογισμούς του.

Στο σημείο αυτό ας υπενθυμίσουμε τις ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  και για τις τέσσερις βασικές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών στη συνήθη ράβδο μας σε αξονικές ταλαντώσεις:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{από τις σχέσεις (6.1.20) για αμφίπακτη ράβδο,} \quad (6.1.63)$$

$$X_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \quad \text{από τις σχέσεις (6.1.33) για ράβδο με στήριξη αριστερά,} \quad (6.1.64)$$

$$X_n(x) = \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \quad \text{από τις σχέσεις (6.1.34) για ράβδο με στήριξη δεξιά,} \quad (6.1.65)$$

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \quad \text{από τις σχέσεις (6.1.41) για (απόλυτα) ελεύθερη ράβδο.} \quad (6.1.66)$$

Στην τελευταία αυτή περίπτωση: της ελεύθερης ράβδου επιτρέπεται, όπως ήδη έχουμε αναφέρει, και η στερεά ιδιομορφή  $X_0(x) = 1$  με μηδενική ιδιοσυχνότητα  $\omega_0 = 0$ : κίνηση στερεού σώματος.

Έχουμε διαθέσιμες τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  των αξονικών ταλαντώσεων της ράβδου. Μπορούμε τώρα σχετικά εύκολα να αποδείξουμε τις ιδιότητες ορθογωνιότητάς τους (6.1.52) και στις τέσσερις πιο πάνω περιπτώσεις χρησιμοποιώντας απλή Τριγωνομετρία και υπολογίζοντας ξανά και ξανά τα σχετικά ολοκληρώματα (6.1.52). Αυτό είναι μια πολύ ωραία άσκηση και ήδη το κάναμε στην παράγραφο αυτή στην πρώτη περίπτωση: της αμφίπακτης ράβδου. Είναι όμως «στο στυλ» του Πολιτικού Μηχανικού στη Δυναμική των Κατασκευών να χρησιμοποιείται ενιαία αντιμετώπιση του προβλήματος της απόδειξης της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών με μία απόδειξη και για τις τέσσερις πιο πάνω περιπτώσεις ράβδων. Μια κι έξω η απόδειξη: με μία προσπάθεια για όλες τις περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών στη ράβδο. Και χαρούμενοι προχωράμε αμέσως σ' αυτήν!

### **Β6.1.10. Ορθογωνιότητα των ιδιομορφών: η μέθοδος της Δυναμικής των Κατασκευών**

Θα αποδείξουμε με γενικό τρόπο την ιδιότητα (6.1.52) ορθογωνιότητας των ιδιομορφών  $X_n(x)$  αξονικών ταλαντώσεων ράβδου. Την υπενθυμίζουμε

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.67)$$

Οι ιδιομορφές  $X_n(x)$  μπορεί να είναι οι ιδιομορφές των σχέσεων (6.1.63), των σχέσεων (6.1.64), των σχέσεων (6.1.65) ή των σχέσεων (6.1.66) (στις τελευταίες έχουμε και την ιδιοσυχνότητα  $\omega_0 = 0$ ), όχι όμως ανακατωμένα: μόνο για μία περίπτωση ράβδου, δηλαδή συνοριακών συνθηκών στη ράβδο.

Για την απόδειξη αυτή της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών  $X_n(x)$  θα χρησιμοποιήσουμε τη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.1.10). Την ξαναγράφουμε στην ισοδύναμη μορφή της:

$$X''(x) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 X(x) \quad \text{με} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (6.1.68)$$

όπως ήδη ξέρουμε από τη σχέση (6.1.3) για την ταχύτητα  $c$  των αξονικών ελαστικών κυμάτων. Τη διαφορική εξίσωση (6.1.68) τη γράφουμε για τις δύο ιδιομορφές  $X_m(x)$  και  $X_n(x)$  (με  $m \neq n$ ) ως εξής:

$$X_m''(x) = -\left(\frac{\omega_m}{c}\right)^2 X_m(x), \quad (6.1.69)$$

$$X_n''(x) = -\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 X_n(x) \quad (6.1.70)$$

με  $\omega_m$  και  $\omega_n$  τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες. Όμως, όπως ήδη γνωρίζουμε από τις σχέσεις (6.1.19), (6.1.32) και (6.1.40), οι δύο ιδιοσυχνότητες  $\omega_m$  και  $\omega_n$  είναι διαφορετικές μεταξύ τους για  $m \neq n$ . Δηλαδή δεν παρουσιάζονται διπλές ή πολλαπλές ιδιοσυχνότητες στις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου. Είμαστε τώρα έτοιμοι να προχωρήσουμε στην απόδειξη της βασικής σχέσεως ορθογωνιότητας (6.1.67) στις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου (είτε ελεύθερες είτε εξαναγκασμένες).

Προς το σκοπό αυτό πολλαπλασιάζουμε πρώτα και τα δύο μέλη της γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης (6.1.70), που αναφέρεται στην ιδιομορφή  $X_n(x)$ , επί την άλλη ιδιομορφή  $X_m(x)$  (όμως για την ίδια συνήθη ράβδο και φυσικά με  $m \neq n$ ). Έπειτα ολοκληρώνουμε την ίδια συνήθη διαφορική εξίσωση (6.1.70) κατά μήκος της ράβδου: από  $x = 0$  μέχρι  $x = L$ . Έτσι προκύπτει ότι

$$\int_0^L X_m(x)X_n''(x) dx = -\left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 \int_0^L X_m(x)X_n(x) dx. \quad (6.1.71)$$

Επιθυμούμε βέβαια να αποδείξουμε πως το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος είναι ίσο με το μηδέν. Δυστυχώς απαιτείται κάποιος μικρός κόπος για την κατά τα άλλα ενδιαφέρουσα αυτή απόδειξη.

Στοχεύουμε να φέρουμε το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της ίδιας σχέσεως (6.1.71) σε μια απόλυτα συμμετρική μορφή και στη συνέχεια να την εκμεταλλευθούμε για την απόδειξή μας. Προς το σκοπό αυτό εκτελούμε μια παραγοντική ολοκλήρωση (ή ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή κατά μέρη) στο ολοκλήρωμα αυτό. Με αυτόν τον τρόπο χωρίς καμία δυσκολία προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^L X_m(x)X_n''(x) dx &= X_m(x)X_n'(x)|_0^L - \int_0^L X_m'(x)X_n'(x) dx \\ &= X_m(L)X_n'(L) - X_m(0)X_n'(0) - \int_0^L X_m'(x)X_n'(x) dx. \end{aligned} \quad (6.1.72)$$

Πετύχαμε έτσι αντί να έχουμε τη μηδενική παράγωγο  $X_m(x)$  (δηλαδή την ίδια τη συνάρτηση  $X_m(x)$ ) και τη δεύτερη παράγωγο  $X_n''(x)$  της συναρτήσεως  $X_n(x)$  στην ολοκληρωτέα συνάρτηση  $X_m(x)X_n''(x)$  να έχουμε απλά μόνο τις πρώτες παραγώγους τους  $X_m'(x)$  και  $X_n'(x)$  αντίστοιχα. Αυτό είναι ένα πραγματικά ενδιαφέρον συμμετρικό αποτέλεσμα.

Θα αποδείξουμε τώρα πως ο πρώτος όρος  $X_m(L)X_n'(L)$  στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.1.72), ο οποίος αφορά στο δεξιό άκρο  $x = L$  της ράβδου, είναι πάντα ίσος με το μηδέν. Πραγματικά δύο μόνο συνηθισμένες περιπτώσεις υπάρχουν για το δεξιό αυτό άκρο  $x = L$ : (α) να είναι στηριζόμενο (πακτωμένο) άκρο με  $X(L) = 0$  και (β) να είναι ελεύθερο άκρο με  $X'(L) = 0$ . Επομένως μηδενίζεται είτε ο πρώτος παράγοντας  $X_m(L)$  είτε ο δεύτερος παράγοντας  $X_n'(L)$  στο γινόμενο  $X_m(L)X_n'(L)$  της σχέσεως (6.1.72). Κατά συνέπεια και στις δύο πιο πάνω συνηθισμένες περιπτώσεις του δεξιού άκρου  $x = L$  ο πρώτος αυτός όρος  $X_m(L)X_n'(L)$  στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.1.72) είναι ίσος με μηδέν. Αυτό ισχύει είτε εξαιτίας του πρώτου παράγοντά του  $X_m(L)$  είτε εξαιτίας του δευτέρου  $X_n'(L)$ .

Είναι προφανές πως απόλυτα ίδια είναι η κατάσταση και με το αριστερό άκρο  $x = 0$  της συνήθους ράβδου μας. Στο άκρο αυτό  $x = 0$  με τον ίδιο ακριβώς τρόπο σκέψεως διαπιστώνουμε αμέσως ότι ο όρος  $-X_m(0)X_n'(0)$  στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.1.72) είναι και αυτός ίσος με το μηδέν είτε πρόκειται για στηριζόμενο άκρο είτε για ελεύθερο άκρο. Απόλυτα ανάλογη είναι η αιτιολόγηση και του συμπεράσματός μας αυτού.

Επομένως η σχέση (6.1.72) παίρνει τώρα που έχουν μηδενισθεί οι δύο πρώτοι όροι  $X_m(L)X_n'(L)$  και  $-X_m(0)X_n'(0)$  στο δεξιό μέλος της (πριν από το ολοκλήρωμα) την αρκετά πιο απλή συμμετρική

στο δεξιό μέλος της (με δύο πρώτες παραγώγους στην ολοκληρωτέα συνάρτηση) μορφή

$$\int_0^L X_m(x)X_n''(x) dx = - \int_0^L X_m'(x)X_n'(x) dx. \quad (6.1.73)$$

Αυτή είναι και η τελική, η επιθυμητή για μας μορφή. Αυτό συμβαίνει, επειδή κατορθώσαμε ήδη να έχουμε συμμετρική ολοκληρωτέα συνάρτηση στο δεξιό μέλος, αφού προφανώς

$$X_m'(x)X_n'(x) = X_n'(x)X_m'(x), \quad \text{οπότε και} \quad \int_0^L X_m'(x)X_n'(x) dx = \int_0^L X_n'(x)X_m'(x) dx. \quad (6.1.74)$$

Η συμμετρία αυτή θα γίνει εμφανής με την αντικατάσταση του ολοκληρώματος  $\int_0^L X_m(x)X_n''(x) dx$  στο αριστερό μέλος της βασικής μας σχέσεως (6.1.71) με τη χρήση της σχέσεως (6.1.73), στην οποία καταλήξαμε με την παραγοντική ολοκλήρωση που κάναμε. Έτσι παίρνουμε από τη σχέση (6.1.71)

$$\int_0^L X_m'(x)X_n'(x) dx = \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 \int_0^L X_m(x)X_n(x) dx. \quad (6.1.75)$$

Πρόκειται για μια πλήρως συμμετρική σχέση (ως προς τους δείκτες  $m$  και  $n$  με  $m, n = 1, 2, \dots$ ) και τις δύο ολοκληρωτέες συναρτήσεις: (α)  $X_m'(x)X_n'(x) = X_n'(x)X_m'(x)$  (στο ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους) και (β)  $X_m(x)X_n(x) = X_n(x)X_m(x)$  (στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους).

Αντίθετα δεν υπάρχει καθόλου συμμετρία ως προς την ιδιοσυχνότητα (κυκλική ιδιοσυχνότητα), εδώ υψωμένη στο τετράγωνο:  $\omega_n^2$ . Συγκεκριμένα στη σχέση αυτή (6.1.75) παρουσιάζεται μόνο η ιδιοσυχνότητα  $\omega_n$ , αλλ' όχι και η ιδιοσυχνότητα  $\omega_m$ . Εμείς όμως καμία απολύτως διάκριση δεν κάναμε ανάμεσα στις δύο ιδιομορφές αξονικών (ή διαμήκων) ταλαντώσεων  $X_m(x)$  και  $X_n(x)$ . Και οι δυο τους είναι δύο εξίσου αποδεκτές ιδιομορφές για την παρούσα ράβδο μας υπό δυναμική αξονική καταπόνηση. Έχουμε επομένως θαυμάσια τη δυνατότητα να θεωρήσουμε την ίδια ακριβώς σχέση (6.1.75) να ισχύει (α) με την  $n$ -ιδιομορφή  $X_n(x)$  αντί για την  $m$ -ιδιομορφή  $X_m(x)$  και επίσης (β) με την  $m$ -ιδιομορφή  $X_m(x)$  αντί για την  $n$ -ιδιομορφή  $X_n(x)$ . Δηλαδή απλά θέτουμε στη σχέση αυτή (α)  $n$  αντί για  $m$  και επίσης (β)  $m$  αντί για  $n$ . Άρα εναλλάσσουμε τους δύο δείκτες  $m$  και  $n$ . Τότε βέβαια θα πρέπει να θέσουμε και  $\omega_m^2$  αντί για  $\omega_n^2$  στο δεξιό μέλος.

Με την εναλλαγή λοιπόν των δύο δεικτών  $m$  και  $n$  η ίδια βασική σχέση (6.1.75) ξαναγράφεται στη μορφή

$$\int_0^L X_n'(x)X_m'(x) dx = \left(\frac{\omega_m}{c}\right)^2 \int_0^L X_n(x)X_m(x) dx. \quad (6.1.76)$$

Με τη χρήση μάλιστα της τόσο στοιχειώδους και γνωστής μας αντιμεταθετικής ιδιότητας στον απλό πολλαπλασιασμό δύο αριθμών, εδώ στα γινόμενα των ολοκληρωτέων συναρτήσεων:

$$X_n'(x)X_m'(x) = X_m'(x)X_n'(x) \quad \text{και επίσης} \quad X_n(x)X_m(x) = X_m(x)X_n(x), \quad (6.1.77)$$

παίρνουμε τελικά

$$\int_0^L X_m'(x)X_n'(x) dx = \left(\frac{\omega_m}{c}\right)^2 \int_0^L X_m(x)X_n(x) dx. \quad (6.1.78)$$

Οδηγηθήκαμε έτσι σε ένα κάπως παράξενο, για να είμαστε ειλικρινείς σε ένα απροσδόκητο συμπέρασμα: πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο σχέσεις (6.1.75) και (6.1.78). Είναι σχεδόν ολίδιες. Η μόνη διαφορά τους συνίσταται στο γεγονός ότι η πρώτη έχει τον παράγοντα  $\omega_n^2$  στο δεξιό μέλος της, ενώ η δεύτερη έχει τον παράγοντα  $\omega_m^2$  στο ίδιο μέλος της. Αφαιρώντας τις κατά μέλη (τα αριστερά μέλη τους έτσι κι αλλιώς συμπίπτουν) και πολλαπλασιάζοντας επί  $c^2$  (ώστε να φύγουν οι παρονομαστές), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα

$$0 = (\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^L X_m(x)X_n(x) dx. \quad (6.1.79)$$

Έχουμε όμως εξηγήσει από την αρχή ότι οι δύο ιδιοσυχνότητες αξονικών (ή διαμήκων) ιδιοταλαντώσεων  $\omega_m$  και  $\omega_n$  είναι διαφορετικές μεταξύ τους:  $\omega_m \neq \omega_n$ . Καιρός είναι να το χρησιμοποιήσουμε

στην παραπάνω σχέση (6.1.79), στην οποία με κόπο καταλήξαμε. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε μέχρι στιγμής: (α) μία παραγοντική ολοκλήρωση (ή ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή κατά μέρη) και επίσης (β) τις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της ράβδου μας με το καθένα τους να είναι είτε (α) στηριζόμενο (πακτωμένο) άκρο είτε (β) ελεύθερο άκρο.

Πραγματικά με  $\omega_m \neq \omega_n$  η τελευταία σχέση μας (6.1.79) καταλήγει αμέσως στην τελική της και τόσο σημαντική στις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου (είτε ελεύθερες είτε εξαναγκασμένες) μορφή

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.80)$$

Αυτή είναι η σχέση ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) των ιδιομορφών  $X_m(x)$  (με  $m = 1, 2, \dots$ ), την οποία αποδείξαμε. Πρόκειται για μια σχέση θεμελιώδους σημασίας. Μας είναι απόλυτα αναγκαία κατά την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (6.1.1) των αξονικών (ή διαμήκων) ταλαντώσεων συνήθους ράβδου. Αυτό ισχύει μάλιστα είτε (α) σε ελεύθερες ταλαντώσεις ράβδου: χωρίς καθόλου κατανεμημένη αξονική εξωτερική φόρτιση  $f(x, t)$ , δηλαδή με  $f(x, t) \equiv 0$ : ομογενής εξίσωση (6.1.2), είτε (β) σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις ράβδου: εκεί με κατανεμημένη αξονική (ή διαμήκη) εξωτερική φόρτιση  $f(x, t)$ , δηλαδή με  $f(x, t) \neq 0$ : μη ομογενής εξίσωση (6.1.1).

Στο σημείο αυτό είναι βέβαια σκόπιμο να θυμηθούμε ξανά τον ορισμό

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0 \quad (6.1.81)$$

της ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) δύο διαφορετικών συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$  στο διάστημα  $[a, b]$ . Στη θεμελιώδους σημασίας αυτή έννοια της ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) συναρτήσεων είχαμε ήδη την ευκαιρία να αναφερθούμε στην Ενότητα Α16.1 του Κεφαλαίου Α16 στο διδακτικό βιβλίο για τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II (Μέρος Α). Εκεί, και συγκεκριμένα στην Παράγραφο Α16.1.2, κάναμε επίσης ρητή αναφορά και σε πέντε συστήματα (σύνολα) ορθογωνίων πολωνύμων. Παραπέρα στο ίδιο Κεφάλαιο Α16 χρησιμοποιήσαμε την έννοια της ορθογωνιότητας στις τόσο γνωστές μας πια σειρές Fourier με πάρα πολλές παραπέρα εφαρμογές. Σε τούτο το διδακτικό βιβλίο για τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III (Μέρος Β) είδαμε αρκετές τέτοιες εφαρμογές στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β5 στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Θα δούμε επίσης και άλλες στην επόμενη Ενότητα Β6.2 αυτού του Κεφαλαίου Β6 στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκού.

Στο σημείο αυτό ας κάνουμε επίσης μια πολύ σημαντική παρατήρηση. Με τη βασική σχέση ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) (6.1.80) να ισχύει το σχετικό ολοκλήρωμα για δύο διαφορετικές ιδιομορφές  $X_m(x)$  και  $X_n(x)$  θα είναι ίσο με το μηδέν. Τότε όμως, όπως άμεσα παρατηρούμε από τη σχέση (6.1.75) ή (6.1.76) (το ίδιο κάνει!), και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα των πρώτων παραγώγων τους  $X'_m(x)$  και  $X'_n(x)$  αντίστοιχα θα είναι και αυτό ίσο με το μηδέν. Δηλαδή ισχύει ότι

$$\int_0^L X'_m(x)X'_n(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά και πάλι με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.1.82)$$

Άρα όχι μόνο οι ίδιες οι ιδιομορφές  $X_n(x)$ , αλλά και οι πρώτες παράγωγοί τους  $X'_n(x)$  αποτελούν συστήματα ορθογωνίων συναρτήσεων σε αξονικές ταλαντώσεις συνήθους ράβδου. Και μάλιστα για οποιουδήποτε συνδυασμούς συνοριακών συνθηκών στα δύο άκρα της. Ένα τέτοιο άκρο μπορεί να είναι είτε (α) στηριζόμενο (πακτωμένο) είτε (β) ελεύθερο, όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Οι δύο συνθήκες ορθογωνιότητας (6.1.80) και (6.1.82) ισχύουν σε κάθε περίπτωση ράβδου!

Ακολουθούν τρεις πολύ σημαντικές παρατηρήσεις για τον Πολιτικό Μηχανικό στην Επιστήμη του, εδώ φυσικά στην περιοχή της Δυναμικής των Κατασκευών για συνεχή (όχι διακριτά) μηχανικά συστήματα του Πολιτικού Μηχανικού: εδώ για γραμμικούς φορείς και συγκεκριμένα ράβδους:

► **Παρατήρηση Β6.2:** Οι πιο πάνω σχέσεις ορθογωνιότητας των ιδιομορφών  $X_n(x)$  γενικεύονται και όταν η δυστένεια  $EA$  ή/και η γραμμική πυκνότητα  $\rho A$  της ράβδου δεν είναι σταθερές (η μία ή η άλλη ή και οι δύο μαζί) κατά μήκος της. Δε θα υπεισέλθουμε όμως στις σχετικές λεπτομέρειες.

► **Παρατήρηση Β6.3:** Η πιο πάνω απόδειξη της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών ταλαντώσεως στη σχέση (6.1.80) υπήρξε μια καθαρά μαθηματική απόδειξη. Είναι όμως δυνατόν η ίδια απόδειξη να βασισθεί και στη Μηχανική, συγκεκριμένα στο θεώρημα της αμοιβαιότητας των Betti–Maxwell, αν και στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ προτιμήθηκε η μαθηματική απόδειξη. Αυτή ακριβώς είναι η προτίμηση και στα περισσότερα συγγράμματα Δυναμικής των Κατασκευών.

► **Παρατήρηση Β6.4:** Όλες αυτές οι πιο πάνω σχέσεις ορθογωνιότητας ισχύουν για  $m \neq n$ : για δύο διαφορετικές ιδιομορφές  $X_m(x)$  και  $X_n(x)$ . Για  $m = n$  ασφαλώς και δεν περιμένουμε να ισχύει η ορθογωνιότητα της ιδιομορφής  $X_n(x)$  με τον εαυτό της. Κάτι τέτοιο θα ήταν σοβαρό σφάλμα μας και θα οδηγούσε σε φοβερά υπολογιστικά λάθη. Στην ειδική αυτή περίπτωση  $m = n$  απλά έχουμε

$$N_n := \int_0^L X_n^2(x) dx \neq 0 \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.1.83)$$

Οι προφανώς θετικές ποσότητες  $N_n$ , οι οποίες έχουν ορισθεί στην προηγούμενη σχέση (6.1.83), καλούνται **νόρμες των ιδιομορφών ταλαντώσεων**. Για να αποφύγει αυτές τις νόρμες, ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί γενικά στη θέση τους τις ποσότητες  $M_n := \rho A N_n$ , δηλαδή τις ποσότητες

$$M_n = \rho A \int_0^L X_n^2(x) dx \neq 0 \quad \text{πάλι με} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.1.84)$$

ακόμη και όταν μελετάει συνήθεις ράβδους. Με  $\rho A$  τη γραμμική πυκνότητα της συνήθους ράβδου, τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  αδιάστατες συναρτήσεις και ολοκλήρωση κατά μήκος της ράβδου ( $0 \leq x \leq L$ ) είναι προφανές ότι η φυσική διάσταση των νέων αυτών ποσοτήτων  $M_n$  είναι γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους) της ράβδου επί μήκος, κατά συνέπεια μάζα. Οι ποσότητες αυτές  $M_n$  καλούνται στη Δυναμική των Κατασκευών **γενικευμένες μάζες** εδώ για αξονικές ταλαντώσεις.

Τελειώνοντας την παράγραφο αυτή για την ορθογωνιότητα των ιδιομορφών  $X_n(x)$  αξονικών ταλαντώσεων συνήθους ράβδου σημειώνουμε ότι αντίστοιχη ιδιότητα ορθογωνιότητας ισχύει και για τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  (υιοθετούμε τον ίδιο συμβολισμό) καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού. Τη σχετική απόδειξη, που είναι μάλιστα κάπως πιο δύσκολη, επειδή χρειάζεται δύο παραγοντικές ολοκληρώσεις αντί για μία εδώ, θα την κάνουμε λεπτομερώς στην Παράγραφο Β6.2.4 παρακάτω.

### Β6.1.11. Η μέθοδος του αναπτύγματος σε ιδιομορφές

Στο σημείο αυτό θεωρούμε ξανά την αρχική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.1)

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (6.1.85)$$

η οποία διέπει τις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου. Οι δύο συνοριακές συνθήκες στα άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της ράβδου έχουν ληφθεί υπόψη στις ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$ : συνοπτικά στις σχέσεις (6.1.63) έως (6.1.66). Με τις ιδιομορφές αυτές  $X_n(x)$  είμαστε σίγουροι για την επαλήθευση των συνοριακών συνθηκών. Διαθέτουμε βέβαια και δύο αρχικές συνθήκες (για  $t = 0$ ): την αρχική αξονική θέση  $u(x, 0)$  και την αρχική αξονική ταχύτητα  $\dot{u}(x, 0)$  των σημείων της ράβδου, συγκεκριμένα

$$u(x, 0) = \hat{f}(x) \quad \text{και} \quad \dot{u}(x, 0) \equiv \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (6.1.86)$$

με τις δύο συναρτήσεις  $\hat{f}(x)$  και  $g(x)$  γνωστές και να σέβονται μάλιστα τις δύο συνοριακές συνθήκες.

Ασφαλώς το επόμενο βήμα μας θα είναι να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή μας πια (από την Παράγραφο Β5.6.2 της Ενότητας Β5.6) **μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις**, που εδώ δίκαια την αποκαλούμε **μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιομορφές**. (Αυτό το κάνουμε, γιατί οι ιδιοσυναρτήσεις μας είναι εδώ οι ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$ .) Κατά συνέπεια δεχόμαστε σαν λύση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης (6.1.85) των αξονικών ταλαντώσεων ράβδου τη συνάρτηση

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0. \quad (6.1.87)$$

Γενικεύουμε έτσι τη σχετική ημιτονική λύση (5.6.9), που είχαμε δεχθεί στην Παράγραφο Β5.6.2 για τη μη ομογενή μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (5.6.1). (Δηλαδή εδώ τα πράγματα είναι λίγο πιο δύσκολα με τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  στη θέση των ιδιοσυναρτήσεων  $\sin(n\pi x/L)$  στην εξίσωση της διαχύσεως.) Οι ιδιομορφές  $X_n(x)$  μας είναι γνωστές, ενώ οι χρονικές συναρτήσεις  $q_n(t)$ , που καλούνται στη Δυναμική των Κατασκευών **κύριες συντεταγμένες** (ή **κανονικές συντεταγμένες** ή **συντεταγμένες των τρόπων ταλαντώσεως**), μας είναι άγνωστες και πρέπει να προσδιορισθούν.

Και τώρα η αντικατάσταση της λύσεως (6.1.87) που υποθέσαμε στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.1.85). Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε τη δεύτερη χωρική μερική παράγωγο  $u''(x, t)$  καθώς και τη δεύτερη χρονική μερική παράγωγο  $\ddot{u}(x, t)$ . Παραγωγίζουμε λοιπόν το ανάπτυσμα σε ιδιομορφές (6.1.87) που έχουμε υποθέσει σαν λύση  $u(x, t)$  και εύκολα βρίσκουμε ότι

$$u''(x, t) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n''(x) \quad \text{και επίσης} \quad \ddot{u}(x, t) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) X_n(x). \quad (6.1.88)$$

Την πρώτη από τις μερικές αυτές παραγώγους μπορούμε να τη γράψουμε και σε λίγο απλούστερη μορφή παίρνοντας υπόψη μας τη χωρική διαφορική εξίσωση (6.1.68) στη μορφή της (6.1.70) για την  $n$ -στή ιδιομορφή  $X_n(x)$ :  $X_n''(x) = -(\omega_n/c)^2 X_n(x)$ . Με τον τρόπο αυτό διώχνουμε τη δεύτερη μερική παράγωγο  $X_n''(x)$  στην πρώτη σχέση (6.1.88) και τη γράφουμε στην απλούστερη μορφή της

$$u''(x, t) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n(t) X_n(x) = -\frac{\rho}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n(t) X_n(x), \quad \text{αφού} \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6.1.89)$$

Είμαστε λοιπόν έτοιμοι! Αντικαθιστούμε τις μερικές παραγώγους  $u''(x, t)$  από τη σχέση (6.1.89) και  $\ddot{u}(x, t)$  από τη δεύτερη σχέση (6.1.88) στη διαφορική μας εξίσωση (6.1.85). Έτσι παίρνουμε

$$-EA \frac{\rho}{E} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 q_n(t) X_n(x) + f(x, t) = \rho A \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) X_n(x). \quad (6.1.90)$$

Τέλος κάνουμε την απλοποίηση  $EA(\rho/E) = \rho A$  και αναδιατάσσουμε τους όρους στην εξίσωση αυτή συμπτύσσοντας μάλιστα τις δύο σειρές (που φυσικά τις υποθέτουμε ότι συγκλίνουν) σε μία μόνο σειρά. Έτσι βρίσκουμε

$$\rho A \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t)] X_n(x) = f(x, t) \quad (6.1.91)$$

χωρίς να ξεχνάμε ότι υπάρχουν και οι δύο αρχικές συνθήκες (6.1.86):  $u(x, 0) = \hat{f}(x)$ ,  $\dot{u}(x, 0) = g(x)$ .

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε ένα μεγάλο διάλειμμα. Με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιομορφές φέραμε τη διαφορική εξίσωση (6.1.85) των αξονικών ταλαντώσεων συνήθους ράβδου στη μορφή (6.1.91) με τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  γνωστές και μάλιστα να αποτελούν σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων κατά μήκος της ράβδου. Τώρα στην αμέσως επόμενη Ενότητα Β6.2 θα κάνουμε την ίδια ακριβώς εργασία και στην αρκετά πιο δύσκολη περίπτωση των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού. (Θυμίζουμε ότι συνήθως ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί τον όρο **ράβδος** αντί για τον όρο **δοκός**, όπως κάνουμε και εδώ, απλά όταν δεν έχει κάθετη, καμπτική φόρτιση.) Θα προσδιορίσουμε και εκεί τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  (που όμως δεν είναι τόσο απλές) και θα αποδείξουμε και γι' αυτές την ορθογωνιότητά τους. Τελικά θα καταλήξουμε στην εξίσωση (6.2.127), που είναι ακριβώς η ίδια εξίσωση (6.1.91) απλά με το συμβολισμό  $p(x, t)$  για την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση της δοκού αντί (εδώ) για το συμβολισμό  $f(x, t)$  για την κατανεμημένη αξονική φόρτιση της ράβδου.

Κι αμέσως μετά, από το Εδάφιο Β6.2.6.4 και μετά, θα λύσουμε την εξίσωση (6.2.127), που συμπύπτει όπως είπαμε με την (6.1.91), για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με ειδική περίπτωση στο τέλος τις ελεύθερες ταλαντώσεις. Υπομονή λοιπόν, ώστε να μπορέσουμε να φέρουμε και το πρόβλημα των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων δοκού εκεί όπου ήδη φέραμε το πρόβλημα των εξαναγκασμένων αξονικών ταλαντώσεων ράβδου: στην εξίσωση (6.1.91). Υπομονή χωρίς μάλιστα να ξεχνάμε πως στις κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού οι καμπτικές ταλαντώσεις δοκού είναι πιο σημαντικές από τις αξονικές ταλαντώσεις ράβδου, που είναι όμως μαθηματικά απλούστερες.



## B6.2. ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ

### B6.2.1. Η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

Οι δοκοί αποτελούν έναν ιδιαίτερα σημαντικό γραμμικό φορέα του Πολιτικού Μηχανικού στις κατασκευές του. Εδώ θα επιλύσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της συνήθους δοκού στο δυναμικό πρόβλημα των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \text{με} \quad v = v(x, t). \quad (6.2.1)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών και του αναπτύγματος σε **ιδιοσυναρτήσεις**, οι οποίες προηγουμένως σε ράβδο και εδώ σε δοκό καλούνται συνήθως **ιδιομορφές ταλαντώσεων** και απλούστερα **ιδιομορφές**. Η παραπάνω διαφορική εξίσωση (6.2.1) είναι θεμελιώδης εξίσωση στη Δυναμική των Κατασκευών και μας είναι πάρα πολύ καλά γνωστή ήδη από την Ενότητα Β1.1: εξισώσεις (1.1.5) και (1.1.13). Υπενθυμίζουμε επίσης ότι σ' αυτήν οι ποσότητες  $EI$  και  $\rho A$  είναι η **δυσκαμψία** της δοκού και η **γραμμική πυκνότητά** της αντίστοιχα. Και τις δυο τις θεωρούμε εδώ σε συνήθη δοκό σταθερές. Άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως (η κάθετη μετατόπιση)  $v(x, t)$  κατά μήκος της δοκού (με  $x$  τη θέση και  $t$  το χρόνο), ενώ η συνάρτηση  $p(x, t)$  είναι γνωστή και δηλώνει την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση επίσης κατά μήκος της δοκού.

Η διαφορική αυτή εξίσωση (6.2.1) συνοδεύεται από τέσσερις συνοριακές συνθήκες: ανά δύο σε κάθε άκρο της δοκού, εδώ στα άκρα  $x = 0$  και  $x = L$ . Ισχύουν επίσης και δύο αρχικές συνθήκες που αφορούν στην αρχική χρονική στιγμή  $t = 0$ . Σε όλες αυτές τις συνθήκες θα αναφερθούμε πιο κάτω.

Εδώ απλά τονίζουμε τη χρησιμότητα του παρόντος προβλήματος για τον Πολιτικό Μηχανικό, ο οποίος πάρα πολύ συχνά χρησιμοποιεί και δοκούς στις κατασκευές του. Εξίσου συχνά συναντάει και δυναμικά φαινόμενα, π.χ. σε δοκούς υπό την επιρροή του ανέμου, κινούμενων φορτίων (όπως οχημάτων πάνω σε μια γέφυρα) και σεισμικών φαινομένων. Όλα αυτά πρέπει να τα λαμβάνει έγκαιρα υπόψη στις μελέτες του για τις κατασκευές του και ασφαλώς δε μπορεί να τα αγνοεί. Με την έννοια αυτή η παρούσα ενότητα για τις καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού κρίνεται πολύ σημαντική για τον Πολιτικό Μηχανικό. Επομένως ίσως θα ήταν ουσιαστικό σφάλμα η παράλειψή της στο παρόν διδακτικό βιβλίο Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς.

### B6.2.2. Χωρισμός των μεταβλητών

Για την πιο πάνω γραμμική και με σταθερούς συντελεστές διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.1) θα εφαρμόσουμε καταρχήν το χωρισμό των μεταβλητών  $x$  και  $t$  στην αντίστοιχη ομογενή (χωρίς φόρτιση:  $p(x, t) \equiv 0$ ) διαφορική εξίσωση, δηλαδή στην εξίσωση

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{πάλι με} \quad v = v(x, t). \quad (6.2.2)$$

Προφανώς με μεταβλητές τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού ( $0 \leq x \leq L$ ) και το χρόνο  $t$  ( $t \geq 0$ ) πρέπει να θέσουμε

$$v(x, t) = X(x)T(t). \quad (6.2.3)$$

Έτσι η άγνωστη συνάρτηση  $v(x, t)$  διαχωρίζεται σε μια χωρική συνάρτηση  $X(x)$  και σε μια χρονική συνάρτηση  $T(t)$ . Εκτελώντας τις σχετικές μερικές παραγωγίσεις, διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = X''''(x)T(t) \quad \text{και επίσης} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = X(x)\ddot{T}(t) \quad (6.2.4)$$

με τους τόνους να υποδηλώνουν χωρικές μερικές παραγώγους και τις τελείες χρονικές μερικές παραγώγους. Παρενθετικά σημειώνουμε και τους συμβολισμούς

$$v''''(x, t) := \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}, \quad \ddot{v}(x, t) := \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (6.2.5)$$

τους οποίους αρκετά συχνά υιοθετεί ο Πολιτικός Μηχανικός στη Δυναμική των Κατασκευών. Εντούτοις εμείς για περισσότερη σαφήνεια θα αποφυγούμε τη χρήση τους.

Δεν έχουμε τώρα παρά να αντικαταστήσουμε τις μερικές παραγώγους (6.2.4) στην ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.2). Έτσι προκύπτει άμεσα ότι

$$EI X''''(x)T(t) + \rho A X(x)\ddot{T}(t) = 0. \quad (6.2.6)$$

Διαιρώντας τώρα με το γινόμενο  $v(x, t) = X(x)T(t)$  (υποθέτοντάς το συνεχώς διάφορο του μηδενός), διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$EI \frac{X''''(x)}{X(x)} + \rho A \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = 0. \quad (6.2.7)$$

Τώρα διαιρούμε δια  $\rho A$ , μεταφέρουμε το χρονικό κλάσμα  $\ddot{T}(t)/T(t)$  στο δεξιό μέλος και εισάγουμε τέλος τη **σταθερά διαχωρισμού**  $\lambda = \omega^2$ , εδώ θετική:  $\omega^2$ . Έτσι παίρνουμε

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{X''''(x)}{X(x)} = - \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \omega^2. \quad (6.2.8)$$

Είναι τώρα, με  $v(x, t) = X(x)T(t)$ , προφανές ότι έχουμε καταλήξει (φυσικά με την παρούσα μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών) στις δύο ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$X''''(x) - \frac{\rho A \omega^2}{EI} X(x) = 0 : \quad \text{χωρική συνήθης διαφορική εξίσωση,} \quad (6.2.9)$$

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0 : \quad \text{χρονική συνήθης διαφορική εξίσωση.} \quad (6.2.10)$$

Μας είναι πολύ απλή (και φυσικά γνωστή!) η χρονική συνήθης διαφορική εξίσωση (6.2.10). Η γενική λύση της είναι βέβαια τριγωνομετρικής μορφής (και χωρίς απόσβεση μάλιστα!)

$$T(t) = E \cos \omega t + F \sin \omega t = G \cos(\omega t - \alpha), \quad (6.2.11)$$

αν θελήσουμε να χρησιμοποιήσουμε ένα μόνο τριγωνομετρικό όρο με γωνία φάσεως  $\alpha$ . (Φυσικά τα δύο σύμβολα  $E$  και  $F$  ή, εναλλακτικά, τα δύο σύμβολα  $G$  και  $\alpha$  δηλώνουν αυθαίρετες σταθερές.)

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι ήταν πραγματικά χρήσιμο να διαιρέσουμε την εξίσωση (6.2.7) με τη γραμμική πυκνότητα  $\rho A$ . Πιο σημαντικό είναι όμως να τονίσουμε ότι ήταν *απόλυτα αναγκαίο* να υποθέσουμε τη σταθερά διαχωρισμού  $\lambda = \omega^2$  (θετική σταθερά  $\lambda$  και ίση με  $\omega^2$ ). Έτσι κατορθώσαμε να καταλήξουμε στη γενική λύση (6.2.11) της χρονικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως (6.2.10) με παράμετρο την κυκλική συχνότητα  $\omega$  των ταλαντώσεων πέρα από τις δύο αυθαίρετες σταθερές  $E$  και  $F$  (ή  $G$  και  $\alpha$ ). Αλίμονο, αν δεν είχαμε καταλήξει σε τριγωνομετρική λύση σε αφόρτιση δοκό (σε ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα σε ελεύθερες ταλαντώσεις). Θα είχαμε έτσι παραβιάσει κατάφωρα την αρχή διατηρήσεως της ενεργείας με υπερβολικές συναρτήσεις (υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο) στη λύση αυτή (6.2.11) (για  $\lambda = -\omega^2$ ) ή και με γραμμική λύση (για  $\lambda = 0$ ). Εντούτοις μόνο η τριγωνομετρική λύση (6.2.11) (για  $\lambda = \omega^2$ ) είναι αποδεκτή από φυσικής απόψεως και επομένως υιοθετείται. Η ίδια λύση (για  $\lambda = \omega^2$ , θετικό  $\lambda$ ) θα είναι ουσιαστικά αυτή που θα μας επιτρέψει να λάβουμε παρακάτω σωστά υπόψη μας και τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού σε καμπτικές ταλαντώσεις.

Τώρα όσον αφορά στη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.9), που την ξαναγράφουμε και στην απλούστερη μορφή

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{με} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}, \quad (6.2.12)$$

μας είναι και αυτή γνωστή από την Ενότητα Α9.2 του διδακτικού βιβλίου Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς. Υπενθυμίζουμε κι εδώ τη γνωστή μας εκθετική αντικατάσταση  $X_0(x) = e^{\mu x}$  κι έπειτα τη σχετική χαρακτηριστική εξίσωση η οποία προκύπτει με τη μέθοδο αυτή:

$$\mu^4 - \beta^4 = 0, \quad \text{ισοδύναμα} \quad (\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 + \beta^2) = 0. \quad (6.2.13)$$

Η χαρακτηριστική αυτή εξίσωση έχει προφανώς τέσσερις ρίζες, της εξής:

$$\mu_{1,2} = \pm\beta \quad \text{και} \quad \mu_{3,4} = \pm i\beta. \quad (6.2.14)$$

Στην Ενότητα Α9.2 είχαμε επίσης εύκολα προσδιορίσει τη γενική λύση (9.2.17) της διαφορικής εξίσωσης (6.2.12):

$$X(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x. \quad (6.2.15)$$

Η λύση αυτή περιλαμβάνει τέσσερις αυθαίρετες σταθερές: τις  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $D$ . Αυτό είναι αναμενόμενο για μια γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως, όπως είναι η εξίσωση (6.2.12).

Οι τέσσερις αυτές σταθερές  $A$ ,  $B$ ,  $C$  και  $D$  μπορούν ασφαλώς να προσδιορισθούν από τις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού. Ειδικά για την αμφιέριστη δοκό είχαμε βρει στην Ενότητα Α9.2, σχέσεις (9.2.34) τις **ιδιοσυναρτήσεις** (που στις ράβδους και στις δοκούς καλούνται, όπως γνωρίζουμε καλά, **ιδιομορφές ταλαντώσεως** και πιο απλά **ιδιομορφές**)

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{ή απλούστερα με } D_n = 1: \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.16)$$

Δηλαδή παρατηρούμε ότι μόνο ο ημιτονικός όρος  $D \sin \beta x$  της γενικής λύσεως (6.2.15) έχει απομείνει σ' αυτήν την ειδική περίπτωση, δηλαδή στην περίπτωση της αμφιέριστης δοκού.

### Β6.2.3. Ορθογωνιότητα των ιδιομορφών

Είναι προφανές ότι για τις ημιτονικές ιδιομορφές  $X_n(x)$  στις σχέσεις (6.2.16) ισχύει η **ορθογωνιότητα** (ή **ορθογωνικότητα**) στο διάστημα  $[0, L]$  της δοκού. Αυτό το ξέρουμε ήδη από τις σειρές Fourier (Κεφάλαιο Α16) και είχαμε την ευκαιρία να το χρησιμοποιήσουμε στο Κεφάλαιο Β5 καθώς και στην προηγούμενη Ενότητα Β6.1 για ράβδους. Η ιδιότητα αυτή είναι επαρκής για την αμφιέριστη δοκό (που είναι έτσι η υπολογιστικά ευκολότερη δοκός) στην επίλυση του παρόντος προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκού. Εντούτοις δε μας είναι επαρκής για άλλους τρόπους στηρίξεως της δοκού: (α) αμφίπακτη δοκό, (β) πρόβολο και (γ) δοκό πακτωμένη στο ένα άκρο της και με κύλιση στο άλλο. Επίσης για τις δύο στατικά απαράδεκτες δοκούς: (δ) με απλή στήριξη στο ένα άκρο και ελεύθερο το άλλο και (ε) με ελεύθερα και τα δύο άκρα. (Αυτές οι στατικά απαράδεκτες δοκοί είναι εντούτοις αποδεκτές στη Δυναμική των Κατασκευών. Εκεί η κίνηση μιας δοκού καταρχήν επιτρέπεται!) Η ανεπάρκεια αυτή των σειρών Fourier παρουσιάζεται, επειδή, όπως θα δούμε παρακάτω, σε όλες τις παραπάνω δοκούς με εξαίρεση την αμφιέριστη δοκό οι ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  δεν έχουν πια την απλή τριγωνομετρική μορφή (6.2.16): έχουν πολύπλοκες μορφές. Αυτό θα το διαπιστώσουμε στην Παράγραφο Β6.2.5.

Στην επόμενη Παράγραφο Β6.2.4 θα αποδείξουμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις συνήθων στηρίξεων/ελλείψεως στηρίξεως στα δύο άκρα μιας δοκού: (α) πάκτωση, (β) απλή στήριξη (άρθρωση ή κύλιση) και (γ) ελεύθερο άκρο (για κάθε συνδυασμό των στηρίξεων αυτών) οι ιδιομορφές  $X_n(x)$  κατά μήκος της δοκού είναι ορθογώνιες μεταξύ τους. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι ισχύει η σχέση

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0 \quad \text{με } m \neq n \quad \text{και } m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.17)$$

για δύο οποιεσδήποτε διαφορετικές ιδιομορφές  $X_m(x)$  και  $X_n(x)$  μιας συνήθους δοκού με το αριστερό άκρο της  $x = 0$  με πάκτωση, απλή στήριξη ή ελεύθερο και ανάλογα και για το δεξιό άκρο της  $x = L$ .

Στην απόδειξη αυτή θα υποθέσουμε ότι οι δύο διαφορετικές ιδιομορφές  $X_m(x)$  και  $X_n(x)$  στη σχέση ορθογωνιότητας (6.2.17) αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές ιδιοσυχνότητες  $\omega_m$  και  $\omega_n$  της δοκού:  $\omega_m \neq \omega_n$ . Όμως η ιδιότητα ορθογωνιότητας (6.2.17) μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει και στις εξαιρετικά σπάνιες περιπτώσεις δύο διαφορετικών ιδιομορφών  $X_m(x) \neq X_n(x)$  που αντιστοιχούν όμως σε μια πολλαπλή ιδιοσυχνότητα  $\omega_m = \omega_n$ . Φυσικά η παρατήρηση αυτή δεν αφορά

στην αμφιέριστη δοκό, όπου, όπως γνωρίζουμε από την Ενότητα Α9.2, οι ιδιοσυχνότητές της

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.18)$$

(σχέσεις (9.2.33) της Παραγράφου Α9.2.3) είναι σίγουρα διακριτές: διαφορετικές μεταξύ τους.

Πριν προχωρήσουμε στην παρούσα απόδειξη (στην αμέσως επόμενη Παράγραφο Β6.2.4), ας επαναλάβουμε τις τόσο γνωστές μας συνοριακές συνθήκες σε ένα οποιοδήποτε άκρο  $x = a$  συνήθους δοκού. Συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned} X(a) = 0 \quad \text{και} \quad X'(a) = 0 & \quad \text{για πακτωμένο άκρο δοκού,} \\ X(a) = 0 \quad \text{και} \quad X''(a) = 0 & \quad \text{για απλά στηριζόμενο άκρο δοκού: άρθρωση ή κύλιση,} \\ X''(a) = 0 \quad \text{και} \quad X'''(a) = 0 & \quad \text{για ελεύθερο άκρο δοκού.} \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

Εννοείται ότι εξαιτίας του χωρισμού των μεταβλητών (6.2.3):  $v(x, t) = X(x)T(t)$  ισχύουν τα εξής:

1. Η συνοριακή συνθήκη  $X(a) = 0$  εκφράζει μηδενικό βέλος κάμψεως (εγκάρσια, κάθετη μετατόπιση)  $v(a, t) = 0$  στο άκρο αυτό  $x = a$ .
2. Η συνοριακή συνθήκη  $X'(a) = 0$  εκφράζει μηδενική κλίση (ή γωνία κλίσεως  $\theta(a, t) = 0$  ή στροφή) στο άκρο  $x = a$  που θεωρούμε.
3. Η συνοριακή συνθήκη  $X''(a) = 0$  εκφράζει μηδενική ροπή κάμψεως (ή καμπτική ροπή)  $M(a, t) = 0$  στο άκρο  $x = a$  που εξετάζουμε.
4. Τέλος η συνοριακή συνθήκη  $X'''(a) = 0$  εκφράζει μηδενική τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη)  $Q(a, t) = 0$  (ή  $V(a, t) = 0$ ) στο ίδιο άκρο  $x = a$ .

Δεχόμαστε λοιπόν ότι κάποιο ζεύγος από τα τρία ζεύγη συνοριακών συνθηκών (6.2.19) ισχύει για το αριστερό άκρο  $a = 0$  της συνήθους δοκού που μελετάμε, ενώ το ίδιο ή κάποιο άλλο ζεύγος συνοριακών συνθηκών ισχύει για το δεξιό άκρο  $x = L$  της ίδιας δοκού.

#### **Β6.2.4. Απόδειξη της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών**

Μετά από όσα αναφέραμε στην προηγούμενη Παράγραφο Β6.2.3 είμαστε τώρα πια έτοιμοι να προχωρήσουμε στην απόδειξη της ορθογωνιότητας του συστήματος των ιδιομορφών  $X_n(x)$  στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις και στις ελεύθερες ταλαντώσεις μιας συνήθους δοκού. Δηλαδή θα προχωρήσουμε στην απόδειξη της σχέσεως ορθογωνιότητας (6.2.17), την επαναλαμβάνουμε

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x) dx = 0 \quad \text{με } m \neq n \quad \text{και } m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.20)$$

Προς το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη χωρική μας συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.12). Την επαναλαμβάνουμε:

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{με } \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}. \quad (6.2.21)$$

Τη διαφορική αυτή εξίσωση τη γράφουμε για τις δύο ιδιομορφές  $X_m(x)$  και  $X_n(x)$  (με  $m \neq n$ ) ως εξής:

$$X_m''''(x) = \beta_m^4 X_m(x) \quad \text{με } \beta_m = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega_m^2}{EI}}, \quad (6.2.22)$$

$$X_n''''(x) = \beta_n^4 X_n(x) \quad \text{με } \beta_n = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega_n^2}{EI}}. \quad (6.2.23)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, κάνουμε και την υπόθεση ότι οι δύο ιδιοσυχνότητες  $\omega_m$  και  $\omega_n$  που αντιστοιχούν στις δύο βοηθητικές σταθερές  $\beta_m$  και  $\beta_n$  αντίστοιχα είναι διαφορετικές μεταξύ τους. Άρα με την επιπλέον αυτή υπόθεση θα έχουμε

$$\omega_m \neq \omega_n, \quad \text{οπότε και } \beta_m \neq \beta_n. \quad (6.2.24)$$

Είμαστε τώρα πανέτοιμοι να προχωρήσουμε στην απόδειξη της τόσο βασικής στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκών (είτε ελεύθερες είτε εξαναγκασμένες) σχέσεως ορθογωνιότητας (6.2.20).

Προς το σκοπό αυτό πολλαπλασιάζουμε πρώτα και τα δύο μέλη της γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης (6.2.23), που αναφέρεται στην ιδιομορφή  $X_n(x)$ , επί την άλλη ιδιομορφή  $X_m(x)$  (για την ίδια συνήθη δοκό και φυσικά με  $m \neq n$ ). Μετά ολοκληρώνουμε την ίδια συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.23) κατά μήκος της δοκού: από  $x = 0$  μέχρι  $x = L$ . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι

$$\int_0^L X_m(x)X_n''''(x) dx = \beta_n^4 \int_0^L X_m(x)X_n(x) dx. \quad (6.2.25)$$

Επιθυμούμε ασφαλώς να αποδείξουμε πως το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος είναι ίσο με το μηδέν. Δυστυχώς απαιτείται κάποιος κόπος για την κατά τα άλλα ενδιαφέρουσα αυτή απόδειξη.

Στοχεύουμε να φέρουμε το ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους της ίδιας σχέσεως (6.2.25) σε μια πλήρως συμμετρική μορφή και στη συνέχεια να την εκμεταλλευθούμε για την απόδειξή μας. Προς το σκοπό αυτό εκτελούμε μια παραγοντική ολοκλήρωση (ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή κατά μέρη) στο ολοκλήρωμα αυτό. Κατ' αυτόν τον τρόπο χωρίς καμία δυσκολία προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \int_0^L X_m(x)X_n''''(x) dx &= X_m(x)X_n''''(x)|_0^L - \int_0^L X_m'(x)X_n''''(x) dx \\ &= X_m(L)X_n''''(L) - X_m(0)X_n''''(0) - \int_0^L X_m'(x)X_n''''(x) dx. \end{aligned} \quad (6.2.26)$$

Με τον τρόπο αυτό πετύχαμε αντί να έχουμε τη μηδενική παράγωγο  $X_m(x)$  (δηλαδή την ίδια τη συνάρτηση  $X_m(x)$ ) και την τέταρτη παράγωγο  $X_n''''(x)$  (για τη συνάρτηση  $X_n(x)$ ) στην ολοκληρωτέα συνάρτηση  $X_m(x)X_n''''(x)$  να έχουμε τελικά την πρώτη παράγωγο  $X_m'(x)$  καθώς και την τρίτη παράγωγο  $X_n''''(x)$  αντίστοιχα. Μια ακόμη παραγοντική ολοκλήρωση και θα έχουμε οδηγηθεί σε δεύτερες παραγώγους  $X_m''(x)$  και  $X_n''(x)$  και για τις δύο αυτές συναρτήσεις  $X_m(x)$  και  $X_n(x)$  αντίστοιχα. Αυτό θα είναι ένα πραγματικά ενδιαφέρον συμμετρικό αποτέλεσμα.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι ο πρώτος όρος  $X_m(L)X_n''''(L)$  στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.26), ο οποίος αφορά στο δεξιό άκρο  $x = L$  της δοκού, ισούται με το μηδέν. Πραγματικά τρεις μόνο συνηθισμένες περιπτώσεις υπάρχουν για το άκρο αυτό  $x = L$ : (α) Καταρχήν οι δύο πρώτες περιπτώσεις (6.2.19): πακτωμένο άκρο και απλά στηριζόμενο άκρο (άρθρωση ή κύλιση) και οι δυο τους με  $X(a) = 0$ , εδώ με  $X(L) = 0$  στο δεξιό αυτό άκρο  $a = L$  της δοκού: μηδενικό βέλος κάμψεως. Άρα μηδενίζεται ο πρώτος παράγοντας  $X_m(L)$  στο γινόμενο  $X_m(L)X_n''''(L)$  (εξαιτίας της ιδιομορφής  $X_m(x)$  της δοκού μας). (β) Τέλος η τρίτη περίπτωση (6.2.19): ελεύθερο άκρο, αυτή με  $X'''(a) = 0$ , εδώ με  $X'''(L) = 0$  στο δεξιό άκρο  $a = L$  της δοκού που θεωρούμε: μηδενική τέμνουσα δύναμη. Άρα μηδενίζεται ο δεύτερος παράγοντας  $X_n''''(L)$  στο ίδιο γινόμενο  $X_m(L)X_n''''(L)$  (τώρα όμως εξαιτίας της ιδιομορφής  $X_n(x)$  της δοκού μας). Κατά συνέπεια σε κάθε συνηθισμένη περίπτωση του δεξιού άκρου  $x = L$ : (i) πάκτωση, (ii) απλή στήριξη (έδραση): άρθρωση ή κύλιση και (iii) ελεύθερο άκρο ο πρώτος αυτός όρος  $X_m(L)X_n''''(L)$  στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.26) είναι ίσος με το μηδέν. Αυτό συμβαίνει είτε εξαιτίας του πρώτου παράγοντά του  $X_m(L)$  είτε εξαιτίας του δεύτερου  $X_n''''(L)$ .

Είναι προφανές πως απόλυτα ίδια είναι η κατάσταση και με το αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού, εκεί με  $a = 0$ . Στο άκρο αυτό με τον ίδιο ακριβώς τρόπο σκέψεως διαπιστώνουμε άμεσα από τα ζεύγη των συνοριακών συνθηκών (6.2.19) ότι ο όρος  $-X_m(0)X_n''''(0)$  στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.26) είναι και αυτός ίσος με το μηδέν είτε πρόκειται για πάκτωση είτε για απλή στήριξη (άρθρωση ή κύλιση) είτε για ελεύθερο άκρο. Απόλυτα ανάλογη είναι η αιτιολόγηση και του συμπεράσματός μας αυτού.

Επομένως η σχέση (6.2.26) παίρνει τώρα που έχουν μηδενισθεί οι δύο πρώτοι όροι στο δεξιό μέλος της (πριν από το ολοκλήρωμα) την αρκετά απλούστερη μορφή

$$\int_0^L X_m(x)X_n''''(x) dx = - \int_0^L X_m'(x)X_n''''(x) dx. \quad (6.2.27)$$

Στη μορφή αυτή η μηδενική παράγωγος  $X_m(x)$  στην ιδιομορφή  $X_m(x)$  (δηλαδή η ίδια η ιδιομορφή αυτή!) και η τέταρτη παράγωγος  $X_n''''(x)$  στην ιδιομορφή  $X_n(x)$  έχουν πλέον μετατραπεί σε πρώτη παράγωγος  $X_m'(x)$  και σε τρίτη παράγωγος  $X_n'''(x)$  αντίστοιχα.

Με μια ακόμη παραγοντική ολοκλήρωση (ή ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή κατά μέρη), τώρα στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.27), οδηγούμαστε στη συμμετρική περίπτωση δύο δευτέρων παραγώγων στην ολοκληρωτέα συνάρτηση εκεί. Συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^L X_m'(x) X_n'''(x) dx &= X_m'(x) X_n''(x) \Big|_0^L - \int_0^L X_m''(x) X_n''(x) dx \\ &= X_m'(L) X_n''(L) - X_m'(0) X_n''(0) - \int_0^L X_m''(x) X_n''(x) dx, \end{aligned} \quad (6.2.28)$$

οπότε η προηγούμενη σχέση (6.2.27) παίρνει τη μορφή

$$\int_0^L X_m(x) X_n''''(x) dx = -X_m'(L) X_n''(L) + X_m'(0) X_n''(0) + \int_0^L X_m''(x) X_n''(x) dx. \quad (6.2.29)$$

Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι και πάλι στο δεξιό μέλος οι δύο πρώτοι όροι  $-X_m'(L) X_n''(L)$  και  $X_m'(0) X_n''(0)$  είναι ίσοι με το μηδέν. Γιατί; Ας εξετάσουμε πρώτα τον πρώτο όρο  $-X_m'(L) X_n''(L)$  για τις τρεις συνηθισμένες περιπτώσεις του δεξιού αυτού άκρου  $x = L$  της δοκού με συνοριακές συνθήκες (6.2.19): (α) Πρώτα-πρώτα η πρώτη περίπτωση: πακτωμένο άκρο, αυτή με  $X'(a) = 0$ , εδώ με  $X'(L) = 0$  στο δεξιό άκρο  $a = L$  της δοκού που θεωρούμε: μηδενική κλίση (ή γωνία κλίσεως ή στροφή) στο άκρο αυτό. Άρα έχουμε μηδενισμό του όρου (του γινομένου)  $-X_m'(L) X_n''(L)$  από τον πρώτο παράγοντά του  $X_m'(L)$  (εξαιτίας της ιδιομορφής  $X_m(x)$  της δοκού μας). (β) Έπειτα οι δύο άλλες περιπτώσεις: απλά στηριζόμενο άκρο (άρθρωση ή κύλιση) και ελεύθερο άκρο και οι δυο τους με  $X''(a) = 0$ , εδώ με  $X''(L) = 0$  στο δεξιό άκρο  $a = L$  της δοκού: μηδενική ροπή κάμψεως (ή καμπτική ροπή) στο άκρο αυτό. Κατά συνέπεια έχουμε και πάλι μηδενισμό του όρου (του γινομένου)  $-X_m'(L) X_n''(L)$ , τώρα όμως ο μηδενισμός αυτός οφείλεται στο δεύτερο παράγοντά του  $X_n''(L)$  (εξαιτίας της ιδιομορφής  $X_n(x)$  της δοκού μας). Επομένως σε κάθε συνηθισμένη περίπτωση του δεξιού άκρου  $x = L$ : (i) πάκτωση, (ii) απλή στήριξη (έδραση): άρθρωση ή κύλιση και (iii) ελεύθερο άκρο ο πρώτος αυτός όρος  $-X_m'(L) X_n''(L)$  στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.29) ισούται με το μηδέν.

Απόλυτα ίδια είναι ξανά η κατάσταση και με το αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού, εκεί με  $a = 0$ . Στο άκρο αυτό με τον ίδιο ακριβώς τρόπο σκέψεως διαπιστώνουμε άμεσα από τα τρία ζεύγη συνοριακών συνθηκών (6.2.19) ότι ο όρος  $X_m'(0) X_n''(0)$  στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.29) είναι και αυτός ίσος με το μηδέν είτε πρόκειται για πάκτωση είτε για απλή στήριξη είτε για ελεύθερο άκρο. Και πάλι ισχύει η ίδια αιτιολόγηση του συμπεράσματός μας αυτού.

Κατά συνέπεια η σχέση (6.2.29) παίρνει τώρα που μηδενίσθηκαν οι δύο πρώτοι όροι  $-X_m'(L) X_n''(L)$  και επίσης  $X_m'(0) X_n''(0)$  στο δεξιό μέλος της την αρκετά απλούστερη μορφή

$$\int_0^L X_m(x) X_n''''(x) dx = \int_0^L X_m''(x) X_n''(x) dx. \quad (6.2.30)$$

Αυτή είναι και η τελική, η επιθυμητή για μας μορφή. Αυτό συμβαίνει, επειδή ήδη κατορθώσαμε να έχουμε συμμετρική ολοκληρωτέα συνάρτηση στο δεξιό μέλος, αφού προφανώς

$$X_m''(x) X_n''(x) = X_n''(x) X_m''(x), \quad \text{οπότε και} \quad \int_0^L X_m''(x) X_n''(x) dx = \int_0^L X_n''(x) X_m''(x) dx. \quad (6.2.31)$$

Η συμμετρία αυτή θα γίνει εμφανής με την αντικατάσταση του ολοκληρώματος  $\int_0^L X_m(x) X_n''''(x) dx$  στο αριστερό μέλος της βασικής μας σχέσεως (6.2.25) με τη χρήση της σχέσεως (6.2.30), στην οποία καταλήξαμε με τις δύο παραγοντικές ολοκληρώσεις. Έτσι παίρνουμε τελικά από τη σχέση (6.2.25)

$$\int_0^L X_m''(x) X_n''(x) dx = \beta_n^4 \int_0^L X_m(x) X_n(x) dx. \quad (6.2.32)$$

Πρόκειται για μια απόλυτα συμμετρική σχέση (ως προς τους δείκτες  $m$  και  $n$  με  $m, n = 1, 2, \dots$ ) και τις δύο ολοκληρωτέες συναρτήσεις: (α)  $X_m''(x)X_n''(x) = X_n''(x)X_m''(x)$  (στο ολοκλήρωμα του αριστερού μέλους) και (β)  $X_m(x)X_n(x) = X_n(x)X_m(x)$  (στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους).

Αντίθετα δεν υπάρχει καθόλου συμμετρία ως προς τη σταθερά  $\beta_n$ , εδώ υψωμένη στην τέταρτη δύναμη:  $\beta_n^4$ . Συγκεκριμένα στη σχέση αυτή (6.2.32) παρουσιάζεται μόνο η σταθερά  $\beta_n$ , αλλ' όχι και η σταθερά  $\beta_m$ . Εμείς όμως καμία απολύτως διάκριση δεν έχουμε κάνει ανάμεσα στις δύο ιδιομορφές καμπτικών ταλαντώσεων  $X_m(x)$  και  $X_n(x)$ . Και οι δυο τους είναι δύο εξίσου αποδεκτές ιδιομορφές για την παρούσα δοκό μας υπό δυναμική καμπτική καταπόνηση. Μπορούμε επομένως θαυμάσια να θεωρήσουμε την ίδια ακριβώς σχέση (6.2.32) να ισχύει (α) με την  $n$ -ιδιομορφή  $X_n(x)$  αντί για την  $m$ -ιδιομορφή  $X_m(x)$  και επίσης (β) με την  $m$ -ιδιομορφή  $X_m(x)$  αντί για την  $n$ -ιδιομορφή  $X_n(x)$ . Δηλαδή απλά θέτουμε στη σχέση αυτή (α)  $n$  αντί  $m$  και επίσης (β)  $m$  αντί  $n$ . Επομένως εναλλάσσουμε τους δύο δείκτες  $m$  και  $n$ . Τότε βέβαια θα πρέπει να θέσουμε και  $\beta_m^4$  αντί για  $\beta_n^4$  στο δεξιό μέλος.

Με την εναλλαγή λοιπόν των δύο δεικτών  $m$  και  $n$  η ίδια θεμελιώδης σχέση (6.2.32) ξαναγράφεται στη μορφή

$$\int_0^L X_n''(x)X_m''(x) dx = \beta_m^4 \int_0^L X_n(x)X_m(x) dx. \quad (6.2.33)$$

Με τη χρήση μάλιστα της τόσο στοιχειώδους και προφανούς αντιμεταθετικής ιδιότητας στον απλό πολλαπλασιασμό δύο αριθμών, εδώ στα γινόμενα των ολοκληρωτέων συναρτήσεων:

$$X_n''(x)X_m''(x) = X_m''(x)X_n''(x) \quad \text{και επίσης} \quad X_n(x)X_m(x) = X_m(x)X_n(x) \quad (6.2.34)$$

έχουμε τελικά

$$\int_0^L X_m''(x)X_n''(x) dx = \beta_m^4 \int_0^L X_m(x)X_n(x) dx. \quad (6.2.35)$$

Οδηγηθήκαμε έτσι σε ένα παράξενο συμπέρασμα: πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα και οι δύο σχέσεις (6.2.32) και (6.2.35). Είναι σχεδόν ολοίδιες. Η μόνη διαφορά τους έγκειται στο γεγονός ότι η πρώτη έχει  $\beta_n^4$  στο δεξιό μέλος της, ενώ η δεύτερη έχει  $\beta_m^4$  στο ίδιο μέλος της. Αφαιρώντας τις κατά μέλη (τα αριστερά μέλη τους έτσι κι αλλιώς συμπίπτουν), οδηγούμαστε στο αποτέλεσμα

$$0 = (\beta_n^4 - \beta_m^4) \int_0^L X_m(x)X_n(x) dx. \quad (6.2.36)$$

Έχουμε όμως υποθέσει από την αρχή πως οι δύο ιδιοσυχνότητες καμπτικών ταλαντώσεων  $\omega_m$  και  $\omega_n$  είναι διαφορετικές μεταξύ τους:  $\omega_m \neq \omega_n$ . Η υπόθεση αυτή μας έχει οδηγήσει και στο συμπέρασμα ότι και οι δύο σταθερές  $\beta_m$  και  $\beta_n$  είναι και αυτές διαφορετικές μεταξύ τους:  $\beta_m \neq \beta_n$ . Τα έχουμε ήδη σημειώσει αυτά στις ανισότητες (6.2.24). Καιρός είναι να τα χρησιμοποιήσουμε στη σχέση μας (6.2.36), στην οποία με τόσο κόπο καταλήξαμε. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε μέχρι στιγμής: (α) δύο παραγοντικές ολοκληρώσεις (ή ολοκληρώσεις κατά παράγοντες ή κατά μέρη) και επίσης (β) τα τρία ζεύγη συνοριακών συνθηκών (6.2.19) στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού μας (είτε πακτωμένο είτε απλά στηριζόμενο είτε ελεύθερο άκρο).

Πραγματικά με  $\beta_m \neq \beta_n$  η τελευταία σχέση μας (6.2.36) καταλήγει άμεσα στην τελική της και τόσο σημαντική στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκών (είτε ελεύθερες είτε εξαναγκασμένες) μορφή

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.37)$$

Αυτή είναι η σχέση ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) των ιδιομορφών  $X_m(x)$  (με  $m = 1, 2, \dots$ ), την οποία αποδείξαμε. Πρόκειται για μια σχέση θεμελιώδους σημασίας. Θα έχουμε την ευκαιρία να τη χρησιμοποιήσουμε εκτενώς παρακάτω κατά την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού. Αυτό θα το κάνουμε μάλιστα είτε (α) σε ελεύθερες ταλαντώσεις: χωρίς καθόλου κατανεμημένη κάθετη εξωτερική φόρτιση  $p(x, t)$ , δηλαδή με  $p(x, t) \equiv 0$ , ομογενής εξίσωση (6.2.2), είτε (β) σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις: εκεί με κατανεμημένη κάθετη εξωτερική φόρτιση  $p(x, t)$ , δηλαδή με  $p(x, t) \neq 0$ , μη ομογενής εξίσωση (6.2.1).

Στο σημείο αυτό είναι βέβαια σκόπιμο να ξαναθυμηθούμε τον ορισμό

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = 0 \quad (6.2.38)$$

της ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) δύο διαφορετικών συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$  στο διάστημα  $[a, b]$ . Στη θεμελιώδους σημασίας αυτή έννοια της ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) συναρτήσεων είχαμε την ευκαιρία να αναφερθούμε στην Ενότητα Α16.1 του Κεφαλαίου Α16 στο βιβλίο για τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ. Εκεί, και συγκεκριμένα στην Παράγραφο Α16.1.2, κάναμε επίσης ρητή αναφορά και σε πέντε συστήματα (σύνολα) ορθογωνίων πολυωνύμων: (α) Legendre  $P_n(x)$ , (β και γ) Chebyshev πρώτου είδους  $T_n(x)$  και δευτέρου είδους  $U_n(x)$ , (δ) Laguerre  $L_n(x)$  και (ε) Hermite  $H_n(x)$ . Παραπέρα στο ίδιο Κεφάλαιο Α16 χρησιμοποιήσαμε την έννοια της ορθογωνιότητας στις τόσο πια γνωστές μας σειρές Fourier με πάρα πολλές παραπέρα εφαρμογές. Στο παρόν βιβλίο για τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ είδαμε τέτοιες εφαρμογές στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β5 στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, αλλά και στην προηγούμενη Ενότητα Β6.1 του παρόντος Κεφαλαίου Β6 στις αξονικές (ή διαμήκειες) ταλαντώσεις ράβδου.

Εδώ με βάση τον ορισμό της ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) (6.2.38) απλά διαπιστώνουμε ότι οι ορθογώνιες συναρτήσεις δεν περιορίζονται σε λίγο-πολύ μαθηματικές συναρτήσεις, αλλά επεκτείνονται και σε συναρτήσεις με καθαρά φυσική προέλευση στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Τέτοιες συναρτήσεις είναι εδώ οι ιδιομορφές (καλύτερα οι ιδιομορφές καμπτικών ταλαντώσεων)  $X_n(x)$  με  $n = 1, 2, \dots$ . Και αυτές αποτελούν ένα σύστημα ορθογωνίων (ή ορθογωνικών) συναρτήσεων. Το ίδιο ακριβώς έχουμε δει πως συμβαίνει (α) με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο στις τριγωνομετρικές σειρές Fourier, (β) με τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση στις μιγαδικές ή εκθετικές σειρές Fourier και (γ) με τα πέντε συστήματα ορθογωνίων πολυωνύμων που αναφέραμε λίγο προηγουμένως.

Στο σημείο αυτό ας κάνουμε επίσης μια πολύ σημαντική παρατήρηση. Με τη βασική σχέση ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) (6.2.37) να ισχύει το σχετικό ολοκλήρωμα για δύο διαφορετικές ιδιομορφές  $X_m(x)$  και  $X_n(x)$  θα είναι ίσο με το μηδέν. Τότε όμως, όπως άμεσα παρατηρούμε από τη σχέση (6.2.32) ή (6.2.35) (το ίδιο κάνει!), και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα των δευτέρων παραγώγων τους  $X_m''(x)$  και  $X_n''(x)$  αντίστοιχα θα είναι και αυτό ίσο με το μηδέν. Δηλαδή ισχύει ότι

$$\int_0^L X_m''(x)X_n''(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά και πάλι με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.39)$$

Επομένως όχι μόνο οι ιδιομορφές  $X_n(x)$ , αλλά και οι δεύτερες παράγωγοί τους  $X_n''(x)$  αποτελούν συστήματα ορθογωνίων συναρτήσεων σε καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού. Και μάλιστα για οποιουδήποτε συνδυασμούς συντοριακών συνθηκών στα δύο άκρα της. Ένα τέτοιο άκρο μπορεί να είναι είτε (α) πακτωμένο είτε (β) απλά στηριζόμενο (άρθρωση ή κύλιση) είτε (γ) ελεύθερο, όπως έχουμε ήδη αναφέρει. Οι δύο συνθήκες ορθογωνιότητας (6.2.37) και (6.2.39) ισχύουν σε κάθε περίπτωση: (α) αμφίπακτη δοκό, (β) αμφιέριστη δοκό, (γ) δοκό με πακτωμένο το ένα άκρο της και ελεύθερο το άλλο και (δ) πρόβολο. Αυτά είναι τα στατικά αποδεκτά είδη συνήθων δοκών, όπου δεν έχουμε ενδιάμεσες στηρίξεις της δοκού.

Υπάρχουν όμως και στατικά απαράδεκτες συνθήκες δοκοί. Αυτές είναι (ε) η δοκός με το ένα άκρο της αρθρωμένο και το άλλο ελεύθερο και (στ) η δοκός και με τα δύο άκρα της ελεύθερα. Προφανώς τέτοιες δοκοί δεν παρουσιάζονται στις συνθήκες κατασκευές, αλλά γενικά μιλώντας είναι αποδεκτές σε δυναμικά φαινόμενα που διέπονται από τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.2) (χωρίς εξωτερική φόρτιση:  $p(x, t) \equiv 0$ ) και γενικότερα (6.2.1) (με εξωτερική φόρτιση:  $p(x, t) \neq 0$ ) των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού. Και σ' αυτές τις δοκούς ισχύουν ακριβώς οι ίδιες συνθήκες ορθογωνιότητας (6.2.37) για τις ιδιομορφές τους  $X_n(x)$  και (6.2.39) για τις δεύτερες παραγώγους  $X_n''(x)$  των ιδιομορφών τους  $X_n(x)$ . Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω μόνο τις συνθήκες ορθογωνιότητας (6.2.37) για τις ίδιες τις ιδιομορφές  $X_n(x)$ .



Παρενθετικά ας σημειώσουμε επίσης ότι παίρνοντας υπόψη μας τις σχέσεις (6.2.25) και (6.2.37), διαπιστώνουμε επιπλέον ότι

$$\int_0^L X_m(x) X_n''''(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά ξανά με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.40)$$

Δηλαδή και οι συναρτήσεις  $X_m(x)$  και  $X_n''''(x)$  με  $m \neq n$  είναι και αυτές ορθογώνιες κατά μήκος της συνήθους δοκού μας. Δεν υπάρχει όμως σχετικό σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων, επειδή έχουμε την ιδιομορφή  $X_m(x)$  και την τέταρτη παράγωγο  $X_n''''(x)$  της ιδιομορφής  $X_n(x)$ . Έτσι κι αλλιώς δεν είναι πρακτικά σημαντικές οι σχέσεις ορθογωνιότητας (6.2.40). Κλείνει η παρένθεση αυτή.

Ακολουθούν τρεις πολύ σημαντικές παρατηρήσεις για τον Πολιτικό Μηχανικό στην Επιστήμη του, εδώ φυσικά στην περιοχή της Δυναμικής των Κατασκευών:

► **Παρατήρηση Β6.5:** Οι πιο πάνω σχέσεις ορθογωνιότητας των ιδιομορφών  $X_n(x)$  γενικεύονται και στην περίπτωση που η δυσκαμψία  $EI$  ή/και η γραμμική πυκνότητα  $\rho A$  της δοκού δεν είναι σταθερές (η μία ή η άλλη ή/και οι δύο μαζί) κατά μήκος της. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβαίνει, π.χ., σε δοκό ορθογωνικής διατομής με μεταβλητό ύψος  $h = h(x)$  της ορθογωνικής διατομής της κατά μήκος της δοκού, όπως σε δοκό που στηρίζει εγκάρσια έναν εξώστη (μπαλκόνι). Σε τέτοιες περιπτώσεις είναι εύλογο να έχουμε μεγαλύτερο ύψος μιας δοκού στηρίξεως του εξώστη προς το μέρος του κτιρίου (προς τα μέσα) παρά προς το μέρος του δρόμου ή του ακάλυπτου χώρου (προς τα έξω). Φυσικά μια τέτοια δοκός δεν είναι συνήθης δοκός με την έννοια που εμείς έχουμε αποδώσει στον όρο αυτό. Η σχετική απόδειξη της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών  $X_n(x)$  αποτελεί απλά γενίκευση της προηγούμενης αποδείξεως (με την ίδια ακριβώς μεθοδολογία) τώρα όμως με μεταβλητή τη δυσκαμψία  $EI$ :  $EI = EI(x)$  ή/και τη γραμμική πυκνότητα  $\rho A$ :  $\rho A = \rho A(x)$  της δοκού. Αποδεικνύεται έτσι ότι η βασική σχετική συνθήκη ορθογωνιότητας (6.2.37) παίρνει τώρα τη μορφή

$$\int_0^L \rho A(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0 \quad \text{πάλι με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.41)$$

Στη συνθήκη αυτή η μεταβλητή γραμμική πυκνότητα  $\rho A(x)$  της δοκού κατά μήκος της αποτελεί ουσιαστικά τη **συνάρτηση βάρους**  $w(x) = \rho A(x)$ . Αν και εδώ θα περιορισθούμε σε συνήθεις δοκούς με τη γραμμική πυκνότητα  $\rho A$  σταθερή, είναι εντούτοις σκόπιμο να γνωρίζουμε την ενδιαφέρουσα αυτή γενίκευση. Ανάλογα μπορεί να αποδειχθεί ότι οι συνθήκες ορθογωνιότητας (6.2.39) για τις δεύτερες παραγώγους  $X_n''(x)$  των ιδιομορφών  $X_n(x)$  παίρνουν τώρα τις γενικευμένες μορφές τους

$$\int_0^L EI(x) X_m''(x) X_n''(x) dx = 0 \quad \text{ξανά με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.42)$$

Σημειώνουμε ότι εδώ έχουμε σαν συνάρτηση βάρους  $w(x)$  τη συνάρτηση  $EI(x)$ , δηλαδή τη μεταβλητή δυσκαμψία της δοκού (μη συνήθους δοκού με την ορολογία που υιοθετήσαμε) κατά μήκος της.

Παρενθετικά ας σημειωθεί και πάλι ότι ο μαθηματικά σωστός συμβολισμός για τη γραμμική πυκνότητα της δοκού είναι  $\rho(x)A(x)$  ή  $\mu(x)$  (με  $\mu(x) := \rho(x)A(x)$ ) και όχι  $\rho A(x)$ . Εντούτοις συνήθως και ο συμβολισμός αυτός  $\rho A(x)$  για τη γραμμική πυκνότητα δεν προκαλεί σύγχυση στον Πολιτικό Μηχανικό. Ανάλογα ισχύουν και για μεταβλητή δυσκαμψία (ή μέτρο δυσκαμψίας)  $EI(x)$  με σωστό συμβολισμό τον  $E(x)I(x)$  ή ισοδύναμα  $D(x)$  με  $D(x) := E(x)I(x)$  να δηλώνει τη δυσκαμψία της δοκού.

► **Παρατήρηση Β6.6:** Η πιο πάνω απόδειξη της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών στη σχέση (6.2.37), την επαναλαμβάνουμε και εδώ (είναι τόσο μα τόσο σημαντική για τον Πολιτικό Μηχανικό!):

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (6.2.43)$$

βασίσθηκε σε μαθηματική απόδειξη. Συγκεκριμένα βασίσθηκε: (α) στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.2) των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων ταλαντώσεων συνήθους

δοκού και στη σχετική χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.12), (β) στην παραγοντική ολοκλήρωση στον Ολοκληρωτικό Λογισμό και (γ) στις κλασικές συνοριακές συνθήκες στα άκρα δοκών. Εντούτοις είναι δυνατόν η ίδια απόδειξη να βασισθεί και στη Μηχανική, συγκεκριμένα στο θεώρημα της αμοιβαιότητας των Betti–Maxwell. Στην απόδειξη αυτή το έργο των αδρανειακών δυνάμεων του  $m$  τρόπου ιδιοταλαντώσεως της δοκού πάνω στην ελαστική γραμμή της του  $n$  τρόπου ιδιοταλαντώσεως της ίδιας δοκού είναι ίσο με το αντίστοιχο έργο με εναλλαγή των  $m$  και  $n$  στους τρόπους ταλαντώσεως της δοκού. Η εναλλακτική αυτή απόδειξη είναι πολύ ενδιαφέρουσα από φυσικής απόψεως, πραγματικά χρησιμοποιείται μερικές φορές σε συγγράμματα της Δυναμικής των Κατασκευών και είναι εξαιρετικά απλή ουσιαστικά με πολύ μικρή αναγκαιότητα υπολογισμών. Θα μπορούσε έτσι να έχει ευρύτερη υιοθέτηση, αλλ' η φυσική βάση της δεν είναι τόσο σαφής στο παρόν δυναμικό πρόβλημα ταλαντώσεων, ιδιαίτερα σε μάθημα μόλις του τρίτου εξαμήνου σπουδών. Έτσι στο παρόν μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III προτιμήθηκε η μαθηματική απόδειξη, ακριβώς όπως συμβαίνει και στα περισσότερα συγγράμματα Δυναμικής των Κατασκευών.

► **Παρατήρηση Β6.7:** Όλες αυτές οι πιο πάνω σχέσεις ορθογωνιότητας ισχύουν για  $m \neq n$ : για δύο διαφορετικές ιδιομορφές  $X_m(x)$  και  $X_n(x)$ . Για  $m = n$  ασφαλώς και δεν περιμένουμε να ισχύει η ορθογωνιότητα της ιδιομορφής  $X_n(x)$  με τον εαυτό της. Κάτι τέτοιο θα ήταν σοβαρό σφάλμα μας και θα οδηγούσε σε τραγικά υπολογιστικά λάθη. Στην ειδική αυτή περίπτωση απλά θα έχουμε

$$N_n := \int_0^L X_n^2(x) dx \neq 0 \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.44)$$

Οι προφανώς θετικές ποσότητες  $N_n$  που ορίστηκαν στην προηγούμενη σχέση (6.2.44) καλούνται **νόρμες των ιδιομορφών ταλαντώσεων**. Όμως η λέξη νόρμα, που έχει γενικά μαθηματική και όχι φυσική σημασία, δεν είναι και πολύ αρεστή στον Πολιτικό Μηχανικό, ο οποίος είναι εξοικειωμένος με πιο φυσικές έννοιες. Για το λόγο αυτό ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί γενικά αντί για τις νόρμες  $N_n$  των ιδιομορφών ταλαντώσεως  $X_n(x)$  τις ποσότητες  $M_n := \rho A N_n$ , δηλαδή τις ποσότητες

$$M_n = \rho A \int_0^L X_n^2(x) dx \neq 0 \quad \text{πάλι με} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.2.45)$$

ακόμη και όταν μελετάει συνήθεις δοκούς. Με  $\rho A$  τη γραμμική πυκνότητα της συνήθους δοκού, τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  αδιάστατες συναρτήσεις και ολοκλήρωση κατά μήκος της δοκού ( $0 \leq x \leq L$ ) είναι προφανές ότι η φυσική διάσταση των νέων αυτών ποσοτήτων  $M_n$  είναι απλά γραμμική πυκνότητα (μάζα ανά μονάδα μήκους της δοκού) επί μήκος και κατά συνέπεια τελικά μάζα. Οι ποσότητες αυτές  $M_n$  καλούνται στη Δυναμική των Κατασκευών **γενικευμένες μάζες**. Η πρακτική χρησιμότητά τους θα φανεί παρακάτω στην παρούσα ενότητα (προς το τέλος της), μια ενότητα που είναι εξ ολοκλήρου αφιερωμένη στις καμπτικές ταλαντώσεις συνήθων δοκών. Φυσικά, όταν η δοκός έχει μεταβλητή γραμμική πυκνότητα  $\rho A(x)$  κατά μήκος της, η χρήση των γενικευμένων μαζών  $M_n$  (αντί για τις νόρμες  $N_n$ ) είναι απόλυτα αναγκαία και μάλιστα με το  $\rho A(x)$  μέσα στο ολοκλήρωμα (6.2.45).

Τελειώνοντας την παράγραφο αυτή για την ορθογωνιότητα των ιδιομορφών καμπτικών ταλαντώσεων δοκού, ας σημειώσουμε ότι στην ειδική (και εξαιρετικά απλή) περίπτωση της αμφιέρειστης δοκού οι ιδιομορφές ταλαντώσεων  $X_n(x)$  δίνονται από τις απλές ημιτονικές σχέσεις (6.2.16):  $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ . Το τόσο απλό αυτό αποτέλεσμα το ξέρουμε καλά ήδη από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II: Παράγραφος Α9.2.3, σχέσεις (9.2.34), όπου είχαμε λύσει το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών. Στην ειδική αυτή περίπτωση της αμφιέρειστης δοκού η ισχύς των παραπάνω ιδιοτήτων ορθογωνιότητας των ιδιομορφών, κυρίως της βασικής ιδιότητας (6.2.43), είναι προφανής. Αυτό συμβαίνει, επειδή οι συναρτήσεις  $\sin(n\pi x/L)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) αποτελούν ένα σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων. Τούτο το γνωρίζουμε ήδη πολύ καλά και είχαμε την ευκαιρία να το αποδείξουμε στην Παράγραφο Β6.1.9 για τις αξονικές ταλαντώσεις αμφίπακτης ράβδου.

Στην επόμενη Παράγραφο Β6.2.5 θα εξετάσουμε τη δυσκολότερη περίπτωση ιδιομορφών  $X_n(x)$  που παρουσιάζονται σε μια συνήθη δοκό με πάκτωση στο αριστερό άκρο της και κύλιση στο δεξιό.

**B6.2.5. Προσδιορισμός των ιδιομορφών ταλαντώσεως δοκού****B6.2.5.1. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών**

Έχουμε ήδη μελετήσει στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II στην Ενότητα A9.2 τις ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  αμφιέριστης δοκού μήκους  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ), που δίνονται από τις απλές σχέσεις

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.46)$$

Τη μελέτη των ιδιομορφών αυτών  $X_n(x)$  την κάναμε στα πλαίσια ενός προβλήματος συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις χωρίς καμία απολύτως αναφορά στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.2). Χρησιμοποιήσαμε όμως, όπως και έπρεπε, τη σχετική χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.12) και μάλιστα έτοιμη, γνωστή. Φυσικά χρησιμοποιήσαμε επίσης και το δεύτερο ζεύγος συνοριακών συνθηκών (6.2.19) (που αφορά σε απλά στηριζόμενο άκρο δοκού) και για τα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της αμφιέριστης δοκού. Είναι προφανές ότι οι ιδιομορφές (6.2.46) είναι πολύ απλές και αυτό είναι ιδιαίτερα ευνοϊκό για την επίλυση της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους των καμπτικών ταλαντώσεων δοκού είτε (α) ελεύθερων: εξίσωση (6.2.2), είτε (β) εξαναγκασμένων: εξίσωση (6.2.1). Στην επίλυση αυτή (γενικά για κάθε συνήθη δοκό, όχι μόνο για την αμφιέριστη δοκό) θα προχωρήσουμε στην επόμενη Παράγραφο Β6.2.6, που θα είναι και η τελευταία αυτής της Ενότητας Β6.2.

Σε τούτη την Παράγραφο Β6.2.5 θα αναφερθούμε σε μια πιο δύσκολη περίπτωση συνοριακών συνθηκών στη συνήθη δοκό μήκους  $L$  ( $0 \leq x \leq L$ ) που εξετάζουμε. Συγκεκριμένα θα αναφερθούμε στη δοκό με πακτωμένο το αριστερό άκρο της  $x = 0$  και με κύλιση το δεξιό  $x = L$ . (Μερικές φορές μια τέτοια δοκός καλείται μονόπακτη δοκός, επειδή έχει μία μόνο πάκτωση, σε αντίθεση με τον καθιερωμένο όρο αμφίπακτη δοκός. Εδώ δε θα υιοθετήσουμε τον όρο μονόπακτη δοκός.) Ο προσδιορισμός των ιδιομορφών ταλαντώσεως  $X_n(x)$  αυτής της δοκού θα βασίζεται και πάλι στην ίδια γενική λύση (6.2.15) της γνωστής μας χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως (6.2.12). Την αναφέρουμε και εδώ

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad \text{με} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}. \quad (6.2.47)$$

Επαναλαμβάνουμε επίσης και τη γενική λύση (6.2.15) που προαναφέραμε:

$$X(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x. \quad (6.2.48)$$

Η διαφορά εδώ από την αμφιέριστη δοκό είναι απλά οι διαφορετικές συνοριακές συνθήκες στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της παρούσας συνήθους δοκού μας με πάκτωση-κύλιση: πάκτωση στο αριστερό άκρο και κύλιση στο δεξιό. Συγκεκριμένα στη δοκό μας αυτή διαπιστώνουμε εύκολα από το πρώτο και το δεύτερο ζεύγος συνοριακών συνθηκών (6.2.19) (πακτωμένο άκρο και απλά στηριζόμενο άκρο αντίστοιχα) ότι θα έχουμε τις εξής συνοριακές συνθήκες:

$$X(0) = 0 \quad \text{και} \quad X'(0) = 0 \quad \text{στο αριστερό άκρο της δοκού} \quad x = 0 \quad (\text{με την πάκτωση}), \quad (6.2.49)$$

$$X(L) = 0 \quad \text{και} \quad X''(L) = 0 \quad \text{στο δεξιό άκρο της δοκού} \quad x = L \quad (\text{με την κύλιση}). \quad (6.2.50)$$

Παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά από την αμφιέριστη δοκό είναι ότι εδώ στο αριστερό άκρο  $x = 0$  ισχύει η συνθήκη  $X'(0) = 0$  αντί για τη συνθήκη  $X''(0) = 0$ , που ίσχυε στην αμφιέριστη δοκό (μηδενική κλίση αντί για μηδενική καμπτική ροπή). Οι άλλες τρεις συνοριακές συνθήκες είναι ίδιες.

Είμαστε λοιπόν έτοιμοι να προσδιορίσουμε τις τέσσερις σταθερές  $A, B, C$  και  $D$  στη λύση (6.2.48) της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως (6.2.47), έτσι ώστε να πληρούνται ταυτόχρονα και οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες (6.2.49) και (6.2.50). Είναι πραγματοποιήσιμο αυτό. Εντούτοις, όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, οι ιδιομορφές καμπτικών ταλαντώσεων  $X_n(x)$ , οι οποίες

θα προκύψουν για την παρούσα δοκό με πάκτωση-κύλιση στα δύο άκρα της  $x = 0$  και  $x = L$  αντίστοιχα, είναι πολύ πολυπλοκότερες από τις απλές ημιτονικές ιδιομορφές ταλαντώσεων (6.2.46):  $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ . Αυτές ισχύουν στην αμφιέριστη δοκό. Καμία άλλη δοκός δεν παρουσιάζει τόσο απλές ιδιομορφές: ούτε η παρούσα δοκός με άρθρωση-κύλιση στα άκρα της ούτε η αμφίπακτη δοκός ούτε ο πρόβολος ούτε η απόλυτα ελεύθερη δοκός. Στ' αλήθεια καμία άλλη δοκός!

Σαν πρώτη δυνατότητα στον πιο πάνω στόχο μας έχουμε εκείνη που θα οδηγήσει τελικά στο μηδενισμό μιας οριζουσας δευτέρας τάξεως  $D_2 = 0$ , όπως θα δούμε στο αμέσως επόμενο εδάφιο.

### Β6.2.5.2. Χρήση οριζουσας δευτέρας τάξεως

Ξεκινάμε λοιπόν το έργο μας και μάλιστα από το αριστερό άκρο  $x = 0$  της παρούσας δοκού με συνοριακές συνθήκες τις (6.2.49). Εφαρμόζοντας πρώτα την πρώτη συνοριακή συνθήκη  $X(0) = 0$  (μηδενικό βέλος κάμψεως στο άκρο αυτό  $x = 0$ ), διαπιστώνουμε από τη γενική λύση (6.2.48) ότι θα πρέπει να έχουμε

$$X(0) = A + C = 0, \quad \text{οπότε} \quad C = -A, \quad (6.2.51)$$

αφού ξέρουμε πολύ καλά πως

$$\cosh 0 = \cos 0 = 1 \quad \text{και επίσης} \quad \sinh 0 = \sin 0 = 0. \quad (6.2.52)$$

Προσδιορίστηκε επομένως η μία σταθερά της γενικής λύσεώς μας (6.2.48): η σταθερά  $C$ . Ας την αντικαταστήσουμε λοιπόν στη λύση (6.2.48), η οποία παίρνει τώρα (με  $C = -A$ ) τη μορφή

$$X(x) = A(\cosh \beta x - \cos \beta x) + B \sinh \beta x + D \sin \beta x. \quad (6.2.53)$$

Συνεχίζουμε με τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη  $X'(0) = 0$  (μηδενική κλίση ή στροφή στο ίδιο πακτωμένο άκρο  $x = 0$ ), που είναι προφανής και αυτή λόγω της πακτώσεως της δοκού μας στο άκρο αυτό  $x = 0$ . Παραγωγίζουμε μία φορά τη σχέση (6.2.53) και βρίσκουμε αμέσως ότι

$$X'(x) = A\beta(\sinh \beta x + \sin \beta x) + B\beta \cosh \beta x + D\beta \cos \beta x. \quad (6.2.54)$$

Θέτουμε τώρα στην παράγωγο αυτή  $x = 0$  και εφαρμόζουμε τη συνοριακή συνθήκη  $X'(0) = 0$ , που προαναφέραμε. Διαπιστώνουμε έτσι με τη χρήση και των τόσο γνωστών μας τιμών (6.2.52) ότι

$$X'(0) = B\beta + D\beta = (B + D)\beta = 0, \quad \text{οπότε} \quad D = -B, \quad (6.2.55)$$

αφού σε ταλαντώσεις  $\omega > 0$  άρα και  $\beta > 0$  με βάση τη δεύτερη σχέση (6.2.47), που ορίζει το  $\beta$ .

Προσδιορίστηκε συνεπώς και μια δεύτερη σταθερά της γενικής λύσεως (6.2.48): η σταθερά  $D$ . Αντικαθιστούμε την τιμή της  $D = -B$  στη λύση (6.2.53), η οποία γράφεται τώρα στη μορφή

$$X(x) = A(\cosh \beta x - \cos \beta x) + B(\sinh \beta x - \sin \beta x). \quad (6.2.56)$$

Έχουν απομείνει δύο μόνο σταθερές στη λύση αυτή  $X(x)$ : οι σταθερές  $A$  και  $B$ . (Επομένως δεν είναι πια γενική λύση!) Ας υπολογίσουμε και τις δύο πρώτες παραγώγους της  $X'(x)$  και  $X''(x)$ , που έτσι κι αλλιώς θα τις χρειασθούμε αμέσως παρακάτω δουλεύοντας στο δεξιό άκρο  $x = L$  της δοκού: στο άκρο με την κύλιση. Πολύ εύκολα προκύπτουν οι δύο αυτές παράγωγοι

$$X'(x) = A\beta(\sinh \beta x + \sin \beta x) + B\beta(\cosh \beta x - \cos \beta x), \quad (6.2.57)$$

$$X''(x) = A\beta^2(\cosh \beta x + \cos \beta x) + B\beta^2(\sinh \beta x + \sin \beta x). \quad (6.2.58)$$

Στο σημείο αυτό ας πάρουμε μια βαθιά ανάσα επαληθεύοντας εύκολα την πλήρωση και των δύο συνοριακών συνθηκών  $X(0) = 0$  και  $X'(0) = 0$  από τις σχέσεις (6.2.56) και (6.2.57) αντίστοιχα. Επομένως σωστά προχωράμε μέχρι στιγμής τουλάχιστον!

Ας συνεχίσουμε τώρα με το δεξιό άκρο  $x = L$  της παρούσας δοκού με πάκτωση-κύλιση στα δύο άκρα της  $x = 0$  και  $x = L$  αντίστοιχα. Ξαναθυμίζουμε τις σχετικές συνοριακές συνθήκες (6.2.50): μηδενικό βέλος κάμψεως:  $X(L) = 0$ , και επίσης μηδενική καμπτική ροπή:  $X''(L) = 0$ . Ξεκινάμε με την πρώτη:  $X(L) = 0$ . Η λύση μας  $X(x)$  στη σχέση (6.2.56) μας δίνει απλά θέτοντας σ' αυτήν  $x = L$

$$X(L) = A(\cosh \beta L - \cos \beta L) + B(\sinh \beta L - \sin \beta L) = 0. \quad (6.2.59)$$

Προχωράμε τώρα και στην τελευταία συνθήκη  $X''(L) = 0$  στο δεξιό άκρο  $x = L$  της δοκού μας με πάκτωση-κύλιση. Η δεύτερη παράγωγος  $X''(x)$  στη σχέση (6.2.58) της μέχρι τώρα λύσεως  $X(x)$  μας δίνει για  $x = L$

$$X''(L) = A\beta^2(\cosh \beta L + \cos \beta L) + B\beta^2(\sinh \beta L + \sin \beta L) = 0. \quad (6.2.60)$$

Έχουμε λοιπόν καταγράψει τις δύο συνοριακές συνθήκες (6.2.59) (για μηδενικό βέλος κάμψεως) και (6.2.60) (για μηδενική καμπτική ροπή) στο δεξιό άκρο  $x = L$  της δοκού. Επομένως για τους συντελεστές  $A$  και  $B$  που έχουν απομείνει στη μέχρι τώρα λύση μας (6.2.56), που φιλοδοξούμε με εύλογο επιπλέον κόπο να τη μετατρέψουμε στις ζητούμενες ιδιομορφές  $X_n(x)$ , έχουμε ένα σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών (όχι διαφορικών!) εξισώσεων με δύο αγνώστους: τις δύο σταθερές  $A$  και  $B$ . Τούτο είναι το σύστημα των εξισώσεων (6.2.59) και (6.2.60). Ας εστιάσουμε την προσοχή μας στο σύστημα αυτό. Δεν είναι δα και κανένα τόσο φοβερό σύστημα! Προχωράμε λοιπόν!

Το πρόβλημά μας είναι ότι το σύστημα αυτών των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (6.2.59) και (6.2.60) είναι ομογενές, κάτι που φαίνεται αμέσως από τα μηδενικά δεξιά μέλη του. Επομένως γενικά μιλώντας, η λύση που καταρχήν έχει είναι η τετριμμένη λύση, η μηδενική λύση  $A = B = 0$ . Και πράγματι γενικά αυτή είναι η λύση του συστήματος που προαναφέραμε. Παραπέρα η λύση αυτή οδηγεί βέβαια από τη σχέση (6.2.56) και στην αντίστοιχη τετριμμένη (μηδενική) λύση

$$X(x) \equiv 0 \quad \text{για} \quad A = B = 0 \quad (6.2.61)$$

για τη χωρική συνάρτηση  $X(x)$  στο χωρισμό των δύο μεταβλητών (6.2.3):  $v(x, t) = X(x)T(t)$ . Τότε θα ισχύει και  $v(x, t) \equiv 0$  για κάθε  $x$  και  $t$ , δηλαδή για κάθε σημείο  $x$  της δοκού μας και σε κάθε χρονική στιγμή  $t$ . Θαυμάσια λοιπόν ως εδώ: προέκυψε μηδενική χωρική λύση  $X(x) \equiv 0$  επομένως και απόλυτα (εκ ταυτότητος) μηδενικό βέλος κάμψεως  $v(x, t) \equiv 0$  στη δοκό με πάκτωση-κύλιση που εξετάζουμε. Άρα δεν παρουσιάζονται καθόλου καμπτικές ιδιοταλαντώσεις, κάτι που βέβαια καθιστά ευτυχισμένο τον Πολιτικό Μηχανικό, ο οποίος δε θέλει ένα δυναμικό φαινόμενο (π.χ. ένας σεισμός) να συντονίζεται με πιθανές ιδιοταλαντώσεις στη δοκό του. Με άλλα λόγια οι ιδιοταλαντώσεις μιας δοκού σε μια κατασκευή αποτελούν εύλογα ένα ανεπιθύμητο και απευκταίο φαινόμενο για τον Πολιτικό Μηχανικό. Θα ήταν πραγματικά χαρά του να έχει πάντα μα πάντα τη μηδενική, την τετριμμένη λύση  $X(x) \equiv 0$ , άρα και  $v(x, t) = X(x)T(t) \equiv 0$  στις ιδιοταλαντώσεις. Μια χαρά!

Θα ήταν τέλεια να ήταν έτσι, αλλά δυστυχώς τα πράγματα δεν είναι πάντα έτσι. Συγκεκριμένα, όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα, ένα ομογενές σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, όπως είναι εδώ το σύστημα των εξισώσεων (6.2.59) και (6.2.60), έχει σίγουρα την τετριμμένη λύση, τη μηδενική λύση  $A = B = 0$ . Μπορεί όμως σε ειδικές περιπτώσεις να έχει και μη μηδενικές λύσεις. Και ποιες ακριβώς είναι οι ειδικές αυτές περιπτώσεις; Και αυτό το ξέρουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα. Είναι οι περιπτώσεις που η ορίζουσα  $D_2$  των συντελεστών των αγνώστων του (εδώ των δύο σταθερών  $A$  και  $B$  που επιδιώκουμε με πείσμα να υπολογίσουμε) είναι μηδέν.

Δηλαδή το ομογενές σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (6.2.59) και (6.2.60) έχει μηδενική λύση στην ειδική περίπτωση που ισχύει

$$D_2 = \begin{vmatrix} \cosh \beta L - \cos \beta L & \sinh \beta L - \sin \beta L \\ \beta^2(\cosh \beta L + \cos \beta L) & \beta^2(\sinh \beta L + \sin \beta L) \end{vmatrix} = 0 \quad (6.2.62)$$

για την ορίζουσα  $D_2$  των συντελεστών των αγνώστων του  $A$  και  $B$ . Απλοποιώντας μάλιστα τη σταθερά  $\beta$ , η οποία είναι θετική για  $\omega > 0$  (δηλαδή κάθε φορά που έχουμε ταλάντωση της δοκού), ξαναγράφουμε τη συνθήκη μηδενισμού της ορίζουσας αυτής  $D_2$  και στη λίγο απλούστερη μορφή

$$\begin{vmatrix} \cosh \beta L - \cos \beta L & \sinh \beta L - \sin \beta L \\ \cosh \beta L + \cos \beta L & \sinh \beta L + \sin \beta L \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.63)$$

Θα υπολογίσουμε τώρα την ορίζουσα στο αριστερό μέλος της συνθήκης αυτής με βάση το γνωστό μας τύπο υπολογισμού ορίζουσας δευτέρας τάξεως ( $2 \times 2$ )

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc. \quad (6.2.64)$$

Έτσι βρίσκουμε τη συνθήκη

$$(\cosh \beta L - \cos \beta L)(\sinh \beta L + \sin \beta L) - (\sinh \beta L - \sin \beta L)(\cosh \beta L + \cos \beta L) = 0. \quad (6.2.65)$$

Εκτελώντας μάλιστα τις σχετικές πράξεις και απλοποιώντας το αποτέλεσμα (χωρίς να χρειάζεται μάλιστα να χρησιμοποιήσουμε καμία ιδιότητα των υπερβολικών και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων), καταλήγουμε στο αρκετά απλό αποτέλεσμα

$$\cosh \beta L \sin \beta L = \cos \beta L \sinh \beta L. \quad (6.2.66)$$

Η συνθήκη αυτή για το μηδενισμό της ορίζουσας δευτέρας τάξεως  $D_2$  ( $D_2 = 0$ ) στη σχέση (6.2.62) μπορεί να γραφεί (με διαίρεση με το γινόμενο  $\cosh \beta L \cos \beta L$ ) και στην τελική της μορφή

$$\tan \beta L = \tanh \beta L \quad \text{και} \quad \text{απόλυτα} \quad \text{ισοδύναμα} \quad \tanh \beta L = \tan \beta L. \quad (6.2.67)$$

Η συνθήκη αυτή ισχύει, επειδή γνωρίζουμε πάρα πολύ καλά πως  $\tanh z = \sinh z / \cosh z$  και ανάλογα πως  $\tan z = \sin z / \cos z$ .

Τί δηλώνει η σημαντική αυτή συνθήκη  $\tanh \beta L = \tan \beta L$ ; Απλά δηλώνει πως αν τύχει και ισχύει (για κατάλληλες φυσικά τιμές της βοηθητικής σταθεράς  $\beta$ ), τότε και μόνο τότε μηδενίζεται η ορίζουσα  $D_2$  (στη σχέση (6.2.62)) των δύο συντελεστών  $A$  και  $D$  του πιο πάνω συστήματος των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (6.2.59) και (6.2.60). Στην πολύ ειδική αυτή περίπτωση το συγκεκριμένο σύστημα έχει όχι μόνο την τετριμμένη (τη μηδενική) λύση  $A = B = 0$ , αλλ' έχει επίσης και μη μηδενικές λύσεις (συγκεκριμένα μια απειρία μάλιστα τέτοιων λύσεων). Αυτά τα έχουμε μάθει στη Γραμμική Άλγεβρα. Και τί σημαίνει μη μηδενικές λύσεις; Φυσικά σημαίνει ότι υπάρχουν μη μηδενικές (εννοείται μη μηδενικές ταυτόχρονα) σταθερές  $A$  και  $B$  (που αντιστοιχούν σε μια τιμή  $\beta_n$  της σταθεράς  $\beta$  στην τελική εξίσωση ή συνθήκη (6.2.67)), έστω οι σταθερές  $A_n$  και  $B_n$ , οι οποίες επαληθεύουν και τις δύο γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις (6.2.59) και (6.2.60).

### B6.2.5.3. Χρήση του λόγου των αγνώστων συντελεστών

Σε λίγο θα προχωρήσουμε στην καταγραφή των τιμών αυτών  $\beta_n$  που επαληθεύουν την τελική συνθήκη (6.2.67), που είναι προφανώς μια υπερβατική εξίσωση και όχι αλγεβρική εξίσωση, γιατί περιέχει μία υπερβολική και μία τριγωνομετρική συνάρτηση. Προηγουμένως όμως θα θέλαμε να βρούμε την ίδια ακριβώς συνθήκη και με έναν κάπως απλούστερο τρόπο που δε θα χρησιμοποιεί καθόλου ορίζουσες: θα τις αποφεύγει. Ας ξαναγράφουμε όμως πρώτα τις δύο παραπάνω ομογενείς γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις (6.2.59) και (6.2.60) τώρα διαιρώντας μάλιστα τη δεύτερη από αυτές με  $\beta^2$  (επαναλαμβάνουμε  $\beta > 0$  σε ταλαντώσεις, γιατί εκεί  $\omega > 0$ , άρα και  $\beta > 0$ ):

$$A(\cosh \beta L - \cos \beta L) + B(\sinh \beta L - \sin \beta L) = 0, \quad (6.2.68)$$

$$A(\cosh \beta L + \cos \beta L) + B(\sinh \beta L + \sin \beta L) = 0. \quad (6.2.69)$$

Εδώ που αναζητούμε μη μηδενικές λύσεις στο ομογενές αυτό σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων υποθέτουμε ότι  $A \neq 0$  και υπολογίζουμε το λόγο  $B/A$  τόσο από την πρώτη όσο και από τη δεύτερη εξίσωση. Έτσι παίρνουμε

$$\frac{B}{A} = -\frac{\cosh \beta L - \cos \beta L}{\sinh \beta L - \sin \beta L} \quad \text{από την πρώτη εξίσωση (6.2.68),} \quad (6.2.70)$$

$$\frac{B}{A} = -\frac{\cosh \beta L + \cos \beta L}{\sinh \beta L + \sin \beta L} \quad \text{από τη δεύτερη εξίσωση (6.2.69).} \quad (6.2.71)$$

Είναι όμως απόλυτα σαφές ότι ο λόγος αυτός  $B/A$  πρέπει να είναι ο ίδιος (όχι διαφορετικός!) και στις δύο αυτές σχέσεις, μια που επιχειρούμε να λύσουμε το σύστημα των δύο ομογενών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (6.2.68) και (6.2.69) ως προς  $A$  και  $B$ . Εξισώνοντας λοιπόν τα δεξιά μέλη των δύο αυτών σχέσεων (6.2.70) και (6.2.71), διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$\frac{B}{A} = -\frac{\cosh \beta L - \cos \beta L}{\sinh \beta L - \sin \beta L} = -\frac{\cosh \beta L + \cos \beta L}{\sinh \beta L + \sin \beta L}. \quad (6.2.72)$$

Πρέπει επομένως οπωσδήποτε τα δύο τελευταία κλάσματα να είναι ίσα μεταξύ τους. Απαλείφοντας τους παρονομαστές τους  $\sinh \beta L - \sin \beta L$  και  $\sinh \beta L + \sin \beta L$ , καταλήγουμε εύκολα στη σχέση

$$(\cosh \beta L - \cos \beta L)(\sinh \beta L + \sin \beta L) = (\sinh \beta L - \sin \beta L)(\cosh \beta L + \cos \beta L). \quad (6.2.73)$$

Όμως η σχέση αυτή ουσιαστικά συμπίπτει με τη σχέση (6.2.65) και επομένως τελικά καταλήγει στην ίδια ακριβώς υπερβατική χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.67), ως την επαναλάβουμε και εδώ:

$$\tanh \beta L = \tan \beta L. \quad (6.2.74)$$

#### B6.2.5.4. Χρήση οριζουσας τετάρτης τάξεως

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε πως ο πιο επίσημος τρόπος ευρέσεως της ίδιας χαρακτηριστικής εξισώσεως  $\tanh \beta L = \tan \beta L$  είναι με τη χρήση οριζουσας τετάρτης τάξεως. Τούτο σκόπιμα το αποφυγάμε πιο πάνω έχοντας χρησιμοποιήσει είτε οριζουσα δευτέρας τάξεως στη χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.63) είτε καθόλου οριζουσα στη χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.72).

Θεωρούμε τώρα, χωρίς να καταφύγουμε πια σε κανένα τέχνασμα για τη μείωση του αριθμού των τελικών εξισώσεων και των υπολογισμών μας, τη γενική λύση (6.2.48) της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως (6.2.47). Ξαναγράφουμε τη λύση αυτή  $X(x)$  και πολύ εύκολα υπολογίζουμε και τις δύο πρώτες παραγώγους της  $X'(x)$  και  $X''(x)$ , που θα τις χρειασθούμε στις τέσσερις συνοριακές μας συνθήκες (6.2.49) και (6.2.50) στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού μας. Έτσι έχουμε

$$X(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x, \quad (6.2.75)$$

$$X'(x) = \beta(A \sinh \beta x + B \cosh \beta x - C \sin \beta x + D \cos \beta x), \quad (6.2.76)$$

$$X''(x) = \beta^2(A \cosh \beta x + B \sinh \beta x - C \cos \beta x - D \sin \beta x). \quad (6.2.77)$$

Με βάση τις σχέσεις αυτές εφαρμόζουμε τώρα τις συνοριακές συνθήκες (6.2.49) και (6.2.50) στα δύο άκρα της δοκού μας: (α)  $x = 0$ : συνοριακές συνθήκες πακτώσεως  $X(0) = 0$  και  $X'(0) = 0$  και (β)  $x = L$ : συνοριακές συνθήκες απλής στηρίξεως (λόγω της κυλίσεως της δοκού στο άκρο αυτό  $x = L$ ):  $X(L) = 0$  και  $X''(L) = 0$ . Έτσι καταλήγουμε στο ομογενές σύστημα των ακόλουθων τεσσάρων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων:

$$A + C = 0, \quad (6.2.78)$$

$$B + D = 0, \quad (6.2.79)$$

$$A \cosh \beta L + B \sinh \beta L + C \cos \beta L + D \sin \beta L = 0, \quad (6.2.80)$$

$$A \cosh \beta L + B \sinh \beta L - C \cos \beta L - D \sin \beta L = 0. \quad (6.2.81)$$

Μάλιστα στο σύστημα αυτό έχουμε απλοποιήσει από την αρχή τη μη μηδενική, συγκεκριμένα τη θετική (σε περίπτωση ταλαντώσεων) σταθερά  $\beta$  στη δεύτερη και στην τέταρτη εξίσωσή του.

Έχουμε επομένως καταλήξει σε ένα ομογενές σύστημα τεσσάρων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Αυτό προφανώς διαθέτει την τετριμμένη (τη μηδενική) λύση

$$A = B = C = D = 0. \quad (6.2.82)$$

Για το σύστημα αυτό διερωτώμαστε μήπως θα μπορούσε να διαθέτει και μη τετριμμένη (μη μηδενική) λύση. Όπως ξέρουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα και είχαμε ήδη την ευκαιρία να αναφέρουμε, αυτό συμβαίνει, εάν και μόνο εάν η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων  $A, B, C$  και  $D$  είναι ίση με μηδέν. Συγκεκριμένα για το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων (6.2.78) έως (6.2.81), εάν

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh \beta L & \sinh \beta L & \cos \beta L & \sin \beta L \\ \cosh \beta L & \sinh \beta L & -\cos \beta L & -\sin \beta L \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2.83)$$

Φθάσαμε έτσι στη χαρακτηριστική μας εξίσωση με έναν απλό, σωστό, έντιμο τρόπο και χωρίς καθόλου υπολογιστικά τεχνάσματα αντίθετα με ό,τι είχαμε κάνει προηγουμένως ιδίως στη χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.72), όπου δε χρησιμοποιήθηκε καμία ορίζουσα  $D$ . Εδώ βέβαια το κόστος της απλής αυτής διαδικασίας είναι ότι πρέπει να υπολογίσουμε μια ορίζουσα τετάρτης τάξεως: την παραπάνω ορίζουσα  $D_4$ . Αυτός ο υπολογισμός μπορεί να γίνει είτε με το χέρι είτε με τον υπολογιστή με τη χρήση ενός προγράμματος συμβολικών υπολογισμών. Προτιμήσαμε τη δεύτερη (χρονικά πιο σύντομη και υπολογιστικά πιο ασφαλή) αυτή δυνατότητα έχοντας κάνει χρήση της *Mathematica*. Έτσι πρακτικά σε μηδενικό χρόνο καταλήγουμε στη χαρακτηριστική εξίσωση

$$D_4 = 2(\cosh \beta L \sin \beta L - \cos \beta L \sinh \beta L) = 0. \quad (6.2.84)$$

Η εξίσωση αυτή αμέσως ανάγεται στην εξίσωση (6.2.66) και στη συνέχεια, πάλι με διαίρεση με το γινόμενο  $\cosh \beta L \cos \beta L$ , στην τελική της μορφή (6.2.67) ή (6.2.74). Τη γράφουμε κι εδώ (τρίτη φορά):

$$\tanh \beta L = \tan \beta L, \quad (6.2.85)$$

μια που τη βρήκαμε εδώ με έναν τρίτο τρόπο: με τη χρήση ορίζουσας τετάρτης τάξεως  $D_4$  ( $D_4 = 0$ ).

◆ **Συμπέρασμα:** Είναι προφανές ότι από πρακτικής απόψεως σε ένα πρόβλημα υπολογισμού της χαρακτηριστικής εξισώσεως σε συνήθη δοκό η μέθοδος αυτή (με την ορίζουσα τετάρτης τάξεως  $D_4$ ) ίσως να φαίνεται πιο δύσκολη στον Πολιτικό Μηχανικό σε σύγκριση με τις δύο προηγούμενες μεθόδους υπολογισμού της ίδιας χαρακτηριστικής εξισώσεως. Αυτό ισχύει βέβαια στην περίπτωση που όλοι οι υπολογισμοί πρέπει να γίνουν με το χέρι και δεν ισχύει, όταν είναι διαθέσιμο και αποδεκτό (με εμπιστοσύνη στα αποτελέσματα!) ένα πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών, όπως είναι η *Mathematica*. Επομένως, όταν η χαρακτηριστική εξίσωση, όπως στο παρόν πρόβλημα η εξίσωση (6.2.85),  $\tanh \beta L = \tan \beta L$ , πρέπει να προσδιοριστεί με το χέρι, προτιμώνται οι δύο πρώτοι τρόποι. Αντίθετα με τη χρήση του υπολογιστή προτιμάται ο τρίτος τρόπος: αυτός με την ορίζουσα τετάρτης τάξεως  $D_4$ . Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τον μέτρια έμπειρο σε υπολογισμούς οριζουσών με το χέρι Πολιτικό Μηχανικό. Φυσικά και αυτός προτιμάει την ορίζουσα τετάρτης τάξεως  $D_4$  (με χαρακτηριστική εξίσωση  $D_4 = 0$  για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών  $\beta_n$ ). Προφανώς τούτο συμβαίνει, επειδή πρόκειται για τον πιο συστηματικό και γενικεύσιμο σε δυσκολότερα τεχνικά προβλήματα (π.χ. σε πλαίσια ή και σε ολόκληρες κατασκευές του Πολιτικού Μηχανικού) τρόπο εργασίας για τον προσδιορισμό ιδιοτιμών και ιδιοσυχνοτήτων γενικότερα.

Ας προχωρήσουμε όμως τώρα ακόμη πιο πέρα στην τόσο ενδιαφέρουσα αυτή εργασία μας!



**B6.2.5.5. Υπολογισμός των ιδιοσυχνοτήτων**

Στο σημείο αυτό είναι αναγκαίο να διερευνήσουμε τις λύσεις  $\beta_n$  της χαρακτηριστικής εξίσωσης (ή εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων), εδώ της υπερβατικής εξίσωσης (6.2.85):  $\tanh \beta L = \tan \beta L$ . Καταρχήν δεν ελπίζουμε σε κλειστούς τύπους για τις λύσεις αυτές  $\beta_n$ , επειδή έχουμε μια υπερβατική εξίσωση και μάλιστα όχι τόσο απλή, ώστε να διαθέτει τέτοιους κλειστούς τύπους. (Απλή ήταν για την αμφιέρειστη δοκό και στ' αλήθεια διέθετε κλειστούς τύπους για τις ιδιοτιμές  $\beta_n = n\pi/L$  και τις ιδιομορφές  $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ . Αυτά τα μελετήσαμε στην Ενότητα Α9.2.) Κατά συνέπεια η επίλυση της εξίσωσης  $\tanh \beta L = \tan \beta L$  πρέπει να γίνει και πραγματικά θα γίνει αμέσως παρακάτω αριθμητικά. Εδώ μάλιστα χρησιμοποιήθηκε και πάλι η *Mathematica*. Το μόνο αναλυτικό αποτέλεσμα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στην επίλυση αυτή είναι ότι για μεγάλες τιμές του  $z$  έχουμε

$$\tanh z \approx 1 \quad \text{και βέβαια} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \tanh z = 1. \quad (6.2.86)$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι ισχύει το όριο αυτό με τον υπολογισμό του με βάση και το γνωστό τύπο  $\tanh z = \sinh z / \cosh z$  ορισμού της υπερβολικής εφαπτομένης  $\tanh z$ . Άρα ισχύει η προσέγγιση  $\tanh z \approx 1$  για αρκετά μεγάλες τιμές του  $z$ . Συγκεκριμένα η *Mathematica* μας δίνει

$$\tanh 3 \approx 0.995055, \quad \tanh 4 \approx 0.999329, \quad \tanh 5 \approx 0.999909, \quad \tanh 6 \approx 0.999988 \quad (6.2.87)$$

με ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων. Προφανώς οι τιμές αυτές ολοένα και πλησιάζουν στη μονάδα συμφωνώντας έτσι με το όριο (6.2.86):  $\tanh z \rightarrow 1$  για  $z \rightarrow \infty$ .

Με τη χρήση της προσεγγίσεως αυτής για μεγάλες (μόνο για μεγάλες) τιμές του  $\beta L$ , ας πούμε για  $\beta L \geq 5$  για ακρίβεια περίπου τεσσάρων σημαντικών ψηφίων, μπορούμε να γράψουμε προσεγγιστικά τη χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.85) στην απλούστατη μορφή της

$$\tan \beta L \approx 1, \quad \text{οπότε} \quad \beta_n L \approx n\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{(4n+1)\pi}{4} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.88)$$

Τούτο ισχύει αφού  $\tan(\pi/4) = 1$  και επίσης  $\tan(z + k\pi) = \tan z$ , δηλαδή η συνάρτηση εφαπτομένης ( $\tan$ ) είναι περιοδική με περίοδο  $T = \pi$ . Άρα ακόμη και για μέτρια μεγάλες τιμές του  $n$ , ας πούμε για  $n \geq 3$ , οι ιδιοτιμές  $\beta_n$  προσδιορίζονται από τη σχέση (6.2.88), δηλαδή τελικά από τη σχέση

$$\beta_n \approx \frac{(4n+1)\pi}{4L} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.89)$$

Οι προσεγγίσεις αυτές μπορούν να θεωρηθούν σαν αρχικές προσεγγίσεις των ζητούμενων ιδιοτιμών  $\beta_n$  και να χρησιμοποιηθεί μαζί τους κι ένας κλασικός αλγόριθμος υπολογισμού ριζών εξισώσεων, όπως είναι η μέθοδος των Newton–Raphson. Στην εφαρμογή αυτή χρησιμοποιήσαμε κατευθείαν την εντολή FindRoot ευρέσεως ριζών της *Mathematica*. Ξεκινώντας από τις αρχικές προσεγγίσεις (6.2.89), που φαίνονται πρώτες πιο κάτω, οδηγηθήκαμε στις βελτιωμένες, τελικές προσεγγίσεις που φαίνονται αμέσως μετά. Παραθέτουμε στη συνέχεια τα σχετικά αποτελέσματα για  $n = 1, 2, \dots, 8$  για τις αδιάστατες ποσότητες  $z_n = \beta_n L$ : τις ιδιοτιμές πολλαπλασιασμένες επί  $L$ :

$$\beta_1 L \approx 3.926990816987241548078 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_1 L \approx 3.926602312047918778239, \quad (6.2.90)$$

$$\beta_2 L \approx 7.068583470577034786541 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_2 L \approx 7.068582745628732088553, \quad (6.2.91)$$

$$\beta_3 L \approx 10.21017612416682802500 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_3 L \approx 10.21017612281303054547, \quad (6.2.92)$$

$$\beta_4 L \approx 13.35176877775662126347 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_4 L \approx 13.35176877775409312421, \quad (6.2.93)$$

$$\beta_5 L \approx 16.49336143134641450193 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_5 L \approx 16.49336143134640978077, \quad (6.2.94)$$

$$\beta_6 L \approx 19.63495408493620774039 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_6 L \approx 19.63495408493620773158, \quad (6.2.95)$$

$$\beta_7 L \approx 22.77654673852600097885 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_7 L \approx 22.77654673852600097884, \quad (6.2.96)$$

$$\beta_8 L \approx 25.91813939211579421732 \quad \text{και τελικά} \quad \beta_8 L \approx 25.91813939211579421732. \quad (6.2.97)$$

Παρατηρούμε λοιπόν πρώτα για την πρώτη, τη θεμελιώδη ιδιοτιμή  $\beta_1$  ότι ο προσεγγιστικός τύπος (6.2.89), η αρχική της προσέγγιση, μας δίνει μόλις τέσσερα σωστά σημαντικά ψηφία (τα τέσσερα πρώτα ψηφία της τελικής της προσεγγίσεως). Αντίθετα για την ιδιοτιμή  $\beta_8$  έχουμε είκοσι δύο σωστά σημαντικά ψηφία ήδη από την αρχική της προσέγγιση (6.2.89) χωρίς καθόλου τη χρήση της μεθόδου των Newton–Raphson ή άλλης αριθμητικής μεθόδου. Βλέπουμε λοιπόν ότι η ακρίβεια της αρχικής προσεγγίσεως ολοένα και αυξάνει καθώς αυξάνει το  $n$ . Μια τόσο μεγάλη ακρίβεια των αρχικών προσεγγίσεων δεν είναι βέβαια η συνηθισμένη περίπτωση σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Έτσι, γενικά μιλώντας, η σπουδαιότητα των αριθμητικών μεθόδων στις επιλύσεις αλγεβρικών και υπερβατικών εξισώσεων που δε διαθέτουν κλειστές λύσεις αδικείται κάπως, υποβαθμίζεται άδικα από τα προηγούμενα αριθμητικά αποτελέσματα. Είναι πολύ μεγάλη η χρησιμότητα των αριθμητικών μεθόδων για τον Πολιτικό Μηχανικό, που τα τεχνικά προβλήματά του δε διαθέτουν γενικά (σχεδόν ποτέ!) κλειστές λύσεις. Ούτε και το παρόν σχετικά απλό πρόβλημα καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνηθούς δοκού με πάκτωση–άρθρωση στα άκρα της διαθέτει!

Φυσικά με διαίρεση δια  $L$  των προηγούμενων αριθμητικών τιμών  $\beta_n L$  γνωρίζουμε τώρα πλήρως τις ιδιοτιμές  $\beta_n$  στο παρόν πρόβλημα συνηθούς δοκού με πάκτωση–κύλιση στα άκρα της  $x = 0$  και  $x = L$  αντίστοιχα. Επομένως μπορούμε πια θαυμάσια να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (6.2.47) (δεύτερη σχέση εκεί) ορισμού της βοηθητικής αυτής σταθεράς  $\beta$ , ώστε να προσδιορίσουμε τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες στις παρούσες καμπτικές ταλαντώσεις συνηθούς δοκού. Έτσι με  $\beta = \beta_n$  (έχουμε άπειρες ιδιοτιμές  $\beta_n$ , όπως είδαμε προηγουμένως: σχέσεις (6.2.89)!) διαπιστώνουμε ότι

$$\beta_n = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega_n^2}{EI}}, \quad \text{οπότε} \quad \beta_n^2 = \sqrt{\frac{\rho A \omega_n^2}{EI}} = \omega_n \sqrt{\frac{\rho A}{EI}} \quad \text{και τελικά} \quad \omega_n = \beta_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (6.2.98)$$

για τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες (για την ακρίβεια κυκλικές ιδιοσυχνότητες)  $\omega_n$ .

Αν μάλιστα στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών και ιδιοτιμών χρησιμοποιήσουμε τους προσεγγιστικούς τύπους (6.2.89):  $\beta_n \approx (4n + 1)\pi/(4L)$  για τις ιδιοτιμές αυτές  $\beta_n$ , θα πάρουμε τους εξής προσεγγιστικούς τύπους για τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$ :

$$\omega_n \approx \left[ \frac{(4n + 1)\pi}{4L} \right]^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (6.2.99)$$

Αν θέλουμε μάλιστα, χρησιμοποιούμε το νέο σύμβολο  $\tilde{\omega}_n$  για τις προσεγγιστικές αυτές ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  ( $\tilde{\omega}_n \approx \omega_n$ ). Ξαναγράφουμε έτσι τους προηγούμενους τύπους (6.2.99) στην ελάχιστη διαφορετική μορφή τους

$$\tilde{\omega}_n = \left[ \frac{(4n + 1)\pi}{4L} \right]^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (6.2.100)$$

Τώρα πλέον δεν υπάρχει το σύμβολο  $\approx$  της προσεγγίσεως. Το αποφύγαμε έχοντας δηλώσει ευθύς εξαρχής τις προσεγγιστικές ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$ , για την ακρίβεια τις προσεγγιστικές κυκλικές ιδιοσυχνότητες, με το σύμβολο  $\tilde{\omega}_n$ . Σημειώνουμε ότι η Ελληνική περισπωμένη πάνω σε σύμβολα (για παράδειγμα, εδώ πάνω στο σύμβολο  $\omega$ , δηλαδή  $\tilde{\omega}_n$ ) αναφέρεται γενικά σε προσεγγίσεις των αντίστοιχων ποσοτήτων, στην περίπτωσή μας των κυκλικών ιδιοσυχνοτήτων (και απλούστερα των ιδιοσυχνοτήτων)  $\omega_n \approx \tilde{\omega}_n$  στις παρούσες καμπτικές ιδιοταλαντώσεις.

Τελειώνοντας αυτό το εδάφιο, πρέπει να σημειώσουμε ότι οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  μιας δοκού είναι πολύ σημαντικές για τον Πολιτικό Μηχανικό. Ας εξηγήσουμε λίγο τον ισχυρισμό μας αυτό. Σε ένα απλό μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας  $m$ ) και ελατηρίου (σταθεράς  $k$ ) με φυσική κυκλική συχνότητα (ή ιδιοσυχνότητα)  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  γνωρίζουμε ήδη από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II ότι, αν τύχει και υπάρξει εξωτερική φόρτιση  $p(t)$  και αυτή με κυκλική συχνότητα  $\omega = \omega_0$ , τότε παρουσιάζεται δυστυχώς το ανεπιθύμητο φαινόμενο του συντονισμού. Ανάλογα ισχύουν βέβαια και εδώ, παρόλο που η δοκός δεν είναι μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα, αλλ' είναι απειροβάθμιο μηχανικό σύστημα, όπως αποκαλεί συχνά ο Πολιτικός Μηχανικός ένα συνεχές (και όχι διακριτό)

μηχανικό σύστημα. (Προφανώς η δοκός είναι συνεχές μηχανικό σύστημα, ενώ αντίθετα ένα σύστημα μαζών-ελατηρίων είναι διακριτό μηχανικό σύστημα. Εντούτοις μερικές φορές ο Πολιτικός Μηχανικός προσεγγίζει για υπολογιστική ευκολία συνεχή συστήματα με διακριτά.)

Επομένως με τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  γνωστές (εδώ σε μια συνήθη δοκό σε καμπτική καταπόνηση) ο Πολιτικός Μηχανικός πρέπει να φροντίζει να μην «εκτίθεται» η δοκός του σε εξωτερικές φορτίσεις με συχνότητα  $\omega$  μία από τις ιδιοσυχνότητες αυτές, έστω την  $\omega_p$ :  $\omega = \omega_p$  ή με παραπλήσια συχνότητα:  $\omega \approx \omega_p$ . Έτσι θα αποφευχθεί ο συντονισμός. Συνήθως όμως δεν είναι στο χέρι του Πολιτικού Μηχανικού να επιλέγει ο ίδιος τη συχνότητα (ή τις συχνότητες)  $\omega$  μιας φορτίσεως  $p(x, t)$  της δοκού του, π.χ. από ένα όχημα σε μια γέφυρα ή από ένα σεισμό σε μια κατασκευή. Για το λόγο αυτό πρέπει κατά τη μελέτη της δικής του κατασκευής (με τη δοκό στοιχείο αυτής) να φροντίζει εκ των προτέρων (και όχι εκ των υστέρων!) η κατασκευή του (εδώ η δοκός που εξετάζουμε) να μην έχει τέτοιες ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$ . Δηλαδή να φροντίζει ώστε να μην υπάρχουν σε μια κατασκευή (εδώ απλά δοκό) ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  που να συμπίπτουν (ή έστω να είναι κοντά) σε συχνότητες  $\omega$  της εξωτερικής φορτίσεως  $p(x, t)$ , η οποία επιβάλλεται εξωτερικά στην κατασκευή (εδώ στη δοκό).

#### B6.2.5.6. Υπολογισμός των ιδιομορφών ταλαντώσεως

Από τις ιδιοτιμές  $\beta_n$  που έχουμε ήδη προσδιορίσει μόλις παραπάνω βρήκαμε και τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$ . Αυτό το κατορθώσαμε με βάση τον τύπο (6.2.98) και τον προσεγγιστικό τύπο (6.2.99) ή (ισοδύναμα) (6.2.100). Τώρα ήρθε πια η στιγμή να προσδιορίσουμε και τις αντίστοιχες ιδιομορφές καμπτικών ταλαντώσεων (ή απλούστερα ιδιομορφές ταλαντώσεων και ακόμη πιο απλά ιδιομορφές)  $X_n(x)$  για τη συνήθη δοκό μας. Πρόκειται για ένα σχετικά εύκολο καθήκον. Προχωράμε επομένως άμεσα στον προσδιορισμό των ιδιομορφών  $X_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) για τη συνήθη δοκό σε καμπτικές ταλαντώσεις που εξετάζουμε με πάκτωση-κύλιση στα δύο άκρα της  $x = 0$  και  $x = L$  αντίστοιχα.

Πραγματικά αρκεί να χρησιμοποιήσουμε εδώ τη σχέση (6.2.56) ξαναγράφοντάς την στην κάπως διαφορετική μορφή

$$X_n(x) = A_n[\cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - c_n(\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x)] \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.101)$$

Στις ιδιομορφές  $X_n(x)$  με τη χρήση του δείκτη  $n$  τονίσαμε το γεγονός ότι οι ιδιοτιμές  $\beta_n$  είναι άπειρες, όπως ήδη είδαμε. Επομένως έχουμε και άπειρες ιδιομορφές  $X_n(x)$  με την καθεμία τους να αντιστοιχεί σε διαφορετική ιδιοτιμή  $\beta_n$  άρα και σε διαφορετική ιδιοσυχνότητα  $\omega_n$ . Επίσης βγάλαμε κοινό παράγοντα το συντελεστή  $A$  και θέσαμε προς διευκόλυνσή μας  $-B_n/A_n = c_n$ . Αλλ' ο λόγος  $B_n/A_n$  μας είναι γνωστός από τις σχέσεις (6.2.72). Άρα οι βοηθητικές σταθερές  $c_n$  προσδιορίζονται ως εξής:

$$c_n = -\frac{B_n}{A_n} = \frac{\cosh \beta_n L - \cos \beta_n L}{\sinh \beta_n L - \sin \beta_n L} \quad \text{ή, ισοδύναμα,} \quad c_n = -\frac{B_n}{A_n} = \frac{\cosh \beta_n L + \cos \beta_n L}{\sinh \beta_n L + \sin \beta_n L} \quad (6.2.102)$$

(συνεχώς με  $n = 1, 2, \dots$ ). Παρατηρούμε ότι το δεύτερο κλάσμα υπολογισμού των σταθερών  $c_n$  διαφέρει από το πρώτο μόνο σε δύο πρόσημα: τώρα συν (αντί πλην) μεταξύ των δύο όρων και στον αριθμητή του και στον παρονομαστή του.

Είναι βέβαια γνωστό και επίσης προφανές ότι το ομογενές σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (6.2.59) και (6.2.60) ή το αντίστοιχο και κάπως πιο πλήρες σύστημα (6.2.78) έως (6.2.81), εφόσον διαθέτουν μια μη τετριμμένη (μη μηδενική λύση), θα διαθέτουν άπειρες τέτοιες λύσεις. Όμως οι λύσεις αυτές θα διαφέρουν η μία από την άλλη μόνο κατά μία πολλαπλασιαστική σταθερά. Το συμπέρασμα είναι ότι τελικά στις πιο πάνω ιδιομορφές  $X_n(x)$  η σταθερά  $A_n$  είναι αδύνατο να υπολογισθεί. Με άλλες λέξεις οι ιδιομορφές αυτές  $X_n(x)$  είναι βέβαια καθορισμένες, αλλά με μία αυθαίρετη πολλαπλασιαστική σταθερά  $A_n$  σε καθεμία από αυτές. Πολύ συχνά οι ιδιομορφές  $X_n(x)$  καθορίζονται, κανονικοποιούνται κατά κάποιο συγκεκριμένο τρόπο που να καθορίζει τη σταθερά αυτή  $A_n$  και να εξασφαλίζει το μονοσήμαντο προσδιορισμό της κάθε ιδιομορφής  $X_n(x)$ .

Ο ευκολότερος τρόπος για το σκοπό αυτό είναι να καθορισθεί η σταθερά  $A_n$  ίση με ένα ( $A_n = 1$ ) για καθεμία ιδιομορφή  $X_n(x)$ . Με αυτήν την υπόθεση, που σε τίποτε σημαντικό δε μας βλάπτει, οι αμέσως πιο πάνω τύποι (6.2.101) για τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  παίρνουν τις απλούστερες μορφές

$$X_n(x) = \cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - c_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.103)$$

Τις μορφές αυτές τις υιοθετούμε εδώ απλά χάριν απλότητας και, φυσικά, για να έχουμε μονοσήμαντες εκφράσεις των ιδιομορφών  $X_n(x)$ .

Μια εναλλακτική δυνατότητα, που όμως δε θα την προτιμήσουμε εδώ, είναι να ορίσουμε τη σταθερά  $A_n$  της κάθε ιδιομορφής  $X_n(x)$  στην πιο πάνω σχέση (6.2.101), έτσι ώστε η σχετική νόρμα  $N_n := \int_0^L X_n^2(x) dx$ , που ορίστηκε στη σχέση (6.2.44), να είναι απλά ίση με τη μονάδα:  $N_n = 1$ .

Καταλήγοντας, με γνωστές τις ιδιοτιμές  $\beta_n$  μας είναι επίσης γνωστές τόσο (α) οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  από τους τύπους (6.2.98) όσο και (β) οι αντίστοιχες ιδιομορφές  $X_n(x)$  από τους τύπους (6.2.103). Οι συντελεστές  $c_n$  στους τύπους αυτούς (6.2.103) υπολογίζονται άμεσα από τους πρώτους (με πλην) ή τους δεύτερους (με συν) τύπους (6.2.102). (Ακριβώς το ίδιο κάνει!)

Τα αποτελέσματα αυτά για τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  της δοκού και ειδικότερα η ιδιότητα της ορθογωνιότητάς τους (ή ορθογωνικότητάς τους) μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμα. Συγκεκριμένα με τη χρήση τους θα μπορέσουμε να επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς (6.2.1) των καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού: είτε (α) ελεύθερων (με  $p(x, t) \equiv 0$ ) είτε (β) εξαναγκασμένων (με  $p(x, t) \neq 0$ ). Με την επίλυση αυτή θα ασχοληθούμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

Σημειώνουμε τέλος ότι με ανάλογο τρόπο εργασίας μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  και τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  και σε άλλα ήδη στηρίξεως (ή ελλείψεως στηρίξεως) των άκρων μιας συνήθους δοκού. Τέτοιες δοκοί είναι η αμφίπακτη δοκός, ο πρόβολος, η απόλυτα ελεύθερη δοκός, κλπ. (Την αμφιέριστη δοκό τη μελετήσαμε ήδη στην Ενότητα Α9.2 στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II.) Θα ήταν μια ενδιαφέρουσα άσκηση για τον αναγνώστη Πολιτικό Μηχανικό η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων  $\omega_n$  και των ιδιομορφών  $X_n(x)$  για τις δοκούς αυτές. Δεν υπάρχει καμία επιπλέον δυσκολία ή διαφορά στη μεθοδολογία σε σύγκριση με τα αποτελέσματα αυτού του εδαφίου. Αναφέρουμε τα αποτελέσματα: (α) για την αμφίπακτη δοκό και (β) για τον πρόβολο:

**(α) Πρώτα για την αμφίπακτη δοκό:** Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει τώρα τη μορφή

$$\cosh \beta L \cos \beta L = 1. \quad (6.2.104)$$

Οι ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ) δίνονται ξανά από τους τύπους

$$X_n(x) = \cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - c_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \quad \text{με } c_n = \frac{\cosh \beta_n L - \cos \beta_n L}{\sinh \beta_n L - \sin \beta_n L}. \quad (6.2.105)$$

Εντούτοις, επειδή η χαρακτηριστική εξίσωση (6.2.104) είναι στην αμφίπακτη δοκό εντελώς διαφορετική από την αντίστοιχη εξίσωση  $\tanh \beta L = \tan \beta L$  για τη δοκό με πάκτωση-κύλιση, το ίδιο θα ισχύει και για τις ιδιοτιμές  $\beta_n$ , τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  και τις ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$ .

**(β) Τέλος για πρόβολο με πάκτωση στο αριστερό άκρο του  $x = 0$  και ελεύθερο το δεξιό άκρο του  $x = L$ :** Η χαρακτηριστική εξίσωση έχει τώρα τη μορφή

$$\cosh \beta L \cos \beta L = -1, \quad (6.2.106)$$

δηλαδή απλά με  $-1$  αντί  $1$  στο δεξιό μέλος σε σύγκριση με την αντίστοιχη εξίσωση (6.2.104) για την αμφίπακτη δοκό. Στη συνέχεια οι ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  δίνονται από τους τύπους

$$X_n(x) = \cosh \beta_n x - \cos \beta_n x - c_n (\sinh \beta_n x - \sin \beta_n x) \quad \text{με } c_n = \frac{\cosh \beta_n L + \cos \beta_n L}{\sinh \beta_n L + \sin \beta_n L} \quad (6.2.107)$$

με μόνη διαφορά από τους τύπους για την αμφίπακτη δοκό το πρόσημο συν στους συντελεστές  $c_n$ .

**B6.2.6. Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους****B6.2.6.1. Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών**

Προχωράμε τώρα στο κύριο μέρος αυτής της Ενότητας Β6.2. Τούτο είναι απλά η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (6.2.1), που διέπει το φαινόμενο των καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού. Επαναλαμβάνουμε την τόσο σημαντική για τον Πολιτικό Μηχανικό αυτή εξίσωση:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \text{με} \quad v = v(x, t). \quad (6.2.108)$$

Όπως γνωρίζουμε, στην εξίσωση αυτή  $EI$  είναι η **δυσκαμψία** της δοκού: **μέτρο ελαστικότητας**  $E$  του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της επί **ροπή αδρανείας**  $I$  της διατομής της ως προς τον **ουδέτερο άξονα** της διατομής αυτής στην κάμψη. Πρόκειται για τον άξονα της διατομής της δοκού που αντιστοιχεί στις υποθετικές ίνες της δοκού (δεν είναι ανάγκη να υπάρχουν και σ' αλήθεια οι ίνες αυτές!) που ούτε εφελκούνται, αλλ' ούτε και θλίβονται στην κάμψη. Επίσης  $\rho A$  είναι η **γραμμική πυκνότητα** της δοκού: πυκνότητα  $\rho$  του υλικού της επί εμβαδόν  $A$  της διατομής της. Τέλος  $p(x, t)$  είναι η γνωστή **κάθετη κατανεμημένη φόρτιση** κατά μήκος της και  $v = v(x, t)$  το **βέλος κάμψεως** της, η **κάθετη μετατόπιση** (ή **εγκάρσια μετατόπιση**) των σημείων της. Αυτό το βέλος κάμψεως  $v(x, t)$  είναι βέβαια και η άγνωστη συνάρτηση που επιδιώκουμε εδώ να προσδιορίσουμε.

Ομολογουμένως από εκπαιδευτικής απόψεως θα έπρεπε να ξεκινήσουμε από τις ελεύθερες ταλαντώσεις (με εξωτερική φόρτιση  $p(x, t) \equiv 0$ , απλούστερη περίπτωση) και στη συνέχεια να προχωρήσουμε στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (με  $p(x, t) \neq 0$ , δυσκολότερη περίπτωση). Εντούτοις, για να κερδίσουμε χώρο και χρόνο, θα ξεκινήσουμε από τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, δηλαδή από την ίδια τη μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (6.2.108). Οι ελεύθερες ταλαντώσεις θα θεωρηθούν έτσι σαν μια ειδική περίπτωση των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων: η περίπτωση όπου απλά  $p(x, t) \equiv 0$ . Θα υποθέσουμε επίσης ότι ισχύουν και συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες (τη χρονική στιγμή  $t = 0$ )

$$v(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (6.2.109)$$

για την αρχική θέση  $f(x)$  και την αρχική ταχύτητα  $g(x)$  των σημείων  $x$  ( $0 \leq x \leq L$ ) της δοκού μας αντίστοιχα. (Φυσικά και οι δύο αυτές συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  υποτίθενται γνωστές.)

Θεωρούμε λοιπόν μια συγκεκριμένη συνήθη δοκό (αμφίπακτη, αμφιέρειστη, πρόβολο, πακτωμένη στο ένα άκρο και με κύλιση στο άλλο, κλπ.). Έτσι έχουμε και τέσσερις εξίσου συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες ανά δύο στα δύο άκρα της  $x = 0$  και  $x = L$ . Τις συνοριακές αυτές συνθήκες θα τις λάβουμε υπόψη μέσω των ιδιομορφών καμπτικών ταλαντώσεων  $X_n(x)$ , που ήδη γνωρίζουμε καλά να προσδιορίζουμε και τις θεωρούμε επομένως γνωστές.

Η κρίσιμη ιδέα που χρησιμοποιείται στην παράγραφο αυτή είναι η εξής: Αν δεν έχουμε καθόλου φόρτιση  $p(x, t)$  στη δοκό μας ( $p(x, t) \equiv 0$ ), τότε βέβαια με τη μέθοδο του **χωρισμού των μεταβλητών** (ή των **χωριζόμενων μεταβλητών**) οδηγούμαστε στις δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (6.2.9) (χωρική, τετάρτης τάξεως) και (6.2.10) (χρονική, δευτέρας τάξεως). Από αυτές η χωρική συνήθης διαφορική εξίσωση έχει σαν λύσεις της τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  της δοκού. Αυτές είχαμε την ευκαιρία να τις μελετήσουμε και να τις προσδιορίσουμε πλήρως στις προηγούμενες παραγράφους αυτής της Ενότητας Β6.2. Φυσικά κάθε ιδιομορφή  $X_n(x)$  αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή  $\beta_n$  της χωρικής διαφορικής εξίσωσης (6.2.9) ή καλύτερα (6.2.12) και απόλυτα ισοδύναμα σε μια ιδιοσυχνότητα  $\omega_n$ . Επαναλαμβάνουμε με έμφαση ότι τις ιδιομορφές αυτές  $X_n(x)$  τις προσδιορίζουμε έτσι, ώστε να πληρούνται και οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες: ανά δύο σε κάθε άκρο  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού. Κατά συνέπεια απλά η χρήση των ιδιομορφών  $X_n(x)$  σημαίνει και σίγουρη πλήρωση των συνοριακών συνθηκών είτε στηρίξεως είτε ελεύθερου άκρου της δοκού. Τις έχουμε καταγράψει στις σχέσεις (6.2.19) για τα τρία βασικά άκρα δοκών. Τέλος λοιπόν με τις συνοριακές συνθήκες!

Προχωράμε τώρα στις χρονικές ιδιοσυναρτήσεις  $T_n(t)$ . Προφανώς αυτές προσδιορίζονται με βάση τις ίδιες ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  που προέκυψαν μαζί με τις ιδιομορφές  $X_n(x)$ . Αυτό είναι προφανές από το χωρισμό των μεταβλητών (6.2.8) και έχει ήδη οδηγήσει στη χρονική λύση (6.2.11). Την ξαναγράφουμε και εδώ με τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  αντί γενικά με την κυκλική συχνότητα  $\omega$ :

$$T_n(t) = E_n \cos \omega_n t + F_n \sin \omega_n t = G_n \cos(\omega_n t - \alpha_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.110)$$

Κατά συνέπεια οι ιδιοσυναρτήσεις  $v_n(x, t)$  της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (6.2.2): της εξίσωσης των ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων ταλαντώσεων της δοκού

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{ξανά με } v = v(x, t) \quad (6.2.111)$$

θα είναι απλά

$$v_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) \equiv T_n(t) X_n(x) = (E_n \cos \omega_n t + F_n \sin \omega_n t) X_n(x). \quad (6.2.112)$$

Οι ιδιοσυναρτήσεις αυτές  $v_n(x, t)$  δηλώνουν τους **τρόπους ταλαντώσεως** της δοκού, καθεμία και ένα διαφορετικό τρόπο ταλαντώσεως.

Με **υπέρθωση** (ισοδύναμα **επαλληλία**) των ιδιοσυναρτήσεων (των τρόπων ταλαντώσεως)  $v_n(x, t)$  οδηγούμαστε στη λύση (σε μορφή σειράς συναρτήσεων) της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (6.2.111). Η λύση αυτή θα έχει προφανώς τη μορφή

$$v_h(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (E_n \cos \omega_n t + F_n \sin \omega_n t) X_n(x). \quad (6.2.113)$$

Στη λύση αυτή ο δείκτης  $h$  τέθηκε, για να δηλωθεί το γεγονός ότι η εξίσωση (6.2.111) είναι ομογενής: αναφέρεται σε ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα σε ελεύθερες ταλαντώσεις της δοκού με  $p(x, t) \equiv 0$ .

Στην ίδια λύση  $v_h(x, t)$  παρατηρούμε ότι επαληθεύεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.111) (με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, που ήδη περιγράψαμε στην Παράγραφο Β6.2.2). Επιπλέον επαληθεύονται σίγουρα και οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες στα άκρα της δοκού. Αυτό το πετύχαμε με τον κατάλληλο προσδιορισμό των ιδιομορφών  $X_n(x)$  στην προηγούμενη Παράγραφο Β6.2.5. Κι όμως η λύση (6.2.113) δεν έχει μέχρι τώρα προσδιορισθεί πλήρως: συνεχίζει να περιλαμβάνει σταθερές: τις  $E_n$  και  $F_n$ : δύο απειρίες σταθερών που δεν τις έχουμε υπολογίσει ακόμη. Ο τρόπος που θα τις προσδιορίσουμε είναι βέβαια μέσω των αρχικών συνθηκών (6.2.109): για την αρχική θέση  $f(x)$  και την αρχική ταχύτητα  $g(x)$  των σημείων της δοκού.

Δεν προχωράμε στην εργασία αυτή, ώστε να αναφερθούμε γενικότερα και στην περίπτωση υπάρξεως μιας κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x, t) \neq 0$  στην δοκό. Δηλαδή θα επιλύσουμε τη γενικότερη (τη μη ομογενή με ειδική περίπτωση την ομογενή) διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (6.2.108). Αυτή αφορά γενικότερα στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις της δοκού (σ' αυτές  $p(x, t) \neq 0$ ) με τις ελεύθερες ταλαντώσεις της (εκεί  $p(x, t) \equiv 0$ ) απλά μια ειδική περίπτωση. Αναφέρουμε ότι κατανοούμε βέβαια πως από εκπαιδευτικής απόψεως θα ήταν προτιμότερο να ασχοληθούμε πρώτα με τις ελεύθερες ταλαντώσεις και έπειτα με τις εξαναγκασμένες, ακριβώς όπως συμβαίνει και στη βιβλιογραφία. Αλλά είπαμε: πραγματευόμαστε πρώτα τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις για οικονομία χώρου και χρόνου και αποδεχόμαστε κάθε σχετική κριτική στην επιλογή μας αυτή, που είναι αμφισβητήσιμης εκπαιδευτικής ορθότητας. Αυτό συμβαίνει, επειδή πηγαινουμε από τη γενική περίπτωση ( $p(x, t) \neq 0$ ) προς την ειδική ( $p(x, t) \equiv 0$ ) αντί αντίστροφα.

### **B6.2.6.2. Εξαναγκασμένες ταλαντώσεις της δοκού**

Στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (με εξωτερική φόρτιση της δοκού  $p(x, t) \neq 0$ ) θα ήταν ένα πάρα πολύ σοβαρό λάθος να αποδεχθούμε τη λύση  $v_h(x, t)$  στη σχέση (6.2.113) σαν πιθανή λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (6.2.108), την επαναλαμβάνουμε

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \text{με } v = v(x, t). \quad (6.2.114)$$

Η λύση  $v_n(x, t)$  που προαναφέραμε έχει προκύψει στην Παράγραφο Β6.2.2 με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών και αφορά στην αντίστοιχη ομογενή εξίσωση (6.2.111): αυτή με  $p(x, t) \equiv 0$ . Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη **μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις**, η οποία αφορά σε μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς. Τη μέθοδο αυτή είχαμε ήδη την ευκαιρία να την εκθέσουμε στην Ενότητα Β5.6 του προηγούμενου Κεφαλαίου Β5 με την εφαρμογή της στη μη ομογενή εξίσωση της διαχύσεως (5.6.1). Εδώ απλά θα εφαρμόσουμε την ίδια ακριβώς μέθοδο στην αμέσως πιο πάνω επίσης μη ομογενή εξίσωση (6.2.114): στην εξίσωση των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού. Βέβαια στο παρόν πρόβλημα είναι πολύ καλύτερα να μιλάμε για **ιδιομορφές** αντί για **ιδιοσυναρτήσεις**, επειδή ο όρος ιδιομορφές έχει επικρατήσει στην ορολογία του Πολιτικού Μηχανικού σε προβλήματα αξονικών ιδιοταλαντώσεων ράβδων και καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκών. Μπορούμε επομένως να αποκαλούμε την παρούσα μέθοδο **μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιομορφές**, εννοείται σε **ιδιομορφές καμπτικών ταλαντώσεων**.

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή απλά δεχόμαστε ότι οι σταθερές  $E_n$  και  $F_n$  στη λύση (6.2.113) δεν είναι πια (στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις) απλά σταθερές, όπως συνέβαινε εύλογα στις ελεύθερες ταλαντώσεις, εκεί με βάση τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (6.2.3):  $v(x, t) = X(x)T(t)$ . Εδώ τις θεωρούμε συναρτήσεις του χρόνου  $t$ :  $E_n = E_n(t)$  και  $F_n = F_n(t)$ . Το ίδιο ακριβώς είχαμε κάνει και στις μη ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων. Έτσι πετύχαμε να επιλύουμε μη ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με βάση τις λύσεις των αντίστοιχων ομογενών εξισώσεων. Άρα η **μέθοδος του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις** (εδώ καλύτερος όρος είναι **ιδιομορφές**) θα μπορούσε ίσως να έχει αποκλιθεί και **μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων**. Εντούτοις ο τελευταίος αυτός όρος πάρα πολύ σπάνια χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγωγούς.

Επομένως τώρα με  $E_n = E_n(t)$  και  $F_n = F_n(t)$  η λύση μας (6.2.113) παίρνει τη γενικότερη μορφή

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [E_n(t) \cos \omega_n t + F_n(t) \sin \omega_n t] X_n(x) \quad (6.2.115)$$

(χωρίς πλέον τη χρήση του δείκτη  $h$ : δεν έχουμε πια μια ομογενή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς). Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, η μορφή αυτή  $v(x, t)$  είναι απόλυτα ικανή να αποτελέσει τη λύση της μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγωγούς (6.2.114) για τις εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις δοκού με  $p(x, t) \neq 0$ . Είναι ικανή εξαιτίας του ότι περιέχει δύο απειρίες προς το παρόν μη προσδιορισμένων χρονικών συναρτήσεων  $E_n(t)$  και  $F_n(t)$ . Οι συναρτήσεις αυτές θα μπορέσουν να «αντιμετωπίσουν» το δεξιό μέλος  $p(x, t)$  της μη ομογενούς πια εξισώσεως (6.2.114): την κατανομημένη φόρτιση της δοκού. Αυτό το έχουμε δει ήδη στην Ενότητα Β5.6, εκεί για τη μη ομογενή εξίσωση της διαχύσεως και με μία μόνο απειρία άγνωστων συναρτήσεων, αρχικά των συναρτήσεων  $C_n(t)$ . Εδώ γενικεύουμε στη δοκό. Τίποτε παραπάνω!

Μια στιγμή όμως! Προσωρινή διακοπή της εργασίας μας! Πού πάμε; Τόσο οι συναρτήσεις  $E_n(t)$  όσο και οι συναρτήσεις  $F_n(t)$  στη λύση  $v(x, t)$  που επιδιώκουμε να βρούμε είναι αυθαίρετες συναρτήσεις που θέλουμε να τις προσδιορίσουμε κατάλληλα. Άρα και ολόκληρος ο χρονικός παράγοντας

$$q_n(t) = E_n(t) \cos \omega_n t + F_n(t) \sin \omega_n t \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.116)$$

στη λύση (6.2.115) θα είναι και αυτός μια αυθαίρετη συνάρτηση  $q_n(t)$ . Άρα δεν υπάρχει κανένας απολύτως λόγος να ασχολούμαστε χωριστά με τις δύο χρονικές συναρτήσεις  $E_n(t)$  και  $F_n(t)$ . Απλά ξαναγράφουμε τη λύση  $v(x, t)$  που αναζητούμε στο παρόν πρόβλημα στη συντομότερη μορφή

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x). \quad (6.2.117)$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να προσδιορίσουμε όλη την απειρία των άγνωστων συναρτήσεων  $q_n(t)$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ). Το ίδιο περίπου είχαμε κάνει και στην Ενότητα Β5.6 στο πρόβλημα της διαχύσεως.

Με άλλα λόγια στη λύση (6.2.117) που υιοθετούμε και που θέλουμε να προσδιορίσουμε απλά πήραμε αρχικά τη λύση (6.2.113) της αντίστοιχης ομογενούς εξισώσεως. Στη συνέχεια ουσιαστικά θέσαμε τις άγνωστες συναρτήσεις  $q_n(t)$  στις θέσεις των χρονικών ιδιοσυναρτήσεων  $T_n(t)$ . Έτσι θα έχουμε επαρκώς μεγάλη γενικότητα στη λύση αυτή και θα μπορέσουμε να την προσαρμόσουμε, ώστε να προσδιορίσουμε τελικά τη λύση της μη ομογενούς εξισώσεως (6.2.114) των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων της δοκού μας. Επομένως η κατάσταση είναι απλή, πολύ απλή: άγνωστες χρονικές συναρτήσεις  $q_n(t)$  (προς προσδιορισμό) αντί για  $T_n(t)$  (γνωστές χρονικές ιδιοσυναρτήσεις). Καλή ήταν όμως και η δυνατότητα ερμηνείας αυτής της διαδικασίας μέσω της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων, μια δυνατότητα που επιχειρήσαμε να εξηγήσουμε προηγουμένως. Όποιος αναγνώστης/όποια αναγνώστρια Πολιτικός Μηχανικός το επιθυμεί ας δώσει σημασία και στην ερμηνεία αυτή. Αλλιώς η απλή γενίκευση από  $T_n(t)$  σε  $q_n(t)$  αρκεί.

Είμαστε τώρα πια έτοιμοι να προχωρήσουμε στον προσδιορισμό των αγνώστων χρονικών συναρτήσεων  $q_n(t)$  στη μορφή (6.2.117) της λύσεως  $v(x, t)$ , την οποία έχουμε υιοθετήσει. Και ασφαλώς οι γνωστές (με τη μέθοδο της προηγούμενης Παραγράφου Β6.2.5) χωρικές συναρτήσεις  $X_n(x)$ , οι ιδιομορφές ταλαντώσεως, είναι πάντα παρούσες στη μορφή αυτή (6.2.117) της λύσεως  $v(x, t)$ . Είναι οι «στυλοβάτες» της λύσεως αυτής. Είναι οι συναρτήσεις που μας εξασφαλίζουν όχι μόνο την πλήρωση της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως (6.2.9), αλλά και όλων (και των τεσσάρων) συνοριακών συνθηκών στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού υπό δυναμική καμπτική καταπόνηση που εξετάζουμε. Τις χρονικές αυτές συναρτήσεις  $q_n(t)$  που απομένει να βρούμε ο Πολιτικός Μηχανικός συνήθως τις αποκαλεί με τον κάπως παράξενο (ή τουλάχιστον μη αναμενόμενο άμεσα) όρο **κύριες συντεταγμένες** (ή **κανονικές συντεταγμένες** ή **συντεταγμένες των τρόπων ταλαντώσεως**). Αυτό το κάνει, επειδή είναι οι συντεταγμένες στο «σύστημα αξόνων» των ιδιομορφών  $X_n(x)$  στη σειρά (6.2.117) με «άξονες» των συντεταγμένων αυτών τις ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$ . (Υπάρχει φυσικά κάποια αναλογία με το πολύ απλούστερο και πολύ πιο γνωστό σε μας σύστημα των Καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x, y, z)$ .)

Προχωράμε τώρα στο βασικό έργο μας: στον προσδιορισμό των κύριων συντεταγμένων  $q_n(t)$ .

### B6.2.6.3. Εξισώσεις για τον προσδιορισμό των κύριων συντεταγμένων

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω θα προσδιορίσουμε τη λύση  $v(x, t)$  της μη ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους (6.2.114): της εξισώσεως των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού, την επαναλαμβάνουμε

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t) \quad \text{με} \quad v = v(x, t). \quad (6.2.118)$$

Τη λύση αυτή την αναζητούμε στη μορφή (6.2.117) του αναπτύγματος σε ιδιομορφές  $X_n(x)$ . Την επαναλαμβάνουμε και αυτή

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x). \quad (6.2.119)$$

Πρόκειται για **υπέρθηση** (ισοδύναμα **επαλληλία**) τρόπων ταλαντώσεως, εδώ  $v_n(x, t) = q_n(t) X_n(x)$ .

Είναι προφανές ότι χρειαζόμαστε την τέταρτη χωρική (ως προς τη θέση  $x$ :  $0 \leq x \leq L$ ) μερική παράγωγο καθώς και τη δεύτερη χρονική (ως προς το χρόνο  $t$ :  $t \geq 0$ ) μερική παράγωγο της πιο πάνω λύσεως (6.2.119) που πάμε να προσδιορίσουμε. Και τις δύο αυτές μερικές παραγώγους τις υπολογίζουμε πολύ εύκολα σαν αθροίσματα των παραγώγων των όρων της σειράς (6.2.119) όρο προς όρο. Προκύπτουν έτσι οι ζητούμενες μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n''''(x) \quad \text{και επίσης} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) X_n(x). \quad (6.2.120)$$



(Οι τόνοι δηλώνουν χωρικές παραγώγους: ως προς τη θέση  $x$  είτε συνήθεις είτε μερικές παραγώγους, ενώ οι τελείες χρονικές: ως προς το χρόνο  $t$ , πάλι είτε συνήθεις είτε μερικές παραγώγους.)

Αντικαθιστούμε αμέσως αυτές τις δύο μερικές παραγώγους στη διαφορική εξίσωση (6.2.118) των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού. Προκύπτει η εξίσωση

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n''''(x) + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) X_n(x) = p(x, t). \quad (6.2.121)$$

Στην εξίσωση αυτή η φόρτιση  $p(x, t)$  της δοκού είναι βέβαια μια γνωστή συνάρτηση. Επίσης και οι συναρτήσεις  $X_n(x)$  είναι και αυτές γνωστές. Είναι οι ιδιομορφές που επαληθεύουν τη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.9) και καλύτερα (6.2.12). Την ξαναγράφουμε (αλλ' εδώ με δείκτες  $n$ : είναι άπειρες οι ιδιοτιμές  $\beta_n$ , οι σχετικές ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  και οι αντίστοιχες ιδιομορφές  $X_n(x)$ ):

$$X_n''''(x) - \beta_n^4 X_n(x) = 0, \quad \text{οπότε} \quad X_n''''(x) = \beta_n^4 X_n(x). \quad (6.2.122)$$

Φυσικά στη λύση (6.2.119) που έχουμε ήδη υιοθετήσει άγνωστες είναι μόνο οι συναρτήσεις  $q_n(t)$ : οι κύριες (ή κανονικές) συντεταγμένες στο **σύστημα αξόνων των ιδιομορφών ταλαντώσεως**  $X_n(x)$ , που καλείται και **κύριο σύστημα αξόνων** στις παρούσες καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού.

Σημειώνουμε βέβαια ότι με αντικατάσταση της τέταρτης παραγώγου  $X_n''''(x)$  από τη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.122) (στη δεύτερη γραφή της) στην εξίσωση (6.2.121) η τελευταία παίρνει την κάπως προτιμότερη, αρκετά πιο εξυπηρετική για μας στη δουλειά μας μορφή

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^4 q_n(t) X_n(x) + \rho A \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) X_n(x) = p(x, t). \quad (6.2.123)$$

Στην εξίσωση αυτή η τέταρτη παράγωγος  $X_n''''(x)$  δεν παρουσιάζεται πια, έχει ήδη εξαλειφθεί. Ευτυχώς έχουμε έτσι απαλλαγεί από την παράγωγο αυτή! Μας δίνεται επομένως η δυνατότητα να ξαναγράψουμε τώρα την ίδια ακριβώς εξίσωση (6.2.123) στην ακόμη απλούστερη μορφή της

$$\sum_{n=1}^{\infty} [EI \beta_n^4 q_n(t) + \rho A \ddot{q}_n(t)] X_n(x) = p(x, t), \quad (6.2.124)$$

απόλυτα ισοδύναμα στη μορφή

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\rho A \ddot{q}_n(t) + EI \beta_n^4 q_n(t)] X_n(x) = p(x, t). \quad (6.2.125)$$

Αν μάλιστα δεν είμαστε ακόμη ευχαριστημένοι, λαμβάνουμε υπόψη μας και τον τύπο (6.2.12) ορισμού της βοηθητικής σταθεράς  $\beta = \sqrt[4]{\rho A \omega^2 / (EI)}$ , οπότε για την  $n$ οτή ιδιοτιμή  $\beta = \beta_n$

$$\beta_n^4 = \frac{\rho A \omega_n^2}{EI}, \quad \text{άρα} \quad EI \beta_n^4 = \rho A \omega_n^2. \quad (6.2.126)$$

(Βέβαια εδώ το σύμβολο  $\omega_n$  δηλώνει τη γνωστή μας ιδιοσυχνότητα  $\omega$  που αντιστοιχεί στον  $n$  κύριο τρόπο ταλαντώσεως  $v_n(x, t)$  της δοκού και στη σχετική ιδιομορφή  $X_n(x)$ .) Με αυτόν τον τρόπο η πιο πάνω εξίσωση (6.2.125) γράφεται και στην ακόμη πιο ευπρόσδεκτη σε μας τελική μορφή

$$\rho A \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t)] X_n(x) = p(x, t). \quad (6.2.127)$$

Έχουμε κάνει ήδη αρκετά βήματα προς τη λύση  $v(x, t)$  που ζητάμε να βρούμε για το βέλος κάμψεως της δοκού μας υπό δυναμική καμπτική καταπόνηση, οπότε η δοκός οδηγείται σε ταλάντωση. Κάνουμε τώρα ένα ακόμη βήμα και μάλιστα ένα πάρα πολύ σημαντικό βήμα. Αυτό το βήμα αφορά στο ανάπτυγμα μιας συναρτήσεως  $h(x)$  στις ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  (πάλι με  $n = 1, 2, \dots$ ) της συνήθους δοκού που εξετάζουμε. Το ανάπτυγμα αυτό το χρειαζόμαστε, μας είναι απόλυτα αναγκαίο στην παραπέρα πορεία μας προς τη λύση  $v(x, t)$  που θέλουμε να βρούμε.

**B6.2.6.4. Ανάπτυγμα συναρτήσεως σε ιδιομορφές**

Ξέρουμε ήδη από την Παράγραφο Β6.2.4 ότι οι ιδιομορφές  $X_n(x)$  των καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού αποτελούν ένα σύστημα ορθογωνίων (ή ορθογωνικών) συναρτήσεων για κάθε συνηθισμένο είδος συνοριακών συνθηκών στα άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού. Επαναλαμβάνουμε τη θεμελιώδους σημασίας σχέση ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) (6.2.37)

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x) dx = 0 \quad \text{φυσικά με } m \neq n, \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad (6.2.128)$$

η οποία μας είναι απόλυτα αναγκαία στο σημείο αυτό. Φυσικά για  $m = n$  (μία μόνο ιδιομορφή: η  $X_m(x)$ ) δεν έχουμε δύο ιδιομορφές. Έχουμε μόνο μία, την  $X_m(x)$ , και είμαστε βέβαιοι αρκετά έξυπνοι, ώστε να μην προσδοκούμε το μηδενισμό του ολοκληρώματος (6.2.128) με το τετράγωνο  $X_m^2(x)$  σαν ολοκληρωτέα συνάρτηση  $s'$  αυτό, όταν  $m = n$ . Στην ειδική αυτή περίπτωση όπου  $m = n$  έχουμε τελικά τις σχέσεις (6.2.45) εδώ σε απόλυτα ισοδύναμη μορφή

$$\rho A \int_0^L X_m^2(x) dx = M_m \quad \text{πάλι με } m = 1, 2, \dots \quad (6.2.129)$$

Στη σχέση αυτή τα σύμβολα  $M_m$  ( $M_m > 0$ ) δηλώνουν τις **γενικευμένες μάζες** της δοκού, όπως τις αποκαλεί ο Πολιτικός Μηχανικός, που ορίζονται από τους τύπους αυτούς (6.2.129).

Η όλη εργασία για το ανάπτυγμα μιας συναρτήσεως  $h(x)$  στις ιδιομορφές  $X_n(x)$  είναι απόλυτα ανάλογη με εκείνη στις σειρές Fourier, που μας είναι πολύ γνωστή ήδη από το Κεφάλαιο Α16 των Συνήθων Διαφορικών Εισώσεων. (Θυμίζουμε ότι εκεί είχαμε εισαγάγει τις σειρές Fourier.) Μόνο που στις σειρές Fourier είχαμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις (ή, έστω, τις σχετικές μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις), ενώ εδώ έχουμε στη θέση τους τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  της δοκού υπό δυναμική καμπτική καταπόνηση. Δηλαδή εδώ μπορούμε να έχουμε **γενικευμένες σειρές Fourier** ως προς τις ιδιομορφές αυτές: αναπτύγματα συναρτήσεων  $h(x)$  στις ιδιομορφές  $X_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Σημειώνουμε ότι για τη σύγκλιση των γενικευμένων αυτών σειρών Fourier είναι σκόπιμο η συνάρτηση  $h(x)$  να επαληθεύει τις ίδιες ακριβώς συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού που επαληθεύουν και όλες οι ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$ . Υποθέτουμε ότι και οι δύο συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  που έχουμε στις αρχικές συνθήκες (6.2.109) πληρούν τις συνοριακές συνθήκες της δοκού. Επομένως και οι σχετικές γενικευμένες σειρές Fourier, δηλαδή τα αναπτύγματα των συναρτήσεων αυτών  $f(x)$  και  $g(x)$  στις ιδιομορφές  $X_n(x)$  θα συγκλίνουν.

Ας γίνουμε τώρα κάπως σαφέστεροι θεωρώντας μια γνωστή χωρική συνάρτηση  $h(x)$  κατά μήκος της δοκού μας (με  $0 \leq x \leq L$ ). Αναζητούμε εδώ τη γενικευμένη σειρά Fourier της, καλύτερα το ανάπτυγμά της στις ιδιομορφές  $X_n(x)$ , στη μορφή

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n X_n(x) \quad (6.2.130)$$

με  $H_n$  τους σχετικούς και προς το παρόν άγνωστους συντελεστές της σειράς αυτής (του αναπτύγματος αυτού). Για τον προσδιορισμό των συντελεστών αυτών  $H_n$  πρέπει αρχικά να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη του αναπτύγματος αυτού (6.2.130) επί την ιδιομορφή  $X_m(x)$  για κάποια συγκεκριμένη τιμή του δείκτη  $m$ . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι

$$h(x)X_m(x) = \left[ \sum_{n=1}^{\infty} H_n X_n(x) \right] X_m(x) \quad \text{με } m = 1, 2, \dots \quad (6.2.131)$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της σχέσεως αυτής ως προς  $x$  κατά μήκος της δοκού, δηλαδή στο διάστημα  $0 \leq x \leq L$ . Έτσι συνάγουμε ότι

$$\int_0^L h(x)X_m(x) dx = \int_0^L \left[ \sum_{n=1}^{\infty} H_n X_n(x) \right] X_m(x) dx. \quad (6.2.132)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} H_n X_n(x)$  είναι συγκλίνουσα και ακόμη ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Απειροστικού Λογισμού στο Κεφάλαιο των Σειρών για την εναλλαγή της σειράς μεταξύ ολοκληρώσεως και αθροίσεως στο δεξιό μέλος της πιο πάνω σχέσεως (6.2.132). Υπό τις προϋποθέσεις αυτές, οι οποίες γενικά πληρούνται, η ίδια σχέση (6.2.132) γράφεται στη μορφή

$$\int_0^L h(x) X_m(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ H_n \int_0^L X_n(x) X_m(x) dx \right]. \quad (6.2.133)$$

Δηλαδή τώρα στο δεξιό μέλος έχουμε μια σειρά (ένα άπειρο άθροισμα) ολοκληρωμάτων (το καθένα με συντελεστή  $H_n$ ) αντί για ένα ολοκλήρωμα σειράς (απείρου αθροίσματος).

Γνωρίζουμε όμως από τις σχέσεις ορθογωνιότητας (6.2.128) των ιδιομορφών  $X_n(x)$  ότι όλα σχεδόν αυτά τα ολοκληρώματα  $\int_0^L X_n(x) X_m(x) dx$  στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.133) είναι ίσα με το μηδέν. Λέμε όλα σχεδόν, απλά γιατί το ολοκλήρωμα εκείνο που αντιστοιχεί στην τιμή  $n = m$  του δείκτη αθροίσεως  $n$  δεν είναι ίσο με το μηδέν. Είναι το ολοκλήρωμα (6.2.129) με τιμή  $M_m/(\rho A)$ : την αντίστοιχη γενικευμένη μάζα  $M_m$  της δοκού δια της γραμμικής πυκνότητάς της  $\rho A$ . Με τις σκέψεις αυτές το δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.133) απλοποιείται αφάνταστα, αφού μόλις ένας όρος απομένει από ολόκληρη σειρά: ο όρος με  $n = m$ . Έτσι το μέλος αυτό παίρνει την τελική μορφή

$$\int_0^L h(x) X_m(x) dx = \frac{M_m}{\rho A} H_m \quad \text{με } m = 1, 2, \dots \quad (6.2.134)$$

Λύνοντας τώρα ως προς το μέχρι τώρα άγνωστο συντελεστή  $H_m$ , βρίσκουμε αμέσως ότι τελικά

$$H_m = \frac{\rho A}{M_m} \int_0^L h(x) X_m(x) dx \quad \text{με } m = 1, 2, \dots \quad (6.2.135)$$

Με τον τρόπο αυτό έχουν πλέον προσδιορισθεί όλοι οι συντελεστές  $H_n$  (ή  $H_m$ , το ίδιο κάνει!) του αναπτύγματος (6.2.130) μιας συναρτήσεως  $h(x)$  κατά μήκος της δοκού στις ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  της ίδιας δοκού. Οι ιδιομορφές αυτές εξαρτώνται φυσικά από τις συνοριακές συνθήκες (στηρίξεως ή ελλείψεως στηρίξεως) στα άκρα της. Ξαναγράφουμε (σε μία μόνο γραμμή) το ανάπτυγμα σε ιδιομορφές (6.2.130) της συναρτήσεως  $h(x)$  τώρα μαζί με τους συντελεστές του

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n X_n(x) \quad \text{με συντελεστές } H_n = \frac{\rho A}{M_n} \int_0^L h(x) X_n(x) dx \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.136)$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει τις νόρμες  $N_n = M_n/(\rho A)$  των ιδιομορφών ταλαντώσεως  $X_n(x)$ , όπως ήδη τις έχουμε ορίσει στις σχέσεις (6.2.44). Έτσι το ανάπτυγμα (6.2.136) σε ιδιομορφές θα γραφότανε και σε λίγο πιο απλοποιημένη μορφή απλά θέτοντας  $\rho A/M_n = 1/N_n$  στο δεξιό μέλος του. Εντούτοις ο Πολιτικός Μηχανικός προτιμάει τις γενικευμένες μάζες  $M_n$  από τις νόρμες  $N_n = M_n/(\rho A)$  των ιδιομορφών ταλαντώσεως  $X_n(x)$ . Και πάρα πολύ σωστά ενεργεί έτσι: οι γενικευμένες μάζες  $M_n$  έχουν κάποια φυσική ερμηνεία (τουλάχιστον δηλώνουν μάζες!). Είναι επίσης γενικεύσιμες και σε μη συνήθεις δοκούς: εν προκειμένω σε δοκούς με μεταβλητή γραμμική πυκνότητα  $\rho A(x) := \rho(x)A(x)$  κατά μήκος τους.

Επαναλαμβάνουμε τέλος ότι το ανάπτυγμα σε ιδιομορφές (6.2.136) (πρώτη σχέση) με συντελεστές  $H_n$  (δεύτερη σχέση) αποτελεί ουσιαστικά μια γενίκευση των σειρών Fourier. Πρόκειται για γενίκευση από τις τριγωνομετρικές σειρές Fourier (ή την ισοδύναμή τους μιγαδική εκθετική σειρά Fourier) σε ιδιομορφές  $X_n(x)$  καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού.

#### B6.2.6.5. Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις κύριες συντεταγμένες

Καταρχήν ξαναγράφουμε τη σχέση (6.2.127) στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή της

$$\frac{\rho(x, t)}{\rho A} = \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t)] X_n(x). \quad (6.2.137)$$

Τη μορφή αυτή τη συγκρίνουμε με το ανάπτυγμα σε ιδιομορφές (6.2.136) (πρώτος τύπος). Κατ' αυτόν τον τρόπο συμπεραίνουμε άμεσα ότι πραγματικά η σχέση (6.2.137) εκφράζει το ανάπτυγμα της συναρτήσεως  $p(x, t)/(\rho A)$  σε ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  φυσικά με μεταβλητή τη θέση  $x$  κατά μήκος της δοκού (με  $0 \leq x \leq L$ ) και όχι το χρόνο  $t$ . Συνάγουμε επίσης το πρόσθετο συμπέρασμα ότι στο ανάπτυγμα αυτό (6.2.137) οι σχετικοί συντελεστές (οι οποίοι δεν εξαρτώνται βέβαια από τη θέση  $x$ , ενώ εξαρτώνται φυσικά από το χρόνο  $t$ ) είναι οι χρονικές συναρτήσεις

$$H_n(t) := \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.138)$$

Όμως, όπως ήδη αποδείξαμε στο προηγούμενο Εδάφιο Β6.2.6.4, οι συναρτήσεις αυτές  $H_n(t)$ , δηλαδή οι συντελεστές του αναπτύγματος (6.2.137) σε ιδιομορφές  $X_n(x)$ , μπορούν να προσδιορισθούν από τους τύπους (6.2.135) ή καλύτερα (6.2.136) (δεύτεροι τύποι). Άρα ισχύουν οι σχέσεις

$$H_n(t) := \ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{\rho A}{M_n} \int_0^L \frac{p(x, t)}{\rho A} X_n(x) dx \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.139)$$

Απλοποιώντας μάλιστα τη γραμμική πυκνότητα  $\rho A$  στο δεξιό μέλος, παίρνουμε τις σχέσεις

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{1}{M_n} \int_0^L p(x, t) X_n(x) dx \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.140)$$

Πρόκειται βέβαια για μη ομογενείς (ασφαλώς μόνο στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις!) γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως με άγνωστες συναρτήσεις τις κύριες συντεταγμένες  $q_n(t)$ . Φυσικά οι ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  (οι οποίες αντιστοιχούν στις ιδιομορφές  $X_n(x)$  και στους σχετικούς τρόπους ταλαντώσεως  $v_n(x, t) = q_n(t)X_n(x)$ ) είναι ήδη γνωστές από τους τελευταίους τύπους (6.2.98):  $\omega_n = \beta_n^2 \sqrt{EI/(\rho A)}$  μέσω των αντίστοιχων ιδιοτιμών  $\beta_n$ . Οι ιδιοτιμές αυτές  $\beta_n$  υπολογίζονται πρώτες από τη σχετική **χαρακτηριστική εξίσωση** ή **εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων**, π.χ. από την εξίσωση (6.2.67):  $\tanh \beta L = \tan \beta L$  για δοκό με πάκτωση-κύλιση στα δύο άκρα της.

Τώρα στα δεξιά μέλη των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (6.2.140) έχουν παρουσιασθεί τα ολοκληρώματα

$$P_n(t) = \int_0^L p(x, t) X_n(x) dx \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.141)$$

Τα ολοκληρώματα αυτά είναι βέβαια γνωστές ποσότητες (καλύτερα συναρτήσεις του χρόνου  $t$ ). Τούτο ισχύει, επειδή τόσο η κάθετη κατανομημένη φόρτιση  $p(x, t)$  όσο και οι ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  είναι γνωστές συναρτήσεις. Τις νέες αυτές χρονικές συναρτήσεις  $P_n(t)$  ο Πολιτικός Μηχανικός τις αποκαλεί στα προβλήματα των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων δοκών **γενικευμένες φορτίσεις**. Με τη χρήση τους οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (6.2.140) παίρνουν τις συντομότερες στη γραφή μορφές τους

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n} \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.142)$$

(Παρατηρούμε ότι στα δεξιά μέλη των εξισώσεων αυτών παρουσιάζονται οι λόγοι  $P_n(t)/M_n$  των γενικευμένων φορτίσεων  $P_n(t)$  δια των αντίστοιχων γενικευμένων μαζών  $M_n$ .) Αυτές οι εξισώσεις (6.2.142) είναι οι μη ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως που θα μας επιτρέψουν να προσδιορίσουμε τις κύριες συντεταγμένες  $q_n(t)$ , οι οποίες είναι προς το παρόν άγνωστες συναρτήσεις. Αυτές είναι οι συναρτήσεις που υπεισέρχονται στον τύπο (6.2.117) ή (6.2.119) της λύσεως σε μορφή σειράς  $v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)X_n(x)$  του παρόντος προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών για τις εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού.

Ας σημειώσουμε επίσης και την πραγματικά ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα πλήρη αναλογία μεταξύ των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (6.2.142) για τις κύριες συντεταγμένες  $q_n(t)$  και της πολύ γνωστής και επίσης συνήθους διαφορικής εξίσωσης του απλού αρμονικού ταλαντωτή

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m} \quad \text{με } \omega_0^2 = \frac{k}{m}. \quad (6.2.143)$$

Η εξίσωση αυτή αναφέρεται σε ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου (μάζας  $m$ ) και ελατηρίου (σταθεράς  $k$ ) χωρίς όμως απόσβεση (δηλαδή με  $c = 0$ ). Με δεδομένη μάλιστα την αναλογία αυτή είναι καθόλα δικαιολογημένος ο όρος **γενικευμένες φορτίσεις** για τις χρονικές συναρτήσεις  $P_n(t)$ . Παρατηρούμε πως αυτές υπεισέρχονται στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (6.2.142), ακριβώς όπως η αληθινή φόρτιση  $p(t)$  υπεισέρχεται στη συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.143).

Φυσικά η ίδια ομοιότητα παραμένει και στην εναλλακτική μορφή των ίδιων συνήθων διαφορικών εξισώσεων με τις μάζες να έχουν μεταφερθεί στα αριστερά μέλη τους. Πραγματικά η συνήθης διαφορική εξίσωση (6.2.143) του χωρίς απόσβεση αρμονικού ταλαντωτή ήταν γραμμένη αρχικά στην ισοδύναμη μορφή της

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = p(t). \quad (6.2.144)$$

Η μορφή αυτή προκύπτει άμεσα από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα με μεταφορά όμως του όρου της δυνάμεως του ελατηρίου  $-ku(t)$  στο αριστερό μέλος, εκεί βέβαια με πρόσημο σύν. Τώρα ανάλογα οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (6.2.142) για τις κύριες συντεταγμένες  $q_n(t)$  στις παρούσες καμπτικές ταλαντώσεις μπορούν κι αυτές να γραφούν στις απόλυτα ισοδύναμες μορφές τους

$$M_n\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 M_n q_n(t) = P_n(t) \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.145)$$

με τις γενικευμένες μάζες  $M_n$  τώρα στα αριστερά μέλη τους.

Μπορούμε μάλιστα να εισαγάγουμε και τις νέες ποσότητες

$$K_n = \omega_n^2 M_n \quad \text{ισοδύναμα} \quad K_n = \rho A \omega_n^2 \int_0^L X_n^2(x) dx = EI \beta_n^4 \int_0^L X_n^2(x) dx \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.146)$$

με βάση τις σχέσεις (6.2.129) και (6.2.126). Αυτές τις ποσότητες ο Πολιτικός Μηχανικός τις καλεί **γενικευμένες δυσκαμψίες**. Τότε οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (6.2.145) παίρνουν τις μορφές

$$M_n\ddot{q}_n(t) + K_n q_n(t) = P_n(t) \quad \text{ξανά με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.147)$$

Αυτές καθιστούν και πάλι πλήρη την αναλογία μεταξύ της κλασικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης του απλού αρμονικού ταλαντωτή (6.2.144) και των αντίστοιχων αυτών εξισώσεων (6.2.147) στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκού για τις κύριες συντεταγμένες  $q_n(t)$  των ταλαντώσεων αυτών.

◆ **Συμπέρασμα:** Το συμπέρασμά μας είναι ότι οι καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού (εδώ χωρίς απόσβεση) ανάγονται σε ένα σύστημα άπειρων συνήθων διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξεως. Όλες τους είναι της ίδιας ακριβώς μορφής με την εξίσωση του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου μάζας  $m$  και ελατηρίου σταθεράς  $k$  (και πάλι χωρίς απόσβεση). Έτσι ένα συνεχές μηχανικό σύστημα, ένα απειροβάθμιο μηχανικό σύστημα, η δοκός, έχει αναχθεί σε μια **άπειρη ακολουθία μονοβάθμιων μηχανικών συστημάτων** (με  $n = 1, 2, \dots$ ). Το καθένα από αυτά αντιστοιχεί σε έναν **κύριο τρόπο ταλάντωσης** της δοκού  $v_n(x, t) = q_n(t)X_n(x)$ : ταλάντωση κατά τον «άξονα» που καθορίζει η ιδιομορφή  $X_n(x)$ . Για την αναγωγή που προαναφέραμε δεν έχει γίνει καμία προσέγγιση στην αρχική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς (6.2.108). Και φυσικά ούτε **διακριτοποίηση** της δοκού: ούτε αναγωγή της από **συνεχές μηχανικό σύστημα** σε **διακριτό**.

Επαναλαμβάνουμε τώρα όλες τις αντιστοιχίες των μηχανικών μεγεθών μας:

- Οι **γενικευμένες μάζες**  $M_n$  στη δοκό αντιστοιχούν στη **μάζα**  $m$  του υλικού σημείου.
- Οι **γενικευμένες δυσκαμψίες**  $K_n = \omega_n^2 M_n$  στη δοκό αντιστοιχούν στη **σταθερά του ελατηρίου**  $k = \omega_0^2 m$ . (Φυσικά ο όρος **δυσκαμψία** πρέπει να χρησιμοποιείται μόνο σε φαινόμενα κάμψης, όχι σε φαινόμενα που δεν έχουν σχέση με κάμψη, π.χ. όχι δυσκαμψία ελατηρίου!)
- Οι **γενικευμένες φορτίσεις**  $P_n(t)$  στη δοκό αντιστοιχούν στη **φόρτιση** (στην **εξωτερική δύναμη**)  $p(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο.
- Τέλος οι **κύριες συντεταγμένες**  $q_n(t)$  στις καμπτικές ταλαντώσεις της δοκού αντιστοιχούν στη **μετατόπιση**  $u(t)$  του υλικού σημείου ως προς τη θέση ισορροπίας του.

Κι αν ακόμη όλες αυτές οι έννοιες δεν είναι απόλυτα κατανοητές, εντούτοις ένα σημείο πρέπει σίγουρα να έχει γίνει πλήρως κατανοητό: Το πρόβλημα των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων δοκού έχει αναχθεί στις μη ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως (6.2.142) και ισοδύναμα (6.2.147). Αυτές όμως οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις συμπίπτουν απόλυτα με τη συνήθη διαφορική εξίσωση (6.2.143) και (6.2.144) αντίστοιχα του μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος υλικού σημείου (μάζας  $m$ ) και ελατηρίου (σταθεράς  $k$ ). Και από καθαρά μαθηματικής απόψεως (αν περιορισθούμε στην άποψη αυτή) τούτο μόνο είναι που μας ενδιαφέρει εδώ, ώστε να μπορέσουμε να προχωρήσουμε πιο κάτω στην επίλυση του παρόντος προβλήματος.

#### **Β6.2.6.6. Οι λύσεις των συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τις κύριες συντεταγμένες**

Στο μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα υλικού σημείου-ελατηρίου (ισοδύναμα μάζας-ελατηρίου) για να προσδιορίσουμε πλήρως τη λύση της σχετικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως (6.2.143) χρειάζεται ασφαλώς να γνωρίζουμε και τις δύο απαιτούμενες αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0 \quad (\text{αρχική μετατόπιση}) \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = v_0 \quad (\text{αρχική ταχύτητα}). \quad (6.2.148)$$

Τούτο είναι εύλογο από φυσικής απόψεως. Πώς να ξέρουμε τη μετατόπιση  $u(t)$  του υλικού σημείου κάθε χρονική στιγμή  $t > 0$ , αν δεν ξέρουμε την αρχική θέση του  $u_0$  και την αρχική ταχύτητά του  $v_0$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ; Είναι όμως εύλογο και από μαθηματικής απόψεως. Πώς να βρούμε μια συγκεκριμένη λύση (μερική ή ειδική λύση) της ισχύουσας συνήθους διαφορικής εξίσωσης (6.2.143) χωρίς να διαθέτουμε δύο συνθήκες για τη λύση αυτή: εδώ κατά προτίμηση τις αρχικές συνθήκες;

Υποθέτοντας λοιπόν γνωστές τις αρχικές αυτές συνθήκες (6.2.148) η μη ομογενής συνήθης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως (6.2.143) μας δίνει τη ζητούμενη μερική (ή ειδική) λύση. Είναι η γνωστή μας λύση (11.6.11) της Ενότητας Α11.6 στις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Τη θυμίζουμε:

$$u(t) = u_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{1}{m\omega_0} \int_0^t p(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau \quad \text{με} \quad t \geq 0 \quad (6.2.149)$$

και ασφαλώς με  $\sin \omega_0(t - \tau) := \sin[\omega_0(t - \tau)]$ . Η λύση αυτή προκύπτει είτε με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων είτε με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, που η χρήση του είναι ίσως και λίγο ευκολότερη στους σχετικούς υπολογισμούς. Η ίδια λύση  $u(t)$  καλείται συχνά και **ολοκληρωτικός τύπος Duhamel** και το σχετικό συνελκτικό ολοκλήρωμα **ολοκλήρωμα Duhamel**.

Εδώ τώρα πίσω στο πρόβλημα των εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων μιας συνήθους δοκού ισχύει η ανάλογη συνήθης διαφορική εξίσωση (6.2.142). Ας την επαναλάβουμε

$$\ddot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{P_n(t)}{M_n} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.150)$$

Η λύση της θα είναι φυσικά ακριβώς παρόμοια με την πιο πάνω λύση (6.2.149). Απλά πρέπει να αλλάξουμε λίγο το συμβολισμό. Έτσι γράφουμε τη λύση της εξίσωσης αυτής (6.2.150) στη μορφή

$$q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t + \frac{1}{M_n \omega_n} \int_0^t P_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.151)$$

Βέβαια, αν και οι δύο ποσότητες  $q_n(0)$  και  $\dot{q}_n(0)$  (που εκφράζουν τις δύο αρχικές συνθήκες στο παρόν πρόβλημα) θεωρηθούν γνωστές, τότε απλά έχουμε τη ζητούμενη μερική (ή ειδική) λύση. Στην αντίθετη περίπτωση, αν ερμηνευθούν σαν αυθαίρετες σταθερές, τότε έχουμε τη γενική λύση. Εμείς φυσικά θέλουμε το πρώτο: να είναι γνωστές οι τιμές  $q_n(0)$  και  $\dot{q}_n(0)$  στη λύση αυτή, ώστε να είναι η ζητούμενη μερική (ή ειδική) λύση. (Έχουμε συγκεκριμένο πρόβλημα δοκού σε καμπτικές ταλαντώσεις και απαιτείται συγκεκριμένη λύση και όχι λύση με αυθαίρετες σταθερές σ' αυτήν!) Πρέπει λοιπόν να προσδιορίσουμε τις δύο τιμές  $q_n(0)$  και  $\dot{q}_n(0)$  και, δυστυχώς για μας, χρειάζεται να δουλέψουμε λίγο προς το σκοπό αυτό. Ξεκινάμε λοιπόν και σε λίγο θα τα έχουμε καταφέρει! *Ναι!*

**Β6.2.6.7. Οι αρχικές συνθήκες για τις κύριες συντεταγμένες**

Πρόκειται φυσικά να εκμεταλλευθούμε τις δύο αρχικές συνθήκες (6.2.109), που μας έχουν δοθεί για τη χρονική στιγμή  $t = 0$ : (α) την αρχική θέση  $f(x)$  και (β) την αρχική ταχύτητα  $g(x)$  των σημείων της συνήθους δοκού (με  $0 \leq x \leq L$ ). Τις ξαναγράφουμε και εδώ, ώστε να τις θυμηθούμε καλύτερα και να τις χρησιμοποιήσουμε πολύ πιο εύκολα σε λίγο:

$$v(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x). \quad (6.2.152)$$

Πολύ καλό είναι επίσης να ξαναγράψουμε και τη λύση  $v(x, t)$  που ζητάμε στη μορφή (6.2.119) αναπτύγματος σε ιδιομορφές  $X_n(x)$ :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) X_n(x). \quad (6.2.153)$$

Γνωστές σ' αυτήν είναι οι ιδιομορφές  $X_n(x)$  ταλαντώσεως της δοκού. Και τώρα είναι σχεδόν γνωστές και οι κύριες συντεταγμένες  $q_n(t)$  με βάση τους ολοκληρωτικούς τύπους του Duhamel (6.2.151) για τον προσδιορισμό τους. Μόνο οι σταθερές  $q_n(0)$  και  $\dot{q}_n(0)$  μας λείπουν ακόμη στους τύπους αυτούς. Λίγη υπομονή και θα τις προσδιορίσουμε κι αυτές με χρήση των δύο αρχικών συνθηκών (6.2.152).

Θέτουμε λοιπόν απλά  $t = 0$  στο ανάπτυγμα σε ιδιομορφές (6.2.153) και παίρνουμε με βάση και την πρώτη αρχική συνθήκη (6.2.152)

$$v(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(0) X_n(x). \quad (6.2.154)$$

Ανάλογα παραγωγίζουμε το ίδιο ανάπτυγμα σε ιδιομορφές (6.2.153) ως προς το χρόνο  $t$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(t) X_n(x) \quad (6.2.155)$$

και παίρνουμε τώρα για  $t = 0$  με βάση τη δεύτερη αρχική συνθήκη (6.2.152)

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_n(0) X_n(x). \quad (6.2.156)$$

Τί ακριβώς μας δηλώνουν τα δύο αυτά αναπτύγματα σε ιδιομορφές  $X_n(x)$ , (6.2.154) και (6.2.156), για τις συναρτήσεις  $f(x)$  (αρχική θέση) και  $g(x)$  (αρχική ταχύτητα), που υπεισέρχονται στις δύο αρχικές συνθήκες (για  $t = 0$ ) στη δοκό μας; Απλά ότι οι ποσότητες  $q_n(0)$  και  $\dot{q}_n(0)$  που ζητάμε να προσδιορίσουμε δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι συντελεστές των δύο γνωστών συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$  αντίστοιχα στα αναπτύγματά τους σε ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  για τη δοκό μας.

Με βάση λοιπόν τους δεύτερους τύπους (6.2.136) για τους συντελεστές  $H_n$  σε ανάπτυγμα σε ιδιομορφές κατά μήκος δοκού έχουμε από τα αναπτύγματα σε ιδιομορφές (6.2.154) και (6.2.156)

$$q_n(0) = \frac{\rho A}{M_n} \int_0^L f(x) X_n(x) dx \quad \text{και} \quad \dot{q}_n(0) = \frac{\rho A}{M_n} \int_0^L g(x) X_n(x) dx \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.2.157)$$

Με τον τρόπο αυτό λάβαμε πλήρως υπόψη μας και τις δύο αρχικές συνθήκες (6.2.152) και με τη βοήθειά τους προσδιορίσαμε όλες τις σταθερές  $q_n(0)$  και  $\dot{q}_n(0)$  που χρειαζότανε να γνωρίζουμε στις λύσεις (6.2.151) (σε μορφή ολοκληρωτικών τύπων Duhamel) για τις κύριες συντεταγμένες  $q_n(t)$ .

Έτσι οι λύσεις αυτές  $q_n(t)$ , οι κύριες συντεταγμένες στο παρόν πρόβλημα καμπτικών ταλαντώσεων δοκού, είναι πια απόλυτα καθορισμένες σαν μερικές (ή ειδικές) λύσεις των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (6.2.150), που αφορούν στο ίδιο πρόβλημα. Πιο συγκεκριμένα οι αρχικές τιμές  $q_n(0)$  και  $\dot{q}_n(0)$  υπολογίζονται από τους αμέσως πιο πάνω τύπους (6.2.157). Επίσης οι γενικευμένες φορτίσεις  $P_n(t)$  προσδιορίζονται από τους τύπους (6.2.141). Τέλος οι ιδιομορφές  $X_n(x)$  προσδιορίζονται με τον τρόπο που εκτενώς εκθέσαμε στην Παράγραφο Β6.2.5 με βάση τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της δοκού μας. Στην ίδια Παράγραφο Β6.2.5

προσδιορίσαμε επίσης και τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  μέσω των ιδιοτιμών  $\beta_n$  που βρίσκονται σαν λύσεις της σχετικής υπερβατικής εξίσωσης. Άρα με γνωστές τόσο (α) τις κύριες συντεταγμένες  $q_n(t)$  όσο και (β) τις ιδιομορφές  $X_n(x)$  στις παρούσες εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις δοκού το βέλος κάμψεως της δοκού  $v(x, t)$  ορίζεται πλήρως με βάση το ανάπτυγμα του (6.2.153) σε ιδιομορφές. Στη λύση αυτή έχουν ληφθεί κατάλληλα υπόψη τόσο (α) η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς (6.2.118) όσο και (β) οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες και (γ) οι δύο αρχικές συνθήκες.

### B6.2.7. Μηδενικές αρχικές συνθήκες και ελεύθερες ταλαντώσεις

Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, δηλαδή  $f(x) \equiv 0$  και  $g(x) \equiv 0$  στη σχέσεις (6.2.152), τότε προφανώς  $q_n(0) = 0$  και  $\dot{q}_n(0) = 0$  εξαιτίας των τύπων (6.2.157). Στην ειδική αλλά σημαντική αυτή περίπτωση οι λύσεις  $q_n(t)$  στις σχέσεις (6.2.151) απλοποιούνται αρκετά παίρνοντας τις μορφές απλών ολοκληρωμάτων Duhamel (που είναι βέβαια χρονικά συνελκτικά ολοκληρώματα)

$$q_n(t) = \frac{1}{M_n \omega_n} \int_0^t P_n(\tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.158)$$

Στην άλλη σημαντική ειδική περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων, δηλαδή ταλαντώσεων με μηδενική εξωτερική φόρτιση  $p(x, t) \equiv 0$ , οι γενικευμένες φορτίσεις  $P_n(t)$  μηδενίζονται:  $P_n(t) \equiv 0$ . Τούτο είναι απόλυτα σαφές από τους τύπους υπολογισμού τους (6.2.141). Στην ενδιαφέρουσα αυτή περίπτωση οι τύποι (6.2.151) για τις λύσεις  $q_n(t)$  απλοποιούνται πάλι και παίρνουν τις μορφές

$$q_n(t) = q_n(0) \cos \omega_n t + \frac{\dot{q}_n(0)}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (6.2.159)$$

Αν βέβαια και οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές:  $f(x) \equiv 0$  και  $g(x) \equiv 0$ , αλλ' ούτε και φόρτιση υπάρχει:  $p(x, t) \equiv 0$ , τότε βέβαια γενικά (άμα δεν υπάρχουν ούτε ροπές στα άκρα της δοκού) ούτε καμπτική ταλάντωση της δοκού δε μπορεί να υπάρξει προς μεγάλη χαρά του Πολιτικού Μηχανικού.

### B6.2.8. Γενικεύσεις και πρακτικές εφαρμογές της μεθόδου

Τα πιο πάνω αποτελέσματα για τη λύση  $v(x, t)$  του προβλήματος των ταλαντώσεων δοκού υπό δυναμική καμπτική καταπόνηση γενικεύονται σε σωρεία προβλημάτων ιδιαίτερου ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού. Θεωρούμε σκόπιμο να αναφέρουμε επιγραμματικά μερικά από αυτά: (α) Μη συνήθεις δοκούς με μεταβλητή δυσκαμψία  $EI(x)$  ή/και γραμμική πυκνότητα  $\rho A(x)$  κατά μήκος τους. (β) Μη συνηθισμένες στηρίξεις σε άκρα δοκού (π.χ. μέσω ελατηρίου). (γ) Ταλαντώσεις δοκού με απόσβεση. (δ) Ταλαντώσεις δοκού με ταυτόχρονη σταθερή αξονική δύναμη  $N$ . (ε) Ταλαντώσεις δοκού που στηρίζεται πάνω σε ελαστική βάση (σε ελαστική θεμελίωση) με την υπόθεση Winkler. (στ) Ταλαντώσεις δοκού που οφείλονται σε σεισμούς: ένας σεισμός προκαλεί ουσιαστικά μια ισοδύναμη εξωτερική φόρτιση  $p^*(x, t)$  πάνω στη δοκό. (ζ) Ταλαντώσεις **δοκού Timoshenko** με μοντελοποίηση πιο ακριβή από την παρούσα εξίσωση (6.2.118) για **δοκό Bernoulli-Euler**, κλπ.

Ανάμεσα στις πρακτικές εφαρμογές της μεθόδου που ήδη εκθέσαμε περιλαμβάνονται πέρα από τις προηγούμενες γενικεύσεις (στις οποίες εξέχουσα θέση κατέχει η απόκριση μιας δοκού σε σεισμική φόρτιση) και διάφορες ενδιαφέρουσες εφαρμογές. Τέτοιες εφαρμογές αφορούν μεταξύ άλλων: (α) σε κινούμενα συγκεντρωμένα φορτία κατά μήκος της δοκού (που παριστάνονται με την κατάλληλη χρήση της συναρτήσεως δέλτα του Dirac) και (β) σε αρμονικές φορτίσεις της δοκού με συχνότητα  $\omega$ . Στην περίπτωση αυτή, εάν δεν έχουμε απόσβεση των ταλαντώσεων και ταυτόχρονα η συχνότητα  $\omega$  της εξωτερικής φορτίσεως συμπίπτει με μία ιδιοσυχνότητα  $\omega_n$  της δοκού, τότε παρουσιάζεται το ανεπιθύμητο φαινόμενο του **συντονισμού**, που πρέπει να αποφεύγεται.

Όλα αυτά τα φαινόμενα και πολλά άλλα και εξίσου ενδιαφέροντα μπορεί να μελετήσει, τώρα που έχει επαρκείς μαθηματικές βάσεις πάνω στο θέμα, ο Πολιτικός Μηχανικός σε βιβλία Δυναμικής των Κατασκευών. Φυσικά ο τελικός στόχος του δεν είναι βέβαια απλά να επιλύει προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών: Είναι να συνάγει από τις λύσεις που προσδιορίζει τα αναγκαία συμπεράσματα για το σωστό σχεδιασμό των κατασκευών του, π.χ. τον **αντισεισμικό σχεδιασμό**.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β7

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στο πρόβλημα της ορθογωνικής συνήθους πλάκας με απλή στήριξη στις τέσσερις πλευρές της και με αυθαίρετη κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x, y)$  στην επιφάνειά της. Το πρόβλημα αυτό το λύνουμε με τη μέθοδο του Navier (1820) που βασίζεται σε διπλές ημιτονικές σειρές Fourier. Τη θεωρία τους την αναφέρουμε περιληπτικά. Στη συνέχεια επίσης περιληπτικά αναφερόμαστε και στην εναλλακτική μέθοδο του Lévy (1899) για το ίδιο πρόβλημα. Αυτή χρησιμοποιεί μόνο απλές ημιτονικές σειρές Fourier ανάγοντας το πρόβλημα της πλάκας σε ένα σύστημα άπειρων αλλά μη συζευγμένων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων τετάρτης τάξεως.

### Β7.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ NAVIER ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ

#### Β7.1.1. Το πρόβλημα συνοριακών τιμών

Η μέθοδος του Navier (1820) είναι η πρώτη και η πιο γνωστή μέθοδος για την επίλυση προβλημάτων ορθογωνικών συνήθων πλακών υπό στατικές συνθήκες φορτίσεως και με απλή στήριξη (έδραση) και στις τέσσερις πλευρές τους: σε όλο το σύνορό τους. Θεωρούμε μια τέτοια πλάκα διαστάσεων  $a$  επί  $b$  (εδώ υποθέτουμε ότι  $0 \leq x \leq a$  και  $0 \leq y \leq b$ ), όπως αυτή που φαίνεται στο Σχήμα Β7.1 της επόμενης σελίδας. Η πλάκα έχει δυσκαμψία (τύπος (2.2.16) του Κεφαλαίου Β2)

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7.1.1)$$

με  $E$  το μέτρο ελαστικότητας και  $\nu$  το λόγο του Poisson του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της και  $h$  το πάχος της. Η φόρτιση της πλάκας είναι κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x, y)$  (συνήθως σε  $\text{Pa} \equiv \text{kN/m}^2$ ). Άγνωστη συνάρτηση είναι το **βέλος κάμψεως** της πλάκας  $w(x, y)$ .

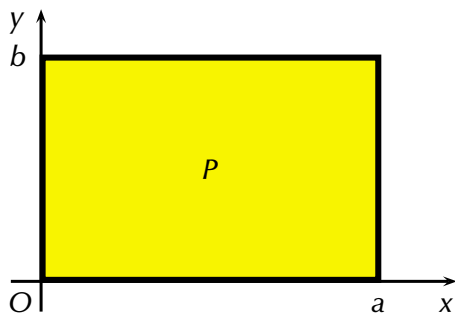
Όπως ήδη γνωρίζουμε από την Παράγραφο Β2.2.3 του Κεφαλαίου Β2, εξίσωση (2.2.15), το **βέλος κάμψεως** (που μερικές φορές καλείται και **βύθιση**)  $w(x, y)$  συνήθους πλάκας  $P$  υπό στατικές συνθήκες φορτίσεως επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους τετάρτης τάξεως

$$\nabla^4 w = \frac{p(x, y)}{D} \iff \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad \text{με } w = w(x, y), \quad (x, y) \in P. \quad (7.1.2)$$

Εδώ βέβαια  $\nabla^4 \equiv (\nabla^2)^2$  είναι ο διαρμονικός τελεστής, ενώ  $\nabla^2$  είναι ο τελεστής του Laplace.

Επιπλέον, όπως αποδεικνύεται στη Θεωρία των Πλακών (π.χ. στο Εφαρμοσμένο Notebook Συνήθεις Πλάκες, Ενότητα 2.3, Εντολή (9) στο Τεύχος 2: Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks III για Πολιτικούς Μηχανικούς), οι τρεις **ροπές** στη συνήθη πλάκα: οι δύο **ροπές κάμψεως** (ή **καμπτικές ροπές**)  $M_x$  και  $M_y$  και η **ροπή συστροφής**  $M_{xy} = M_{yx}$  δίνονται από τους τρεις γνωστούς τύπους

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (7.1.3)$$



**Σχήμα Β7.1:** Ορθογωνική πλάκα  $P = [0, a] \times [0, b]$ , δηλαδή με  $0 \leq x \leq a$  και  $0 \leq y \leq b$ . Η πλάκα θεωρείται συνήθης πλάκα (δηλαδή πλάκα με τις υποθέσεις του Kirchhoff) και με απλή στήριξη σε όλο το σύνορό της (και στις τέσσερις πλευρές της).

Τώρα για την ορθογωνική πλάκα του αμέσως πιο πάνω Σχήματος Β7.1 με απλή στήριξη σε όλο το σύνορό της (και στις τέσσερις πλευρές της) πρέπει να ισχύουν οι εξής συνοριακές συνθήκες:

$$w(0, y) = w(a, y) = 0 \quad \text{και} \quad w(x, 0) = w(x, b) = 0 \quad (7.1.4)$$

για το βέλος κάμψεως (μηδενικό βέλος κάμψεως,  $w = 0$ , και στις τέσσερις πλευρές της πλάκας) και

$$M_x(0, y) = M_x(a, y) = 0 \quad \text{και} \quad M_y(x, 0) = M_y(x, b) = 0 \quad (7.1.5)$$

για τις ροπές κάμψεως (ή καμπτικές ροπές). Παραγωγίζουμε τώρα τις δύο πρώτες σχέσεις (7.1.4) ως προς  $y$  και τις δύο τελευταίες σχέσεις (7.1.4) ως προς  $x$ . Έτσι διαπιστώνουμε αμέσως πως

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(0, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(a, y) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, b) = 0. \quad (7.1.6)$$

Κατά συνέπεια οι συνοριακές συνθήκες (7.1.5) με βάση τις σχέσεις (7.1.3) για τις ροπές κάμψεως  $M_x$  και  $M_y$ , αλλά και τις σχέσεις (7.1.6) που μόλις βρήκαμε, παίρνουν τις εξής τελικές τους μορφές:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(a, y) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x, b) = 0. \quad (7.1.7)$$

Σημειώνουμε ότι οι δύο πρώτες από τις τελικές αυτές σχέσεις, αν ξεχάσουμε τη μεταβλητή  $y$ , μας θυμίζουν τις αντίστοιχες σχέσεις για αμφιέριστη συνήθη δοκό  $0 \leq x \leq a$ , όπου η ροπή κάμψεως (ή καμπτική ροπή)  $M = M(x)$  μηδενίζεται και στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = a$  της αμφιέριστης δοκού.

Η διαφορική εξίσωση (7.1.2) και οι συνοριακές συνθήκες (7.1.4) και (7.1.7) (οκτώ συνολικά συνοριακές συνθήκες: ανά δύο σε κάθε πλευρά της πλάκας:  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  και  $y = b$ ) αποτελούν το παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών. Το πρόβλημα αυτό λύθηκε από το Navier (1820). Την ενδιαφέρουσα μέθοδο του Navier την αναφέρουμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο.

### B7.1.2. Διπλή ημιτονική σειρά Fourier για το βέλος κάμψεως της πλάκας

Για την επίλυση του πιο πάνω προβλήματος ορθογωνικής πλάκας  $P = [0, a] \times [0, b]$  δεχόμαστε το βέλος κάμψεως (ή βύθιση) της πλάκας στη μορφή της εξής διπλής ημιτονικής σειράς Fourier:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.1.8)$$

Οι συντελεστές  $w_{mn}$  αυτής της σειράς είναι προς το παρόν άγνωστοι, αλλά θα προσδιορισθούν με χρήση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (7.1.2). Το σημαντικό όμως με αυτήν τη σειρά Fourier είναι ότι πληρούνται αυτόματα οι τέσσερις συνοριακές συνθήκες (7.1.4) σε ολόκληρο το σύνορο της ορθογωνικής πλάκας  $P = [0, a] \times [0, b]$  που μελετάμε, αφού  $\sin k\pi = 0$  για κάθε ακέραιη τιμή του  $k$ . Έπειτα παραγωγίζουμε τη διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.8) δύο φορές ως προς  $x$  και δύο φορές ως προς  $y$ . Προκύπτουν έτσι εύκολα οι νέες διπλές ημιτονικές σειρές Fourier

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7.1.9)$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.1.10)$$

Παρατηρούμε ότι η διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.9) ικανοποιεί τις δύο πρώτες συνοριακές συνθήκες (7.1.7). Και ανάλογα η διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.10) ικανοποιεί τις δύο τελευταίες συνοριακές συνθήκες (7.1.7). Πλήρωση λοιπόν και αυτών των τεσσάρων συνοριακών συνθηκών.

Το τελικό συμπέρασμά μας είναι ότι υιοθετώντας τη διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.8) στο παρόν πρόβλημα ορθογωνικής πλάκας με απλή στήριξη (έδραση) του συνόρου της, πετυχαίνουμε να πληρούνται και οι οκτώ συνοριακές συνθήκες στο σύνορο της πλάκας (ανά δύο σε κάθε πλευρά της). Άρα τώρα το μόνο καθήκον μας στο παρόν πρόβλημα είναι η πλήρωση και της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους της πλάκας (7.1.2). Αυτό θα το πετύχουμε με τον κατάλληλο προσδιορισμό των άγνωστων συντελεστών  $w_{mn}$  στη διπλή σειρά Fourier (7.1.8) που υποθέσαμε για το βέλος κάμψεως  $w(x, y)$  της πλάκας χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Navier στο πρόβλημα αυτό.

Αφού όμως χρησιμοποιήσαμε εδώ τη διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.8) για το βέλος κάμψεως  $w(x, y)$ , το ίδιο πρέπει να κάνουμε και για την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x, y)$  της πλάκας. Έτσι θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (7.1.2).

### B7.1.3. Ανάπτυγμα συναρτήσεως σε διπλή ημιτονική σειρά Fourier

Υποθέτουμε λοιπόν ότι η φόρτιση  $p(x, y)$  της πλάκας έχει τη διπλή ημιτονική σειρά Fourier

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.1.11)$$

Αυτή είναι απόλυτα ανάλογη με την αντίστοιχη σειρά Fourier (7.1.8) για το βέλος κάμψεως  $w(x, y)$  της ίδιας πλάκας, τώρα όμως με συντελεστές  $p_{mn}$ , του οποίους θελουμε να προσδιορίσουμε εδώ.

Προς το σκοπό αυτό θυμόμαστε τους τύπους (5.2.61) και (5.2.62) της Παραγράφου Β5.2.10 του Κεφαλαίου Β5 για το ανάπτυγμα μιας γνωστής συναρτήσεως  $h(x)$  σε απλή ημιτονική σειρά Fourier στο διάστημα  $[0, L]$ . Με βάση τον πρώτο από τους δύο αυτούς τύπους (5.2.61) έχουμε

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (7.1.12)$$

Στη σειρά αυτή οι συντελεστές  $b_n$  δίνονται από το δεύτερο τύπο, τον τύπο (5.2.62), δηλαδή

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.1.13)$$

Τώρα για την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x, y)$  της πλάκας θεωρούμε προς στιγμή το  $y$  σταθερά (καλύτερα παράμετρο) αντί μεταβλητή. Στη συνέχεια αναπτύσσουμε ανάλογα τη συνάρτηση αυτή  $p(x, y)$  σε ημιτονική σειρά Fourier ως προς  $x$  μόνο και μάλιστα στο διάστημα  $[0, a]$  κατά μήκος της πλάκας  $P = [0, a] \times [0, b]$  που εξετάζουμε. Έτσι παίρνουμε με βάση τον τύπο (7.1.12)

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (7.1.14)$$

έχοντας χρησιμοποιήσει για δείκτη στη σειρά αυτή το  $m$  αντί για το  $n$  στην απλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.12). Φυσικά οι συντελεστές  $p_m(y)$  θα μεταβάλλονται, αν αλλάζει η τιμή της σταθεράς (καλύτερα της παραμέτρου)  $y$ . Γι' αυτό τους δηλώνουμε με το σύμβολο  $p_m(y)$ . Και τώρα σύμφωνα με τον τύπο (7.1.13) έχουμε για τους συντελεστές αυτούς  $p_m(y)$  (εδώ όμως με  $a$  αντί για  $L$ )

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.1.15)$$

Προφανώς οι συντελεστές  $p_m(y)$  εξαρτώνται από τη σταθερά (ή καλύτερα την παράμετρο)  $y$  που στην πλάκα  $P = [0, a] \times [0, b]$  που μελετάμε μεταβάλλεται στο διάστημα  $[0, b]$  κατά το πλάτος (όχι το μήκος) της πλάκας. Μπορούμε επομένως να επιστρέψουμε τώρα στην ερμηνεία του  $y$  σαν μεταβλητής αντί σαν σταθεράς (ή παραμέτρου). Είναι εύλογο αυτό. Με αυτήν την ερμηνεία του  $y$

οι πιο πάνω συντελεστές  $p_m(y)$  είναι συναρτήσεις του  $y$ . Και, όπως ήδη είπαμε, το  $y$  μεταβάλλεται στο διάστημα  $[0, b]$  κατά το πλάτος της πλάκας  $P$  και όχι στο διάστημα  $[0, a]$  κατά το μήκος της.

Επομένως στο σημείο αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε το ανάπτυγμα σε απλή ημιτονική σειρά Fourier στο διάστημα  $[0, b]$  των ίδιων των πιο πάνω συντελεστών  $p_m(y)$ , τώρα όμως ως προς  $y$ , όχι ως προς  $x$ : οι συντελεστές  $p_m(y)$  δεν εξαρτώνται από το  $x$ . Με διατήρηση του αρχικού δείκτη  $n$  στη βασική σειρά Fourier (7.1.12) (τώρα όμως ως προς  $y$ ) παίρνουμε εδώ την αντίστοιχη σειρά

$$p_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (7.1.16)$$

με συντελεστές  $p_{mn}$ . Επαναλαμβάνουμε ότι δείκτης της σειράς είναι το  $n$ . Γίνεται όμως και αναφορά μέσω του  $m$  στη συνάρτηση  $p_m(y)$  που αναπτύσσουμε. Για τους συντελεστές αυτούς  $p_{mn}$  χρησιμοποιούμε τον τύπο (7.1.13) εδώ βέβαια ως προς  $y$  και στο διάστημα  $[0, b]$ . Προκύπτει άμεσα

$$p_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b p_m(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.1.17)$$

Ουσιαστικά τελειώσαμε τη δουλειά μας. Για να το κατανοήσουμε καλύτερα αυτό! Πρώτα-πρώτα στους αμέσως πιο πάνω τύπους (7.1.17) για τους συντελεστές  $p_{mn}$  της απλής ημιτονικής σειράς Fourier (7.1.16) υπενθυμίζουμε ότι οι συναρτήσεις  $p_m(y)$  δίνονται από τους τύπους (7.1.15). Με βάση τους τύπους αυτούς (7.1.15) οι πιο πάνω τύποι (7.1.17) παίρνουν τις τελικές τους μορφές

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (x, y) \in P \quad (7.1.18)$$

με  $P = [0, a] \times [0, b]$  την ορθογωνική συνήθη πλάκα μας, αφού προφανώς  $(2/a)(2/b) = 4/(ab)$ .

Παρατηρούμε επίσης ότι με την εισαγωγή των εκφράσεων (7.1.16) των συναρτήσεων-συντελεστών  $p_m(y)$  στην απλή ημιτονική σειρά Fourier (ως προς  $x$ ) (7.1.14) αυτή παίρνει αμέσως τη μορφή της διπλής ημιτονικής σειράς Fourier (7.1.11). Φαίνεται πολύ καθαρά αυτό! Άρα στη διπλή αυτή σειρά Fourier (7.1.11) οι συντελεστές  $p_{mn}$  (που δεν εξαρτώνται βέβαια ούτε από τη μεταβλητή  $x$  αλλ' ούτε και από τη μεταβλητή  $y$ ) δίνονται από τους παραπάνω τελικούς μας τύπους (7.1.18).

Συνοψίζουμε τα πιο πάνω αποτελέσματα: σε διπλή ημιτονική σειρά Fourier της μορφής (7.1.11) με  $(x, y) \in P = [0, a] \times [0, b]$  οι συντελεστές της  $p_{mn}$  δίνονται από τους τύπους (7.1.18). Αυτοί περιλαμβάνουν ένα διπλό ολοκλήρωμα πάνω σ' ολόκληρη την περιοχή  $P$ , εδώ στην πλάκα μας  $P$ .

#### **B7.1.4. Η λύση του προβλήματος της ορθογωνικής πλάκας με διπλή ημιτονική σειρά Fourier**

Είμαστε τώρα απόλυτα έτοιμοι να βρούμε τη λύση του παρόντος προβλήματος της ορθογωνικής πλάκας  $P = [0, a] \times [0, b]$  του Σχήματος Β7.1 με τη μέθοδο του Navier. Έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι με χρήση της διπλής ημιτονικής σειράς Fourier (7.1.8) για το άγνωστο βέλος κάμψεως (τη βύθιση) της πλάκας πληρούνται και οι οκτώ συνοριακές συνθήκες (7.1.4) και (7.1.7) στις τέσσερις πλευρές (στο σύνορο) της πλάκας. Μας απομένει απλά η πλήρωση και της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς (7.1.2). Έχουμε ήδη διαθέσιμες στις σχέσεις (7.1.9) και (7.1.10) τις δεύτερες μερικές παραγωγούς ως προς  $x$  και  $y$  αντίστοιχα της σειράς Fourier (7.1.8) του βέλους κάμψεως  $w(x, y)$ . Με δύο ακόμη ανάλογες μερικές παραγωγίσεις υπολογίζουμε όλες τις τέταρτες μερικές παραγωγούς που υπεισέρχονται στη διαφορική μας εξίσωση (7.1.2). Αυτές έχουν τις εξής μορφές:

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7.1.19)$$

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (7.1.20)$$

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.1.21)$$

Τώρα αντικαθιστούμε τόσο αυτές τις διπλές ημιτονικές σειρές Fourier για τις τέταρτες μερικές παραγωγούς του άγνωστου βέλους κάμψεως (ή βυθίσεως)  $w(x, y)$  της πλάκας όσο και την αντίστοιχη σειρά Fourier (7.1.11) της γνωστής κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x, y)$  στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς της πλάκας (7.1.2). Συμπτύσσοντας τις τρεις διπλές ημιτονικές σειρές Fourier στο αριστερό μέλος σε μία μόνο ανάλογη σειρά Fourier, παίρνουμε το αποτέλεσμα

$$\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.1.22)$$

Λάβαμε βέβαια υπόψη μας και τον τόσο στοιχειώδη αλγεβρικό τύπο  $\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$ .

Αυτήν την τελική μορφή (7.1.22) της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς (7.1.2) της πλάκας (καλύτερα της συνήθους πλάκας) μπορούμε να τη γράψουμε και λίγο πιο απλά μεταφέροντας τη φόρτιση  $p(x, y)$  από το δεξιό μέλος στο αριστερό μέλος και συμπτύσσοντας τις δύο σειρές Fourier (τώρα στο αριστερό μέλος) σε μία. Έτσι παίρνουμε το τελικό και τόσο απλό αποτέλεσμα

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \pi^4 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 w_{mn} - \frac{p_{mn}}{D} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0. \quad (7.1.23)$$

Έχουμε λοιπόν μια διπλή ημιτονική σειρά Fourier στην ορθογωνική πλάκα  $P = [0, a] \times [0, b]$  ίση με το μηδέν σ' ολόκληρη την πλάκα. Άρα σύμφωνα με τους τύπους (7.1.18) για τους συντελεστές μιας διπλής ημιτονικής σειράς Fourier, ειδικά εδώ της σχετικής σειράς για τη μηδενική συνάρτηση στο δεξιό μέλος, όλοι οι συντελεστές Fourier στο αριστερό μέλος της πιο πάνω τελικής σχέσεως (7.1.23) θα πρέπει να μηδενίζονται. Επομένως είναι αναγκαίο να ισχύουν οι σχέσεις

$$\pi^4 \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 w_{mn} - \frac{p_{mn}}{D} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.1.24)$$

Λύνοντας τώρα ως προς τους άγνωστους συντελεστές  $w_{mn}$ , τους προσδιορίζουμε όλους πλήρως

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.1.25)$$

Επομένως, γνωρίζοντας την κατανεμημένη φόρτιση  $p(x, y)$  της παρούσας ορθογωνικής πλάκας, προσδιορίζουμε τους συντελεστές  $p_{mn}$  της αντίστοιχης διπλής ημιτονικής σειράς Fourier (7.1.11) από τους τύπους (7.1.18). Γνωρίζοντας και τη δυσκαμψία  $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$  της πλάκας, τύπος (7.1.1), προσδιορίζουμε από τους αμέσως πιο πάνω τύπους (7.1.25) και τους συντελεστές  $w_{mn}$  της διπλής ημιτονικής σειράς Fourier (7.1.8) του βέλους κάμψεως (ή της βυθίσεως)  $w(x, y)$  της πλάκας. Άρα το βέλος κάμψεως  $w(x, y)$  της πλάκας θα δίνεται πάντοτε από τη διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.8) με τους συντελεστές της  $w_{mn}$  προσδιορισμένους όπως ήδη έχει αναφερθεί.

Ας σημειωθεί τέλος ότι με γνωστό το βέλος κάμψεως  $w(x, y)$  της παρούσας ορθογωνικής πλάκας από τη διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.8) με μερικές παραγωγίσεις της σειράς αυτής μπορούν πολύ εύκολα να υπολογισθούν οι δύο ροπές κάμψεως  $M_x$  και  $M_y$  καθώς και η ροπή συστροφής  $M_{xy} = M_{yx}$  με τη χρήση των τύπων (7.1.3). Παραπέρα ανάλογα μπορούν να προσδιορισθούν οι τέμνουσες δυνάμεις, αλλά και οι ίδιες οι τάσεις στην πλάκα. Οι τάσεις όμως μεταβάλλονται κατά τη διεύθυνση  $z$  του πάχους της πλάκας (με  $-h/2 \leq z \leq h/2$  όπου  $h$  είναι το πάχος της πλάκας).

### B7.1.5. Ομοιόμορφη (σταθερή) φόρτιση στην ορθογωνική πλάκα

Στην ειδική αλλά και τόσο συχνή και σημαντική περίπτωση που η φόρτιση της πλάκας  $P$  είναι ομοιόμορφη (σταθερή), δηλαδή  $p(x, y) = p_0$  σ' ολόκληρη την πλάκα με υπολογισμό (εύκολος είναι!) των διπλών ολοκληρωμάτων (7.1.18) πάνω στην πλάκα προκύπτουν οι αντίστοιχοι συντελεστές

$$p_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{εάν είτε το } m \text{ είτε το } n \text{ είναι άρτιος αριθμός,} \\ \frac{16p_0}{\pi^2 mn}, & \text{εάν τόσο το } m \text{ όσο και το } n \text{ είναι περιττοί αριθμοί.} \end{cases} \quad (7.1.26)$$

Στη συνέχεια με χρήση των τύπων (7.1.25) προσδιορίζονται και οι αντίστοιχοι συντελεστές  $w_{mn}$  για το βέλος κάμψεως (ή τη βύθιση)  $w(x, y)$  της πλάκας στη διπλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.8).

### B7.1.6. Ορθογωνική πλάκα επί ελαστικής βάσεως

Με μικρή παραλλαγή της πιο πάνω μεθόδου του Navier για την πλάκα  $P = [0, a] \times [0, b]$  του Σχήματος Β7.1 μπορεί να λυθεί εύκολα και το αντίστοιχο πρόβλημα πλάκας επί ελαστικής βάσεως (συνήθως του εδάφους) ξανά με απλή στήριξη στο σύνορό της. Στην περίπτωση αυτή λόγω της αντιδράσεως του εδάφους στη βύθιση της πλάκας που υποτίθεται πως είναι προς το έδαφος υπάρχει και κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $-kw(x, y)$  αντίθετη της εξωτερικής φορτίσεως  $p(x, y)$ . (Εδώ  $k$  είναι το σχετικό μέτρο του εδάφους.) Άρα στη διαφορική εξίσωση (7.1.2) στο δεξιό μέλος αντί  $p(x, y)/D$  έχουμε τώρα  $[p(x, y) - kw(x, y)]/D$ . Μεταφέροντας τον όρο  $-kw(x, y)/D$  στο αριστερό μέλος και τροποποιώντας ελαφρά την πιο πάνω μέθοδο, λύνουμε εύκολα και το πρόβλημα της ορθογωνικής πλάκας επί ελαστικής βάσεως και πάλι με χρήση διπλών ημιτονικών σειρών Fourier.

## B7.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΛΕΝΥ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗ ΠΛΑΚΑ

Το μειονέκτημα της μεθόδου του Navier (1820) για την ορθογωνική πλάκα είναι ότι αυτή χρησιμοποιεί διπλές σειρές Fourier. Αντίθετα η εναλλακτική μέθοδος του Λένυ (1899) χρησιμοποιεί μόνο απλές σειρές Fourier. Συγκεκριμένα για τη γνωστή κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x, y)$  της πλάκας η μέθοδος του Λένυ αρκείται στην απλή ημιτονική σειρά Fourier (7.1.14), την επαναλαμβάνουμε

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (7.2.1)$$

Σημειώνεται εδώ ότι οι συντελεστές της  $p_m(y)$  έχουν ήδη προσδιορισθεί από τις σχέσεις (7.1.15).

Σύμφωνα με την παρούσα μέθοδο του Λένυ δε μας είναι αναγκαία και η παραπέρα ανάπτυξη των συντελεστών  $p_m(y)$  σε νέες σειρές Fourier (τώρα όμως ως προς  $y$ ). Ανάλογα για το άγνωστο βέλος κάμψεως (τη βύθιση)  $w(x, y)$  της πλάκας δεχόμαστε την αντίστοιχη ημιτονική σειρά Fourier

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (7.2.2)$$

Τώρα αντικαθιστούμε αυτές τις δύο απλές (και όχι διπλές όπως πριν!) ημιτονικές σειρές Fourier στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (7.1.2) της πλάκας εκτελώντας βέβαια και τις σχετικές μερικές παραγωγίσεις της σειράς (7.2.2) για το αριστερό μέλος της. Προκύπτει εύκολα ότι

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 w_m(y) - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 w_m''(y) + w_m''''(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (7.2.3)$$

Κατά συνέπεια με ανάλογες σκέψεις όπως και πριν συμπεραίνουμε πως οι συντελεστές των ημιτονικών όρων του αριστερού και του δεξιού μέλους πρέπει να είναι ίσοι. Επομένως θα έχουμε

$$\left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 w_m(y) - 2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 w_m''(y) + w_m''''(y) = \frac{p_m(y)}{D}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (7.2.4)$$

Πρόκειται για ένα σύστημα άπειρων μη συζευγμένων μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων τετάρτης τάξεως. Τις λύνουμε αρκετά εύκολα με τις μεθόδους που γνωρίζουμε από το Μέρος Α για τις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις. Συγκεκριμένα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως για τις αντίστοιχες ομογενείς εξισώσεις (που εδώ όμως οδηγεί σε χαρακτηριστικές εξισώσεις με διπλές ρίζες) και τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών ή τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων για τις μη ομογενείς εξισώσεις. Εναλλακτική δυνατότητα αποτελεί φυσικά και η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace, αν και αυτή δεν προτιμάται συνήθως εδώ. Δεν πρέπει βέβαια να λησμονούνται και οι συνοριακές συνθήκες για  $y = 0$  και  $y = b$ . Έτσι προσδιορίζονται οι συντελεστές  $w_m(y)$  (οι οποίοι είναι βέβαια συναρτήσεις του  $y$ ) στην απλή ημιτονική σειρά Fourier (7.2.2) για το βέλος κάμψεως  $w(x, y)$  της ορθογωνικής πλάκας  $P$ .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *B8*

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΣΤΕΡΕΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ ΕΔΑΦΟΥΣ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα λύσουμε το πρόβλημα της μονοδιάστατης στερεοποίησης πορώδους, συμπιεστού και κορεσμένου στρώματος αργίλου στην Εδαφομηχανική με βάση τη σχετική κλασική θεωρία στερεοποίησης του Terzaghi (1923). Εξετάζουμε πρώτα το πρόβλημα του ημιπεριορισμένου στρώματος αργίλου, δηλαδή με το πάνω όριό του διαπερατό, ενώ το κάτω αδιαπέρατο. Στη συνέχεια εξετάζουμε και το πρόβλημα του ανοικτού στρώματος αργίλου, δηλαδή και με τα δύο όριά του (πάνω και κάτω) διαπερατά. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται στην εφαρμογή αυτή είναι η κλασική μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών του Κεφαλαίου Β5. Με αυτήν προσδιορίζονται οι σχετικές ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις και τελικά η άγνωστη συνάρτηση. Αυτή εκφράζει την πρόσθετη υδροστατική πίεση (ή υπερπίεση του νερού των πόρων) στο στρώμα της αργίλου. Τα τελικά αποτελέσματα είναι σε μορφές σειρών Fourier, εδώ με ημιτονικούς όρους: γενικευμένη ημιτονική σειρά Fourier για το πρώτο πρόβλημα και συνήθης ημιτονική σειρά Fourier για το δεύτερο πρόβλημα.

### Β8.1. ΣΤΕΡΕΟΠΟΙΗΣΗ ΗΜΙΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΟΥ (ΗΜΙΚΛΕΙΣΤΟΥ) ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΑΡΓΙΛΟΥ

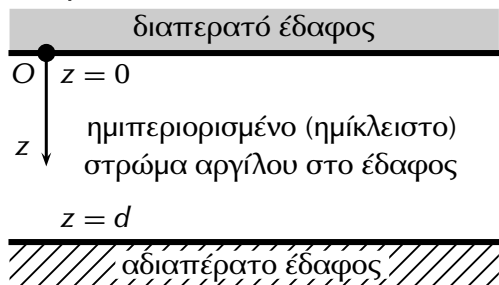
#### Β8.1.1. Το πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών

Έχουμε ήδη αναφερθεί στην Παράγραφο Β2.1.4 του Κεφαλαίου Β2 στο ιδιαίτερα ενδιαφέρον φαινόμενο της **στερεοποίησης** πορώδους, συμπιεστού και κορεσμένου **στρώματος** (ή ίσως καλύτερα **στρώσεως**) αργίλου στην **Εδαφομηχανική** και στη σχετική **θεωρία στερεοποίησης** του Terzaghi (1923). Το φαινόμενο της στερεοποίησης αφορά στην αποβολή του νερού από στρώμα (ή στρώση) εδάφους. Στη μονοδιάστατη στερεοποίηση στρώματος εδάφους που το υποθέτουμε εδώ από άργιλο (δηλαδή έχουμε στρώμα ή στρώση αργίλου) αναφέραμε ότι ισχύει η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως στη μορφή της (2.1.54). Αυτήν την εξίσωση την επαναλαμβάνουμε κι εδώ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c_v} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{με} \quad u = u(z, t). \quad (8.1.1)$$

Στη διαφορική αυτή εξίσωση με μερικές παραγώγους  $z$  είναι το βάθος μέσα στο στρώμα της αργίλου (η χωρική μεταβλητή) και  $t$  ο χρόνος (η χρονική μεταβλητή). Επίσης  $u = u(z, t)$  η άγνωστη συνάρτηση που εκφράζει την **πρόσθετη υδροστατική πίεση** (ή **υπερπίεση του νερού των πόρων**). Τέλος  $c_v$  είναι ο **συντελεστής στερεοποίησης**. Αυτός είναι μια θετική σταθερά που υπολογίζεται από τη σχέση (2.1.55) με τη βοήθεια τριών άλλων σταθερών: δύο του εδάφους και μιας του νερού.

Στόχος μας σ' αυτό εδώ το κεφάλαιο είναι απλά η επίλυση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους στο συγκεκριμένο πρόβλημα της μονοδιάστατης στερεοποίησης στρώματος αργίλου σταθερού πάχους  $d$  (με  $0 \leq z \leq d$ ) και ακριβέστερα οριζόντιου, ομογενούς και ισότροπου, πορώδους, συμπιεστού και κορεσμένου στρώματος αργίλου (Σχήμα Β8.1).



**Σχήμα Β8.1:** Ημιπεριορισμένο (ημίκλειστο) στρώμα αργίλου στο έδαφος σταθερού πάχους  $d$  ( $0 \leq z \leq d$ ). Στο επάνω σύνορό του  $z = 0$  υπάρχει (αμέσως πιο πάνω) διαπερατό έδαφος, ενώ στο κάτω σύνορό του  $z = d$  υπάρχει (αμέσως πιο κάτω) αδιαπέρατο έδαφος. Αντίστοιχο είναι βέβαια και το ανοικτό στρώμα (ή στρώση) αργίλου: εκεί και τα δύο όρια  $z = 0$  και  $z = d$  του στρώματος είναι προς διαπερατό έδαφος.

Υποθέτουμε ότι  $z = 0$  στο πάνω όριο του στρώματος της αργίλου και  $z = d$  στο κάτω όριο. Υποθέτουμε επίσης ότι το πάνω όριο  $z = 0$  του στρώματος της αργίλου είναι το σύνορό του με διαπερατό έδαφος (πάνω από το στρώμα της αργίλου), δηλαδή με έδαφος διά μέσου του οποίου μπορεί εύκολα να περάσει το νερό (π.χ. άμμο). Επίσης ότι το κάτω όριο  $z = d$  του στρώματος της αργίλου είναι το σύνορό του (κάτω από το στρώμα της αργίλου) με αδιαπέρατο έδαφος, δηλαδή με έδαφος όπου δε μπορεί καθόλου να περάσει το νερό. Ένα τέτοιο στρώμα αργίλου καλείται συχνά **ημιπεριορισμένο στρώμα αργίλου** (ή **ημίκλειστο στρώμα αργίλου**) και αποδεικνύεται στην Εδαφομηχανική ότι σ' αυτό πρέπει να ισχύουν για φυσικούς λόγους οι δύο συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial z}(d, t) = 0. \quad (8.1.2)$$

Επιπλέον τη χρονική στιγμή  $t = 0$  θεωρούμε την αρχική συνθήκη

$$u(z, 0) = u_i(z) \quad (8.1.3)$$

με τη συνάρτηση  $u_i(z)$  γνωστή. Πολύ συχνά μάλιστα τη θεωρούμε ίση με σταθερά:  $u_i(z) = u_{i0}$ .

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές μας είναι το βάθος  $z$  (με  $0 \leq z \leq d$ ) κι ο χρόνος  $t$  (με  $t \geq 0$ ). Έχουμε λοιπόν να λύσουμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (8.1.1), δηλαδή τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, με τις συνοριακές συνθήκες (8.1.2) (δύο συνθήκες: σωστά, αφού έχουμε δεύτερη χωρική παράγωγο: ως προς το βάθος  $z$ ) και την αρχική συνθήκη (8.1.3) (μία συνθήκη: πάλι σωστά, αφού έχουμε πρώτη χρονική παράγωγο: ως προς το χρόνο  $t$ ). Για την επίλυση αυτού του προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών θα χρησιμοποιήσουμε βέβαια τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, ακριβώς όπως την αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο Β5. Και μάλιστα την εφαρμόσαμε ήδη στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως στην Ενότητα Β5.3.

Μόνο που ... Μόνο που εκεί είχαμε τις κάπως πιο απλές συνοριακές συνθήκες (5.3.3):  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ , ενώ εδώ έχουμε τις λίγο δυσκολότερες συνοριακές συνθήκες (8.1.2). Και λέμε λίγο δυσκολότερες, απλά επειδή η δεύτερη από αυτές (στο κάτω όριο  $z = d$  του στρώματος της αργίλου) έχει την πρώτη χωρική παράγωγο της άγνωστης συναρτήσεως  $u(z, t)$ . Αν βέβαια το στρώμα της αργίλου συνόρευε στο κάτω όριό του  $z = d$  με διαπερατό στρώμα εδάφους (όπως συμβαίνει στο πάνω όριό του  $z = 0$ ), ε τότε το παρόν πρόβλημα στερεοποιήσεως ουσιαστικά θα ταυτιζόταν με το πρόβλημα της Ενότητας Β5.3 που αφορούσε στη μονοδιάστατη μετάδοση θερμότητας σε τοίχο. Εδώ όμως το πρόβλημα είναι λιγάκι πιο δύσκολο. Επιπλέον δε θέλουμε να το αναγάγουμε στο πρόβλημα της Ενότητας Β5.3 (αν και πρέπει να ομολογήσουμε πως η αναγωγή αυτή γίνεται συχνά στην Εδαφομηχανική), ώστε να εξασκηθούμε και με πιο δύσκολες συνοριακές συνθήκες: εδώ διαπερατού ορίου για  $z = 0$  και αντίθετα αδιαπέρατου ορίου για  $z = d$ . Ξεκινάμε!

### **Β8.1.2. Επίλυση με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών**

Ακριβώς όπως και στην Παράγραφο Β5.3.2, έτσι κι εδώ χωρίζουμε τη χωρική μεταβλητή  $z$  (το βάθος στο στρώμα της αργίλου) από τη χρονική μεταβλητή  $t$  (το χρόνο) υποθέτοντας ότι

$$u(z, t) = Z(z)T(t), \quad \text{οπότε προφανώς} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = Z''(z)T(t) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = Z(z)\dot{T}(t). \quad (8.1.4)$$



Άρα η μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως (8.1.1) που έχουμε παίρνει έτσι τη μορφή

$$Z''(z)T(t) = \frac{1}{c_v} Z(z)\dot{T}(t) \implies \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{1}{c_v} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \lambda = -p^2 \quad (8.1.5)$$

έχοντας υποθέσει πως  $u(z, t) = Z(z)T(t) \neq 0$  και επίσης ότι η σταθερά διαχωρισμού  $\lambda$  είναι αρνητική:  $\lambda = -p^2 < 0$  (με  $p > 0$ ). Αυτό μας εξασφαλίζει, όπως και στην Ενότητα Β5.3, τριγωνομετρική χωρική λύση  $Z(z)$  άρα και τη δυνατότητα πληρώσεως και των δύο συνοριακών συνθηκών (8.1.2).

Με βάση τον αμέσως πιο πάνω χωρισμό των δύο μεταβλητών  $z$  (χωρική μεταβλητή: βάθος) και  $t$  (χρονική μεταβλητή: χρόνος) καταλήγουμε άμεσα στις δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$Z''(z) + p^2 Z(z) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{T}(t) + p^2 c_v T(t) = 0. \quad (8.1.6)$$

Με κλασική εκθετική αντικατάσταση, εδώ  $Z_0(z) = e^{\mu z}$ , από την πρώτη εξίσωση  $Z''(z) + p^2 Z(z) = 0$  βρίσκουμε πολύ εύκολα την τόσο γνωστή μας τριγωνομετρική λύση αυτής της εξίσωσης

$$Z(z) = A \cos pz + B \sin pz. \quad (8.1.7)$$

Αυτή συμπίπτει ουσιαστικά με την αντίστοιχη λύση (5.3.13) της Παραγράφου Β5.3.3. Επίσης από την πρώτη συνοριακή συνθήκη (8.1.2), τη συνθήκη  $u(0, t) = 0$ , οπότε αναγκαστικά και  $Z(0) = 0$ , η γενική λύση (8.1.7) δίνει αμέσως  $A = 0$  (αφού  $\cos 0 = 1$  και  $\sin 0 = 0$ ) και απλοποιείται στη μορφή

$$Z(z) = B \sin pz. \quad (8.1.8)$$

Όμως στο σημείο αυτό τα πράγματα δυσκολεύουν λιγάκι. Αυτό συμβαίνει απλά για το λόγο ότι η δεύτερη συνοριακή συνθήκη (8.1.2), η συνθήκη με την παράγωγο:  $(\partial u / \partial z)(d, t) = 0$ , απαιτεί (με βάση το χωρισμό των μεταβλητών  $u(z, t) = Z(z)T(t)$  που έχουμε υποθέσει) να έχουμε  $Z'(d) = 0$ , αφού  $(\partial u / \partial z)(z, t) = Z'(z)T(t)$ . Παραγωγίζοντας λοιπόν την πιο πάνω λύση (8.1.8), προκύπτει

$$Z'(z) = Bp \cos pz, \quad \text{οπότε} \quad Z'(d) = 0 \implies \cos pd = 0 \quad \text{με} \quad p > 0, \quad (8.1.9)$$

εφόσον βέβαια  $B \neq 0$ , δηλαδή δεν έχουμε την τετριμμένη μηδενική λύση  $Z(z) = 0$ . Άρα παίρνουμε τις ιδιοτιμές  $p_n$ :

$$p_n d = \frac{(2n-1)\pi}{2} \implies p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.10)$$

και τις αντίστοιχες χωρικές ιδιοσυναρτήσεις  $Z_n(z)$ :

$$Z_n(z) = \sin p_n z = \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2d} \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.11)$$

για τη χωρική συνάρτηση  $Z(z)$ , όπου πήραμε τη σταθερά  $B$  (εδώ καλύτερα  $B_n$ ) ίση με τη μονάδα.

Με αυτές τις ιδιοτιμές  $p_n$  η πιο πάνω χρονική διαφορική εξίσωση  $\dot{T}(t) + p^2 c_v T(t) = 0$ , η δεύτερη εξίσωση (8.1.6), παίρνει την τελική της μορφή για τις άγνωστες χρονικές ιδιοσυναρτήσεις  $T_n(t)$

$$\dot{T}_n(t) + p_n^2 c_v T_n(t) = 0 \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.12)$$

Πάλι με κλασική εκθετική αντικατάσταση  $T_{n0}(t) = e^{\mu t}$  προκύπτει πολύ εύκολα η γενική λύση της

$$T_n(t) = C_n e^{-p_n^2 c_v t} \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.13)$$

Επομένως σύμφωνα με το χωρισμό των μεταβλητών  $u(z, t) = Z(z)T(t)$  και τώρα  $u_n(z, t) = Z_n(z)T_n(t)$  οι ιδιοσυναρτήσεις  $u_n(z, t)$  στο παρόν πρόβλημα στερεοποίησης ενός στρώματος (ή ισοδύναμα μιας στρώσεως) αργίλου θα έχουν τις εξής μορφές:

$$u_n(z, t) = Z_n(z)T_n(t) = C_n \sin p_n z e^{-p_n^2 c_v t} \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.14)$$

Παίρνοντας τώρα τις μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 u_n(z, t)}{\partial z^2} = -p_n^2 C_n \sin p_n z e^{-p_n^2 c_v t} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u_n(z, t)}{\partial t} = -p_n^2 c_v C_n \sin p_n z e^{-p_n^2 c_v t}, \quad (8.1.15)$$

διαπιστώνουμε άμεσα, καλύτερα επαληθεύουμε, ότι πληρούται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (8.1.1), δηλαδή η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, εδώ στο φαινόμενο της στερεοποίησης στρώματος (ή στρώσεως) αργίλου στο έδαφος, αφού από τις πιο πάνω σχέσεις

$$\frac{\partial^2 u_n(z, t)}{\partial z^2} = -p_n^2 C_n \sin p_n z e^{-p_n^2 c_v t} = \frac{1}{c_v} \frac{\partial u_n(z, t)}{\partial t}. \quad (8.1.16)$$

Επίσης διαπιστώνουμε εύκολα, επαληθεύουμε, πάλι από τις σχέσεις (8.1.14) και ότι

$$u_n(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial u_n}{\partial z}(d, t) = 0. \quad (8.1.17)$$

Άρα πληρούνται κι οι δύο συνοριακές συνθήκες στο πάνω και στο κάτω όριο του ημιπεριορισμένου στρώματος αργίλου με το πάνω όριο  $z = 0$  διαπερατό, ενώ με το κάτω όριο  $z = d$  αδιαπέρατο.

Υπό αυτές τις συνθήκες παίρνουμε (σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο Β5) σαν γενική λύση  $u(z, t)$  του παρόντος προβλήματος στερεοποίησης τη σειρά των ιδιοσυναρτήσεων

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin p_n z e^{-p_n^2 c_v t} \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}. \quad (8.1.18)$$

Το μόνο που μας απομένει στο σημείο αυτό είναι ο προσδιορισμός των σταθερών  $C_n$  στη λύση μας αυτή. Βέβαια αυτός θα γίνει με χρήση της αρχικής συνθήκης (8.1.3), δηλαδή της συνθήκης  $u(z, 0) = u_i(z)$  (για  $t = 0$  και με τη  $u_i(z)$  μια γνωστή συνάρτηση) που προς το παρόν την έχουμε αγνοήσει. Πραγματικά, θέτοντας  $t = 0$  στη λύση (8.1.18), προκύπτει από την αρχική αυτή συνθήκη

$$u(z, 0) = u_i(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin p_n z \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad \text{αφού} \quad e^0 = 1. \quad (8.1.19)$$

Είναι προφανές ότι πρόκειται απλά για ανάπτυγμα της αρχικής πρόσθετης υδροστατικής πίεσεως (ή υπερπίεσεως του νερού των πόρων)  $u_i(z)$  στις χωρικές ιδιοσυναρτήσεις  $Z_n(z) = \sin p_n z$  που ήδη βρήκαμε. Η μόνη, αλλ' όχι σημαντική, δυσκολία είναι ότι εδώ δεν έχουμε κλασική ημιτονική σειρά Fourier, αλλά γενικευμένη σειρά Fourier λόγω των εκφράσεων  $p_n = (2n-1)\pi/(2d)$  των ιδιοτιμών  $p_n$ .

Δεν είναι δα και τόσο δύσκολα τα πράγματα! Πρώτα-πρώτα μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι οι ιδιοσυναρτήσεις μας  $Z_n(z) = \sin p_n z$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ) στις σχέσεις (8.1.11) αποτελούν σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων στο διάστημα  $[0, d]$ , δηλαδή στο διάστημα του βάθους  $z$  του στρώματος της αργίλου που εξετάζουμε. Επομένως ισχύουν οι σχέσεις ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας)

$$\int_0^d Z_m(z) Z_n(z) dz = \int_0^d \sin \frac{(2m-1)\pi z}{2d} \sin \frac{(2n-1)\pi z}{2d} dz = 0, \quad \text{εάν} \quad m \neq n. \quad (8.1.20)$$

Σημειώνουμε παρενθετικά ότι εντελώς ανάλογα ισχύουν, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στην Παράγραφο Β6.1.9 του Κεφαλαίου Β6, για τις ιδιομορφές ταλαντώσεως  $X_n(x)$  σε ράβδο με στήριξη αριστερά και ελεύθερη δεξιά. Μόνο που εκεί γράφαμε  $x$  αντί για  $z$  και επίσης  $L$  αντί για  $d$ . Καμία άλλη διαφορά στις χωρικές ιδιοσυναρτήσεις. Σαν το διαπερατό σύνορο  $z = 0$  στη στερεοποίηση στρώματος αργίλου να είναι στήριξη σε ράβδο και το αδιαπέρατο σύνορο  $z = d$  να είναι ελεύθερο άκρο ράβδου. Μην παίρνουν όμως πολύ αέρα τα μυαλά μας, γιατί στην Ενότητα Β6.1 του Κεφαλαίου Β6 ίσχυε για τις ιδιοταλαντώσεις ράβδων η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος, ενώ εδώ στη στερεοποίηση στρώματος αργίλου ισχύει η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως. Και όμως οι χωρικές ιδιοσυναρτήσεις τους,  $X_n(x)$  και  $Z_n(z)$  αντίστοιχα, είναι απόλυτα ανάλογες! Ακόμη μεγαλύτερη είναι η αναλογία με το πρόβλημα της μονοδιάστατης μεταδόσεως θερμότητας σε τοίχο (ή σε ράβδο) με το αριστερό σύνορό του σε μηδενική θερμοκρασία, ενώ το δεξιό σε πλήρη μόνωση.

Συμπληρώνουμε τις σχέσεις ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) (8.1.20) με την ειδική περίπτωση όπου  $m = n$ . Τότε βέβαια το δεξιό μέλος δεν είναι μηδέν. Δε νοείται ορθογωνιότητα μιας συναρτήσεως  $Z_n(z)$  με τον εαυτό της ... Στην περίπτωση αυτή προκύπτουν εύκολα οι σχέσεις

$$N_n := \int_0^d Z_n^2(z) dz = \int_0^d \sin^2 \frac{(2n-1)\pi z}{2d} dz = \frac{d}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.21)$$

για τις σχετικές **νόρμες**  $N_n$ . Τόσο απλό το αποτέλεσμα! Με τις νόρμες αυτές  $N_n = d/2$  γνωστές το ανάπτυγμα της γνωστής συναρτήσεως  $u_i(z)$  στις ιδιοσυναρτήσεις  $Z_n(z)$ , ώστε να πληρούται η αρχική συνθήκη (8.1.3) που μας έχει απομείνει, είναι πια παιχνιδάκι. Η σχετική θεωρία έχει αναπτυχθεί στο Εδάφιο Β6.2.6.4 του Κεφαλαίου Β6. Με βάση τη θεωρία αυτή και το σχετικό τύπο (6.2.135) στο παρόν πρόβλημα προκύπτουν οι ακόλουθες εκφράσεις των συντελεστών  $C_n$  της γενικευμένης ημιτονικής σειράς Fourier (8.1.19) για την αρχική και γνωστή συνάρτηση  $u_i(z)$ :

$$C_n = \frac{1}{N_n} \int_0^d u_i(z) Z_n(z) dz = \frac{2}{d} \int_0^d u_i(z) \sin p_n z dz \quad \text{με} \quad p_n = \frac{(2n-1)\pi}{2d}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.1.22)$$

αφού  $N_n = d/2$  και  $Z_n(z) = \sin p_n z$ . Και στο κάτω-κάτω της γραφής ο τύπος αυτός είναι απόλυτα ανάλογος με τον αντίστοιχο τύπο για την κλασική ημιτονική σειρά Fourier στο διάστημα  $[0, d]$  που έχει την ίδια ακριβώς μορφή, αλλ' απλά με λίγο διαφορετικές ιδιοσυναρτήσεις  $Z_n(z) = \sin(n\pi z/d)$ .

Συνοψίζουμε: η λύση  $u(z, t)$  του προβλήματος στερεοποίησης ημιπεριορισμένου (ή ημίκλειστου) στρώματος αργίλου δίνεται από τον τύπο (8.1.18) με τις σταθερές  $C_n$  σ' αυτόν να προσδιορίζονται από τις σχέσεις (8.1.22) με ολοκληρώσεις και με βάση την αρχική συνθήκη  $u(z, 0) = u_i(z)$ .

### Β8.1.3. Μια πιο εύχρηστη μορφή της λύσεως

Στο σημείο αυτό σημειώνουμε ότι σε κάθε περίπτωση για την απλοποίηση της λύσεως  $u(z, t)$  πολύ συχνά εισάγεται σ' αυτήν τη φάση στην Εδαφομηχανική ο **παράγοντας χρόνου** (ή **χρονικός παράγοντας**)  $T_v$  (που είναι μια αδιάστατη ποσότητα), οι σταθερές  $M_n$  (ή απλούστερα  $M$ ) και το αδιάστατο βάθος  $z_r$  (ή απλούστερα  $Z$  χωρίς όμως να γίνεται σύγχυση με τη συνάρτηση  $Z = Z(z)$ ) με βάση τους τύπους

$$T_v = \frac{c_v t}{d^2}, \quad M_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad z_r = \frac{z}{d}. \quad (8.1.23)$$

Τότε η πιο πάνω λύση (8.1.18) παίρνει την ακόμη πιο απλή μορφή της

$$u(z, t) \equiv u^*(z_r, T_v) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin M_n z_r e^{-M_n^2 T_v}. \quad (8.1.24)$$

(Στην Εδαφομηχανική η σειρά αυτή γράφεται συχνά από  $n = 0$  έως  $n = \infty$  με  $M_n = (2n+1)\pi/2$ .)

Για μια σταθερή τιμή του παράγοντα χρόνου  $T_v$  η σχετική καμπύλη  $u^*(z_r, T_v)$ , που είναι τώρα συνάρτηση μόνο του αδιάστατου βάθους  $z_r$ , καλείται **ισόχρονη καμπύλη** και μπορούμε να σχεδιάσουμε στο ίδιο σχήμα πολλές ισόχρονες καμπύλες. Αυτές μας δίνουν μια θαυμάσια εικόνα του πώς ακριβώς εξελίσσεται το φαινόμενο της στερεοποίησης στο στρώμα της αργίλου που μελετάμε.

### Β8.1.4. Σταθερή αρχική πρόσθετη υδροστατική πίεση (ή υπερπίεση του νερού των πόρων)

Αρκετά συχνά (αλλ' όχι πάντοτε) υποθέτουμε στη στερεοποίηση τη γνωστή αρχική συνάρτηση  $u_i(z)$  της πρόσθετης υδροστατικής πίεσεως (ή υπερπίεσεως του νερού των πόρων) σαν σταθερή συνάρτηση  $u_{i0}$ , δηλαδή  $u_i(z) = u_{i0}$ . Τότε οι πιο πάνω συντελεστές  $C_n$  υπολογίζονται χωρίς δυσκολία με τους εξής κλειστούς τύπους που προκύπτουν πολύ εύκολα από τις σχετικές ολοκληρώσεις:

$$C_n = \frac{4u_{i0}}{(2n-1)\pi} = \frac{2u_{i0}}{M_n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1.25)$$

Η λύση μας  $u(z, t)$  (η πρόσθετη υδροστατική πίεση ή υπερπίεση του νερού των πόρων) συνεχίζει βέβαια να δίνεται από τη σχέση (8.1.18) ή την πιο σύντομη σχέση (8.1.24), η οποία χρησιμοποιεί τα αδιάστατα μεγέθη  $T_v$  (παράγοντας χρόνου),  $M_n = (2n-1)\pi/2$  και  $z_r = z/d$  των σχέσεων (8.1.23).

**B8.1.5. Βαθμός στερεοποίησης του στρώματος αργίλου**

Στην περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου που έχουμε σταθερή αρχική πρόσθετη υδροστατική πίεση  $u(z, 0) = u_{i0}$  ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο φαινόμενο της στερεοποίησης του στρώματος αργίλου που εξετάζουμε παρουσιάζει ο καλούμενος **βαθμός στερεοποίησης**  $U(z, t)$ . Αυτός είναι συνάρτηση τόσο του βάθους  $z$  όσο και του χρόνου  $t$  και υπολογίζεται τελικά με βάση τον τύπο

$$U(z, t) = \frac{u_{i0} - u(z, t)}{u_{i0}} = 1 - \frac{u(z, t)}{u_{i0}}. \quad (8.1.26)$$

Η συνάρτηση  $u(z, t)$  δίνεται από τη σχέση (8.1.18) εδώ (δηλαδή για  $u(z, 0) = u_{i0}$ ) με τους συντελεστές  $C_n$  σ' αυτήν να υπολογίζονται από τις σχέσεις (8.1.25). Η μέση τιμή  $\bar{U}(t)$  του συντελεστή στερεοποίησης  $U(z, t)$  στο πάχος του στρώματος αργίλου καλείται **μέσος βαθμός στερεοποίησης**.

**B8.2. ΣΤΕΡΕΟΠΟΙΗΣΗ ΑΝΟΙΚΤΟΥ ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΑΡΓΙΛΟΥ**

Πρόκειται για ένα επίσης πολύ γνωστό πρόβλημα στερεοποίησης με μόνη διαφορά από το πρόβλημα της προηγούμενης ενότητας ότι τώρα και στα δύο σύνορα (και το πάνω και το κάτω) του στρώματος της αργίλου υπάρχει διαπερατό έδαφος. Επομένως ισχύει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (8.1.1), η πρώτη συνοριακή συνθήκη (8.1.2) και η αρχική συνθήκη (8.1.3). Αλλάζει μονάχα η δεύτερη συνοριακή συνθήκη (8.1.2) που παίρνει τη μορφή  $u(d, t) = 0$ . (Συνήθως μάλιστα στο πρόβλημα αυτό της Εδαφομηχανικής αντίθετα με εδώ το πάχος του στρώματος της αργίλου δηλώνεται με  $2d$  αντί για  $d$ . Έτσι πετυχαίνεται η αναγωγή της λύσεως του προβλήματος του ημιπεριορισμένου ή ημίκλειστου στρώματος της προηγούμενης Ενότητας Β8.1 στο πρόβλημα του ανοικτού στρώματος.) Άρα τώρα οι δύο συνοριακές συνθήκες μας (8.1.2) παίρνουν τις μορφές

$$u(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad u(d, t) = 0. \quad (8.2.1)$$

Για την επίλυση και του δεύτερου αυτού προβλήματος ισχύουν και πάλι ο χωρισμός των μεταβλητών (8.1.4), οι δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (8.1.6) και η γενική λύση (8.1.7) της χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης. Και πάλι παίρνουμε τη μορφή (8.1.8) της λύσεως αυτής  $Z(z)$  με την πρώτη συνοριακή συνθήκη  $u(0, t) = 0$  που δίνει  $Z(0) = 0$ . Από τη δεύτερη όμως συνοριακή συνθήκη  $u(d, t) = 0$  (στο κάτω όριο του στρώματος αργίλου), που δίνει τώρα  $Z(d) = 0$ , προκύπτει

$$Z(z) = B \sin pz \implies Z(d) = B \sin pd = 0. \quad (8.2.2)$$

Επομένως οι ιδιοτιμές  $p_n$  στο παρόν πρόβλημα στερεοποίησης στρώματος αργίλου είναι οι εξής:

$$p_n d = n\pi \implies p_n = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.2.3)$$

Άρα οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις  $Z_n(z)$  ως προς το βάθος  $z$  του στρώματος θα έχουν τη μορφή

$$Z_n(z) = \sin p_n z = \sin \frac{n\pi z}{d} \quad \text{με} \quad p_n = \frac{n\pi}{d}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.2.4)$$

Αυτές είναι φυσικά διαφορετικές από τις ιδιοσυναρτήσεις (8.1.11) στο προηγούμενο πρόβλημα του ημιπεριορισμένου στρώματος αργίλου του Σχήματος Β8.1, ενώ εδώ έχουμε ανοικτό στρώμα.

Τώρα παραπέρα η χρονική διαφορική εξίσωση, η δεύτερη εξίσωση (8.1.6) και επίσης τελικά η εξίσωση (8.1.12), έχει πάλι τη λύση (8.1.13), αλλ' εδώ με  $p_n = n\pi/d$ , όπως ήδη αναφέρθηκε. Η άγνωστη συνάρτηση  $u(z, t)$  έχει επομένως κι αυτή ξανά τη μορφή (8.1.18), αλλά με  $p_n = n\pi/d$ . Στο παρόν πρόβλημα πρόκειται όμως για συνήθη απλή ημιτονική σειρά Fourier. Επομένως οι συντελεστές της  $C_n$  θα δίνονται και πάλι από τους τύπους (8.1.22) (εδώ επαναλαμβάνεται με  $p_n = n\pi/d$ ). Τώρα όμως οι τύποι αυτοί είναι οι κλασικοί τύποι για τους συντελεστές της ημιτονικής σειράς Fourier. Η τελική δυνατότητα χρήσεως του παράγοντα χρόνου  $T_n$ , των σταθερών  $M_n$  και του αδιάστατου βάθους  $z^*$  είναι και αυτή εφαρμόσιμη (βέβαια με τις κατάλληλες τροποποιήσεις).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β9

## ΠΟΛΙΚΕΣ, ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στις πολικές, στις κυλινδρικές και στις σφαιρικές συντεταγμένες. Θα δώσουμε βαρύτητα κυρίως στην εξίσωση του Laplace στα τρία αυτά συστήματα συντεταγμένων. Θα αναφερθούμε επίσης και στις απλές περιπτώσεις κυκλικής και σφαιρικής συμμετρίας βρίσκοντας τις σχετικές απλές και κλασικές γενικές λύσεις τους. Η χρήση των συστημάτων αυτών συντεταγμένων πρέπει να προτιμάται σε περιοχές με σχετική συμμετρία: κυκλική (ως προς κέντρο κύκλου) για τις πολικές συντεταγμένες, κυλινδρική (ως προς άξονα) για τις κυλινδρικές συντεταγμένες και σφαιρική (ως προς κέντρο σφαίρας) για τις σφαιρικές συντεταγμένες. Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών είναι γενικά εφαρμόσιμη και σε πολικές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες, ακριβώς όπως συμβαίνει και στις Καρτεσιανές συντεταγμένες. Εδώ θα επιδείξουμε τη χρήση της στην εξίσωση του Laplace με συνοριακές συνθήκες Dirichlet σ' έναν κύκλο: εσωτερικό και εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet. Σαν εφαρμογή θα μελετήσουμε τη ροή γύρω από ακίνητο κυκλικό κύλινδρο. Σε ορισμένα προβλήματα σε πολικές και κυλινδρικές συντεταγμένες παρουσιάζονται στις λύσεις συναρτήσεις Bessel. Εδώ θα λύσουμε δύο τέτοια προβλήματα. Πρώτα το πρόβλημα της διδιάστατης εξίσωσης της διαχύσεως σε κυλινδρική περιοχή με αξονική συμμετρία που παρουσιάζεται στη Μετάδοση Θερμότητας και στην ακτινική στερεοποίηση του εδάφους στην Εδαφομηχανική. Έπειτα και το πιο δύσκολο πρόβλημα των ιδιοταλαντώσεων συνήθους κυκλικής πλάκας με προσδιορισμό των ιδιοσυχνοτήτων της στην περίπτωση πακτώσεως στο σύνορό της.

### Β9.1. ΤΥΠΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε στα προβλήματα που εξετάσαμε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$  και  $y$  στις δύο διαστάσεις και  $x$ ,  $y$  και  $z$  στις τρεις διαστάσεις. Πραγματικά η χρήση Καρτεσιανών συντεταγμένων είναι η πιο συνηθισμένη στην πράξη. Εντούτοις σε πολλά προβλήματα είναι πιο σκόπιμη η χρήση άλλων, διαφορετικών συστημάτων συντεταγμένων. Τέτοια συστήματα συντεταγμένων είναι οι πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$ , οι κυλινδρικές συντεταγμένες  $r$ ,  $\theta$  και  $z$  καθώς και οι σφαιρικές συντεταγμένες  $\rho$ ,  $\theta$  και  $\varphi$ . Πιο συγκεκριμένα οι πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$  είναι πολύ χρήσιμες σε επίπεδα προβλήματα που έχουν σχέση με κυκλικές περιοχές ή με δακτυλιοειδείς περιοχές στο επίπεδο ή με άπειρες περιοχές με μια κυκλική σπή. Επίσης οι κυλινδρικές συντεταγμένες  $r$ ,  $\theta$  και  $z$  είναι χρήσιμες σε προβλήματα που αναφέρονται σε κυλινδρικές περιοχές στο χώρο ή σε ανάλογες δακτυλιοειδείς περιοχές στο χώρο ή στις αντίστοιχες άπειρες περιοχές. Παραδείγματος χάρη, κυλινδρική περιοχή είναι ένα κυλινδρικό υποστύλωμα, δηλαδή μια κολόνα με κυκλική διατομή, ενώ δακτυλιοειδής περιοχή είναι ένας κυκλικός σωλήνας. Τέλος οι σφαιρικές συντεταγμένες  $\rho$ ,  $\theta$  και  $\varphi$  είναι οι κατάλληλες συντεταγμένες για σφαιρικές περιοχές ή για σφαιρικά κελύφη ή για τις αντίστοιχες άπειρες περιοχές, δηλαδή για περιοχές εκτός μιας σφαίρας.

Οι συντεταγμένες αυτές: πολικές, κυλινδρικές και σφαιρικές συνδέονται βέβαια με γνωστές

σχέσεις με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες. Μεταξύ των Καρτεσιανών συντεταγμένων  $x$  και  $y$  και των πολικών συντεταγμένων  $r$  και  $\theta$  οι σχέσεις αυτές είναι οι εξής:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (9.1.1)$$

Λύνοντας ως προς  $r$  και  $\theta$ , διαπιστώνουμε ότι

$$r^2 = x^2 + y^2 \implies r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (r \geq 0) \quad \text{και επίσης} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \implies \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \quad (9.1.2)$$

Στις κυλινδρικές συντεταγμένες  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  απλά προσθέτουμε τη συντεταγμένη  $z$ , την ίδια συντεταγμένη  $z$  με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες, στις πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$ . Έτσι οι σχέσεις μετασχηματισμού συντεταγμένων (9.1.1) διαμορφώνονται ως εξής:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \quad (9.1.3)$$

μεταξύ των Καρτεσιανών συντεταγμένων  $x$ ,  $y$  και  $z$  και των κυλινδρικών συντεταγμένων  $r$ ,  $\theta$  και  $z$ . Φυσικά χρησιμοποιήσαμε το ίδιο σύμβολο  $z$  και στις δύο περιπτώσεις χωρίς κίνδυνο συγχύσεως.

Τέλος για τις σφαιρικές συντεταγμένες  $\rho$ ,  $\theta$  και  $\varphi$  ισχύουν οι εξής τύποι μετασχηματισμού τους σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$ ,  $y$  και  $z$ :

$$x = (\rho \sin \varphi) \cos \theta = \rho \cos \theta \sin \varphi, \quad y = (\rho \sin \varphi) \sin \theta = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \varphi. \quad (9.1.4)$$

Δηλαδή σε σύγκριση με τις κυλινδρικές συντεταγμένες  $r$ ,  $\theta$  και  $z$  έχουμε

$$r = \rho \sin \varphi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \varphi, \quad \text{οπότε} \quad \rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{r}{z}. \quad (9.1.5)$$

Ασφαλώς σε άλλες περιπτώσεις άλλες συντεταγμένες αποδεικνύονται καταλληλότερες. Η επιλογή των συντεταγμένων εξαρτάται βέβαια κυρίως από τη γεωμετρία και δευτερευόντως από τις συνοριακές συνθήκες στο πρόβλημα που εξετάζουμε.

Στο κεφάλαιο αυτό αποτελεί πρόθεσή μας να αναφέρουμε τη δυνατότητα μετασχηματισμού ενός διαφορικού τελεστή με μερικές παραγώγους σε κάποιο άλλο σύστημα συντεταγμένων αντί για τις Καρτεσιανές συντεταγμένες. Παραδείγματος χάρη, τέτοιος τελεστής είναι ο πολύ γνωστός τελεστής του Laplace  $\nabla^2$  στις δύο ή στις τρεις διαστάσεις. Στην επόμενη Ενότητα Β9.2 θα μετασχηματίσουμε αναλυτικά το διδιάστατο τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  από Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$  και  $y$  σε πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$ . Τούτο είναι χρήσιμο για προβλήματα που αφορούν σε έναν κύκλο ακτίνας  $a$  ή στο εξωτερικό ενός κύκλου ακτίνας  $a$  (με σύνορο και στις δύο περιπτώσεις την περιφέρεια του κύκλου  $r = a$ ) ή σε επίπεδη δακτυλιοειδή περιοχή  $a \leq r \leq b$  ( $a < b$ ). Η αρχή των συντεταγμένων  $O$  υποτίθεται ότι έχει επιλεγεί έτσι, ώστε να συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου. Στη μεθεπόμενη Ενότητα Β9.3 θα αναφερθούμε σε κυλινδρικές και σε σφαιρικές συντεταγμένες.

## Β9.2. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE ΣΕ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

### Β9.2.1. Μετατροπή από Καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες

Όπως ήδη γνωρίζουμε από την Ενότητα Β2.1, ορισμοί (2.1.23) και (2.1.24), ο τελεστής του Laplace (η Laplacian, η Λαπλασιανή)  $\nabla^2$  έχει τις εξής μορφές σε Καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{και} \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (9.2.1)$$

στις δύο και στις τρεις διαστάσεις αντίστοιχα. Επομένως, όπως επίσης ξέρουμε, οι αντίστοιχες εξισώσεις του Laplace  $\nabla^2 u = 0$  γράφονται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (9.2.2)$$

προφανώς με  $u = u(x, y)$  στις δύο διαστάσεις και με  $u = u(x, y, z)$  στις τρεις διαστάσεις.

Στην ενότητα αυτή απλά θα μετατρέψουμε το διδιάστατο τελεστή του Laplace  $\nabla^2$ , πρώτη σχέση (9.2.1), από Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$  και  $y$  σε πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$ . Προς το σκοπό αυτό θα πάρουμε υπόψη τις σχέσεις (9.1.1) μεταξύ Καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τον κανόνα της αλυσίδας για τις παραγώγους (κανόνα της αλυσιδωτής παραγωγίσεως, καλύτερα και πιο επίσημα κανόνα της αλληλουχίας των παραγώγων). Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$u = u(x, y) = u(r \cos \theta, r \sin \theta) \equiv u^*(r, \theta) \tag{9.2.3}$$

έχουμε για την πρώτη μερική παράγωγο της ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial u^*(r, \theta)}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u^*(r, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}. \tag{9.2.4}$$

Την παράγωγο αυτή θα τη χρειαστούμε αργότερα, για να υπολογίσουμε και τη δεύτερη μερική παράγωγο  $\partial^2 u / \partial x^2$  που υπεισέρχεται στον τελεστή του Laplace (9.2.1), όταν αυτός εφαρμοσθεί σε κατάλληλα παραγωγίσιμη συνάρτηση  $u$ .

Ο κανόνας της αλυσίδας για τις παραγώγους (9.2.4) είναι σωστά γραμμένος λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση (9.2.3). Στην πράξη όμως πολύ συχνά παραλείπουμε τον αστερίσκο στη συνάρτηση  $u^*(r, \theta)$ , επειδή  $u^*(r, \theta) = u(x, y)$  στο ίδιο σημείο του επιπέδου  $P = (r, \theta)$  σε πολικές συντεταγμένες και  $P = (x, y)$  σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. Εκτός από τον αστερίσκο μπορούμε ακόμη να παραλείψουμε και τα ορίσματα στις συναρτήσεις  $u$  και  $u^*$ . Γράφουμε έτσι τον κανόνα της αλυσίδας (9.2.4) στην ακόλουθη και εξαιρετικά σύντομη μορφή του:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}. \tag{9.2.5}$$

Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους  $\partial r / \partial x$  και  $\partial \theta / \partial x$ . Είναι εύκολο το καθήκον αυτό. Καταρχήν από την πρώτη σχέση μετασχηματισμού (9.1.2) μεταξύ Καρτεσιανών και πολικών συντεταγμένων, αυτή για την πολική ακτίνα  $r$ , προκύπτει ότι

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \implies \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta. \tag{9.2.6}$$

Ανάλογα υπολογίζουμε και την πρώτη μερική παράγωγο  $\partial r / \partial y$  ως προς  $y$ . Τελικά έχουμε

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta. \tag{9.2.7}$$

Στη συνέχεια από τη δεύτερη σχέση μετασχηματισμού (9.1.2) (για την πολική γωνία  $\theta$ ) προκύπτει

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \implies \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{1}{r} \frac{y}{r} = -\frac{1}{r} \sin \theta. \tag{9.2.8}$$

Ανάλογα υπολογίζουμε και την πρώτη μερική παράγωγο  $\partial \theta / \partial y$  ως προς  $y$ . Τελικά έχουμε

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \theta, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \theta. \tag{9.2.9}$$

Με διαθέσιμους τους πρώτους από τους τύπους (9.2.7) και (9.2.9) μπορούμε τώρα να γράψουμε τον τύπο (9.2.5) στη μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \implies \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(-\frac{1}{r} \sin \theta\right). \tag{9.2.10}$$

Δηλαδή ο διαφορικός τελεστής της μερικής παραγωγίσεως ως προς  $x$  παίρνει σε πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$  τη μορφή

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \tag{9.2.11}$$

Εφαρμόζουμε ξανά, για δεύτερη φορά τον ίδιο διαφορικό τελεστή  $\partial/\partial x$ , τώρα όμως στην πρώτη μερική παράγωγο  $\partial u/\partial x$ . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει βέβαια η δεύτερη μερική παράγωγος  $(\partial/\partial x)(\partial u/\partial x) \equiv \partial^2 u/\partial x^2$ , την οποία και χρειαζόμαστε στον τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  στις σχέσεις (9.2.1). Με την εργασία αυτή προκύπτει τελικά ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 u = \left( \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (9.2.12)$$

(Σημειώνεται ότι στον τύπο αυτό χρησιμοποιήθηκε και ο κανόνας παραγωγίσεως γινομένου.) Με τον τρόπο αυτό προσδιορίσαμε τη δεύτερη μερική παράγωγο  $\partial^2 u/\partial x^2$  της συναρτήσεως  $u$  με τη χρήση τώρα πολικών συντεταγμένων  $r$  και  $\theta$ . Μπορούμε έτσι να τη χρησιμοποιήσουμε στις εκφράσεις (9.2.1) του τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  και αυτό θα κάνουμε πραγματικά πιο κάτω.

Ασφαλώς απόλυτα ανάλογη εργασία μπορεί να γίνει και ως προς τη μεταβλητή  $y$ . Καταρχήν ο κανόνας της αλυσίδας για τις παραγωγούς (της αλυσιδωτής παραγωγίσεως, της αλληλουχίας των παραγώγων) (9.2.5) παίρνει τώρα την εξής αντίστοιχη (ως προς  $y$  αντί για  $x$ ) μορφή:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (9.2.13)$$

Με τη χρήση και των δευτέρων από τους τύπους (9.2.7) και (9.2.9) μπορούμε να διαπιστώσουμε εύκολα ότι ο τύπος (9.2.11) παίρνει τώρα την εξής μορφή (με  $y$  αντί  $x$ ):

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (9.2.14)$$

Στη συνέχεια ο τύπος (9.2.12) για τη δεύτερη μερική παράγωγο  $\partial^2 u/\partial y^2$  παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 u = \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + 2 \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

Διαθέτουμε επομένως τώρα τις εκφράσεις των δευτέρων μερικών παραγώγων της συναρτήσεως  $u$  τόσο ως προς τη μεταβλητή  $x$ , τύπος (9.2.12), όσο και ως προς τη μεταβλητή  $y$ , τύπος (9.2.15). Λόγω του ορισμού (9.2.1) του διδιάστατου τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  (πρώτος ορισμός) απλά προσθέτουμε αυτές τις δεύτερες μερικές παραγωγούς (9.2.12) και (9.2.15). Μετά την απαλοιφή των αντίθετων όρων και την αναδιάταξη των υπολοίπων όρων τελικά παίρνουμε

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (9.2.16)$$

Προσδιορίσαμε έτσι την έκφραση του διδιάστατου τελεστή του Laplace σε πολικές συντεταγμένες.

Ας μην παραλείψουμε να σημειώσουμε ότι στους «παρονομαστές» (μέσα σε εισαγωγικά: πρόκειται και για μερικές παραγωγούς, όχι μόνο για κλάσματα!) στην έκφραση (9.2.16) έχουμε και στους τρεις όρους του αθροίσματος διαστάσεις μήκους στο τετράγωνο. (Η πολική ακτίνα  $r$  έχει φυσικά διαστάσεις μήκους, ενώ η πολική γωνία  $\theta$  είναι αδιάστατο μέγεθος.) Αυτή είναι μια πολύ βασική παρατήρηση για τους όρους σε αθροίσματα: πρέπει όλοι τους να έχουν ακριβώς τις ίδιες φυσικές διαστάσεις. Βέβαια στους «αριθμητές» (μέσα σε εισαγωγικά και πάλι: πρόκειται και για μερικές παραγωγούς!) οι διαστάσεις είναι εκείνες της συναρτήσεως  $u$ , γνωστής ή άγνωστης.

Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να σημειωθεί επίσης ο τύπος παραγωγίσεως

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \left( 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}. \quad (9.2.17)$$



Αυτός προκύπτει άμεσα με τη χρήση του κανόνα παραγωγίσεως γινομένου στο γινόμενο  $r(\partial u/\partial r)$ . Παίρνοντας υπόψη τον τύπο αυτό (9.2.17), μπορούμε να γράψουμε το διδιάστατο τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  σε πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$ , που έχει ήδη βρεθεί στη σχέση (9.2.16), και στην κάπως απλούστερη, πιο συνεπτυγμένη μορφή

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (9.2.18)$$

τώρα με δύο όρους στο άθροισμα του δεξιού μέλους. Με την εφαρμογή του τελεστή αυτού  $\nabla^2$  σε κατάλληλα παραγωγίσιμη συνάρτηση  $u = u(r, \theta)$  έχουμε φυσικά ανάλογα με τον τύπο (9.2.16)

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (9.2.19)$$

Είναι στ' αλήθεια μερικές φορές εύχρηστη αυτή η μορφή (9.2.18) ή (9.2.19) για το διδιάστατο τελεστή του Laplace σε πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$ . Αυτό ισχύει ιδίως μάλιστα, εάν η συνάρτηση  $u = u(r, \theta)$  είναι ανεξάρτητη από την πολική γωνία  $\theta$  και εξαρτάται μόνο από την πολική ακτίνα  $r$ , δηλαδή απλά  $u = u(r)$ . Μάλιστα στην περίπτωση αυτή δεν πρέπει να χρησιμοποιούμε το σύμβολο της μερικής παραγώγου  $\partial$ . Αρκεί να χρησιμοποιούμε το σύμβολο της συνήθους παραγώγου  $d$ , γιατί η μερική παράγωγος  $\partial u/\partial \theta$  είναι εκ ταυτότητος ίση με το μηδέν. Μια τέτοια περίπτωση αποτελεί η περίπτωση κυκλικής περιοχής (γεωμετρική συμμετρία) με συμμετρία επίσης και στις συνοριακές συνθήκες. Παραδείγματος χάρη, σε ένα υποστούλωμα (μια κολόνα) κυκλικής διατομής υπό επίπεδες συνθήκες με κυκλική συμμετρία στη θερμοκρασία ή, καλύτερα για τον Πολιτικό Μηχανικό, στη φόρτιση.

Θυμόμαστε βέβαια ότι το άθροισμα των ορθών τάσεων  $s = \sigma_x + \sigma_y$  επαληθεύει τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (9.2.1), είναι αρμονική συνάρτηση: σχέση (2.1.19). Επίσης δεν ξεχνάμε ότι το άθροισμα αυτό  $s$  παραμένει αναλλοίωτο σε στροφή του συστήματος συντεταγμένων, οπότε

$$s = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (9.2.20)$$

με  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  τις αντίστοιχες κύριες τάσεις. Ασφαλώς οι κύριες τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  δεν εξαρτώνται από το εάν εμείς χρησιμοποιούμε Καρτεσιανές ή πολικές συντεταγμένες. Όπως γνωρίζουμε από τη Μηχανική των Υλικών, έχουν τις δικές τους διευθύνσεις σε κάθε σημείο του ελαστικού μέσου και οι διευθύνσεις αυτές είναι φυσικά κάθετες μεταξύ τους.

### B9.2.2. Λύση της εξίσωσης του Laplace υπό κυκλική συμμετρία

Εξετάζουμε τώρα λίγο λεπτομερέστερα την περίπτωση της κυκλικής συμμετρίας (ή συμμετρίας γύρω από κέντρο: την αρχή των αξόνων  $O$ ), οπότε  $u = u(r)$ . Υπάρχει ανεξαρτησία από την πολική γωνία  $\theta$ . (Γι' αυτό και μιλάμε για κυκλική συμμετρία.) Τότε λόγω της εκφράσεως (9.2.18) ή (9.2.19) του διδιάστατου τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  σε πολικές συντεταγμένες η σχετική εξίσωση του Laplace θα πάρει τη μορφή

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = 0. \quad (9.2.21)$$

Η δεύτερη μερική παράγωγος ως προς την πολική γωνία  $\theta$  είναι τώρα απύσασ και η διαφορική αυτή εξίσωση (9.2.21) είναι απλά μια συνήθους διαφορική εξίσωση.

Θα προσδιορίσουμε τώρα τη γενική λύση της  $u = u(r)$ . Εδώ με  $r \neq 0$  (πιο σωστά με  $r > 0$ ) πολλαπλασιάζοντας επί  $r$  την εξίσωση (9.2.21), έχουμε

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) = 0. \quad (9.2.22)$$

Μια πρώτη ολοκλήρωση (προφανώς ως προς την πολική ακτίνα  $r$ ) μας δίνει

$$r \frac{du}{dr} = A \implies \frac{du}{dr} = \frac{A}{r}, \quad r > 0, \quad (9.2.23)$$

με το  $A$  αυθαίρετη σταθερά. Πρέπει όμως να κάνουμε και μια δεύτερη ολοκλήρωση ως προς  $r$ . Έτσι, επειδή  $\int dr/r = \ln r + C$  με  $\ln$  το φυσικό λογάριθμο και με το  $C$  αυθαίρετη σταθερά, παίρνουμε

$$u = u(r) = A \ln r + B \quad (9.2.24)$$

με το  $B$  επίσης αυθαίρετη σταθερά. Άρα σε περίπτωση κυκλικής συμμετρίας η διδιάστατη εξίσωση του Laplace  $\nabla^2 u = 0$  έχει τη γενική λύση (9.2.24) με τα  $A$  και  $B$  δύο αυθαίρετες σταθερές. Είναι λογική και αναμενόμενη η ύπαρξη δύο αυθαίρετων σταθερών,  $A$  και  $B$ , επειδή η συνήθης διαφορική εξίσωση (9.2.21) ή (9.2.22) είναι δευτέρας τάξεως.

Αυτό που καθόλου μα καθόλου δε μας αρέσει, είναι απαράδεκτο από φυσικής απόψεως, είναι η λογαριθμική συνάρτηση  $\ln r$  στη γενική λύση (9.2.24). Αυτή η δυσαρέσκειά μας οφείλεται στο γεγονός ότι η μεταβλητή  $r$  έχει διαστάσεις μήκους. Άρα δεν επιτρέπεται να εμφανίζεται μέσα σε λογάριθμο (ούτε βέβαια σε κάποια άλλη τριγωνομετρική, υπερβολική, εκθετική, κλπ. συνάρτηση). Ασφαλώς από μαθηματικής απόψεως η λύση (9.2.24) είναι απόλυτα σωστή (βέβαια με  $r > 0$ , ασφαλώς όχι με  $r = 0$ ), αλλ' από φυσικής απόψεως υπάρχει το πιο πάνω σοβαρό πρόβλημα. Για την επιτυχή αντιμετώπιση του φυσικού αυτού προβλήματος απλά θέτουμε  $B = -A \ln r_0 + B^*$ , δηλαδή εισάγουμε τη νέα σταθερά  $r_0$  με συγκεκριμένη τιμή και με διαστάσεις μήκους (π.χ.  $r_0 = 1$  m) καθώς και τη νέα αυθαίρετη σταθερά  $B^*$  στη θέση της αρχικής αυθαίρετης σταθεράς  $B$ . Με τον τρόπο αυτό η γενική λύση (9.2.24) θα πάρει τη σωστότερη μορφή της

$$u = u(r) = A \ln r - A \ln r_0 + B^* \implies u = u(r) = A \ln \frac{r}{r_0} + B^*. \quad (9.2.25)$$

Στη μορφή αυτή υπάρχουν πάλι δύο αυθαίρετες σταθερές: οι  $A$  και  $B^*$ . (Η σταθερά  $r_0$  δε θεωρείται ότι μεταβάλλεται. Είναι απόλυτα σταθερή, έχει συγκεκριμένη τιμή, π.χ.  $r_0 = 1$  m.) Τώρα όμως η λογαριθμική συνάρτηση  $\ln$  (φυσικός λογάριθμος) έχει σαν όρισμά της το πηλίκο  $r/r_0$ , που είναι πλέον αδιάστατη ποσότητα. Οι αυθαίρετες σταθερές  $A$  και  $B^*$  έχουν προφανώς τις ίδιες διαστάσεις με τη συνάρτηση  $u$ , την άγνωστη συνάρτηση στη συνήθη διαφορική εξίσωση (9.2.21) ή (9.2.22). Αντίθετα η συγκεκριμένη, καθορισμένη σταθερά  $r_0$  (που είναι βέβαια θετική) έχει διαστάσεις μήκους, ακριβώς όπως συμβαίνει και με την πολική ακτίνα  $r$ . Έτσι το πηλίκο τους  $r/r_0$  είναι προφανώς αδιάστατη ποσότητα.

Εξετάζουμε τώρα την κυκλική περιοχή  $D$  με ακτίνα  $a$  και με συνοριακή τιμή της άγνωστης συναρτήσεως  $u = u(r)$  την τιμή  $u(a) = u_0$  (με το  $u_0$  γνωστή σταθερά) για κάθε τιμή της πολικής γωνίας  $\theta$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ). Η σταθερή αυτή συνοριακή τιμή  $u_0$  στην περιφέρεια  $r = a$  του κύκλου εξασφαλίζει σ' εμάς την κυκλική συμμετρία, την οποία έχουμε ήδη υποθέσει στη συνήθη διαφορική εξίσωση (9.2.21) και στη λύση της (9.2.25). Πρέπει όμως για φυσικούς λόγους στο κέντρο  $O$  της κυκλικής αυτής περιοχής (όπου  $r = 0$ ) η άγνωστη συνάρτηση  $u = u(r)$  (π.χ. η θερμοκρασία ή το άθροισμα των ορθών τάσεων) να είναι πεπερασμένη. Μόνη δυνατότητα γι' αυτό αποτελεί ο μηδενισμός της αυθαίρετης σταθεράς  $A$  στη λύση (9.2.25). Τούτο ισχύει, γιατί η σταθερά αυτή  $A$  πολλαπλασιάζεται επί το λογάριθμο  $\ln(r/r_0)$ , που τείνει στο μείον άπειρο για  $r = 0$ . Επομένως η γενική λύση (9.2.25) της εξισώσεως του Laplace στην παρούσα ειδική περίπτωση της κυκλικής περιοχής  $D$  κι επιπλέον και κυκλικής συμμετρίας ανάγεται στη μορφή  $u = B^*$ . Τελικά η συνοριακή συνθήκη  $u(a) = u_0$  μας υποχρεώνει να δεχθούμε ότι  $B^* = u_0$ . Επομένως η λύση της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace στο παρόν πολύ απλό πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι εξίσου απλή, σταθερή, και έχει την ακόλουθη μορφή:

$$u(r) = u_0, \quad 0 \leq r \leq a. \quad (9.2.26)$$

Ασφαλώς άμεσα επαληθεύεται ότι η σταθερή αυτή λύση πληροί την εξίσωση του Laplace, είναι αρμονική συνάρτηση. Επίσης είναι φραγμένη σε ολόκληρη την κυκλική περιοχή  $D$ . Τέλος επαληθεύει και τη συνοριακή συνθήκη  $u(a) = u_0$ . Κατά μία έννοια η σταθερή αυτή λύση (9.2.26) είναι η λύση

που περιμέναμε στο τόσο απλό αυτό πρόβλημα συνοριακών τιμών, ένα πρόβλημα Dirichlet για τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace  $\nabla^2 u = 0$ .

Βέβαια σε περίπτωση (κυκλικής) δακτυλιοειδούς περιοχής (δακτυλίου)  $D^*$  με  $a \leq r \leq b$  (φυσικά με  $a < b$ ), όπως είναι η διατομή ενός κυκλικού σωλήνα, δεν υπάρχει πια η απαίτηση να έχουμε  $A = 0$  στη λύση (9.2.25). Η αρχή των αξόνων  $O$  (με  $r = 0$ ) δεν αποτελεί πια σημείο της περιοχής  $D^*$ . Άρα ο απειρισμός της συναρτήσεως  $u = u(r)$  για  $r = 0$  να μην υφίσταται, αλλά καμία απολύτως φυσική έννοια δεν έχει, γιατί το σημείο  $O$  (όπου  $r = 0$ ) κείται εκτός της δακτυλιοειδούς περιοχής  $D^*$  που εξετάζουμε. Στην περίπτωση αυτή συνεχίζουμε ασφαλώς να δεχόμαστε την κυκλική συμμετρία (ή συμμετρία γύρω από το σημείο  $O$ ). Φυσικά τώρα οι δύο γνωστές και σταθερές συνοριακές τιμές  $u(a) = u_a$  και  $u(b) = u_b$  αρκούν για τον καθορισμό και των δύο αυθαίρετων σταθερών  $A$  και  $B^*$  στη γενική λύση (9.2.25). Έτσι καθορίζεται πλήρως η λύση αυτή.

### B9.3. Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE ΣΕ ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΕ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

#### B9.3.1. Κυλινδρικές συντεταγμένες

Η περίπτωση των κυλινδρικών συντεταγμένων  $r$ ,  $\theta$  και  $z$  αποτελεί απλή επέκταση της περιπτώσεως των πολικών συντεταγμένων  $r$  και  $\theta$  που εξετάσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Απλά τώρα έχει προστεθεί και η τρίτη συντεταγμένη  $z$ . Αυτή όμως συμπίπτει με την αντίστοιχη συντεταγμένη  $z$  στις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x$ ,  $y$  και  $z$ . Γι' αυτό και δηλώθηκε με το ίδιο σύμβολο, το σύμβολο  $z$ , στην τρίτη από τις σχέσεις (9.1.3):  $z = z$ . Και μάλιστα η συντεταγμένη αυτή  $z$  δεν επεμβαίνει καθόλου στις δύο πρώτες σχέσεις (9.1.3), οι οποίες συμπίπτουν πλήρως με τις αντίστοιχες σχέσεις (9.1.1) που ισχύουν για τις πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$ .

Επομένως στις κυλινδρικές συντεταγμένες για την έκφραση του τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (9.2.18), που αφορά στις πολικές συντεταγμένες, προσθέτοντας όμως  $z$  αυτήν και τη δεύτερη μερική παράγωγο ως προς τη μεταβλητή  $z$ . Έτσι, παίρνοντας υπόψη τις σχέσεις (9.2.16), (9.2.17) και (9.2.18), έχουμε στις κυλινδρικές συντεταγμένες  $r$ ,  $\theta$  και  $z$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{ή} \quad \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (9.3.1)$$

Τώρα αρχικά έχουμε τέσσερις όρους στο άθροισμα, που μετατρέπονται τελικά σε τρεις όρους. Με εφαρμογή του τελεστή αυτού του Laplace  $\nabla^2$  σε κατάλληλα παραγωγίσιμη συνάρτηση  $u = u(r, \theta, z)$  έχουμε φυσικά για την εξίσωση του Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (9.3.2)$$

Φυσικά σε περίπτωση που υπάρχει κυλινδρική συμμετρία, δηλαδή συμμετρία γύρω από τον άξονα  $r = 0$  μιας κυλινδρικής ή σωληνοειδούς περιοχής, η συνάρτηση  $u$  δε θα εξαρτάται πια από τη μεταβλητή  $\theta$  (την πολική γωνία). Θα εξαρτάται μόνο από τις μεταβλητές  $r$  και  $z$ . Επομένως με τη μερική παράγωγο  $\partial^2 u / \partial \theta^2$  τώρα μηδενική η εξίσωση του Laplace (9.3.2) σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $r$ ,  $\theta$  και  $z$  απλοποιείται στην απλούστερη μορφή

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (9.3.3)$$

Η εξίσωση αυτή ισχύει σε περίπτωση κυλινδρικής συμμετρίας ή συμμετρίας γύρω από άξονα: εδώ γύρω από τον άξονα  $Oz$  με  $r = 0$ .

#### B9.3.2. Σφαιρικές συντεταγμένες

Κάπως πιο δύσκολες από τις πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$  και από τις κυλινδρικές συντεταγμένες  $r$ ,  $\theta$  και  $z$  είναι οι σφαιρικές συντεταγμένες  $\rho$ ,  $\theta$  και  $\varphi$ . Γι' αυτές ισχύουν οι σχέσεις (9.1.4).

Για τον υπολογισμό του τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  σε σφαιρικές συντεταγμένες χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί και πάλι ο κανόνας της αλυσίδας (της αλυσσοειδούς παραγωγίσεως ή καλύτερα της αλληλουχίας των παραγώγων), ακριβώς όπως έγινε και στην Παράγραφο Β9.2.1 για τις πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$ . Τώρα όμως ο κανόνας αυτός θα πάρει την κάπως πολυπλοκότερη μορφή του για τη μεταβλητή  $x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (9.3.4)$$

αντί για την απλούστερη μορφή του (9.2.5) στις πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$ . (Εντελώς ανάλογοι θα είναι οι τύποι και για τις πρώτες μερικές παραγώγους ως προς τις μεταβλητές  $y$  και  $z$ .) Στη συνέχεια θα πρέπει να υπολογισθούν και οι αντίστοιχες δεύτερες μερικές παράγωγοι και να εισαχθούν στη δεύτερη σχέση (9.2.2), δηλαδή σ' αυτήν που αφορά στην τριδιάστατη εξίσωση του Laplace  $\nabla^2 u = 0$ . Αντίστοιχα και στη δεύτερη σχέση (9.2.1) για τον ίδιο τον τελεστή του Laplace.

Πρόκειται για μια εργασία αρκετού υπολογιστικού κόστους και γι' αυτό θα την παραλείψουμε. Θα αναφέρουμε απλά το σχετικό αποτέλεσμα. Αυτό είναι για τον τελεστή του Laplace  $\nabla^2$  σε σφαιρικές συντεταγμένες  $\rho$ ,  $\theta$  και  $\varphi$

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (9.3.5)$$

Άρα η τριδιάστατη εξίσωση του Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες  $\rho$ ,  $\theta$  και  $\varphi$  έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \quad (9.3.6)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να απλοποιηθεί λίγο, εάν παρατηρήσουμε (με βάση το γνωστό κανόνα της παραγωγίσεως του γινομένου δύο συναρτήσεων) ότι

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{\rho^2} \left( 2\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} + \rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \right) = \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}. \quad (9.3.7)$$

Άρα η εξίσωση του Laplace (9.3.6) μπορεί να γραφεί και στην κάπως απλούστερη μορφή της

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \quad (9.3.8)$$

Εάν μάλιστα η άγνωστη συνάρτηση  $u = u(\rho, \theta, \varphi)$  δεν εξαρτάται από την πολική γωνία  $\theta$  (με  $0 \leq \theta < 2\pi$ ), οπότε απλά  $u = u(\rho, \varphi)$ , τότε η εξίσωση του Laplace (9.3.8) απλοποιείται στη μορφή

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \varphi}{\rho^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0. \quad (9.3.9)$$

### Β9.3.3. Λύση της εξίσωσης του Laplace υπό σφαιρική συμμετρία

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση συναρτήσεως  $u$  με σφαιρική συμμετρία, δηλαδή με πλήρη συμμετρία ως προς το κέντρο  $O$  μιας σφαίρας. Τότε πρέπει να υπάρχει όχι μόνο γεωμετρική συμμετρία, αλλ' επιπλέον και συμμετρία συνοριακών τιμών στην επιφάνεια της σφαίρας. (Ανάλογα ισχύουν και για σφαιρικό κέλυφος ή για τον άπειρο χώρο με σφαιρική οπή.) Στην περίπτωση αυτή η άγνωστη συνάρτηση  $u$  είναι ανεξάρτητη από τις δύο μεταβλητές (εδώ δύο γωνίες)  $\theta$  και  $\varphi$ . Εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή  $\rho$ , δηλαδή  $u = u(\rho)$ . Επομένως η εξίσωση του Laplace (9.3.8) παίρνει τώρα την εξής απλούστατη μορφή με τη δικαιολογημένη μάλιστα χρήση του συμβόλου της συνήθους παραγωγίσεως  $d$  αντί για το σύμβολο της μερικής παραγωγίσεως  $\partial$ :

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{du}{d\rho} \right) = 0. \quad (9.3.10)$$

(Φυσικά  $\rho > 0$ .) Πρόκειται για ανάλογη περίπτωση συμμετρίας με εκείνη που εξέτασαμε στην Παράγραφο Β9.2.2: την περίπτωση κυκλικής συμμετρίας ως προς το κέντρο  $O$  κύκλου.

Όπως και στις πολικές συντεταγμένες, έτσι κι εδώ είναι πολύ εύκολη η επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (9.3.10). Χρειάζονται μόνο δύο απλές ολοκληρώσεις. Συγκεκριμένα έχουμε

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{du}{d\rho} \right) = 0 \implies \frac{d}{d\rho} \left( \rho^2 \frac{du}{d\rho} \right) = 0 \implies \rho^2 \frac{du}{d\rho} = A \implies \frac{du}{d\rho} = \frac{A}{\rho^2} \quad (9.3.11)$$

με  $\rho > 0$ . Έτσι προκύπτει τελικά η γενική λύση

$$u = u(\rho) = \frac{A^*}{\rho} + B, \quad \rho > 0. \quad (9.3.12)$$

Οι σταθερές, αρχικά μόνο  $A$  και στη συνέχεια  $A^*$  (με  $A^* = -A$ ) και  $B$ , είναι φυσικά αυθαίρετες. Υπό συνθήκες σφαιρικής συμμετρίας υπάρχει και το πλεονέκτημα της μη παρουσίας της λογαριθμικής συναρτήσεως  $\ln$  στη γενική λύση (9.3.11) της εξίσωσης του Laplace. Αντίθετα υπό συνθήκες κυκλικής συμμετρίας παρουσιάζεται η λογαριθμική συνάρτηση στη γενική λύση (9.2.24) ή (9.2.25).

## Β9.4. ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΤΟΥ LAPLACE ΣΕ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

### Β9.4.1. Επίλυση με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών

Στην ενότητα αυτή θα επιλύσουμε τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Τη μέθοδο αυτή τη μελετήσαμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο Β5 εφαρμόζοντάς την στις μονοδιάστατες εξισώσεις του κύματος και της διαχύσεως καθώς και στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace, αλλά σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$ . Στα τρία προηγούμενα Κεφάλαια Β6, Β7 και Β8 την εφαρμόσαμε επίσης σε μερικά ειδικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού: ταλαντώσεις ράβδων και δοκών, προβλήματα δίσκων και πλακών, κλπ. Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιήσουμε ξανά τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, εδώ όμως με τη χρήση πολικών συντεταγμένων  $(r, \theta)$ . Δεν υπάρχει κάποια ουσιαστική αλλαγή στη μέθοδο. Ξεκινάμε λοιπόν με τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace  $\nabla^2 u = 0$  σε πολικές συντεταγμένες, μια τόσο σημαντική εξίσωση εξαιτίας των πολλών εφαρμογών της στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Ορισμένες από αυτές τις εφαρμογές είχαμε την ευκαιρία να τις δούμε εκτενώς στην Παράγραφο Β2.1.1 του Κεφαλαίου Β2.

Έχουμε ήδη υπολογίσει λίγο πριν στη σχέση (9.2.16) της Παραγράφου Β9.2.1 την έκφραση του τελεστή του Laplace (της Λαπλασιανής) και σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Ήταν η έκφραση

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}. \quad (9.4.1)$$

Άρα η διδιάστατη εξίσωση του Laplace  $\nabla^2 u = 0$  παίρνει σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  τη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (9.4.2)$$

φυσικά τώρα με  $u = u(r, \theta)$ . Ακριβώς όπως συμβαίνει και στις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$ , πρόκειται κι εδώ στις πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  πάλι για διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, γραμμική, ομογενή και δευτέρας τάξεως. Τώρα όμως η εξίσωση του Laplace έχει μη σταθερούς (μεταβλητούς) συντελεστές λόγω των συντελεστών της  $1/r$  (στη μερική παράγωγο  $\partial u / \partial r$ ) και  $1/r^2$  (στη μερική παράγωγο  $\partial^2 u / \partial \theta^2$ ). Δε θα μας δυσκολέψει πολύ αυτό στη δουλειά μας για την επίλυσή της με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Ξεκινάμε λοιπόν με βάση όλα όσα ήδη γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο Β5 για την τόσο χρήσιμη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών.

Αφού η άγνωστη συνάρτηση  $u(r, \theta)$  εξαρτάται γενικά κι από τις δύο πολικές συντεταγμένες  $r$  και  $\theta$ , στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών την υποθέτουμε αρχικά στη μορφή

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta). \quad (9.4.3)$$

Δηλαδή την υποθέτουμε σαν γινόμενο μιας συναρτήσεως της πολικής ακτίνας  $r$ : της  $R(r)$ , επί μια συνάρτηση της πολικής γωνίας  $\theta$ : της  $\Theta(\theta)$ . Υπενθυμίζουμε επίσης ότι γενικά  $r \geq 0$  και  $0 \leq \theta < 2\pi$  (ή ισοδύναμα  $-\pi < \theta \leq \pi$ ). Πολύ εύκολα υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους της που μας χρειάζονται στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (9.4.2), στην εξίσωση του Laplace:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = R'(r)\Theta(\theta), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = R''(r)\Theta(\theta) \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = R(r)\Theta''(\theta). \quad (9.4.4)$$

Αυτές τις μερικές παραγώγους τις αντικαθιστούμε στην εξίσωση του Laplace (9.4.2) παίρνοντας

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0. \quad (9.4.5)$$

Διαιρούμε τέλος με  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  υποθέτοντας ότι  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \neq 0$ . Οδηγούμαστε έτσι στην εξίσωση

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r}\frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = 0. \quad (9.4.6)$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα επί  $r^2$  και μεταφέροντας το κλάσμα  $\Theta''(\theta)/\Theta(\theta)$  στο δεξιό μέλος, παίρνουμε την εξίσωση

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda = p^2 \quad \text{με} \quad p \geq 0. \quad (9.4.7)$$

Εδώ, όπως θυμόμαστε, τα δύο ίσα μέλη, που το αριστερό είναι συνάρτηση μόνο του  $r$  και το δεξιό συνάρτηση μόνο του  $\theta$ , πρέπει να εξισωθούν με μία σταθερά. Αυτήν τη σταθερά την επιλέξαμε εδώ σαν μια μη αρνητική σταθερά:  $\lambda = p^2$ . Πολύ σύντομα θα διευκρινίσουμε την επιλογή μας αυτή.

Προς στιγμή ας σημειώσουμε με χαρά την επιτυχία να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών στην εξίσωση του Laplace και σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Αυτό ακριβώς το είχαμε πετύχει με την ίδια εξίσωση και σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$  στην Ενότητα Β5.4. Είναι λοιπόν **διαχωρίσιμη** η διδιάστατη εξίσωση του Laplace και σε Καρτεσιανές και σε πολικές συντεταγμένες και είμαστε τυχεροί και χαρούμενοι συνάμα γι' αυτό. (Αντίθετα όμως, δυστυχώς, η διδιάστατη διαρμονική εξίσωση (2.2.10):  $\nabla^4 u = 0$ , την οποία πληροί η τασική συνάρτηση του Airy  $A(x, y)$ , δεν είναι διαχωρίσιμη, όπως εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε.)

Και τώρα ευθεία στο δρόμο της ευρέσεως της λύσεως  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  που ζητάμε. Από την πιο πάνω σχέση (9.4.7) προκύπτουν αμέσως οι εξής δύο διαφορικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - p^2 R(r) = 0, \quad (9.4.8)$$

$$\Theta''(\theta) + p^2 \Theta(\theta) = 0. \quad (9.4.9)$$

Και οι δύο είναι βέβαια συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, δηλαδή με μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή: την πολική ακτίνα  $r$  (με  $0 \leq r < \infty$ ) η πρώτη και την πολική γωνία  $\theta$  (με  $0 \leq \theta < 2\pi$  ή  $-\pi < \theta \leq \pi$ ) η δεύτερη. Επιπλέον η πρώτη διαφορική εξίσωση (με μεταβλητή το  $r$ ) είναι με μη σταθερούς (με μεταβλητούς) συντελεστές, ενώ η δεύτερη (με μεταβλητή το  $\theta$ ) είναι με σταθερούς συντελεστές.

Ξεκινάμε με τη δεύτερη διαφορική εξίσωση, που είναι απλούστερη (έχει δύο μονάχα όρους) και ταυτόχρονα και με σταθερούς συντελεστές. Με την τόσο γνωστή μας και αναμφισβήτητα απλή μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως, δηλαδή με  $\Theta(\theta) = e^{\mu\theta}$ , την ανάγουμε εύκολα στη μορφή

$$\mu^2 e^{\mu\theta} + p^2 e^{\mu\theta} = 0 \implies (\mu^2 + p^2)e^{\mu\theta} = 0 \implies \mu^2 + p^2 = 0 \implies \mu = \mu_{1,2} = \pm ip \quad (9.4.10)$$

με λύση της τελικά τη

$$\Theta(\theta) = A \cos p\theta + B \sin p\theta. \quad (9.4.11)$$

Τη λύση αυτή τη μετατρέψαμε από μιγαδική εκθετική μορφή σε τριγωνομετρική μορφή με χρήση των τόσο γνωστών μας τύπων του Euler: εδώ  $e^{\pm ip\theta} = \cos p\theta \pm i \sin p\theta$ . Βέβαια οι δύο ποσότητες  $A$

και  $B$  στη λύση αυτή  $\Theta(\theta)$  είναι απλά δύο αυθαίρετες σταθερές. Τα ξέρουμε πολύ καλά αυτά ήδη από το Μέρος Α των βιβλίων αυτών: τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς.

Αυτό που μας είναι ίσως λίγο καινούργιο είναι να συνειδητοποιήσουμε πως σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  η συνάρτηση  $u(r, \theta)$  που ζητάμε να βρούμε πρέπει να είναι (γενικά, με ελάχιστες εξαιρέσεις) μια περιοδική συνάρτηση ως προς την πολική γωνία  $\theta$  με περίοδο  $T = 2\pi$ , δηλαδή

$$u(r, \theta + 2k\pi) = u(r, \theta) \quad \text{με} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.4.12)$$

Και γιατί άραγε πρέπει να συμβαίνει αυτό; Μα απλά γιατί ένα σημείο  $P = (r, \theta)$  (σε πολικές συντεταγμένες) στο επίπεδο παραμένει ακριβώς το ίδιο σημείο, εάν η πολική γωνία  $\theta$  μεταβληθεί κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ . Με άλλα λόγια η πολική γωνία  $\theta$  δεν είναι απόλυτα καθορισμένη για ένα σημείο  $P$  (ενώ αντίθετα η πολική ακτίνα  $r$  είναι!). Η πολική γωνία  $\theta$  μπορεί να μεταβάλλεται κατά  $2k\pi$  (με το  $k$  ακέραιο αριθμό) και το σημείο  $P$  μένει το ίδιο. Άρα και η συνάρτηση  $u(r, \theta)$  (ας πούμε η θερμοκρασία στο σημείο  $P$ , που πληροί στη μόνιμη κατάσταση την εξίσωση του Laplace) πρέπει κι αυτή να παραμένει η ίδια, όταν η πολική γωνία  $\theta$  μεταβάλλεται κατά  $2k\pi$ . Άρα πρέπει οπωσδήποτε να ισχύει η σχέση περιοδικότητας (9.4.12) με περίοδο  $T = 2\pi$  για την πολική γωνία  $\theta$ .

Άρα, για να έχουμε περιοδικότητα με περίοδο  $T = 2\pi$  στη λύση μας (9.4.11), πρέπει απλά το  $\rho$  να είναι ακέραιος αριθμός  $n$ . Κι αφού  $\cos(-n\theta) = \cos n\theta$  και επίσης  $\sin(-n\theta) = -\sin n\theta$ , χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας το  $\rho$  μπορεί να υποθεθεί θετικός ακέραιος αριθμός:  $\rho = n = 1, 2, \dots$ . Κατά συνέπεια η τριγωνομετρική λύση μας (9.4.11) παίρνει τώρα την τελική της περιοδική μορφή

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.4.13)$$

Θα μπορούσαμε να είχαμε κάνει το λάθος (ή έστω την απροσεξία) να πάρουμε αρνητική τιμή για τη **σταθερά διαχωρισμού**  $\lambda$  στη σχέση (9.4.7), δηλαδή να είχαμε πάρει  $\lambda = -\rho^2$ . Τότε θα είχαμε οδηγηθεί σε υπερβολική λύση (με υπερβολικό συνημίτονο και ημίτονο) αντί για την καλοδεχούμενη τριγωνομετρική λύση (9.4.13). Έτσι θα είχαμε παραβιάσει τη συνθήκη περιοδικότητας (9.4.12) για τη λύση μας  $u(r, \theta)$  κι επομένως θα ήμασταν σε εντελώς λάθος δρόμο. Σωστά λοιπόν, πολύ σωστά επιλέξαμε  $\lambda = \rho^2$  (με  $\rho \geq 0$ ) σαν σταθερά διαχωρισμού  $\lambda$  στο χωρισμό των μεταβλητών (9.4.7).

Στην ειδική περίπτωση που ο μη αρνητικός αριθμός  $\rho$  στη σταθερά διαχωρισμού  $\lambda = \rho^2$  πάρει την τιμή  $\rho = 0$ , τότε η δεύτερη συνήθης διαφορική εξίσωση (9.4.9) παίρνει την απλούστατη μορφή

$$\Theta''(\theta) = 0 \quad \text{με λύση} \quad \Theta_0(\theta) = A_0 + B_0\theta. \quad (9.4.14)$$

Προφανώς η λύση είναι τώρα ένα πρωτοβάθμιο πολυώνυμο, αφού μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγός της  $\Theta''(\theta)$ . Για να τη δούμε λίγο καλύτερα τη λύση αυτή  $\Theta_0(\theta) = A_0 + B_0\theta$ . Μαθηματικά είναι σωστή, ταυτόχρονα και απλή. Το πρόβλημα όμως με αυτήν είναι ότι παραβιάζει την πιο πάνω συνθήκη περιοδικότητας (με περίοδο  $T = 2\pi$ ) (9.4.12) ως προς την πολική γωνία  $\theta$ , επειδή

$$\Theta_0(\theta + 2k\pi) = A_0 + B_0(\theta + 2k\pi) = (A_0 + B_0\theta) + 2k\pi B_0 = \Theta_0(\theta) + 2k\pi B_0. \quad (9.4.15)$$

Επομένως, για να ισχύει η συνθήκη περιοδικότητας (9.4.12) ως προς την πολική γωνία  $\theta$ , θα πρέπει αναγκαστικά να έχουμε  $B_0 = 0$ . Έτσι η λύση (9.4.14) (για  $\lambda = \rho = 0$ ) είναι δεκτή, μόνο εάν  $B_0 = 0$ , δηλαδή στη μορφή σταθεράς

$$\Theta_0(\theta) = A_0. \quad (9.4.16)$$

Και τώρα προχωράμε στη συνήθη διαφορική εξίσωση (9.4.8) ως προς την πολική ακτίνα  $r$ . Την υπενθυμίζουμε, τώρα όμως με  $\rho = n$  και αντίστοιχες συναρτήσεις  $R_n(r)$  λόγω της περιοδικότητας που απαιτήσαμε πιο πάνω:

$$r^2 R_n''(r) + r R_n'(r) - n^2 R_n(r) = 0. \quad (9.4.17)$$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, πρόκειται για γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με μη σταθερούς συντελεστές. Ευτυχώς όμως είναι μιας πάρα πολύ ειδικής κατηγορίας: είναι εξίσωση Euler (ή Cauchy-Euler), που είναι μια **ισοδιάστατη** εξίσωση. Τις εξισώσεις Euler τις έχουμε μελετήσει εκτενώς στην Ενότητα Α5.6 του Κεφαλαίου Α5 στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ. Σύμφωνα με τη σχετική μέθοδο για την επίλυσή τους δοκιμάζουμε λύση της μορφής  $R(r) = r^\mu$ , οπότε έχουμε

$$R(r) = r^\mu \implies R'(r) = \mu r^{\mu-1} \implies R''(r) = \mu(\mu-1)r^{\mu-2}. \quad (9.4.18)$$

Αντικαθιστούμε τώρα αυτήν τη δοκιμαστική συνάρτηση  $R(r)$  και τις δύο πιο πάνω πρώτες παραγώγους της  $R'(r)$  και  $R''(r)$  στη διαφορική εξίσωση Euler (9.4.17). Πολύ εύκολο! Προκύπτει

$$\mu(\mu-1)r^\mu + \mu r^\mu - n^2 r^\mu = 0 \implies [\mu(\mu-1) + \mu - n^2]r^\mu = 0 \implies \mu^2 - n^2 = 0 \implies \mu = \pm n. \quad (9.4.19)$$

Άρα η χαρακτηριστική εξίσωση  $\mu^2 - n^2 = 0$  έχει τις δύο αντίθετες ρίζες  $\mu = \mu_{1,2} = \pm n$ . Αυτές αντιστοιχούν στις δύο μερικές λύσεις  $R_1(r) = r^n$  και  $R_2(r) = r^{-n}$ . Επομένως η εξίσωση Euler (9.4.17), την οποία εξετάζουμε εδώ, θα έχει γενική λύση της μορφής

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n} \equiv C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \quad (9.4.20)$$

με τα  $C_n$  και  $D_n$  αυθαίρετες σταθερές. Σημειώνουμε τέλος ότι στην ειδική περίπτωση που  $n = 0$  η διαφορική εξίσωση Euler (9.4.17) έχει χαρακτηριστική εξίσωση τη  $\mu^2 = 0$  με προφανή διπλή ρίζα της τη ρίζα  $\mu = \mu_{1,2} = 0$ . Επομένως η γενική λύση της σύμφωνα με τις σχέσεις (5.6.6) και (5.6.7) της Ενότητας Α5.6 του Κεφαλαίου Α5 του Μέρους Α των βιβλίων αυτών θα είναι η συνάρτηση

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r \quad (9.4.21)$$

με τα  $C_0$  και  $D_0$  να είναι και πάλι αυθαίρετες σταθερές.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι αποδεκτές λύσεις  $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$  για τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (9.4.2) σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  θα είναι οι ιδιοσυναρτήσεις

$$u_n(r, \theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = \left( C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) \quad \mu\epsilon \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.4.22)$$

και επιπλέον και η κάπως διαφορετική και ανεξάρτητη από την πολική γωνία  $\theta$  λύση για  $n = 0$

$$u_0(r, \theta) = R_0(r)\Theta_0(\theta) = (C_0 + D_0 \ln r)A_0. \quad (9.4.23)$$

Άρα υπό τις παρούσες συνθήκες περιοδικότητας (με  $T = 2\pi$ ) η γενική λύση  $u(r, \theta)$  της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace (9.4.2) σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  που αναζητούμε είναι της μορφής

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \theta) = (C_0 + D_0 \ln r)A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \quad (9.4.24)$$

(Θέσαμε τη λύση  $u_0(r, \theta)$  έξω από το άθροισμα, επειδή η λύση αυτή έχει την ειδική μορφή (9.4.23).)

### B9.4.2. Επίλυση του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet

Με βάση την πιο πάνω λύση (9.4.24) θα επιλύσουμε εδώ το **πρόβλημα Dirichlet** σε κύκλο  $D$  με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$  και ακτίνα  $a$ . Αυτό είναι το **εσωτερικό πρόβλημα Dirichlet**. Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στην εύρεση αρμονικής συναρτήσεως  $u(r, \theta)$ , δηλαδή συναρτήσεως που να πληροί την εξίσωση του Laplace (9.4.2), εδώ σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ , μέσα στον κύκλο αυτό  $D$  και ταυτόχρονα να παίρνει γνωστές τιμές πάνω στην περιφέρεια  $r = a$  του κύκλου. Συγκεκριμένα στην περιφέρεια αυτή  $r = a$  θέλουμε να πληρούται η συνοριακή συνθήκη Dirichlet

$$u(a, \theta) = f(\theta) \quad \mu\epsilon \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (9.4.25)$$



και με τη συνάρτηση  $f(\theta)$  γνωστή και φυσικά περιοδική με περίοδο  $T = 2\pi$ .

Μια δεύτερη συνθήκη, η οποία όμως δεν είναι διατυπωμένη άμεσα, αλλά πρέπει εμείς να την υποθέσουμε έμμεσα, είναι ότι η άγνωστη συνάρτηση  $u(r, \theta)$  πρέπει να παραμένει φραγμένη στο εσωτερικό του κύκλου  $D$ . Για παράδειγμα, η θερμοκρασία  $u(r, \theta)$  στον κύκλο αυτό  $D$  δεν επιτρέπεται να απειρίζεται για  $r = 0$ , δηλαδή στο κέντρο του κύκλου  $D$ . Οπωσδήποτε κάτι τέτοιο δε θα ήταν σωστό από φυσικής απόψεως. Για να αποφευχθεί ο απειρισμός αυτός για  $r = 0$ , θα πρέπει όλοι οι όροι της παραπάνω λύσεως (9.4.24) που καταρχήν απειρίζονται να μηδενισθούν. Και πρώτα-πρώτα ο όρος  $D_0 \ln r$  έξω από το άθροισμα θα πρέπει να μηδενισθεί κι έτσι δεχόμαστε ότι  $D_0 = 0$ . Στη συνέχεια και όλοι οι όροι  $D_n/r^n$  μέσα στις παρενθέσεις του αθροίσματος θα πρέπει κι αυτοί να μηδενισθούν και επομένως δεχόμαστε ότι  $D_n = 0$ . Με τους μηδενισμούς αυτούς όλων των σταθερών  $D_n$  (με  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) η λύση (9.4.24) της εξίσωσης του Laplace παίρνει τη μορφή

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \quad (9.4.26)$$

Αυτή είναι βέβαια φραγμένη,  $u(0, \theta) = A_0$ , για  $r = 0$ . Στη μορφή αυτή πήραμε την πρωτοβουλία να ενσωματώσουμε τις σταθερές  $C_0$  και  $C_n$  γενικότερα στις σταθερές  $A_0$  και  $A_n$  και  $B_n$  γενικότερα. Αυτό όμως δεν προκαλεί καμία βλάβη στη γενικότητα της παρούσας λύσεως  $u(r, \theta)$ .

Έχουμε τώρα σίγουρα μια φραγμένη λύση στο εσωτερικό του κύκλου  $D$  (με  $0 \leq r < a$ ) με τιμή, επαναλαμβάνουμε,  $u(0, \theta) = A_0$  στο κέντρο του  $r = 0$ . Απομένει ο προσδιορισμός των άγνωστων σταθερών  $A_n$  (με  $n = 0, 1, 2, \dots$ ) και  $B_n$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ), ώστε να επαληθεύεται όχι μόνο η εξίσωση του Laplace στον κύκλο  $D$ , αλλά και η συνοριακή συνθήκη Dirichlet (9.4.25), δηλαδή  $u(a, \theta) = f(\theta)$ . Προς το σκοπό αυτό θα πρέπει βέβαια να θέσουμε  $r = a$  στην πιο πάνω λύση (9.4.26). Έτσι αυτή παίρνει τη μορφή

$$u(a, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta) \quad (9.4.27)$$

λόγω της συνοριακής συνθήκης (9.4.25):  $u(a, \theta) = f(\theta)$  που προαναφέραμε κι απόλυτα ισοδύναμα

$$u(a, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* \cos n\theta + B_n^* \sin n\theta) = f(\theta) \quad \text{με} \quad A_n^* := a^n A_n \quad \text{και} \quad B_n^* := a^n B_n. \quad (9.4.28)$$

Με τη συνάρτηση  $f(\theta)$  στην περιφέρεια (στο σύνορο)  $C$  του κύκλου  $D$  γνωστή είναι τώρα πια προφανές ότι η σχέση αυτή (9.4.28) αποτελεί την κλασική τριγωνομετρική σειρά Fourier της  $f(\theta)$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  της πολικής γωνίας  $\theta$ . Ξαναθυμόμαστε τους τύπους για τους συντελεστές μιας τέτοιας σειράς Fourier. Συγκεκριμένα έχουμε τους τύπους (16.2.6), (16.2.10) και (16.2.12) της Παραγράφου Α16.2.2 του Κεφαλαίου Α16 του Μέρους Α των διδακτικών αυτών βιβλίων ή τους αντίστοιχους τύπους (17.1.8), (17.1.9) και (17.1.10) της Ενότητας Α17.1 του Κεφαλαίου Α17 του Μέρους Α. Εδώ με περίοδο  $T = 2\pi$  ή  $L = T/2 = \pi$  βρίσκουμε εύκολα από τους τύπους αυτούς ότι

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad (\text{μέση τιμή της } f(\theta)), \quad (9.4.29)$$

$$A_n^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.4.30)$$

$$B_n^* = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots. \quad (9.4.31)$$

Βέβαια λόγω της περιοδικότητας των συναρτήσεων που υπεισέρχονται στις ολοκληρώσεις αυτές το διάστημα ολοκληρώσεως θα μπορούσε θαυμάσια να είναι το διάστημα  $[-\pi, \pi]$  ή οποιοδήποτε άλλο διάστημα  $[\alpha, \alpha + 2\pi]$  μήκους όμως ίσου με την περίοδο  $T = 2\pi$  ως προς την πολική γωνία  $\theta$ .

Έτσι μάλιστα που ορίσαμε τις σταθερές  $A_n^*$  και  $B_n^*$  στις σχέσεις (9.4.28) δεξιά, διαπιστώνουμε αμέσως ότι η λύση μας (9.4.26) μπορεί θαυμάσια να γραφεί και στην ακόλουθη τελική της μορφή:

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* \cos n\theta + B_n^* \sin n\theta) \left(\frac{r}{a}\right)^n. \quad (9.4.32)$$

Ασφαλώς για  $r = a$ , οπότε  $r/a = 1$ , η συνάρτηση αυτή  $u(r, \theta)$  παίρνει την ειδική μορφή της (9.4.28).

### B9.4.3. Σχόλια για την επιλυση του εξωτερικού και του γενικού προβλήματος Dirichlet

Με ανάλογη εργασία μπορούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα Dirichlet σε ολόκληρο το επίπεδο με κυκλική οπή ακτίνας  $r = a$  και συνοριακή συνθήκη Dirichlet  $u(a, \theta) = f(\theta)$  πάλι στην περιφέρεια  $C$  της άπειρης αυτής περιοχής. Αυτό είναι το καλούμενο **εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet**. Εδώ ζητάμε επιπλέον η άγνωστη συνάρτηση  $u(r, \theta)$  να μην απειρίζεται στο άπειρο: για  $r \rightarrow \infty$ . Επομένως η λύση  $u(r, \theta)$  την οποία θα πρέπει τώρα να υιοθετήσουμε παίρνει την τροποποιημένη μορφή της

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^* \cos n\theta + B_n^* \sin n\theta) \left(\frac{a}{r}\right)^n \quad (9.4.33)$$

με εξάλειψη των όρων των σταθερών  $D_0$  και  $C_n$  της γενικής λύσεως (9.4.24), απλά επειδή οι όροι αυτοί απειρίζονται για  $r \rightarrow \infty$ . Για  $r = a$  με  $u(a, \theta) = f(\theta)$  επανερχόμαστε στη συνθήκη (9.4.28) και οι άγνωστοι συντελεστές Fourier  $A_0$ ,  $A_n^*$  και  $B_n^*$  υπολογίζονται με τρόπο απόλυτα ανάλογο με εκείνο για το εσωτερικό πρόβλημα Dirichlet στην αμέσως προηγούμενη Παράγραφο Β9.4.2.

Σημειώνουμε τέλος ότι για το γενικότερο πρόβλημα Dirichlet σε μια δακτυλιοειδή περιοχή (σε ένα δακτύλιο)  $D_\delta$  με  $a \leq r \leq b$  ( $a < b$ ) πρέπει βέβαια να χρησιμοποιήσουμε την πλήρη λύση (9.4.24) χωρίς συνθήκες ούτε για  $r = 0$  ούτε για  $r \rightarrow \infty$ . Τώρα όμως θα έχουμε δύο συνοριακές συνθήκες Dirichlet (όχι μόνο μία συνθήκη όπως πριν!) για την άγνωστη συνάρτηση  $u(r, \theta)$ : τη  $u(a, \theta) = f(\theta)$  και τη  $u(b, \theta) = g(\theta)$  στις δύο περιφέρειες  $r = a$  και  $r = b$  (με  $a < b$ ) του δακτυλίου  $D_\delta$  αντίστοιχα. Συνεπώς προκύπτουν δύο τριγωνομετρικές σειρές Fourier: η μία για την πρώτη συνάρτηση  $f(\theta)$  (για  $r = a$ ) και η άλλη για τη δεύτερη συνάρτηση  $g(\theta)$  (για  $r = b$ ). Αυτές θα μας επιτρέψουν τελικά τον προσδιορισμό όλων των σταθερών στη γενική λύση (9.4.24) για την άγνωστη συνάρτηση  $u(r, \theta)$ .

## B9.5. ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΑΚΙΝΗΤΟ ΚΥΚΛΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ

### B9.5.1. Διατύπωση του προβλήματος

Στην προηγούμενη Ενότητα Β9.4 επιλύσαμε την εξίσωση του Laplace και το σχετικό πρόβλημα Dirichlet σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Σαν εφαρμογή στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε τη διδιάστατη (επίπεδη), μόνιμη (σταθερή), αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού γύρω από ακίνητο στερεό κυκλικό κύλινδρο  $D$  ακτίνας  $a$  χωρίς κυκλοφορία γύρω από τον κύλινδρο: η απλή περίπτωση. Για διευκόλυνση υποθέτουμε το κέντρο της κυκλικής διατομής αυτού του κυλίνδρου ότι συμπίπτει με την αρχή των αξόνων  $O$ . Η ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο υποτίθεται ότι είναι σταθερή, παράλληλη στον άξονα  $Ox$  και ίση με  $V_\infty$ . (Έστω  $V_\infty > 0$ .) Ο κύλινδρος  $D$  είναι που επηρεάζει τη ροή του ρευστού. Χωρίς αυτόν η ροή θα ήταν **ομοιόμορφη** με ταχύτητα  $V_\infty$  σ' ολόκληρο το επίπεδο  $Oxy$ . Λόγω του κυλίνδρου  $D$  είναι σκόπιμο να εργασθούμε σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ .

Για την επίλυση αυτού του προβλήματος ροής έχουμε τη δυνατότητα να δουλέψουμε είτε με το **δυναμικό ταχύτητας**  $\Phi(r, \theta)$  είτε με τη **ροϊκή συνάρτηση** (ή **συνάρτηση ροής**)  $\Psi(r, \theta)$ , εδώ σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Και οι δυο τους μας είναι ήδη γνωστές στις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$  από την Ενότητα Β3.4 του Κεφαλαίου Β3: Παράγραφοι Β3.4.2 και Β3.4.3 για το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi(x, y)$  και Β3.4.4 για τη ροϊκή συνάρτηση  $\Psi(x, y)$ . Επίσης και οι δυο τους είναι αρμονικές συναρτήσεις. Κατά συνέπεια πληρούν τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace  $\nabla^2 u = 0$ : σχέσεις (3.4.21) για τη  $\Phi(x, y)$  και (3.4.25) για την  $\Psi(x, y)$  (στις δύο διαστάσεις). Άρα σε πολικές

συντεταγμένες θα πληρούν την αντίστοιχη εξίσωση του Laplace (9.4.2). Επομένως

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (9.5.1)$$

φυσικά με  $r \geq a$ , επειδή το ιδεατό ρευστό ρέει σε ολόκληρο το επίπεδο εκτός από το εσωτερικό του κυλίνδρου  $0 \leq r < a$ . Φυσικά εκεί ο κύλινδρος δεν επιτρέπει καμία απολύτως ροή ρευστού!

Προφανώς οι βασικές ποσότητες του Πολιτικού Μηχανικού σε πολικές συντεταγμένες είναι οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού  $v_r = v_r(r, \theta)$  (κατά την πολική ακτίνα  $r$ ) και  $v_\theta = v_\theta(r, \theta)$  (κατά την πολική γωνία  $\theta$ , δηλαδή κατά την κάθετο στην πολική ακτίνα  $r$ ). Αυτές προκύπτουν εύκολα είτε από το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi(r, \theta)$  είτε από τη ροϊκή συνάρτηση  $\Psi(r, \theta)$  (όποια από τις δύο αυτές συναρτήσεις είναι γνωστή) με μερικές παραγωγίσεις. Αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι τύποι

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad \text{και} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (9.5.2)$$

Οι τύποι αυτοί είναι οι αντίστοιχοι των τύπων (3.4.26) και (3.4.27) της Παραγράφου Β3.4.5 του Κεφαλαίου Β3 σε Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$ . Επίσης οι δεξιές ισότητες  $\sigma'$  αυτούς εκφράζουν τις συνθήκες των Cauchy-Riemann σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Με την πλήρωση των εξισώσεων του Laplace (9.5.1) από το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi(r, \theta)$  και τη ροϊκή συνάρτηση  $\Psi(r, \theta)$  οι συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού  $v_r(r, \theta)$  και  $v_\theta(r, \theta)$  που υπολογίζονται από τις πιο πάνω σχέσεις πληρούν τόσο τη συνθήκη του αστρόβιλου της ροής όσο και την εξίσωση της συνεχείας. Αυτό συμβαίνει είτε χρησιμοποιηθεί το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi(r, \theta)$  είτε η ροϊκή συνάρτηση  $\Psi(r, \theta)$ .

Στο παρόν πρόβλημα ροής γύρω από κύλινδρο  $D$  αναζητούμε τη ροϊκή συνάρτηση  $\Psi(r, \theta)$  σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Αυτή πληροί βέβαια την εξίσωση του Laplace (9.5.1) στο πεδίο ροής (έξω από τον κύλινδρο)  $r \geq a$ . Άρα ισχύει η γενική έκφρασή της (9.4.24). Επιπλέον η περιφέρεια  $r = a$  αποτελεί γραμμή ροής. Άρα η συνάρτηση ροής έχει σταθερή τιμή στην περιφέρεια αυτή και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε πως  $\Psi(a, \theta) = 0$ . Τέλος στο άπειρο η ταχύτητα του ρευστού είναι  $V_\infty$ . Για να συμβαίνει αυτό, με βάση τις δεύτερες σχέσεις (9.5.2) (με το  $\Psi$ ) πρέπει να ισχύει  $\Psi(r, \theta) = V_\infty r \sin \theta$  για  $r \rightarrow \infty$ , αφού  $y = r \sin \theta$ . Συνοψίζοντας έχουμε

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0, \quad \Psi(a, \theta) = 0 \quad \text{και} \quad \Psi(r, \theta) = V_\infty r \sin \theta \quad \text{για} \quad r \rightarrow \infty. \quad (9.5.3)$$

### B9.5.2. Το δυναμικό ταχύτητας, η ροϊκή συνάρτηση και οι συνιστώσες της ταχύτητας

Με βάση τη γενική λύση (9.4.24) της εξισώσεως του Laplace σε πολικές συντεταγμένες για κυκλική περιοχή που προαναφέραμε σε συνδυασμό με τη συνθήκη στο άπειρο και τη συνοριακή συνθήκη  $\Psi(a, \theta) = 0$  στις σχέσεις (9.5.3) προκύπτει τελικά η έκφραση της ροϊκής συναρτήσεως (ή συναρτήσεως ροής)  $\Psi(r, \theta)$ . Με ανάλογες σκέψεις προκύπτει και το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi(r, \theta)$  στο ίδιο πρόβλημα ροής γύρω από κυκλικό κύλινδρο. Αναφέρουμε και τις δύο αυτές συναρτήσεις:

$$\Phi(r, \theta) = V_\infty \cos \theta \left( r + \frac{a^2}{r} \right) \quad \text{και} \quad \Psi(r, \theta) = V_\infty \sin \theta \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \quad \text{με} \quad r \geq a. \quad (9.5.4)$$

Τώρα με βάση τις σχέσεις (9.5.2) προσδιορίζουμε πολύ εύκολα τις δύο συνιστώσες  $v_r$  και  $v_\theta$  της ταχύτητας του ρευστού σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Προκύπτουν οι εξής εκφράσεις τους:

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = V_\infty \cos \theta \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \quad \text{και} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -V_\infty \sin \theta \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right). \quad (9.5.5)$$

Μπορεί να διαπιστωθεί ότι ισχύει η συνθήκη στο άπειρο για ταχύτητα  $V_\infty$ . Επίσης  $v_r = 0$  για  $r = a$  (στην περιφέρεια της διατομής του κυλίνδρου). Ακόμη  $v_r = 0$  και  $v_\theta = 0$  για  $r = a$  και  $\theta = 0$  ή  $\theta = \pi$ . Αυτά είναι τα δύο **σημεία ανακοπής** της ροής. Τέλος  $|v_\theta| = 2V_\infty$  για  $r = a$  και  $\theta = \pm \pi/2$ . Αυτά είναι τα δύο σημεία με τη μέγιστη ταχύτητα  $2V_\infty$ : διπλή ταχύτητα από την ταχύτητα στο άπειρο.

**B9.6. ΧΡΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ BESSEL ΣΤΗ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΧΥΣΕΩΣ****B9.6.1. Μετάδοση θερμότητας σε κύλινδρο με αξονική συμμετρία**

Αναφερθήκαμε στην εξίσωση της διαχύσεως και στις εφαρμογές της στη Μετάδοση Θερμότητας, στην Εδαφομηχανική (στερεοποίηση) και στην Περιβαλλοντική Υδραυλική (διάχυση ρύπου) ήδη από την Παράγραφο Β2.1.4 του Κεφαλαίου Β2. Επίσης στην Ενότητα Β5.3 λύσαμε το μονοδιάστατο πρόβλημα της Μεταδόσεως Θερμότητας σε τοίχο πάχους  $L$  (με  $0 \leq x \leq L$ ) με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Εδώ θα λύσουμε ένα ανάλογο διδιάστατο πρόβλημα: το πρόβλημα της Μεταδόσεως Θερμότητας σε κύλινδρο (π.χ. σε μια κολόνα) ακτίνας  $a$  με άξονα τον άξονα  $Oz$  του συστήματος συντεταγμένων. Υποθέτουμε μάλιστα αξονική (κυκλική) συμμετρία ως προς τον άξονα αυτό  $Oz$  και μετάδοση της θερμότητας κάθετα στον άξονα  $Oz$ . Λόγω της αξονικής συμμετρίας η διδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (2.1.50) στην Παράγραφο Β2.1.4 παίρνει εδώ με χρήση και της εκφράσεως (9.4.1) της εξισώσεως του Laplace σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  τη μορφή

$$\nabla^2 u(r, \theta) = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \text{οπότε} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{με} \quad u = u(r, t) \quad (9.6.1)$$

τη θερμοκρασία στον κύλινδρο και  $\kappa$  το **συντελεστή διαδόσεως θερμότητας**. (Στην Εδαφομηχανική, εάν είχαμε **ακτινική στερεοποίηση**, θα είχαμε το **συντελεστή στερεοποίησης**  $c_{vr}$  αντί για το  $\kappa$ .) Αυτή εδώ η εξίσωση εξαιτίας της αξονικής συμμετρίας είναι ανεξάρτητη από την πολική γωνία  $\theta$ . Σαν συνοριακή συνθήκη θεωρούμε μηδενική θερμοκρασία στην επιφάνεια του κυλίνδρου  $r = a$  και σαν αρχική συνθήκη γνωστή συνάρτηση  $f(r)$  για την αρχική θερμοκρασία (για  $t = 0$ ) του κυλίνδρου:

$$u(a, t) = 0 \quad (\text{συνοριακή συνθήκη}) \quad \text{και} \quad u(r, 0) = f(r) \quad (\text{αρχική συνθήκη}). \quad (9.6.2)$$

**B9.6.2. Επίλυση με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών**

Προχωράμε τώρα στην επίλυση αυτού εδώ του προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Θα δούμε όμως ότι στο παρόν πρόβλημα παρουσιάζονται στη λύση συναρτήσεις Bessel. (Αυτές τις ειδικές συναρτήσεις τις έχουμε μελετήσει στην Ενότητα Α15.2 του Μέρους Α των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς.) Πραγματικά συχνά συμβαίνει αυτό, όταν χρησιμοποιούμε πολικές και κυλινδρικές συντεταγμένες. Θα εργασθούμε και σε μια δεύτερη (και κάπως πιο δύσκολη) εφαρμογή των συναρτήσεων Bessel στην επόμενη Ενότητα Β9.7. Αυτή αφορά στο πρόβλημα των ιδιοταλαντώσεων κυκλικής πλάκας.

Χωρίζουμε λοιπόν τις δύο μεταβλητές μας  $r$  (την πολική ακτίνα) και  $t$  (το χρόνο) στην προς το παρόν άγνωστη θερμοκρασία  $u(r, t)$  στον κυκλικό κύλινδρο που εξετάζουμε (με  $r \leq a$ ) γράφοντας

$$u(r, t) = R(r)T(t) \implies \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} = R'(r)T(t), \quad \frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} = R''(r)T(t), \quad \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = R(r)\dot{T}(t). \quad (9.6.3)$$

Έτσι η διαφορική εξίσωση της διαχύσεως (9.6.1) στο παρόν πρόβλημα παίρνει τη μορφή

$$\left[ R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \right] T(t) = \frac{1}{\kappa} R(r) \dot{T}(t). \quad (9.6.4)$$

Διαιρώντας τώρα με  $u(r, t) = R(r)T(t)$ , χωρίζουμε τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $r$  και  $t$

$$\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{1}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} = \frac{1}{\kappa} \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \lambda = -p^2 \quad \text{με} \quad p > 0. \quad (9.6.5)$$

Εδώ δηλώσαμε τη σταθερά διαχωρισμού  $\lambda$  με την αρνητική σταθερά  $-p^2$  (με  $p > 0$ ). Έτσι βρήκαμε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Ξεκινάμε με τη δεύτερη: τη χρονική συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς  $T(t)$ :

$$\dot{T}(t) + \kappa p^2 T(t) = 0, \quad \text{οπότε} \quad T(t) = Ae^{-\kappa p^2 t} \quad (9.6.6)$$

με το  $A$  αυθαίρετη σταθερά. (Αυτήν τη λύση τη βρήκαμε πολύ εύκολα με εκθετική αντικατάσταση.) Από φυσικής απόψεως, αφού δεν υπάρχει παραγωγή θερμότητας μέσα στον κύλινδρο, δεν είναι

δυνατόν η συνάρτηση  $T(t)$  να τείνει στο άπειρο για  $t \rightarrow \infty$ . Άρα είναι προφανές ότι η σταθερά διαχωρισμού  $\lambda = -p^2 < 0$  όφειλε πραγματικά να υποτεθεί αρνητική. Σωστά ενεργήσαμε λοιπόν!

Προχωράμε και στην άλλη συνήθη διαφορική εξίσωση, τώρα ως προς τη χωρική άγνωστη συνάρτηση  $R(r)$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτή παίρνει τη μορφή διαφορικής εξισώσεως Bessel

$$r^2 R''(r) + rR'(r) + (p^2 r^2 - 0^2)R(r) = 0. \quad (9.6.7)$$

Πρόκειται ουσιαστικά (με λίγο διαφορετικό συμβολισμό) για τη συνήθη διαφορική εξίσωση (15.2.24) (εδώ με  $\nu = 0$ ) του Κεφαλαίου Α15 του Μέρους Α με λύση της τη (15.2.28) εκφρασμένη με τη χρήση συναρτήσεων Bessel μηδενικής τάξεως. Άρα έχουμε τη γενική λύση (επαναλαμβάνουμε με  $\nu = 0$ )

$$R(r) = BJ_0(pr) + CY_0(pr) \implies R(r) = BJ_0(pr) \quad \text{για } C = 0. \quad (9.6.8)$$

Παρατηρούμε πως δεξιά πήραμε  $C = 0$ , δηλαδή εξαλείψαμε τον όρο με τη συνάρτηση Bessel δευτέρου είδους  $Y_0(pr)$ . Αυτό ήταν απόλυτα αναγκαίο να γίνει, επειδή η συνάρτηση Bessel  $Y_0(x)$  απειρίζεται για  $x = 0$  και βέβαια εμείς δε θέλουμε με τίποτα να απειρίζεται η θερμοκρασία  $u$  στον άξονα  $r = 0$  του κυλίνδρου. Ας σημειώσουμε πάντως ότι για κύλινδρο με δακτυλιοειδή διατομή (αντί για συμπαγή κυκλικό κύλινδρο) θα δεχόμασταν την πλήρη λύση αριστερά στη σχέση (9.6.8).

Τώρα από τη συνοριακή συνθήκη  $u(a, t) = 0$  στην πρώτη σχέση (9.6.2) παρατηρούμε ότι είναι αναγκαίο, για να μην πάρουμε τετριμμένη (μηδενική) λύση (δηλαδή για να έχουμε  $B \neq 0$ ), να ισχύει

$$R(a) = BJ_0(pa) = 0 \implies J_0(pa) = 0 \implies p_n a = s_n \implies p_n = \frac{s_n}{a} \quad \text{με } J_0(s_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.6.9)$$

με  $s_n$  τις ρίζες της συναρτήσεως Bessel πρώτου είδους  $J_0(x)$ . Αυτές είναι άπειρες στον αριθμό.

Με αυτές τις ιδιοτιμές  $p_n = s_n/a$  οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις στο παρόν πρόβλημα θα είναι

$$R_n(r) = B_n J_0(p_n r) = B_n J_0(s_n r/a) \quad \text{και} \quad u_n(r, t) = R_n(r) T_n(t) = B_n J_0(p_n r) A_n e^{-kp_n^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.6.10)$$

Άρα τώρα που είμαστε ήσυχοι με τη συνοριακή συνθήκη  $u(a, t) = 0$  μπορούμε να αναζητήσουμε τη λύση όλου του προβλήματός μας στη μορφή σειράς των ιδιοσυναρτήσεων  $u_n(r, t)$ . Θέτουμε

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(p_n r) e^{-kp_n^2 t} \quad \text{με } D_n = A_n B_n. \quad (9.6.11)$$

Εδώ  $D_n$  είναι οι άγνωστοι συντελεστές της σειράς αυτής. Πρέπει όμως να τους προσδιορίσουμε. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την πλήρωση και της αρχικής συνθήκης  $u(r, 0) = f(r)$  στη δεύτερη σχέση (9.6.2). Θέτοντας λοιπόν  $t = 0$  στη λύση (9.6.11), παίρνουμε από την αρχική μας συνθήκη

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_0(p_n r) \quad \text{με } p_n = \frac{s_n}{a}, \quad \text{αφού } e^0 = 1. \quad (9.6.12)$$

Πρόκειται για σειρά σε συναρτήσεις Bessel της γνωστής συναρτήσεως  $f(r)$ . Αυτή γενικεύει τις σειρές Fourier και μπορούμε να την αποκαλέσουμε **σειρά Fourier-Bessel**. Για τον προσδιορισμό των συντελεστών της  $D_n$  λαμβάνεται υπόψη η σχέση ορθογωνιότητας για τις συναρτήσεις Bessel

$$\int_0^a r J_0\left(\frac{s_m r}{a}\right) J_0\left(\frac{s_n r}{a}\right) dr \equiv \int_0^a r J_0(p_m r) J_0(p_n r) dr = 0 \quad \text{με } s_m \neq s_n \quad \text{ή ισοδύναμα } p_m \neq p_n, \quad (9.6.13)$$

δηλαδή για δύο διαφορετικές ρίζες  $s_m$  και  $s_n$  της συναρτήσεως Bessel  $J_0(x)$  ή εδώ δύο διαφορετικές ιδιοτιμές  $p_m$  και  $p_n$ . Οι τελικές εκφράσεις για τους συντελεστές  $D_n$  στη σειρά (9.6.12) είναι

$$D_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(p_n a)} \int_0^a r J_0(p_n r) f(r) dr \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \quad (9.6.14)$$

Με γνωστούς πια τους συντελεστές  $D_n$  η τελική λύση  $u(r, t)$  του παρόντος προβλήματος δίνεται από τη σχέση (9.6.11). Προχωράμε και σε μια δεύτερη εφαρμογή με χρήση συναρτήσεων Bessel στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς: τώρα στις ιδιοταλαντώσεις κυκλικής πλάκας.

**B9.7. ΧΡΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ BESSEL ΣΤΙΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΥΚΛΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ****B9.7.1. Η διαφορική εξίσωση των ιδιοταλαντώσεων συνήθους πλάκας**

Στο Κεφάλαιο Β7 αναφερθήκαμε στο στατικό πρόβλημα συνήθους ορθογωνικής πλάκας  $P$  με απλή στήριξη στο σύνορό της και το επιλύσαμε λεπτομερώς με τη μέθοδο του Navier (1820). Αναφερθήκαμε επίσης σύντομα και στη σχετική μέθοδο του Lévy (1899). Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε πολύ σύντομα στις ιδιοταλαντώσεις συνήθους κυκλικής πλάκας (Kirchhoff, 1850). Σ' αυτές δεν υπάρχει φόρτιση κι η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς (2.2.18) της Παραγράφου Β2.2.4 του Κεφαλαίου Β2 παίρνει τώρα (σε ιδιοταλαντώσεις:  $\rho(x, y, t) = 0$ ) τη μορφή

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (x, y) \in P, \quad t > 0. \quad (9.7.1)$$

Εδώ  $D$  είναι η γνωστή μας από τον τύπο (2.2.16) της Παραγράφου Β2.2.3 δυσκαμψία της πλάκας και  $\rho h$  η επιφανειακή πυκνότητά της. Στην παραπάνω εξίσωση  $w = w(x, y, t)$  είναι το βέλος κάμψεως (η βύθιση) της πλάκας. Υπενθυμίζουμε πως στην εξίσωση αυτή ο τελευταίος όρος στο αριστερό μέλος είναι ο αδρανειακός όρος με μείον, η κατανεμημένη αδρανειακή δύναμη (που έχει ήδη μείον!) δια της δυσκαμψίας:  $\rho_i(x, y, t)/D$ . (Εδώ αριστερά μείον και πάλι μείον δίνει τελικά συν.)

Προχωράμε τώρα σε κάπως σύντομη μελέτη των ιδιοταλαντώσεων συνήθους κυκλικής πλάκας. Αυτό το κάνουμε πρώτα σαν συνέχεια της εκτενούς μελέτης μας των ιδιοταλαντώσεων ράβδων και δοκών στο Κεφάλαιο Β6. Το κάνουμε όμως επίσης και σαν μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή των συναρτήσεων Bessel σε ένα χρήσιμο πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού πέρα από την πρώτη εφαρμογή τους στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως στην προηγούμενη Ενότητα Β9.6.

**B9.7.2. Αναγωγή σε διαφορική εξίσωση με χωρικές μόνο ανεξάρτητες μεταβλητές**

Σαν πρώτο βήμα για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς (9.7.1) της συνήθους πλάκας θα απαλείψουμε το χρόνο  $t$ . Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε εύκολα με το χωρισμό των μεταβλητών

$$w(x, y, t) = W(x, y)T(t). \quad (9.7.2)$$

Αφού όμως ξέρουμε πολύ καλά τι κάνουμε και τι περιμένουμε για τη χρονική μας συνάρτηση  $T(t)$ , εργαζόμαστε ακόμη πιο απλά (πολύ πιο πρακτικά) με τον απλούστερο χωρισμό των μεταβλητών

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cos(\omega t - \alpha), \quad \text{οπότε} \quad \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 W(x, y) \cos(\omega t - \alpha). \quad (9.7.3)$$

Εδώ  $\omega$  είναι η κυκλική συχνότητα των ιδιοταλαντώσεων της πλάκας και  $\alpha$  μια γωνία φάσεως. Έτσι «μαντέψαμε» από πριν τη χρονική συνάρτηση  $T(t)$ , όπως είχαμε ήδη συστήσει στην Παράγραφο Β6.1.8 του Κεφαλαίου Β6 στις ιδιοταλαντώσεις ράβδου με τον αντίστοιχο χωρισμό των μεταβλητών (6.1.46). Δυστυχώς για τη χωρική συνάρτηση  $W(x, y)$  έχουμε δουλειά μπροστά μας ...

Και τώρα με την αντικατάσταση της παραπάνω εκφράσεως του βέλους κάμψεως  $w(x, y, t)$  στην αρχική μας διαφορική εξίσωση (9.7.1) των ιδιοταλαντώσεων συνήθους πλάκας παίρνουμε

$$\frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} - \beta^4 W(x, y) = 0, \quad (x, y) \in P \quad \text{με} \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{D}}. \quad (9.7.4)$$

Εδώ βέβαια λάβαμε υπόψη και τη δεύτερη σχέση (9.7.3) για τη δεύτερη χρονική παράγωγο  $\partial^2 w / \partial t^2$  κι απλοποιήσαμε το  $\cos(\omega t - \alpha)$ . Ορίσαμε επίσης και το βοηθητικό σύμβολο  $\beta$  που είναι ανάλογο με το σύμβολο  $\beta$  δεξιά στη σχέση (6.2.12) της Παραγράφου Β6.2.2 για τις ιδιοταλαντώσεις δοκού.

Παρατηρούμε ότι, όπως ήδη γνωρίζουμε, στην εξίσωση (9.7.4) οι χωρικές παράγωγοι που απέμειναν εκφράζονται με τη χρήση του διαρμονικού τελεστή  $\nabla^4 \equiv \nabla^2 \nabla^2 \equiv \nabla^2(\nabla^2)$  με  $\nabla^2$  τον τελεστή του Laplace. Επομένως η παραπάνω εξίσωση (9.7.4) γράφεται απλούστερα στη μορφή

$$(\nabla^4 - \beta^4)W(x, y) = 0 \implies (\nabla^2 - \beta^2)(\nabla^2 + \beta^2)W(x, y) = 0 \quad \text{ή} \quad (\nabla^2 + \beta^2)(\nabla^2 - \beta^2)W(x, y) = 0, \quad (9.7.5)$$

γιατί έχουμε γραμμικούς διαφορικούς τελεστές και μάλιστα με σταθερούς συντελεστές. Είναι τώρα πια προφανές πως κάθε λύση  $W(x, y)$  των δύο διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους

$$(\nabla^2 \pm \beta^2)W(x, y) = 0 \tag{9.7.6}$$

θα είναι λύση και της χωρικής εξισώσεως των ιδιοταλαντώσεων πλάκας (9.7.4) ή (9.7.5).

Εμείς θα μελετήσουμε εδώ μονάχα την περίπτωση κυκλικής πλάκας με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$ . Θα εργασθούμε μάλιστα σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  αντί για Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$ . Σε πολικές συντεταγμένες η εξίσωση του Laplace παίρνει την ήδη γνωστή μας μορφή (9.2.16). Επομένως οι δύο διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (9.7.6) γράφονται

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \pm \beta^2 \right) W(r, \theta) = 0. \tag{9.7.7}$$

Εδώ αλλάξαμε το συμβολισμό από  $W(x, y)$  σε  $W(r, \theta)$ , ώστε να δηλώσουμε πολικές συντεταγμένες.

### B9.7.3. Επίλυση με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών

Και τώρα προχωράμε στην επίλυση των δύο χωρικών (με  $r$  και  $\theta$  μόνο) διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (9.7.7) ξανά με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών θέτοντας

$$W(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \implies \frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} = R'(r)\Theta(\theta), \quad \frac{\partial^2 W(r, \theta)}{\partial r^2} = R''(r)\Theta(\theta), \quad \frac{\partial^2 W(r, \theta)}{\partial \theta^2} = R(r)\Theta''(\theta). \tag{9.7.8}$$

Έτσι οι δύο χωρικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (9.7.7) παίρνουν τις μορφές

$$\left[ R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) \pm \beta^2 R(r) \right] \Theta(\theta) + \frac{1}{r^2} R(r) \Theta''(\theta) = 0. \tag{9.7.9}$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα επί  $r^2$  και διαιρώντας δια  $W(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ , βρίσκουμε τελικά

$$r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} + r \frac{R'(r)}{R(r)} \pm \beta^2 r^2 = - \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda = p^2 \quad \text{με} \quad p \geq 0. \tag{9.7.10}$$

Εδώ έχουμε δηλώσει τη σταθερά διαχωρισμού  $\lambda$  με τη μη αρνητική σταθερά  $p^2$  (με  $p \geq 0$ ). Με τον τρόπο αυτό χωρίσθηκαν οι δύο χωρικές μεταβλητές  $r$  και  $\theta$ . Πρόκειται σχεδόν για τις ίδιες συνήθειες διαφορικές εξισώσεις (9.4.7) που είχαμε στην εξίσωση του Laplace σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  στην Ενότητα Β9.4. Εδώ όμως παρουσιάζεται στο αριστερό μέλος και ο πρόσθετος όρος  $\pm \beta^2 r^2$ .

Ακριβώς όπως στην Ενότητα Β9.4 έτσι και εδώ είναι αναγκαίο στην κυκλική συνήθη πλάκα που μελετάμε η άγνωστη συνάρτηση  $\Theta(\theta)$  της πολικής γωνίας  $\theta$  να είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο  $T = 2\pi$ . Κατά συνέπεια θα ισχύει και εδώ η λύση της (9.4.13). Την επαναλαμβάνουμε

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \quad \text{με} \quad p = n = 0, 1, 2, \dots \tag{9.7.11}$$

Αυτή μας εξασφαλίζει την αναγκαία εδώ περιοδικότητα:  $\Theta(\theta + 2k\pi) = \Theta(\theta)$  με  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  (Περιλάβαμε μάλιστα και τη σταθερή λύση  $\Theta_0(\theta) = A_0$  για  $n = 0$ , η οποία είναι επίσης αποδεκτή.)

Και προχωράμε στη συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $R(r)$ , τώρα όμως με  $\lambda = p^2 = n^2$ , οπότε τη δηλώνουμε καλύτερα σαν  $R_n(r)$ . Από τις σχέσεις (9.7.10) παίρνουμε

$$r^2 R_n''(r) + r R_n'(r) + (\pm \beta^2 r^2 - n^2) R_n(r) = 0 \quad \text{με} \quad p = n = 0, 1, 2, \dots \tag{9.7.12}$$

Πρόκειται ουσιαστικά (απλά με διαφορετικό συμβολισμό) για τις δύο συνήθειες διαφορικές εξισώσεις (15.2.24) (με το  $+\beta^2$ ) και (15.2.42) (με το  $-\beta^2$ ) του Κεφαλαίου Α15 του Μέρους Α με λύσεις τους τις (15.2.28) και (15.2.43) αντίστοιχα εκφρασμένες με τη χρήση συναρτήσεων Bessel. Άρα έχουμε

$$R_{n1}(r) = C_n J_n(\beta r) + D_n Y_n(\beta r) \quad (\text{με το } +\beta^2) \quad \text{και} \quad R_{n2}(r) = E_n I_n(\beta r) + F_n K_n(\beta r) \quad (\text{με το } -\beta^2). \tag{9.7.13}$$

Και τώρα η συνολική λύση  $R_n(r)$  και των δύο μαζί συνήθων διαφορικών εξισώσεων (9.7.12) (που να επαληθεύει ή τη μία ή την άλλη) θα είναι το άθροισμα αυτών των δύο λύσεων  $R_{n1}(r)$  και  $R_{n2}(r)$ :

$$R_n(r) = R_{n1}(r) + R_{n2}(r) = C_n J_n(\beta r) + D_n Y_n(\beta r) + E_n I_n(\beta r) + F_n K_n(\beta r). \quad (9.7.14)$$

Σχετική είναι κι η λύση (15.2.56) στο Εδάφιο Α15.2.8.3 του Μέρους Α για αξονική συμμετρία:  $n = 0$ .

Κάτι όμως δε μας πολυαρέσει στην κυκλική πλάκα μας. Κι αυτό είναι ο απειρισμός των δύο συναρτήσεων Bessel  $Y_n(\beta r)$  και  $K_n(\beta r)$  στο κέντρο  $r = 0$  της κυκλικής πλάκας. Αυτός είναι απαράδεκτος, δίνει άπειρο βέλος κάμψεως στο κέντρο της πλάκας κι απορρίπτεται. Άρα αναγκαστικά πρέπει να ισχύει  $D_n = F_n = 0$ . Έτσι η λύση  $R_n(r)$  στη σχέση (9.7.14) παίρνει την τελική της μορφή

$$R_n(r) = C_n J_n(\beta r) + E_n I_n(\beta r). \quad (9.7.15)$$

(Ας σημειώσουμε πάντως πως για δακτυλιοειδή πλάκα χρησιμοποιούμε την πλήρη λύση (9.7.14).)

#### **B9.7.4. Οι ιδιοσυχνότητες πακτωμένης κυκλικής πλάκας**

Υποθέτουμε ότι οι συνοριακές συνθήκες στο σύνορο  $r = a$  της κυκλικής πλάκας μας αφορούν σε πάκτωση. Επομένως θα πρέπει τόσο το βέλος κάμψεως  $w(r, \theta, t)$  όσο και η πρώτη μερική παράγωγός του ως προς την πολική ακτίνα  $r$  να μηδενίζονται στο σύνορο αυτό, που είναι απλά η περιφέρεια  $r = a$ . Επομένως, σύμφωνα με τους χωρισμούς των μεταβλητών (9.7.2) και (9.7.8) που ήδη κάναμε, θα πρέπει η λύση μας  $R_n(r)$  και η πρώτη παράγωγός της  $R'_n(r)$  να μηδενίζονται και οι δύο μαζί για  $r = a$ . Κατά συνέπεια με βάση την αμέσως πιο πάνω σχέση (9.7.15) προκύπτει

$$R_n(a) = C_n J_n(\beta a) + E_n I_n(\beta a) = 0 \quad \text{και} \quad R'_n(a) = \beta C_n J'_n(\beta a) + \beta E_n I'_n(\beta a) = 0. \quad (9.7.16)$$

Πρόκειται για ένα απλό και ομογενές σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με δύο αγνώστους: τις σταθερές  $C_n$  και  $E_n$ . Εάν δεν έχει μη μηδενική (μη τετριμμένη) λύση, δεν υπάρχει περίπτωση ιδιοταλαντώσεων της πακτωμένης κυκλικής πλάκας γενικά προς μεγάλη χαρά του Πολιτικού Μηχανικού. Όμως στην αντίθετη περίπτωση, στην περίπτωση μη μηδενικής λύσεως, θα παρουσιασθούν ιδιοταλαντώσεις και δεν πρέπει να την αγνοήσουμε και την περίπτωση αυτή. Για μη μηδενική λύση η σχετική οριζουσα δευτέρας τάξεως θα είναι ίση με το μηδέν ή ισοδύναμα τα πηλικά  $E_n/C_n$  από τις δύο συνοριακές συνθήκες (9.7.16) θα πρέπει να συμπίπτουν. Έτσι προκύπτει

$$\frac{E_n}{C_n} = -\frac{J_n(\beta a)}{I_n(\beta a)} = -\frac{J'_n(\beta a)}{I'_n(\beta a)}, \quad \text{οπότε} \quad J_n(\beta a)I'_n(\beta a) - J'_n(\beta a)I_n(\beta a) = 0 \quad \text{με} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.7.17)$$

Αυτή είναι η **εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων** (ή απλά η **εξίσωση συχνοτήτων**) της κυκλικής πλάκας. Παίρνοντας υπόψη και τις σχέσεις (15.2.15) και (15.2.16) της Ενότητας Α15.2 του Μέρους Α για τις συναρτήσεις Bessel και τις αντίστοιχες σχέσεις (15.2.38) και (15.2.39), διαπιστώνουμε εύκολα (με  $\nu = n$ ) ότι

$$J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) \quad \text{και} \quad I'_n(x) = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_n(x). \quad (9.7.18)$$

Με χρήση αυτών των δύο τύπων για τις πρώτες παραγώγους των δύο συναρτήσεων Bessel  $J_n(x)$  και  $I_n(x)$  διαπιστώνουμε αμέσως ότι η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων (9.7.17) παίρνει την τελική μορφή

$$J_n(z)I_{n-1}(z) - J_{n-1}(z)I_n(z) = 0 \quad \text{με} \quad z = \beta a \quad \text{και} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.7.19)$$

χωρίς πια παραγώγους και με ένα δεύτερο χρήσιμο βοηθητικό σύμβολο:  $z = \beta a$ . Τις θετικές λύσεις της τις δηλώνουμε με  $z_{mn}$  με το  $n = 0, 1, 2, \dots$  ήδη ορισμένο ( $\lambda = p^2 = n^2$ ) και με  $m = 1, 2, \dots$  τον αριθμό της ρίζας  $z_{mn}$  ξεκινώντας από τη μικρότερη ρίζα. Για παράδειγμα, με τη *Mathematica* βρίσκουμε ότι  $z_{10} \approx 3.1962206$ . Τώρα με γνωστή τη ρίζα  $z_{mn} = \beta_{mn} a$  και χρήση του τύπου για το  $\beta$  δεξιά στη σχέση (9.7.4) προσδιορίζουμε αμέσως και τη σχετική ιδιοσυχνότητα  $\omega_{mn}$ . Συγκεκριμένα

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho h \omega^2}{D}} \implies z_{mn} = \beta_{mn} a = a \sqrt[4]{\frac{\rho h \omega_{mn}^2}{D}} \implies \omega_{mn} = \frac{z_{mn}^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}}. \quad \text{Τέλεια!} \quad (9.7.20)$$



---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β10

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό επιδεικνύεται η χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace (ήδη γνωστής από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις) τώρα όμως για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Στην περίπτωση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace ως προς μία από τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, αλλά στο διάστημα  $[0, \infty)$ , ανάγει τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση. Αυτή μπορεί να λυθεί με κάποια κατάλληλη μέθοδο για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις συμπεριλαμβανομένης βέβαια και της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace με εφαρμογή της όμως για δεύτερη φορά. Σε περίπτωση άνω των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, μία εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace μειώνει απλά τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών κατά μία. Άρα οδηγεί σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με μία λιγότερη ανεξάρτητες μεταβλητές, κλπ.

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace περιγράφεται με σύντομο τρόπο στην εισαγωγική Ενότητα Β10.1. Στην Ενότητα Β10.2 γίνεται ιδιαίτερα λεπτομερής εφαρμογή της μεθόδου στο πρόβλημα ρύπου που μεταφέρεται σε υδατόρρευμα με μεταγωγή. Πρόκειται για ενδιαφέρον πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού που απαντάται στην Περιβαλλοντική Υδραυλική. Στην εφαρμογή αυτή εξετάζονται και οι διάφορες μαθηματικές δυνατότητες που παρέχονται στο χρήστη της μεθόδου. Στην Ενότητα Β10.3 αναφέρονται διάφορα χρήσιμα σχόλια για τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace με βάση τα αποτελέσματα της Ενότητας Β10.2. Στην Ενότητα Β10.4 εξετάζεται η θερμοκρασιακή κατανομή στο έδαφος στη Μετάδοση Θερμότητας (ή Διάδοση Θερμότητας). Τέλος στην Ενότητα Β10.5 μελετώνται οι ελεύθερες αξονικές (διαμήκεις) ταλαντώσεις ράβδου, ένα κλασικό πρόβλημα της Δυναμικής των Κατασκευών, βέβαια και πάλι με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Φυσικά η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace είναι εφαρμόσιμη και σε πολλά ακόμη ενδιαφέροντα προβλήματα της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού.

Η συνήθης μεταβλητή ως προς την οποία γίνεται (αρχικά τουλάχιστον) ο μετασχηματισμός Laplace είναι ο χρόνος  $t$  (στο διάστημα  $[0, \infty)$  βέβαια). Εντούτοις μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η θέση  $x$ , εάν μεταβάλλεται στο ίδιο ημιάπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ . Το ασθενές σημείο της μεθόδου είναι η αναγκαία αντιστροφή (ή αντιστροφές) του μετασχηματισμού Laplace που τελικά προσδιορίζεται. Αυτή συχνά απαιτεί τη χρήση εξειδικευμένων πινάκων μετασχηματισμών Laplace. Γενικότερη δυνατότητα προσφέρει η χρήση του μιγαδικού τύπου αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace (ή ολοκληρωτικού τύπου του Bromwich) και, στη συνέχεια, της μεθόδου των ολοκληρωτικών υπολοίπων στη Μιγαδική Ανάλυση. (Αυτό όμως είναι ένα μάλλον δύσκολο καθήκον!) Παρά ταύτα η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace είναι μια ενδιαφέρουσα μέθοδος επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και πολύ απλή στην εφαρμογή της. Αυτά επιδιώκεται να γίνουν κατανοητά στο παρόν κεφάλαιο.

---

## B10.1. ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

### B10.1.1. Ορισμός του μετασχηματισμού Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός (δηλαδή βασίζεται σε ολοκλήρωμα) που μετασχηματίζει μια συνάρτηση  $u(t)$  σε μια άλλη συνάρτηση  $U(s)$ . Ο τύπος ορισμού του είναι ο εξής:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt. \quad (10.1.1)$$

Στον τύπο αυτό το σύμβολο  $\mathcal{L}\{u(t)\}$  δηλώνει απλά το μετασχηματισμό Laplace (ή μετασχηματισμένη κατά Laplace) της συναρτήσεως  $u(t)$ , δηλαδή τη συνάρτηση  $U(s)$ . Το μετασχηματισμό Laplace τον ορίσαμε στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II στο Κεφάλαιο A10 του Μέρους A και εξετάσαμε τις ιδιότητές του. Μετά στο Κεφάλαιο A11 του Μέρους A τον εφαρμόσαμε σε ποικίλα προβλήματα.

Παρενθετικά ας κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση. Συχνά καλούμε τη συνάρτηση  $U(s)$ , δηλαδή τη μετασχηματισμένη κατά Laplace της συναρτήσεως  $u(t)$ , απλά μετασχηματισμό Laplace της  $u(t)$ . Όμως με τον τρόπο αυτό ουσιαστικά χρησιμοποιούμε τη φράση «μετασχηματισμός Laplace» τόσο για τη διαδικασία προσδιορισμού της συναρτήσεως  $U(s)$  από τη  $u(t)$ , π.χ. μέσω της ολοκλήρωσεως (10.1.1) ή μέσω πινάκων, όσο και για το αποτέλεσμα της διαδικασίας αυτής, δηλαδή για την ίδια τη συνάρτηση  $U(s)$ . Τούτο δεν είναι απόλυτα σωστό, αλλ' είναι συνηθισμένο στην πράξη. Συνήθως μάλιστα δεν προκαλείται κάποια σύγχυση. Αυτή τη διπλή χρήση του όρου «μετασχηματισμός Laplace» θα την υιοθετήσουμε και εδώ.

Με την ολοκλήρωση στον τύπο (10.1.1) ορισμού του μετασχηματισμού Laplace η μεταβλητή  $t$  της αρχικής συναρτήσεως  $u(t)$  απαλείφθηκε, γιατί ήταν η μεταβλητή ολοκλήρωσεως στο ολοκλήρωμα με διάστημα ολοκλήρωσεως το ημιάπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ . Τη θέση της την πήρε η μεταβλητή  $s$  στον πυρήνα  $e^{-st}$  του μετασχηματισμού Laplace. Φυσικά αντί της μεταβλητής  $t$  (που συνήθως δηλώνει το χρόνο) θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί και οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή, π.χ. η θέση  $x$  με την προϋπόθεση βέβαια ότι μεταβάλλεται στο ημιάπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ . Ο χρόνος όμως  $t$  είναι τις περισσότερες φορές η μεταβλητή ως προς την οποία γίνεται ο μετασχηματισμός Laplace. Αυτό συμβαίνει, επειδή η ολοκλήρωση στον τύπο ορισμού του μετασχηματισμού Laplace (10.1.1) εκτελείται στο διάστημα  $[0, \infty)$ . Πρέπει επομένως να είναι διαθέσιμες οι τιμές της συναρτήσεως  $u(t)$  σε ολόκληρο αυτό το ημιάπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ . Τούτο συχνά ισχύει για το χρόνο  $t$ , εάν ξεκινήσουμε από την αρχική στιγμή  $t = 0$ . Λιγότερο συχνά ισχύει όμως για τη θέση  $x$ , όπου το διάστημα ορισμού μιας συναρτήσεως  $u(x)$  αρκετές φορές δε συμπίπτει με το ημιάπειρο διάστημα  $[0, \infty)$  ή, έστω, δεν το περιλαμβάνει. Παραδείγματος χάρη, αυτό συμβαίνει σε μια ράβδο ή δοκό πεπερασμένου μήκους.

Για να υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace (10.1.1), πρέπει η συνάρτηση  $u(t)$  να είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε πεπερασμένο διάστημα  $[0, T_0]$ . Πρέπει επίσης να ισχύει η ανισότητα

$$|u(t)| < Me^{\gamma t} \quad \text{για κάθε } t > T_0 \quad (10.1.2)$$

με τα  $M$  και  $\gamma$  πραγματικές σταθερές, το  $M$  προφανώς θετικό, το δε  $\gamma$  συνήθως θετικό. Μια συνάρτηση που έχει την ιδιότητα (10.1.2) καλείται συνάρτηση εκθετικής τάξεως  $\gamma$  για  $t \rightarrow \infty$ . Παραδείγματος χάρη, τέτοιες συναρτήσεις είναι τα πολυώνυμα, η συνημιτονική και η ημιτονική συνάρτηση, η εκθετική συνάρτηση  $e^{at}$ , κλπ. Αντίθετα δεν είναι η συνάρτηση  $e^{t^2}$ . Υπό τις πιο πάνω προϋποθέσεις το γενικευμένο ή καταχρηστικό ολοκλήρωμα (10.1.1) ορισμού του μετασχηματισμού Laplace υπάρχει καθώς  $t \rightarrow \infty$ , αρκεί βέβαια η μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace να έχει επαρκώς μεγάλη τιμή. Συγκεκριμένα, λόγω της υποθέσεως (10.1.2) αρκεί να ισχύει  $s > \gamma$  βάσει και του ορισμού (10.1.1) του μετασχηματισμού Laplace.

### B10.1.2. Χρησιμότητα του μετασχηματισμού Laplace στις διαφορικές εξισώσεις

Η πρακτική χρησιμότητα του μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων

(είτε συνήθων είτε με μερικές παραγώγους) βασίζεται καταρχήν στο μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}$  των παραγώγων της άγνωστης συναρτήσεως. Από τον τύπο ορισμού (10.1.1) του μετασχηματισμού Laplace της συναρτήσεως  $u(t)$  προκύπτουν σχετικά εύκολα οι εξής πολύ γνωστοί και ιδιαίτερα ενδιαφέροντες τύποι για τους μετασχηματισμούς Laplace των πρώτων παραγώγων της:

$$\mathcal{L}\{u'(t)\} = sU(s) - u(0), \tag{10.1.3}$$

$$\mathcal{L}\{u''(t)\} = s^2U(s) - su(0) - u'(0), \tag{10.1.4}$$

$$\mathcal{L}\{u'''(t)\} = s^3U(s) - s^2u(0) - su'(0) - u''(0), \tag{10.1.5}$$

$$\mathcal{L}\{u^{(n)}(t)\} = s^nU(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \dots - su^{(n-2)}(0) - u^{(n-1)}(0). \tag{10.1.6}$$

Γενικότερα για το μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}\{u^{(n)}(t)\}$  της παραγώγου  $n$ -τάξεως  $u^{(n)}(t)$  της ίδιας συναρτήσεως  $u(t)$  ισχύει ο τύπος

$$\mathcal{L}\{u^{(n)}(t)\} = s^nU(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - s^{n-3}u''(0) - \dots - su^{(n-2)}(0) - u^{(n-1)}(0). \tag{10.1.7}$$

Όλες αυτές τις ιδιότητες τις γνωρίζουμε ήδη από την Παράγραφο A10.3.5 του Μέρους A.

Με τη χρήση των τόσο σημαντικών αυτών τύπων όσον αφορά στις διαφορικές εξισώσεις (τόσο συνήθεις όσο και με μερικές παραγώγους) και με μετασχηματισμό Laplace ως προς τη μεταβλητή  $t$ , αυτή προφανώς εξαλείφεται από τη διαφορική εξίσωση. Τώρα στη διαφορική εξίσωση εμφανίζεται η μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace. Αυτή όμως δεν είναι μεταβλητή παραγωγίσεως. Άρα όλες οι παράγωγοι ως προς τη μεταβλητή  $t$  παύουν να παρουσιάζονται σε μια διαφορική εξίσωση που μετασχηματίσθηκε κατά Laplace. Εάν πρόκειται για συνήθη διαφορική εξίσωση, το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού Laplace είναι μια πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς το μετασχηματισμό Laplace  $U(s)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t)$ . Αυτό έχει ήδη αναφερθεί και χρησιμοποιηθεί εκτενώς στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Εάν όμως πρόκειται για διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με  $m$  ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε (με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace) ο αριθμός των μεταβλητών αυτών απλά μειώνεται από  $m$  σε  $m - 1$ . Επομένως μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, έστω τις  $t$  και  $x$ , εάν μετασχηματισθεί κατά Laplace ως προς την πρώτη μεταβλητή της  $t$ , ανάγεται σε συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς τη δεύτερη μεταβλητή της  $x$ .

Τούτο συμβαίνει, γιατί ο μετασχηματισμός Laplace ως προς τη μεταβλητή  $t$  σε μια συνάρτηση  $u(x, t)$  των δύο μεταβλητών  $x$  και  $t$  ουσιαστικά θεωρεί τη μεταβλητή  $x$  ως παράμετρο, επειδή η ολοκλήρωση γίνεται ως προς  $t$  και όχι ως προς  $x$ . Για τις μερικές παραγώγους της συναρτήσεως αυτής  $u(x, t)$  ως προς  $x$  επιτρέπεται (υπό συνήθεις συνθήκες) η εναλλαγή της ολοκληρώσεως (στον τύπο ορισμού (10.1.1) του μετασχηματισμού Laplace) και της μερικής παραγωγίσεως ως προς  $x$ . Αυτό ισχύει, επειδή η μεταβλητή παραγωγίσεως  $x$  σε μια τέτοια μερική παράγωγο δεν έχει σχέση με τη μεταβλητή ολοκληρώσεως  $t$  στο μετασχηματισμό Laplace ως προς  $t$ . Άρα

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k}\right\} = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} dt = \frac{\partial^k}{\partial x^k} \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt = \frac{\partial^k U(x, s)}{\partial x^k}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{10.1.8}$$

Με βάση τα παραπάνω εξαλείφεται μεν η μεταβλητή  $t$  στις παραγωγίσεις, παραμένει όμως η μεταβλητή  $x$ . Ανάλογα και για περισσότερες των δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Μερικές φορές μάλιστα είναι χρήσιμη η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace και ως προς δεύτερη μεταβλητή, π.χ. την  $x$ , μετά την  $t$ .

Στο τέλος απαιτείται πάντοτε και η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace  $U(s)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t)$ . Η αντιστροφή αυτή βασίζεται στη διαθεσιμότητα των βασικών (ή και λιγότερο βασικών) πινάκων ζευγών μετασχηματισμών Laplace. Πίνακες ζευγών μετασχηματισμών Laplace είναι χρήσιμοι για την εύρεση της άγνωστης συναρτήσεως  $u(t)$  από το μετασχηματισμό Laplace της  $U(s)$ , ο οποίος έχει ήδη υπολογισθεί. Τέτοιοι πίνακες, που είναι ευρέως διαθέσιμοι (π.χ. ο Πίνακας A10.2 στο Μέρος A), περιλαμβάνουν κι ορισμένους βασικούς μετασχηματισμούς Laplace.

**B10.1.3. Μετασχηματισμοί Laplace συνήθων συναρτήσεων**

Πρακτικά χρήσιμοι μετασχηματισμοί Laplace (π.χ. στον Πίνακα Α10.2 του Μέρους Α) αφορούν μεταξύ άλλων στις ακόλουθες συναρτήσεις: (α) στη συνάρτηση  $t^n$  (για μη αρνητικό ακέραιο  $n$ ):

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \implies \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \text{για } n = 0, \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2} \quad \text{για } n = 1, \quad (10.1.9)$$

(β) στην εκθετική συνάρτηση και στις συναρτήσεις υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο:

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}, \quad \mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{s}{s^2 - a^2}, \quad \mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{s^2 - a^2} \quad (10.1.10)$$

(με το  $a$  σταθερά), (γ) στις συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο και επίσης (δ) στη συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος  $\operatorname{erfc}$ :

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin at\} = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}\left\{\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}, \quad (10.1.11)$$

(ε) στη βηματική συνάρτηση του Heaviside  $H(t)$  (γενικότερα  $H(t-a)$  με  $a \geq 0$ ) και (στ) στην ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση δέλτα του Dirac  $\delta(t)$  (γενικότερα  $\delta(t-a)$  με  $a \geq 0$ ):

$$\mathcal{L}\{H(t)\} = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}\{H(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}. \quad (10.1.12)$$

Επίσης σε πάρα πολλές ακόμη συναρτήσεις. Σημειώνεται επίσης ότι οι παραπάνω τύποι ισχύουν για κατάλληλα μεγάλες τιμές του  $s$ , όχι όμως για κάθε τιμή του  $s$ . Συγκεκριμένα πρέπει να ισχύει η ανισότητα  $s > a$  για τη συνάρτηση  $e^{at}$ , η ανισότητα  $s > |a|$  για τις συναρτήσεις  $\cosh at$  και  $\sinh at$ , η ανισότητα  $s > 0$  για τις συναρτήσεις  $1$ ,  $H(t)$ ,  $t^n$ ,  $\cos at$  και  $\sin at$ , κλπ.

Στην προαναφερθείσα αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace οι πιο πάνω τύποι πρέπει να χρησιμοποιούνται αντίστροφα, όπως είναι γνωστό και από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Εντούτοις αυτό δεν έγινε στην παραπάνω γραφή τους προς αποφυγή συγχύσεως.

**B10.1.4. Και άλλες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace**

Πέραν των πιο πάνω βασικών μετασχηματισμών Laplace των παραγώγων (10.1.3) έως (10.1.8) πολύ συχνά χρησιμοποιούνται επίσης και διάφορες άλλες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace. Οι ιδιότητες αυτές συμπληρώνουν τους καθεαυτό πίνακες μετασχηματισμών Laplace για συγκεκριμένες συναρτήσεις, όπως είναι οι συναρτήσεις στους πιο πάνω τύπους (10.1.9) έως (10.1.12).

Ανάμεσα στις ιδιότητες αυτές εξέχουσα θέση κατέχει η γραμμική ιδιότητα

$$\mathcal{L}\{c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)\} = c_1 U_1(s) + c_2 U_2(s) \quad (10.1.13)$$

με τα  $c_1$  και  $c_2$  σταθερές και επίσης  $U_{1,2}(s) = \mathcal{L}\{u_{1,2}(t)\}$ . Άλλες πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace (με  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ ) είναι οι ακόλουθες:

$$\mathcal{L}\{u(at)\} = \frac{1}{a} U\left(\frac{s}{a}\right), \quad \mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = U(s+a), \quad \mathcal{L}\{u(t-a)H(t-a)\} = e^{-as}U(s), \quad a > 0, \quad (10.1.14)$$

επίσης

$$\mathcal{L}\{tu(t)\} = -U'(s), \quad \mathcal{L}\{t^2u(t)\} = U''(s) \\ \text{και γενικότερα } \mathcal{L}\{t^n u(t)\} = (-1)^n U^{(n)}(s), \quad n = 1, 2, \dots \quad (10.1.15)$$

Πολύ χρήσιμες είναι και οι ιδιότητες για το άοριστο ολοκλήρωμα (ολοκλήρωση στο διάστημα  $[0, t]$ ) μιας συναρτήσεως  $u(t)$  και, ιδίως, για τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων  $u_1(t)$  και  $u_2(t)$  που ακολουθούν:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t u(\tau) d\tau\right\} = \frac{U(s)}{s}, \quad \mathcal{L}\{u_1(t) * u_2(t)\} \equiv \mathcal{L}\left\{\int_0^t u_1(\tau) u_2(t-\tau) d\tau\right\} = U_1(s) U_2(s) \quad (10.1.16)$$

και αρκετές άλλες, γενικά όμως φθίνουσας πρακτικής χρησιμότητας για τον Πολιτικό Μηχανικό.

Η όλη μεθοδολογία ελπίζεται να γίνει πολύ περισσότερο κατανοητή στην πράξη με τις εφαρμογές που ακολουθούν σε επόμενες ενότητες του κεφαλαίου αυτού.

## B10.2. ΜΕΤΑΓΩΓΗ ΡΥΠΟΥ ΣΕ ΥΔΑΤΟΡΡΕΥΜΑ

### B10.2.1. Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

Σαν πρώτη εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, θα αναφερθούμε στην εξίσωση της μεταγωγής ρύπου (ουσιαστικά μετακίνησης του, μεταφοράς του χωρίς καθόλου διάχυση, μοριακή διάχυση, αποκλειστικά λόγω της ίδιας της ροής). Το πρόβλημα αυτό απαντάται στην Περιβαλλοντική Υδραυλική και, πιο συγκεκριμένα, στο μοντέλο της ροής εμβόλου σε υδατόρρευμα (κατά τη διεύθυνση του άξονα  $Ox$ ). Με τη ροή αυτή γίνεται και η μεταφορά του ρύπου με συγκέντρωση  $c = c(x, t)$  (φυσικά με  $c(x, t) \geq 0$ ) με  $x$  τη θέση (χωρική μεταβλητή) και  $t$  το χρόνο (χρονική μεταβλητή). Η μεταφορά αυτή με μεταγωγή οφείλεται απλά στην κίνηση του ρευστού, του νερού, δηλαδή στη ροή στο υδατόρρευμα. Στην παρούσα ενότητα έχει γίνει δεκτό ότι δεν υφίσταται καθόλου διάχυση του ρύπου.

Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους έχει τη μορφή

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = -kc, \quad c = c(x, t). \quad (10.2.1)$$

Στην εξίσωση αυτή  $V$  είναι η ταχύτητα της ροής στο υδατόρρευμα, που θεωρείται για διευκόλυνση σταθερά, και  $k$  η σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως (δηλαδή καταστροφής) του ρύπου. Πρόκειται για μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και πρώτης τάξεως. Η άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η συγκέντρωση  $c(x, t)$  του ρύπου. Υπάρχουν επίσης δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: η θέση  $x$  κατά μήκος του υδατορρέυματος (η χωρική μεταβλητή) και ο χρόνος  $t$  (η χρονική μεταβλητή). Τέλος η εξίσωση (10.2.1) έχει σταθερούς συντελεστές: την ταχύτητα ροής  $V$  και τη σταθερά  $k$  του ρυθμού αποδομήσεως που προαναφέραμε.

Τη σταθερά αυτή  $k$  τη θεωρούμε εδώ μηδενική ( $k = 0$ ), δηλαδή δεχόμαστε ανυπαρξία αποδομήσεως (πλήρη έλλειψη καταστροφής) του ρύπου. Με την απλοποιητική αυτή παραδοχή θα αναζητήσουμε τη συγκέντρωση  $c = c(x, t)$  του ρύπου κατά μήκος του υδατορρέυματος υπό συγκεκριμένες αρχική συνθήκη (για  $t = 0$ ) και συνοριακή συνθήκη (για  $x = 0$ ) για τις τιμές των μεταβλητών  $x > 0$  και  $t > 0$ . Με έλλειψη αποδομήσεως ( $k = 0$ ) η εξίσωση (10.2.1) παίρνει την ακόμη απλούστερη μορφή

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad c = c(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (10.2.2)$$

που συμπίπτει με την εξίσωση (4.3.9) στην Παράγραφο B4.3.2. Η εξίσωση αυτή (10.2.2) αποτελεί ένα εξαιρετικό πρώτο και ταυτόχρονα πάρα πολύ απλό παράδειγμα επιδείξεως της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση ομογενών ή μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές.

Μαζί με την πιο πάνω εξίσωση (10.2.2) υποθέτουμε ότι ισχύει και η αρχική συνθήκη

$$c(x, 0) = 0, \quad x > 0. \quad (10.2.3)$$

Δεχόμαστε δηλαδή πλήρη ανυπαρξία ρύπου την αρχική χρονική στιγμή  $t = 0$  σε όλο το υδατόρρευμα με  $x > 0$ . Θεωρούμε επίσης και τη συνοριακή συνθήκη

$$c(0, t) = c_0, \quad t > 0 \quad (10.2.4)$$

(με το  $c_0$  θετική σταθερή συγκέντρωση). Δεχόμαστε δηλαδή ότι ακριβώς στο σημείο  $x = 0$  του υδατορρέυματος υφίσταται σταθερή συγκέντρωση  $c_0$  του ρύπου κάθε χρονική στιγμή  $t > 0$ . Η συγκέντρωση αυτή  $c_0$  μπορεί να δημιουργείται από συνεχή (για  $t \geq 0$ ) τοπική (στο σημείο  $x = 0$ ) εισαγωγή ρύπου στη ροή στο υδατόρρευμα. Μπορεί ακόμη και να αποτελεί συνέπεια τέτοιας εισαγωγής σε τοπικά προηγούμενα (με  $x < 0$ ) σημεία της ροής. Εν πάση περιπτώσει, για μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως, όπως είναι η εξίσωση (10.2.2), με μια χωρική μεταβλητή, τη θέση  $x$ , και, φυσικά, και μια χρονική μεταβλητή, το χρόνο  $t$ , είναι απόλυτα εύλογο και αναγκαίο να έχουμε δύο συνθήκες. Συγκεκριμένα εδώ έχουμε: (α) μια αρχική συνθήκη: τη (10.2.3) (για  $t = 0$ ) και (β) μια συνοριακή συνθήκη: τη (10.2.4) (για  $x = 0$ ).

Το παραπάνω πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση της μεταγωγής ρύπου σε υδατόρρευμα θα το επιλύσουμε με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Θα έχουμε έτσι την ευκαιρία να επιδείξουμε την τόσο χρήσιμη αυτή μέθοδο σε ένα πάρα πολύ απλό παράδειγμα και να οδηγηθούμε στην αναμενόμενη, προφανή στο τόσο απλό αυτό πρόβλημα λύση.

### B10.2.2. Μετασχηματισμός Laplace ως προς το χρόνο $t$

Σύμφωνα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, ορίζουμε καταρχήν το μετασχηματισμό Laplace

$$C(x, s) = \mathcal{L}\{c(x, t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} c(x, t) dt \quad (10.2.5)$$

της άγνωστης συναρτήσεως  $c(x, t)$  (της συγκεντρώσεως του ρύπου) ως προς το χρόνο  $t$ . Η επιλογή του χρόνου  $t$  για το μετασχηματισμό Laplace αντί για τη θέση  $x$  πολύ μικρή σημασία έχει στο παρόν απλό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών, που είναι κάπως «συμμετρικό» ως προς τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.2.2). Παρακάτω θα λύσουμε το ίδιο ακριβώς πρόβλημα εξίσου εύκολα ξεκινώντας με μετασχηματισμό Laplace ως προς τη θέση  $x$  αντί για το χρόνο  $t$ . Το ότι ο συντελεστής  $V$  (η ταχύτητα του ρευστού, του νερού) θεωρήθηκε σταθερός (ούτε συνάρτηση της θέσεως  $x$ , αλλ' ούτε και του χρόνου  $t$ ) μας επιτρέπει να εργασθούμε με το μετασχηματισμό Laplace είτε ως προς  $x$  είτε ως προς  $t$  κατά παρόμοιο τρόπο.

Στην παρούσα επιλογή και επίλυση με μετασχηματισμό Laplace (ως προς  $t$ ) μετασχηματίζουμε κατά Laplace τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.2.2) καθώς και τη συνοριακή συνθήκη (10.2.4). Τούτο είναι δυνατόν, γιατί και οι δύο αυτές εξισώσεις: και η ίδια η διαφορική εξίσωση (10.2.2) και η συνοριακή συνθήκη (10.2.4) είναι συναρτήσεις του χρόνου  $t$ , ως προς τον οποίο μετασχηματίζουμε κατά Laplace. Μάλιστα και οι δύο αυτές εξισώσεις ορίζονται στο χρονικό διάστημα  $[0, \infty)$ , επειδή  $t > 0$ , ακριβώς όπως γίνεται στο μετασχηματισμό Laplace. Βέβαια, η αρχική συνθήκη (10.2.3) (για  $t = 0$ ) δε μπορεί να μετασχηματισθεί κατά Laplace ως προς το χρόνο  $t$ , επειδή δεν είναι συνάρτηση του χρόνου  $t$ . (Είναι συνάρτηση μόνο της θέσεως  $x$ .) Παρά ταύτα θα ληφθεί και αυτή κατάλληλα υπόψη αμέσως παρακάτω. Αυτό θα γίνει κατά τον υπολογισμό της χρονικής μερικής παραγώγου  $\partial c/\partial t$  στη διαφορική εξίσωση (10.2.2).

Επομένως κατά τα γνωστά (με τη χρήση του τύπου (10.1.3) για το μετασχηματισμό Laplace (10.1.1) της πρώτης παραγώγου) έχουμε

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial c}{\partial t}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} dt = sC(x, s) - c(x, 0) = sC(x, s) \quad (10.2.6)$$

λόγω και της αρχικής συνθήκης (10.2.3):  $c(x, 0) = 0$ . Με τον τρόπο αυτό λάβαμε ήδη υπόψη, οριστικά, και την αρχική συνθήκη (10.2.3), όπως οφειλάμε να κάνουμε. Στη συνέχεια για τη χωρική μερική παράγωγο  $\partial c/\partial x$  επίσης στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.2.2) και επίσης κατά τα γνωστά (τύπος (10.1.8) για  $k = 1$ ) έχουμε

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial c}{\partial x}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{\partial c(x, t)}{\partial x} dt = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\infty} e^{-st} c(x, t) dt = \frac{\partial C(x, s)}{\partial x}. \quad (10.2.7)$$

Η σχέση αυτή ισχύει, επειδή πρόκειται για παράγωγο ως προς τη θέση  $x$ , που δε σχετίζεται με το χρόνο  $t$ , ως προς τον οποίο εκτελούμε το μετασχηματισμό Laplace. Εύλογα ο χρόνος  $t$  είναι επίσης η μεταβλητή ολοκληρώσεως στο πιο πάνω ολοκλήρωμα μετασχηματισμού Laplace (10.2.7).

Και τους δύο παραπάνω τύπους (10.2.6) και (10.2.7) τους χρησιμοποιούμε τώρα για τη μετατροπή, το μετασχηματισμό της παρούσας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (10.2.2) για τη μεταγωγή ρύπου (χωρίς διάχυση, αλλ' ούτε και αποδόμηση) σε συνήθη διαφορική εξίσωση. Αυτό βέβαια το πετυχαίνουμε άμεσα με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο  $t$ . Η συνήθης διαφορική εξίσωση που προκύπτει θα έχει φυσικά μία μόνο ανεξάρτητη μεταβλητή: τη θέση  $x$ . Δε θα εμφανίζεται πλέον ο χρόνος  $t$ . Εργαζόμενοι με τον τρόπο αυτό εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνήθης διαφορική εξίσωση που προκύπτει είναι η εξής:

$$sC(x, s) + V \frac{\partial C(x, s)}{\partial x} = 0 \iff V \frac{\partial C(x, s)}{\partial x} + sC(x, s) = 0, \quad x > 0, \quad (10.2.8)$$

με απλή αλλαγή της σειράς των προσθετέων στο αριστερό μέλος.

### B10.2.3. Σχόλια για το συμβολισμό των παραγώγων

Αν και μαθηματικά είναι απόλυτα σωστή, εντούτοις η συνήθης διαφορική εξίσωση (10.2.8), στην οποία καταλήξαμε, από εκπαιδευτικής απόψεως είναι λίγο ανάρμοστα γραμμένη. Αυτό συμβαίνει, επειδή δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα από αυτήν που αρμόζει στη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace, που έχει αντικαταστήσει το χρόνο  $t$ . Θα ήταν πολύ καλύτερα να μην εμφανίζεται η μεταβλητή αυτή  $s$ , που δεν έχει καμία απολύτως σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.2.8). Αυτό θα μπορούσε καταρχήν να επιτευχθεί απλά παραλείποντας το σύμβολο  $s$  και γράφοντας  $C(x)$  αντί  $C(x, s)$  (μια μεταβλητή: η  $x$  αντί δύο: οι  $x$  και  $s$  στην άγνωστη συνάρτηση  $C$ ) παράλληλα με τη χρήση του συμβόλου  $d$  της συνήθους παραγωγίσεως αντί για το σύμβολο  $\partial$  της μερικής παραγωγίσεως. Εντούτοις η δυνατότητα αυτή δεν είναι δόκιμη για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις όπως η (10.2.8). Για το λόγο αυτό εργαζόμαστε λίγο επισημότερα (και σωστότερα βέβαια!) εισάγοντας το νέο σύμβολο

$$\hat{C}(x) := C(x, s), \quad x \geq 0. \quad (10.2.9)$$

Έτσι δηλώνουμε επίσημα τη βούλησή μας να μη βλέπουμε γραμμένη τη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace στη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.8), που προέκυψε με την παρούσα μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace (ως προς το χρόνο  $t$ ) από τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.2.2). Απλά έχουμε τώρα τη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.8) στη μορφή

$$V \frac{d\hat{C}(x)}{dx} + s\hat{C}(x) = 0, \quad x > 0, \quad (10.2.10)$$

και πρέπει να είμαστε απόλυτα ευχαριστημένοι με το γεγονός αυτό.

Έπειτα από τη διαφορική εξίσωση (10.2.2) εργαζόμαστε ανάλογα (και μάλιστα πιο εύκολα τώρα) για τη συνοριακή συνθήκη (10.2.4):  $c(0, t) = c_0$  που απομένει. Και αυτή, εάν μετασχηματισθεί κατά Laplace (ασφαλώς ως προς το χρόνο  $t$  και πάλι), παίρνει την απλούστατη μορφή

$$C(0, s) = \frac{c_0}{s} \implies \hat{C}(0) = \frac{c_0}{s}, \quad (10.2.11)$$

γιατί, όπως είναι πολύ γνωστό (τύπος (10.1.9) για  $n = 0$ ),  $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ .

Πρέπει επομένως τώρα να λύσουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.10) (με ανεξάρτητη μεταβλητή τη θέση  $x$  μόνο κατά μήκος του υδατορρεύματος). Αυτή είναι μια πολύ εύκολη εργασία, επειδή η εξίσωση (10.2.10) είναι μια ομογενής γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές (εννοούμε απλά ανεξάρτητους της μεταβλητής  $x$ ). Έχουμε επίσης

διαθέσιμη και τη σχετική αρχική συνθήκη (10.2.11) για την τιμή  $\hat{C}(0)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $\hat{C}(x)$  στη θέση  $x = 0$ , δηλαδή στην αρχή της μετρήσεως της θέσεως  $x$  στο υδατόρρευμα.

Ας μην έχουμε καμία τύψη συνειδήσεως γράφοντας  $\hat{C}(x)$ . Απλά θελήσαμε να μη βλέπουμε τη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace (αν και υπάρχει!) στη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.10) και στην αρχική της συνθήκη (10.2.11). Και για τις δύο αυτές εξισώσεις το  $s$  είναι απλά μια παράμετρος, μια σταθερά. Μεταβλητή είναι η θέση  $x$  στη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.10), καλύτερα στο πρόβλημα αρχικής τιμής (αν και η λέξη αρχικής νοείται ως προς τη θέση  $x$  τώρα) (10.2.10) και (10.2.11). Αν είμασταν λίγο θρασείς, θα παραλείπαμε το σύμβολο της περισπωμένης στην άγνωστη συνάρτηση  $\hat{C}(x)$  γράφοντας απλά  $C(x)$ . Αυτό όμως είναι λάθος από μαθηματικής απόψεως, επειδή το σύμβολο  $C$  αφορά σε μια συνάρτηση δύο μεταβλητών: τη  $C(x, s) \equiv \hat{C}(x)$ , όπως αναφέρθηκε ήδη.

Από την άλλη πλευρά, αν έχουμε εμπεδώσει την παρούσα μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, είμαστε απόλυτα ευχαριστημένοι ακόμη και με την αρχική μορφή (10.2.8) της συνήθους διαφορικής εξίσωσης που προέκυψε. Είμαστε ευχαριστημένοι, γιατί κατανοούμε ότι το σύμβολο  $s$  παριστάνει μια παράμετρο στη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.8), μια ποσότητα που δεν έχει καμία σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ . Με τις σκέψεις αυτές δεν είναι αναγκαίο να εισαγάγουμε το νέο σύμβολο  $\hat{C}(x)$ .

Μια άλλη προφανής δυνατότητα είναι να γράψουμε απλά τη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.8) στη μορφή

$$V \frac{dC}{dx} + sC = 0, \quad x > 0, \quad (10.2.12)$$

παραβλέποντας (οπτικά τουλάχιστον) ότι έχουμε ορίσει  $C = C(x, s)$ . Μπορούμε ακόμη να τη γράψουμε και στη μορφή

$$V \frac{dC(x, s)}{dx} + sC(x, s) = 0, \quad x > 0, \quad (10.2.13)$$

αγνοώντας προσωρινά τη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace στη χρήση του συμβόλου της παραγωγίσεως. Εδώ καλώς ή κακώς χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο  $d$  της συνήθους παραγωγίσεως αντί για το σύμβολο  $\partial$  της μερικής παραγωγίσεως, σαν να είχαμε συνήθη παραγωγήση.

Όλα αυτά είναι απολύτως ισοδύναμα και λίγο-πολύ αποδεκτά, αλλά πρέπει να προσέχουμε, ώστε να μη γίνεται σύγχυση μεταβλητών, ιδίως εξαιτίας κάποιας απειρίας στη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Έλλειψη προσοχής και εμπειρίας θα μπορούσε ίσως να οδηγήσει σε λάθος κατά την επίλυση του προβλήματός μας, εν προκειμένω ενός προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση της μεταγωγής ρύπου σε υδατόρρευμα στην Περιβαλλοντική Υδραυλική. Οπωσδήποτε ένα λάθος με τίποτα δεν είναι επιθυμητό. Είναι σαφώς προτιμότερες οι παραπάνω διευκρινίσεις! Ας αναγνωσθούν μια φορά από το φοιτητή και τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό που τις έχει ήδη κατανοήσει και τις θεωρεί λίγο-πολύ προφανείς. Καλώς, αρκετά ως εδώ!

#### **B10.2.4. Επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης**

Τώρα για την επίλυση της ομογενούς γραμμικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.2.10) (ή κάποιας απόλυτα ισοδύναμης μορφής της: (10.2.8), (10.2.12) ή (10.2.13)) μαζί με την αρχική συνθήκη (10.2.11) (ως προς  $x$ ) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε κάποια γνωστή μέθοδο από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Τέτοια αποτελεσματική μέθοδος είναι η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως (τελικά με  $p_1(\mu) = 0$ , εδώ πρωτοβάθμια εξίσωση). Εν προκειμένω υποθέτουμε ότι

$$\hat{C}(x) = e^{\mu x} \implies p_1(\mu) = V\mu + s = 0 \implies \mu = \mu_1 = -\frac{s}{V}. \quad (10.2.14)$$

Επομένως η γενική λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.2.10) θα είναι της μορφής

$$\hat{C}(x) = A(s)e^{-sx/V}. \quad (10.2.15)$$



Το σύμβολο  $A(s)$  στη γενική αυτή λύση (10.2.15) δηλώνει αυθαίρετη συνάρτηση του  $s$  και προφανώς πραγματική στο παρόν πρόβλημα. Χρησιμοποιούμε επίσης και την αρχική μας συνθήκη (10.2.11): τη συνθήκη  $\hat{C}(0) = c_0/s$ . Τώρα διαπιστώνουμε αμέσως από τη γενική λύση (10.2.15) ότι για  $x = 0$

$$\hat{C}(0) = A(s) = \frac{c_0}{s}, \tag{10.2.16}$$

οπότε, έχοντας θυμηθεί και το συμβολισμό (10.2.9) που εισαγάγαμε,

$$\hat{C}(x) := C(x, s) = \frac{c_0}{s} e^{-sx/V} \equiv \frac{c_0}{s} \exp\left(-\frac{sx}{V}\right), \quad x \geq 0. \tag{10.2.17}$$

Συνοψίζουμε μέχρι το σημείο αυτό. Καταρχήν μετασχηματίσαμε κατά Laplace (ως προς το χρόνο  $t$ ) τη διαφορική εξίσωση της μεταγωγής (10.2.2) (φυσικά χωρίς αποδόμηση ούτε διάχυση του ρύπου: πρόκειται απλά για μεταγωγή). Αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς. Κατά το μετασχηματισμό αυτό Laplace πήραμε επίσης υπόψη και την αρχική συνθήκη (10.2.3) καθώς και τη συνοριακή συνθήκη (10.2.4). Έτσι οδηγηθήκαμε σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση, τη (10.2.10), μαζί με την «αρχική» συνθήκη της (10.2.11). (Η αρχική αυτή συνθήκη αφορά στη θέση  $x$  τώρα, όχι στο χρόνο  $t$ !) Το χωρικό αυτό πρόβλημα αρχικής τιμής (με ανεξάρτητη μεταβλητή μόνο τη θέση  $x$ ) στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις το επιλύσαμε με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_1(\mu) = 0$ . Με την εργασία αυτή προσδιορίσαμε τη λύση του (10.2.17), που είναι μια μερική (ή ειδική) λύση της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (10.2.10). Με απλούστερα λόγια μετατρέψαμε ένα πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς σε ένα πρόβλημα «αρχικής» τιμής στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Το πρόβλημα αυτό το επιλύσαμε ήδη με μια κλασική μέθοδο για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις: τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_1(\mu) = 0$ .

**B10.2.5. Χρήση και δεύτερου μετασχηματισμού Laplace: τώρα ως προς τη θέση  $x$**

Εναλλακτικά, εάν το επιθυμούμε βέβαια, υπάρχει και η δυνατότητα και δεύτερης χρήσεως της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace στη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.10). Τώρα ο δεύτερος αυτός μετασχηματισμός Laplace μπορεί να γίνει μόνο ως προς τη θέση  $x$  (όχι ως προς το χρόνο  $t$ , ο χρόνος  $t$  έχει ήδη απαλειφθεί με τον πρώτο μετασχηματισμό Laplace!). Έτσι απαλλασσόμαστε πλέον και από την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  και οδηγούμαστε σε μια απλούστατη γραμμική αλγεβρική (όχι πια διαφορική!) εξίσωση με έναν άγνωστο. Στην εργασία μας αυτή, που θα την καταγράψουμε πιο κάτω, είναι προφανές ότι πρέπει να δηλώσουμε με νέο σύμβολο το μετασχηματισμό Laplace ως προς τη θέση  $x$ . Αυτό είναι απόλυτα αναγκαίο, έτσι ώστε να μη γίνει σύγχυση με τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace ως προς το χρόνο  $t$ , για τον οποίο ήδη χρησιμοποιήσαμε παραπάνω το σύμβολο  $\mathcal{L}$ . Βέβαια για έμφαση θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει (αν και προτιμήσαμε να μην το κάνουμε) το σύμβολο  $\mathcal{L}_t$  με το δείκτη  $t$  να αναφέρεται στο χρόνο, ως προς τον οποίο έγινε ο πρώτος μετασχηματισμός Laplace με βάση τον ορισμό του (10.2.5).

Τώρα όμως είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο  $\mathcal{L}_x$ , για να δηλώσουμε το μετασχηματισμό Laplace ως προς τη θέση  $x$ . Με τον τρόπο αυτό δε θα μπορεί να δημιουργηθεί σύγχυση με τον προηγούμενο μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}$ : αυτόν ως προς το χρόνο  $t$ . Πρέπει επίσης να χρησιμοποιήσουμε και ένα ιδιαίτερο σύμβολο, π.χ. το  $p$ , για τη νέα μεταβλητή, που θα προκύψει από το μετασχηματισμό Laplace ως προς  $x$  παίρνοντας τη θέση της μεταβλητής  $x$  στη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.10). Δηλώνουμε έτσι με  $\hat{C}^*(p)$  το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συναρτήσεως  $\hat{C}(x)$  στη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.10). Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό (10.1.1) του μετασχηματισμού Laplace, έχουμε

$$\hat{C}^*(p) = \mathcal{L}_x\{\hat{C}(x)\} = \int_0^\infty e^{-px} \hat{C}(x) dx. \tag{10.2.18}$$

Βλέπουμε τώρα στο ολοκλήρωμα αυτό του μετασχηματισμού Laplace σαν μεταβλητή ολοκληρώσεως τη θέση  $x$  αντί για το χρόνο  $t$  στον προηγούμενο μετασχηματισμό Laplace (10.2.5). Παρατηρούμε επίσης και τη χρήση του συμβόλου  $p$  αντί για το σύμβολο  $s$  για τη μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace. Έτσι το  $t$  «αντικαταστάθηκε» από το  $s$  και το  $x$  από το  $p$  στους δύο διαφορετικούς μετασχηματισμούς Laplace ( $\mathcal{L}$  και  $\mathcal{L}_x$  αντίστοιχα) που χρησιμοποιήσαμε.

Πρέπει επίσης να χρησιμοποιηθεί και ο βασικός τύπος (10.1.3) για το μετασχηματισμό Laplace της πρώτης παραγώγου. Όμως ο τύπος αυτός είναι γραμμένος ως προς τη μεταβλητή  $t$  και πραγματικά τον χρησιμοποιήσαμε ως προς τη μεταβλητή  $t$  (εδώ το χρόνο) στη σχέση (10.2.6). Τώρα όμως θέλουμε να τον χρησιμοποιήσουμε με τη χρήση της μεταβλητής  $x$  (εδώ της θέσεως) αντί για τη μεταβλητή  $t$  (εδώ του χρόνου) στο μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}_x$  της παραγώγου  $d\hat{C}(x)/dx$  της συναρτήσεως  $\hat{C}(x)$ . Έτσι, αλλάζοντας επιπλέον στον τύπο (10.1.3) και τη μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace από  $s$  σε  $p$ , έχουμε τον τύπο

$$\mathcal{L}_x \left\{ \frac{d\hat{C}(x)}{dx} \right\} = p\hat{C}^*(p) - \hat{C}(0) = p\hat{C}^*(p) - \frac{c_0}{s} \quad (10.2.19)$$

λόγω και της σχέσεως (10.2.11):  $\hat{C}(0) = c_0/s$ . Η σχέση αυτή (10.2.11) αφορά στο μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}$  ως προς το χρόνο  $t$  της συνοριακής συνθήκης (10.2.4):  $c(0, t) = c_0$ . Η ίδια σχέση (10.2.11) είναι η (χωρική) αρχική συνθήκη στη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.10) και ήδη τη λάβαμε υπόψη στο μετασχηματισμό Laplace (10.2.19).

Επομένως η συνήθης διαφορική εξίσωση (10.2.10) και η (χωρική) αρχική συνθήκη (10.2.11) που τη συνοδεύει στο παρόν πρόβλημα αρχικής τιμής (στις συνήθεις πλέον διαφορικές εξισώσεις) παίρνουν τελικά τη μορφή μιας καθαρά αλγεβρικής εξίσωσης και μάλιστα πρώτου βαθμού. Συγκεκριμένα προκύπτει η αλγεβρική εξίσωση

$$V \left[ p\hat{C}^*(p) - \frac{c_0}{s} \right] + s\hat{C}^*(p) = 0, \quad \text{οπότε} \quad \hat{C}^*(p) = \frac{c_0 V/s}{Vp + s} = \frac{c_0/s}{p + (s/V)}. \quad (10.2.20)$$

Στην εξίσωση αυτή το  $p$  είναι η κύρια μεταβλητή Laplace, ενώ το  $s$  (η μεταβλητή Laplace ως προς το χρόνο  $t$ ) είναι απλά μια παράμετρος.

Βέβαια, λόγω του ορισμού (10.2.9) της βοηθητικής συναρτήσεως  $\hat{C}(x)$ , δηλαδή  $\hat{C}(x) := C(x, s)$ , ο μετασχηματισμός Laplace (ως προς  $x$ )  $\hat{C}^*(p)$  της άγνωστης αυτής συναρτήσεως  $\hat{C}(x)$  μπορεί ασφαλώς να γραφεί και στην ακόλουθη απόλυτα ισοδύναμη προς τη (10.2.18) μορφή του:

$$C^*(p, s) = \mathcal{L}_x \{ C(x, s) \} = \mathcal{L}_x \{ \mathcal{L} \{ c(x, t) \} \} = \int_0^\infty e^{-px} C(x, s) dx. \quad (10.2.21)$$

Παρατηρούμε τώρα την ταυτόχρονη παρουσία και των δύο μεταβλητών:  $p$  και  $s$  των μετασχηματισμών Laplace (ως προς  $x$  και ως προς  $t$  αντίστοιχα) στην ίδια συνάρτηση  $C^*(p, s) \equiv \hat{C}^*(p)$ .

Με αυτόν τον εναλλακτικό συμβολισμό  $C^*(p, s)$  ο τύπος (10.2.19) παίρνει τώρα την εξής απόλυτα ισοδύναμη μορφή για το μετασχηματισμό Laplace (ως προς  $x$ , εδώ με σύμβολο το  $\mathcal{L}_x$ ) της μερικής παραγώγου  $\partial C(x, s)/\partial x$  της συναρτήσεως  $C(x, s)$ :

$$\mathcal{L}_x \left\{ \frac{\partial C(x, s)}{\partial x} \right\} = pC^*(p, s) - C(0, s) = pC^*(p, s) - \frac{c_0}{s} \quad (10.2.22)$$

τώρα λόγω του πρώτου τύπου (10.2.11):  $C(0, s) = c_0/s$ . Τελικά η συνήθης διαφορική εξίσωση (10.2.8) μετασχηματίζεται στη μορφή

$$V \left[ pC^*(p, s) - \frac{c_0}{s} \right] + sC^*(p, s) = 0 \quad \implies \quad C^*(p, s) = \frac{c_0 V/s}{Vp + s} = \frac{c_0/s}{p + (s/V)}. \quad (10.2.23)$$

Φυσικά η μορφή αυτή ουσιαστικά ταυτίζεται με τη λύση (10.2.20). Η μόνη διαφορά έγκειται στην αλλαγή του συμβολισμού ως προς το διπλό μετασχηματισμό Laplace  $C^*$ , δηλαδή  $C^*(p, s) \equiv \hat{C}^*(p)$ .

Τη λύση (10.2.20) ή την ισοδύναμή της (10.2.23) θα την αντιστρέψουμε τώρα κατά Laplace ως προς τη μεταβλητή  $p$  του δεύτερου μετασχηματισμού Laplace  $\mathcal{L}_x$  (όχι ως προς τη μεταβλητή  $s$  του πρώτου μετασχηματισμού Laplace  $\mathcal{L}$ ). Θα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό τύπο

$$\mathcal{L}_x^{-1} \left\{ \frac{1}{p-a} \right\} = e^{ax} \equiv \exp ax \tag{10.2.24}$$

με  $a = -s/V$ . (Το  $s$  είναι σταθερά στην αντιστροφή αυτή κατά Laplace, η οποία γίνεται ως προς  $p$ .) Από τη λύση (10.2.20) ή την απόλυτα ισοδύναμή της (10.2.23) βρίσκουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$\hat{C}(x) \equiv C(x, s) = \mathcal{L}_x^{-1} \{C^*(p, s)\} \equiv \mathcal{L}_x^{-1} \{\hat{C}^*(p)\} = \frac{C_0}{s} e^{-sx/V} \equiv \frac{C_0}{s} \exp \left( -\frac{sx}{V} \right) \tag{10.2.25}$$

για το μετασχηματισμό Laplace  $C(x, s) = \mathcal{L} \{c(x, t)\}$  της άγνωστης συναρτήσεως  $c(x, t)$ , δηλαδή της συγκεντρώσεως του ρύπου στο υδατόρρευμα. Το πιο πάνω αποτέλεσμα (10.2.25) φυσικά δεν είναι άλλο από το αποτέλεσμα (10.2.17), το οποίο έχει ήδη βρεθεί με την απλούστερη στο παρόν παράδειγμα μέθοδο του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

Επομένως, για να αποφεύγεται η σύγχυση στους μετασχηματισμούς Laplace ως προς δύο διαφορετικές ανεξάρτητες μεταβλητές (εν προκειμένω τις  $t$  και  $x$ ), είναι συχνά σκόπιμο να μη χρησιμοποιείται και δεύτερος μετασχηματισμός Laplace. Η σύσταση αυτή ισχύει ιδίως εάν η συνήθης διαφορική εξίσωση που προκύπτει από μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με δύο μόνο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι αρκετά απλή. (Πραγματικά, στην περίπτωση μας η συνήθης διαφορική εξίσωση (10.2.8), ισοδύναμα (10.2.10), που προέκυψε από τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.2.2), είναι αρκετά απλή!) Δύο διαδοχικοί μετασχηματισμοί Laplace (φυσικά ως προς δύο διαφορετικές ανεξάρτητες μεταβλητές) είναι πιθανό να προκαλέσουν κάποια σύγχυση. Απεναντίας για το παρόν χωρικό πρόβλημα αρχικής τιμής (10.2.8) (ή (10.2.10)) και (10.2.11) η μέθοδος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $p_1(\mu) = 0$ , που οδήγησε εδώ στο αποτέλεσμα (10.2.17), είναι απλούστερη σε σύγκριση με τη μέθοδο του (δεύτερου) μετασχηματισμού Laplace, που οδήγησε προφανώς στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα (10.2.25). Προφανώς η χρήση δύο διαφορετικών μεθόδων, που οδηγούν όμως στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα, εδώ η χρήση: (α) της μεθόδου της εκθετικής αντικαταστάσεως και (β) της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace, συνιστά μέχρι ενός σημείου και επαλήθευση των αποτελεσμάτων που βρέθηκαν.

**B10.2.6. Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace και λύση του προβλήματος**

Εν πάση περιπτώσει, γνωρίζουμε από τη λύση (10.2.17) (ή τη (10.2.25) που είναι η ίδια) ότι

$$C(x, s) = \frac{C_0}{s} e^{-sx/V}. \tag{10.2.26}$$

Πρέπει επομένως τώρα να αντιστρέψουμε κατά Laplace ( $\mathcal{L}^{-1}$ ) τη συνάρτηση  $C(x, s)$ , ώστε να απαλλαγούμε από τη μεταβλητή Laplace  $s$  και να επιστρέψουμε στο χρόνο  $t$ . Στην αντιστροφή αυτή η μεταβλητή  $x$  (η θέση κατά μήκος του υδατορρέυματος όπου ζητείται η συκέντρωση  $c(x, t)$  του ρύπου) είναι απλά μια παράμετρος. Για την αντιστροφή αυτή θυμόμαστε (ή βρίσκουμε σε πίνακες ή υπολογίζουμε, όπως γίνεται παρακάτω, είναι τόσο εύκολο!) για τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση (ή συνάρτηση βήματος) του Heaviside  $H(t - a)$  (με  $a \geq 0$ ), δηλαδή για τη συνάρτηση

$$H(t - a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases} \tag{10.2.27}$$

(σχέση (10.3.54) στην Παράγραφο A10.3.4 του Κεφαλαίου A10 του Μέρους A) τον πολύ γνωστό τύπο του μετασχηματισμού Laplace της (σχέση (10.3.56) στην ίδια Παράγραφο A10.3.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \{H(t - a)\} &= \int_0^\infty e^{-st} H(t - a) dt = \int_a^\infty e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_a^\infty = -\frac{e^{-sa}}{-s} = \frac{e^{-sa}}{s} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0, \quad a \geq 0. \end{aligned} \tag{10.2.28}$$

Αυτός είναι ο δεύτερος από τους τύπους (10.1.12).

Τώρα πια η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace (10.2.26) είναι ευκολότατη. Πράγματι από το μετασχηματισμό Laplace (10.2.28) και τον προφανή αντίστροφό του

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-as}}{s} \right\} = H(t - a), \quad s > 0, \quad a \geq 0, \quad (10.2.29)$$

με  $a = x/V$  ( $V > 0$ ) προκύπτει από τη λύση (10.2.26)

$$c(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{C(x, s)\} = c_0 H\left(t - \frac{x}{V}\right) = \begin{cases} 0, & t < x/V \iff x > Vt \\ c_0, & t > x/V \iff x < Vt \end{cases}. \quad (10.2.30)$$

### B10.2.7. Φυσικές παρατηρήσεις

Παρατηρώντας το τελικό αυτό αποτέλεσμα (10.2.30) για τη συγκέντρωση  $c(x, t)$  του ρύπου στο νερό στη ροή του στο υδατόρρευμα που εξετάζουμε, διαπιστώνουμε ότι η συγκέντρωση αυτή προκύπτει μηδενική σε μια συγκεκριμένη θέση  $x$  τις χρονικές στιγμές  $t < x/V$ . Αυτό είναι απόλυτα εύλογο και κατανοητό, εάν θυμηθούμε ότι έχουμε υποθέσει ότι ο ρύπος κινείται στο υδατόρρευμα μόνο με μεταγωγή. Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση του ρύπου οφείλεται αποκλειστικά στην κίνηση του ίδιου του νερού, που είναι το ρευστό στο υδατόρρευμα. Η κίνηση αυτή γίνεται με σταθερή ταχύτητα  $V$  ( $V > 0$ ). Έχουμε επίσης υποθέσει σαν αρχή μετρήσεως της θέσεως  $x$  το σημείο  $x = 0$  κατά μήκος του υδατορρεύματος. Δεχθήκαμε ακόμη ότι το νερό στο υδατόρρευμα ήταν πλήρως απαλλαγμένο από το ρύπο (απόλυτα καθαρό) σε κάθε θέση  $x > 0$  μέχρι τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , δηλαδή για  $t < 0$ .

Επομένως υπό όλες τις παρούσες συνθήκες ασφαλώς πρέπει το νερό να μην περιέχει καθόλου ρύπο στην ίδια θέση  $x > 0$  μέχρι τη χρονική στιγμή  $t = x/V$ , δηλαδή για  $t < x/V$ . Αυτό ακριβώς μας δηλώνει και η παραπάνω λύση (10.2.30) στο επάνω τελικό αποτέλεσμα στο δεξιό μέλος της. Τούτο συμβαίνει απλά, επειδή ο ρύπος δεν έχει προλάβει να φθάσει στη θέση  $x$  ( $x > 0$ ) μέχρι τη χρονική στιγμή  $t = x/V$ . Αντίθετα ο ρύπος θα έχει φθάσει στη θέση  $x$  ( $x > 0$ ) και θα έχει ρυπάνει το υδατόρρευμα στην ίδια θέση  $x$  από τη χρονική στιγμή  $t = x/V$  και μετά (για  $t > x/V$ ). Αυτό θα συμβεί, γιατί λόγω της μεταγωγής του ρύπου που υποθέσαμε κινείται και ο ίδιος ο ρύπος μαζί με το νερό και ακριβώς με την ταχύτητα  $V$  του νερού στο υδατόρρευμα. Παρασύρεται δηλαδή από το νερό και κινείται μαζί του. Δε διαχέεται όμως στο νερό: στην ειδική αυτή εφαρμογή έχουμε δεχθεί από την αρχή αυτής της ενότητας πλήρη έλλειψη διαχύσεως του ρύπου στο νερό.

Άρα είναι δικαιολογημένο και το δεύτερο αποτέλεσμα (το κάτω τελικό αποτέλεσμα) στο δεξιό μέλος της λύσεως (10.2.30). Τα πράγματα θα ήσαν βέβαια διαφορετικά, εάν υπήρχε και διάχυση του ρύπου στο νερό του υδατορρεύματος. Στην περίπτωση αυτή με την ταυτόχρονη ύπαρξη φαινομένων μεταγωγής και διαχύσεως κατά κάποιον τρόπο ο ρύπος θα εκινείτο εν μέρει (έστω τα μισά μόριά του) πιο γρήγορα από το νερό και όχι απλά με την ταχύτητα  $V$  του νερού. Βέβαια σε μια τέτοια κίνηση (που περιλαμβάνει και διάχυση μαζί με τη μεταγωγή) ο ρύπος θα έχει ασφαλώς μειωμένη συγκέντρωση  $c(x, t)$  σε σχέση με τη συγκέντρωση  $c(x, t) = c_0$ , η οποία προέκυψε στη λύση (10.2.30) για  $t > x/V$ .

Επίσης μειωμένη συγκέντρωση  $c(x, t)$  του ρύπου εντός του νερού στο υδατόρρευμα θα είχαμε και στην περίπτωση μερικής καταστροφής του μέσω αποδομήσεως. Η αποδόμηση αυτή εκφράσθηκε μαθηματικά στην εξίσωση (10.2.1) μέσω του δεξιού μέλους της  $-kc$ . Τη σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως  $k$  την υποθέσαμε όμως μηδενική. Άρα στην παρούσα εφαρμογή δεν υπάρχει αποδόμηση του ρύπου ( $k = 0$ ) ούτε διάχυσή του (μοριακή διάχυση) ούτε άλλος τρόπος μετακινήσεώς του μέσα στο νερό του υδατορρεύματος (διάχυση τύρβης και διατμητική διασπορά). Είναι επομένως φανερό ότι η συγκέντρωση του ρύπου  $c(x, t)$  είναι σταθερή:  $c(x, t) = c_0$  για  $x > 0$  και μέχρι τη θέση  $x$  που κατάφερε να φθάσει, επαναλαμβάνεται απλά με την κίνηση του νερού του υδατορρεύματος

(με ταχύτητα  $V$ ), δηλαδή παρασυρόμενος από το νερό. Η θέση αυτή  $x$  είναι προφανώς ίση με  $Vt$ , όπως δηλώνεται και στην τελευταία στήλη της λύσεως (10.2.30).

Με άλλα λόγια η διαχωριστική διατομή  $x$  του υδατορρέυματος μεταξύ της περιοχής ροής του που έχει ρυπανθεί και της καθαρής περιοχής ροής κινείται με ταχύτητα  $V$  (με αρχή τη θέση  $x = 0$ ). Άρα και ο παρατηρητής που κινείται με ακριβώς την ίδια ταχύτητα  $V$  και διεύθυνση (διεύθυνση της ροής προς τα θετικά  $x$ , προς την εκβολή του υδατορρέυματος) βρίσκεται συνεχώς παράπλευρα, στην ίδια θέση  $x = Vt$  με τη διαχωριστική αυτή διατομή, καθώς η ρύπανση προχωράει με τη ροή του νερού κατά μήκος του υδατορρέυματος. Σημειώνεται επίσης η συνοριακή συνθήκη (10.2.4), η οποία δηλώνει τη συνεχή διατήρηση του ρύπου σε σταθερό «επίπεδο», σε σταθερή «στάθμη», συγκέντρωση  $c_0$  στην αρχή  $x = 0$  των μετρήσεων της θέσεως  $x$  κατά μήκος του υδατορρέυματος.

Σύμφωνα με όλες αυτές τις παρατηρήσεις, το αποτέλεσμα για τη συγκέντρωση του ρύπου  $c(x, t)$  στη λύση (10.2.30), που βρέθηκε μαθηματικά, είναι απόλυτα σωστό και από φυσικής απόψεως. Πρόκειται για ένα πολύ απλό, εισαγωγικό πρόβλημα επιλύσεως διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (μόλις πρώτης τάξεως) υπό αρχική και συνοριακή συνθήκη (δύο συνθήκες) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Η επίλυση αυτή απέβλεπε κυρίως στην επίδειξη και την κατανόηση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace και όχι στη μαθηματική πολυπλοκότητα των αποτελεσμάτων. Έτσι κι αλλιώς είναι όμως πάρα πολύ καλό για τον Πολιτικό Μηχανικό να ελέγχει και από φυσικής απόψεως την ισχύ μαθηματικών αποτελεσμάτων που βρίσκει σε όσο βαθμό τούτο είναι εφικτό. Ειδικά στο παρόν πρόβλημα της εξίσωσης μεταγωγής ρύπου, ο φυσικός αυτός έλεγχος υπήρξε, όπως μόλις είδαμε, απόλυτα κατορθωτός και απλός. Μιλώντας γενικά όμως, ο έλεγχος αυτός δεν είναι τόσο εύκολος και απαιτεί συχνά σχετική εμπειρία εκ μέρους του Πολιτικού Μηχανικού.

**B10.2.8. Λύση με (αρχικό) μετασχηματισμό Laplace ως προς τη θέση  $x$**

Όπως διαπιστώσαμε ήδη, το αποτέλεσμα (10.2.30) για τη συγκέντρωση  $c(x, t)$  του ρύπου στο νερό του υδατορρέυματος είναι πλήρες και ορθό. Εντούτοις για εκπαιδευτικούς λόγους θα περιγράψουμε και τη δυνατότητα μετασχηματισμού Laplace ως προς τη θέση  $x$  (αρχικά εννοείται) αντί για το χρόνο  $t$ . Η μεταβλητή  $x$  έχει υποθεθεί και αυτή ότι κείται στο διάστημα  $[0, \infty)$  (ακριβώς όπως και ο χρόνος  $t$ ). Επίσης η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.2.2) που εξετάζεται

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad c = c(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{10.2.31}$$

συνοδεύεται φυσικά από τις δύο σχετικές συνθήκες: (α) την αρχική συνθήκη (10.2.3) για  $t = 0$  και (β) τη συνοριακή συνθήκη (10.2.4) για  $x = 0$ . Επαναλαμβάνουμε τις δύο αυτές συνθήκες

$$c(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad c(0, t) = c_0, \quad t > 0. \tag{10.2.32}$$

Πρόκειται για ένα πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών που έχουμε διαθέσιμο προς επίλυση. Σημειώνουμε επίσης ότι η διαφορική εξίσωση (10.2.31) είναι γραμμική και με σταθερό συντελεστή: την ταχύτητα  $V$ . Άρα για την εξίσωση (10.2.2) ή (10.2.31) ο μετασχηματισμός της κατά Laplace ως προς τη μεταβλητή  $x$  είναι επίσης απόλυτα εφικτός.

Διατηρούμε το συμβολισμό  $\mathcal{L}_x$  για το μετασχηματισμό Laplace ως προς τη θέση  $x$  και επίσης το σύμβολο  $p$  για τη μεταβλητή του μετασχηματισμού αυτού. Αυτό ακριβώς ήδη επιλέξαμε να κάνουμε πιο πάνω για το χωρικό πρόβλημα αρχικής τιμής, που αφορούσε στη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.10) και στη σχετική χωρική αρχική συνθήκη (10.2.11). Θεωρούμε τώρα το μετασχηματισμό Laplace (ως προς τη θέση  $x$ , όχι ως προς το χρόνο  $t$ ) της συγκεντρώσεως  $c(x, t)$  του ρύπου σύμφωνα με το βασικό τύπο (10.1.1) ορισμού του μετασχηματισμού Laplace

$$\tilde{C}(p, t) = \mathcal{L}_x\{c(x, t)\} = \int_0^\infty e^{-px} c(x, t) dx. \tag{10.2.33}$$

Ο τύπος αυτός είναι απόλυτα ανάλογος με τον τύπο (10.2.5). Τώρα όμως ο μετασχηματισμός Laplace έχει γίνει ως προς τη θέση  $x$  αντί για το χρόνο  $t$ . Έχει επίσης χρησιμοποιηθεί νέο σύμβολο, το  $\tilde{C}$ , αντί του  $C$  για τον εντελώς διαφορετικό μετασχηματισμό Laplace που θα προκύψει. Τώρα σε αντιστοιχία με τον τύπο (10.2.6) έχουμε επίσης

$$\mathcal{L}_x \left\{ \frac{\partial c}{\partial x} \right\} = \int_0^\infty e^{-px} \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} dx = p\tilde{C}(p,t) - c(0,t) = p\tilde{C}(p,t) - c_0 \quad (10.2.34)$$

λόγω της συνοριακής (της δεύτερης) συνθήκης (10.2.32):  $c(0,t) = c_0$ . Έτσι λάβαμε υπόψη και τη συνθήκη αυτή. Επίσης σε αντιστοιχία με τον τύπο (10.2.7) τώρα έχουμε

$$\mathcal{L}_x \left\{ \frac{\partial c}{\partial t} \right\} = \int_0^\infty e^{-px} \frac{\partial c(x,t)}{\partial t} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty e^{-px} c(x,t) dx = \frac{\partial \tilde{C}(p,t)}{\partial t}. \quad (10.2.35)$$

Χρησιμοποιούμε και τους δύο πιο πάνω τύπους: (10.2.34) και (10.2.35) κατά το μετασχηματισμό Laplace ως προς  $x$  της εξίσωσης της μεταγωγής (10.2.31), που αποτελεί επανάληψη της (10.2.2). Σχηματίζουμε έτσι την εξής συνήθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{\partial \tilde{C}(p,t)}{\partial t} + V[p\tilde{C}(p,t) - c_0] = 0, \quad t > 0. \quad (10.2.36)$$

Στην εξίσωση αυτή ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$ . Παρουσιάζεται επίσης (σαν παράμετρος) η μεταβλητή  $p$  του μετασχηματισμού Laplace  $\mathcal{L}_x$  ως προς  $x$ . Η εξίσωση αυτή (10.2.36) με τη χρήση του συμβολισμού

$$\tilde{C}^*(t) := \tilde{C}(p,t) \quad (10.2.37)$$

γράφεται και στην ισοδύναμη και ίσως λίγο πιο κατανοητή για συνήθη διαφορική εξίσωση μορφή

$$\frac{d\tilde{C}^*(t)}{dt} + pV\tilde{C}^*(t) = c_0V, \quad t > 0. \quad (10.2.38)$$

Πρόκειται ασφαλώς για μια συνήθη γραμμική διαφορική εξίσωση, αλλά μη ομογενή σε αντίθεση με την αντίστοιχη εξίσωση (10.2.10) στο μετασχηματισμό Laplace ως προς το χρόνο  $t$ , η οποία ήταν ομογενής. Τώρα όμως είναι ομογενής η σχετική αρχική συνθήκη (πραγματικά αρχική αυτήν τη φορά, ως προς το χρόνο  $t$ )

$$\mathcal{L}_x\{c(x,0)\} = \tilde{C}(p,0) \equiv \tilde{C}^*(0) = 0. \quad (10.2.39)$$

Η αρχική αυτή συνθήκη προήλθε από την πρώτη από τις συνθήκες (10.2.32): την αρχική συνθήκη  $c(x,0) = 0$ , που μπορεί βέβαια και αυτή να μετασχηματισθεί κατά Laplace ως προς τη θέση  $x$ .

Η γενική λύση της ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στη μη ομογενή συνήθη διαφορική εξίσωση (10.2.38) είναι η συνάρτηση  $Ae^{-pVt}$  με το  $A$  αυθαίρετη σταθερά. Αυτό διαπιστώνεται πάρα πολύ εύκολα, π.χ. χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης, που οδηγεί τελικά στη χαρακτηριστική εξίσωση  $p_1(\mu) = \mu + pV = 0$ , οπότε  $\mu = \mu_1 = -pV$ . Στη συνέχεια μια μερική (ειδική) λύση της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.2.38) εύλογα επιλέγεται σαν σταθερά. Προκύπτει άμεσα η σταθερή μερική λύση  $c_0V/(pV) = c_0/p$ . Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.2.38) είναι η εξής:

$$\tilde{C}^*(t) \equiv \tilde{C}(p,t) = A(p)e^{-pVt} + \frac{c_0}{p}. \quad (10.2.40)$$

Στη συνέχεια με τη χρήση της αρχικής συνθήκης (10.2.39) (για  $t = 0$ ) διαπιστώνεται άμεσα από τη γενική αυτή λύση (10.2.40) ότι  $A(p) + c_0/p = 0$  (για  $t = 0$ ). Άρα  $A(p) = -c_0/p$ , οπότε η λύση του προβλήματος αρχικής τιμής (10.2.38) και (10.2.39) είναι η εξής:

$$\tilde{C}^*(t) \equiv \tilde{C}(p,t) = \frac{c_0}{p} (1 - e^{-pVt}). \quad (10.2.41)$$

Απομένει η αντιστροφή,  $\mathcal{L}_x^{-1}$ , του μετασχηματισμού αυτού Laplace για την επάνοδο στη θέση  $x$  αντί για τη σχετική μεταβλητή  $p$  του μετασχηματισμού Laplace που χρησιμοποιήθηκε. Θα γίνει χρήση του τύπου (10.2.29), ο οποίος ήδη αποδείχθηκε και είναι έτσι κι αλλιώς πολύ γνωστός. Το γράφουμε στην ακόλουθη ισοδύναμη μορφή του (με  $p$  αντί  $s$  και με  $x$  αντί  $t$ ):

$$\mathcal{L}_x^{-1} \left\{ \frac{e^{-ap}}{p} \right\} = H(x - a), \quad p > 0, \quad a \geq 0. \tag{10.2.42}$$

Τώρα για  $a = Vt$  ( $V > 0$ ) σ' αυτόν τον τύπο (προηγουμένως ήταν  $a = x/V$ ) προκύπτει εύκολα από τη λύση (10.2.41) ότι

$$c(x, t) = \mathcal{L}_x^{-1} \{ \tilde{C}(p, t) \} = c_0 [1 - H(x - Vt)] = \begin{cases} c_0, & x < Vt \iff t > x/V \\ 0, & x > Vt \iff t < x/V \end{cases}. \tag{10.2.43}$$

Πολύ εύκολα διαπιστώνεται ότι αυτό το αποτέλεσμα για τη συγκέντρωση  $c(x, t)$  του ρύπου στο υδατόρρευμα συμπίπτει απόλυτα (και αναμενόταν ασφαλώς αυτό!) με το αποτέλεσμα (10.2.30). Το αποτέλεσμα (10.2.30) το είχαμε βρεί για το ίδιο πρόβλημα μεταγωγής ρύπου σε υδατόρρευμα έχοντας χρησιμοποιήσει μετασχηματισμό Laplace ως προς το χρόνο  $t$  αντί ως προς τη θέση  $x$  εν προκειμένω. Ας σημειώσουμε επίσης ότι αντί για το 1 θα μπορούσαμε προφανώς να είχαμε θέσει  $\mathcal{L}_x^{-1} \{ 1/p \} = H(x)$  στην παραπάνω λύση (10.2.43) χωρίς βέβαια διαφορά στο αποτέλεσμα για  $x > 0$ .

Οι μαθηματικές λύσεις (10.2.30) και (10.2.43) συμπίπτουν επομένως, παρόλο που έχουν προκύψει λίγο διαφορετικές στη γραφή τους με τη χρήση της βηματικής συναρτήσεως  $H$  του Heaviside, δηλαδή  $c_0 H(t - x/V)$  στη λύση (10.2.30) έναντι  $c_0 [1 - H(x - Vt)]$  στη λύση (10.2.43).

### B10.3. ΣΧΟΛΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

Μετά το πιο πάνω αρχικό παράδειγμα χρήσεως του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους μπορούμε να αναφέρουμε τα εξής σχετικά σχόλια:

- Η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace σε μια γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ομογενή ή μη ομογενή, αλλά με σταθερούς συντελεστές και με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, ως προς μία από τις μεταβλητές αυτές επιτρέπει τη μετατροπή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση. Η ανεξάρτητη μεταβλητή (έστω η  $t$  ή η  $x$ ) ως προς την οποία γίνεται ο μετασχηματισμός Laplace πρέπει να είναι στο διάστημα  $[0, \infty)$  (π.χ.  $t \geq 0$  ή  $x \geq 0$ ). Αυτό είναι αναγκαίο λόγω του ορισμού (10.1.1) του μετασχηματισμού Laplace στο διάστημα αυτό:

$$U(s) = \mathcal{L} \{ u(t) \} = \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt. \tag{10.3.1}$$

Μεμονωμένα σημεία  $t = b_i$  του διαστήματος  $[0, \infty)$  γενικά δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης στο μετασχηματισμό Laplace. Εξαιρούνται όμως και επηρεάζουν το αποτέλεσμα τα σημεία  $t = b_i$  όπου η μετασχηματιζόμενη συνάρτηση παρουσιάζει ιδιομορφίες με απειρισμούς τύπου συναρτήσεως δέλτα του Dirac:  $\delta(t - b_i)$  ή και ισχυρότερες, όπως με την παράγωγο  $\delta'(t - b_i)$  της συναρτήσεως δέλτα του Dirac. Τέτοιες ιδιομορφίες παρουσιάζονται μερικές φορές στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Κλασικά σχετικά παραδείγματα αποτελούν τα συγκεντρωμένα φορτία  $P_i$  (που αντιστοιχούν σε συναρτήσεις  $\delta(x - b_i)$ ) και οι ροπές  $M_i$  (που αντιστοιχούν σε συναρτήσεις  $\delta'(x - b_i)$ ) σε «κατανεμημένη» φόρτιση συνήθων δοκών. Στις ειδικές αυτές περιπτώσεις επηρεάζεται η ολοκλήρωση του τύπου (10.3.1) και κατ' επέκταση ο μετασχηματισμός Laplace  $U(s) = \mathcal{L} \{ u(t) \}$  που ορίζεται από τον τύπο αυτό.

- Πέρα από την ίδια τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους κατά την εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace πρέπει να μετασχηματισθούν και όσες συνθήκες τη συνοδεύουν και περιλαμβάνουν την ίδια ακριβώς μεταβλητή. Τέτοιες συνθήκες είναι, π.χ., οι συνοριακές συνθήκες για μετασχηματισμό Laplace ως προς το χρόνο  $t$ . Είναι επίσης οι αρχικές συνθήκες για μετασχηματισμό Laplace ως προς τη θέση  $x$ . Οι υπόλοιπες συνθήκες, δηλαδή

αυτές που δεν περιλαμβάνουν ρητά τη μεταβλητή ως προς την οποία γίνεται ο μετασχηματισμός Laplace, δε μπορούν ασφαλώς να μετασχηματισθούν κατά Laplace. Λαμβάνονται όμως και αυτές πλήρως υπόψη συνήθως κατά τη διάρκεια του προσδιορισμού των μετασχηματισμών Laplace των αναγκαίων παραγώγων της άγνωστης συναρτήσεως ως προς την ίδια μεταβλητή ως προς την οποία έγινε ο μετασχηματισμός Laplace.

- Σε περίπτωση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών (π.χ. των  $x$  και  $t$ ), η γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση που προκύπτει μπορεί να επιλυθεί με μια από τις σχετικές μεθόδους. Τέτοια μέθοδος είναι, π.χ., η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως για μια ομογενή συνήθη διαφορική εξίσωση. Για μη ομογενή συνήθη διαφορική εξίσωση η μέθοδος της χαρακτηριστικής εξισώσεως πρέπει να συνδυασθεί κατά προτίμηση με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών (εάν αυτή είναι εφαρμόσιμη) ή της μεταβολής των παραμέτρων. Η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων είναι γενικότερη, αλλ' έχει και υψηλότερο υπολογιστικό κόστος.
- Στην ίδια περίπτωση (αυτή των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών) μπορεί να γίνει και δεύτερη εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace. Προφανώς η δεύτερη αυτή εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace πρέπει να γίνει ως προς την άλλη μεταβλητή τώρα, όχι αυτή που χρησιμοποιήθηκε αρχικά. Με τον τρόπο αυτό η συνήθης διαφορική εξίσωση του πρώτου μετασχηματισμού Laplace ανάγεται σε απλή γραμμική αλγεβρική εξίσωση με ένα άγνωστο που επιλύεται άμεσα. Βέβαια αυτό οφείλεται στην εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace στη συνήθη διαφορική εξίσωση που προέκυψε μετά την πρώτη εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυσή της. (Εναλλακτική δυνατότητα αποτελεί ασφαλώς η χρήση της μεθόδου της χαρακτηριστικής εξισώσεως και ανάλογων μεθόδων, όπως ήδη αναφέρθηκε.) Σε μια τέτοια περίπτωση, αυτή της διπλής εφαρμογής του μετασχηματισμού Laplace, είναι αναγκαίο, υποχρεωτικό να χρησιμοποιείται διαφορετικό σύμβολο για τη μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace. Δεν επιτρέπεται με κανέναν τρόπο να γίνει χρήση του ίδιου συμβόλου που χρησιμοποιήθηκε αρχικά: στον πρώτο μετασχηματισμό Laplace. Για παράδειγμα, αν στον πρώτο μετασχηματισμό Laplace είχε χρησιμοποιηθεί το συνηθισμένο σύμβολο  $s$ , στο δεύτερο μετασχηματισμό Laplace πρέπει να χρησιμοποιηθεί το σύμβολο  $p$  ή το σύμβολο  $\sigma$  ή κάποιο άλλο (και οπωσδήποτε διαφορετικό από το σύμβολο  $s$ ) σύμβολο.
- Μετά την εύρεση του μετασχηματισμού Laplace της άγνωστης συναρτήσεως της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους απαιτείται ασφαλώς και η αντιστροφή του μετασχηματισμού αυτού. Έτσι θα υπάρξει επιστροφή στην αρχική μεταβλητή, π.χ. την  $t$  ή την  $x$ . Ασφαλώς μετά από μια διπλή χρήση του μετασχηματισμού Laplace, π.χ. πρώτα ως προς  $t$  και μετά ως προς  $x$ , απαιτείται και διπλή αντιστροφή, π.χ. πρώτα για να επανέλθουμε στην αρχική μεταβλητή  $x$  και μετά, ανάλογα, για τη μεταβλητή  $t$  στην παραπάνω περίπτωση. Η αντιστροφή αυτή πετυχαίνεται συνήθως με τη χρήση γνωστών ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Laplace και γνωστών μεθόδων (όπως είναι η ανάλυση σε απλά κλάσματα) σε συνδυασμό με γνωστούς τύπους για τους μετασχηματισμούς Laplace συναρτήσεων που παρουσιάζονται συχνά και τους αντιστρόφους τους. Τέτοια ζεύγη μετασχηματισμών Laplace και αντιστρόφων μετασχηματισμών Laplace βρίσκονται διαθέσιμα υπό τη μορφή συνοπτικών ή εκτενών πινάκων, όπως είναι ο Πίνακας Α10.2 στο τέλος του Κεφαλαίου Α10 του Μέρους Α. Ελάχιστοι από τους τύπους αυτούς αναφέρθηκαν και εδώ στην εισαγωγική Ενότητα Β10.1 (τύποι (10.1.9) έως και (10.1.12)). Σε δύσκολες περιπτώσεις απαιτούνται ειδικές τεχνικές για την αντιστροφή γνωστού μετασχηματισμού Laplace  $U(s)$ . Η σημαντικότερη από αυτές βασίζεται στον υπολογισμό του ολοκληρώματος για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στο μιγαδικό επίπεδο. Ένας τέτοιος υπολογισμός πραγματοποιείται με τη βοήθεια της μεθόδου των ολοκληρωτικών υπολοίπων στη Μιγαδική Ανάλυση: Μέρος Δ, Κεφάλαιο Δ6, Ενότητα Δ6.5. Δυστυχώς όμως η μέθοδος αυτή δε μπορεί να χαρακτηριστεί σαν ιδιαίτερα απλή μέθοδος. Αυτό, δηλαδή η αντιστροφή ενός διαθέσιμου μετασχηματισμού Laplace σε



μάλλον δύσκολες περιπτώσεις, αποτελεί σημαντικό μειονέκτημα της χρήσεως της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

- Γενικεύουμε τώρα στην περίπτωση παρουσίας πάνω από δύο ανεξάρτητων μεταβλητών σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, π.χ. των  $t$ ,  $x$  και  $y$ . Στην περίπτωση αυτή κάθε μία εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace (π.χ. ως προς το χρόνο  $t$  πρώτα) απαλλάσσει τη διαφορική αυτή εξίσωση με μερικές παραγώγους από τη σχετική ανεξάρτητη μεταβλητή (π.χ. το χρόνο  $t$ ). Το αποτέλεσμα είναι μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, αλλά με μια λιγότερη ανεξάρτητη μεταβλητή, π.χ. δύο μόνο μεταβλητές  $x$  και  $y$  στο πιο πάνω παράδειγμα. Δεν πρέπει να λησμονούνται φυσικά και οι αρχικές καθώς και οι συνοριακές συνθήκες! Στη συνέχεια, εάν τούτο είναι εφικτό, μπορεί να γίνει και δεύτερος μετασχηματισμός Laplace (π.χ. ως προς  $x$ ), για να εξαλειφθεί και αυτή η ανεξάρτητη μεταβλητή από τη νέα διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. (Στο πιο πάνω παράδειγμα απομένει έτσι μόνο η μεταβλητή  $y$ .) Αυτά ισχύουν βέβαια αποκλειστικά στην περίπτωση που οι ανεξάρτητες μεταβλητές βρίσκονται στο διάστημα  $[0, \infty)$  μόνο, ώστε να είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace. Συνήθως αυτό πράγματι ισχύει ως προς το χρόνο  $t$  απλά με επιλογή της αρχικής χρονικής στιγμής σαν  $t = 0$ . Αντίθετα, διάστημα μεταβλητής  $[0, \infty)$  συνήθως δεν ισχύει για τις χωρικές μεταβλητές  $x$ ,  $y$  και  $z$  (τις Καρτεσιανές συντεταγμένες). Εξαίρεση αποτελούν οι ημιάπειρες περιοχές (τουλάχιστον προσεγγιστικά), όπως ήταν το υδατόρρευμα στην προηγηθείσα εφαρμογή της εξισώσεως της μεταγωγής στην Ενότητα B10.2 με  $x \geq 0$ . Μπορούμε επίσης προσεγγιστικά να θεωρήσουμε ημιάπειρη ( $x \geq 0$ ) μια επιμήκη ράβδο (σε αξονική ή σε στρεπτική δυναμική καταπόνηση) ή δοκό (σε καμπτική ή/και σύνθετη δυναμική καταπόνηση, π.χ. αξονική και καμπτική δυναμική καταπόνηση ταυτόχρονα). Το ίδιο ισχύει και για το έδαφος στο παράδειγμα της επόμενης Ενότητας B10.4. Και το έδαφος θα το θεωρήσουμε ημιάπειρο ( $z \geq 0$ ) με  $z = 0$  την επιφάνεια της γης.
- Αρκετές φορές μια χωρική μεταβλητή  $x$  θεωρείται στο άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ , όπως σε ένα υδατόρρευμα με  $-\infty < x < \infty$ . Στην περίπτωση αυτή αντί για το μετασχηματισμό Laplace κατάλληλος είναι ο μετασχηματισμός Fourier. Είναι και αυτός ολοκληρωτικός μετασχηματισμός, αλλά με ολοκλήρωση στο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ . Σχετικές εφαρμογές (με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier) θα παρουσιασθούν στο επόμενο Κεφάλαιο B11. Παραδείγματος χάρη, με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier μπορούμε να μελετήσουμε το πρόβλημα του υπολογισμού της συγκεντρώσεως ρύπου  $c(x, t)$  σε υδατόρρευμα άπειρου μήκους ( $-\infty < x < \infty$ ) με αρχική χρονική στιγμή την  $t = 0$  (δηλαδή για  $t > 0$ ). Συχνά μπορούμε να μετατρέψουμε τη σχετική ομογενή ή μη ομογενή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (που υποτίθεται γραμμική και με σταθερούς συντελεστές) σε συνήθη διαφορική εξίσωση. Αυτό το κατορθώνουμε είτε (α) με την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier ως προς τη θέση  $x$  (με  $-\infty < x < \infty$ ) είτε (β) με την εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο  $t$  (με  $0 < t < \infty$ ). Εάν θέλουμε τελικά να καταλήξουμε σε μια γραμμική αλγεβρική εξίσωση με ένα μόνο άγνωστο, τότε χρησιμοποιούμε συνδυασμό των δύο αυτών μετασχηματισμών. Κάνουμε δηλαδή χρήση και του μετασχηματισμού Fourier και του μετασχηματισμού Laplace ή με αντίστροφη σειρά στην παρούσα ειδική περίπτωση και σε ανάλογες περιπτώσεις.
- Ας σημειωθεί επίσης ότι στην εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στην εξίσωση της μεταγωγής ρύπου της προηγούμενης Ενότητας B10.2 παρουσιάσθηκε και η διπλή εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace (και ως προς το χρόνο  $t$  και ως προς τη θέση  $x$ ). Η διπλή αυτή εφαρμογή υπήρξε δυνατή σύμφωνα με την υπόθεση που έγινε ότι  $0 < t < \infty$  και επίσης ότι  $0 < x < \infty$ . Εάν όμως το υδατόρρευμα είχε υποθεθεί άπειρο και προς τις δύο διευθύνσεις ( $-\infty < x < \infty$ ), τότε θα έπρεπε να είχε χρησιμοποιηθεί ο μετασχηματισμός Fourier αντί για το μετασχηματισμό Laplace ως προς  $x$ . Για να είμαστε κάπως σαφέστεροι, ας αναφέρουμε ότι

μπορεί πραγματικά το υδατόρρευμα να αφορά (προσεγγιστικά βέβαια) στο άπειρο χωρικό διάστημα  $-\infty < x < \infty$ , αλλ' εμείς απλά να ενδιαφερόμαστε για το τί γίνεται ως προς τη συγκέντρωση  $c(x, t)$  του ρύπου μόνο στο ημιάπειρο χωρικό διάστημα  $0 < x < \infty$ . Αυτό μπορεί να ισχύει είτε γιατί δεν έχουμε στοιχεία μετρήσεων για το διάστημα  $-\infty < x < 0$  είτε, πολύ απλούστερα, γιατί δε μας ενδιαφέρει το ημιάπειρο αυτό διάστημα  $-\infty < x < 0$ . Τούτο μπορεί να συμβαίνει κυρίως επειδή η πηγή του ρύπου (π.χ. μια βιομηχανία ή ένα εργοστάσιο) που διαθέτει, καλώς ή κακώς (μάλλον το δεύτερο), τα απόβλητά του στο υδατόρρευμα βρίσκεται δίπλα στη θέση  $x = 0$ . Επομένως η κύρια περιοχή συγκεντρώσεως του ρύπου (έστω και αν υπάρχει κάποια μικρή διάχυσή του) θα είναι το διάστημα  $x > 0$ , δηλαδή κατά την κατεύθυνση της ροής του υδατορρεύματος. Οι διαθέσιμες μετρήσεις για τις συνοριακές τιμές θα αφορούν στη θέση  $x = 0$ , δηλαδή στη θέση «διαθέσεως», στην πηγή του ρύπου.

## B10.4. ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΕΔΑΦΟΣ

### B10.4.1. Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

Στο προπροηγούμενο Εδάφιο Β10.2 μελετήσαμε την εξίσωση (10.2.2) της μεταγωγής ρύπου σε υδατόρρευμα στην Περιβαλλοντική Υδραυλική. Υποθέσαμε μάλιστα αποκλειστικά μεταγωγή του ρύπου με τη ροή χωρίς διάχυσή του (μοριακή διάχυση) ούτε και αποδόμησή του. Η σχετική εξίσωση έχει τη μορφή (10.2.2), την επαναλαμβάνουμε

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \quad c = c(x, t), \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (10.4.1)$$

Πρόκειται δηλαδή για μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές (τη μονάδα και την ταχύτητα ροής  $V$  του νερού). Είναι επίσης πρώτης τάξεως δηλαδή με την παρουσία μέχρι και πρώτων μερικών παραγώγων και ως προς τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τις  $t$  και  $x$ . Ήταν ένα πάρα πολύ απλό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με λύση τη (10.2.30) ή τη (10.2.43). Η λύση αυτή προσδιορίστηκε με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace στην Ενότητα Β10.2. Η ίδια λύση (10.2.30) ή (10.2.43) εκφράστηκε καταρχήν με τη χρήση της μοναδιαίας βηματικής συναρτήσεως  $H$  του Heaviside. Στη συνέχεια εκφράστηκε και με διάκριση διαστημάτων (ως προς τη θέση  $x$  ή το χρόνο  $t$ : (α)  $x < Vt$  (προς το σημείο διαθέσεως του ρύπου  $x = 0$ ) ή, ισοδύναμα,  $t > x/V$  (για μεγάλες χρονικές στιγμές  $t$ ) και (β)  $x > Vt$  (προς την εκβολή του υδατορρεύματος) ή, ισοδύναμα,  $t < x/V$  (για μικρές χρονικές στιγμές  $t$ ).

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε σε ένα πρόβλημα Μεταδόσεως Θερμότητας (ή Διαδόσεως Θερμότητας). Το πρόβλημα αυτό θα αφορά βέβαια σε διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, γραμμική, με σταθερούς συντελεστές και ομογενή, όπως ακριβώς ήταν και η (10.4.1), αλλά τώρα δευτέρας τάξεως. Δηλαδή θα υπάρχει και δευτέρη μερική παράγωγος. Επίσης η λύση του προβλήματος που θα εξετάσουμε δε θα είναι ούτε απλή (θα περιλαμβάνει τη συνάρτηση σφάλματος  $\text{erf}$  ή/και τη συμπληρωματική της  $\text{erfc}$ ) ούτε προφανής.

Η εξίσωση που διέπει το φαινόμενο της μεταδόσεως θερμότητας (ή διαδόσεως θερμότητας ή ροής θερμότητας ή αγωγής θερμότητας ή ακόμη και διαχύσεως θερμότητας) στον ομώνυμο επιστημονικό κλάδο (Μετάδοση Θερμότητας) είναι η γενική εξίσωση της διαχύσεως. Η εξίσωση της διαχύσεως είναι ήδη γνωστή από την Παράγραφο Β2.1.4. Στις τρεις διαστάσεις ( $x, y, z$ ) και με  $t$  το χρόνο η εξίσωση αυτή έχει τη μορφή

$$\nabla^2 u(x, y, z, t) = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} \implies \nabla^2 u(x, y, z, t) = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t}. \quad (10.4.2)$$

Στην εξίσωση αυτή (10.4.2) η άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x, y, z, t)$  παριστάνει τη θερμοκρασία και  $\kappa$  είναι ένας συντελεστής μεταδόσεως της θερμότητας ( $\kappa > 0$ ). Χάρη διευκολύνσεως, δηλαδή για να

αποφευχθούν οι σχετικές τετραγωνικές ρίζες κατά την επίλυση, το συντελεστή αυτό  $\kappa$  το θέσαμε ίσο με  $a^2$ , δηλαδή  $\kappa = a^2$  (με  $a > 0$ ).

Εδώ θα εξετάσουμε το πρόβλημα της μεταδόσεως θερμότητας εντός του εδάφους για χρονικές στιγμές  $t > 0$ . Για απλότητα υποθέτουμε το έδαφος συνεχές και ομογενές μέσον με μετάδοση της θερμότητας μόνο κατά την κατακόρυφη διεύθυνση  $z$  με  $z = 0$  στην επιφάνεια του εδάφους και  $z > 0$  εντός του εδάφους. Δηλαδή το σύμβολο  $z$  δηλώνει το βάθος μέσα στο έδαφος ( $0 \leq z < \infty$ ) με θετικό πρόσημο προς το εσωτερικό της γής. Στην περίπτωση αυτή η γενική εξίσωση της διαχύσεως (10.4.2) ισχύει και στο φαινόμενο της μεταδόσεως θερμότητας. Μάλιστα η μελέτη του φαινομένου αυτού (της μεταδόσεως θερμότητας) προηγήθηκε χρονικά εκείνης του φαινομένου της διαχύσεως. Πιο συγκεκριμένα η εξίσωση της μεταδόσεως θερμότητας υιοθετήθηκε αργότερα στο νόμο του Fick, 1855, για τη διάχυση.

Στο παρόν μονοδιάστατο πρόβλημα μεταδόσεως θερμότητας η εξίσωση (10.4.2) απλοποιείται ουσιαστικά, γιατί παίρνει προφανώς μονοδιάστατη (εδώ ως προς  $z$ ) μορφή. Αυτό επιτυγχάνεται απλά με την εξάλειψη των μερικών παραγώγων ως προς  $x$  και  $y$ . Μόνη χωρική μεταβλητή είναι πια το βάθος  $z$ . Η μονοδιάστατη αυτή εξίσωση έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} \iff \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2}, \quad z > 0, \quad t > 0, \quad (10.4.3)$$

που γράφεται και κάπως απλούστερα σαν

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad z > 0, \quad t > 0. \quad (10.4.4)$$

Πρόκειται για μια ομογενή, γραμμική και με σταθερούς συντελεστές διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως. Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η θερμοκρασία  $u = u(z, t)$  μέσα στο έδαφος. Ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η  $t$  (χρονική μεταβλητή, χρόνος) και η  $z$  (χωρική μεταβλητή, βάθος μέσα στο έδαφος). Επίσης πρόκειται για διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους παραβολικού τύπου, όπως είναι ήδη γνωστό από την Παράγραφο Β1.3.2γ και έτσι κι αλλιώς μπορεί ευκολότατα να ελεγχθεί.

Σαν αρχική συνθήκη θεωρούμε σταθερή θερμοκρασία  $T_0$  μέσα στο έδαφος για  $t = 0$ , δηλαδή

$$u(z, 0) = T_0, \quad z > 0. \quad (10.4.5)$$

Ακριβώς τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η θερμοκρασία στην επιφάνεια του εδάφους  $z = 0$  υποτίθεται ότι μεταβάλλεται απότομα από  $T_0$  σε  $T_\epsilon$  και παραμένει σταθερή για  $t > 0$ . Διαθέτουμε έτσι και τη συνοριακή συνθήκη στην επιφάνεια  $z = 0$  του εδάφους

$$u(0, t) = T_\epsilon, \quad t > 0. \quad (10.4.6)$$

Στην εξίσωση της μεταγωγής ρύπου (10.2.2) (εδώ (10.4.1)) στην Περιβαλλοντική Υδραυλική στην προπροηγούμενη Ενότητα Β10.2 είχαμε διαθέσιμες: (α) μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, (β) μια αρχική συνθήκη και (γ) μια συνοριακή συνθήκη. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και εδώ, όπου έχουμε διαθέσιμες: (α) μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους: τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (ή, πιο συγκεκριμένα, στην περίπτωσή μας της μεταδόσεως θερμότητας) (10.4.4), (β) μια αρχική συνθήκη: τη (10.4.5), και (γ) μια συνοριακή συνθήκη: τη (10.4.6).

Δεν είναι όμως αρκετό αυτό, επειδή στη μεν μεταγωγή ρύπου είχαμε πρώτη μερική παράγωγο ως προς τη θέση  $x$  στην εξίσωση (10.4.1), ενώ εδώ έχουμε δεύτερη μερική παράγωγο ως προς το βάθος  $z$ , στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (10.4.4). Άρα κάτι δεν είναι απόλυτα σωστό, επειδή η δεύτερη χωρική παράγωγος (ως προς  $z$  τώρα) απαιτεί δύο χωρικές (πολύ συχνά συνοριακές) συνθήκες, όχι μόνο μία: τη (10.4.6). Η δεύτερη, η υποκρυπτόμενη χωρική συνοριακή συνθήκη αφορά σε ένα φυσικά προφανές γεγονός. Πράγματι η μεταβολή της θερμοκρασίας  $u$

από  $T_0$  σε  $T_\varepsilon$  στην επιφάνεια  $z = 0$  του εδάφους τη χρονική στιγμή  $t = 0$  με κανέναν τρόπο δε μπορεί να επιτρέψει τον απειρισμό της θερμοκρασίας  $u$  σε οποιοδήποτε βάθος  $z > 0$  (ιδίως μάλιστα για  $z \rightarrow \infty$ ). Και εκεί (για  $z \rightarrow \infty$ ) η θερμοκρασία έχει υποτεθεί αρχικά ίση με  $T_0$ . Άρα πρέπει να μείνει φραγμένη.

Υπάρχει επομένως και μια δεύτερη συνοριακή συνθήκη, αυτή για  $z \rightarrow \infty$  (με πρώτη τη (10.4.6) για  $z = 0$ ), της μορφής

$$|u(z, t)| < M, \quad z \rightarrow \infty, \quad t > 0, \quad (10.4.7)$$

για φραγμένη θερμοκρασία  $u$  για  $z \rightarrow \infty$ . Το φράγμα  $M$  είναι μια κατάλληλη θετική σταθερά. Είναι βέβαια προφανές ότι πρέπει τελικά να προκύψει στη λύση που θα βρεθεί

$$u(\infty, t) := \lim_{z \rightarrow \infty} u(z, t) = T_0, \quad t > 0. \quad (10.4.8)$$

Είναι ανάγκη να ισχύει η συνθήκη αυτή, επειδή η επιρροή της νέας επιφανειακής θερμοκρασίας  $T_\varepsilon$  (για  $t > 0$ ) δε μπορεί να φθάσει σε άπειρο βάθος ( $z \rightarrow \infty$ ) μέσα σε πεπερασμένο χρόνο  $t$ .

### B10.4.2. Αναγωγή σε συνήθη διαφορική εξίσωση με μετασχηματισμό Laplace

Αφού έγιναν ήδη οι υποθέσεις  $t > 0$  και  $z > 0$ , είναι λογικό να επιχειρήσουμε τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace είτε ως προς το χρόνο  $t$  είτε ως προς το βάθος  $z$ . Θεωρητικά, από μαθηματικής απόψεως θα ήταν ίσως καλύτερα να μετασχηματίσουμε κατά Laplace τη διαφορική εξίσωση (10.4.4) ως προς το βάθος  $z$  (εντός του εδάφους εννοείται), γιατί ως προς αυτό παρουσιάζεται η δεύτερη μερική παράγωγος. Άρα η συνήθης διαφορική εξίσωση που θα προκύψει θα είναι μόλις πρώτης τάξεως. Εντούτοις, κατά τη συνήθη στο μετασχηματισμό Laplace παράδοση και πρακτική, θα επιλέξουμε και πάλι να προηγηθεί ο χρόνος  $t$ , μετασχηματίζοντας κατά Laplace ως προς  $t$ . Στην απόφασή μας αυτή συνέβαλε κατά ουσιαστικό τρόπο και η μη διαθεσιμότητα δύο συνοριακών (χωρικά «αρχικών») συνθηκών στην επιφάνεια του εδάφους (για  $z = 0$ ). Τέτοιες χωρικές «αρχικές» συνθήκες θα ήταν ιδιαίτερα ευπρόσδεκτες κατά τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace της δεύτερης ως προς  $z$  μερικής παραγώγου  $\partial^2 u / \partial z^2$  στη διαφορική μας εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.4.4). Η μόνη άμεση χωρική συνοριακή συνθήκη (10.4.6) για  $z = 0$  δεν αρκεί, ενώ η δεύτερη χωρική συνθήκη (10.4.7) ή, έστω, και (10.4.8), αναφέρεται για  $z \rightarrow \infty$ . Επομένως καλύτερα είναι να γίνει μετασχηματισμός Laplace ως προς το χρόνο  $t$ . Με αυτόν τον τρόπο βέβαια θα οδηγηθούμε σε συνήθη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως αντί πρώτης, εάν είχαμε εργασθεί με μετασχηματισμό Laplace ως προς το βάθος  $z$ .

Ορίζουμε τώρα το μετασχηματισμό Laplace  $U(z, s)$  της άγνωστης θερμοκρασίας  $u(z, t)$  ως προς το χρόνο  $t$

$$\mathcal{L}\{u(z, t)\} = U(z, s). \quad (10.4.9)$$

Επομένως ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Laplace της πρώτης χρονικής (ως προς  $t$ ) μερικής παραγώγου  $\partial u(z, t) / \partial t$  θα είναι με βάση το γενικό τύπο (10.1.3)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u(z, t)}{\partial t}\right\} = sU(z, s) - u(z, 0) = sU(z, s) - T_0. \quad (10.4.10)$$

Στη σχέση αυτή πήραμε υπόψη και την αρχική συνθήκη (10.4.5) (αρχική θερμοκρασία στο έδαφος  $u(z, 0) = T_0$ ). Δεν έχουμε επομένως να ασχοληθούμε και πάλι με τη συνθήκη αυτή. Μόνο οι συνοριακές συνθήκες (10.4.6) και (10.4.7) απομένουν να ληφθούν υπόψη.

Στη συνέχεια ο μετασχηματισμός Laplace της δεύτερης χωρικής (ως προς  $z$ ) μερικής παραγώγου  $\partial^2 u(z, t) / \partial z^2$  βάσει του επίσης γενικού τύπου (10.1.8) (με  $k = 2$  σ' αυτόν) θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{L}\{u(z, t)\} = \frac{\partial^2 U(z, s)}{\partial z^2} \equiv \frac{d^2 \hat{U}(z)}{dz^2}. \quad (10.4.11)$$

Στον τύπο αυτό χρησιμοποιήσαμε και το συμβολισμό, απλά συμβολισμό

$$\hat{U}(z) := U(z, s), \quad (10.4.12)$$

ώστε να τονίσουμε έτσι το γεγονός ότι ο χρόνος  $t$  έχει εξαλειφθεί μετά το σχετικό μετασχηματισμό Laplace στη συνάρτηση  $U(z, s)$  που προέκυψε. Φυσικά η συνάρτηση αυτή  $U(z, s)$  εξαρτάται μόνο από το βάθος  $z$  και τη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace. Η μεταβλητή όμως αυτή  $s$  θα πρέπει να θεωρηθεί απλά σαν παράμετρος κατά τη διάρκεια της επίλυσης της συνήθους διαφορικής εξίσωσης που θα προκύψει.

Πραγματικά η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.4.4) λόγω των τύπων (10.4.10) και (10.4.11) για τους μετασχηματισμούς Laplace των μερικών παραγώγων που εμφανίζονται (της χρονικής, ως προς  $t$ , και της χωρικής, ως προς  $z$ ) παίρνει τη μορφή

$$sU(z, s) - T_0 = a^2 \frac{\partial^2 U(z, s)}{\partial z^2} \implies \frac{\partial^2 U(z, s)}{\partial z^2} - \frac{s}{a^2} U(z, s) = -\frac{T_0}{a^2}. \quad (10.4.13)$$

Πρόκειται για συνήθη διαφορική εξίσωση, γραμμική, με σταθερούς συντελεστές, μη ομογενή και με ανεξάρτητη μεταβλητή το βάθος  $z$  μέσα στο εδάφος. Το σύμβολο  $s$  αφορά απλά στη μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace, που δεν παρουσιάζεται σε παράγωγο. Μπορεί επομένως να θεωρηθεί απλά παράμετρος (ουσιαστικά σταθερά) κατά την επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.4.13). Τούτο μπορεί να καταστεί ακόμη σαφέστερο με τη χρήση του συμβολισμού (10.4.12) στη συνήθη αυτή διαφορική εξίσωση (10.4.13). Στην περίπτωση αυτή έχουμε κάθε δικαίωμα να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο της συνήθους παραγωγίσεως  $d$ , δηλαδή να γράψουμε

$$\frac{d^2 \hat{U}(z)}{dz^2} - \frac{s}{a^2} \hat{U}(z) = -\frac{T_0}{a^2}, \quad (10.4.14)$$

αντί να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο της μερικής παραγωγίσεως  $\partial$ . Το σύμβολο  $\partial$  το είχαμε χρησιμοποιήσει στη συνήθη διαφορική εξίσωση (10.4.13).

Πριν από την επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.4.13) (ισοδύναμα (10.4.14)), πρέπει να μετασχηματισθεί κατά Laplace και η συνοριακή συνθήκη (10.4.6), δηλαδή η συνθήκη  $u(0, t) = T_\varepsilon$ . Χρησιμοποιούμε τον ορισμό (10.4.9) του μετασχηματισμού Laplace  $U(z, s)$  της προς προσδιορισμό θερμοκρασίας  $u(z, t)$  και διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$U(0, s) = \frac{T_\varepsilon}{s}. \quad (10.4.15)$$

Η σχέση αυτή ισχύει, επειδή ο μετασχηματισμός Laplace του 1 είναι  $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$ , όπως γνωρίζουμε (δεύτερος τύπος (10.1.9)). Για  $z \rightarrow \infty$  η θερμοκρασία  $u(z, t)$  πρέπει να είναι συνεχώς ( $t > 0$ ) φραγμένη σύμφωνα με τη συνθήκη (10.4.7), που προέκυψε από φυσικούς λόγους. Η συνθήκη αυτή θεωρείται προφανής και δεν είχε δοθεί αρχικά. Άρα και ο μετασχηματισμός Laplace  $U(z, s)$  (ως προς το χρόνο  $t$ ) της θερμοκρασίας  $u(z, t)$  πρέπει και αυτός να είναι επίσης φραγμένος για  $z \rightarrow \infty$ . Επομένως από τη συνθήκη (10.4.7) προκύπτει ότι

$$|U(z, s)| < M^*, \quad z \rightarrow \infty. \quad (10.4.16)$$

(Το φράγμα  $M^*$  είναι και πάλι κατάλληλη θετική σταθερά.) Η συνθήκη αυτή πρέπει βέβαια να ισχύει για κάθε τιμή του βάθους  $z$  (όχι μόνο για  $z \rightarrow \infty$ ). Αλλά στην περίπτωση που  $z \rightarrow \infty$  φαίνεται καθαρότερα ότι πρόκειται για συνοριακή συνθήκη. Για  $z < \infty$  (δηλαδή σε πεπερασμένο βάθος μέσα στο εδάφος) η ισχύς της συνθήκης αυτής θεωρείται προφανής στη λύση που θα βρεθεί.

Έχουμε λοιπόν να λύσουμε τη μη ομογενή γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση (10.4.13) (ή, ισοδύναμα, (10.4.14)) σε συνδυασμό με την άμεσα ισχύουσα συνοριακή συνθήκη (10.4.15) και την έμμεσα προκύπτουσα συνοριακή συνθήκη (10.4.16). Απλούστερα, σαν συνθήκη στη διαφορική

εξίσωση μπορούμε να πάρουμε υπόψη μας μόνο τη συνοριακή συνθήκη (10.4.15) συν τη λίγο-πολύ φυσική απαίτηση φραγμένης λύσεως  $U(z, s) \equiv \hat{U}(z)$ .

### B10.4.3. Επίλυση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

Δεν προτιμάμε την εφαρμογή και δεύτερου μετασχηματισμού Laplace (ως προς  $z$  τώρα), κάτι που έγινε όμως στην εξίσωση της μεταγωγής ρύπου στο προπροηγούμενη Ενότητα Β10.2 (Παράγραφος Β10.2.5). Αντίθετα προτιμάμε τη λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.4.13) (ή (10.4.14)) με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης. Δεν ξεχνάμε όμως το γεγονός που ήδη αναφέρθηκε, δηλαδή ότι το  $s$  (η μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace) δε σχετίζεται καθόλου με την ανεξάρτητη μεταβλητή της διαφορικής αυτής εξίσωσης, που είναι το βάθος  $z$ .

Πολύ εύκολα προσδιορίζουμε με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως για ομογενείς γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές τη δευτεροβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση  $p_2(\mu) = 0$  της συνήθους διαφορικής εξίσωσης δευτέρας τάξεως (10.4.13) (ή (10.4.14)) και τις δύο ρίζες της  $\mu_{1,2}$

$$p_2(\mu) = \mu^2 - \frac{s}{a^2} = 0 \implies \mu_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{s}}{a} \quad (10.4.17)$$

έχοντας ήδη υποθέσει ότι  $a > 0$ . Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης έχει επομένως τη μορφή

$$\hat{U}_h(z) := U_h(z, s) = C_1(s) \exp\left(\frac{\sqrt{s}}{a} z\right) + C_2(s) \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} z\right), \quad z > 0, \quad (10.4.18)$$

με  $\exp$  τη συνηθισμένη εκθετική συνάρτηση ( $\exp y \equiv e^y$ ) και με τα  $C_{1,2}(s)$  αυθαίρετες συναρτήσεις του  $s$  μόνο. Εύκολα προκύπτει και μια μερική (ειδική) λύση της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.4.13) (ή (10.4.14)). Μια τέτοια λύση αποτελεί η σταθερά (ως προς  $z$ ) συνάρτηση

$$\hat{U}_p(z) := U_p(z, s) = \frac{-T_0/a^2}{-s/a^2} = \frac{T_0}{s}. \quad (10.4.19)$$

Επομένως η γενική λύση της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.4.13) ή (10.4.14) θα είναι η εξής:

$$U(z, s) = U_h(z, s) + U_p(z, s) = C_1 \exp\left(\frac{\sqrt{s}}{a} z\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} z\right) + \frac{T_0}{s}. \quad (10.4.20)$$

Όμως ο πρώτος όρος στη λύση αυτή παραβιάζει για  $z \rightarrow \infty$  τη συνθήκη (10.4.16), επειδή τείνει στο άπειρο, δεν είναι φραγμένος για  $z \rightarrow \infty$ . Άρα πρέπει να επιλεγεί  $C_1 = 0$  και επομένως

$$U(z, s) = C_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} z\right) + \frac{T_0}{s}. \quad (10.4.21)$$

Συνεπώς απομένει μόνο η σταθερά  $C_2$  προς προσδιορισμό. Πολύ εύκολος είναι ο προσδιορισμός και της σταθεράς αυτής  $C_2$  βάσει της συνθήκης (10.4.15):  $U(0, s) = T_\varepsilon/s$ . Η συνθήκη αυτή είναι η μετασχηματισμένη κατά Laplace συνοριακή συνθήκη (10.4.6) για  $z = 0$ , δηλαδή στην επιφάνεια του εδάφους. Πραγματικά τώρα από τη λύση (10.4.21) για  $z = 0$  προκύπτει αμέσως ότι

$$U(0, s) = C_2 + \frac{T_0}{s} = \frac{T_\varepsilon}{s} \implies C_2 = \frac{T_\varepsilon - T_0}{s}. \quad (10.4.22)$$

Άρα η λύση (10.4.21) παίρνει τη συγκεκριμένη μορφή

$$U(z, s) = \frac{T_\varepsilon - T_0}{s} \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} z\right) + \frac{T_0}{s}. \quad (10.4.23)$$

Παρατηρούμε πως τώρα τόσο (α) η διαφορική μας εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.4.3) (ή (10.4.4)) στο παρόν πρόβλημα μεταδόσεως θερμότητας όσο και (β) οι τρεις συνθήκες, μία αρχική και δύο συνοριακές, έχουν ήδη ληφθεί υπόψη. Σημειώνουμε επίσης ότι η δεύτερη συνοριακή

συνθήκη (10.4.7), για  $z \rightarrow \infty$ , δεν είχε δοθεί αρχικά. Προέκυψε όμως έμμεσα για φυσικούς λόγους υπολογισμού φραγμένης λύσεως  $u(z, t)$ .

**B10.4.4. Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace**

Απομένει το καθήκον (δυστυχώς όχι πάντοτε απλό ή ευχάριστο) της αντιστροφής  $\mathcal{L}^{-1}$  του μετασχηματισμού Laplace, εν προκειμένω του τελικού προσδιορισμού της θερμοκρασίας

$$u(z, t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(z, s)\}, \quad z > 0, \quad t > 0. \tag{10.4.24}$$

Με βάση τον πρώτο από τους τύπους (10.1.12), θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής γνωστά αποτελέσματα (με  $H(t)$  τη βηματική συνάρτηση του Heaviside):

$$\mathcal{L}\{1\} = \mathcal{L}\{H(t)\} = \frac{1}{s} \implies \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \quad \text{ή} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = H(t). \tag{10.4.25}$$

Σημειώνουμε ότι πρακτικά δεν έχει καμία απολύτως σημασία η διαφορά αυτή (1 ή  $H(t)$ ) για  $t > 0$ . Ο μετασχηματισμός Laplace βασίζεται σε ολοκλήρωμα στο διάστημα  $[0, \infty)$ . Δε μπορεί να δώσει πληροφορίες για το διάστημα  $(-\infty, 0)$  κατά την αντιστροφή του  $\mathcal{L}^{-1}$ . Με άλλες λέξεις στο διάστημα αυτό (εδώ για  $t < 0$ ) δεν είναι μονοσήμαντη η αντιστροφή αυτή. Το αντίθετο θα ήταν παράλογο. Μην περιμένουμε στην παρούσα εφαρμογή τέτοιες πληροφορίες έχοντας ξεκινήσει τη χρονική στιγμή  $t = 0$  και ενδιαφερόμενοι μόνο για  $t > 0$ . Ανάλογα θα ίσχυαν και αν είχαμε χρησιμοποιήσει το βάθος  $z$  για το μετασχηματισμό Laplace. Και σ' αυτήν την περίπτωση ασφαλώς δε θα περιμέναμε στο παρόν φυσικό πρόβλημα μεταδόσεως θερμότητας πληροφορίες πάνω από το έδαφος (για  $z < 0$ ). Μόνο στο αληθινό έδαφος  $z \geq 0$  περιμένουμε πληροφορίες. Δεν είναι έτσι;

Εν πάση περιπτώσει ο δύσκολος όρος για την αντιστροφή (10.4.24) (ως προς τη χρονική μεταβλητή, το χρόνο  $t$ ) του μετασχηματισμού Laplace  $U(z, s)$  της άγνωστης θερμοκρασίας  $u(z, t)$ , την οποία ήδη βρήκαμε στη λύση (10.4.23), είναι ο υπολογισμός του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace της συναρτήσεως

$$F(s) = \frac{1}{s} \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{a} z\right) = \frac{1}{s} \exp(-b\sqrt{s}), \quad b = \frac{z}{a}. \tag{10.4.26}$$

Ο αντίστροφος αυτός μετασχηματισμός Laplace δεν είναι τόσο γνωστός. Εντούτοις από μέτρια λεπτομερείς πίνακες μετασχηματισμών Laplace  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$  και αντιστρόφων τους

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \tag{10.4.27}$$

διαπιστώνουμε εύκολα ότι ισχύει ο τρίτος από τους τύπους (10.1.11). Επομένως, αντιστρέφοντας κατά Laplace ( $\mathcal{L}^{-1}$ ), παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \exp(-b\sqrt{s})\right\} = \operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{t}}\right) \equiv 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{b}{2\sqrt{t}}\right). \tag{10.4.28}$$

Στον παραπάνω τύπο το σύμβολο erf δηλώνει τη συνάρτηση σφάλματος και το σύμβολο erfc τη συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος. Και στις δύο αυτές αρκετά κλασικές συναρτήσεις θα αναφερθούμε αμέσως παρακάτω.

**B10.4.5. Η συνάρτηση σφάλματος και η συμπληρωματική της**

Η συνάρτηση σφάλματος (error function) erf είναι μια πολύ γνωστή συνάρτηση στα μαθηματικά. Ο ορισμός της είναι ο ακόλουθος:

$$\operatorname{erf} x \equiv \operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi. \tag{10.4.29}$$

Είναι πραγματικά τόσο γνωστή η συνάρτηση αυτή, ώστε μπορούμε να παραλείψουμε τις παρενθέσεις στο όρισμά της, εφόσον βέβαια τούτο δε δημιουργεί σύγχυση. Το ίδιο ακριβώς κάνουμε και στις στοιχειώδεις υπερβατικές συναρτήσεις, γράφοντας, π.χ.,  $\sin x$  αντί  $\sin(x)$ . Συνεχίζοντας, το σύμβολο  $\operatorname{erfc}$  δηλώνει τη συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος (complementary error function). Αυτή ορίζεται απλά ως εξής:

$$\operatorname{erfc} x \equiv \operatorname{erfc}(x) := 1 - \operatorname{erf}(x) \iff \operatorname{erf}(x) + \operatorname{erfc}(x) = 1. \quad (10.4.30)$$

Η συνάρτηση σφάλματος  $\operatorname{erf}$  και η συμπληρωματική της  $\operatorname{erfc}$  έχουν μερικές απλές ιδιότητες, όπως τις ακόλουθες:

$$\operatorname{erf}(0) = 0, \quad \operatorname{erfc}(0) = 1, \quad \operatorname{erf}(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1, \quad \operatorname{erfc}(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erfc}(x) = 0. \quad (10.4.31)$$

Από τις ιδιότητες αυτές η πρώτη:  $\operatorname{erf}(0) = 0$ , είναι προφανής από τον ορισμό (10.4.29) της συναρτήσεως σφάλματος  $\operatorname{erf}$ . Και η δεύτερη ιδιότητα:  $\operatorname{erfc}(0) = 1$ , είναι επίσης προφανής με βάση την πρώτη και τον ορισμό (10.4.30) της συμπληρωματικής συναρτήσεως σφάλματος  $\operatorname{erfc}$ . Η τρίτη ιδιότητα:  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$  απαιτεί για την απόδειξή της τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (10.4.29) για  $x \rightarrow \infty$ . Αυτό όμως δεν είναι μια ιδιαίτερα απλή εργασία. Τέλος η τέταρτη ιδιότητα:  $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$ , προκύπτει άμεσα από την τρίτη πάλι λόγω του ορισμού (10.4.30). Λόγω της τρίτης από τις παραπάνω ιδιότητες:  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$  και τον ορισμό (10.4.29) της συναρτήσεως σφάλματος  $\operatorname{erf}$ , ο ορισμός (10.4.30) της συμπληρωματικής συναρτήσεως σφάλματος  $\operatorname{erfc}$  μπορεί να γραφεί και στην εξής εναλλακτική μορφή:

$$\begin{aligned} \operatorname{erfc}(x) &= 1 - \operatorname{erf}(x) = \operatorname{erf}(\infty) - \operatorname{erf}(x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi. \end{aligned} \quad (10.4.32)$$

Ισχύουν επίσης οι ιδιότητες

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x), \quad (10.4.33)$$

$$\operatorname{erfc}(-x) = 1 - \operatorname{erf}(-x) = 1 - [-\operatorname{erf}(x)] = 1 + \operatorname{erf}(x). \quad (10.4.34)$$

Η πρώτη από τις ιδιότητες αυτές είναι προφανής βάσει του ορισμού (10.4.29) της συναρτήσεως σφάλματος  $\operatorname{erf}$ . Η δεύτερη ιδιότητα προκύπτει άμεσα από την πρώτη εξαιτίας του ορισμού (10.4.30) της συμπληρωματικής συναρτήσεως σφάλματος  $\operatorname{erfc}$ .

Στη συνέχεια, παραγωγίζοντας τον τύπο ορισμού (10.4.29) της συναρτήσεως σφάλματος  $\operatorname{erf}$ , διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{d \operatorname{erf}(x)}{dx} = -\frac{d \operatorname{erfc}(x)}{dx} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}. \quad (10.4.35)$$

Στη διαπίστωσή μας αυτή πήραμε υπόψη τη γνωστή ιδιότητα στο Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό ότι η παράγωγος αορίστου ολοκληρώματος ισούται με την ολοκληρωτέα συνάρτηση.

Με την εκθετική συνάρτηση συνεχώς θετική και η παράγωγος αυτή είναι θετική με μέγιστο μάλλον της ίδιας παραγωγού το  $2/\sqrt{\pi}$  για  $x = 0$ . Επομένως η συνάρτηση σφάλματος  $\operatorname{erf}$  από την αρχική τιμή της (εννοούμε για  $x = 0$ )  $\operatorname{erf}(0) = 0$  μέχρι την οριακή, την τελική τιμή της  $\operatorname{erf}(\infty) \equiv \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{erf}(x) = 1$  αυξάνει συνεχώς. Αλλ' η αύξηση αυτή γίνεται με ένα όλο και πιο βραδύ ρυθμό, γιατί ο όρος  $e^{-x^2}$  στην παράγωγό της (10.4.35) σχεδόν μηδενίζεται για αρκετά μικρές τιμές του  $x$ . Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του εκθέτη  $-x^2$  στον όρο αυτό  $e^{-x^2}$ . Αφετέρου η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος  $\operatorname{erfc}$  εξαιτίας του ορισμού της (10.4.30) έχει «συμπληρωματικές»



ιδιότητες ως προς τη συνάρτηση σφάλματος  $\operatorname{erf}$ . Άρα η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος  $\operatorname{erfc}$  μειώνεται συνεχώς από  $x = 0$  μέχρι  $x \rightarrow \infty$ , παρόλο που παραμένει συνεχώς θετική. Ας μη λησμονείται επίσης η βασική ιδιότητα  $\operatorname{erf} x + \operatorname{erfc} x = 1$ , που ισχύει για κάθε τιμή του  $x$ .

**B10.4.6. Η λύση του προβλήματος και η επαλήθευση των συνθηκών**

Μετά τη μεγάλη αυτή παρένθεση για τη συνάρτηση σφάλματος  $\operatorname{erf}$  και τη συμπληρωματική της  $\operatorname{erfc}$  μπορούμε πια πολύ εύκολα να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της λύσεως  $U(z, s)$  (σχέση (10.4.23)), την οποία έχουμε ήδη προσδιορίσει στο παρόν πρόβλημα Μεταδόσεως Θερμότητας. Λαμβάνουμε υπόψη τον ιδιαίτερα γνωστό τύπο αντιστροφής (10.4.25) για τον απλούστερο, το δεύτερο όρο στη λύση αυτή (10.4.23). Παίρνουμε επίσης υπόψη και το λιγότερο γνωστό τύπο αντιστροφής (10.4.28) για το δυσκολότερο, τον πρώτο όρο στην ίδια λύση, με  $b = z/a$ . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η λύση  $u(z, t)$  για τη θερμοκρασία (ή, ισοδύναμα, τη θερμοκρασιακή κατανομή) εντός του εδάφους (με  $z \geq 0$ ) υπό τις παρούσες παραδοχές και συνθήκες (αρχική και συνοριακή). Η λύση αυτή έχει τη μορφή

$$u(z, t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(z, s)\} = (T_\epsilon - T_0) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right) + T_0. \tag{10.4.36}$$

Η ίδια ακριβώς λύση μπορεί βέβαια να γραφεί και στην ισοδύναμη (αν και μη προτιμητέα) μορφή

$$u(z, t) = T_0 \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right) + T_\epsilon \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2a\sqrt{t}}\right) \tag{10.4.37}$$

λόγω του ορισμού (10.4.30) της συμπληρωματικής συναρτήσεως σφάλματος  $\operatorname{erfc}$ .

Από την παραπάνω λύση, έστω στη μορφή της (10.4.37), παρατηρούμε ότι για  $t = 0^+$ , οπότε  $1/\sqrt{t} \rightarrow \infty$ , ο μεν πρώτος όρος για κάθε βάθος  $z$  ( $z \geq 0$ ) ισούται με  $T_0$ , ο δε δεύτερος με 0. Άρα  $u(z, 0) = T_0$ , όπως πραγματικά πρέπει, ώστε να ισχύει η αρχική συνθήκη (10.4.5). Αντίθετα για  $t \rightarrow \infty$ , οπότε  $1/\sqrt{t} \rightarrow 0^+$ , ο μεν πρώτος όρος ισούται με 0, ο δε δεύτερος με  $T_\epsilon$ . Άρα  $u(z, \infty) = T_\epsilon$ , όπως επίσης είναι εύλογο, γιατί με την πάροδο πολύ μεγάλου χρόνου (για  $t \rightarrow \infty$ ) η θερμοκρασία του εδάφους θα πάρει την επιφανειακή τιμή της  $T_\epsilon$ . Έτσι κι αλλιώς για κάθε χρονική στιγμή  $t$  ( $t > 0$ ), θέτοντας  $z = 0$  στη λύση (10.4.37), παρατηρούμε ότι  $u(0, t) = T_\epsilon$ , επειδή  $\operatorname{erf}(0) = 0$  και  $\operatorname{erfc}(0) = 1$ . Άρα ισχύει πλήρως και η συνοριακή συνθήκη (10.4.6) στην επιφάνεια του εδάφους  $z = 0$ . Στη συνέχεια για φραγμένο  $t$  και  $z \rightarrow \infty$  από την ίδια λύση (10.4.37) διαπιστώνουμε ότι  $u(\infty, t) = T_0$ , επειδή  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$  και  $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$ . Επομένως ισχύει και το αποτέλεσμα (10.4.8), το οποίο είχαμε προβλέψει βάσει φυσικών συλλογισμών. Τέλος με την εκτέλεση των αναγκαίων μερικών παραγωγίσεων στη λύση (10.4.36) (με τη χρήση και του τύπου (10.4.35)) διαπιστώνεται ότι η λύση αυτή επαληθεύει επίσης και την ίδια τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.4.4). Έτσι η επαλήθευση της λύσεως (10.4.36) ή (10.4.37) καθίσταται πλήρης. Είναι δηλαδή επιτυχής η επαλήθευση και ως προς τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και ως προς όλες τις συνθήκες.

**B10.5. ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΑΞΟΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΡΑΒΔΟΥ**

**B10.5.1. Το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών**

Σαν μια κάπως δυσκολότερη εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους θεωρούμε τώρα το πρόβλημα των ελεύθερων αξονικών (διαμήκων) ταλαντώσεων συνήθους ράβδου. Ονομάζουμε συνήθη ράβδο μια λεπτή και σταθερής διατομής ευθύγραμμη ράβδο από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό. Το πρόβλημα αυτό το εξετάσαμε ήδη (λεπτομερέστερα μάλιστα) στην Ενότητα Β3.2 ως προς την εύρεση της σχετικής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους που έχει τη μορφή (3.2.18),

δηλαδή

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \iff c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0. \quad (10.5.1)$$

Στη διαφορική αυτή εξίσωση με μερικές παραγώγους έχουμε υποθέσει ράβδο μήκους  $L$  με  $x$  τη θέση κατά μήκος της ( $0 \leq x \leq L$ ) και  $t$  το χρόνο ( $t > 0$ ). Άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) είναι η  $u = u(x, t)$ . Η συνάρτηση αυτή εκφράζει την αξονική (διαμήκη, όχι εγκάρσια, πρόκειται για αξονικές ταλαντώσεις!) μετατόπιση των σημείων  $x$  της ράβδου τη χρονική στιγμή  $t$ . Τέλος το σύμβολο  $c$  δηλώνει σταθερά που παριστάνει την ταχύτητα διαδόσεως των κυμάτων στην αξονική αυτή ταλάντωση. Η σταθερά αυτή  $c$  είναι ίση (όπως ήδη ξέρουμε: σχέση (3.2.17)) με  $c = \sqrt{E/\rho}$ , όπου  $E$  είναι το μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young) και  $\rho$  η πυκνότητα του υλικού της ράβδου. (Εννοείται η συνηθισμένη πυκνότητα, η ανά μονάδα όγκου πυκνότητα, όχι η γραμμική πυκνότητα  $m = \rho A$ .) Στην πιο πάνω εξίσωση (10.5.1) έχει γίνει ήδη η υπόθεση ότι δεν υφίσταται κατανεμημένη αξονική (διαμήκης) εξωτερική φόρτιση  $f(x, t)$  κατά μήκος της ράβδου. Επομένως η εξίσωση αυτή είναι ομογενής. Άρα πρόκειται για την εξίσωση των αξονικών (διαμήκων) ιδιοταλαντώσεων της ράβδου και στην περίπτωση μας (με αρχικές συνθήκες που θα καθορίσουμε πιο κάτω) για την εξίσωση των ελεύθερων ταλαντώσεων της ράβδου. (Ελεύθερες, όπως ξέρουμε, ονομάζονται οι ταλαντώσεις εκείνες όπου δεν υπάρχει εξωτερική φόρτιση.)

Θα λύσουμε ακριβώς το ίδιο πρόβλημα με εκείνο που ήδη λύσαμε με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών στην Ενότητα Β6.1. Υποθέτουμε τη ράβδο πακτωμένη στο αριστερό της άκρο  $x = 0$  και ελεύθερη στο δεξιό  $x = L$ . Άρα ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (10.5.2)$$

Και οι αρχικές συνθήκες θεωρούνται οι ίδιες. Υπάρχει δηλαδή μόνο μία αξονική (διαμήκης) δύναμη  $N_0$  εφαρμοσμένη στο ελεύθερο άκρο  $x = L$  της ράβδου, που αποσύρεται απότομα (από αρχική κατάσταση ηρεμίας) τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Εν τω μεταξύ όμως έχει προκαλέσει αξονική μετατόπιση του ελεύθερου αυτού άκρου  $x = L$  της ράβδου ίση με

$$u_0 = \frac{N_0 L}{EA} \quad (10.5.3)$$

με  $A$  το εμβαδόν της διατομής της ράβδου και  $E$  το μέτρο ελαστικότητας του υλικού της. Σημειώνεται ότι το γινόμενο  $EA$  καλείται μερικές φορές στην αξονική καταπόνηση ράβδου και δυστένεια της ράβδου. (Αντίστοιχοι είναι και οι όροι δυστρεψία για το γινόμενο  $GJ^*$  σε στρέψη ράβδου και δυσκαμψία για το γινόμενο  $EI$  σε κάμψη δοκού.) Ισχύουν επομένως και πάλι οι αρχικές συνθήκες:

$$u(x, 0) = u_0 \frac{x}{L}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (10.5.4)$$

Θα λύσουμε και πάλι τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.5.1) υπό τις συνοριακές συνθήκες (10.5.2) και τις αρχικές συνθήκες (10.5.4). Εδώ όμως θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace αντί για τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, που είχαμε χρησιμοποιήσει στην Ενότητα Β6.1. Η όλη διαδικασία είναι μάλλον απλή, όπως και στις προηγούμενες εφαρμογές της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Εντούτοις τώρα θα παρουσιασθεί κάποια ουσιαστική δυσκολία κατά την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace  $U(x, s)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$  που θα προκύψει. Τη δυσκολία αυτή θα την αντιμετωπίσουμε με τη χρήση ισχυρών πινάκων αντιστρόφων μετασχηματισμών Laplace.

### B10.5.2. Εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στη διαφορική εξίσωση

Ανάλογα με τις δύο προηγούμενες εφαρμογές (αυτές των Ενοτήτων Β10.2 και Β10.4), ορίζουμε

καταρχήν το μετασχηματισμό Laplace  $U(x, s)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$  ως προς το χρόνο  $t$

$$\mathcal{L}\{u(x, t)\} = U(x, s) \equiv \hat{U}(x). \quad (10.5.5)$$

Τότε έχουμε για το μετασχηματισμό Laplace της σχετικής δεύτερης χρονικής μερικής παραγώγου βάσει του γενικού τύπου (10.1.4)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\right\} &= s^2 U(x, s) - su(x, 0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \\ &= s^2 U(x, s) - su_0 \frac{x}{L} \equiv s^2 \hat{U}(x) - su_0 \frac{x}{L}. \end{aligned} \quad (10.5.6)$$

Στο αποτέλεσμα αυτό λάβαμε υπόψη και τις δύο αρχικές συνθήκες (10.5.4). Δεν οφείλουμε επομένως να ασχοληθούμε και πάλι με τις συνθήκες αυτές. Μόνο οι συνοριακές συνθήκες (10.5.2) απομένουν να ληφθούν υπόψη.

Έχουμε επίσης για το μετασχηματισμό Laplace της δεύτερης χωρικής μερικής παραγώγου βάσει του επίσης γενικού τύπου (10.1.8), εδώ με  $k = 2$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{u(x, t)\} = \frac{\partial^2 U(x, s)}{\partial x^2} \equiv \frac{d^2 \hat{U}(x)}{dx^2}. \quad (10.5.7)$$

Με την εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace  $\mathcal{L}$  (επαναλαμβάνουμε ως προς το χρόνο  $t$ ) η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.5.1) μετατρέπεται σε συνήθη διαφορική εξίσωση. Τονίζουμε και πάλι (μέσω του συμβόλου  $\hat{U}(x) \equiv U(x, s)$ ) ότι η συνήθης αυτή διαφορική εξίσωση

$$c^2 \frac{d^2 \hat{U}(x)}{dx^2} - s^2 \hat{U}(x) + su_0 \frac{x}{L} = 0 \implies c^2 \frac{d^2 \hat{U}(x)}{dx^2} - s^2 \hat{U}(x) = -su_0 \frac{x}{L} \quad (10.5.8)$$

λόγω και των σχέσεων (10.5.7) και (10.5.6) είναι πραγματικά μια συνήθης διαφορική εξίσωση. Η ανεξάρτητη μεταβλητή της είναι η θέση  $x$ . Η μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace αποτελεί απλά παράμετρο, ουσιαστικά μια σταθερά κατά τη διάρκεια της επιλύσεως της εξισώσεως αυτής.

### B10.5.3. Επίλυση της συνήθους διαφορικής εξισώσεως

Η συνήθης διαφορική εξίσωση (10.5.8) είναι μια μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερας τάξεως. Για την επίλυσή της μπορούμε ασφαλώς να προχωρήσουμε και σε δεύτερο μετασχηματισμό Laplace, ως προς τη θέση  $x$  τώρα. Σημειώνουμε βέβαια ότι στην περίπτωση αυτή είναι υποχρεωτική η χρήση κάποιου νέου συμβόλου, έστω του  $\rho$  ή του  $\sigma$  ή του  $\hat{s}$  για τη σχετική μεταβλητή-παράμετρο. Είναι όμως ίσως απλούστερο και εν προκειμένω και πιο κατανοητό να προχωρήσουμε στην επίλυση της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (10.5.8) με κάποια πιο άμεση μέθοδο. Συγκεκριμένα τέτοια άμεση μέθοδος αποτελεί η μέθοδος της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $\rho_2(\mu) = 0$  με ρίζες  $\mu_{1,2}$ :

$$\rho_2(\mu) = c^2 \mu^2 - s^2 = 0 \implies \mu_{1,2} = \pm \frac{s}{c}. \quad (10.5.9)$$

Επομένως η γενική λύση  $\hat{U}_h(x)$  της αντίστοιχης ομογενούς συνήθους διαφορικής εξισώσεως

$$c^2 \frac{d^2 \hat{U}(x)}{dx^2} - s^2 \hat{U}(x) = 0 \quad (10.5.10)$$

θα είναι η εξής:

$$\hat{U}_h(x) = A \cosh \frac{sx}{c} + B \sinh \frac{sx}{c}. \quad (10.5.11)$$

Στη γενική αυτή λύση (10.5.11) πήραμε φυσικά υπόψη μας τις παραπάνω ρίζες  $\mu_{1,2} = \pm s/c$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $\rho_2(\mu) = 0$ . Στην ίδια λύση (10.5.11) τα σύμβολα  $A$  και  $B$  δηλώνουν απλά αυθαίρετες σταθερές, οι οποίες δεν εξαρτώνται από την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$ . Όμως εξαρτώνται συνήθως από τη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace, δηλαδή γενικά  $A = A(s)$

και  $B = B(s)$ . Οι σταθερές αυτές  $A = A(s)$  και  $B = B(s)$  πρόκειται να προσδιορισθούν με τη βοήθεια των δύο συνοριακών συνθηκών (10.5.2) στα δύο άκρα της εξεταζόμενης συνήθους ράβδου.

Πριν προχωρήσουμε όμως στη μάλλον απλή αυτή εργασία, δεν πρέπει να λησμονήσουμε την πρόσθεση στην πιο πάνω λύση  $\hat{U}_h(x)$  της ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.5.10) μιας μερικής (ή ειδικής) λύσεως  $\hat{U}_p(x)$  της αρχικής, της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.5.8). Μια τέτοια μερική λύση αποτελεί προφανώς η συνάρτηση

$$\hat{U}_p(x) = \frac{-su_0x/L}{-s^2} = \frac{u_0x}{Ls}, \quad (10.5.12)$$

επειδή το δεξιό μέλος της εξίσωσης αυτής (10.5.8) είναι μόλις πρώτου βαθμού, ενώ η μόνη παράγωγος στο αριστερό μέλος είναι η δεύτερη παράγωγος ως προς  $x$ . Άρα η πιο πάνω μερική λύση  $\hat{U}_p(x)$  είναι προφανής, αν και εναλλακτικό τρόπο ευρέσεώς της αποτελεί η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών. Στη μέθοδο αυτή γίνεται η υπόθεση μερικής λύσεως της μορφής

$$\hat{U}_p^*(x) = Fx + G \implies \frac{d^2\hat{U}_p^*(x)}{dx^2} = 0 \quad (10.5.13)$$

με τα  $F$  και  $G$  προσδιοριστέους συντελεστές, που οδηγεί ακριβώς στην ίδια μερική λύση (10.5.12).

Τούτο συμβαίνει, επειδή η συνήθης μη ομογενής διαφορική εξίσωση (10.5.8) μας δίνει

$$c^2 \frac{d^2\hat{U}_p^*(x)}{dx^2} - s^2\hat{U}_p^*(x) = -su_0 \frac{x}{L} \implies c^2 \cdot 0 - s^2(Fx + G) = -su_0 \frac{x}{L}. \quad (10.5.14)$$

Άρα έχουμε

$$F = \frac{-su_0/L}{-s^2} = \frac{u_0}{Ls} \quad \text{και} \quad G = 0 \implies \hat{U}_p^*(x) = \hat{U}_p(x) = \frac{u_0x}{Ls}, \quad (10.5.15)$$

προκύπτει δηλαδή η ίδια ακριβώς μερική λύση  $\hat{U}_p(x)$  της σχέσεως (10.5.12).

Επομένως η γενική λύση  $\hat{U}(x) \equiv U(x, s)$  της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης (10.5.8) που προέκυψε θα είναι ίση με το άθροισμα

$$\hat{U}(x) = \hat{U}_h(x) + \hat{U}_p(x). \quad (10.5.16)$$

Λόγω των λύσεων (10.5.11) (γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης) και (10.5.12) ή (10.5.15) (μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης) η γενική αυτή λύση (10.5.16) παίρνει τη μορφή

$$\hat{U}(x) = A \cosh \frac{sx}{c} + B \sinh \frac{sx}{c} + \frac{u_0x}{Ls}. \quad (10.5.17)$$

Πρέπει τώρα να προσδιορισθούν οι σταθερές  $A = A(s)$  και  $B = B(s)$  μέσω των συνοριακών συνθηκών (10.5.2). Οι συνοριακές αυτές συνθήκες αφορούν: (α) στην πάκτωση στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της εξεταζόμενης συνήθους ράβδου και (β) στο ελεύθερο δεξιό άκρο  $x = L$  της ίδιας ράβδου. Οι συνοριακές αυτές συνθήκες έχουν αγνοηθεί μέχρι στιγμής. Αντίθετα οι αρχικές συνθήκες (10.5.4) έχουν ήδη ληφθεί υπόψη στο μετασχηματισμό Laplace (10.5.6) (στη δεύτερη γραμμή). Τις δύο συνοριακές συνθήκες (10.5.2) που προαναφέραμε τις μετασχηματίζουμε και αυτές κατά Laplace ως προς το χρόνο  $t$ , ο οποίος υπεισέρχεται σ' αυτές. Αυτό ήδη το κάναμε για τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.5.1) έχοντας τελικά καταλήξει στη λύση (10.5.17) για το μετασχηματισμό Laplace  $\hat{U}(x) \equiv U(x, s)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, t)$ . Υπενθυμίζουμε ότι η άγνωστη αυτή συνάρτηση  $u(x, t)$  είναι η ζητούμενη αξονική μετατόπιση στο σημείο  $x$  της ράβδου τη χρονική στιγμή  $t$ .

Είναι πολύ εύκολος ο μετασχηματισμός Laplace (ως προς το χρόνο  $t$  προφανώς) των συνοριακών συνθηκών (10.5.2). Πραγματικά από την πρώτη από αυτές (στην πάκτωση  $x = 0$ ) έχουμε

$$u(0, t) = 0 \implies \mathcal{L}\{u(0, t)\} = U(0, s) = 0 \implies \hat{U}(0) = 0 \implies A = A(s) = 0. \quad (10.5.18)$$

Πήραμε ήδη υπόψη και τη γενική λύση (10.5.17) (για  $x = 0$  φυσικά). Επίσης μόλις αποδείχθηκε ότι  $A = 0$ . Αυτό ήταν αναγκαίο λόγω της πακτώσεως στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της ράβδου. Τώρα με  $A = 0$  η λύση αυτή (10.5.17) παίρνει τη μερικότερη (με μία μόνο αυθαίρετη σταθερά: τη  $B$ ) μορφή

$$\hat{U}(x) = B \sinh \frac{sx}{c} + \frac{u_0 x}{Ls} \tag{10.5.19}$$

με  $\hat{U}(0) = 0$ , όπως πρέπει και πραγματικά άμεσα επαληθεύεται. Θα χρειαστούμε όμως και την πρώτη παράγωγο  $\hat{U}'(x)$  της λύσεως αυτής  $\hat{U}(x)$  (ως προς  $x$  εννοείται, το  $s$  είναι απλά παράμετρος). Αυτή είναι μια πολύ εύκολη εργασία με αποτέλεσμα

$$\hat{U}'(x) = B \frac{s}{c} \cosh \frac{sx}{c} + \frac{u_0}{Ls}. \tag{10.5.20}$$

Πράγματι τώρα η δεύτερη συνοριακή συνθήκη (10.5.2) (που αφορά στο ελεύθερο άκρο  $x = L$  της ράβδου) περιέχει την πρώτη παράγωγο ως προς τη θέση  $x$ . Εάν μετασχηματισθεί κατά Laplace (μετασχηματισμός Laplace συνεχώς ως προς το χρόνο  $t$  στην εφαρμογή αυτή), η ίδια συνθήκη δίνει

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \implies \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) \right\} = \frac{\partial U}{\partial x}(L, s) = 0 \implies \hat{U}'(L) = 0, \tag{10.5.21}$$

γιατί  $\hat{U}(x) \equiv U(x, s)$ . Εισάγοντας τη συνθήκη αυτή (10.5.21) ( $\hat{U}'(L) = 0$ ) στη λύση (10.5.20), μπορούμε πια να προσδιορίσουμε και την αυθαίρετη σταθερά  $B = B(s)$ , κάτι που ήδη κάναμε για την αυθαίρετη σταθερά  $A$ . Προκύπτει άμεσα

$$\hat{U}'(L) = B \frac{s}{c} \cosh \frac{sL}{c} + \frac{u_0}{Ls} = 0 \implies B = - \frac{u_0 c}{Ls^2} \frac{1}{\cosh \frac{sL}{c}}. \tag{10.5.22}$$

Άρα η λύση (10.5.19) (δυστυχώς στο πεδίο  $s$  του μετασχηματισμού Laplace ακόμη) παίρνει την τελική της μορφή

$$\hat{U}(x) \equiv U(x, s) = \frac{u_0}{L} \left( \frac{x}{s} - \frac{c}{s^2} \frac{\sinh \frac{sx}{c}}{\cosh \frac{sL}{c}} \right). \tag{10.5.23}$$

#### B10.5.4. Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace

Έχουν ήδη ληφθεί πλήρως υπόψη: (α) η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (10.5.1) του προβλήματος που μελετάμε, (β) οι συνοριακές συνθήκες (10.5.2) και (γ) οι αρχικές συνθήκες (10.5.4). Απομένει η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace (10.5.23) που βρήκαμε για τον προσδιορισμό της λύσεως

$$u(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \{U(x, s)\} \tag{10.5.24}$$

του παρόντος προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών. Στην αντιστροφή αυτή η παράμετρος (ή και μεταβλητή)  $s$  του μετασχηματισμού Laplace θα απαλειφθεί παραχωρώντας τη θέση της στην αληθινή ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$ , στο χρόνο στο πραγματικό, το φυσικό πρόβλημα της ράβδου. Η παράμετρος  $s$  εμφανίστηκε, επειδή εργασθήκαμε στην παρούσα εφαρμογή μετασχηματίζοντας κατά Laplace ως προς το χρόνο  $t$  τόσο στη διαφορική εξίσωση (10.5.1) όσο και τις συνοριακές συνθήκες (10.5.2). Άρα στο χρόνο  $t$  οφείλουμε να επιστρέψουμε με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace (10.5.24). Παρατηρούμε ότι η χωρική μεταβλητή  $x$  κατά μήκος της ράβδου είναι παρούσα στη λύση (10.5.23). Η χρονική μεταβλητή  $t$  είναι αυτή που απουσιάζει ακόμη!

Ο πρώτος όρος στη λύση (10.5.23) που βρήκαμε αντιστρέφεται πολύ εύκολα, επειδή

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1 \implies \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{u_0 x}{Ls} \right\} = \frac{u_0 x}{L} \tag{10.5.25}$$

λόγω του πρώτου από τους τύπους (10.1.12). Σημειώνουμε ότι το  $x$  είναι τώρα σταθερά, παράμετρος, ακριβώς όπως ήταν το  $s$  κατά την επίλυση της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (10.5.8).

Εν πάση περιπτώσει, απομένει τώρα το δύσκολο, το μη τετριμμένο καθήκον της αντιστροφής του δεύτερου όρου στη λύση (10.5.23). Αυτός είναι ο όρος που περιλαμβάνει τις υπερβολικές συναρτήσεις (α) υπερβολικό ημίτονο ( $\sinh$ ) και (β) υπερβολικό συνημίτονο ( $\cosh$ ). Αυτή είναι και η δυσκολότερη δουλειά που πρέπει όμως να γίνει στην παρούσα εφαρμογή. Είναι ταυτόχρονα και το κύριο μειονέκτημα της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace στην εφαρμογή αυτή (όχι βέβαια σε κάθε εφαρμογή, αλλά σε πολλές εφαρμογές σε προβλήματα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους). Ευτυχώς όμως ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  $\mathcal{L}^{-1}$  που ζητείται εδώ μπορεί να βρεθεί με τη χρήση ισχυρών πινάκων μετασχηματισμών Laplace. Τέτοιοι πίνακες είναι διαθέσιμοι σε ορισμένα σχετικά συγγράμματα. Από πίνακες αυτού του είδους (ισχυρούς και αρκετά λεπτομερείς βέβαια!) βρίσκουμε άμεσα ότι

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh sx}{s^2 \cosh sa} \right\} = x + \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2a} \cos \frac{(2n-1)\pi t}{2a} \quad (10.5.26)$$

με τα  $x$  και  $a$  παραμέτρους. Έχουμε τώρα στο δεξιό μέλος το χρόνο  $t$  αντί για τη μεταβλητή  $s$  του μετασχηματισμού Laplace στο αριστερό μέλος. Η θέση  $x$  εμφανίζεται βέβαια και στα δύο μέλη!

Ο χρησιμότερος αυτός τύπος στην παρούσα εφαρμογή πρέπει να τροποποιηθεί λίγο (πολύ λίγο!) θέτοντας  $L/c$  αντί του  $a$  και  $x/c$  αντί του  $x$ . Με τον τρόπο αυτό θα λάβει την επιθυμητή σ' εμάς μορφή προς άμεση χρήση του στη λύση (10.5.23). Με τις δύο αυτές απλές αντικαταστάσεις ο τύπος (10.5.26) παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sinh \frac{sx}{c}}{s^2 \cosh \frac{sL}{c}} \right\} = \frac{x}{c} + \frac{8L}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \cos \frac{(2n-1)\pi ct}{2L}. \quad (10.5.27)$$

Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί πάρα πολύ εύκολα. Πολλαπλασιάζοντας και επί  $-u_0 c/L$  (λόγω της μορφής του δεύτερου όρου της λύσεως (10.5.23)) προκύπτει ότι

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ -\frac{u_0 c}{L} \frac{\sinh \frac{sx}{c}}{s^2 \cosh \frac{sL}{c}} \right\} = -\frac{u_0 x}{L} - \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \cos \frac{(2n-1)\pi ct}{2L}. \quad (10.5.28)$$

Απομένει πλέον το τετριμμένο καθήκον της αντικαταστάσεως των αντιστρόφων μετασχηματισμών Laplace (10.5.25) και (10.5.28) των δύο όρων της λύσεως (10.5.23) στη λύση αυτή. Μετά την προφανή απλοποίηση των αντίθετων όρων  $\pm u_0 x/L$  παίρνουμε το τελικό αποτέλεσμα

$$u(x, t) = \frac{8u_0}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \cos \frac{(2n-1)\pi ct}{2L}. \quad (10.5.29)$$

Ας σημειωθεί επίσης ότι το μείον δεν εμφανίζεται πια πριν από το άθροισμα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το μείον απλά μεταφέρθηκε στον όρο  $(-1)^n$ , που τροποποιήθηκε έτσι σε  $(-1)^{n-1}$ .

Αυτή είναι η λύση του παρόντος προβλήματος ελεύθερων ταλαντώσεων συνήθους ράβδου υπό τις συνοριακές και αρχικές συνθήκες που υποθέσαμε. Βέβαια στη λύση αυτή (10.5.29) η σταθερή μετατόπιση  $u_0$  δίνεται από τον τύπο (10.5.3),  $u_0 = N_0 L/(EA)$ , συναρτήσει: (α) της αξονικής δυνάμεως  $N_0$  που είχε επιβληθεί στη ράβδο (μέχρι τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ), (β) του μήκους  $L$  της ράβδου, (γ) του μέτρου ελαστικότητας (ή μέτρου του Young)  $E$  του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της και (δ) του εμβαδού  $A$  της διατομής της. Η παρούσα λύση (10.5.29) συμπίπτει ασφαλώς με τη λύση που έχει ήδη βρεθεί στην Ενότητα Β6.1, εκεί όμως με τη χρήση της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών. Εντελώς ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και για το αντίστοιχο πρόβλημα ελεύθερων στρεπτικών ταλαντώσεων συνήθους ράβδου. Το πρόβλημα αυτό ανάγεται, όπως γνωρίζουμε από την Παράγραφο Β3.2.7, ουσιαστικά στην ίδια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους: στη γνωστή μας μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση) (10.5.1).

---

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *B11*

## Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ανάλογη με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, που εξετάστηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο B10, είναι η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier. Η διαφορά των δύο μεθόδων για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους είναι απλά ότι ενώ η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace βασίζεται στη χρήση του μετασχηματισμού Laplace, η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier βασίζεται στη χρήση του μετασχηματισμού Fourier. Πρέπει να σημειωθεί εξάλλου ότι ο μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιεί σαν διάστημα ολοκλήρωσεως το ημιάπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ . Αντίθετα ο μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιεί σαν διάστημα ολοκλήρωσεως το άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$  και απαιτεί φυσικά να έχει πληροφορίες από το διάστημα αυτό. Άρα η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace είναι κατάλληλη π.χ. σε προβλήματα αρχικών τιμών με τη χρονική μεταβλητή  $t$  στο διάστημα  $[0, \infty)$ . Ανάλογα είναι επίσης κατάλληλη και σε ημιάπειρες περιοχές με τη χωρική μεταβλητή  $x$  στο ίδιο διάστημα. Αντίθετα η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier χρησιμοποιείται συνήθως με μετασχηματισμό της χωρικής μεταβλητής  $x$  για άπειρα μέσα ως προς τη μεταβλητή αυτή, που θεωρείται ότι κυμαίνεται στο άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ .

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier επαναλαμβάνεται με σύντομο τρόπο στην εισαγωγική Ενότητα B11.1. Στην Ενότητα B11.2 παρουσιάζεται μια αρκετά λεπτομερής εφαρμογή της μεθόδου αυτής στην Περιβαλλοντική Υδραυλική. Συγκεκριμένα εξετάζεται το πρόβλημα της διαχύσεως ρύπου σε υδατόρρευμα άπειρου μήκους αρχικά αγνοώντας το φαινόμενο της μεταγωγής, στη συνέχεια όμως λαμβάνοντας και αυτό υπόψη. Και στις δύο περιπτώσεις υπολογίζεται κλειστή λύση του προβλήματος υπό τυχαία, αλλά γνωστή αρχική κατανομή της συγκεντρώσεως του ρύπου στο υδατόρρευμα. Στη συνέχεια στην Ενότητα B11.3 η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier εφαρμόζεται στη Δυναμική των Κατασκευών, συγκεκριμένα στο κλασικό πρόβλημα της άπειρης δοκού υπό ελεύθερη (χωρίς εξωτερική φόρτιση) καμπτική ταλάντωση. Και στην εφαρμογή αυτή προκύπτει κλειστή γενική λύση του προβλήματος υπό τυχαίες αρχικές συνθήκες: αρχικό σχήμα (ελαστική γραμμή) της δοκού και αρχική ταχύτητα των σημείων της υπό τη μορφή ολοκληρωτικού τύπου.

Άλλες δυνατότητες παραπλήσιες του μετασχηματισμού Fourier παρέχουν η χρήση του σιμιτιονικού ή του ημιτιονικού μετασχηματισμού Fourier, που δε θα εξετασθούν όμως στο κεφάλαιο αυτό. Συγγενή δυνατότητα αποτελεί επίσης η χρήση του ολοκληρώματος Fourier σε συνδυασμό με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Όπως και στο μετασχηματισμό Laplace, έτσι και εδώ δεν πρέπει να παραλειφθεί να σημειωθεί ότι πολλές φορές κατά την αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier της λύσεως μιας γραμμικής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους (ομογενούς ή μη ομογενούς) προς επιστροφή στην αρχική μεταβλητή είναι αναγκαία η χρήση πινάκων μετασχηματισμών Fourier. Από την άλλη πλευρά ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier βασίζεται στη χρήση ενός ολοκληρώματος κατά μήκος του πραγματικού άξονα και όχι στο μιγαδικό επίπεδο, όπως ισχύει για το μετασχηματισμό Laplace. Αυτό ίσως διευκολύνει μερικές φορές.

---

## B11.1. ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ

### B11.1.1. Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β10 μελετήσαμε τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές. Όπως γνωρίζουμε, ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός, βασίζεται δηλαδή σε ολοκλήρωμα. Ο μετασχηματισμός Laplace (που συμβολίζεται με καλλιγραφικό  $\mathcal{L}$ ) μετασχηματίζει μια συνάρτηση  $u(t)$  σε μια άλλη συνάρτηση, το μετασχηματισμό Laplace της ή τη μετασχηματισμένη της κατά Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ . Ο μετασχηματισμός αυτός γίνεται βάσει του τύπου (10.1.1) ορισμού του μετασχηματισμού Laplace:

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} u(t) dt. \quad (11.1.1)$$

Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε απολύτως ανάλογα τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier (που συμβολίζεται με καλλιγραφικό  $\mathcal{F}$ ) και πάλι για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με σταθερούς συντελεστές. Το μετασχηματισμό Fourier τον ορίσαμε στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II στο Κεφάλαιο Α18 του Μέρους Α και τον εφαρμόσαμε στο Κεφάλαιο Α19 πάλι του Μέρους Α για την επίλυση συνήθων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι κι αυτός ένας ολοκληρωτικός μετασχηματισμός που μετασχηματίζει (ακριβώς όπως κι ο μετασχηματισμός Laplace) μια συνάρτηση  $u(t)$  σε μια άλλη συνάρτηση  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ . Η δεύτερη αυτή συνάρτηση  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$  καλείται **μετασχηματισμός Fourier** ή **μετασχηματισμένη κατά Fourier** της αρχικής συναρτήσεως  $u(t)$ . Ο τύπος ορισμού του μετασχηματισμού Fourier  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$  μιας συναρτήσεως  $u(t)$  είναι ο ακόλουθος:

$$U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} u(t) dt. \quad (11.1.2)$$

Επαναλαμβάνεται ότι το σύμβολο  $\mathcal{F}\{u(t)\}$  δηλώνει απλά το μετασχηματισμό Fourier (ή τη μετασχηματισμένη κατά Fourier) της συναρτήσεως  $u(t)$ , δηλαδή τη συνάρτηση  $U(\omega)$ . Φυσικά η συνάρτηση αυτή  $U(\omega)$  είναι εντελώς διαφορετική από το μετασχηματισμό Laplace  $U(s)$  της ίδιας συναρτήσεως  $u(t)$  στον τύπο (11.1.1).

Συγκρίνοντας το μετασχηματισμό Laplace με το μετασχηματισμό Fourier, παρατηρούμε καταρχήν ότι και οι δύο είναι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί. Βασίζονται επομένως σε ολοκλήρωση για τον ορισμό τους: τύποι ορισμού (11.1.1) για το μετασχηματισμό Laplace και (11.1.2) για το μετασχηματισμό Fourier. Υπάρχουν όμως διαφορές μεταξύ των δύο αυτών ορισμών. Καταρχήν ο μετασχηματισμός Laplace έχει σαν διάστημα ορισμού του (διάστημα ολοκληρώσεως) το ημίαπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ , ενώ ο μετασχηματισμός Fourier έχει σαν διάστημα ορισμού του το άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ . Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace είναι κατάλληλος για συναρτήσεις  $u(t)$  που ορίζονται ή/και ζητούνται (στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που εξετάζουμε) στο ημίαπειρο διάστημα  $[0, \infty)$ . Αντίθετα ο μετασχηματισμός Fourier είναι κατάλληλος για συναρτήσεις  $u(t)$  που σχετίζονται με το άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ .

Εξάλλου οι πυρήνες των μετασχηματισμών Laplace και Fourier, δηλαδή οι συναρτήσεις στους τύπους ορισμού τους (11.1.1) και (11.1.2) αντίστοιχα που πολλαπλασιάζουν τη μετασχηματιζόμενη συνάρτηση  $u(t)$  είναι διαφορετικοί, συγκεκριμένα

$$K_L(s, t) = e^{-st} \quad \text{για το μετασχηματισμό Laplace,} \quad (11.1.3)$$

$$K_F(\omega, t) = e^{-i\omega t} \quad \text{για το μετασχηματισμό Fourier.} \quad (11.1.4)$$

Από απόψεως συγκλίσεως ο μετασχηματισμός Laplace είναι κάπως ισχυρότερος από το μετασχηματισμό Fourier, υπερέχει του μετασχηματισμού Fourier. Αυτό συμβαίνει, επειδή ο πιο πάνω



πυρήνας  $K_L(s, t) = e^{-st}$  για το μετασχηματισμό Laplace εξασφαλίζει πιο εύκολα την ύπαρξη του ολοκληρώματος (11.1.1) ορισμού του μετασχηματισμού Laplace για  $t \rightarrow \infty$  για μια συνάρτηση  $u(t)$ . Συγκεκριμένα, εάν η μεταβλητή  $s$  πάρει επαρκώς μεγάλες θετικές τιμές, τότε παρατηρούμε ότι ο πυρήνας  $e^{-st}$  (που έχει πρόσημο μείον στον εκθέτη  $-st$ ) τείνει στο μηδέν (για  $t \rightarrow \infty$ ) με αρκετά μεγάλη ταχύτητα. Κάτι ανάλογο δεν είναι εφικτό στο μετασχηματισμό Fourier, επειδή ο αντίστοιχος πυρήνας  $K_F(\omega, t) = e^{-i\omega t}$  έχει πάντοτε σαν απόλυτη τιμή τη μονάδα, επειδή

$$|e^{-i\omega t}| = |\cos \omega t - i \sin \omega t| = \sqrt{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} = 1. \tag{11.1.5}$$

Επομένως η σύγκλιση του ολοκληρώματος ορισμού του μετασχηματισμού Fourier (11.1.2) δε διευκολύνεται από μεγάλες τιμές του  $\omega$ . Παρά ταύτα και ο μετασχηματισμός Fourier είναι πρακτικά χρήσιμος και πολλές συναρτήσεις  $u(t)$  ή  $u(x)$ , κλπ. διαθέτουν μετασχηματισμό Fourier (ή μετασχηματισμένη κατά Fourier).

**B11.1.2. Παράδειγμα μετασχηματισμού Fourier**

Σαν παράδειγμα μετασχηματισμού Fourier αναφερόμαστε στην απλή συνάρτηση  $u = u(x)$  (τώρα της μεταβλητής  $x$ )

$$u(x) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } |x| \leq a \\ 0, & \text{εάν } |x| > a \end{cases} \tag{11.1.6}$$

Η συνάρτηση αυτή  $u(x)$  έχει σαν μετασχηματισμό Fourier τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} U(\omega) = \mathcal{F}\{u(x)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x) dx = \int_{-a}^a e^{-i\omega x} dx = \left. \frac{e^{-i\omega x}}{-i\omega} \right|_{-a}^a \\ &= \frac{e^{-i\omega a} - e^{i\omega a}}{-i\omega} = \frac{2}{\omega} \frac{e^{i\omega a} - e^{-i\omega a}}{2i} = \frac{2}{\omega} \sin \omega a = 2 \frac{\sin a\omega}{\omega}. \end{aligned} \tag{11.1.7}$$

Τυχαίνει μάλιστα στην ειδική αυτή περίπτωση όχι μόνο να υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier  $U(\omega)$ , αλλά να είναι και πραγματική συνάρτηση. Αυτό, δηλαδή το να είναι ένας μετασχηματισμός Fourier  $U(\omega)$  πραγματική συνάρτηση, συνήθως δεν ισχύει στο μετασχηματισμό Fourier.

**B11.1.3. Σχόλια για το μετασχηματισμό Fourier**

Ας παρατηρηθεί εξάλλου ότι δεν είναι ανάγκη στο μετασχηματισμό Fourier η μεταβλητή ως προς την οποία γίνεται ο μετασχηματισμός αυτός να είναι η μεταβλητή  $t$  που πολύ συχνά αναφέρεται στο χρόνο: χρονική μεταβλητή. Όπως ξέρουμε, στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τον Πολιτικό Μηχανικό η χρήση του μετασχηματισμού Fourier συχνά αφορά σε μονοβάθμια δυναμικά συστήματα με μεταβλητή το χρόνο  $t$ . Έτσι ο χρόνος  $t$  μετασχηματίζεται στη νέα μεταβλητή  $\omega$ . Η μεταβλητή αυτή  $\omega$  έχει τη φυσική ερμηνεία της κυκλικής συχνότητας. Αντίθετα στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους η χρήση του μετασχηματισμού Fourier είναι συνήθως κάπως διαφορετική ως προς τη μεταβλητή που μετασχηματίζεται.

Πραγματικά πολύ συχνά ο μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιείται ως προς τη χωρική μεταβλητή  $x$  (τη θέση). Μάλιστα αυτό θα γίνει και στις εφαρμογές των δύο ενοτήτων που θα ακολουθήσουν. Η μεταβλητή αυτή  $x$  θεωρείται ότι μεταβάλλεται στο άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ . Για τη χρονική μεταβλητή  $t$  (το χρόνο), που πολύ συχνά αποτελεί και αυτός ανεξάρτητη μεταβλητή στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και μεταβάλλεται στο ημιάπειρο διάστημα  $[0, \infty)$  δεν είναι κατάλληλος ο μετασχηματισμός Fourier. Βέβαια το ίδιο ισχύει και με διαθέσιμη αρχική συνθήκη (ή αρχικές συνθήκες) για  $t = 0$ . Αυτά συμβαίνουν, επειδή ο μετασχηματισμός Fourier είναι κατάλληλος μόνο για το άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$  λόγω του ορισμού του (11.1.2). Για το λόγο αυτό προτιμήσαμε να δηλώσουμε τη μεταβλητή στην πιο πάνω συνάρτηση  $u$ , της οποίας υπολογίσαμε το μετασχηματισμό Fourier  $U(\omega)$ , σαν  $x$ :  $u(x)$  και όχι σαν  $t$ :  $u(t)$ .

Από την άλλη πλευρά ο μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}$  ως προς τη μεταβλητή  $x$  (που συχνά δηλώνει μια χωρική και όχι χρονική μεταβλητή) αφήνει κάποια ερωτηματικά ως προς την επιλογή της μεταβλητής  $\omega$  σαν μεταβλητής στη συνάρτηση  $U(\omega)$  που προκύπτει με το μετασχηματισμό Fourier. Πραγματικά ίσως θα ήταν προτιμότερη η χρήση κάποιου άλλου συμβόλου για τη μεταβλητή του μετασχηματισμού Fourier. Για παράδειγμα, συχνά χρησιμοποιείται το σύμβολο  $\xi$  για το σκοπό αυτό, έτσι ώστε να μη μπορεί να γίνει σύγχυση με την κυκλική συχνότητα  $\omega$ . Παρά ταύτα διατηρούμε τη χρήση της μεταβλητής  $\omega$  σαν μεταβλητής του μετασχηματισμού Fourier στον ορισμό του (11.1.2) και σε όλο το κεφάλαιο αυτό. Έτσι θα έχουμε το ίδιο σύμβολο, το  $\omega$ , με εκείνο που είχαμε χρησιμοποιήσει στο μετασχηματισμό Fourier στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και στο μετασχηματισμό Laplace με τη χρήση  $s$  αυτόν γενικά του συμβόλου  $s$ .

Επομένως στο παρόν κεφάλαιο το σύμβολο  $\omega$  δηλώνει απλά τη μεταβλητή του μετασχηματισμού Fourier  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(x)\}$  μιας συναρτήσεως  $u(x)$ , έστω και αν το  $x$  παριστάνει χωρική μεταβλητή (θέση) και όχι το χρόνο. (Άρα το σύμβολο  $\omega$  σε ένα μετασχηματισμό Fourier  $U(\omega)$  γενικά δεν παριστάνει κυκλική συχνότητα.) Ο αναγνώστης Πολιτικός Μηχανικός που δε συμφωνεί με τις σκέψεις αυτές του γράφοντα έχει ασφαλώς τη δυνατότητα να χρησιμοποιεί ο ίδιος το σύμβολο της αρεσκείας του, π.χ.  $U(\xi)$  ή  $U(\lambda)$  ή  $U(\alpha)$ , κλπ. με το  $\xi$  ή το  $\lambda$  ή το  $\alpha$  σαν μεταβλητή του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$ .

Με τη χρήση της μεταβλητής  $x$  (που συνήθως δηλώνει θέση στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους) σαν μεταβλητής της αρχικής συναρτήσεως  $u(x)$ , ο τύπος ορισμού (11.1.2) του μετασχηματισμού Fourier (ή της μετασχηματισμένης κατά Fourier) προφανώς γράφεται σαν

$$U(\omega) = \mathcal{F}\{u(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x) dx. \quad (11.1.8)$$

Τώρα έχει τεθεί  $x$  αντί του  $t$  στη μεταβλητή ολοκλήρωσεως, όπως είχαμε ήδη την ευκαιρία να δούμε και στη σχέση (11.1.7). Αυτό όμως δεν προκαλεί καμία ουσιαστική αλλαγή!

#### B11.1.4. Αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier

Αντίστροφα τώρα, εάν γνωρίζουμε το μετασχηματισμό Fourier  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(x)\}$  μιας συναρτήσεως  $u(x)$ , τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τον τύπο αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier. (Σημειώνεται ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δηλώνεται με το σύμβολο  $\mathcal{F}^{-1}$ .) Ο τύπος αυτός αντιστροφής έχει τη μορφή

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} U(\omega) d\omega. \quad (11.1.9)$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ήδη αρκετή συμμετρία μεταξύ των τύπων (11.1.8) ορισμού του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$  και (11.1.9) υπολογισμού του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$ . Βέβαια στον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (11.1.9) υπεισέρχεται η σταθερά  $1/(2\pi)$  πριν από το ολοκλήρωμα. Οι δύο αυτοί τύποι, οι (11.1.8) και (11.1.9), θα μπορούσαν να γίνουν ακόμη πιο συμμετρικοί μεταξύ τους με τη χρήση της σταθεράς  $1/\sqrt{2\pi}$  πριν από τα ολοκληρώματα και στους δύο. Αυτό συμβαίνει σε αρκετά βιβλία ιδίως στα Μαθηματικά και στη Φυσική. Για τον Πολιτικό Μηχανικό όμως είναι μειονεκτικό, επειδή στην περίπτωση αυτή χάνεται κάπως η αναλογία μεταξύ του μετασχηματισμού Fourier και του μετασχηματισμού Laplace, ο οποίος δεν έχει τέτοια σταθερά στον τύπο ορισμού του (11.1.1). Επίσης η χρήση της σταθεράς  $1/\sqrt{2\pi}$  στον τύπο ορισμού (11.1.2) ή (11.1.8) του μετασχηματισμού Fourier δεν ταιριάζει απόλυτα με τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier στον υπολογισμό της μιγαδικής συναρτήσεως αποκρίσεως  $G(\omega)$  (ή  $H(\omega)$ ). Τη συνάρτηση αυτή, που αναφέρεται στο πεδίο της συχνότητας  $\omega$ , είχαμε την ευκαιρία να την εισαγάγουμε και να τη χρησιμοποιήσουμε στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για μονοβάθμια μηχανικά συστήματα του Πολιτικού Μηχανικού. Συγκεκριμένα στην Παράγραφο Α6.1.6 του Κεφαλαίου Α6, στην Ενότητα Α17.4 του Κεφαλαίου Α17 και  $s$  όλο το Κεφάλαιο Α19: Ενότητες Α19.1, Α19.2 και Α19.3.

**B11.1.5. Χρησιμότητα του μετασχηματισμού Fourier στις διαφορικές εξισώσεις**

Μετά τα παραπάνω γενικής φύσεως σχόλια για το μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$ , ας αναφέρουμε μερικές χρήσιμες ιδιότητές του. Αρκετές από αυτές θα τις χρησιμοποιήσουμε στις εφαρμογές των επόμενων δύο ενοτήτων στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, συγκεκριμένα στην Περιβαλλοντική Υδραυλική στην Ενότητα B11.2 και στη Δυναμική των Κατασκευών στην Ενότητα B11.3.

Καταρχήν ξέρουμε ότι στο μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}$  ισχύουν οι τύποι (10.1.3) έως και (10.1.7) για το μετασχηματισμό Laplace μιας παραγώγου της συναρτήσεως  $u$  με γνωστό μετασχηματισμό Laplace. Έτσι και στο μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$  ισχύουν οι ανάλογοι τύποι

$$\mathcal{F}\{u'(x)\} = i\omega U(\omega), \tag{11.1.10}$$

$$\mathcal{F}\{u''(x)\} = (i\omega)^2 U(\omega) = -\omega^2 U(\omega), \tag{11.1.11}$$

$$\mathcal{F}\{u'''(x)\} = (i\omega)^3 U(\omega) = -i\omega^3 U(\omega), \tag{11.1.12}$$

$$\mathcal{F}\{u''''(x)\} = (i\omega)^4 U(\omega) = \omega^4 U(\omega) \tag{11.1.13}$$

και, γενικότερα, για την  $n$ -παραγώγο  $u^{(n)}(x)$

$$\mathcal{F}\{u^{(n)}(x)\} = (i\omega)^n U(\omega). \tag{11.1.14}$$

Επομένως ο μετασχηματισμός Fourier της  $n$ -παραγώγου της συναρτήσεως  $u(x)$  ισούται με το μετασχηματισμό Fourier  $U(\omega)$  της ίδιας συναρτήσεως  $u(x)$  πολλαπλασιασμένο όμως επί  $(i\omega)^n$ . Τούτο είναι αντίστοιχο με ό,τι ισχύει για το μετασχηματισμό Laplace, αλλά τώρα με  $(i\omega)^n$  στη θέση του  $s^n$  στον τύπο (10.1.7). Επίσης στο μετασχηματισμό Fourier δεν υπάρχουν στους πιο πάνω τύπους αρχικές συνθήκες αντίθετα με το μετασχηματισμό Laplace. Το ενδιαφέρον αυτό γεγονός οφείλεται απλά στο διάστημα  $(-\infty, \infty)$  στο ολοκλήρωμα ορισμού του μετασχηματισμού Fourier (11.1.2) ή (11.1.8) και μας διευκολύνει αρκετά.

Από την αντίθετη όμως πλευρά η ισχύς των πιο πάνω τύπων (11.1.10) έως και (11.1.14) για τους μετασχηματισμούς Fourier παραγώγων  $u^{(n)}(x)$  της συναρτήσεως  $u(x)$  απαιτεί κάποιες προϋποθέσεις. Συγκεκριμένα απαιτείται ο μηδενισμός της συναρτήσεως  $u(x)$  για  $x \rightarrow \pm\infty$ , έτσι ώστε να ισχύει ο τύπος (11.1.10). Ανάλογα απαιτείται ο μηδενισμός για  $x \rightarrow \pm\infty$  τόσο της συναρτήσεως  $u(x)$  όσο και της πρώτης παραγώγου της  $u'(x)$ , για να ισχύει ο τύπος (11.1.11). Επίσης τόσο η συνάρτηση  $u(x)$  όσο και οι δύο πρώτες παράγωγοί της  $u'(x)$  και  $u''(x)$  πρέπει να τείνουν στο μηδέν για  $x \rightarrow \pm\infty$ , ώστε να ισχύει ο τύπος (11.1.12), κλπ. Τελικά φθάνουμε στο μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}\{u^{(n)}(x)\}$  της  $n$ -παραγώγου  $u^{(n)}(x)$ . Για το μετασχηματισμό αυτό ισχύει ο γενικός τύπος (11.1.14) υπό την αναγκαία όμως προϋπόθεση ότι τόσο η ίδια η συνάρτηση  $u(x)$  όσο και οι  $n - 1$  πρώτες παράγωγοί της  $u^{(k)}(x)$  τείνουν στο μηδέν για  $x \rightarrow \pm\infty$ , δηλαδή

$$u(x) \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad u^{(k)}(x) \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1, \quad \text{για} \quad x \rightarrow \pm\infty. \tag{11.1.15}$$

Οι παραδοχές αυτές ότι υποτίθενται ισχύουν εκ των προτέρων κατά την εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$  στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (είτε ομογενών είτε μη ομογενών). Βέβαια ο έλεγχός τους γίνεται εκ των υστέρων, δηλαδή αφού έχει βρεθεί η ζητούμενη λύση της εξισώσεως που επιλύεται.

Ακριβώς όπως συμβαίνει και στο μετασχηματισμό Laplace  $\mathcal{L}$  για τους αντίστοιχους τύπους, η χρήση στο μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$  των παραπάνω τύπων για τους μετασχηματισμούς Fourier των παραγώγων  $u^{(n)}(x)$  της συναρτήσεως  $u(x)$  επιτρέπει την εξάλειψη των παραγώγων αυτών από τη διαφορική εξίσωση. Βέβαια η διαφορική εξίσωση που επιλύεται μπορεί να είναι είτε συνήθης είτε με μερικές παραγώγους με τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους να μας απασχολούν στο κεφάλαιο αυτό. (Την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier σε συνήθεις διαφορικές

εξισώσεις, που είναι ασφαλώς και απλούστερες, την έχουμε ήδη εξετάσει στο προηγούμενο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II.)

Θεωρούμε τώρα μια συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, π.χ. τη γνωστή εξίσωση των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων και των ελεύθερων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού. Αυτή έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty. \quad (11.1.16)$$

Εδώ η δοκός θεωρείται άπειρου μήκους. Ανεξάρτητες μεταβλητές είναι η θέση  $x$  (χωρική μεταβλητή) και ο χρόνος  $t$  (χρονική μεταβλητή). Άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως  $v = v(x, t)$ . Το  $a$  είναι γνωστή θετική σταθερά. Στην πιο πάνω εξίσωση (11.1.16), που θα τη λύσουμε πιο κάτω στην Ενότητα Β11.3, δεν έχουμε μόνο τη χωρική μεταβλητή  $x$ , ως προς την οποία θα μετασχηματίσουμε κατά Fourier, αλλά έχουμε και μια ακόμη ανεξάρτητη μεταβλητή, συγκεκριμένα στην εξίσωση αυτή το χρόνο  $t$ . Γενικά είναι δυνατόν να έχουμε και πάνω από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές.

Είδαμε στο μετασχηματισμό Laplace ότι για μια μερική παράγωγο μιας συναρτήσεως (π.χ. της  $u(x, t)$ ) ως προς μια μεταβλητή (π.χ. την  $x$ ) που δεν είναι η μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace (π.χ. η  $t$ ) ο μετασχηματισμός Laplace έχει σαν αποτέλεσμα απλά την αντίστοιχη παράγωγο του μετασχηματισμού Laplace  $U(x, s) = \mathcal{L}\{u(x, t)\}$  της συναρτήσεως αυτής. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και στο μετασχηματισμό Fourier. Δηλαδή, ανάλογα με τον τύπο (10.1.8) στο μετασχηματισμό Laplace, ισχύει και στο μετασχηματισμό Fourier ο τύπος

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial t^k} dx = \frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x, t) dx = \frac{\partial^k U(\omega, t)}{\partial t^k} \quad (11.1.17)$$

με  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Στον τύπο αυτό έχουμε μετασχηματίσει κατά Fourier ως προς τη χωρική μεταβλητή  $x$  (τη θέση  $x$ ), ακριβώς όπως θα γίνει και ευθύς πιο κάτω στις εφαρμογές των Ενότητων Β11.2 και Β11.3. Αντίθετα στο μετασχηματισμό Laplace είχαμε μετασχηματίσει (στον αντίστοιχο τύπο (10.1.8)) ως προς τη χρονική μεταβλητή  $t$  (το χρόνο  $t$ ). Αλλά ασφαλώς τούτο είναι επουσιώδες.

### **Β11.1.6. Μετασχηματισμοί Fourier συνήθων συναρτήσεων**

Είναι γνωστοί οι μετασχηματισμοί Fourier πολλών συνηθισμένων συναρτήσεων, όπως της συναρτήσεως  $u(x)$  που ορίστηκε στη σχέση (11.1.6) με μετασχηματισμό Fourier τον (11.1.7). Παραδείγματος χάρη, για την ωστική (ή κρουστική) συνάρτηση  $\delta(x)$  του Dirac (εδώ με μεταβλητή το  $x$  αντί του  $t$ ) έχουμε τους μετασχηματισμούς Fourier

$$\mathcal{F}\{\delta(x)\} = 1, \quad \mathcal{F}\{\delta(x - a)\} = e^{-ia\omega} \quad (11.1.18)$$

με τον πρώτο βέβαια ειδική περίπτωση του δεύτερου για  $a = 0$ .

Στο παρόν κεφάλαιο μας ενδιαφέρει επίσης ιδιαίτερα και ο μετασχηματισμός Fourier της συναρτήσεως  $e^{-a^2 x^2}$ , που είναι ο εξής:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a^2 x^2}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\omega^2/(4a^2)} \quad \text{με } a > 0. \quad (11.1.19)$$

Θέτοντας στο μετασχηματισμό αυτό Fourier απλά  $a = 1/b$ , παίρνουμε και τον ανάλογο μετασχηματισμό Fourier

$$\mathcal{F}\left\{e^{-x^2/b^2}\right\} = \sqrt{\pi} b e^{-b^2 \omega^2/4} \quad \text{με } b > 0. \quad (11.1.20)$$

Το μετασχηματισμό αυτό Fourier θα το χρησιμοποιήσουμε στην επόμενη Ενότητα Β11.2.

### **Β11.1.7. Και άλλες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier**

Ισχύουν ασφαλώς πάρα πολλές ιδιότητες για το μετασχηματισμό Fourier ανάλογα με ό,τι συμβαίνει και στο μετασχηματισμό Laplace. Αρκετές από ιδιότητες αυτές ήδη τις συναντήσαμε και

τις γνωρίζουμε από το μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II, εκεί όμως με έμφαση στο χρόνο  $t$ . Αντίθετα εδώ δίνουμε έμφαση στη θέση  $x$ . Οι ιδιότητες βέβαια μένουν ακριβώς οι ίδιες είτε με μεταβλητή το χρόνο  $t$  είτε τη θέση  $x$  στη συνάρτηση  $u$  που μετασχηματίζουμε κατά Fourier:  $u = u(t)$  ή  $u = u(x)$ .

Ανάμεσα στις ιδιότητες αυτές βαρύνουσα θέση κατέχει η γραμμική ιδιότητα

$$\mathcal{F}\{c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x)\} = c_1 U_1(\omega) + c_2 U_2(\omega) \tag{11.1.21}$$

με τα  $c_1$  και  $c_2$  σταθερές και επίσης  $U_{1,2}(\omega) = \mathcal{F}\{u_{1,2}(x)\}$ .

Άλλη ενδιαφέρουσα ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier (με τους ίδιους ορισμούς των μετασχηματισμών Fourier  $U_{1,2}(\omega)$ ) είναι η ιδιότητα για τη συνέλιξη δύο συναρτήσεων  $u_1(x)$  και  $u_2(x)$ :

$$\mathcal{F}\{u_1(x) * u_2(x)\} \equiv \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi) u_2(x - \xi) d\xi\right\} = U_1(\omega) U_2(\omega). \tag{11.1.22}$$

Η ιδιότητα αυτή είναι παρόμοια με την αντίστοιχη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace (10.1.16). Στο μετασχηματισμό Fourier όμως (αντίθετα με το μετασχηματισμό Laplace) το συνελκτικό ολοκλήρωμα ορίζεται στο άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$  και όχι στο πεπερασμένο διάστημα  $[0, t]$  (ή  $[0, x]$ ), όπως συνέβαινε στο μετασχηματισμό Laplace.

Τέλος μια άλλη χρήσιμη και γνωστή ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier είναι η εξής:

$$\mathcal{F}\{u(x - x_0)\} = e^{-ix_0\omega} \mathcal{F}\{u(x)\} \equiv e^{-ix_0\omega} U(\omega) \quad \text{με} \quad U(\omega) = \mathcal{F}\{u(x)\}. \tag{11.1.23}$$

Με ανεξάρτητη μεταβλητή τη θέση  $x$  η ιδιότητα αυτή αναφέρεται σε μετάθεση της θέσεως  $x$  (κατά μήκος του άξονα  $Ox$ ) κατά  $x_0$ , δηλαδή σε χωρική μετατόπιση, μετάθεση  $x_0$ . Η αρχική συνάρτηση ήταν η  $u(x)$ . Η μετατοπισμένη κατά  $x_0$  συνάρτηση είναι η  $u(x - x_0)$ . Στο πεδίο  $\omega$  του μετασχηματισμού Fourier ο μετασχηματισμός Fourier  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(x)\}$  της συναρτήσεως  $u(x)$  πολλαπλασιάζεται, σύμφωνα με τον πιο πάνω τύπο (11.1.23), επί  $e^{-ix_0\omega}$ . Έτσι απλά, με έναν πολλαπλασιασμό προκύπτει ο μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}\{u(x - x_0)\}$  της μετατοπισμένης συναρτήσεως  $u(x - x_0)$ .

### B11.1.8. Σχόλια για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε προς επίλυση μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, όπως, π.χ., την εξίσωση (11.1.16) για τις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις και ελεύθερες ταλαντώσεις συνήθους δοκού. Σε πλήρη αναλογία με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace μπορούμε καταρχήν να μετασχηματίσουμε κατά Fourier τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, στην περίπτωση μας ως προς τη μεταβλητή θέσεως  $x$ , γιατί αυτή είναι που παίρνει τιμές στο άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ . Στη συνέχεια προκύπτει συχνά μια συνήθης διαφορική εξίσωση, επειδή η μεταβλητή ως προς την οποία μετασχηματίσαμε πρώτα απαλείφθηκε. Παραδείγματος χάρη, στην εξίσωση (11.1.16) απαλείφεται έτσι η χωρική μεταβλητή  $x$  και απομένει η χρονική μεταβλητή  $t$ . Εάν υπάρχει και τρίτη μεταβλητή, μπορεί να απαιτηθεί και νέα χρήση του μετασχηματισμού Fourier (ή του μετασχηματισμού Laplace, κλπ.). Εν πάση περιπτώσει, κάθε ένας τέτοιος μετασχηματισμός μειώνει τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών κατά μονάδα.

Μόλις έχουμε διαθέσιμη μια συνήθη διαφορική εξίσωση, μπορούμε να τη λύσουμε και να προσδιορίσουμε έτσι το ζητούμενο μετασχηματισμό Fourier, που είναι η άγνωστη συνάρτηση στη συνήθη διαφορική εξίσωση που προέκυψε. Στη συνέχεια πρέπει να αντιστρέψουμε κατά Fourier, ώστε να επιστρέψουμε από τη μεταβλητή του μετασχηματισμού Fourier στην αρχική μεταβλητή. (Το βήμα αυτό πρέπει να γίνει δύο φορές, εάν έχουμε κάνει δύο μετασχηματισμούς Fourier.)

Εξάλλου δεν επιτρέπεται να λησμονείται ότι και οι συνθήκες που περιέχουν την ίδια μεταβλητή ως προς την οποία μετασχηματίσαμε κατά Fourier πρέπει και αυτές να ληφθούν υπόψη. Παραδείγματος χάρη, πρέπει να μετασχηματισθούν κατά Fourier οι αρχικές συνθήκες που ισχύουν

για  $t = 0$ , εάν εμείς είχαμε μετασχηματίσει ως προς τη θέση  $x$ . Η μεταβλητή ως προς την οποία μετασχηματίζουμε κατά Fourier τις συνθήκες που ισχύουν πρέπει ασφαλώς να είναι η ίδια με εκείνη τη μεταβλητή (π.χ. τη  $x$ ) ως προς την οποία μετασχηματίστηκε η ίδια η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Με άλλα λόγια μετασχηματίζουμε κατά Fourier ακριβώς τις συνθήκες εκείνες που περιέχουν τη μεταβλητή ως προς την οποία μετασχηματίσαμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Τις υπόλοιπες συνθήκες που ισχύουν τις λαμβάνουμε υπόψη κατά το μετασχηματισμό Fourier των μερικών παραγώγων στη διαφορική εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε.

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους αποτελεί βασικά μια απλή στη σκέψη διαδικασία. Η διαδικασία αυτή είναι μάλιστα απόλυτα ανάλογη με εκείνη που βασίζεται στο μετασχηματισμό Laplace και ήδη παρουσιάστηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο Β10. Όπως συμβαίνει μερικές φορές και στο μετασχηματισμό Laplace, έτσι και εδώ μπορεί πραγματικά να παρουσιασθεί κάποια δυσκολία με τους υπολογισμούς μετασχηματισμών Fourier και, ιδίως, αντιστρόφων μετασχηματισμών Fourier που απαιτούνται. Συνήθως χρησιμοποιούνται και πίνακες ζευγών μετασχηματισμών Fourier για το σκοπό αυτό. Οι εφαρμογές των δύο επόμενων Ενότητων Β11.2 και Β11.3 πιστεύεται πως θα καταστήσουν την όλη διαδικασία επίλυσης γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier αρκετά σαφή και κατανοητή. Και οι δύο αυτές εφαρμογές αφορούν στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, συγκεκριμένα: (α) στην Περιβαλλοντική Υδραυλική (Ενότητα Β11.2) και (β) στη Δυναμική των Κατασκευών (Ενότητα Β11.3).

## B11.2. ΔΙΑΧΥΣΗ ΡΥΠΟΥ ΣΕ ΥΔΑΤΟΡΡΕΥΜΑ

### B11.2.1. Το πρόβλημα αρχικών τιμών

Σαν πρώτη εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού θεωρούμε την εξίσωση της διαχύσεως ρύπου σε υδατόρρευμα. Το υδατόρρευμα θεωρείται άπειρου μήκους:  $-\infty < x < \infty$  με  $x$  τη θέση κατά μήκος του. Θεωρούμε επίσης τις χρονικές στιγμές  $t > 0$  με αρχή του χρόνου τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Αυτές οι δύο μεταβλητές: η θέση  $x$  και ο χρόνος  $t$  είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές. Η άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή) που επιθυμούμε να προσδιορίσουμε είναι η συγκέντρωση  $c = c(x, t)$  του ρύπου στο νερό του υδατορρέυματος.

Έχουμε ήδη αναφερθεί στο σημαντικό αυτό πρόβλημα της Περιβαλλοντικής Υδραυλικής στην Παράγραφο Β2.1.4 (στο Κεφάλαιο Β2). Εκεί αναφερθήκαμε στην εξίσωση της διαχύσεως και στις εφαρμογές της. Μια από τις εφαρμογές αυτές είναι η διάχυση (μοριακή διάχυση) ρύπου σε υδατόρρευμα. Το φαινόμενο αυτό σύμφωνα με το γενικό νόμο της διαχύσεως του Fick στη μία διάσταση (όπως συμβαίνει σε υδατόρρευμα) διέπεται από τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (2.1.53). Την επαναλαμβάνουμε

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (11.2.1)$$

σημειώνοντας μάλιστα και τα διαστήματα μεταβολής των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών: της θέσεως  $x$  και του χρόνου  $t$ . Η σταθερά  $D$  στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1) καλείται **συντελεστής μοριακής διαχύσεως**, απλούστερα **συντελεστής διαχύσεως**. Πρόκειται για γνωστή θετική σταθερά.

Η πιο πάνω μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως και με σταθερούς συντελεστές: τους 1 και  $D$ . Είναι επίσης ομογενής, επειδή η άγνωστη συγκέντρωση  $c = c(x, t)$  του ρύπου παρουσιάζεται και στους δύο όρους της, δηλαδή και στον όρο του αριστερού μέλους σαν πρώτη χρονική μερική παράγωγος  $\partial c / \partial t$  και στον όρο του δεξιού μέλους σαν δεύτερη χωρική μερική παράγωγος  $\partial^2 c / \partial x^2$ . Πρόκειται

επίσης, όπως γνωρίζουμε ήδη από την Παράγραφο B1.3.2γ, για μια εξίσωση παραβολικού τύπου (απλούστερα παραβολική εξίσωση). Επιτρέπεται βέβαια να χαρακτηρίσουμε τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1) σαν παραβολικού τύπου, επειδή είναι γραμμική και δευτέρας τάξεως με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και, το βασικό, έχει μηδενική διακρίνουσα  $\Delta = 0$ , όπως ήδη γνωρίζουμε από την παράγραφο B1.3.2γ, σχέση (1.3.12).

Την εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1) τη θεωρούμε ότι συνοδεύεται και από την αρχική συνθήκη (για  $t = 0$ )

$$c(x, 0) = f(x) \tag{11.2.2}$$

με τη γνωστή συνάρτηση  $f(x)$  να δηλώνει την αρχική (για  $t = 0$ ) συγκέντρωση του ρύπου στο υδατόρρευμα. Επειδή η χρονική παράγωγος  $\partial c/\partial t$  στην εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1) είναι πρώτης τάξεως, είναι εύλογο να έχουμε μία μόνο αρχική συνθήκη (για  $t = 0$ ): τη συνθήκη (11.2.2).

Για τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές  $x$  (τη θέση κατά μήκος του υδατορρέυματος) και  $t$  (το χρόνο) παρατηρούμε τα εξής: Η πρώτη μεταβλητή  $x$  μεταβάλλεται στο άπειρο διάστημα  $(-\infty, \infty)$ . Άρα μπορούμε, επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier, όπως την εκθέσαμε στην προηγούμενη Ενότητα B11.1, ως προς τη μεταβλητή αυτή  $x$ . Αυτό ισχύει, γιατί το διάστημα μεταβολής της  $x$ , το διάστημα  $(-\infty, \infty)$ , συμπίπτει με το διάστημα ολοκλήρωσεως  $(-\infty, \infty)$  στον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier (11.1.2) ή, καλύτερα, (11.1.8) ως προς τη μεταβλητή  $x$ .

Στα σημεία  $x \rightarrow \pm\infty$  υποθέτουμε την άγνωστη συνάρτηση  $c(x, t)$  (τη συγκέντρωση του ρύπου) μηδενική. Την ίδια ακριβώς υπόθεση κάνουμε και για την πρώτη μερική παράγωγο της ως προς τη θέση  $x$ : τη συνάρτηση  $\partial c/\partial x$ . Συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι

$$c(\pm\infty, t) := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} c(x, t) = 0 \quad \text{και επίσης} \quad \frac{\partial c}{\partial x}(\pm\infty, t) := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = 0. \tag{11.2.3}$$

Οι συνοριακές αυτές συνθήκες (11.2.3) είναι αναγκαίο να υποτεθούν ότι ισχύουν και πραγματικά γενικά ισχύουν για  $x \rightarrow \pm\infty$ . Έτσι είναι δυνατή η χρήση του τύπου (11.1.11) για το μετασχηματισμό Fourier της δεύτερης μερικής παραγώγου  $\partial^2 c/\partial x^2$  της άγνωστης συναρτήσεως  $c = c(x, t)$  ως προς τη θέση  $x$ . Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$C(\omega, t) = \mathcal{F}\{c(x, t)\} \tag{11.2.4}$$

για το μετασχηματισμό Fourier της άγνωστης συναρτήσεως: της συγκεντρώσεως του ρύπου  $c(x, t)$  στο νερό του υδατορρέυματος. Επομένως με βάση τον τύπο (11.1.11) ο μετασχηματισμός Fourier της δεύτερης χωρικής μερικής παραγώγου  $\partial^2 c/\partial x^2$  της συγκεντρώσεως  $c(x, t)$  θα έχει τη μορφή

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right\} = (i\omega)^2 C(\omega, t) = -\omega^2 C(\omega, t). \tag{11.2.5}$$

Βέβαια για την ισχύ του τύπου αυτού (11.2.5) έχουμε ήδη υποθέσει την ισχύ των συνθηκών (11.2.3) για  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Ας σημειώσουμε επίσης ότι οι συνοριακές συνθήκες (11.2.3) για  $x \rightarrow \pm\infty$  δε μας δίνονται ρητά σαν συνοριακές συνθήκες του παρόντος προβλήματος διαχύσεως ρύπου, αλλά πρέπει εμείς οι ίδιοι να υποθέσουμε την ισχύ τους. Τούτο είναι αναγκαίο όχι μόνο για τη χρήση του τύπου (11.1.11) στο μετασχηματισμό Fourier της δεύτερης χωρικής μερικής παραγώγου, αλλ' εν μέρει και τυπικά. Συγκεκριμένα, έχοντας προς επίλυση τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1) με δεύτερη χωρική μερική παράγωγο  $\partial^2 c/\partial x^2$  αυτήν, πρέπει να έχουμε και δύο συνοριακές συνθήκες στα άκρα του διαστήματος ισχύος της  $x = \pm\infty$ . Οι συνθήκες αυτές είναι οι δύο πρώτες από τις συνθήκες (11.2.3):  $c(\pm\infty, t) = 0$ .

Συμπεραίνοντας, διαθέτουμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών που αποτελείται από την εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1), την αρχική συνθήκη (11.2.2) και τις συνοριακές (στο

άπειρο) συνθήκες (11.2.3). Τις βοηθητικές, τις συνοριακές συνθήκες (11.2.3) τις πήραμε ήδη υπόψη μας έχοντας δεχθεί την ισχύ του τύπου (11.2.5) για τη δεύτερη χωρική μερική παράγωγο  $\partial^2 c / \partial x^2$ .

Στην επόμενη παράγραφο θα προχωρήσουμε στην επίλυση του παρόντος προβλήματος με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$ . Είμαστε πλέον έτοιμοι για την εργασία αυτή. Το μόνο που θέλουμε να προσθέσουμε εδώ είναι ότι αντί για το μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$  (ως προς τη θέση  $x$  στο άπειρο διάστημα μεταβολής της  $(-\infty, \infty)$ ) θα μπορούσαμε, εναλλακτικά, να είχαμε προτιμήσει τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace  $\mathcal{L}$  (ως προς το χρόνο  $t$  στο ημιάπειρο διάστημα μεταβολής του  $[0, \infty)$ ). Αυτή είναι μια δεύτερη δυνατότητα που δε θα την ακολουθήσουμε όμως.

Μια τρίτη δυνατότητα αποτελεί βέβαια η χρήση της τόσο γνωστής μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών του Κεφαλαίου Β5. Μπορούμε έτσι να υποθέσουμε ότι

$$c(x, t) = X(x)T(t) \quad (11.2.6)$$

με την  $X(x)$  χωρική συνάρτηση (της θέσεως  $x$ ) και την  $T(t)$  χρονική συνάρτηση (του χρόνου  $t$ ). Πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί με τη δυνατότητα αυτή (11.2.6) του χωρισμού των μεταβλητών, επειδή η μεταβλητή  $x$  μεταβάλλεται κατά μήκος του υδατορρέυματος στο άπειρο χωρικό διάστημα  $(-\infty, \infty)$ . Άρα δε θα υπάρξουν ιδιοτιμές ή χαρακτηριστικές τιμές για τη χωρική συνάρτηση  $X(x)$ . Τελικά θα προκύψει η λύση  $c(x, t)$  με τη μορφή ολοκληρώματος Fourier και όχι αθροίσματος, όπως έχουμε συνηθίσει για πεπερασμένα χωρικά διαστήματα  $[a, b]$ .

Μια τελευταία παρατήρηση αφορά στο γεγονός ότι η εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1) που θέλουμε να επιλύσουμε είναι ομογενής. Σημειώνουμε όμως σχετικά ότι η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier που επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε είναι απόλυτα κατάλληλη και για ομογενείς αλλά και για μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και με σταθερούς βέβαια συντελεστές. (Αυτό έχει ήδη αναφερθεί.) Ακριβώς το ίδιο ισχύει και για τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, η οποία είναι επίσης εφαρμόσιμη στο παρόν πρόβλημα Περιβαλλοντικής Υδραυλικής, αυτή όμως με μετασχηματισμό ως προς το χρόνο  $t$  (όχι τη θέση  $x$ ). Αντίθετα η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών είναι μεν εφαρμόσιμη στην παρούσα εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1), που είναι πραγματικά ομογενής, αλλά θα υπήρχε κάποια δυσκολία, εάν ήταν μη ομογενής. Στην περίπτωση μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών απαιτεί κατάλληλη επέκταση μέσω της μεθόδου της μεταβολής των παραμέτρων. Την επέκταση αυτή την εξετάσαμε συνοπτικά στο τέλος του Κεφαλαίου Β5 και τη χρησιμοποιήσαμε εκτενέστερα στο Κεφάλαιο Β6.

### **B11.2.2. Εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier**

Μετά τον ορισμό του προβλήματος και την επιλογή του μετασχηματισμού Fourier ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή  $x$  (με  $-\infty < x < \infty$ ) σαν κατάλληλης μεθόδου επίλυσεως, προχωράμε στο καθαρά υπολογιστικό μέρος της επίλυσεως. Θα εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό Fourier τόσο (α) στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1) όσο και (β) στην αρχική συνθήκη (11.2.2) που τη συνοδεύει. Και οι δύο βέβαια περιέχουν τη χωρική μεταβλητή  $x$ , η οποία με το μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}$  θα αντικατασταθεί από τη μεταβλητή  $\omega$  του μετασχηματισμού Fourier.

Ξεκινάμε με τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1). Εφαρμόζουμε και στα δύο μέλη της το μετασχηματισμό Fourier ως προς τη θέση  $x$ . Έχουμε ήδη ορίσει στη σχέση (11.2.4) το σύμβολο  $C(\omega, t) = \mathcal{F}\{c(x, t)\}$  για το μετασχηματισμό Fourier της άγνωστης συναρτήσεως  $c(x, t)$ : της συγκεντρώσεως του ρύπου στο υδατόρρευμα. Εξάλλου από τον τύπο (11.2.5) γνωρίζουμε ήδη και το μετασχηματισμό Fourier της δεύτερης χωρικής μερικής παραγώγου  $\partial^2 c / \partial x^2$ . Στη συνέχεια από τον τύπο (11.1.17) παίρνουμε επίσης (με  $k = 1$ ) το μετασχηματισμό Fourier της πρώτης χρονικής μερικής παραγώγου  $\partial c / \partial t$  της άγνωστης συναρτήσεως  $c(x, t)$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial c}{\partial t}\right\} = \frac{\partial C(\omega, t)}{\partial t} \equiv \dot{C}(\omega, t). \quad (11.2.7)$$



Το τελευταίο σύμβολο  $\dot{C}(\omega, t)$  δηλώνει προφανώς (με την τελεία πάνω από το  $C$ ) την πρώτη χρονική μερική παράγωγο του προς το παρόν άγνωστου μετασχηματισμού Fourier  $C(\omega, t) = \mathcal{F}\{c(x, t)\}$ .

Άρα με τη χρήση των τύπων (11.2.7) και (11.2.5) η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1) μετασχηματίζεται κατά Fourier (ως προς  $x$ ) παίρνοντας τη μορφή

$$\frac{\partial C(\omega, t)}{\partial t} = -D\omega^2 C(\omega, t) \iff \dot{C}(\omega, t) + D\omega^2 C(\omega, t) = 0. \quad (11.2.8)$$

Πρόκειται βέβαια για μια ομογενή γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση και με σταθερούς συντελεστές: τους 1 και  $D\omega^2$ . Αυτό ήταν το όφελος από τη χρήση του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}$ : η μετατροπή της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγωγούς (11.2.1) στη συνήθη διαφορική εξίσωση (11.2.8). Βέβαια η ανεξάρτητη μεταβλητή στην εξίσωση (11.2.8) είναι ο χρόνος  $t$ . Η μεταβλητή θέσεως  $x$  κατά μήκος του υδατορρεύματος έχει πια αντικατασταθεί στην εξίσωση (11.2.8) από την παράμετρο  $\omega$  του μετασχηματισμού Fourier.

Η συνήθης διαφορική εξίσωση (11.2.8) (ως προς το χρόνο  $t$ ) είναι βέβαια πρώτης τάξεως ως προς την άγνωστη συνάρτηση  $C(\omega, t)$ . Χρειαζόμαστε επομένως και μία αρχική συνθήκη για  $t = 0$ . Η αρχική αυτή συνθήκη προκύπτει άμεσα μετασχηματίζοντας κατά Fourier (εννοείται και πάλι ως προς τη θέση  $x$ , έτσι κι αλλιώς δεν υπάρχει καμία άλλη δυνατότητα!) την αρχική συνθήκη (11.2.2):  $c(x, 0) = f(x)$ , που ισχύει για  $t = 0$ . Με το μετασχηματισμό αυτό Fourier προκύπτει η μετασχηματισμένη συνθήκη

$$C(\omega, 0) = F(\omega) \quad \text{με} \quad F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}. \quad (11.2.9)$$

Στη συνθήκη αυτή προφανώς δηλώσαμε με  $F(\omega)$  το μετασχηματισμό Fourier της γνωστής συναρτήσεως  $f(x)$ , που είναι η αρχική (για  $t = 0$ ) συγκέντρωση του ρύπου στο υδατόρρευμα:  $c(x, 0) = f(x)$ . Με βάση τον τύπο (11.1.2) ορισμού του μετασχηματισμού Fourier ή καλύτερα τον τύπο (11.1.8) με μετασχηματισμό Fourier ως προς τη θέση  $x$ , αφού η συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνωστή, και ο μετασχηματισμός Fourier της  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$  θεωρείται και αυτός γνωστή συνάρτηση.

Φθάσαμε επομένως μέχρι το σημείο να διαθέτουμε την ομογενή γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (11.2.8) (ως προς το χρόνο  $t$ ) μαζί με την αρχική συνθήκη της (11.2.9). Έχουμε δηλαδή ένα πολύ απλό πρόβλημα αρχικών τιμών στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Για τη συνήθη διαφορική εξίσωση (11.2.8) δε χρειάζεται να κάνουμε και δεύτερο μετασχηματισμό, δηλαδή εδώ να τη μετασχηματίσουμε κατά Laplace ως προς το χρόνο  $t$  (με  $0 < t < \infty$ ). Σίγουρα είναι απλούστερη η μέθοδος της εκθετικής αντικαταστάσεως και της σχετικής χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_1(\mu) = 0$  για τη γραμμική συνήθη διαφορική εξίσωση (11.2.8):

$$p_1(\mu) = \mu + D\omega^2 = 0 \implies \mu = \mu_1 = -D\omega^2. \quad (11.2.10)$$

Επομένως η γενική λύση της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (11.2.8) θα έχει τη μορφή

$$C(\omega, t) = A(\omega) e^{\mu_1 t} = A(\omega) e^{-D\omega^2 t}. \quad (11.2.11)$$

Στη γενική αυτή λύση χρησιμοποιήσαμε βέβαια τη ρίζα  $\mu = \mu_1 = -D\omega^2$  της χαρακτηριστικής εξισώσεως  $p_1(\mu) = 0$ , που μόλις βρήκαμε στη σχέση (11.2.10). Έχουμε σημειώσει επίσης ότι η σταθερά  $A$  στη λύση αυτή είναι συνάρτηση της παραμέτρου  $\omega$  του μετασχηματισμού Fourier, δηλαδή  $A = A(\omega)$ . Αυτό είναι απόλυτα σωστό και δικαιολογημένο, επειδή η παράμετρος  $\omega$  δεν έχει καμία απολύτως σχέση με την ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$  στη συνήθη διαφορική εξίσωση (11.2.8) και δεν υπεισέρχεται στην παράγωγο στην εξίσωση αυτή.

Από τη γενική λύση (11.2.11) προχωράμε πλέον εύκολα και στην αντίστοιχη μερική (ή ειδική) λύση λαμβάνοντας τώρα υπόψη και την αρχική συνθήκη (11.2.9). Πραγματικά, θέτοντας  $t = 0$  στη γενική λύση (11.2.11), βρίσκουμε αμέσως ότι

$$C(\omega, 0) = A(\omega), \quad \text{επειδή} \quad e^0 = 1. \quad (11.2.12)$$

Όμως λόγω και της αρχικής συνθήκης (11.2.9), δηλαδή της συνθήκης  $C(\omega, 0) = F(\omega)$ , είναι πια φανερό από τη σχέση (11.2.12) ότι

$$A(\omega) = F(\omega). \quad (11.2.13)$$

Επομένως η μερική (ή ειδική) λύση  $C(\omega, t)$  που θέλουμε να προσδιορίσουμε προκύπτει άμεσα από τη γενική λύση (11.2.11) θέτοντας απλά σ' αυτήν  $A(\omega) = F(\omega)$ . Άρα παίρνουμε τη μερική λύση

$$C(\omega, t) = F(\omega) e^{-D\omega^2 t} \quad (11.2.14)$$

της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (11.2.8) που συνοδεύεται από την αρχική συνθήκη (11.2.9) ή, ισοδύναμα, του προβλήματος αρχικών τιμών (11.2.8) και (11.2.9). Επαναλαμβάνεται ότι στη λύση αυτή  $C(\omega, t)$  η συνάρτηση  $F(\omega)$  είναι γνωστή: είναι απλά ο μετασχηματισμός Fourier της αρχικής συνθήκης  $f(x)$  (για  $t = 0$ ). Και η σταθερά  $D$  είναι επίσης γνωστή. Είναι ο γνωστός συντελεστής (μοριακής) διαχύσεως στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1).

### B11.2.3. Αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier

Το μόνο που απομένει τώρα για τον προσδιορισμό της λύσεως στο πεδίο της θέσεως  $x$  κατά μήκος του υδατορρέυματος είναι η αντιστροφή  $\mathcal{F}^{-1}$  του μετασχηματισμού Fourier  $C(\omega, t)$  της λύσεως  $c(x, t)$  του αρχικού προβλήματός μας (11.2.1), (11.2.2) και (11.2.3). Έχουμε δηλαδή με βάση και τη λύση (11.2.14)

$$c(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\{C(\omega, t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega) e^{-D\omega^2 t}\}. \quad (11.2.15)$$

Για την αντιστροφή αυτή κατά Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$  θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (11.1.20) της Παραγράφου Β11.1.6. Το γράφουμε στην αντίστροφη μορφή του

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\sqrt{\pi} b e^{-b^2 \omega^2 / 4}\right\} = e^{-x^2 / b^2} \quad \text{με } b > 0. \quad (11.2.16)$$

Θέτοντας μάλιστα

$$b^2 / 4 = Dt \implies b^2 = 4Dt \implies b = 2\sqrt{Dt} \quad \text{με } b > 0 \quad (11.2.17)$$

στον τύπο (11.2.16) και διαιρώντας επίσης με  $\sqrt{\pi} b = 2\sqrt{\pi Dt}$  (λόγω της σχέσεως (11.2.17)), ξαναγράφουμε τον τύπο αυτό (11.2.16) στη μορφή

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-D\omega^2 t}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2 / (4Dt)}. \quad (11.2.18)$$

Άρα γνωρίζουμε τώρα τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$  και των δύο συναρτήσεων  $F(\omega)$  και  $e^{-D\omega^2 t}$  στο γινόμενο  $F(\omega) e^{-D\omega^2 t}$  στη λύση (11.2.15) που θέλουμε να αντιστρέψουμε κατά Fourier. Συγκεκριμένα ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$  της συναρτήσεως  $F(\omega)$  είναι απλά η γνωστή συνάρτηση  $f(x)$  στην αρχική συνθήκη (11.2.2). Επίσης ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$  της συναρτήσεως  $e^{-D\omega^2 t}$  μόλις βρέθηκε στον παραπάνω τύπο (11.2.18).

Υπό τις συνθήκες αυτές η προφανής εργασία η οποία μας απομένει είναι η χρήση του τόσο σημαντικού θεωρήματος της συνελίξεως (11.1.22), που αναφέρθηκε στην Παράγραφο Β11.1.7 για το μετασχηματισμό Fourier. Ξαναγράφουμε το θεώρημα αυτό, εδώ στην αντίστροφη μορφή του

$$\mathcal{F}^{-1}\{U_1(\omega) U_2(\omega)\} = u_1(x) * u_2(x) := \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\xi) u_2(x - \xi) d\xi. \quad (11.2.19)$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της συνελίξεως στη μορφή του αυτή και θέτοντας σ' αυτό  $U_1(\omega) = F(\omega)$  και  $U_2(\omega) = e^{-D\omega^2 t}$ , βρίσκουμε τη ζητούμενη λύση  $c(x, t)$  στη σχέση (11.2.15) στην εξής τελική ολοκληρωτική της μορφή, δηλαδή σε μορφή τύπου που περιέχει ολοκλήρωμα:

$$c(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(x-\xi)^2 / (4Dt)} d\xi \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}\right] d\xi. \quad (11.2.20)$$

Στην τελευταία (αλλ' ισοδύναμη βέβαια) μορφή της λύσεως αυτής  $c(x, t)$  χρησιμοποιήσαμε και το γνωστό σύμβολο  $\exp$  για την εκθετική συνάρτηση, δηλαδή  $\exp y \equiv e^y$ .

Φυσικά για την εύρεση της μορφής αυτής πήραμε υπόψη και τη σχέση (11.2.17). Σημειώνουμε επίσης ότι η αντιστροφή αυτή  $\mathcal{F}^{-1}$  του μετασχηματισμού Fourier (11.2.15) έγινε ως προς τη θέση  $x$  κατά μήκος του υδατορρέυματος, όχι ως προς το χρόνο  $t$ . Ο χρόνος  $t$  ήταν απλά μια παράμετρος κατά τη διάρκεια της αντιστροφής αυτής. Η πιο πάνω λύση (11.2.20) είναι η τελική λύση του παρόντος προβλήματος διαχύσεως ρύπου σε υδατόρρευμα και καθορίζει τη συγκέντρωση  $c(x, t)$  του ρύπου στο νερό του υδατορρέυματος σε κάθε θέση  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ) και επίσης για κάθε χρονική στιγμή  $t$  ( $t > 0$ ).

Απαραίτητη βέβαια προϋπόθεση για τη χρήση της λύσεως (11.2.20) είναι να γνωρίζουμε την αρχική (για  $t = 0$ ) συνάρτηση  $f(x)$  της συγκεντρώσεως  $c(x, t)$  του ρύπου. Η συνάρτηση αυτή  $f(x)$  αποτελεί τον πρώτο όρο  $f(\xi)$  (δηλαδή με  $\xi$  αντί  $x$ ) της ολοκληρωτέας συναρτήσεως στον τελικό ολοκληρωτικό τύπο (11.2.20). Για ειδικές συναρτήσεις  $f(x)$  το σχετικό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί και σε κλειστή μορφή. Αλλιώς μπορεί να υπολογισθεί προσεγγιστικά ή και αριθμητικά.

**B11.2.4. Αλλαγή μεταβλητής ολοκληρώσεως**

Λόγω του μάλλον πολύπλοκου εκθετικού όρου στην ολοκληρωτέα συνάρτηση στην τελική λύση (11.2.20) αρκετά συχνά η λύση αυτή γράφεται με τη βοήθεια αλλαγής μεταβλητής ολοκληρώσεως. Πιο συγκεκριμένα ορίζουμε τη νέα μεταβλητή ολοκληρώσεως

$$\eta = \frac{\xi - x}{2\sqrt{Dt}} \implies d\eta = \frac{d\xi}{2\sqrt{Dt}} \text{ και επίσης } \xi = x + 2\sqrt{Dt}\eta. \tag{11.2.21}$$

Με αυτήν την αλλαγή μεταβλητής ολοκληρώσεως (από  $\xi$  σε  $\eta$ ) το όρισμα της εκθετικής συναρτήσεως  $\exp$  στη λύση (11.2.20) είναι απλά το  $-\eta^2$ . Τα όρια ολοκληρώσεως παραμένουν τα ίδια.

Επομένως εύκολα διαπιστώνουμε τώρα ότι η τελική λύση (11.2.20) μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη απλούστερη μορφή της:

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2\sqrt{Dt}\eta) e^{-\eta^2} d\eta. \tag{11.2.22}$$

Η μορφή αυτή (11.2.22) της λύσεως (11.2.20) μας διευκολύνει συχνά στην εφαρμογή της σε συγκεκριμένα προβλήματα. Αυτό ισχύει ιδίως όταν η συνάρτηση (αρχική συνθήκη)  $f(x)$  είναι τμηματικά σταθερή. Παράδειγμα τμηματικά σταθερής συναρτήσεως αποτελεί η συνάρτηση  $f(x)$  που ορίζεται σαν  $f(x) = c_0$  (με το  $c_0$  θετική σταθερά) εάν  $x \leq 0$  και σαν  $f(x) = 0$  εάν  $x > 0$ .

**B11.2.5. Ταυτόχρονη μεταγωγή και διάχυση του ρύπου**

Σχεδόν πάντοτε η διάχυση του ρύπου στο υδατόρρευμα συνοδεύεται και από μεταγωγή του λόγω της κινήσεως του νερού του υδατορρέυματος με ταχύτητα  $V$ , που εδώ την υποθέτουμε σταθερή. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση της διαχύσεως (καλύτερα της μοριακής διαχύσεως) (11.2.1) παίρνει τη γενικευμένη μορφή της εξισώσεως της μεταγωγής-διαχύσεως (2.1.58)

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \tag{11.2.23}$$

Γι' αυτήν όμως την εξίσωση (11.2.23) γνωρίζουμε ήδη από το Κεφάλαιο B1 ότι η αλλαγή μεταβλητής  $\chi = x - Vt$  (δηλαδή το  $x$  να αντικατασταθεί από το  $\chi$  σαν ανεξάρτητη μεταβλητή θέσεως) τη μετατρέπει στην εξίσωση της διαχύσεως (11.2.1), δηλαδή στην εξίσωση

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial \chi^2}, \quad -\infty < \chi < \infty, \quad t > 0. \tag{11.2.24}$$

Απλά τώρα έχουμε τη νέα μεταβλητή θέσεως  $\chi = x - Vt$  αντί της  $x$  παντού στην εξίσωση αυτή. Δηλαδή τώρα  $c = c(\chi, t)$  με  $\chi = x - Vt$ . (Επίσης και η παραγωγή στο δεξιό μέλος πρέπει να γίνει τώρα ως προς  $\chi$ .) Ευτυχώς για  $t = 0$  έχουμε  $\chi = x$ . Άρα η αρχική συνθήκη (11.2.2) δεν αλλάζει.

Επομένως, για να μη μακρηγορούμε, η τελική λύση (11.2.20) ή, ισοδύναμα, (11.2.22) που βρήκαμε για την εξίσωση της διαχύσεως (μοριακής διαχύσεως) (11.2.1) ισχύει και για την εξίσωση της μεταγωγής-διαχύσεως (11.2.23), ισοδύναμα (11.2.24). Αρκεί βέβαια να φροντίσουμε να θέσουμε σ' αυτήν τη νέα μεταβλητή  $\chi = x - Vt$  στη θέση της αρχικής μεταβλητής  $x$ . Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε τις κάπως γενικευμένες αντίστοιχες λύσεις

$$c(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(x-Vt-\xi)^2/(4Dt)} d\xi \equiv \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\left[-\frac{(x-Vt-\xi)^2}{4Dt}\right] d\xi \quad (11.2.25)$$

και

$$c(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - Vt + 2\sqrt{Dt}\eta) e^{-\eta^2} d\eta \quad (11.2.26)$$

αντίστοιχα. Ας σημειώσουμε τέλος ότι προφανώς η νέα μεταβλητή  $\chi = x - Vt$  που χρησιμοποιήσαμε δηλώνει ουσιαστικά την κίνησή μας μαζί με το νερό του υδατορρέυματος και με την ίδια ακριβώς ταχύτητα  $V$  αντί για την παραμονή μας σε ένα σταθερό σημείο  $x$ .

### B11.3. ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΠΕΙΡΗΣ ΔΟΚΟΥ

#### B11.3.1. Το πρόβλημα αρχικών τιμών

Σαν δεύτερη εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού θεωρούμε τις ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού άπειρου μήκους ( $-\infty < x < \infty$ ). Ασφαλώς σε ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις δεν υπάρχει κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x, t)$  ή άλλη φόρτιση που να εφαρμόζεται στη δοκό. Πρόκειται για κλασικό πρόβλημα της Τεχνικής Θεωρίας της Κάμψεως στη Δυναμική των Κατασκευών, αν και (πρέπει να ομολογηθεί αυτό) αρκετά εξιδανικευμένο πρόβλημα λόγω της παραδοχής του άπειρου μήκους της δοκού. Το πρόβλημα αυτό ανάγεται στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (3.2.56), δηλαδή στην εξίσωση

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty, \quad (11.3.1)$$

εδώ όμως για δοκό άπειρου μήκους. Άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως  $v = v(x, t)$  στη δοκό με  $x$  τη θέση κατά μήκος της (χωρική μεταβλητή) και  $t$  το χρόνο (χρονική μεταβλητή). Σημειώνεται επίσης ότι  $EI$  είναι η (σταθερή) δυσκαμψία της δοκού,  $\rho$  η (επίσης σταθερή) πυκνότητα του υλικού της (ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό σε συνήθη δοκό) και  $A$  το εμβαδόν της διατομής της (σταθερό σε συνήθη δοκό). Επομένως το γινόμενο  $\rho A$  στην εξίσωση (11.3.1) είναι η γραμμική πυκνότητα της δοκού.

Διαιρώντας τη βασική εξίσωση (11.3.1) δια της δυσκαμψίας  $EI$  και χρησιμοποιώντας για διευκόλυνση το βοηθητικό σύμβολο (θετική σταθερά)  $a$  με ορισμό

$$a^2 = \frac{EI}{\rho A} \iff \frac{1}{a^2} = \frac{\rho A}{EI}, \quad (11.3.2)$$

η εξίσωση (11.3.1) παίρνει τη λίγο συντομότερη μορφή (11.1.16), δηλαδή

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty. \quad (11.3.3)$$

Αυτή τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους θα μελετήσουμε στην ενότητα αυτή. Υποθέτουμε την ίδια εξίσωση ότι συνοδεύεται από τις δύο αρχικές συνθήκες

$$v(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (11.3.4)$$

Οι συνθήκες αυτές ισχύουν τη χρονική στιγμή  $t = 0$  ενάρξεως των ελεύθερων καμπτικών ταλαντώσεων που μελετάμε ή, τουλάχιστον, ενάρξεως της μελέτης από εμάς των ταλαντώσεων αυτών. Ασφαλώς οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$  είναι γνωστές και υποτίθεται ότι μηδενίζονται για  $x \rightarrow \pm\infty$ . Η γνωστή συνάρτηση  $f(x)$  παριστάνει το αρχικό σχήμα της δοκού, την ελαστική γραμμή της, την εγκάρσια μετατόπιση των σημείων της δοκού (για  $t = 0$ ). Η επίσης γνωστή συνάρτηση  $g(x)$  παριστάνει την αρχική εγκάρσια ταχύτητα των σημείων της δοκού (πάλι για  $t = 0$ ).

Σημειώνουμε ότι δεν έχουμε συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες στο άπειρο (για  $x \rightarrow \pm\infty$ ). Φυσικά δεχόμαστε όμως το μηδενισμό της άγνωστης συναρτήσεως (του βέλους κάμψεως)  $v(x, t)$  και των τριών πρώτων παραγώγων της ως προς τη θέση  $x$  στο άπειρο, δηλαδή με βάση τις συνθήκες (11.1.15), εδώ για  $n = 4$ , έχουμε

$$v(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^k v(x, t)}{\partial x^k} \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad \text{για} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad t \geq 0. \quad (11.3.5)$$

Με τις λίγο-πολύ προφανείς αυτές συνοριακές συνθήκες επιδιώκουμε να εξασφαλίσουμε την ισχύ των τύπων (11.1.10) έως και (11.1.13) για τους μετασχηματισμούς Fourier (ως προς τη θέση  $x$ ) των τεσσάρων πρώτων μερικών παραγώγων (ως προς  $x$ ) της άγνωστης συναρτήσεως (του βέλους κάμψεως)  $v(x, t)$ . Ο τελευταίος από τους τύπους αυτούς, ο τύπος (11.1.13), ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί πιο κάτω, παίρνει στην περίπτωση μας τη μορφή

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4}\right\} = \omega^4 V(\omega, t), \quad t \geq 0. \quad (11.3.6)$$

Στη σχέση αυτή το σύμβολο  $V(\omega, t)$  δηλώνει το μετασχηματισμό Fourier ως προς τη θέση  $x$  (όχι ως προς το χρόνο  $t$ ) του άγνωστου βέλους κάμψεως  $v(x, t)$  στην καμπτικά ταλαντούμενη δοκό (εξαιτίας μόνο των αρχικών συνθηκών (11.3.4), μελετάμε ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις!), δηλαδή

$$V(\omega, t) = \mathcal{F}\{v(x, t)\}, \quad t \geq 0. \quad (11.3.7)$$

Ας τονισθεί ότι θα χρησιμοποιήσουμε το μετασχηματισμό Fourier ως προς τη θέση  $x$ , επειδή  $-\infty < x < \infty$ , και όχι ως προς το χρόνο  $t$ , γιατί  $t \geq 0$  και δε διαθέτουμε πληροφορίες για τις χρονικές στιγμές  $t < 0$ . Επομένως, όπως ήδη έχουμε παρατηρήσει και στις δύο προηγούμενες ενότητες, η μεταβλητή  $\omega$  δηλώνει εδώ απλά τη μεταβλητή του μετασχηματισμού Fourier. (Με άλλα λόγια η μεταβλητή αυτή  $\omega$ , εδώ του μετασχηματισμού Fourier, δεν έχει καμία απολύτως σχέση με την έννοια της κυκλικής συχνότητας, παρόλο που συνήθως χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο  $\omega$  και για την κυκλική συχνότητα.) Αντίθετα, αν προτιμούσαμε να εργασθούμε ως προς το χρόνο  $t$ , θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace μαζί με τις αρχικές συνθήκες (11.3.4) την ώρα του μετασχηματισμού Laplace, όχι αργότερα. Αυτονόητο όμως είναι ότι θα έπρεπε επίσης να μεταφέρουμε την παρούσα ενότητα στο προηγούμενο Κεφάλαιο B10, το οποίο αφορά στη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace! Το παρόν Κεφάλαιο B11 αφορά στη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier και πάλι όμως με εφαρμογή της στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και επίσης με κατά το δυνατόν έμφαση (συνεχή, διαρκή έμφαση!) στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

### B11.3.2. Εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier

Χρησιμοποιούμε και τώρα το συμβολισμό (11.3.7):  $V(\omega, t) = \mathcal{F}\{v(x, t)\}$  για το μετασχηματισμό Fourier της άγνωστης συναρτήσεως (του βέλους κάμψεως της δοκού)  $v(x, t)$ . Χρησιμοποιούμε

επίσης και τον τύπο (11.3.6) για το μετασχηματισμό Fourier της τέταρτης χωρικής (ως προς τη θέση  $x$ ) μερικής παραγώγου της άγνωστης συναρτήσεως  $v(x, t)$ . Είναι επίσης αναγκαία η χρήση και του τύπου (11.1.17) (με  $k = 2$  και για την παρούσα άγνωστη συνάρτηση  $v(x, t)$  αντί της  $u(x, t)$ ) για το μετασχηματισμό Fourier της δεύτερης χρονικής (ως προς το χρόνο  $t$ ) μερικής παραγώγου της συναρτήσεως  $u(x, t)$ , εδώ  $v(x, t)$ . Μετασχηματίζουμε με τον τρόπο αυτό κατά Fourier (ως προς τη θέση  $x$ ) τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (11.3.3), δηλαδή την εξίσωση των ελεύθερων καμπτικών ταλαντώσεων συνήθους δοκού (που είναι τετάρτης τάξεως). Απαλλασσόμαστε έτσι από τη θέση  $x$  και αναγόμεστε σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως ως προς το χρόνο  $t$ , την εξής:

$$\omega^4 V(\omega, t) + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 V(\omega, t)}{\partial t^2} = 0, \quad t > 0. \quad (11.3.8)$$

Αν μας ενοχλεί το σύμβολο της μερικής παραγωγίσεως  $\partial$ , μπορούμε ίσως να χρησιμοποιήσουμε αντί γι' αυτό το σύμβολο της συνήθους παραγωγίσεως  $d$ . Κατανούμε όμως στην περίπτωση αυτή ότι πρόκειται για παραγωγή ως προς το χρόνο  $t$ . (Η μεταβλητή  $\omega$  του μετασχηματισμού Fourier παίζει απλά το ρόλο μιας παραμέτρου στη συνήθη διαφορική εξίσωση (11.3.8).) Στην εξίσωση αυτή (11.3.8) ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος  $t$  και άγνωστη συνάρτηση ο μετασχηματισμός Fourier  $V(\omega, t)$  (ως προς τη θέση  $x$ ) του άγνωστου βέλους κάμψης  $v(x, t)$  στη δοκό που εξετάζουμε.

Θα μπορούσαμε ίσως να ξαναγράψουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση (11.3.8) και στην κάπως καταλληλότερη μορφή της

$$\ddot{V}(\omega, t) + (a\omega^2)^2 V(\omega, t) = 0, \quad t > 0, \quad (11.3.9)$$

με τις δύο τελείες πάνω από σύμβολο  $V$  να δηλώνουν παραγωγή (δευτέρα παράγωγο) ως προς το χρόνο  $t$ . Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως προκύπτει η σχετική δευτεροβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση  $p(\mu) = 0$ . Αυτή είναι πολύ απλή και λύνεται εύκολα:

$$p(\mu) = \mu^2 + (a\omega^2)^2 = 0 \implies \mu^2 = -(a\omega^2)^2 \implies \mu_{1,2} = \pm ia\omega^2 \quad \text{με } i = \sqrt{-1}. \quad (11.3.10)$$

Η συνήθης διαφορική εξίσωση (11.3.8) (ισοδύναμα (11.3.9)) έχει επομένως τριγωνομετρική γενική λύση της μορφής

$$V(\omega, t) = A(\omega) \cos(a\omega^2 t) + B(\omega) \sin(a\omega^2 t). \quad (11.3.11)$$

Στη λύση αυτή οι «σταθερές»  $A$  και  $B$  είναι στην πραγματικότητα συναρτήσεις της παραμέτρου  $\omega$ , κάτι που είναι απόλυτα αποδεκτό, δηλαδή  $A = A(\omega)$  και  $B = B(\omega)$ . Βέβαια οι ίδιες «σταθερές»  $A = A(\omega)$  και  $B = B(\omega)$  δε μπορούν να είναι συναρτήσεις και του χρόνου  $t$ , επειδή ο χρόνος  $t$  είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (11.3.9).

Η τριγωνομετρική αυτή γενική λύση (11.3.11) δεν πρέπει να μας ξαφνιάζει, αλλ' αντίθετα να μας καθησυχάζει ως προς την ορθότητα της λύσεως αυτής. Αυτό συμβαίνει, γιατί μελετάμε ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις της δοκού. Στις ταλαντώσεις αυτές δεν υπάρχει εξωτερική φόρτιση  $p(x, t)$  ούτε και απόσβεση της κινήσεως της δοκού. Επομένως οι συνηθισμένες (και χωρίς απόσβεση) ταλαντώσεις της δοκού που υπονοεί η γενική λύση (11.3.11) είναι ακριβώς ό,τι περιμένουμε. (Βέβαια η λύση (11.3.11) πρέπει τελικά να καθορισθεί στο πεδίο του χρόνου  $t$ , αφού ληφθούν υπόψη οι δύο αρχικές συνθήκες (11.3.4) και γίνει επίσης αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier  $V(\omega, t)$  στη λύση αυτή (11.3.11).) Αντίθετα η (απίθανη) εμφάνιση υπερβολικών συναρτήσεων (αντί για τριγωνομετρικές συναρτήσεις) στη γενική λύση (11.3.11) θα έπρεπε να μας είχε προβληματίσει έντονα και να είχε διακόψει (προσωρινά) τη συνέχιση των υπολογισμών μας.

Προχωράμε τώρα στον πλήρη καθορισμό της λύσεως  $V(\omega, t)$ , τον οποίο ήδη υπαινιχθήκαμε. Καταρχήν πρέπει να γίνει μετατροπή της γενικής λύσεως (11.3.11) της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (11.3.9) στη συγκεκριμένη μερική λύση που αντιστοιχεί στις δύο αρχικές συνθήκες (11.3.4)

στο παρόν πρόβλημα δοκού στη Δυναμική των Κατασκευών που μελετάμε. Φυσικά, για να χρησιμοποιήσουμε τις αρχικές συνθήκες (11.3.4) (για  $t = 0$ ) στη λύση (11.3.11), πρέπει πρώτα να τις μετασχηματίσουμε και αυτές κατά Fourier. Πρόκειται για μια πολύ εύκολη εργασία και προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες δύο μετασχηματισμένες αρχικές συνθήκες:

$$\mathcal{F}\{v(x, 0)\} = V(\omega, 0) = F(\omega), \quad (11.3.12)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0)\right\} = \frac{\partial V}{\partial t}(\omega, 0) = G(\omega). \quad (11.3.13)$$

Στις δύο μετασχηματισμένες αυτές αρχικές συνθήκες δηλώσαμε με  $F(\omega)$  και  $G(\omega)$  τους μετασχηματισμούς Fourier των γνωστών συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$  αντίστοιχα στις αρχικές συνθήκες (11.3.4), δηλαδή

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}, \quad G(\omega) = \mathcal{F}\{g(x)\} \quad (11.3.14)$$

εννοείται ως προς τη θέση  $x$ . Δεν υπάρχει έτσι κι αλλιώς εναλλακτική δυνατότητα για τις γνωστές συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$ , που είναι συναρτήσεις μόνο της χωρικής μεταβλητής  $x$ !

Με τις μετασχηματισμένες κατά Fourier αρχικές συνθήκες (11.3.4), δηλαδή με τις πιο πάνω συνθήκες (11.3.12) και (11.3.13), η γενική λύση (11.3.11) της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (11.3.9) οδηγεί εύκολα στην αντίστοιχη μερική (ή ειδική) λύση. Καταρχήν, θέτοντας  $t = 0$  στη γενική αυτή λύση (11.3.11) και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη (11.3.12), βρίσκουμε άμεσα ότι

$$V(\omega, 0) = A(\omega) \cdot 1 + B(\omega) \cdot 0 = A(\omega) = F(\omega). \quad (11.3.15)$$

Προσδιορίσαμε επομένως τη «σταθερά»  $A = A(\omega)$  με βάση την πρώτη αρχική συνθήκη (11.3.4) στη μετασχηματισμένη της μορφή (11.3.12). Στη συνέχεια παραγωγίζουμε (ως προς το χρόνο  $t$  φυσικά) τη γενική λύση (11.3.11)

$$\frac{\partial V}{\partial t}(\omega, t) = a\omega^2 [-A(\omega) \sin(a\omega^2 t) + B(\omega) \cos(a\omega^2 t)] \quad (11.3.16)$$

και θέτουμε και πάλι  $t = 0$ . Διαπιστώνουμε έτσι ότι

$$\frac{\partial V}{\partial t}(\omega, 0) = a\omega^2 [-A(\omega) \cdot 0 + B(\omega) \cdot 1] = a\omega^2 B(\omega) = G(\omega) \quad (11.3.17)$$

λόγω και της δεύτερης αρχικής συνθήκης (11.3.4) στη μετασχηματισμένη της μορφή (11.3.13). Συνοψίζοντας

$$A(\omega) = F(\omega) \quad \text{και} \quad B(\omega) = \frac{G(\omega)}{a\omega^2}. \quad (11.3.18)$$

Με βάση τις μετασχηματισμένες κατά Fourier αρχικές συνθήκες (11.3.12) και (11.3.13), τελικά τις συνθήκες (11.3.18), η γενική λύση (11.3.11) της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (11.3.8) (ισοδύναμα (11.3.9)) που προέκυψε με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier μεταπίπτει στη μερική (ή ειδική) λύση

$$V(\omega, t) = F(\omega) \cos(a\omega^2 t) + \frac{G(\omega)}{a\omega^2} \sin(a\omega^2 t). \quad (11.3.19)$$

Η μερική αυτή λύση έχει ενσωματώσει και τις δύο αρχικές συνθήκες (11.3.4) μέσω των μετασχηματισμών Fourier  $F(\omega)$  και  $G(\omega)$  των δύο γνωστών συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$ . Υπενθυμίζεται πως η γνωστή συνάρτηση  $f(x)$  παριστάνει την αρχική θέση των σημείων της δοκού, το αρχικό σχήμα της, την αρχική ελαστική γραμμή της, την αρχική εγκάρσια (κάθετη) μετατόπιση των σημείων της. (Ουσιαστικά πρόκειται για ισοδύναμους όρους.) Επίσης η γνωστή συνάρτηση  $g(x)$  αναφέρεται στην αρχική εγκάρσια ταχύτητα των σημείων της δοκού.

**B11.3.3. Αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier**

Προσδιορίστηκε επομένως πλήρως ο μετασχηματισμός Fourier  $V(\omega, t)$  της άγνωστης συναρτήσεως (του βέλους κάμψεως της δοκού)  $v(x, t)$  στο πρόβλημα αρχικών τιμών (11.3.1) (ισοδύναμα (11.3.3)) και (11.3.4). Απομένει τώρα η αντιστροφή κατά Fourier  $\mathcal{F}^{-1}\{V(\omega, t)\}$  του μετασχηματισμού αυτού  $V(\omega, t)$ . Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$  της συναρτήσεως  $V(\omega, t)$  είναι προφανώς η ίδια η άγνωστη συνάρτηση  $v(x, t)$  και προσδιορίζεται από τον τύπο (11.1.9) αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier. Για την παρούσα δοκό ο τύπος (11.1.9) παίρνει τη μορφή

$$v(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\{V(\omega, t)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} V(\omega, t) d\omega, \quad (11.3.20)$$

λόγω δε και της λύσεως (11.3.19) την τελική του μορφή

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \left[ F(\omega) \cos(a\omega^2 t) + \frac{G(\omega)}{a\omega^2} \sin(a\omega^2 t) \right] d\omega. \quad (11.3.21)$$

Στην τελική αυτή μορφή της λύσεως  $v(x, t)$  οι συναρτήσεις  $F(\omega)$  και  $G(\omega)$  δηλώνουν βέβαια τους μετασχηματισμούς Fourier του αρχικού σχήματος  $f(x)$  και της αρχικής ταχύτητας  $g(x)$  της δοκού αντίστοιχα σύμφωνα με τις σχέσεις ορισμού τους (11.3.14).

Προέκυψε λοιπόν ένας ολοκληρωτικός τύπος, δηλαδή ένας τύπος σε μορφή ολοκληρώματος, ο τύπος (11.3.21). Ο τύπος αυτός δίνει τη λύση  $v(x, t)$  του προβλήματος αρχικών τιμών (11.3.1) (ισοδύναμα (11.3.3)) και (11.3.4), δηλαδή την ελαστική γραμμή, το βέλος κάμψεως της δοκού  $v(x, t)$  σε κάθε σημείο της  $x$  ( $-\infty < x < \infty$ ) και για κάθε χρονική στιγμή  $t$  ( $t \geq 0$ ). Από τον τύπο αυτό (11.3.21) για  $t = 0$  βρίσκουμε εύκολα ότι

$$v(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} F(\omega) d\omega = f(x), \quad (11.3.22)$$

επειδή  $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ , οπότε  $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x)$  παίρνοντας υπόψη και το γνωστό τύπο αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier (11.1.9). Άρα επαληθεύεται η πρώτη αρχική συνθήκη (11.3.4).

Παραγωγίζοντας τον ίδιο ολοκληρωτικό τύπο (11.3.21) ως προς το χρόνο  $t$ , βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} [-a\omega^2 F(\omega) \sin(a\omega^2 t) + G(\omega) \cos(a\omega^2 t)] d\omega. \quad (11.3.23)$$

Άρα για  $t = 0$  και πάλι

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} G(\omega) d\omega = g(x), \quad (11.3.24)$$

αφού  $G(\omega) = \mathcal{F}\{g(x)\}$ , οπότε  $\mathcal{F}^{-1}\{G(\omega)\} = g(x)$ . Άρα επαληθεύεται και η αρχική συνθήκη (11.3.4).

Φυσικά για συγκεκριμένες συναρτήσεις στις δύο αρχικές συνθήκες (11.3.4): (α)  $f(x)$  (αρχικό σχήμα, αρχική μετατόπιση) και (β)  $g(x)$  (αρχική ταχύτητα) στα σημεία  $x$  της δοκού πρέπει να υπολογισθούν πρώτα οι μετασχηματισμοί Fourier τους  $F(\omega)$  και  $G(\omega)$  αντίστοιχα. Στη συνέχεια μπορεί ασφαλώς να υπολογισθεί και η λύση  $v(x, t)$  με βάση τον ολοκληρωτικό τύπο της (11.3.21). Εναλλακτικά οι ορισμοί των μετασχηματισμών Fourier  $F(\omega)$  και  $G(\omega)$  μέσω ολοκληρωμάτων της μορφής (11.1.8) μπορούν να ενσωματωθούν οι ίδιοι στον τελικό τύπο (11.3.21). Ασφαλώς δεν υπάρχει καμία απολύτως εγγύηση ότι τα σχετικά ολοκληρώματα, ιδίως στον ολοκληρωτικό τύπο (11.3.21), έχουν κλειστές, αναλυτικές εκφράσεις. Συνήθως μάλιστα ισχύει το αντίθετο: δεν έχουν.

Στην περίπτωση αυτή υπάρχει συχνά η δυνατότητα λύσεων υπό τη μορφή κατάλληλων (και γενικά πολύπλοκων) δυναμοσειρών. Είναι επίσης δυνατές προσεγγιστικές λύσεις, όπως, π.χ., μέσω πολυωνύμων Chebyshev. Τέλος με τη χρήση αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι δυνατή η εύρεση και αριθμητικών τιμών της λύσεως  $v(x, t)$ , συνήθως όμως (όχι πάντοτε) με υπολογισμούς μόνο για συγκεκριμένες τιμές της σταθεράς  $a$ , της θέσεως  $x$  και της χρονικής στιγμής  $t$  στη λύση (11.3.21). Με τον τρόπο αυτό η ολοκληρωτέα συνάρτηση στη λύση αυτή (11.3.21) θα είναι καθαρά αριθμητική κατά τη διάρκεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης και τούτο μας διευκολύνει στους υπολογισμούς.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *B12*

## ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε πάρα πολύ σύντομα στις προσεγγιστικές και αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγωγούς. Από τις προσεγγιστικές μεθόδους επιλέξαμε να αναφέρουμε την κλασική μέθοδο των Rayleigh–Ritz (1908). Αυτή προσεγγίζει την άγνωστη συνάρτηση με πεπερασμένο άθροισμα απλών συναρτήσεων (που πληρούν όμως τις συνοριακές συνθήκες) και βασίζεται στην αναγωγή του προβλήματος στην ελαχιστοποίηση ενός ολοκληρώματος το οποίο εξαρτάται από την άγνωστη συνάρτηση. Σαν μια εφαρμογή της λύνουμε προσεγγιστικά το πρόβλημα της στρέψεως ράβδου ορθογωνικής διατομής. Υπάρχουν και αρκετές άλλες ενδιαφέρουσες προσεγγιστικές μέθοδοι, τις οποίες όμως δε θα τις αναπτύξουμε εδώ. Από τις καθαρά αριθμητικές μεθόδους επιλέξαμε να αναφερθούμε στην κλασική και πάρα πολύ χρήσιμη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Σαν μια εφαρμογή της εξετάζουμε αριθμητικά το ίδιο πιο πάνω πρόβλημα της στρέψεως ράβδου ορθογωνικής διατομής, τώρα όμως με τετραγωνική διατομή. Μάλιστα συγκρίνουμε στο κέντρο του τετραγώνου τα αποτελέσματα των μεθόδων των Rayleigh–Ritz και των πεπερασμένων διαφορών με την κλειστή λύση. Μια άλλη πολύ ενδιαφέρουσα αριθμητική μέθοδος είναι η γνωστή μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, την οποία όμως δε θα εξετάσουμε εδώ. Τέλος σημειώνουμε ότι σε αρκετά προβλήματα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επίσης τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων. Τη σχετική ολοκληρωτική εξίσωση που αφορά στην εξίσωση του Laplace θα την παρουσιάσουμε πάρα πολύ σύντομα στην τελευταία Ενότητα Γ3.8 του Μέρους Γ που αφορά στις ολοκληρωτικές εξισώσεις. Πρόσφατα με την τόσο αλματώδη ανάπτυξη των υπολογιστικών δυνατοτήτων των ηλεκτρονικών υπολογιστών έχει αυξηθεί ανάλογα και το ενδιαφέρον στις αριθμητικές μεθόδους. Η μελέτη τους εμπίπτει βασικά στην Αριθμητική Ανάλυση.

### B12.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ RAYLEIGH-RITZ

#### B12.1.1. Η κεντρική ιδέα της μεθόδου των Rayleigh–Ritz

Η προσεγγιστική μέθοδος των Rayleigh–Ritz (1908) αποτελεί μια γνωστή και ενδιαφέρουσα μέθοδο προσεγγιστικής επίλυσης διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγωγούς. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην αναγωγή μιας τέτοιας εξισώσεως στο πρόβλημα της ελαχιστοποίησης ενός ολοκληρώματος  $J[u]$  που συνήθως έχει σχέση με τις ενέργειες που σχετίζονται με τη διαφορική εξίσωση. Η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο ολοκλήρωμα αυτό περιλαμβάνει ασφαλώς και την ίδια την άγνωστη συνάρτηση  $u$  της διαφορικής μας εξισώσεως με μερικές παραγωγούς. Τώρα για την προσεγγιστική επίλυση του προβλήματος θεωρούμε την άγνωστη συνάρτηση  $u$  στο ολοκλήρωμα που θα ελαχιστοποιηθεί σαν ένα άθροισμα  $n$  όρων με προσδιοριστέους συντελεστές της μορφής

$$u \approx u_n = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n \equiv \sum_{k=1}^n c_k v_k. \quad (12.1.1)$$

Στο άθροισμα αυτό τα  $v_1, v_2, \dots, v_n$  είναι συναρτήσεις που επιλέγονται για την προσέγγιση αυτή και που πρέπει να πληρούν τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος, όχι όμως και την ίδια τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Τώρα όσον αφορά στους  $n$  άγνωστους συντελεστές  $c_1, c_2, \dots, c_n$  που ελαχιστοποιούν το ολοκλήρωμα (αν και καλό είναι να ελεγχθεί η ελαχιστοποίηση αυτή), αυτοί προσδιορίζονται μέσω του μηδενισμού των σχετικών μερικών παραγώγων. Δηλαδή

$$\frac{\partial J[u]}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial J[u]}{\partial c_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial J[u]}{\partial c_n} = 0. \quad (12.1.2)$$

Σημειώνουμε πως η προσεγγιστική μέθοδος των Rayleigh–Ritz είναι εφαρμόσιμη όχι μόνο σε διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, αλλ' επιπλέον και σε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Εδώ θα την επιδείξουμε μόνο σε ένα πρόβλημα που σχετίζεται με διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους: στο κλασικό πρόβλημα της στρέψεως μιας συνήθους ράβδου ορθογωνικής διατομής.

### B12.1.2. Το πρόβλημα της στρέψεως συνήθους ράβδου ορθογωνικής διατομής

Για την επίδειξη της προσεγγιστικής μεθόδου των Rayleigh–Ritz θεωρούμε ράβδο ορθογωνικής διατομής διαστάσεων  $2a$  επί  $2b$ , εδώ με  $-a \leq x \leq a$  και  $-b \leq y \leq b$ . Γνωρίζουμε ήδη από την Παράγραφο Β2.1.2 του Κεφαλαίου Β2 ότι στο πρόβλημα αυτό ισχύει η εξίσωση του Poisson (2.1.31)

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = -2G\theta \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} = -2G\theta \quad \text{με} \quad -a \leq x \leq a \quad \text{και} \quad -b \leq y \leq b. \quad (12.1.3)$$

Άγνωστη συνάρτηση  $\varphi(x, y)$  είναι εδώ η τασική συνάρτηση του Prandtl,  $G$  είναι το μέτρο διατμήσεως του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της συνήθους ράβδου που καταπονείται σε στρέψη και  $\theta$  είναι η ανά μονάδα μήκους γωνία στρέψεως (ή γωνία στροφής) της ράβδου. Πέρα από τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (12.1.3) θα πρέπει να ισχύει και η συνοριακή συνθήκη

$$\varphi(x, y) = C \quad (\text{σταθερά}) \quad \text{και} \quad \text{συνήθως} \quad \varphi(x, y) = 0 \quad \text{για} \quad C = 0 \quad (12.1.4)$$

σε ολόκληρο το σύνορο της ράβδου, δηλαδή σε όλη την περίμετρο της ορθογωνικής διατομής της. Από τούτη τη στρέψη αναπτύσσονται οι δύο διατμητικές τάσεις (2.1.32). Τις επαναλαμβάνουμε

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{και} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{με} \quad \varphi = \varphi(x, y). \quad (12.1.5)$$

Αυτό το πρόβλημα στρέψεως μπορεί ασφαλώς να λυθεί με άμεσο (αλλ' όχι ιδιαίτερα εύκολο) τρόπο που οδηγεί στη λύση του  $\varphi(x, y)$  για την τασική συνάρτηση του Prandtl σε μορφή σειράς. Από τη λύση αυτή προσδιορίζεται κι η σχετική **ροπή στρέψεως** (ή **στρεπτική ροπή**)  $T$  στη μορφή

$$T = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi(x, y) \, dx \, dy = \frac{16}{3} G\theta a^3 b \left( 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi b}{2a} \right). \quad (12.1.6)$$

Στην ειδική περίπτωση της τετραγωνικής διατομής ( $a = b$ ) ο τύπος αυτός δίνει την τιμή

$$T \approx 2.24923 G\theta a^4. \quad (12.1.7)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι κλασικό και αναφέρεται στο βιβλίο των Timoshenko and Goodier (Βιβλιογραφία Μέρους Α: Βιβλίο 64 στη Μηχανική των Υλικών). Εκεί στην Ενότητα 109 επιλύεται το πρόβλημα στρέψεως ράβδου ορθογωνικής διατομής με τον άμεσο τρόπο των σειρών. Παραπέρα στην Ενότητα 111 αναφέρεται και η μέθοδος των Rayleigh–Ritz για το ίδιο πρόβλημα με εφαρμογή της στην περίπτωση της τετραγωνικής διατομής:  $a = b$ . Την ίδια μέθοδο θα την εκθέσουμε και εδώ στην επόμενη παράγραφο με εφαρμογή της στη γενικότερη ορθογωνική διατομή, μια που έχουμε το πλεονέκτημα ευχερέστερης εκτέλεσης συμβολικών υπολογισμών με τη χρήση της *Mathematica*.

**B12.1.3. Εφαρμογή της μεθόδου των Rayleigh–Ritz**

Αποδεικνύεται πως το παρόν πρόβλημα στρέψεως ράβδου ορθογωνικής διατομής ανάγεται τελικά (για την εφαρμογή της μεθόδου των Rayleigh–Ritz) στην ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος

$$J[\varphi] = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - 2G\theta\varphi \right\} dx dy, \quad J[\varphi] = \min \quad \text{με} \quad \varphi = \varphi(x, y). \quad (12.1.8)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό εξαρτάται από την άγνωστη συνάρτηση: την τασική συνάρτηση του Prandtl  $\varphi = \varphi(x, y)$ . Από φυσικής απόψεως οι δύο πρώτοι όροι (με τις πρώτες μερικές παραγώγους της συναρτήσεως  $\varphi$ ) σχετίζονται με την ενέργεια παραμορφώσεως της υπό στρέψη ράβδου ανά μονάδα μήκους της, ενώ ο τρίτος όρος με το αντίστοιχο έργο της ροπής στρέψεως  $T$  με βάση την πρώτη σχέση (12.1.6). Παρατηρούμε επίσης ότι το ολοκλήρωμα  $J$  εξαρτάται εδώ από την άγνωστη συνάρτηση  $\varphi$ . Γι’ αυτό και το δηλώνουμε σαν  $J[\varphi]$ . Ένα τέτοιο ολοκλήρωμα καλείται στο λογισμό των Μεταβολών **συναρτησιακό** (ή **συναρτησοειδές**) και είναι συνάρτηση συναρτήσεως.

Και τώρα σύμφωνα με τη βασική προσέγγιση (12.1.1) στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz δεχόμαστε προσέγγιση  $\varphi_n(x, y)$  της άγνωστης τασικής συναρτήσεως του Prandtl  $\varphi = \varphi(x, y)$  στην εξής μορφή:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x, y) &= c_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + c_2(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)x^2 + c_3(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)y^2 + \dots \\ &= (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(c_1 + c_2x^2 + c_3y^2 + \dots) \end{aligned} \quad (12.1.9)$$

με άρτιους μόνο όρους λόγω της συμμετρίας. Με τους παράγοντες  $(x^2 - a^2)$  και  $(y^2 - b^2)$  σε κάθε όρο της προσεγγίσεως αυτής φροντίσαμε να έχουμε πλήρωση της συνοριακής συνθήκης (12.1.4):  $\varphi(x, y) = 0$  (με  $C = 0$ ) σε όλη την περίμετρο της ορθογωνικής διατομής της ράβδου. Το πόσους όρους θα πάρουμε στην πιο πάνω προσέγγιση (12.1.9) έχει σχέση με την ακρίβεια που επιδιώκουμε να έχουμε και με το υπολογιστικό κόστος. Συχνά αυτό είναι πολύ υψηλό, ιδίως όταν πέρα από τους αριθμούς υπάρχουν και σύμβολα, όπως εδώ τα σύμβολα  $a, b$  και  $G\theta$ . Αυτά προκαλούν έντονες δυσκολίες ακόμη και στα προγράμματα συμβολικών υπολογισμών, όπως είναι εδώ η *Mathematica*.

**B12.1.4. Προσέγγιση με έναν όρο στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz**

Πρόκειται για την πιο απλή και τη λιγότερο ακριβή προσέγγιση  $\varphi_1(x, y)$ . Απλά υποθέτουμε ότι

$$\varphi_1(x, y) = c_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = c_1(x^2 - a^2)(y^2 - r^2a^2). \quad (12.1.10)$$

(Για διευκόλυνση εισαγάγαμε και το αδιάστατο σύμβολο  $r = b/a$ , οπότε  $b = ra$ .) Χρησιμοποιώντας συνεχώς τη *Mathematica* (και είναι κατανοητό αυτό στους παρόντες συμβολικούς υπολογισμούς), προσδιορίζουμε πρώτα-πρώτα το ολοκλήρωμα  $J[\varphi]$ , εδώ  $J[\varphi_1]$ , στη σχέση (12.1.8). Προκύπτει

$$J[\varphi_1] = \frac{32}{45} c_1 r^3 a^6 [2c_1(r^2 + 1)a^2 - 5G\theta]. \quad (12.1.11)$$

Τώρα, για να ελαχιστοποιήσουμε το ολοκλήρωμα  $J[\varphi_1]$  με βάση τις σχέσεις (12.1.2), θα πρέπει να θέσουμε την παράγωγό του ως προς τον άγνωστο συντελεστή  $c_1$  ίση με το μηδέν. Προκύπτει

$$\frac{dJ[\varphi_1]}{dc_1} = \frac{32}{45} r^3 a^6 [4c_1(r^2 + 1)a^2 - 5G\theta] = 0, \quad \text{οπότε} \quad c_1 = \frac{5G\theta}{4(r^2 + 1)a^2}. \quad (12.1.12)$$

Άρα με αυτήν την τιμή του  $c_1$  η προσέγγιση  $\varphi_n(x, y)$  της συναρτήσεως του Prandtl στη σχέση (12.1.9) παίρνει τη μορφή

$$\varphi_1(x, y) = \frac{5G\theta}{4(r^2 + 1)a^2} (x^2 - a^2)(y^2 - r^2a^2) \quad \text{για} \quad n = 1. \quad (12.1.13)$$

Τέλος από την πρώτη σχέση (12.1.6) υπολογίζεται κι η ροπή στρέψεως (ή στρεπτική ροπή)  $T$

$$T = \frac{40}{9} \frac{r^3}{r^2 + 1} G\theta a^4 \quad \text{και για} \quad r = 1 \quad (a = b) \quad T = \frac{20}{9} G\theta a^4 \approx 2.22222 G\theta a^4 \quad (12.1.14)$$

με σχετικό σφάλμα περίπου 1.2009% ως προς την ακριβή τιμή της (με 6 ψηφία) στη σχέση (12.1.7).

**B12.1.5. Προσέγγιση με τρεις όρους στη μέθοδο των Rayleigh–Ritz**

Πρόκειται για μια ακριβέστερη προσέγγιση από την προσέγγιση με έναν όρο. Υποθέτουμε ότι

$$\varphi_3(x, y) = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(c_1 + c_2x^2 + c_3y^2) = (x^2 - a^2)(y^2 - r^2a^2)(c_1 + c_2x^2 + c_3y^2). \quad (12.1.15)$$

(Χρησιμοποιούμε κι εδώ το αδιάστατο σύμβολο  $r = b/a$ , οπότε  $b = ra$ .) Χρησιμοποιώντας συνεχώς τη *Mathematica* στους συμβολικούς υπολογισμούς μας, υπολογίζουμε πρώτα το ολοκλήρωμα  $J[\varphi]$ , εδώ  $J[\varphi_3]$ , στη σχέση (12.1.8). (Η έκφρασή του είναι αρκετά εκτενής και την παραλείπουμε.) Τώρα, για να ελαχιστοποιήσουμε το ολοκλήρωμα  $J[\varphi_3]$  με βάση τις σχέσεις (12.1.2) (εδώ με  $n = 3$ ), πρέπει να θέσουμε τις τρεις μερικές παραγώγους του ως προς τους άγνωστους συντελεστές  $c_1$ ,  $c_2$  και  $c_3$  ίσες με το μηδέν. Προκύπτει έτσι ένα σύστημα τριών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με τρεις αγνώστους: τους συντελεστές  $c_1$ ,  $c_2$  και  $c_3$ . Η λύση που βρέθηκε με τη *Mathematica* είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J[\varphi_3]}{\partial c_1} = \frac{\partial J[\varphi_3]}{\partial c_2} = \frac{\partial J[\varphi_3]}{\partial c_3} = 0, \quad \text{οπότε με } d := (45r^4 + 464r^2 + 45)(r^2 + 1) \\ c_1 = \frac{35(9r^4 + 130r^2 + 9)G\theta}{8da^2}, \quad c_2 = \frac{105(r^2 + 9)G\theta}{8da^4}, \quad c_3 = \frac{105(9r^2 + 1)G\theta}{8da^4}. \end{aligned} \quad (12.1.16)$$

Τώρα πια με προσδιορισμένες τις τιμές των τριών συντελεστών  $c_1$ ,  $c_2$  και  $c_3$  η προσέγγιση  $\varphi_3(x, y)$  της τασιακής συναρτήσεως του Prandtl  $\varphi(x, y)$  στη σχέση (12.1.15) είναι απόλυτα καθορισμένη.

Με τον ίδιο ορισμό του  $d$  η ροπή στρέψεως  $T$  προκύπτει ξανά από την πρώτη σχέση (12.1.6)

$$T = \frac{224}{9} \frac{(9r^4 + 82r^2 + 9)r^3}{9d} G\theta a^4 \quad \text{και για } r = 1 \text{ (} a = b \text{)} \quad T = \frac{5600}{2493} G\theta a^4 \approx 2.24629 G\theta a^4 \quad (12.1.17)$$

με σφάλμα μόλις περίπου 0.1309% ως προς την ακριβή τιμή της (με 6 ψηφία) στη σχέση (12.1.7). Εντούτοις η ακρίβεια στον υπολογισμό των διατμητικών τάσεων  $\tau_{xz}$  και  $\tau_{yz}$  είναι πολύ μικρότερη.

**B12.1.6. Ροή ασυμπίεστου Νευτώνειου ρευστού σε σωλήνα ορθογωνικής διατομής**

Θα ήταν ουσιάδης παράλειψή μας, εάν δεν αναφέραμε πως τα προηγούμενα αποτελέσματα με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz για τη στρέψη συνήθους ράβδου ορθογωνικής διατομής ισχύουν (απροσδόκητα!) και σε ένα εντελώς διαφορετικό πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού. Πρόκειται για το πρόβλημα της μονοδιάστατης σταθερής ροής ασυμπίεστου (με σταθερή πυκνότητα  $\rho$ ) Νευτώνειου ρευστού (όχι ιδεατού ρευστού!) με συνεκτικότητα (ιξώδες)  $\mu$  σε σωλήνα σταθερής ορθογωνικής διατομής  $[-a, a] \times [-b, b]$ . Η ροή γίνεται κατά μήκος του άξονα  $Oz$ . Η παράγωγος της πίεσεως  $p$  κατά μήκος του σωλήνα είναι  $p_z := \partial p / \partial z$  και θεωρείται εδώ σταθερή. Άγνωστη συνάρτηση είναι εδώ η ταχύτητα  $w = w(x, y)$  του Νευτώνειου ρευστού κατά μήκος του σωλήνα. Αυτή όμως πρέπει να μηδενίζεται σε όλο το σύνορό του εξαιτίας της συνεκτικότητας ( $\mu > 0$ ) του Νευτώνειου ρευστού. Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους προκύπτει εδώ από την εξίσωση (3.3.21) της Παραγράφου Β3.3.2 του Κεφαλαίου Β3. Αυτή είναι η τρίτη εξίσωση των Navier–Stokes (για σταθερή ροή και χωρίς βαρύτητα). Είναι ξανά η εξίσωση του Poisson (12.1.3). Τώρα όμως άγνωστη συνάρτηση είναι η  $w(x, y)$  αντί για τη  $\varphi(x, y)$  και έχουμε  $p_z/\mu$  αντί για  $-2G\theta$  στο δεξιό μέλος. Δηλαδή τίποτα το ουσιαστικό δεν αλλάζει και η προηγούμενη λύση μας είναι εφαρμόσιμη και στο παρόν πρόβλημα Ρευστομηχανικής για Νευτώνειο ρευστό (επαναλαμβάνεται με  $\varphi \rightarrow w$  και  $-2G\theta \rightarrow p_z/\mu$ ). Τέλος ως προς το διπλό ολοκλήρωμα στη σχέση (12.1.6) αυτό τώρα δηλώνει, χωρίς όμως το συντελεστή 2, την παροχή  $Q$  του Νευτώνειου ρευστού κατά τη ροή του στο σωλήνα:

$$Q = \int_{-a}^a \int_{-b}^b w(x, y) \, dx \, dy \quad (\text{παροχή}) \quad \text{αντί πριν} \quad (12.1.18)$$

$$T = 2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \varphi(x, y) \, dx \, dy \quad (\text{ροπή στρέψεως}). \quad (12.1.19)$$

**B12.1.7. Συγγενείς προσεγγιστικές μέθοδοι**

Εκτός από τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz υπάρχουν και άλλες μέθοδοι που κάνουν χρήση του πεπερασμένου αθροίσματος (12.1.1) για την προσέγγιση  $u_n$  της άγνωστης συναρτήσεως  $u$  σε μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Αντίθετα όμως από τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz αυτές δεν ελαχιστοποιούν κάποιο ολοκλήρωμα και στηρίζονται σε εντελώς διαφορετικούς τρόπους υπολογισμού των άγνωστων συντελεστών  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Δύο πολύ γνωστές τέτοιες μέθοδοι είναι (α) η **μέθοδος του Galerkin** που χρησιμοποιεί ολοκληρώματα σφάλματος της προσεγγίσεως  $u_n$  και (β) η **μέθοδος του συντοπισμού (collocation)** που απλά χρησιμοποιεί συγκεκριμένα σημεία. Ακόμη μια ενδιαφέρουσα μέθοδος για το ίδιο πρόβλημα είναι (γ) η **μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων**.

**B12.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ**

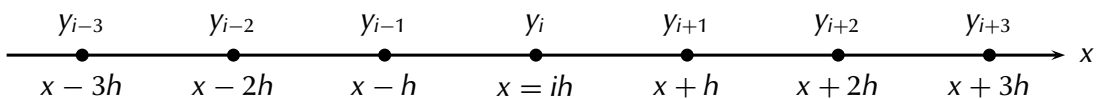
**B12.2.1. Προσέγγιση παραγώγων με πεπερασμένες διαφορές**

Η **μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών** αποτελεί μια καθαρά αριθμητική μέθοδο επιλύσεως διαφορικών εξισώσεων και εδώ διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Στη μέθοδο αυτή απλά αντικαθιστούμε τις παραγώγους με προσεγγίσεις τους μέσω πεπερασμένων διαφορών. Ήδη στην Παράγραφο A20.2.2 του Κεφαλαίου A20 του Μέρους A αναφερθήκαμε στην προσέγγιση

$$y' = y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{(x+h) - x} = \frac{y(x+h) - y(x)}{h}, \tag{12.2.1}$$

τύπος (20.2.4), της παραγώγου  $y'(x)$  μιας υποτίθεται παραγωγίσιμης συναρτήσεως  $y(x)$  με πεπερασμένη διαφορά. Όταν το  $h \rightarrow 0$ , προκύπτει φυσικά ο γνωστός ορισμός της παραγώγου  $y'(x)$ .

Θεωρούμε τώρα τα ισαπέχοντα σημεία  $x + kh$  (με το  $k$  ακέραιο αριθμό και με σταθερή απόσταση  $h$ ) κατά μήκος του άξονα  $Ox$ , όπως στο Σχήμα B12.1. Θεωρούμε επίσης και παραγωγίσιμη συνάρτηση  $y = y(x)$ . Θα προσεγγίσουμε τώρα τις παραγώγους της με πεπερασμένες διαφορές.



**Σχήμα B12.1:** Ισαπέχοντα σημεία  $x_m = mh$  πάνω στον άξονα  $Ox$  κι αντίστοιχες τιμές  $y_m$  της  $y(x)$ .

Προς το σκοπό αυτό με χρήση του τύπου του Taylor για παραγωγίσιμη συνάρτηση  $y(x)$  έχουμε

$$y(x \pm h) = y(x) \pm y'(x)h + \frac{1}{2}y''(x)h^2 \pm \frac{1}{6}y'''(x)h^3 + O(h^4) \tag{12.2.2}$$

με τον όρο  $O(h^4)$  στο τέλος να δηλώνει το σχετικό σφάλμα, το οποίο περιλαμβάνει δυνάμεις του  $h$  από  $h^4$  και πάνω. Εάν αγνοήσουμε τους όρους με  $h^2$  και ανώτερες δυνάμεις του  $h$ , έχουμε απλά

$$y(x+h) \approx y(x) + y'(x)h \quad \text{και} \quad y(x-h) \approx y(x) - y'(x)h. \tag{12.2.3}$$

Οι αντίστοιχες δύο (διαφορετικές) προσεγγίσεις της πρώτης παραγώγου  $y'(x)$  της  $y(x)$  είναι

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad \text{ή} \quad y'(x) \approx \frac{y(x) - y(x-h)}{h} \equiv \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad \text{με} \quad x = ih \tag{12.2.4}$$

έχοντας μάλιστα χρησιμοποιήσει εδώ και το συμβολισμό  $y_m := y(mh)$  όπως και στο Σχήμα B12.1. Επιπλέον λέμε ότι ο πρώτος τύπος προσεγγίζει την παράγωγο  $y'(x)$  με **προς τα εμπρός διαφορά**, ενώ ο δεύτερος τύπος με **προς τα πίσω διαφορά**. Και αυτά είναι προφανή από το Σχήμα B12.1.

Πάρα πολύ καλά ως εδώ, αλλά στους τύπους (12.2.3) αγνοήσαμε τους όρους με  $h^2$  και πάνω. Πολύ καλύτερη προσέγγιση της ίδιας παραγώγου  $y'(x)$  μπορούμε να πάρουμε αγνοώντας τους όρους μόνο από  $h^3$  και πάνω. Αυτό το πετυχαίνουμε πολύ εύκολα χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα και τους δύο τύπους (12.2.2) με όρους μέχρι και  $h^2$ . Αφαιρώντας τους κατά μέλη, προκύπτει

$$y(x+h) - y(x-h) \approx 2y'(x)h, \quad \text{οπότε} \quad y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} \equiv \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \tag{12.2.5}$$

Εδώ μιλάμε για προσέγγιση της παραγώγου  $y'(x)$  με **κεντρική διαφορά** (και είναι προφανές αυτό από το Σχήμα Β12.1). Παρατηρούμε επίσης με σύγκριση των προσεγγίσεων (12.2.4) και (12.2.5) ότι η προσέγγιση με κεντρική διαφορά είναι ο μέσος όρος των προσεγγίσεων με προς τα εμπρός και προς τα πίσω διαφορές. (Ο μέσος όρος δύο απλών προσεγγίσεων δίνει εδώ πιο καλή προσέγγιση!)

Προχωράμε τώρα στην προσέγγιση και της δευτέρας παραγώγου  $y''(x)$ . Εδώ χρησιμοποιούμε όλους τους όρους στους δύο τύπους (12.2.2) εκτός βέβαια από τους όρους  $O(h^4)$ . Τώρα απλά προσθέτοντας τους δύο αυτούς τύπους, παίρνουμε (με χρήση και του συμβολισμού  $y_m := y(mh)$ )

$$y(x+h) + y(x-h) \approx 2y(x) + y''(x)h^2, \quad \text{οπότε} \quad y''(x) \approx \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} \quad \text{με} \quad x = ih. \quad (12.2.6)$$

Πάει, υπολογίσθηκε και η δεύτερη παράγωγος. Με ανάλογη εργασία μπορούμε να προχωρήσουμε σε προσεγγίσεις παραγώγων ανωτέρων τάξεων, όπως της τρίτης και της τετάρτης παραγώγου.

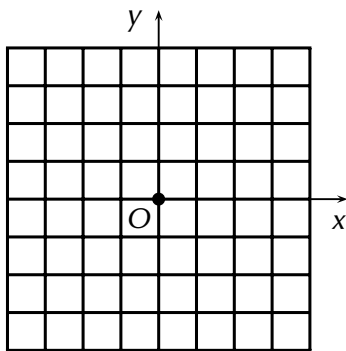
### Β12.2.2. Εφαρμογή στο πρόβλημα της στρέψεως συνήθους ράβδου τετραγωνικής διατομής

Εδώ θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο ίδιο σχεδόν πρόβλημα με εκείνο στην προηγούμενη Ενότητα Β12.1: στο πρόβλημα της στρέψεως ράβδου ορθογωνικής διατομής, εδώ τετραγωνικής διατομής  $[-a, a] \times [-a, a]$ . Εκεί όμως είχαμε χρησιμοποιήσει τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz. Στη σχετική εξίσωση του Poisson (12.1.3) προσεγγίζουμε και τις δύο δεύτερες μερικές παραγώγους με τη χρήση του πιο πάνω προσεγγιστικού τύπου (12.2.6). Έτσι παίρνουμε

$$\frac{\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} - 2\varphi_{i,j}}{h^2} + \frac{\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j-1} - 2\varphi_{i,j}}{h^2} \approx -2G\theta \quad \text{με} \quad \varphi_{i,j} := \varphi(ih, jh). \quad (12.2.7)$$

Το πρώτο κλάσμα αριστερά αποτελεί προσέγγιση της μερικής παραγώγου  $\partial^2 \varphi(x, y) / \partial x^2$ , ενώ το δεύτερο κλάσμα προσέγγιση της μερικής παραγώγου  $\partial^2 \varphi(x, y) / \partial y^2$ . Το  $h = x_{i+1} - x_i = y_{k+1} - y_k$  δηλώνει εδώ το **βήμα** της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Για διευκόλυνσή μας το πήραμε το ίδιο και στην κατεύθυνση  $x$  και στην κατεύθυνση  $y$  και ίσο με  $a/4$ . Και τώρα, δηλώνοντας με  $\tilde{\varphi}_{i,j}$  την προσέγγιση της τιμής  $\varphi_{i,j}$  κι απλοποιώντας τη σχέση (12.2.7), τη γράφουμε στην εξής μορφή:

$$\tilde{\varphi}_{i+1,j} + \tilde{\varphi}_{i-1,j} + \tilde{\varphi}_{i,j+1} + \tilde{\varphi}_{i,j-1} - 4\tilde{\varphi}_{i,j} = -2G\theta h^2 \quad \text{με} \quad h = \frac{a}{4}, \quad i, j = -3, -2, \dots, 2, 3. \quad (12.2.8)$$



**Σχήμα Β12.2:** Εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών στο πρόβλημα της στρέψεως συνήθους ράβδου τετραγωνικής διατομής  $[-a, a] \times [-a, a]$ . Άγνωστες είναι οι τιμές  $\varphi_{i,j} := \varphi(ih, jh)$  με  $i, j = -3, -2, \dots, 2, 3$  της τασικής συναρτήσεως του Prandtl, δηλαδή οι τιμές της στους 49 εσωτερικούς κόμβους της διατομής. Στους 32 εξωτερικούς κόμβους με  $i = \pm 4$  και  $j = \pm 4$  πάνω στο σύνορο (στην περίμετρο) του τετραγώνου η τιμή της  $\varphi$  είναι ίση με το μηδέν. Δηλαδή  $\varphi_{\pm 4, j} = \varphi_{i, \pm 4} = 0$  με  $i, j = -4, -3, \dots, 3, 4$ , τώρα όμως πάνω στο σύνορο. Σαν βήμα έχει ληφθεί εδώ  $h = a/4$ .

Οι κόμβοι που χρησιμοποιήθηκαν φαίνονται στο πιο πάνω σχήμα (**τετραγωνικός κάναβος**) και οι σχετικές λεπτομέρειες αναφέρονται δεξιά. Οι τελικά 49 γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις που προέκυψαν για τους εσωτερικούς κόμβους με βάση τη γενική εξίσωση (12.2.8) λύθηκαν πολύ εύκολα με τη *Mathematica*. Έτσι προσδιορίστηκαν αριθμητικά οι 49 τιμές  $\tilde{\varphi}_{i,j}$  στους κόμβους αυτούς. Για παράδειγμα, στο κέντρο  $O = (0, 0)$  του τετραγώνου προέκυψε η τιμή  $\varphi_{id}(0, 0)$ , η οποία είναι

$$\varphi_{id}(0, 0) = 0.582261 G\theta a^2, \quad \text{ενώ} \quad \varphi_{RR} = 0.584386 G\theta a^2 \quad \text{και} \quad \varphi_{theor} = 0.589859 G\theta a^2. \quad (12.2.9)$$

Αμέσως μετά δώσαμε την αντίστοιχη τιμή  $\varphi_{RR}$  με τη μέθοδο των Rayleigh–Ritz με  $n = 3$  (με βάση τις σχέσεις (12.1.15) και (12.1.16)) και την αντίστοιχη ακριβή τιμή  $\varphi_{theor}$  από τη χωρίς προσεγγίσεις λύση του ίδιου προβλήματος με σειρά. Τα αποτελέσματα συμφωνούν στα δύο πρώτα ψηφία τους.

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

Τα παρακάτω βιβλία (στα Ελληνικά) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για παραπέρα μελέτη από τον ενδιαφερόμενο φοιτητή και την ενδιαφερόμενη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό ως προς τις Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους:

1. Δάσιος, Γ., Κυριάκη, Κ. (1994), *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Αθήνα.
2. Κραββαρίτης, Δ. Χ., Παντελίδης, Γ. Ν. (2003), *Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις Μερικών Παραγώγων*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
3. Κυβεντίδη, Θ. (1996), *Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους*, Τόμος Δεύτερος, 3η Έκδοση. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
4. Sokolnikoff, I. S., Redheffer, R. M. (2001), *Μαθηματικά για Φυσικούς και Μηχανικούς*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π. Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτοτύπου: Sokolnikoff, I. S., Redheffer, R. M. (1966), *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, 2η Έκδοση. McGraw-Hill, New York. Κεφάλαιο 7: *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*.
5. Spiegel, M. R. (1978), *Ανάλυση Fourier*. ΕΣΠΙ, Αθήνα. Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτοτύπου: Spiegel, M. R. (1974), *Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems*. Schaum's Outline Series. McGraw-Hill, New York. Κεφάλαια 1, 2, 5 και 6.
6. Σταυρακάκης, Ν. Μ. (2002), *Εξισώσεις Μερικών Παραγώγων για τις Επιστήμες και την Τεχνολογία*, Αθήνα.
7. Stephenson, G. (1987), *Εισαγωγή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα. Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτοτύπου: Stephenson, G. (1970), *An Introduction to Partial Differential Equations for Science Students*, 2η Έκδοση, Longman, London.
8. Τραχανάς, Σ. (2001), *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.
9. Χαϊνή, Ι. Θ. (1998), *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Αθήνα.
10. Χατζηκωνσταντίνου, Π. Μ. (2008), *Μαθηματικές Μέθοδοι για Μηχανικούς και Επιστήμονες: Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Σειρές Fourier και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών, Μιγαδικές Συναρτήσεις*. Εκδόσεις Συμμετρία, Πάτρα, Αθήνα (υπό εκτύπωση).

Τα πιο πάνω βιβλία είναι όλα στην Ελληνική γλώσσα. Υπάρχουν επίσης και δεκάδες ξενόγλωσσα βιβλία για τις Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους. Μερικά από τα βιβλία αυτά στα Αγγλικά είναι τα εξής:

1. Betounes, D. (1998), *Partial Differential Equations for Computational Science*, Springer, New York.
2. Brown, J. W., Churchill, R. V. (2006), *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 7th Edition. McGraw-Hill, New York.
3. DuChateau, P., Zachmann, D. W. (1986), *Partial Differential Equations*. Schaum's Outlines. McGraw-Hill, New York.
4. Farlow, S. J. (1993), *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Dover, New York.
5. Guenther, R. B. and Lee, J. W. (1996), *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*. Dover, New York.
6. Kevorkian, J. (1999), *Partial Differential Equations: Analytical Solution Techniques*, 2nd Edition. Springer, New York.

7. Ockendon, J., Howison, S., Lacey, A., Movchan, A. (2003), *Applied Partial Differential Equations*, Revised Edition. Oxford University Press, Oxford.
8. Stavroulakis, I. P., Tersian, S. A. (1999), *Partial Differential Equations. An Introduction with Mathematics and MAPLE*. World Scientific, Singapore.
9. Weinberger, H. F. (1995), *A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods*. Dover, New York.
10. Zachmanoglou, E. C. and Thoe, D. W. (1986), *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*. Dover, New York.

Μεγάλο ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό παρουσιάζουν και τα βιβλία που αφορούν στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Υπάρχουν μερικά τέτοια βιβλία στην Αγγλική γλώσσα και όλα έχουν ένα ή δύο κεφάλαια που αφορούν στις Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους συνήθως και με εφαρμογές από τη Φυσική και την επιστήμη του Μηχανικού. Τέτοιο βιβλίο είναι το βιβλίο των Sokolnikoff και Redheffer, που ήδη αναφέραμε πιο πάνω. Τέσσερα ακόμη από τα βιβλία αυτά είναι τα εξής:

1. Greenberg, M. D. (1998), *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd Edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey (Part IV: *Fourier Methods and Partial Differential Equations*: Chapters 18–20).
2. Hildebrand, F. B. (1976), *Advanced Calculus for Applications*, 2nd Edition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
3. Jeffrey, A. (2002), *Advanced Engineering Mathematics*. Harcourt/Academic Press, Burlington, Massachusetts.
4. Kreyszig, E. (2005), *Advanced Engineering Mathematics*, 9th Edition. Wiley, New York.
5. Wylie, C. R., Barrett, L. C., Wylie, C. Ray (1995), *Advanced Engineering Mathematics*, 6th edition. McGraw-Hill, New York.

Τέλος ο Πολιτικός Μηχανικός μπορεί να βρει τεράστια ποικιλία διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (τόσο στο σχηματισμό τους όσο και στην επίλυσή τους) σε πάρα πολλά βιβλία της ειδικότητάς του και Ελληνικά και ξενόγλωσσα. Τέτοιες περιοχές της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού είναι η Μηχανική των Υλικών, η Ρευστομηχανική, η Εδαφομηχανική και οι Θεμελιώσεις, η Δυναμική των Κατασκευών, η Ελαστική Ευστάθεια, οι Πλάκες και τα Κελύφη, η Περιβαλλοντική Μηχανική και πάρα πολλές άλλες.

Για όλες αυτές τις περιοχές της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού έχει ήδη δοθεί συνοπτική (αλλ' αρκετά επαρκής) βιβλιογραφία στο τέλος του Μέρους Α αυτών των συγγραμμάτων Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς. Προφανώς αυτή η βιβλιογραφία ισχύει και εδώ στο Μέρος Β των ίδιων συγγραμμάτων και σ' αυτή μπορούν να ανατρέξουν ο αναγνώστης και η αναγνώστρια Πολιτικός Μηχανικός.

Βέβαια πολύ καλύτερος και πιο χρήσιμος για τον Πολιτικό Μηχανικό είναι ένας κατάλληλος συνδυασμός των γνώσεων που προσφέρουν στις Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους: (α) τα κατά βάση μαθηματικά βιβλία, (β) τα βιβλία Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Μηχανικούς ή ακόμη και για φοιτητές Θετικών Επιστημών και (γ) τα βιβλία τα οποία αφορούν στην ίδια την επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού στους ποικίλους και τόσο ενδιαφέροντες τομείς της.











































































**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ**  
**για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**  
*Τεύχος 1*

---

**Μέρος** *G*

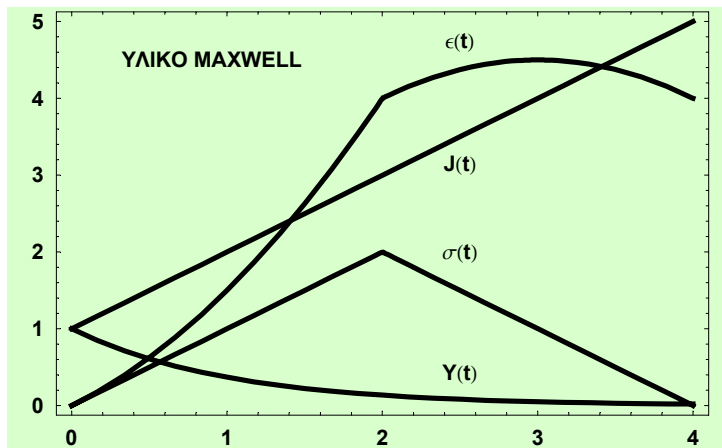
**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ**  
**ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ**  
**για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**

---

## ■ ΙΞΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ: ΥΛΙΚΟ MAXWELL

```
In[1]:= p1 = q1 = 1; J[t_] = (p1 + t) / q1; Y[t_] = (q1 / p1) e-t/p1; σ[t_] = t - 2 (t - 2) UnitStep[t - 2];
DJ[t_] = J'[t]; ε[t_] = J[0] σ[t] + Integrate[DJ[t - τ] σ[τ], {τ, 0, t}] // Simplify;
```

```
In[2]:= Plot[{J[t], Y[t], σ[t], ε[t]}, {t, 0, 4},
  PlotStyle → Thickness[0.008], Frame → True, ImageSize → 340,
  Background → RGBColor[0.85, 1, 0.8], DefaultFont → {"Arial-Bold", 10},
  Epilog → {Text["ΥΛΙΚΟ MAXWELL", {0.9, 4.5}], Text["J(t)", {2.5, 3.15}],
  Text["Y(t)", {2.5, 0.43}], Text["σ(t)", {2.5, 2.0}], Text["ε(t)", {2.5, 4.75}]}];
```

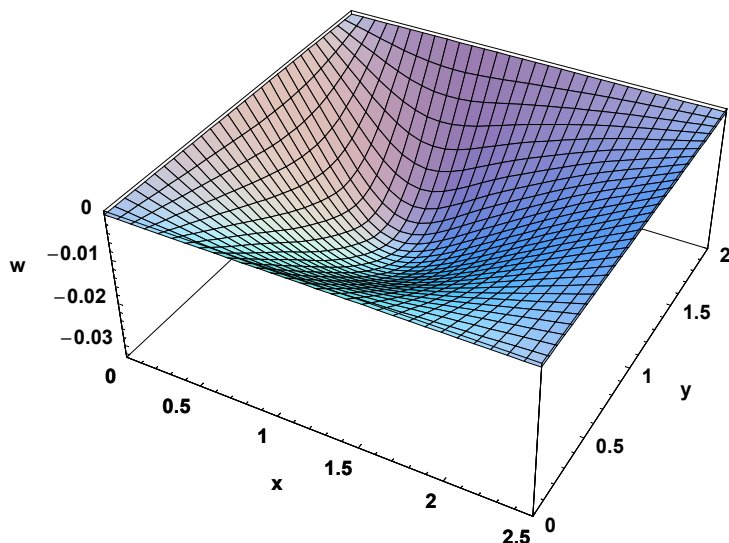


## ■ ΠΛΑΚΕΣ: ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΠΛΑΚΑΣ ΥΠΟ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ

```
In[3]:= G[x_, y_, ξ_, η_] = (4 / (π4 a b D)) Sum[Sin[m π x / a] Sin[n π y / b]
  Sin[m π ξ / a] Sin[n π η / b] / ((m / a)2 + (n / b)2)2, {m, 1, 6}, {n, 1, 6}];
```

```
In[4]:= Plot3D[-G[x, y, ξ, η] /. {a → 2.5, b → 2, D → 1, ξ → 0.7, η → 1.5},
  {x, 0, 2.5}, {y, 0, 2}, PlotPoints → 30, AxesLabel → {"x", "y", "w"},
  PlotLabel → "ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΠΛΑΚΑΣ ΥΠΟ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ",
  DefaultFont → {"Arial-Bold", 9.5}, ImageSize → 344];
```

ΕΛΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΠΛΑΚΑΣ ΥΠΟ ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΜΕΝΟ ΦΟΡΤΙΟ



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

• ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΜΕΡΟΥΣ Γ	iii
• ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Γ	v-vi
• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΜΕΡΟΥΣ Γ	vii-viii
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ1: ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ</b>	<b>1-18</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 18 σελίδες)</i>	1
Γ1.1. Εισαγωγικό Παράδειγμα: Ευθύγραμμη Κίνηση Υλικού Σημείου	2
Γ1.2. Είδη Ολοκληρωτικών Εξισώσεων	7
Γ1.3. Ευνοϊκές Περιπτώσεις Πυρήνων	8
Γ1.4. Αναγωγή Διαφορικών Εξισώσεων σε Ολοκληρωτικές	9
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ2: ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ</b>	<b>19-58</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 40 σελίδες)</i>	19
Γ2.1. Η Μέθοδος της Αναγωγής σε Διαφορική Εξίσωση	20
Γ2.2. Η Μέθοδος του Μετασχηματισμού Laplace	22
Γ2.3. Η Μέθοδος των Διαχωρίσιμων Πυρήνων	27
Γ2.4. Η Μέθοδος των Διαδοχικών Προσεγγίσεων	33
Γ2.5. Η Μέθοδος της Αριθμητικής Ολοκληρώσεως	46
• <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ3: ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ</b>	<b>59-86</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 28 σελίδες)</i>	59
Γ3.1. Ελεύθερη Πτώση Υλικού Σημείου	59
Γ3.2. Απλή Ρωγμή σε Επίπεδο Ελαστικό Μέσον	60
Γ3.3. Κατακόρυφη Κίνηση Υλικού Σημείου με Αντίσταση του Αέρα	62
Γ3.4. Σύστημα Μάζας-Ελατηρίου: Ταλαντώσεις-Συντονισμός	65
Γ3.5. Συναρτήσεις Επιρροής σε Χορδή, Δοκό και Πλάκα	68
Γ3.6. Καθορισμός Κατανεμημένης Φορτίσεως σε Πρόβολο	77
Γ3.7. Γραμμική Ισοελαστικότητα	80
Γ3.8. Συνοριακή Ολοκληρωτική Εξίσωση για την Εξίσωση του Laplace	85
• <b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (4 σελίδες)</b>	<b>87-90</b>



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν Μέρος Γ των συγγραμμάτων **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς** καλύπτει τη σχετική θεωρία, η οποία αφορά στις **Εφαρμοσμένες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Μετά το Μέρος Β το παρόν Μέρος Γ αποτελεί το δεύτερο (με έκταση 100 περίπου σελίδες) τμήμα του Τεύχους 1 του συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Ειδικότερα στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών το σύγγραμμα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς** προορίζεται για το αντίστοιχο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III του τρίτου εξαμήνου σπουδών.

Τα υπόλοιπα τρία μέρη της θεωρίας αφορούν στις **Εφαρμοσμένες Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** (το Μέρος Α), στις **Εφαρμοσμένες Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους για Πολιτικούς Μηχανικούς** (το Μέρος Β) και στις **Εφαρμοσμένες Μιγαδικές Συναρτήσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** (το Μέρος Δ). Από αυτά το Μέρος Α αποτελεί το Τεύχος 1 του πρώτου συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Αντίθετα τα Μέρη Β και Δ αποτελούν τμήματα του παρόντος Τεύχους 1 του δεύτερου συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς** παράλληλα με το παρόν Μέρος Γ.

Σύμφωνα με τη σύγχρονη άποψη (που υιοθετείται και εδώ χωρίς επιφυλάξεις) σαν θεωρία στο παρόν Μέρος Γ του συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς** δε νοείται μόνο η ίδια η θεωρία, αλλά και τα παραδείγματα και οι εφαρμογές στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού που τη συνοδεύουν. Τούτες οι εφαρμογές προέρχονται εδώ κυρίως από τη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις (σε κίνηση και σε ταλαντώσεις υλικού σημείου), τη Μηχανική των Υλικών (δοκοί), τη Θραυστομηχανική ή Μηχανική της Θραύσεως (ευθύγραμμες ρωγμές) και τη γραμμική Ιξοελαστικότητα για γενική μονοαξονική καταπόνηση. Περιλαμβάνουν ακόμη τις συναρτήσεις επιρροής (συναρτήσεις Green) για χορδή (που προσεγγίζει και το καλώδιο), δοκό και ορθογωνική πλάκα και τέλος πολύ σύντομα τη συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση για την εξίσωση του Laplace.

Το παρόν Τεύχος 1 των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς** συμπληρώνεται από ένα ακόμη (αλλά μικρότερο) τεύχος: Το Τεύχος 2 με τίτλο **Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks III για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Αυτό το χωριστό τεύχος περιλαμβάνει τις άλυτες (αλλά όμως εφαρμοσμένες) ασκήσεις και από τα τρία Μέρη Β, Γ και Δ του παρόντος Τεύχους 1 των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς** για το φοιτητή και τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό. Περιλαμβάνει επίσης εννέα notebooks της Mathematica με λυμένες ομάδες ασκήσεων, δύο notebooks με εφαρμογές και δύο ακόμη ανάλογα notebooks για animations (κινούμενα σχήματα). Τέλος το Τεύχος 3 του πρώτου συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς** με τίτλο **Χρήσιμες Εντολές της Mathematica για Πολιτικούς Μηχανικούς** αποτελεί ουσιαστικά ένα εκτενές «ευρετήριο» των κυριότερων εντολών της Mathematica τις οποίες χρειάζεται ο Πολιτικός Μηχανικός για την επίλυση ασκήσεων είτε γενικών είτε της επιστήμης του.

Εξαιρώντας την έμφαση η οποία δίνεται σ' αυτό το Μέρος Γ σε προβλήματα της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού, κατά τα λοιπά καλύπτεται σε μεγάλο μέρος η γνωστή ύλη των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων που είναι διαθέσιμη στα κλασικά διδακτικά βιβλία όχι όμως και πολλά (δυστυχώς!). Η ύλη του μέρους αυτού αναφέρεται εκτενώς στον πίνακα των περιεχομένων του στην προπροηγούμενη σελίδα, που δεν υπάρχει λόγος να επαναληφθεί, και κατανέμεται σε τρία κεφάλαια μικρότερης ή μεγαλύτερης έκτασης. Εντούτοις σε όλα τα σημεία της η παρούσα ύλη υστερεί πάρα πολύ σχετικά με εκείνη στα κλασικά διδακτικά βιβλία. Δυστυχώς το μέγεθος της ύλης στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III δεν επέτρεψε εδώ μια εκτενέστερη ανάπτυξη του θέματος

των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων ούτε την ανάπτυξη της μεθόδου των συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων και των συνοριακών στοιχείων. Στις περιοχές αυτές χαίρουν παγκόσμιας φήμης ο συνάδελφός μου Καθηγητής κ. Δημήτριος Μπέσκος του Τομέα Κατασκευών και οι συνεργάτες του.

Στο σημείο αυτό ας μου επιτραπεί να αναφέρω ότι τις ολοκληρωτικές εξισώσεις τις χρησιμοποίησα κι εγώ εκτενώς στη διδακτορική διατριβή μου (1976) σε θέματα Ελαστικότητας και Θραυστομηχανικής (σε προβλήματα ρωγμών) και στη συνέχεια σε πολλές επιστημονικές εργασίες μου. Άρα είμαι ιδιαίτερα ευτυχής που έχω και εδώ την ευκαιρία να τις παρουσιάσω (έστω και με πάρα πολύ σύντομο τρόπο) σαν ένα μέρος των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς**.

Πέρα από τον προσανατολισμό του παρόντος Μέρους Γ για τις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού δίνεται επίσης έμφαση στη δυνατότητα σχετικά εύκολης κατανοήσεώς του από το μέσο φοιτητή και τη μέση φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό. Για το σκοπό αυτό έχει γίνει και εδώ μια πολύ έντονη προσπάθεια να είναι γραμμένο απλά, πάρα πολύ απλά, παρόλο που αυτό συνεπάγεται πολύ μεγαλύτερη έκτασή του, και επίσης σε όχι υψηλό μαθηματικό επίπεδο.

Επαναλαμβάνω ότι είμαι πραγματικά, ειλικρινέστατα πολύ ευτυχής για τη συνεχή ενθάρρυνση και τη βοήθεια που μου δόθηκε και μου δίνεται από τους συναδέλφους μου στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ως προς τα μαθήματα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III που μου έχουν ανατεθεί μέσω του Γενικού Τμήματος. Ας μου επιτραπεί να αναφερθώ πάλι ιδιαίτερα στο συνάδελφο Καθηγητή κ. Δημήτριο Μπέσκο του Τομέα Κατασκευών και να τον ευχαριστήσω θερμά. Αυτός μου υπέδειξε την πιθανή χρησιμότητα μιας προσπάθειας προετοιμασίας διδακτικών συγγραμμάτων για τα δύο αυτά μαθήματα. Ακόμη όμως μεγαλύτερη ενθάρρυνση μου έδωσαν η συνεργασία, η συνέπεια κι ο ζήλος των φοιτητών και φοιτητριών μου Πολιτικών Μηχανικών στα μαθήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III, τα οποία έχω εδώ και πολλά χρόνια την τιμή και τη χαρά να τους διδάσκω.

Θα αποτελούσε επίσης ιδιαίτερη τιμή και χαρά μου αν το παρόν Μέρος Γ για τις **Εφαρμοσμένες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** μπορούσε να συμβάλει, έστω και πάρα πολύ λίγο, στην καλύτερη μελέτη του ενδιαφέροντος και χρήσιμου αυτού θέματος από τους φοιτητές και τις φοιτήτριές μου Πολιτικούς Μηχανικούς. Σ' αυτούς και σ' αυτές απευθύνεται και αυτό το Μέρος Γ, όπως φαίνεται κι από τον τίτλο του, κι όχι σε κάθε φοιτητή και φοιτήτρια έστω και Μηχανικό. Πρόκειται, νομίζω, για μια προσέγγιση κάπως διαφορετική στο περιεχόμενο και στους στόχους της από αυτές στα αναμφίβολα πολύ αξιολογότερα διαθέσιμα σχετικά διδακτικά βιβλία.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω και πάλι τις **GOTSIS Εκδόσεις** στην Πάτρα και ιδιαίτερα τον υπεύθυνό τους κ. Άγγελο Γκότση για το ενδιαφέρον τους σ' ολόκληρο το παρόν βιβλίο και την τόσο επιμελημένη προετοιμασία και εκτύπωσή του. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα αξιέπαινη πρωτοβουλία από τις **GOTSIS Εκδόσεις** και μάλιστα χωρίς ιδιαίτερο οικονομικό όφελος. Τούτο δυστυχώς ισχύει εξαιτίας του εξειδικευμένου χαρακτήρα των διδακτικών αυτών βιβλίων που δεν επιτρέπει τη διάθεσή τους σε ευρύ αναγνωστικό κοινό περιορίζοντάς τη σε Πολιτικούς Μηχανικούς.

Εντούτοις θεωρώ πως είναι προτιμότερο να διαθέτουν οι φοιτητές και οι φοιτήτριες Πολιτικοί Μηχανικοί τα «δικά τους» βιβλία Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Με τα συγγράμματα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς** γίνεται προσπάθεια να καταστεί εμφανές ότι τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III δεν είναι αποκομμένα από τα άλλα μαθήματα που διδάσκεται ο Πολιτικός Μηχανικός. Αντίθετα είναι φυσιολογικά συνδεδεμένα με αυτά σε μια αλυσίδα γνώσεων.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να σημειώσω ότι με πολύ μεγάλη χαρά μου θα δεχθώ κάθε υπόδειξη για τη βελτίωση αυτού του βιβλίου είτε με τη διόρθωση λαθών και σημείων με ασάφειες που έχουν παρεισφύσει είτε με ουσιαστικότερες υποδείξεις ως προς την επιλογή του περιεχομένου, των παραδειγμάτων και των εφαρμογών, κλπ. Θα είμαι πραγματικά ευγνώμων για κάθε τέτοια υπόδειξη!

Πάτρα, Φεβρουάριος 2008

Νικόλαος Ι. Ιωακείμιδης

e-mail: n.ioakimidis@upatras.gr

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

Το περιεχόμενο στο παρόν **Μέρος Γ** των διδακτικών βιβλίων *Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς*, που αφορά στις *Εφαρμοσμένες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς*, είναι απόλυτα κλασικό (τόσο στη θεωρία όσο και στις εφαρμογές) και βασίζεται στη σχετική εκτενέστατη μαθηματική και τεχνική βιβλιογραφία. Τα ίδια ισχύουν και για τα περιεχόμενα στο **Μέρος Α** για τις *Εφαρμοσμένες Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς*, στο **Μέρος Β** για τις *Εφαρμοσμένες Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους για Πολιτικούς Μηχανικούς* καθώς και στο **Μέρος Δ** για τις *Εφαρμοσμένες Μιγαδικές Συναρτήσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς* των ίδιων διδακτικών βιβλίων *Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς*. Η συμβολή του γράφοντα περιορίζεται απλά στον τρόπο παρουσίσεως της τόσο κλασικής αυτής ύλης, που δίνει έντονη έμφαση στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ

Οι μαθηματικοί τύποι αριθμούνται ανά κεφάλαιο και ενότητα. Ο κάθε τύπος έχει το δικό του αριθμό στη μορφή: αριθμός κεφαλαίου, τελεία, αριθμός ενότητας, τελεία, αριθμός τύπου, όπως ακριβώς γίνεται και στα περισσότερα επιστημονικά βιβλία. Δεν υπάρχει έτσι περίπτωση συγχύσεως στην αρίθμηση των τύπων. Πολύτιμος βοηθός για τις αναφορές από το κείμενο σε μαθηματικούς τύπους (σε κάθε ενότητα χωριστά) υπήρξε το γνωστό πρόγραμμα στοιχειοθεσίας  $\text{\TeX}$ , το οποίο έχει φυσικά και το πλεονέκτημα ότι δεν κάνει λάθη σ' αυτό το τόσο χρήσιμο έργο του.

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ

Η βασική γραμματοσειρά στα παρόντα διδακτικά βιβλία είναι η Optima, μια γραμματοσειρά κυρίως νεοκλασικού τύπου. Η Optima σχεδιάστηκε από το διάσημο σχεδιαστή γραμματοσειρών Hermann Zapf μεταξύ των ετών 1952 και 1955 και διατέθηκε εμπορικά αρχικά από την εταιρεία Linotype το 1958. Η Ελληνική παραλλαγή της, η MgOptima, που χρησιμοποιείται εδώ, διατίθεται από την εταιρεία Magenta στην Αθήνα σε CD-ROM Ελληνικών γραμματοσειρών. Και η Ελληνική παραλλαγή της Optima, η Optima Greek, σχεδιάστηκε αρχικά από τον ίδιο το Zapf και κυκλοφόρησε πρώτα επίσης από τη Linotype το 1971.<sup>1</sup> Το κείμενο και οι μαθηματικοί τύποι στοιχειοθετήθηκαν με τα προγράμματα στοιχειοθεσίας Y&Y  $\text{\TeX}$  και  $\text{\TeX}$  στην Ελληνική παραλλαγή τους. Τα προγράμματα αυτά είναι ισχυρότατα ιδίως για τη στοιχειοθεσία μαθηματικού κειμένου και υποστηρίζουν γραμματοσειρές PostScript. Τα τελικά αρχεία είναι σε μορφές DVI (Device Independent) και PDF (Portable Document Format). Φυσικά, όπως συμβαίνει συνήθως, στην τελική εκτύπωση χρησιμοποιήθηκε η μορφή PDF. Αυτή είναι και η πιο εύχρηστη και γενικά χρησιμοποιούμενη στις εκτυπώσεις.

<sup>1</sup> Όλες αυτές οι πληροφορίες για τη γραμματοσειρά Optima προέρχονται από το τόσο ενδιαφέρον βιβλίο του Brinhurst, R. (2001), *Στοιχεία της Τυπογραφικής Τέχνης* (Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτότυπου: *The Elements of Typographic Style*, 2η Έκδοση. Hartley & Marks, 1996). Εταιρεία Ελληνικών Τυπογραφικών Στοιχείων και Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, σ. 292.

Ενδιαφέροντα σχόλια για την Optima αναφέρονται επίσης και στο βιβλίο των Grosvenor, J., Morrison, K. and Pim, A. (1992), *The PostScript Font Handbook: A Directory of Type 1 Fonts* (αναθεωρημένη έκδοση). Addison-Wesley, Wokingham, England, σ. 308. Μεταξύ αυτών των σχολίων αναφέρεται ότι η Optima είναι ίσως η πιο πρωτότυπη σχεδίαση (γραμματοσειράς εννοείται) του Hermann Zapf. Επίσης η εμφάνισή της το 1958 προκάλεσε «θόρυβο» στον κόσμο της τυπογραφίας. Έχει αρκετά παχείς και σαφείς χαρακτήρες και θεωρείται κατάλληλη όχι μόνο για τίτλους, αλλά και για συνεχές κείμενο, όπως συμβαίνει εδώ.

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ

Στα συγκεκριμένα παραδείγματα και εφαρμογές που παρουσιάζονται εδώ υπήρξε επίλυση και επεξεργασία από το διδάσκοντα με την εκτέλεση υπολογισμών και με το χέρι και, κυρίως, με τη χρήση της *Mathematica*, έκδοση (version) 4.1, της εταιρείας Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, U.S.A. (Wolfram, 1999). Οι σχετικές εντολές και τα αποτελέσματα που πάρθηκαν κατευθείαν από τη *Mathematica* δεν κρίθηκε σκόπιμο να παρατεθούν αυτούσια. Αυτό συνέβη, επειδή εδώ ο στόχος είναι απλά η εισαγωγή του φοιτητή και της φοιτήτριας Πολιτικού Μηχανικού στις έννοιες και στις μεθόδους των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων καθώς και στις εφαρμογές τους στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού και όχι σε υπολογιστικά προγράμματα. Παρά ταύτα αναγνωρίζεται η πολύτιμη βοήθεια που πρόσφερε η *Mathematica* στην εκτέλεση των υπολογισμών τόσο στα παραδείγματα του Κεφαλαίου Γ2 όσο και στις εφαρμογές του Κεφαλαίου Γ3. Αρκετοί από τους υπολογισμούς αυτούς θα ήταν πάρα πολύ δύσκολο να εκτελεσθούν χωρίς τη βοήθεια του ηλεκτρονικού υπολογιστή και, εν προκειμένω, και της *Mathematica*.

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΑ ΔΥΟ ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ (ΜΕΤΑ ΤΗ ΣΕΛΙΔΑ ΤΙΤΛΟΥ) ΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ Γ

Τα δύο αυτά σχήματα αναφέρονται σε δύο κλασικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού που σχετίζονται με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις και δημιουργήθηκαν με χρήση της *Mathematica*.

Πιο συγκεκριμένα το πρώτο σχήμα αφορά στην ισοελαστική συμπεριφορά ενός υλικού Maxwell με τις δύο συναρτήσεις του: την ενδοτικότητα σε ερπυσμό  $J(t)$  και το μέτρο χαλαρώσεως  $Y(t)$  να δίνονται από τις σχέσεις (3.7.5) της Παραγράφου Γ3.7.2 του Κεφαλαίου Γ3. Τις επαναλαμβάνουμε

$$J(t) = \frac{p_1 + t}{q_1} \quad \text{και} \quad Y(t) = \frac{q_1}{p_1} e^{-t/p_1} \quad \text{με} \quad t \geq 0.$$

Εδώ υποθέσαμε απλά ότι  $p_1 = q_1 = 1$  στο υλικό Maxwell που έχουμε και σχεδιάσαμε τις δύο αυτές συναρτήσεις στο χρονικό διάστημα  $[0, 4]$ . Στο ίδιο σχήμα λάβαμε επίσης υπόψη τη σχέση (3.7.15)

$$\varepsilon(t) = J(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t - \tau)\sigma(\tau) d\tau.$$

Αυτή δίνει την παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  της ισοελαστικής ράβδου σε εφελκυσμό (ή θλίψη) με μεταβλητή την τάση  $\sigma(t)$  που εφαρμόζεται. Εδώ σαν τάση  $\sigma(t)$  πήραμε την τάση που φαίνεται στο πρώτο σχήμα. Στο ίδιο σχήμα σχεδιάσαμε και την αντίστοιχη παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  που προκύπτει από τον πιο πάνω ολοκληρωτικό τύπο. Σημειώνουμε ότι ισχύει ταυτόχρονα και ο δεύτερος ολοκληρωτικός τύπος (3.7.17)

$$\sigma(t) = Y(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{Y}(t - \tau)\varepsilon(\tau) d\tau.$$

Επομένως με γνωστή, όπως και πριν, την τάση  $\sigma(t)$  η αντίστοιχη παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  θα είναι η λύση αυτής της σχέσεως. Προφανώς αυτή αποτελεί τώρα μια ολοκληρωτική εξίσωση. Και αντίστροφα με γνωστή την παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  η τάση  $\sigma(t)$  που αντιστοιχεί σ' αυτήν προκύπτει είτε κατευθείαν από το δεύτερο ολοκληρωτικό τύπο είτε σαν λύση του πρώτου ολοκληρωτικού τύπου. Βέβαια αυτός πρέπει τώρα να ερμηνευθεί σαν μια ολοκληρωτική εξίσωση ως προς την άγνωστη τάση  $\sigma(t)$ .

Τώρα όσον αφορά στο δεύτερο σχήμα, αυτό δείχνει την ελαστική επιφάνεια μιας ορθογωνικής πλάκας  $P$ , διαστάσεων  $(a, b) = (2.5, 2.0)$  και δυσκαμψίας  $D = 1$ . Η πλάκα έχει απλή στήριξη στο σύνορό της και καταπονείται από μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο στη θέση  $(\xi, \eta) = (0.7, 1.5)$ . Πρόκειται για τη συνάρτηση επιρροής (ή συνάρτηση Green)  $G(x, y, \xi, \eta)$  σε μια τέτοια πλάκα που δίνεται από τη σχέση (3.5.38) της Παραγράφου Γ3.5.3 του Κεφαλαίου Γ3. Την επαναλαμβάνουμε

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}, \quad (x, y) \in P, \quad (\xi, \eta) \in P.$$

Εδώ βέβαια τα  $\xi$  και  $\eta$  είναι δύο σταθερές,  $(\xi, \eta) = (0.7, 1.5)$ , κι έτσι μπόρεσε να γίνει η τριδιάστατη αυτή γραφική παράσταση. Για την ακρίβεια σχεδιάσθηκε η  $-G(x, y, \xi, \eta)$  με  $m$  και  $n$  από 1 μέχρι 6.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ *Γ1*

## ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ένα πάρα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον Πολιτικό Μηχανικό στην επιστήμη του είναι οι διαφορικές εξισώσεις, συνήθειες και με μερικές παραγωγούς. Παραδείγματος χάρη, το μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου (αρμονικός ταλαντωτής) χωρίς απόσβεση ανάγεται στη συνήθη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = p(t). \quad (1.0.1)$$

Στην εξίσωση αυτή τα σύμβολα  $m$  και  $k$  δηλώνουν σταθερές (μάζα και σταθερά του ελατηρίου αντίστοιχα), η συνάρτηση  $x(t)$  την άγνωστη θέση του υλικού σημείου και η συνάρτηση  $p(t)$  τη δύναμη που ασκείται επί του υλικού σημείου. Είναι επίσης γνωστό ότι πάρα πολλά μεγέθη  $u(x, y)$  ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού στις δύο διαστάσεις  $x$  και  $y$  πληρούν τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Τέτοια μεγέθη είναι: (α) το άθροισμα των ορθών τάσεων στην επίπεδη, ισότροπη και γραμμική Ελαστικότητα, (β) η συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας και η συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση) στη Ρευστομηχανική του ιδεατού ρευστού, (γ) η συνάρτηση στρεβλώσεως στη Στρέψη, (δ) η θερμοκρασιακή κατανομή (η θερμοκρασία) στη μόνιμη κατάσταση στη Μετάδοση Θερμότητας (ή Διάδοση Θερμότητας) και τόσα άλλα. Η διδιάστατη εξίσωση του Laplace έχει τη μορφή

$$\Delta u(x, y) \equiv \nabla^2 u(x, y) = 0. \quad (1.0.2)$$

Πρόκειται για μια απλή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς στις δύο διαστάσεις  $x$  και  $y$ .

Μπορεί να αναφέρει κανείς δεκάδες διαφορικές εξισώσεις, τόσο συνήθειες όσο και με μερικές παραγωγούς, που απαντώνται σε σειρά προβλημάτων του Πολιτικού Μηχανικού. Τέτοια προβλήματα παρουσιάζονται: (α) στην Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών, που συμπεριλαμβάνει την Κάμψη Δοκών, συνήθων και πάνω σε ελαστική βάση, τη Στρέψη και το Λυγισμό στην Ελαστική Ευστάθεια, (β) στη Ρευστομηχανική, (γ) στην Εδαφομηχανική, (δ) στην Περιβαλλοντική Υδραυλική, (ε) στη Δυναμική των Κατασκευών, (στ) στις Πλάκες και τα Κελύφη (στατικά και δυναμικά προβλήματα) και σε τόσες άλλες χρήσιμες περιοχές της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού. Όλες οι διαφορικές αυτές εξισώσεις παρουσιάζουν το χαρακτηριστικό γνώρισμα ότι αφορούν στις τιμές της άγνωστης συναρτήσεως (ή των άγνωστων συναρτήσεων για συστήματα διαφορικών εξισώσεων) αποκλειστικά στη γειτονιά του σημείου που θεωρούμε κάθε φορά. Αυτό είναι προφανές, γιατί οι παράγωγοι μιας συναρτήσεως σε ένα σημείο αφορούν μόνο στο σημείο αυτό και προσδιορίζονται από μια οριακή διαδικασία στη γειτονιά του. (Το αντίθετο ισχύει στις ολοκληρωτικές εξισώσεις.)

Στο κεφάλαιο των ολοκληρωτικών εξισώσεων, το οποίο θα εξετασθεί διεξοδικά στο παρόν Μέρος Γ των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς, ακολουθείται μια εντελώς διαφορετική διαδικασία. Πιο συγκεκριμένα ένα πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού ανάγεται σε μια εξίσωση που δεν περιέχει πια παραγωγούς, αλλά ένα ολοκλήρωμα, στο οποίο μάλιστα υπεισέρχεται η άγνωστη συνάρτηση. Αν αυτό δε συμβαίνει, δηλαδή δεν έχουμε την άγνωστη συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα, τότε δε μιλάμε για ολοκληρωτική εξίσωση. Πιο αναλυτικά, εάν

υπάρχει απλά ολοκλήρωμα σε έναν τύπο, τότε δικαιούμαστε να τον αποκαλούμε ολοκληρωτικό τύπο, όχι όμως και ολοκληρωτική εξίσωση. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις αποτελούν λοιπόν έναν εναλλακτικό τρόπο προσεγγίσεως φυσικών προβλημάτων, αν και εδώ η έμφαση περιορίζεται σε προβλήματα ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού.

Παραδείγματος χάρη, η κλασική εξίσωση

$$Y(x) = \rho A \omega^2 \int_0^L G(x, \xi) Y(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (1.0.3)$$

είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση. Πιο συγκεκριμένα είναι η ολοκληρωτική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα των αρμονικών καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού μήκους  $L$ . Στην εξίσωση αυτή  $Y(x)$  είναι η άγνωστη συνάρτηση, που παριστάνει το εύρος των ταλαντώσεων,  $\rho A$  η σταθερή γραμμική πυκνότητα της δοκού (μάζα ανά μονάδα μήκους),  $\omega$  η κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων και  $G(x, \xi)$  μια γνωστή συνάρτηση δύο μεταβλητών. Η συνάρτηση αυτή  $G(x, \xi)$  είναι η συνάρτηση επιρροής στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Λύνοντας την πιο πάνω ολοκληρωτική εξίσωση, μπορούμε να προσδιορίσουμε τις ιδιοσυχνότητες  $\omega_n$  και τις αντίστοιχες ιδιομορφές  $Y_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) της ιδιοταλαντούμενης δοκού σε καμπτικές ταλαντώσεις. Το παράδειγμα αυτό ολοκληρωτικής εξισώσεως αναφέρεται στο κλασικό σύγγραμμα του Tricomi **Integral Equations** (1985, Ενότητα 1.10, σσ. 26–27) και παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη Δυναμική των Κατασκευών.

Θα μπορούσε να αναφέρει κανείς δεκάδες παραδείγματα εφαρμογής των ολοκληρωτικών εξισώσεων στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, που μας αφορά εν προκειμένω, και σε άλλες επιστήμες ασφαλώς. Ένα εξαιρετικά απλό παράδειγμα που συσχετίζει τις διαφορικές με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις αναφέρεται στην Ενότητα Γ1.1 αμέσως πιο κάτω. Πολύ περισσότερα παραδείγματα εξετάζονται λεπτομερώς στο Κεφάλαιο Γ3. Το Κεφάλαιο αυτό Γ3 αφορά αποκλειστικά σε εφαρμογές των ολοκληρωτικών εξισώσεων στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

Στο παρόν Κεφάλαιο Γ1 θα γίνει προσπάθεια ήπιας εισαγωγής στις ολοκληρωτικές εξισώσεις με επεξήγηση των σχετικών βασικών εννοιών και ταξινόμησή τους σε κατηγορίες. Θα γίνει επίσης αναφορά στα πλεονεκτήματα των ολοκληρωτικών εξισώσεων στις περιπτώσεις που πρέπει πραγματικά να τις προτιμάει ο Πολιτικός Μηχανικός. Μία μόνο από τις περιπτώσεις αυτές είναι η χρήση των καλούμενων συνοριακών ολοκληρωτικών εξισώσεων και της σχετικής μεθόδου των συνοριακών στοιχείων. Στη μέθοδο αυτή μια περιοχή  $D$  στις δύο διαστάσεις  $x$  και  $y$  μελετάται με ολοκληρωτική εξίσωση μόνο στο σύνορό της  $C$  αντί σε ολόκληρη τη διδιάστατη περιοχή  $D$  (με τη χρήση διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγωγούς ή πεπερασμένων στοιχείων). Η δυνατότητα αυτή παρουσιάζει φοβερά υπολογιστικά οφέλη για τον Πολιτικό Μηχανικό. (Ανάλογα ισχύουν και στις τρεις διαστάσεις  $x$ ,  $y$  και  $z$ .) Στο επόμενο Κεφάλαιο Γ2 θα εξετασθούν σύντομα οι βασικές μέθοδοι επιλύσεως συνήθων ολοκληρωτικών εξισώσεων. Τέλος το τελευταίο Κεφάλαιο Γ3 αφορά αποκλειστικά σε εφαρμογές.

### Γ1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος είναι πάρα πολύ βασικές για τον Πολιτικό Μηχανικό και απαντώνται σε πολλές περιοχές της επιστήμης του. Σαν ένα πολύ απλό παράδειγμα που περιέχει την παράγωγο συναρτήσεως μπορούμε να αναφέρουμε τον τύπο

$$v(t) = \dot{x}(t), \quad t > 0, \quad (1.1.1)$$

στην Κινηματική του υλικού σημείου. Ο τύπος αυτός αποτελεί τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα  $v(t)$  με τη θέση  $x(t)$  υλικού σημείου  $M$  κατά την ευθύγραμμη κίνησή του κατά μήκος του άξονα  $Ox$ . Το σύμβολο  $t$ , η ανεξάρτητη μεταβλητή, δηλώνει το χρόνο. Με γνωστή τη θέση  $x(t)$  του υλικού

σημείου  $M$  (που υποτίθεται ότι είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον παραπάνω τύπο (1.1.1), για να προσδιορίσουμε (με παραγωγή) την ταχύτητα  $v(t)$  του ίδιου σημείου. Η παραγωγή μπορεί να εκτελεσθεί αναλυτικά: με το χέρι ή με πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών, όπως η *Mathematica* και η *Maxima*. Μπορεί ακόμη να εκτελεσθεί και αριθμητικά με τη χρήση αριθμητικής παραγωγίσεως. Εντούτοις η αναλυτική παραγωγή είναι σχεδόν πάντοτε προτιμότερη στις περιπτώσεις που είναι εφικτή.

Μια δεύτερη ερμηνεία του ίδιου θεμελιώδους τύπου (1.1.1) είναι να θεωρηθεί ο τύπος αυτός σαν διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου  $M$  και γνωστή την ταχύτητά του  $v(t)$ . Πρόκειται για μια εξαιρετικά απλή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως με τη λύση της  $x(t)$  να προκύπτει άμεσα με μία ολοκλήρωση ως προς το χρόνο  $t$ , έστω από την αρχική στιγμή  $\tau = 0$  μέχρι τη στιγμή  $\tau = t$ . Τότε προκύπτει

$$x(t) = C + \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (1.1.2)$$

όπου, δυστυχώς, η ολοκλήρωση (σε αντίθεση με την παραγωγή) εισάγει μια σταθερά ολοκλήρωσης, τη  $C$ , στον παραπάνω τύπο. Τυπικά η σταθερά αυτή  $C$  είναι αυθαίρετη, δηλαδή η παραγωγή του τύπου (1.1.2) οδηγεί ασφαλώς στον τύπο (1.1.1). Με άλλα λόγια η έκφραση (1.1.2) για τη θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου  $M$  είναι πράγματι λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.1.1) και μάλιστα η γενική της λύση. Στην πράξη όμως ο Πολιτικός Μηχανικός δεν είναι ευχαριστημένος με τη γενική λύση (1.1.2) που διαθέτει θέλοντας κάθε πρόβλημα που αντιμετωπίζει να έχει μία και μόνο μία λύση και όχι απειρία λύσεων. Εν προκειμένω η απειρία των λύσεων οφείλεται στην αυθαίρετη σταθερά  $C$  στη λύση (1.1.2) της διαφορικής εξίσωσης (1.1.1).

Είναι προφανές ότι για να υπάρχει μία και μόνο μία λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα, πρέπει η διαφορική εξίσωση (1.1.1) να συνοδεύεται και από μία αρχική συνθήκη (για  $t = 0$ ), την εξής:

$$x(0) = x_0. \quad (1.1.3)$$

Η αρχική αυτή συνθήκη καθορίζει την αρχική θέση  $x(0)$  του υλικού σημείου  $M$ . Πρέπει δηλαδή στη συγκεκριμένη περίπτωση να έχουμε ένα πρόβλημα αρχικής τιμής το οποίο αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση (1.1.1) καθώς και την αρχική συνθήκη (1.1.3). Τότε η γενική λύση (1.1.2) για τη θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου  $M$  μας οδηγεί στην εξής προφανή μερική (ή ειδική) λύση:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (1.1.4)$$

τη λύση την οποία πραγματικά ζητούσαμε. Τούτο διαπιστώνεται αμέσως θέτοντας  $t = 0$  στη λύση (1.1.2), οπότε προκύπτει  $C = x(0) = x_0$  λόγω και της αρχικής συνθήκης (1.1.3).

Στο σημείο αυτό ας επαναληφθεί ότι ο αρχικός τύπος μας (1.1.1) ερμηνεύθηκε ήδη (απόλυτα σωστά μάλιστα)

1. Είτε σαν τύπος που μας δίνει την ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου  $M$  με γνωστή τη θέση του  $x(t)$ .
2. Είτε αντίστροφα σαν διαφορική εξίσωση ως προς τη θέση  $x(t)$  του ίδιου σημείου  $M$  με γνωστή την ταχύτητά του  $v(t)$ . Στην περίπτωση αυτή απαιτείται και η συμπλήρωση του ίδιου τύπου συνήθως με την αρχική συνθήκη (1.1.3), έτσι ώστε να πάρουμε τη μοναδική λύση ενός προβλήματος αρχικής τιμής. Σημειώνεται και πάλι ότι ο Πολιτικός Μηχανικός πρέπει (ή έστω θελει) να θεμελιώνει μαθηματικά τα προβλήματα που αντιμετωπίζει στην πράξη κατά τέτοιο τρόπο, ώστε αυτά να έχουν μία και μόνο μία λύση. Δεν έχει μάλιστα ιδιαίτερη σημασία αν αυτή η λύση θα βρεθεί αναλυτικά ή αριθμητικά, με το χέρι ή με τον υπολογιστή.

Μια τρίτη ερμηνεία του ίδιου τύπου (1.1.1) θα προέκυπτε, αν είχαμε δεδομένες ταυτόχρονα τόσο τη θέση  $x(t)$  όσο και την ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου  $M$ . Τότε ο τύπος (1.1.1) θα μας

οδηγούσε στον έλεγχο εάν οι δύο αυτές συναρτήσεις πράγματι αντιπροσωπεύουν τη θέση και την ταχύτητα του υλικού σημείου  $M$  (λογικό αληθές, *true*) ή όχι (λογικό ψευδές, *false*). Η τρίτη αυτή ερμηνεία της ίδιας ισότητας (1.1.1) δε θα μας απασχολήσει περισσότερο εδώ.

Σκοπό της παρούσας ενότητας αποτελεί η ήπια εισαγωγή του φοιτητή και της φοιτήτριας Πολιτικού Μηχανικού στην έννοια των ολοκληρωτικών εξισώσεων ανάλογα με ό,τι ήδη έγινε για τις διαφορικές εξισώσεις. Η εισαγωγή αυτή άρχισε κιόλας να γίνεται (κατά ελλιπή βέβαια τρόπο) με την αντιστοίχιση του τύπου (1.1.1) (αυτού που περιέχει παράγωγο) με τον ισοδύναμό του τύπο (1.1.2) (αυτόν που περιέχει ολοκλήρωμα). Καλύτερα μάλιστα, θεωρώντας ότι διαθέτουμε και την αρχική συνθήκη (1.1.3), αντιστοιχίζουμε τον τύπο (1.1.1) με τον τύπο (1.1.4), όπου δεν εμφανίζεται πια η αυθαίρετη σταθερά  $C$ .

Ας τροποποιήσουμε τώρα τις παραπάνω δυνατότητες ερμηνείας του τύπου (1.1.1) εφαρμόζοντας τις στον τύπο (1.1.4). Διαπιστώνουμε αμέσως ότι ο τύπος αυτός μπορεί να ερμηνευθεί (και πάλι απόλυτα σωστά)

1. Είτε σαν ένας τύπος που μας δίνει τη θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου  $M$  με γνωστή την ταχύτητά του  $v(t)$ .
2. Είτε αντίστροφα σαν μια ολοκληρωτική εξίσωση ως προς την ταχύτητα  $v(t)$  του ίδιου σημείου με γνωστή τη θέση του  $x(t)$ . Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή της ολοκληρωτικής εξισώσεως, δεν απαιτείται η συμπλήρωση του ίδιου τύπου με αρχική συνθήκη. Η αρχική συνθήκη (1.1.3) έχει ήδη ενσωματωθεί στην ολοκληρωτική εξίσωση (1.1.4), όπως φαίνεται θέτοντας  $t = 0$  στην εξίσωση αυτή. Τούτο αποτελεί ένα πλεονέκτημα της χρήσεως ολοκληρωτικών εξισώσεων αντί για διαφορικές εξισώσεις σε όσες περιπτώσεις αυτό είναι εφικτό.

Οποσδήποτε με δεδομένες και τη θέση  $x(t)$  και την ταχύτητα  $v(t)$  (π.χ. από πειραματικές μετρήσεις) ο τύπος (1.1.4) μπορεί και αυτός να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο τους (αποτελεσμα αληθές ή ψευδές) στο συγκεκριμένο πρόβλημα Κινηματικής του υλικού σημείου. Τούτο αποτελεί μια εναλλακτική δυνατότητα σε σχέση με τον αρχικό τύπο (1.1.1) μαζί βέβαια με την αρχική συνθήκη (1.1.3) που το συνοδεύει.

Με το πιο πάνω στοιχειώδες παράδειγμα, που δανεισθήκαμε από την Κινηματική του υλικού σημείου, έγινε απόπειρα (ελπίζεται επιτυχής) εισαγωγής στην έννοια της ολοκληρωτικής εξισώσεως και συνδέσεως της έννοιας αυτής με την ήδη τόσο γνωστή έννοια της διαφορικής εξισώσεως. Στο παράδειγμά μας η διαφορική εξίσωση (1.1.1) (που συνοδεύεται από την αρχική συνθήκη (1.1.3)) έχει λύση  $x(t)$  την (1.1.4). Αυτό μπορεί μάλιστα εύκολα να επαληθευθεί με αντικατάσταση της εκφράσεως της θέσεως  $x(t)$  από τη σχέση (1.1.4) στις σχέσεις (1.1.1) και (1.1.3). Και αντίστροφα, εάν η σχέση (1.1.4) θεωρηθεί σαν ολοκληρωτική εξίσωση με γνωστή τη θέση  $x(t)$  και άγνωστη την ταχύτητα  $v(t)$ , τότε η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση έχει σαν λύση της την (1.1.1). Και τούτο μπορεί άμεσα επίσης να επαληθευθεί με απλή παραγωγή της ολοκληρωτικής εξισώσεως (1.1.4) ως προς το χρόνο  $t$  με την αρχική θέση  $x(0) = x_0$  να θεωρείται φυσικά σταθερή κατά τη διάρκεια της παραγωγίσεως. Μια καλύτερη σχετική δυνατότητα αποτελεί η αντικατάσταση της λύσεως  $v(t) = \dot{x}(t)$  από τη σχέση (1.1.1) στην εξίσωση (1.1.4), της οποίας διαπιστώνεται εύκολα η ισχύς.

Η παραγωγή της σχέσεως (1.1.4) μας έδειξε επίσης και ένα στοιχειώδη τρόπο επιλύσεως ολοκληρωτικών εξισώσεων. Αυτός συνίσταται στην άμεση παραγωγή και αναγωγή της ολοκληρωτικής εξισώσεως γενικά σε διαφορική εξίσωση, αν και εδώ βρέθηκε κατευθείαν η λύση  $v(t)$ . Δυστυχώς ο τρόπος αυτός είναι γενικά ανεφάρμοστος σε πάρα πολλές περιπτώσεις δυσκολότερων ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Εναλλακτικά μπορούμε να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση (1.1.4) με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε τους μετασχηματισμούς Laplace

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}, \quad V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\} \quad (1.1.5)$$

της γνωστής συναρτήσεως (εδώ της θέσεως)  $x(t)$  και της άγνωστης συναρτήσεως (εδώ της ταχύτητας)  $v(t)$ . Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της ολοκληρωτικής εξίσωσης (1.1.4). Παίρνουμε επίσης υπόψη μας ότι  $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$  ( $s > 0$ ), ο δε μετασχηματισμός Laplace ενός αορίστου ολοκληρώματος ισούται με το μετασχηματισμό Laplace  $Y(s)$  της ολοκληρωτέας συναρτήσεως  $y(t)$  δια  $s$ , δηλαδή

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t y(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{y(t)\} = \frac{Y(s)}{s}. \quad (1.1.6)$$

Τότε προκύπτει η εξής αλγεβρική εξίσωση:

$$X(s) = \frac{x_0}{s} + \frac{V(s)}{s}, \quad (1.1.7)$$

η οποία αντικαθιστά την αρχική ολοκληρωτική εξίσωση (1.1.4). Πρόκειται για μια πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace  $V(s)$  με προφανή λύση τη

$$V(s) = sX(s) - x_0, \quad (1.1.8)$$

όπου βέβαια  $x_0 = x(0)$ . Το δεξιό μέλος στη λύση αυτή (ως προς  $V(s)$ ) δεν είναι όμως τίποτε άλλο παρά ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου  $\dot{x}(t)$  της γνωστής θέσεως  $x(t)$  του υλικού σημείου  $M$ , γιατί

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0) = sX(s) - x_0. \quad (1.1.9)$$

Άρα

$$V(s) = \mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} \quad (1.1.10)$$

και επομένως (για θετικές τιμές του χρόνου  $t$ )

$$v(t) = \dot{x}(t), \quad t > 0. \quad (1.1.11)$$

Προέκυψε δηλαδή ο τύπος (1.1.1), ακριβώς όπως αναμενόταν, σαν λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (1.1.4). Επομένως η άγνωστη ταχύτητα  $v(t)$  είναι η πρώτη παράγωγος  $\dot{x}(t)$  της γνωστής θέσεως  $x(t)$  του ευθύγραμμα κινούμενου υλικού σημείου  $M$ .

Αναμφίβολα όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούν άμεσα και χωρίς κόπο να επεκταθούν και στην περίπτωση όπου θεωρούμε την ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου  $M$  αντί για τη θέση του  $x(t)$ , τη δε επιτάχυνσή του  $a(t)$  αντί για την ταχύτητά του  $v(t)$ . Θεωρώντας λοιπόν την ταχύτητα  $v(t)$  άγνωστη, τη δε επιτάχυνση  $a(t)$  γνωστή, έχουμε το εξής πρόβλημα αρχικής τιμής:

$$a(t) = \dot{v}(t), \quad t > 0, \quad v(0) = v_0. \quad (1.1.12)$$

Σύμφωνα με όσα ήδη εκθέσαμε, δηλαδή με μια ολοκλήρωση, το πρόβλημα αυτό οδηγεί στην εξής απλή ολοκληρωτική εξίσωση, τώρα όμως ως προς την επιτάχυνση  $a(t)$ :

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1.1.13)$$

Η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση είναι απόλυτα ανάλογη με την εξίσωση (1.1.4) προηγουμένως και έχει λύση  $a(t)$  την (1.1.12). Η λύση αυτή προκύπτει είτε (α) με παραγωγή της ολοκληρωτικής αυτής εξίσωσης (1.1.13) ως προς το χρόνο  $t$  είτε (β) με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Εναλλακτικά βέβαια, εάν είναι η επιτάχυνση  $a(t)$  αυτή που είναι γνωστή συνάρτηση, ενώ η ταχύτητα  $v(t)$  είναι ακόμη άγνωστη συνάρτηση, τότε η σχέση (1.1.13) είναι απλά ο ολοκληρωτικός τύπος που μας δίνει την άγνωστη ταχύτητα  $v(t)$ . Ασφαλώς τώρα δεν πρόκειται για ολοκληρωτική εξίσωση, γιατί η άγνωστη συνάρτηση (η ταχύτητα  $v(t)$ ) είναι εκτός του ολοκληρώματος, στο οποίο ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι απλά η γνωστή επιτάχυνση  $a(t)$ .

Λίγο πιο πολύπλοκη εμφανίζεται η κατάσταση, όταν εμείς εξετάζουμε ταυτόχρονα τη θέση  $x(t)$  και την επιτάχυνση  $a(t)$  του υλικού σημείου  $M$  στην παρούσα ευθύγραμμη κίνησή του κατά μήκος του άξονα  $Ox$ . Στην περίπτωση αυτή ισχύει ο γνωστός τύπος

$$a(t) = \ddot{x}(t), \quad t > 0. \quad (1.1.14)$$

Ο τύπος αυτός δίνει απλά την επιτάχυνση  $a(t)$  του υλικού σημείου  $M$ , εάν η θέση του  $x(t)$  είναι γνωστή. Εναλλακτικά αποτελεί τη γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως προς εύρεση της θέσεως  $x(t)$ , εάν είναι η επιτάχυνση  $a(t)$  αυτή που έχει υποτεθεί γνωστή. Θεωρούμε επίσης γνωστές και τις αρχικές συνθήκες

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0. \quad (1.1.15)$$

Αυτές απαιτούνται κατά την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (1.1.14), εφόσον υιοθετηθεί αυτή η ερμηνεία της σχέσεως (1.1.14), δηλαδή η ερμηνεία της σαν διαφορική εξίσωση.

Θα προχωρήσουμε τώρα στην αναγωγή της σχέσεως (1.1.14) σε ολοκληρωτική μορφή εκτελώντας δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις από  $\tau = 0$  έως  $\tau = t$ . Η πρώτη ολοκλήρωση μας οδηγεί σε μια εξίσωση όπου παρουσιάζονται και παράγωγος και ολοκλήρωμα, πιο συγκεκριμένα στην εξίσωση

$$\dot{x}(t) = v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau, \quad t > 0, \quad (1.1.16)$$

όπου πήραμε υπόψη και τη δεύτερη από τις αρχικές συνθήκες (1.1.15): την αρχική ταχύτητα  $v_0$ . Η σχέση αυτή (1.1.16) αποτελεί ήδη μια ολοκληρωτική εξίσωση προς προσδιορισμό της επιταχύνσεως  $a(t)$  με τη θέση  $x(t)$  θεωρούμενη γνωστή. Για να αποφύγουμε την παράγωγο  $\dot{x}(t)$  στο αριστερό μέλος, προχωράμε και σε δεύτερη ολοκλήρωση (στο διάστημα  $[0, t]$  και πάλι). Τότε προκύπτει

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^t \left( \int_0^{t^*} a(\tau) d\tau \right) dt^*, \quad t \geq 0. \quad (1.1.17)$$

Στη σχέση αυτή δώσαμε επίσης προσοχή, ώστε οι μεταβλητές ολοκληρώσεως ( $\tau$  και  $t^*$ ) να μη συμπίπτουν με τα σχετικά άνω όρια ολοκληρώσεως ( $t^*$  και  $t$  αντίστοιχα) στις αόριστες ολοκληρώσεις. Σημειώνουμε επίσης ότι οι δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις είναι εμφανείς στο ολοκλήρωμα της ίδιας σχέσεως (1.1.17). Η σχέση αυτή μας δίνει τη θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου  $M$  με την επιτάχυνσή του  $a(t)$  θεωρούμενη γνωστή: ολοκληρωτικός τύπος. Εναλλακτικά όμως αποτελεί μια ολοκληρωτική εξίσωση (με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις μάλιστα) για τον προσδιορισμό της άγνωστης επιταχύνσεως  $a(t)$  τώρα με τη θέση  $x(t)$  να θεωρείται γνωστή.

Οι δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις στο δεξιό μέλος της εξίσωσης (1.1.17) μπορούν θαυμάσια να αποφευχθούν (αναγωγή σε απλή ολοκλήρωση) με τη μετατροπή του σχετικού διαδοχικού (διπλού) ολοκληρώματος σε απλό ολοκλήρωμα λόγω της ισχύος του τύπου

$$\int_0^t \left( \int_0^{t^*} a(\tau) d\tau \right) dt^* = \int_0^t (t - \tau) a(\tau) d\tau. \quad (1.1.18)$$

Ο τύπος αυτός μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με παραγοντική ολοκλήρωση (ολοκλήρωση κατά μέρη, κατά παράγοντες) στο αριστερό μέλος του. Προς το σκοπό αυτό πρέπει να πάρουμε υπόψη μας ότι η παράγωγος ενός αορίστου ολοκληρώματος (ως προς το άνω όριο ολοκληρώσεως) ισούται με την ολοκληρωτέα συνάρτηση, δηλαδή ότι η ολοκλήρωση και η παραγωγή είναι αντίστροφες πράξεις, πιο συγκεκριμένα ότι

$$\frac{d}{dt^*} \int_0^{t^*} a(\tau) d\tau = a(t^*). \quad (1.1.19)$$

Προχωρώντας τώρα στην εφαρμογή της παραγοντικής ολοκληρώσεως, διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^t \left( \int_0^{t^*} a(\tau) d\tau \right) dt^* &= t^* \int_0^{t^*} a(\tau) d\tau \Big|_0^t - \int_0^t t^* a(t^*) dt^* \\ &= t \int_0^t a(\tau) d\tau - \int_0^t \tau a(\tau) d\tau = \int_0^t (t - \tau) a(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.1.20)$$

Επομένως η σχέση (1.1.17) λόγω του τύπου (1.1.18), που αποδείχθηκε αμέσως πιο πάνω, παίρνει την απλούστερη μορφή

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \int_0^t (t - \tau) a(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1.1.21)$$

Η σχέση αυτή αποτελεί πλέον μια συνήθη ολοκληρωτική εξίσωση ως προς την επιτάχυνση  $a(t)$  του υλικού σημείου  $M$  με τη θέση του  $x(t)$  να θεωρείται γνωστή.

## Γ1.2. ΕΙΔΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Τα δύο βασικά, αλλ' αρκετά διαφορετικά στο χειρισμό τους, είδη ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι: (α) οι εξισώσεις Volterra (με το άνω όριο ολοκληρώσεως μεταβλητό) και (β) οι εξισώσεις Fredholm (με τό ίδιο όριο σταθερό). Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

### Γ1.2.1. Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra

Στην προηγούμενη ενότητα είχαμε την ευκαιρία να συναντήσουμε ολοκληρωτικές εξισώσεις. Ολοκληρωτική εξίσωση είναι η εξίσωση (1.1.4), που έχει άγνωστη συνάρτηση την ταχύτητα  $v(t)$  του υλικού σημείου  $M$  (σε ευθύγραμμη κίνησή του κατά τον άξονα  $Ox$ ) και γνωστή συνάρτηση τη θέση  $x(t)$  του ίδιου σημείου  $M$ . Είναι επίσης ολοκληρωτική εξίσωση και η ανάλογη εξίσωση (1.1.13) με άγνωστη συνάρτηση την επιτάχυνση  $a(t)$  του υλικού σημείου  $M$  και γνωστή συνάρτηση την ταχύτητά του  $v(t)$ . Τέλος η ολοκληρωτική εξίσωση (1.1.21) έχει άγνωστη συνάρτηση την επιτάχυνση  $a(t)$  του υλικού σημείου  $M$  και γνωστή συνάρτηση τη θέση  $x(t)$  του ίδιου σημείου. Και οι τρεις αυτές ολοκληρωτικές εξισώσεις ανήκουν στις μονοδιάστατες γραμμικές μη ομογενείς ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra πρώτου είδους.

Μια διαφορετική κατηγορία ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra είναι η εξής:

$$y(x) + \int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.2.1)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια μονοδιάστατη γραμμική μη ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους. Στην ολοκληρωτική εξίσωση αυτή  $y(x)$  είναι η άγνωστη συνάρτηση, που παρουσιάζεται τόσο μέσα στο ολοκλήρωμα όσο και έξω από αυτό. Για το λόγο αυτό και η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση (1.2.1) καλείται δευτέρου είδους. Στην ίδια εξίσωση υπάρχει επίσης και η γνωστή συνάρτηση  $f(x)$  στο δεξιό μέλος, γι' αυτό γίνεται και ο χαρακτηρισμός της σαν μη ομογενούς. Η γνωστή συνάρτηση  $K(x, t)$  δύο μεταβλητών, των  $x$  και  $t$ , καλείται **πυρήνας** της ολοκληρωτικής εξισώσεως (1.2.1). Το βασικό χαρακτηριστικό των ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra είναι ότι στο ολοκλήρωμα το άνω όριο ολοκληρώσεως είναι μεταβλητή, η μεταβλητή  $x$  εν προκειμένω, ενώ το κάτω όριο ολοκληρώσεως είναι σταθερά, η σταθερά  $a$  εν προκειμένω. Εάν όμως δεν υπήρχε ο όρος  $y(x)$  έξω από το ολοκλήρωμα, η σχετική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra, δηλαδή η εξίσωση

$$\int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.2.2)$$

θα ήταν πρώτου είδους. Θα είχαμε δηλαδή μια μονοδιάστατη γραμμική μη ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση Volterra πρώτου είδους. Αντίθετα, εάν δεν υπήρχε η γνωστή συνάρτηση  $f(x)$  στο δεξιό

μέλος, η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra (1.2.1) θα ήταν ομογενής, παίρνοντας τη μορφή

$$y(x) + \int_a^x K(x, t) y(t) dt = 0, \quad a \leq x \leq b. \quad (1.2.3)$$

Θα είχαμε επομένως μια μονοδιάστατη γραμμική ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους.

Σημειώνεται επίσης ότι η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra πρώτου είδους (1.2.2) ανάγεται εύκολα σε δευτέρου είδους με απλή παρααγωγή της ως προς τη μεταβλητή  $x$ , πιο συγκεκριμένα,

$$K(x, x) y(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) y(t) dt = f'(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.2.4)$$

Η σχέση αυτή ισχύει με την υπόθεση ότι υπάρχουν οι σχετικές παράγωγοι και ότι  $K(x, x) \neq 0$  σε όλο το βασικό διάστημα  $[a, b]$  που εξετάζεται. Έτσι μπορεί να γίνει τελικά η διαίρεση με  $K(x, x)$  στην ολοκληρωτική εξίσωση (1.2.4), ώστε αυτή να πάρει την τελική μορφή ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra δευτέρου είδους, δηλαδή τη μορφή

$$y(x) + \int_a^x \left( \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) \right) y(t) dt = \frac{f'(x)}{K(x, x)}, \quad a \leq x \leq b. \quad (1.2.5)$$

Σημειώνεται και πάλι ότι οι ολοκληρωτικές εξισώσεις (1.1.4), (1.1.13) και (1.1.21) της προηγούμενης Ενότητας Γ1.1 είναι (και οι τρεις) μονοδιάστατες γραμμικές μη ομογενείς ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra πρώτου είδους. Ειδικότερα στην τελευταία ο πυρήνας είναι  $K(t, \tau) = t - \tau$ .

### Γ1.2.2. Ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm

Απόλυτα ανάλογες με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra είναι και οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm, μόνο που τώρα απλά το άνω όριο ολοκληρώσεως είναι μια σταθερά  $b$  αντί για τη μεταβλητή  $x$ . Έτσι έχουμε, π.χ., τη μονοδιάστατη γραμμική μη ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους

$$y(x) + \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.2.6)$$

αντί για την αντίστοιχη εξίσωση Volterra (1.2.1). Προφανώς (σε αντίθεση με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra πρώτου είδους) στις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm πρώτου είδους δεν είναι δυνατή η αναγωγή (με παρααγωγή) σε αντίστοιχες εξισώσεις δευτέρου είδους.

### Γ1.3. ΕΥΝΟΪΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΠΥΡΗΝΩΝ

Στο παρόν Μέρος Γ των διδακτικών βιβλίων Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς, το οποίο αφορά στις ολοκληρωτικές εξισώσεις, θα περιορισθούμε κυρίως στις γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Αυτές είναι αφενός οι πιο συνήθισμένες στην πράξη και αφετέρου οι πιο εύκολες στους υπολογισμούς των λύσεών τους. Όσον αφορά στους πυρήνες  $K(x, t)$ , δύο είδη πυρήνων είναι ευπρόσδεκτα:

- Οι πυρήνες της μορφής  $K(x, t) = k(x - t)$ , οι οποίοι εξαρτώνται μόνο από τη διαφορά  $x - t$ . Οδηγούν έτσι σε συνελκτικά ολοκληρώματα σε περιπτώσεις ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra πρώτου ή δευτέρου είδους. Για τις ολοκληρωτικές αυτές εξισώσεις μπορούμε στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, όπως θα εξηγήσουμε εκτενώς πιο κάτω (στην Ενότητα Γ2.2).
- Οι **διαχωρίσιμοι** πυρήνες  $K(x, t)$  της γενικής μορφής

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n L_i(x) M_i(t) \quad (1.3.1)$$



με γνωστές τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής  $L_i(x)$  και  $M_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Όπως θα δούμε πιο κάτω (στην Ενότητα Γ2.3), οι διαχωρίσιμοι πυρήνες επιτρέπουν την άμεση (και χωρίς κανενός είδους προσεγγίσεις) αναγωγή μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm δευτέρου είδους σε ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

Πέρα από τα παραπάνω δύο είδη πυρήνων ιδιαίτερο ενδιαφέρον και χρησιμότητα παρουσιάζουν και οι **συμμετρικοί** πυρήνες  $K(x, t)$ , για τους οποίους ισχύει η απλή σχέση

$$K(x, t) = K(t, x), \quad a \leq x \leq b, \quad a \leq t \leq b. \quad (1.3.2)$$

Μερικές φορές μάλιστα είναι δυνατόν να μετατραπεί μια ολοκληρωτική εξίσωση με μη συμμετρικό πυρήνα  $K_0(x, t)$  σε αντίστοιχη εξίσωση με συμμετρικό πυρήνα  $K(x, t)$ . Κάτι τέτοιο είναι πάρα πολύ ευπρόσδεκτο.

Σημειώνεται τέλος ότι στην κατηγορία αυτή των συμμετρικών πυρήνων ανήκουν συνήθως και οι **συναρτήσεις επιρροής**  $G$ , οι οποίες θεωρούνται σαν πυρήνες όσες φορές χρησιμοποιούνται σε ολοκληρωτικές εξισώσεις. Οι συναρτήσεις αυτές απαντώνται πάρα πολύ συχνά στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Τις συναρτήσεις επιρροής  $G$  θα τις εξηγήσουμε φυσικά και θα τις εξετάσουμε (με συντομία βέβαια) στην Ενότητα Γ3.5 του Κεφαλαίου Γ3 των εφαρμογών. Ειδικότερα θα τις εξετάσουμε: (α) στις απλές μονοδιάστατες περιπτώσεις της χορδής και της δοκού: συνάρτηση επιρροής  $G(x, \xi)$  και (β) στη διδιάστατη και υπολογιστικά κάπως πολυπλοκότερη περίπτωση της ορθογωνικής πλάκας: συνάρτηση επιρροής  $G(x, y, \xi, \eta)$ . Το **θεώρημα** (ή **νόμος** ή **αρχή**) της **αμοιβαιότητας των μετατοπίσεων** του Maxwell ή των Betti-Maxwell (Μαστρογιάννης, 1999, Τόμος Πρώτος, Ενότητα 6.7, σσ. 237–239) αποτελεί (στην περίπτωση της γραμμικής Ελαστικότητας) το φυσικό λόγο της συμμετρίας των πυρήνων αυτών, δηλαδή των συναρτήσεων επιρροής  $G$ .

## Γ1.4. ΑΝΑΓΩΓΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΣΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ

### Γ1.4.1. Εισαγωγικές παρατηρήσεις

Πάρα πολλά προβλήματα της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού (και πολλών άλλων εφαρμοσμένων επιστημών) διαμορφώνονται σαν συνήθεις διαφορικές εξισώσεις συν τις αρχικές ή συνοριακές ή κάποιου άλλου τύπου συνθήκες που τις συνοδεύουν. Παραδείγματος χάρη, το πρόβλημα του απλού μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα με απόσβεση της κινήσεως και με την εφαρμογή εξωτερικής δύναμης  $p(t)$  πάνω στο υλικό σημείο καταλήγει στην εξής μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = p(t), \quad t > 0. \quad (1.4.1)$$

Η εξίσωση αυτή συνοδεύεται μάλιστα από τις ακόλουθες δύο αρχικές συνθήκες: αρχική θέση  $x_0$  και αρχική ταχύτητα  $v_0$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v(0) = v_0. \quad (1.4.2)$$

Στη διαφορική εξίσωση (1.4.1) το σύμβολο  $m$  δηλώνει τη μάζα του υλικού σημείου  $M$ , το σύμβολο  $k$  τη σταθερά του ελατηρίου  $S$  και το σύμβολο  $c$  το συντελεστή αποσβέσεως της κινήσεως. Η απόσβεση αυτή οφείλεται στον αποσβεστήρα  $D$ . Έχουμε δηλαδή τρεις σταθερές παραμέτρους στο απλό μηχανικό αυτό σύστημα. Επίσης η συνάρτηση  $x(t)$  παριστάνει τη θέση (ως προς τη θέση ηρεμίας) ή τη μετατόπιση ως προς την ίδια θέση του υλικού σημείου  $M$ . Αυτή είναι η άγνωστη συνάρτηση στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση (1.4.1). Επίσης η συνάρτηση  $p(t)$  στο δεξιό μέλος είναι η γνωστή εξωτερική δύναμη που επιβάλλεται πάνω στο υλικό σημείο  $M$ . Η ανεξάρτητη μεταβλητή στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση είναι προφανώς ο χρόνος  $t$ , ενώ η εξαρτημένη μεταβλητή (ισοδύναμα η άγνωστη συνάρτηση) είναι η θέση  $x$  του υλικού σημείου  $M$ .

Ασφαλώς σε πολλές περιπτώσεις η πιο πάνω διαφορική εξίσωση (1.4.1) παίρνει κάποια απλοποιημένη μορφή. Παραδείγματος χάρη, σε περίπτωση μηδενικής αποσβέσεως:  $c = 0$ , οπότε το μηχανικό σύστημα έχει πλέον δύο μόνο παραμέτρους: τη μάζα  $m$  του υλικού σημείου  $M$  και τη σταθερά  $k$  του ελατηρίου  $S$  (δεν υπάρχει αποσβεστήρας), η πιο πάνω διαφορική εξίσωση (1.4.1) παίρνει την απλούστερη μορφή

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = p^*(t), \quad t > 0. \quad (1.4.3)$$

Στην εξίσωση αυτή η ανηγμένη τώρα δύναμη  $p^*(t)$  που ασκείται πάνω στο υλικό σημείο  $M$  και η φυσική κυκλική συχνότητα (κυκλική ιδιοσυχνότητα)  $\omega_0$  του μηχανικού συστήματος δίνονται από τους τύπους

$$p^*(t) = \frac{p(t)}{m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (1.4.4)$$

αντίστοιχα. Εάν έχουμε επιπλέον και ελεύθερη (όχι εξαναγκασμένη) ταλάντωση:  $p(t) = p^*(t) \equiv 0$ , δηλαδή δεν έχουμε εξωτερική δύναμη να εφαρμόζεται πάνω στο υλικό σημείο  $M$ , τότε η διαφορική εξίσωση (1.4.3) απλοποιείται κι άλλο και παίρνει τη μορφή:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad t > 0. \quad (1.4.5)$$

Η διαφορική εξίσωση (1.4.1) (ή οι απλοποιημένες μορφές της (1.4.3) και (1.4.5)) μαζί με τις αρχικές συνθήκες (1.4.2) συνιστούν απλά ένα παράδειγμα διαφορικής εξισώσεως με αρχικές συνθήκες. Με άλλες λέξεις αποτελούν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών. Εκατοντάδες ακόμη παραδείγματα τέτοιων εξισώσεων (συνήθως δυσκολότερων και σπάνια ευκολότερων) απαντώνται στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Δεν αποτελούν όμως το θέμα της παρούσας ενότητας. Το θέμα αυτό είναι απλά να δείξουμε ότι ένας ισοδύναμος τρόπος γραφής μιας συνήθους διαφορικής εξισώσεως (μαζί με τις αρχικές συνθήκες που τη συνοδεύουν), δηλαδή ενός προβλήματος αρχικών τιμών, είναι με τη βοήθεια μιας ολοκληρωτικής εξισώσεως. Μάλιστα στα προβλήματα αρχικών τιμών πρόκειται για μια ολοκληρωτική εξίσωση Volterra.

Στην ενότητα λοιπόν αυτή θα ασχοληθούμε απλά με την αναγωγή μιας διαφορικής εξισώσεως σε ολοκληρωτική εξίσωση. Η αναγωγή αυτή θα επιτευχθεί με ολοκληρώσεις της μιας ή της άλλης μορφής με βάση την ισχύουσα διαφορική εξίσωση. Η εξίσωση που θα προκύψει τελικά θα είναι πλήρως απαλλαγμένη από παραγώγους της άγνωστης συναρτήσεως, δηλαδή θα είναι μια καθαρά ολοκληρωτική εξίσωση (με ολοκλήρωμα σ' αυτήν). Φυσικά ενδιάμεσα, δηλαδή κατά τη διάρκεια της διαδικασίας ευρέσεως της ολοκληρωτικής εξισώσεως, μπορεί, είναι πολύ πιθανό να εμφανισθεί και εξίσωση που να διαθέτει ταυτόχρονα και παράγωγο και ολοκλήρωμα της άγνωστης συναρτήσεως σ' αυτήν. Μια τέτοια εξίσωση καλείται ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση και σπάνια παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, εάν είναι ισοδύναμη με μια διαφορική εξίσωση ή με μια καθαρά ολοκληρωτική εξίσωση. Αντίθετα παρουσιάζει τέτοιο ενδιαφέρον, εάν προκύπτει από μόνη της χωρίς να μπορεί εύκολα να μετατραπεί ούτε σε διαφορική εξίσωση, αλλ' ούτε και σε ολοκληρωτική εξίσωση.

#### Γ1.4.2. Εισαγωγικό παράδειγμα: μετάδοση θερμότητας

Στην Ενότητα Γ1.1 παρουσιάσθηκε ήδη το εξαιρετικά απλό εισαγωγικό παράδειγμα που αφορά στην ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου: θέση-ταχύτητα-επιτάχυνση. Εδώ πριν από τη γενική παρουσίαση των δύο βασικών μεθόδων αναγωγής διαφορικών εξισώσεων σε ολοκληρωτικές, θα αναφερθούμε εισαγωγικά και στη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (νόμο ψύξεως του Νεύτωνα)

$$\dot{\theta}(t) + k[\theta(t) - \theta_\infty] = 0 \implies \dot{\theta}(t) + k\theta(t) = k\theta_\infty, \quad k > 0, \quad t > 0, \quad (1.4.6)$$

μαζί με την αρχική συνθήκη

$$\theta(0) = \theta_0. \quad (1.4.7)$$

Οι εξισώσεις αυτές διέπουν το πρόβλημα της θερμοκρασίας  $\theta(t)$  σε σώμα πολύ μικρών διαστάσεων και αρχικής θερμοκρασίας  $\theta_0$ . Στη συνέχεια το σώμα αυτό τοποθετείται μέσα σε μέσον σταθερής θερμοκρασίας  $\theta_\infty$ , την οποία βαθμιαία αποκτά το υπόψη σώμα. Η σταθερά αναλογίας (ρυθμός ψύξεως)  $k$  στη διαφορική εξίσωση (1.4.6) είναι θετική και είναι η συνολική σταθερά του προβλήματος. Εξαρτάται από το υπόψη σώμα και τις ιδιότητές του καθώς και από τις συνθήκες μεταφοράς (μεταγωγής) θερμότητας μεταξύ του σώματος αυτού και του περιβάλλοντος. Για  $t \geq 0$  το περιβάλλον βρίσκεται σε σταθερή θερμοκρασία  $\theta_\infty$ . Άρα έχουμε ένα απλό πρόβλημα αρχικής τιμής που αποτελείται από τη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως (1.4.6) και την αρχική συνθήκη (1.4.7), που τη συνοδεύει

Το πρόβλημα αυτό αρχικής τιμής (διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως συν αρχική συνθήκη) μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε ολοκληρωτική εξίσωση Volterra. Αυτό κατορθώνεται με μια ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης ως προς το χρόνο  $t$  από την αρχική στιγμή  $\tau = 0$  μέχρι την τυχαία χρονική στιγμή  $\tau = t$ . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει από τη διαφορική εξίσωση (1.4.6) η ολοκληρωτική εξίσωση Volterra

$$\theta(t) + k \int_0^t \theta(\tau) d\tau = k\theta_\infty t + C, \quad t \geq 0, \quad (1.4.8)$$

με  $C$  τη σχετική σταθερά ολοκληρώσεως. Ας σημειωθεί επίσης ότι ο χρόνος παριστάνεται στην ολοκληρωτική αυτή εξίσωση τόσο με το σύμβολο  $t$  για την ανεξάρτητη μεταβλητή έξω από το ολοκλήρωμα επίσης και στο άνω όριο ολοκληρώσεως όσο και με το σύμβολο  $\tau$  για τη μεταβλητή ολοκληρώσεως με  $0 \leq \tau \leq t$  για τη μεταβλητή αυτή. Ο συμβολισμός

$$K(t) = \int_0^t \theta(t) dt \quad (1.4.9)$$

χρησιμοποιείται μερικές φορές στην πράξη για ένα αόριστο ολοκλήρωμα  $K(t)$ . Δυστυχώς όμως με το συμβολισμό αυτό προκαλείται σύγχυση του μεταβλητού άνω ορίου ολοκληρώσεως  $t$  με την ίδια τη μεταβλητή ολοκληρώσεως, που δηλώνεται και αυτή με το σύμβολο  $t$ . Επομένως, μαθηματικά μιλώντας, ο πιο πάνω συμβολισμός (1.4.9) είναι λανθασμένος και τέτοιος θα θεωρείται, δηλαδή λανθασμένος.

Αναφερόμαστε τώρα στη σταθερά  $C$  στην ολοκληρωτική εξίσωση (1.4.8). Αυτή μπορεί αμέσως να προσδιορισθεί μέσω της αρχικής συνθήκης (1.4.7). Έτσι, θέτοντας απλά  $t = 0$  στην ολοκληρωτική εξίσωση (1.4.8), διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$C = \theta(0) = \theta_0 \quad (1.4.10)$$

έχοντας χρησιμοποιήσει και την αρχική αυτή συνθήκη (1.4.7). Άρα η ολοκληρωτική εξίσωση (1.4.8) παίρνει την τελική της μορφή

$$\theta(t) + k \int_0^t \theta(\tau) d\tau = k\theta_\infty t + \theta_0, \quad t \geq 0, \quad (1.4.11)$$

τώρα με ενσωματωμένη και την αρχική συνθήκη (1.4.7). Κατ' αυτόν τον τρόπο το όλο πρόβλημα αρχικής τιμής (1.4.6) και (1.4.7) έχει αναχθεί σε μία μόνο ολοκληρωτική εξίσωση: στην (1.4.11). Η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση σε αντίθεση με τη διαφορική εξίσωση (1.4.6) δε συνοδεύεται από καμία συνθήκη. Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί ότι διαθέτει μία και μόνο μία λύση: την αληθινή θερμοκρασία του σώματος  $\theta(t)$  συναρτήσεως του χρόνου  $t$  (με  $t \geq 0$ ). Ας επαναληφθεί κι εδώ ότι η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση (1.4.11) προέκυψε με μία άμεση ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (1.4.6) ως προς το χρόνο  $t$ . Κατά την ολοκλήρωση αυτή πάθησε υπόψη και η αρχική συνθήκη (1.4.7) για τον καθορισμό της σταθεράς ολοκληρώσεως  $C$ .

Υπάρχει επομένως το πλεονέκτημα αυτό, δηλαδή η ενσωμάτωση της αρχικής συνθήκης στην ολοκληρωτική εξίσωση αντί για τη θεώρησή της ξεχωριστά σαν μιας ανεξάρτητης εξίσωσης

κατά την εύρεση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τη χρήση διαφορικής εξίσωσης. Απόλυτα ανάλογα ισχύουν βέβαια γενικότερα και για περισσότερες από μία αρχικές συνθήκες, που επίσης ενσωματώνονται στην ολοκληρωτική εξίσωση αντί να θεωρούνται σαν ανεξάρτητες εξισώσεις.

Ένα δεύτερο πλεονέκτημα της μεθόδου των ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι η αντικατάσταση της παραγωγίσεως (στις διαφορικές εξισώσεις) από την ολοκλήρωση (στις ολοκληρωτικές εξισώσεις). Αποδεικνύεται στην Αριθμητική Ανάλυση ότι η αριθμητική ολοκλήρωση είναι πολύ πιο ευстаθής αριθμητική μέθοδος από την αριθμητική παραγωγή. Αυτό συμβαίνει, επειδή η αριθμητική ολοκλήρωση τείνει να εξομαλύνει τα σφάλματα στις τιμές της ολοκληρωτέας συναρτήσεως την ώρα της ολοκληρώσεως. Αντίθετα η αριθμητική παραγωγή τείνει να επαυξάνει τα σφάλματα αυτά, γιατί, προσεγγιστικά μιλώντας, ο αριθμητικός υπολογισμός μιας παραγωγού είναι ουσιαστικά ένα πηλίκο διαφορών και μάλιστα διαφορών ποσοτήτων που ελάχιστα διαφέρουν μεταξύ τους. Τούτο ασφαλώς εισάγει σφάλματα στους υπολογισμούς. Άρα σε περιπτώσεις αριθμητικών υπολογισμών η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων πλεονεκτεί σαφώς της μεθόδου των διαφορικών εξισώσεων. Εννοείται βέβαια ότι αυτό έχει πρακτική σημασία μόνο όσες φορές υπάρχει η δυνατότητα επιλογής μεταξύ διαφορικής εξίσωσης και ολοκληρωτικής εξίσωσης. Η δυνατότητα αυτή ασφαλώς υπάρχει σε προβλήματα αρχικών τιμών, που εξετάζονται στην παρούσα ενότητα. Αντίθετα όμως υπάρχουν και πολλά προβλήματα που ανάγονται κατευθείαν σε ολοκληρωτική εξίσωση χωρίς την αναγωγή τους πρώτα σε διαφορική εξίσωση και έπειτα τη μετατροπή της ενδιάμεσης διαφορικής αυτής εξίσωσης σε ολοκληρωτική. Αρκετά τέτοια παραδείγματα θα εξετασθούν στο Κεφάλαιο Γ3 πιο κάτω.

Ξεχνώντας τους αριθμητικούς υπολογισμούς, ας επιλύσουμε αναλυτικά την πιο πάνω ολοκληρωτική εξίσωση (1.4.11) στο παρόν στοιχειώδες πρόβλημα με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Στη μέθοδο αυτή έχουμε ήδη αναφερθεί εισαγωγικά στην Ενότητα Γ1.1 και θα έχουμε επίσης την ευκαιρία να την εξετάσουμε πολύ εκτενέστερα στην Ενότητα Γ2.2. Καταρχήν δηλώνουμε με  $\Theta(s)$  το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης θερμοκρασίας  $\theta(t)$  στην ολοκληρωτική εξίσωση (1.4.11), δηλαδή

$$\Theta(s) = \mathcal{L}\{\theta(t)\}. \quad (1.4.12)$$

Δεν ξεχνάμε επίσης τον τύπο (1.1.6) για το μετασχηματισμό Laplace ενός αορίστου ολοκληρώματος, δηλαδή με μεταβλητό το άνω όριο ολοκληρώσεως  $t$ . Έτσι μετατρέπουμε άμεσα την ολοκληρωτική εξίσωση (1.4.11) σε αλγεβρική εξίσωση ως προς το μετασχηματισμό Laplace  $\Theta(s)$ :

$$\Theta(s) + k \frac{\Theta(s)}{s} = k \frac{\theta_\infty}{s^2} + \frac{\theta_0}{s}, \quad s > 0. \quad (1.4.13)$$

Τώρα η άγνωστη συνάρτηση είναι φυσικά η  $\Theta(s)$ .

Προφανώς πρόκειται για μια πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση με λύση

$$\Theta(s) = \frac{k\theta_\infty}{s(s+k)} + \frac{\theta_0}{s+k} = \theta_\infty \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+k} \right) + \frac{\theta_0}{s+k} = \frac{\theta_\infty}{s} + \frac{\theta_0 - \theta_\infty}{s+k} \quad (1.4.14)$$

μετά και την κατάλληλη ανάλυση σε απλά κλάσματα. Από το αποτέλεσμα αυτό, αντιστρέφοντας τώρα το μετασχηματισμό Laplace και γνωρίζοντας ότι

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1 \quad (s > 0), \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+k} \right\} = e^{-kt} \quad (s > -k), \quad (1.4.15)$$

διαπιστώνουμε αμέσως ότι η ζητούμενη θερμοκρασία  $\theta(t)$  είναι

$$\theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Theta(s)\} = \theta_\infty + (\theta_0 - \theta_\infty)e^{-kt}, \quad t \geq 0. \quad (1.4.16)$$

Τη λύση αυτή μπορούμε ασφαλώς να την επαληθεύσουμε σαν την ορθή λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (1.4.11). Μπορούμε επίσης, εφόσον το επιθυμούμε, να ελέγξουμε ανεξάρτητα

την πλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (1.4.6) και της αρχικής συνθήκης (1.4.7). Ας σημειώσουμε επίσης ότι πέρα από τις παρατηρήσεις που ήδη κάναμε για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις σε σύγκριση με τις αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις, μια ακόμη παρατήρηση αφορά και στη χρήση του μετασχηματισμού Laplace. Συγκεκριμένα η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στην επίλυση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι απόλυτα ανάλογη με την εφαρμογή του στην επίλυση της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης. Επιπλέον είτε και οι δύο αυτές εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace είτε καμία από τις δύο δε μπορεί.

Τελειώνοντας το συγκεκριμένο, εισαγωγικό παράδειγμα αναγωγής μιας διαφορικής εξίσωσης (καλύτερα ενός προβλήματος αρχικής τιμής) σε ολοκληρωτική εξίσωση, ας παρατηρήσουμε επίσης ότι το παράδειγμα αυτό αφορούσε σε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως. Διαφορικές εξισώσεις ανωτέρας τάξεως θα εξετασθούν (απόλυτα γενικά) στην επόμενη Παράγραφο Γ1.4.3 και με σταθερούς συντελεστές επίσης και στην Παράγραφο Γ1.4.4.

Είναι κατανοητό ότι το παρόν παράδειγμα σε πρόβλημα Μεταδόσεως Θερμότητας (ή Διαδόσεως Θερμότητας) έχει ίσως προκαλέσει την οργή του φοιτητή/της φοιτήτριας Πολιτικού Μηχανικού. Εντούτοις ας μη λησμονεί αυτός/αυτή ότι κατά τη μελέτη ενός κτιρίου οφείλει να μην αμελεί πέρα από τα κύρια στατικά και δυναμικά προβλήματα, τα οποία έτσι κι αλλιώς πρέπει να αντιμετωπίσει, και τα δευτερεύοντα προβλήματα θερμομονώσεως του κτιρίου. Η θερμομόνωση αυτή επιτυγχάνεται μέσω κατάλληλων υαλοπινάκων και, κυρίως, μέσω της τοποθέτησεως κατάλληλων θερμομονωτικών υλικών στην τοιχοποιία. Άρα η γνώση και κάποιων στοιχείων Μεταδόσεως Θερμότητας (ή Διαδόσεως Θερμότητας) είναι αναγκαία και για τον Πολιτικό Μηχανικό. Ή (στην αντίθετη περίπτωση) θα πρέπει ο Πολιτικός Μηχανικός να καλέσει Φυσικό ή κάποιον άλλο ειδικό επιστήμονα για την επιλογή των υαλοπινάκων, έτσι ώστε να πληρούνται οι σχετικές προδιαγραφές στις οικοδομές; Είναι φρόνιμο κάτι τέτοιο;

Θα εξετάσουμε τώρα τους δύο βασικούς τρόπους αναγωγής διαφορικών εξισώσεων (μαζί με τις αρχικές συνθήκες που τις συνοδεύουν), δηλαδή προβλημάτων αρχικών τιμών, σε ολοκληρωτικές εξισώσεις που ενσωματώνουν τις αρχικές συνθήκες. Η πρώτη από τις δύο αυτές μεθόδους (Παράγραφος Γ1.4.3) είναι γενικότερη, πιο κλασική και ίσως λιγότερο χρήσιμη, με έμφαση σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μη σταθερούς συντελεστές. Η δεύτερη από τις μεθόδους αυτές (Παράγραφος Γ1.4.4) αφορά σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και είναι περισσότερο χρήσιμη στην πολύ συνηθισμένη αυτή περίπτωση.

### Γ1.4.3. Πρώτη μέθοδος αναγωγής

Θεωρούμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$  τάξεως

$$p_0(x)y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad (1.4.17)$$

μαζί με τις  $n$  αρχικές συνθήκες (για  $x = 0$ )

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-2)}(0) = y_{n-2}, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1} \quad (1.4.18)$$

σε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών. Οι συντελεστές  $p_i(x)$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) στην παραπάνω διαφορική εξίσωση (1.4.17) μπορούν να είναι είτε σταθεροί είτε, γενικότερα, μεταβλητοί. Η συνάρτηση  $f(x)$  στο δεξιό μέλος της ίδιας διαφορικής εξίσωσης είναι γνωστή, ενώ ζητείται να προσδιορισθεί η άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή)  $y(x)$ . (Η ανεξάρτητη μεταβλητή δηλώνεται εδώ με το σύμβολο  $x$ .)

Στην παρούσα πρώτη μέθοδο αναγωγής μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης σε ολοκληρωτική, απλά δηλώνουμε την παράγωγο της ανώτερης τάξεως που παρουσιάζεται στη διαφορική

αυτή εξίσωση με μια νέα συνάρτηση, π.χ. τη συνάρτηση  $u(x)$ , δηλαδή εν προκειμένω

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} \equiv y^{(n)}(x) = u(x). \quad (1.4.19)$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε κατάλληλα την άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$  με τη  $u(x)$  στη διαφορική εξίσωση (1.4.17). Πρώτα απ' όλα όμως πρέπει με ολοκληρώσεις να εκφράσουμε και όλες τις άλλες παραγώγους  $y^{(k)}(x)$  ( $k = n-1, n-2, \dots, 0$ ) της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  που παρουσιάζονται στη διαφορική αυτή εξίσωση (1.4.17) (ακόμη και την ίδια την άγνωστη συνάρτηση  $y(x) \equiv y^{(0)}(x)$ ) συναρτήσει κατάλληλων ολοκληρωμάτων της νέας, βοηθητικής άγνωστης συναρτήσεως  $u(x)$ .

Πραγματικά, ολοκληρώνοντας μια φορά τη σχέση (1.4.19) ως προς  $x$ , προσδιορίζουμε αμέσως την  $n-1$  τάξεως παράγωγο της  $y(x)$ :

$$y^{(n-1)}(x) = \int_0^x u(t) dt + y_{n-1}. \quad (1.4.20)$$

Στην παράγωγο αυτή πήραμε μάλιστα το θάρρος να ενσωματώσουμε και την αρχική συνθήκη  $y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$  (την τελευταία από τις αρχικές συνθήκες (1.4.18)) αντί να εισαγάγουμε μια αυθαίρετη σταθερά  $C_{n-1}$  κατά την ολοκλήρωση αυτή. Με τον τρόπο αυτό η χρήση του τύπου (1.4.20) στη διαφορική εξίσωση (1.4.17) εξασφαλίζει και την πλήρωση μιας (της τελευταίας, όπως ήδη αναφέρθηκε) από τις αρχικές συνθήκες (1.4.18). Άρα δε χρειάζεται πια να μεριμνούμε ιδιαίτερα γι' αυτήν.

Για να καταλήξουμε στην επιθυμητή ολοκληρωτική εξίσωση από τη διαφορική εξίσωση (1.4.17), απαιτούνται βέβαια και  $n-1$  ακόμη ολοκληρώσεις. Καταρχήν με ολοκλήρωση της σχέσεως (1.4.20) προκύπτει η  $n-2$  τάξεως παράγωγος της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$ :

$$y^{(n-2)}(x) = \int_0^x \left( \int_0^s u(t) dt \right) ds + y_{n-1}x + y_{n-2}. \quad (1.4.21)$$

Στην παράγωγο αυτή πήραμε υπόψη μας και τη δεύτερη (από το τέλος) αρχική συνθήκη (1.4.18), δηλαδή τη συνθήκη  $y^{(n-2)}(0) = y_{n-2}$ . Η διπλή (μάλλον διαδοχική) ολοκλήρωση στον προηγούμενο τύπο (1.4.21) ίσως ενοχλεί κάπως. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της παραγοντικής ολοκληρώσεως, όπως λεπτομερώς την εξηγήσαμε στην Ενότητα Γ1.1: εξισώσεις (1.1.18), (1.1.19) και (1.1.20), μπορούμε να γράψουμε τον τύπο (1.4.21) με τη χρήση ενός απλού ολοκληρώματος, συγκεκριμένα

$$y^{(n-2)}(x) = \int_0^x (x-t) u(t) dt + y_{n-1}x + y_{n-2}. \quad (1.4.22)$$

Προχωρώντας με όμοιο τρόπο (δηλαδή και με άλλες διαδοχικές ολοκληρώσεις), μπορούμε να προσδιορίσουμε και τις επόμενες (μικρότερης τάξεως) παραγώγους της άγνωστης συναρτήσεώς μας  $y(x)$  με κατάλληλες παραπέρα ολοκληρώσεις της νέας άγνωστης συναρτήσεως  $u(x) = y^{(n)}(x)$ . Έτσι, π.χ. ολοκληρώνοντας τον τύπο (1.4.22) (και ανάγοντας και πάλι το σχετικό διπλό ολοκλήρωμα σε απλό με τη χρήση παραγοντικής ολοκληρώσεως), μπορούμε να προσδιορίσουμε την  $n-3$  τάξεως παράγωγο  $y^{(n-3)}(x)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$ :

$$y^{(n-3)}(x) = \frac{1}{2!} \int_0^x (x-t)^2 u(t) dt + y_{n-1} \frac{x^2}{2} + y_{n-2}x + y_{n-3}. \quad (1.4.23)$$

Στον τύπο αυτό πήραμε υπόψη και την τρίτη (από το τέλος) αρχική συνθήκη (1.4.18).

Τελικά μετά από  $n$  συνολικά ολοκληρώσεις προκύπτει και η έκφραση της ίδιας της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  συναρτήσει της  $n$  τάξεως παραγώγου της, την οποία καλέσαμε  $u(x)$ . Τη συνάρτηση αυτή  $u(x)$  έχουμε την πρόθεση να τη χρησιμοποιήσουμε σαν νέα, βοηθητική άγνωστη συνάρτηση στην ολοκληρωτική εξίσωση που κατασκευάζουμε. Η έκφραση που προαναφέραμε είναι η εξής:

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} u(t) dt + y_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + y_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + y_1 x + y_0. \quad (1.4.24)$$

Στην έκφραση αυτή πήραμε υπόψη μας (σαν τελευταία βέβαια) και την πρώτη από τις αρχικές συνθήκες (1.4.18), δηλαδή την αρχική συνθήκη  $y(0) = y_0$ .

Τώρα πια έχουμε στη διάθεσή μας (μετά από  $n$  συνολικά ολοκληρώσεις) την άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$  στη διαφορική εξίσωση (1.4.17) και όλες τις παραγώγους της στην ίδια εξίσωση συναρτήσει της  $n$  τάξεως παραγώγου της  $y^{(n)}(x)$ , που την ονομάσαμε  $u(x)$ , δηλαδή  $u(x) = y^{(n)}(x)$ . Άρα με αντικατάσταση των εκφράσεων των παραγώγων αυτών στη διαφορική εξίσωση (1.4.17), προκύπτει άμεσα μια ολοκληρωτική εξίσωση που συμπεριλαμβάνει όλες, και τις  $n$  αρχικές συνθήκες (1.4.18). Η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση, όπως παρατηρείται σχετικά εύκολα με βάση τις εξισώσεις (1.4.19) έως και (1.4.24), έχει τη μορφή

$$p_0(x)u(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt = g(x), \quad x \geq 0. \quad (1.4.25)$$

Στην ολοκληρωτική αυτή εξίσωση ο πυρήνας  $K(x,t)$  δίνεται από τον τύπο

$$K(x,t) = \sum_{k=1}^n p_k(x) \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}. \quad (1.4.26)$$

Επίσης η γνωστή συνάρτηση  $g(x)$  στο δεξιό μέλος δίνεται από τον τύπο

$$g(x) = f(x) - p_1(x)y_{n-1} - p_2(x)(y_{n-1}x + y_{n-2}) - \dots - p_n(x) \left[ y_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + y_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + y_1x + y_0 \right]. \quad (1.4.27)$$

Με τον τρόπο αυτό το παρόν πρόβλημα αρχικών τιμών (δηλαδή η διαφορική εξίσωση (1.4.17) και οι αρχικές συνθήκες της (1.4.18)) μετατράπηκε σε ολοκληρωτική εξίσωση: την εξίσωση (1.4.25). Όμως η εξίσωση αυτή έχει νέα άγνωστη συνάρτηση: την παράγωγο  $n$  τάξεως  $u(x) = y^{(n)}(x)$  της αρχικής άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$ . Μόλις η νέα αυτή άγνωστη συνάρτηση  $u(x)$  βρεθεί σαν λύση της ολοκληρωτικής εξισώσεως (1.4.25), τότε η αρχική άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$  προσδιορίζεται και αυτή αμέσως μέσω του ολοκληρωτικού τύπου (1.4.24). Κατ' αυτόν τον τρόπο, είδαμε την αντιστοιχία ανάμεσα στα προβλήματα αρχικών τιμών στις διαφορικές εξισώσεις και στις ολοκληρωτικές εξισώσεις.

Ας παρατηρηθεί επίσης ότι προέκυψε μια ολοκληρωτική εξίσωση Volterra, η εξίσωση (1.4.25), που είναι γενικά δευτέρου είδους και μη ομογενής. Εάν όλοι οι συντελεστές  $p_k(x)$  στη διαφορική εξίσωση (1.4.17) ήσαν σταθερές ποσότητες (και όχι συναρτήσεις της ανεξάρτητης μεταβλητής  $x$ ), τότε ο πυρήνας  $K(x,t)$  στον τύπο (1.4.26) θα ήταν πυρήνας διαφοράς. Επομένως σ' αυτήν την ειδική περίπτωση η ολοκληρωτική εξίσωση (1.4.25) θα ήταν συνελκτικού τύπου. Αυτό, δηλαδή σταθεροί συντελεστές  $p_k(x)$ , ισχύει συχνά σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού, όχι όμως πάντοτε. Όμως στην ειδική περίπτωση των σταθερών συντελεστών για την αναγωγή του προβλήματος αρχικών τιμών (1.4.17) και (1.4.18) σε ολοκληρωτική εξίσωση Volterra μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε και την εναλλακτική μέθοδο της επόμενης Παραγράφου Γ1.4.4. Η δεύτερη αυτή μέθοδος παρουσιάζει επίσης και το σημαντικό πλεονέκτημα σχετικά με την παρούσα μέθοδο ότι δεν απαιτεί αλλαγή της άγνωστης συναρτήσεως από τη διαφορική εξίσωση στην αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση.

#### Γ1.4.4. Δεύτερη μέθοδος αναγωγής

Θεωρούμε και πάλι τη γραμμική διαφορική εξίσωση  $n$  τάξεως (1.4.17), αλλά τώρα με σταθερούς συντελεστές  $p_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ), δηλαδή την εξίσωση

$$p_0 y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1} y'(x) + p_n y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad (1.4.28)$$

μαζί με τις αρχικές συνθήκες (1.4.18). Με την παρούσα μέθοδο δημιουργούμε μια ολοκληρωτική εξίσωση Volterra από τη διαθέσιμη διαφορική εξίσωση (1.4.28) απλά ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση  $n$  φορές. Αυτή είναι η όλη διαδικασία, στοιχειώδης ασφαλώς. Γενικά η διαδικασία αυτή οδηγεί καταρχήν (με τις  $n-1$  πρώτες ολοκληρώσεις) σε ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις, δηλαδή σε εξισώσεις στις οποίες παρουσιάζονται ταυτόχρονα τόσο παράγωγοι (έστω και μία) όσο και ολοκληρώματα (έστω και ένα). Εντούτοις βαθμιαία οι παράγωγοι εξαλείφονται προς όφελος των ολοκληρωμάτων. Η τελευταία (η  $n$ -στή) ολοκλήρωση εξαλείφει οριστικά όλες τις παραγώγους. Με αυτήν καταλήγουμε στην τελική ολοκληρωτική εξίσωση που ζητάμε.

Παραδείγματος χάρη, με ολοκλήρωση της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως (1.4.28) μία φορά, προκύπτει (γενικά) η ακόλουθη ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση (με ανώτερη παράγωγο σ' αυτή τάξεως  $n-1$ ):

$$p_0 y^{(n-1)}(x) + p_1 y^{(n-2)}(x) + \dots + p_{n-1} y(x) + p_n \int_0^x y(t) dt = \int_0^x f(t) dt + C_1, \quad x > 0, \quad (1.4.29)$$

με τη  $C_1$  σταθερά ολοκληρώσεως. Μια δεύτερη ολοκλήρωση, τώρα της ολοκληρωτικοδιαφορικής αυτής εξισώσεως (1.4.29), μας οδηγεί στην εξής (επίσης γενικά) ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση (με ανώτερη παράγωγο τάξεως  $n-2$  τώρα):

$$\begin{aligned} p_0 y^{(n-2)}(x) + p_1 y^{(n-3)}(x) + \dots + p_{n-1} \int_0^x y(t) dt + p_n \int_0^x (x-t)y(t) dt \\ = \int_0^x (x-t)f(t) dt + C_1 x + C_2, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (1.4.30)$$

Στην ολοκληρωτική αυτή εξίσωση πήραμε και πάλι υπόψη τον τύπο (1.1.18). Προχωράμε κατ' ανάλογο τρόπο. Τελικά μετά από  $n$  συνολικά ολοκληρώσεις οι παράγωγοι της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  θα έχουν πλήρως εξαλειφθεί. Με τον τρόπο αυτό θα έχει προκύψει μια ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους και συνελκτικού μάλιστα τύπου.

Όσον αφορά στις σταθερές ολοκληρώσεως  $C_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) οι οποίες προκύπτουν, αυτές μπορούν ευχερώς να υπολογισθούν με βάση τις αρχικές συνθήκες (1.4.18). Παραδείγματος χάρη, θέτοντας  $x = 0$  στις (γενικά) ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις (1.4.29) και (1.4.30), διαπιστώνουμε από τις προαναφερθείσες συνθήκες (1.4.18) ότι

$$C_1 = p_0 y_{n-1} + p_1 y_{n-2} + \dots + p_{n-1} y_0, \quad (1.4.31)$$

$$C_2 = p_0 y_{n-2} + p_1 y_{n-3} + \dots + p_{n-2} y_0. \quad (1.4.32)$$

Άρα οι σταθερές αυτές είναι προσδιορισμένες, γνωστές μέσω των αρχικών συνθηκών (1.4.18). Επομένως οι αρχικές συνθήκες είναι ουσιαστικά ενσωματωμένες στην ολοκληρωτική εξίσωση που θα προκύψει.

Δε θα παραθέσουμε και τις επόμενες  $n-2$  ολοκληρώσεις ούτε καν την τελική ολοκληρωτική εξίσωση που προκύπτει με την παραπάνω διαδικασία, επειδή αυτό δεν παρουσιάζει καμία ιδιαίτερη δυσκολία. Πρόκειται για  $n$  (συνολικά) διαδοχικές ολοκληρώσεις της αρχικής γραμμικής διαφορικής εξισώσεως (1.4.28) με σταθερούς συντελεστές, έτσι ώστε να προκύψει η ισοδύναμη ολοκληρωτική εξίσωση. Θα περιορισθούμε εδώ στην επίδειξη της παρούσας μεθόδου για γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως ( $n = 2$ ) με σταθερούς συντελεστές, την

$$p_0 y''(x) + p_1 y'(x) + p_2 y(x) = f(x), \quad x > 0, \quad (1.4.33)$$

μαζί με τις δύο αρχικές συνθήκες

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1. \quad (1.4.34)$$



Μια πρώτη ολοκλήρωση της διαφορικής αυτής εξίσωσης (σύμφωνα με τα παραπάνω) μας δίνει τη γενικά (δηλαδή για  $p_2 \neq 0$ ) ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση

$$p_0 y'(x) + p_1 y(x) + p_2 \int_0^x y(t) dt = \int_0^x f(t) dt + C_1, \quad x > 0. \quad (1.4.35)$$

Στη συνέχεια και μια δεύτερη ολοκλήρωση μας οδηγεί στη ζητούμενη ολοκληρωτική εξίσωση Volterra

$$p_0 y(x) + p_1 \int_0^x y(t) dt + p_2 \int_0^x (x-t)y(t) dt = \int_0^x (x-t)f(t) dt + C_1 x + C_2, \quad x \geq 0. \quad (1.4.36)$$

Και αντίστροφα βέβαια, παραγωγίζοντας την ολοκληρωτική αυτή εξίσωση (1.4.36) δύο φορές, οδηγούμαστε στην αρχική διαφορική εξίσωση (1.4.33) φυσικά μέσω της ολοκληρωτικοδιαφορικής εξίσωσης (1.4.35), που προκύπτει μετά την πρώτη παραγωγή. Θέτοντας τέλος  $x = 0$  στις εξισώσεις (1.4.35) και (1.4.36), βρίσκουμε ότι

$$C_1 = p_0 y_1 + p_1 y_0, \quad C_2 = p_0 y_0 \quad (1.4.37)$$

αντίστοιχα. Άρα και οι δύο σταθερές  $C_1$  και  $C_2$  είναι άμεσα προσδιορίσιμες με βάση τις αρχικές συνθήκες (1.4.34).

#### Γ1.4.5. Παράδειγμα: σύστημα μάζας-ελατηρίου

Στο παράδειγμα αυτό θα εξετάσουμε την αναγωγή της διαφορικής εξίσωσης του απλού αρμονικού ταλαντωτή (1.4.5) (Παράγραφος Γ1.4.1) για το σύστημα μάζας-ελατηρίου ( $m, k$ ) σε ολοκληρωτική εξίσωση Volterra. Θεωρούμε πάλι ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση, οπότε

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad t > 0. \quad (1.4.38)$$

Διαθέτουμε επίσης και τις σχετικές αρχικές συνθήκες (1.4.2), δηλαδή

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v(0) = v_0. \quad (1.4.39)$$

Σημειώνεται και ο δεύτερος από τους τύπους (1.4.4), ο τύπος  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Αυτός δίνει την κυκλική ιδιοσυχνότητα  $\omega$  του μηχανικού αυτού συστήματος συναρτήσει της μάζας  $m$  του υλικού σημείου  $M$  και της σταθεράς  $k$  του ελατηρίου  $S$ .

Σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο αναγωγής της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης (1.4.38) σε ολοκληρωτική εξίσωση (Παράγραφος Γ1.4.3), θεωρούμε τη δεύτερη παράγωγο  $\ddot{x}(t)$  της θέσεως  $x(t)$  του υλικού σημείου  $M$  (δηλαδή την επιτάχυνση  $a(t)$  του υλικού αυτού σημείου) σαν νέα άγνωστη συνάρτηση  $a(t)$ . Έτσι έχουμε

$$\ddot{x}(t) = a(t). \quad (1.4.40)$$

Χρειαζόμαστε όμως (πέρα από τη δεύτερη αυτή παράγωγο) και την ίδια τη συνάρτηση  $x(t)$  στη διαφορική εξίσωση (1.4.38) που μελετάμε. Πρέπει επομένως να ολοκληρώσουμε δύο φορές την εξίσωση (1.4.40). Παίρνοντας υπόψη και τις αρχικές συνθήκες (1.4.39), διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$\dot{x}(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau + v_0, \quad (1.4.41)$$

$$x(t) = \int_0^t (t-\tau) a(\tau) d\tau + x_0 + v_0 t. \quad (1.4.42)$$

Μάλιστα, για να αποφύγουμε το διαδοχικό ολοκλήρωμα στην εξίσωση (1.4.42), και πάλι δε λησμονήσαμε να χρησιμοποιήσουμε και τον τύπο (1.1.18) με την απόδειξή του στον τύπο (1.1.20). Ας σημειωθεί επίσης ότι η εξίσωση (1.4.42) ουσιαστικά συμπίπτει με την εξίσωση (1.1.21) στην

Ενότητα Γ1.1. Τώρα πια έχουμε διαθέσιμη και την έκφραση της θέσεως  $x(t)$  του υλικού σημείου  $M$  συναρτήσει της επιταχύνσεώς του  $a(t)$ .

Σύμφωνα με αυτά, λόγω των εξισώσεων (1.4.40) και (1.4.42), όπου λάβαμε ήδη υπόψη και τις αρχικές συνθήκες (1.4.39), η διαφορική εξίσωση (1.4.38) παίρνει την εξής μορφή ολοκληρωτικής εξισώσεως Volterra:

$$a(t) + \omega^2 \int_0^t (t - \tau) a(\tau) d\tau = -\omega^2(x_0 + v_0 t), \quad t \geq 0. \quad (1.4.43)$$

Τώρα πλέον άγνωστη συνάρτηση είναι η επιτάχυνση  $a(t)$  του υλικού σημείου  $M$  στο μονοβάθμιο (δηλαδή με ένα βαθμό ελευθερίας) μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου που εξετάζουμε. (Ας σημειωθεί παρενθετικά ότι η αρχική επιτάχυνση  $a(0)$  είναι ίση με  $-\omega^2 x_0$ , όπως άμεσα προκύπτει από την ολοκληρωτική αυτή εξίσωση θέτοντας  $t = 0$ . Τούτο είναι σε συμφωνία και με τη διαφορική εξίσωση (1.4.38).) Θα πρέπει τώρα να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση (1.4.43) (π.χ. με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, όπως ήδη έγινε στην Παράγραφο Γ1.4.2) και να είναι επομένως διαθέσιμη η επιτάχυνση  $a(t)$  του υλικού σημείου  $M$ . Στη συνέχεια η θέση  $x(t)$  του ίδιου υλικού σημείου  $M$  μπορεί να προσδιορισθεί μέσω του ολοκληρωτικού τύπου (1.4.42). Ο τύπος αυτός προέκυψε, ως επαναληφθεί, απλά με διπλή ολοκλήρωση της διαφορικής εξισώσεως (1.4.38) μαζί με τις αρχικές συνθήκες (1.4.39).

Ασφαλώς λόγω των σταθερών συντελεστών στη διαφορική εξίσωση (1.4.38) του στοιχειώδους μηχανικού συστήματος που εξετάζουμε μπορεί θαυμάσια να χρησιμοποιηθεί και η δεύτερη μέθοδος κατασκευής της ισοδύναμης ολοκληρωτικής εξισώσεως Volterra. Αυτή είναι η μέθοδος της προηγούμενης Παραγράφου Γ1.4.4. Με τη μέθοδο αυτή διατηρείται μάλιστα και η αρχική άγνωστη συνάρτηση  $x(t)$  σαν άγνωστη συνάρτηση και στην ολοκληρωτική εξίσωση που προκύπτει. Η μέθοδος αυτή θα επιδειχθεί αναλυτικά στην εφαρμογή της Ενότητας Γ3.4 πιο κάτω και μάλιστα υπό την εφαρμογή και εξωτερικής δυνάμεως πάνω στο υλικό σημείο  $M$  στο μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου που εξετάζουμε. Ειδικότερα θα μελετήσουμε την περίπτωση μιας δυνάμεως που οδηγεί το μηχανικό αυτό σύστημα στο ανεπιθύμητο για τον Πολιτικό Μηχανικό φαινόμενο του συντονισμού.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

## ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούν οι βασικές μέθοδοι (όχι όλες ασφαλώς) για την επίλυση μονοδιάστατων γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm και Volterra, πρώτου και δευτέρου είδους, ομογενών και μη ομογενών. Οι μέθοδοι αυτές διακρίνονται σε αναλυτικές, προσεγγιστικές και καθαρά αριθμητικές. Μετά τη σύντομη περιγραφή κάθε μιας από αυτές στις ενότητες του παρόντος κεφαλαίου ακολουθεί και επίδειξή τους σε πολύ απλά παραδείγματα στην ίδια ενότητα. Πρακτικές και μάλλον εκτενείς εφαρμογές των μεθόδων του παρόντος κεφαλαίου στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού θα ακολουθήσουν στο επόμενο και τελευταίο κεφάλαιο: το Κεφάλαιο Γ3.

Πιο συγκεκριμένα στο παρόν κεφάλαιο θα εξετασθούν οι εξής πέντε βασικές μέθοδοι επίλυσεως ολοκληρωτικών εξισώσεων:

1. Η απλή και περιορισμένης εφαρμοσιμότητας μέθοδος της αναγωγής μιας ολοκληρωτικής εξισώσεως Volterra σε συνήθη διαφορική εξίσωση με παραγωγή της ολοκληρωτικής εξισώσεως και εξάλειψη του ολοκληρώματος. Οι αρχικές συνθήκες πρέπει επίσης να ληφθούν υπόψη.
2. Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace. Με τη μέθοδο αυτή γίνεται αναγωγή μιας ολοκληρωτικής εξισώσεως επίσης Volterra συνελκτικού τύπου, δηλαδή με πυρήνα διαφοράς  $K(x, t) = k(x - t)$ , σε μια πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς το μετασχηματισμό Laplace  $Y(s)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$ . Ακολουθεί η εύρεση του μετασχηματισμού Laplace  $Y(s)$  και, στη συνέχεια, με την αντιστροφή αυτού του μετασχηματισμού Laplace  $Y(s)$ , η εύρεση της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ .
3. Η μέθοδος της αναγωγής μιας ολοκληρωτικής εξισώσεως Fredholm δευτέρου είδους με διαχωρίσιμο πυρήνα σε σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων και τελικά η εύρεση της λύσεως της ολοκληρωτικής εξισώσεως σε κλειστή μορφή.
4. Η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων, που βασίζεται στη μέθοδο του Picard για συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Η μέθοδος αυτή είναι πολύ χρήσιμη για την επίλυση γραμμικών (αλλά και μη γραμμικών) ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm ή Volterra δευτέρου είδους. Στη μέθοδο αυτή ξεκινάμε από μια πρόχειρη προσέγγιση  $y_0(x)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  (π.χ. την προσέγγιση  $y_0(x) \equiv 0$ ) και προχωράμε σε καλύτερες προσεγγίσεις  $y_n(x)$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ). Οι προσεγγίσεις αυτές τείνουν προς την άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$ , εφόσον βέβαια η μέθοδος συγκλίνει.
5. Η μέθοδος της αριθμητικής ολοκληρώσεως για ολοκληρωτικές εξισώσεις κυρίως Fredholm πρώτου ή δευτέρου είδους. Με τη μέθοδο αυτή το ολοκλήρωμα προσεγγίζεται με άθροισμα με τη χρήση ενός κατάλληλου τύπου αριθμητικής ολοκληρώσεως με  $n$  κόμβους. Ένας τέτοιος τύπος είναι ο κανόνας αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss-Legendre στο διάστημα  $[-1, 1]$ , ο οποίος δεν έχει μάλιστα συνάρτηση βάρους  $w(x)$ . Ακολουθεί η εφαρμογή της προσεγγιστικής εξισώσεως που προκύπτει στους κόμβους του κανόνα της αριθμητικής ολοκληρώσεως.

Στη συνέχεια η ολοκληρωτική εξίσωση προσεγγίζεται από σύστημα  $n$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Τελικά η λύση, σε ολόκληρο το διάστημα ολοκληρώσεως, προσδιορίζεται με τη χρήση φυσικής ή πολυωνυμικής παρεμβολής.

Στόχο του παρόντος κεφαλαίου αποτελεί η συνειδητοποίηση από το φοιτητή και τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό ότι υπάρχουν αρκετές και μάλιστα αρκετά αποτελεσματικές μέθοδοι επιλύσεως ολοκληρωτικών εξισώσεων. Η καθεμιά τους βέβαια έχει τα σχετικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά της, συγκεκριμένο πεδίο εφαρμογής και (ακόμη και στο πεδίο αυτό) ορισμένη αποτελεσματικότητα και ορισμένο υπολογιστικό κόστος.

Πολύ συχνά βέβαια, ιδίως σε πολύπλοκα προβλήματα που ανάγονται σε ολοκληρωτικές εξισώσεις, ο Πολιτικός Μηχανικός είναι αναγκασμένος να καταφεύγει σε αριθμητικές μεθόδους. Τέτοια μέθοδος είναι η μέθοδος της αριθμητικής ολοκληρώσεως. Συχνά μάλιστα αυτή χρησιμοποιείται όχι με τους κλασικούς τύπους αριθμητικής ολοκληρώσεως, αλλά σε συνδυασμό με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων. Στην τόσο δημοφιλή (κατά τις τελευταίες τρεις δεκαετίες) μέθοδο των συνοριακών στοιχείων το σύνορο του θεωρούμενου μέσου, κατά μήκος του οποίου συνόρου ισχύει η ολοκληρωτική εξίσωση, διαχωρίζεται και προσεγγίζεται από συνοριακά στοιχεία. Σχετικά ειδικά βιβλία αναφέρονται στη Βιβλιογραφία στο τέλος αυτού του Μέρους Γ των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς, το οποίο αφορά στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις.

## Γ2.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΝΑΓΩΓΗΣ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

### Γ2.1.1. Περιγραφή της μεθόδου

Με τη μέθοδο της αναγωγής σε διαφορική εξίσωση προσπαθούμε να αναγάγουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους σε διαφορική εξίσωση. Η αναγωγή αυτή κατορθώνεται με την εξάλειψη του ολοκληρώματος μέσω μιας ή και περισσότερων παραγωγίσεων. Θεωρούμε τη γενικευμένη ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους στο διάστημα  $[0, c]$  (με  $c > 0$ )

$$a(x)y(x) + \int_0^x K(x,t)y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq c, \quad (2.1.1)$$

με τις συναρτήσεις  $a(x)$  και  $f(x)$  καθώς και τον πυρήνα  $K(x,t)$  γνωστές συναρτήσεις. Αντίθετα η συνάρτηση  $y(x)$  είναι η άγνωστη συνάρτηση. Για να είναι επιτυχής η μέθοδος της αναγωγής σε διαφορική εξίσωση στην εξίσωση αυτή, θα πρέπει ο γνωστός πυρήνας  $K(x,t)$  να είναι ειδικών μορφών.

Παραδείγματος χάρι, εάν ο πυρήνας αυτός  $K(x,t)$  είναι ανεξάρτητος του  $x$ , δηλαδή εάν

$$K(x,t) \equiv k(t), \quad (2.1.2)$$

τότε αποδεικνύεται χρήσιμος ο πολύ βασικός και γνωστός από τον απειροστικό λογισμό τύπος

$$\frac{d}{dx} \int_0^x F(t) dt = F(x). \quad (2.1.3)$$

Ο τύπος αυτός απλά δηλώνει ότι η παράγωγος (ως προς  $x$ ) του αορίστου ολοκληρώματος της συναρτήσεως  $F(x)$  ισούται με την ίδια την ολοκληρωτέα συνάρτηση  $F(x)$ . Με τη χρήση του τύπου αυτού η παραγωγή της ολοκληρωτικής εξισώσεως (2.1.1) (με πυρήνα της μορφής (2.1.2)) μας οδηγεί άμεσα στην εξής μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως:

$$a(x)y'(x) + [a'(x) + k(x)]y(x) = f'(x). \quad (2.1.4)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να επιλυθεί πολύ εύκολα. Επειδή μάλιστα είναι γραμμική και πρώτης τάξεως, είναι διαθέσιμος και σχετικός κλειστός τύπος.

Ασφαλώς κατά την παραγωγή της αυτή χάνονται πληροφορίες, π.χ. η παράγωγος σταθεράς είναι μηδέν. Με άλλα λόγια η αρχική ολοκληρωτική εξίσωση (2.1.1) έχει μία λύση, ενώ η διαφορική εξίσωση (2.1.4) που προέκυψε και είναι πρώτης τάξεως έχει απλή απειρία λύσεων εξαιτίας της σταθεράς  $C$ , που παρουσιάζεται στη λύση της. Για το λόγο αυτό η διαφορική εξίσωση (2.1.4) πρέπει να συνοδεύεται και από μία αρχική συνθήκη. Η συνθήκη αυτή προκύπτει αμέσως, μόλις θέσουμε  $x = 0$  στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.1.1). Έτσι βρίσκεται ότι

$$a(0)y(0) = f(0) \implies y(0) = \frac{f(0)}{a(0)} \quad (2.1.5)$$

με την εύλογη υπόθεση ότι  $a(0) \neq 0$ .

Παραπέρα, εάν έχουμε διαχωρίσιμο πυρήνα της μορφής

$$K(x, t) \equiv L(x)M(t), \quad (2.1.6)$$

δηλαδή με τις δύο μεταβλητές  $x$  και  $t$  χωρισμένες (στις συναρτήσεις  $L(x)$  και  $M(t)$  αντίστοιχα), τότε η ολοκληρωτική εξίσωση (2.1.1) παίρνει τη μορφή

$$a(x)y(x) + L(x) \int_0^x M(t)y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq c. \quad (2.1.7)$$

Στο σημείο αυτό υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $L(x) \neq 0$  σε ολόκληρο το διάστημα  $[0, c]$  που μας ενδιαφέρει. Έτσι μπορούμε να διαιρέσουμε με  $L(x)$  την εξίσωση αυτή (2.1.7) και να πάρουμε την τελική της μορφή

$$\frac{a(x)}{L(x)}y(x) + \int_0^x M(t)y(t) dt = \frac{f(x)}{L(x)}, \quad 0 \leq x \leq c. \quad (2.1.8)$$

Τότε ισχύουν και πάλι όσα ήδη αναφέρθηκαν για την ολοκληρωτική εξίσωση (2.1.1) με πυρήνα  $K(x, t) = k(t)$  ανεξάρτητο του  $x$ .

### Γ2.1.2. Παραδείγματα

▼ **Παράδειγμα Γ2.1.2.1:** Σαν πρώτο παράδειγμα θεωρούμε τη μη ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους

$$y(x) = 1 + 2 \int_0^x y(t) dt \quad (2.1.9)$$

με πυρήνα  $k(t) \equiv 1$  (ισοδύναμα χωρίς πυρήνα). Παραγωγίζουμε ως προς  $x$ , έχοντας λάβει υπόψη και τον τύπο (2.1.3), και παίρνουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως

$$y'(x) = 2y(x). \quad (2.1.10)$$

Δυστυχώς όμως η πληροφορία που προερχόταν από τη σταθερά 1 στο δεξιό μέλος της ολοκληρωτικής εξισώσεως (2.1.9) χάθηκε με την παραγωγή. Επομένως η διαφορική εξίσωση (2.1.10) πρέπει να συνοδεύεται και από μία χωριστή συνθήκη (εν προκειμένω μία αρχική συνθήκη). Μόνο έτσι θα είναι ισοδύναμη με την ολοκληρωτική εξίσωση (2.1.9). Τούτο, το ότι δηλαδή δεν απαιτείται στις ολοκληρωτικές εξισώσεις χωριστά η αρχική συνθήκη (ή οι αρχικές συνθήκες), αποτελεί ένα από τα πλεονεκτήματα της χρήσεως των ολοκληρωτικών εξισώσεων σε σχέση με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Αυτό έχει ήδη αναφερθεί. Θέτοντας επομένως  $x = 0$  στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.1.9), παίρνουμε την αρχική συνθήκη

$$y(0) = 1, \quad (2.1.11)$$

που πρέπει οπωσδήποτε να συνοδεύει τη διαφορική εξίσωση (2.1.10): πρόβλημα αρχικής τιμής. Τώρα πλέον η λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.1.10) είναι μοναδική και συγκεκριμένα, όπως εύκολα διαπιστώνεται, εκθετικής μορφής

$$y(x) = e^{2x}. \quad (2.1.12)$$

Η λύση αυτή επαληθεύει, όπως επίσης άμεσα προκύπτει, τη διαφορική εξίσωση (2.1.10), αλλά και την αρχική συνθήκη (2.1.11). Βέβαια ο Πολιτικός Μηχανικός δε θα είναι πλήρως ικανοποιημένος, παρά μόνο αφού διαπιστώσει ότι η λύση αυτή (2.1.12) επαληθεύει και την ίδια την ολοκληρωτική εξίσωση (2.1.9). Η διαπίστωση αυτή είναι επίσης πολύ εύκολη στο παρόν απλό παράδειγμα. ▲

▼ **Παράδειγμα Γ2.1.2.2:** Σαν δεύτερο και υπολογιστικά κάπως πολυπλοκότερο παράδειγμα θεωρούμε την επίσης μη ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους

$$y(x) = ax + b + \int_0^x ty(t) dt \quad (2.1.13)$$

με πυρήνα  $K(x, t) = k(t) = t$ . Με εργασία απόλυτα ανάλογη με εκείνη του προηγούμενου παραδείγματος διαπιστώνουμε πολύ εύκολα ότι η πιο πάνω ολοκληρωτική εξίσωση Volterra είναι ισοδύναμη με το εξής πρόβλημα αρχικής τιμής:

$$y'(x) = a + xy(x), \quad y(0) = b. \quad (2.1.14)$$

Τώρα όμως η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως είναι με μη σταθερό συντελεστή: τον πυρήνα  $k(t) = t$  για  $t = x$ . Παρά το γεγονός αυτό διαθέτει και πάλι κλειστή λύση, που λόγω και της πιο πάνω αρχικής συνθήκης  $y(0) = b$  βρίσκεται ότι έχει τη μορφή

$$y(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \left[ b + a \frac{\pi}{\sqrt{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right]. \quad (2.1.15)$$

(Στη μορφή αυτή προτιμήθηκε ο συμβολισμός  $\exp$  για τη συνηθισμένη εκθετική συνάρτηση με  $\exp z \equiv e^z$ ). Παρατηρούμε ότι στην πιο πάνω λύση (2.1.15) υπεισέρχεται η συνάρτηση σφάλματος (error function)  $\operatorname{erf}$ , δηλαδή μια ανώτερη υπερβατική συνάρτηση.

Άμεσα διαπιστώνεται η επαλήθευση της αρχικής συνθήκης  $y(0) = b$  (αφού ισχύουν οι δύο γνωστές μας τιμές  $\exp 0 = 1$  και  $\operatorname{erf} 0 = 0$ ) και κάπως δυσκολότερα της διαφορικής εξίσωσης στο πρόβλημα αρχικής τιμής (2.1.14). Ακόμη πιο δύσκολη είναι η επαλήθευση της αρχικής ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra (2.1.13). Για την επαλήθευση αυτή μάλλον ενδείκνυται η χρήση ενός κάπως ισχυρού προγράμματος συμβολικών υπολογισμών, όπως η *Mathematica* και η *Maxima*. ▲

Επ' ευκαιρία, επαναλαμβάνεται, ο Πολιτικός Μηχανικός επιτελεί ένα σοβαρότατο λειτουργήμα στην κοινωνία με τα τεχνικά έργα που αναλαμβάνει να μελετήσει και να εκτελέσει. Είναι επομένως πάντοτε υποχρεωμένος να επαληθεύει τους υπολογισμούς του, αν είναι δυνατόν και με πάνω από έναν τρόπο. Επιπλέον, σε όσο βαθμό έχει τη δυνατότητα, πρέπει να επιδιώκει να επιλύει τα υπολογιστικά προβλήματα που αντιμετωπίζει με δύο ή και τρεις εντελώς διαφορετικές μεθόδους.

## Γ2.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

### Γ2.2.1. Περιγραφή της μεθόδου

Η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace μας είναι ήδη γνωστή από τα Κεφάλαια Α10 και Α11 του Μέρους Α: συνήθεις διαφορικές εξισώσεις καθώς και από το Κεφάλαιο Β10 του Μέρους Β: διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Εδώ θα τη χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση ειδικών περιπτώσεων ολοκληρωτικών εξισώσεων, οι οποίες μπορούν να μετατραπούν σε πρωτοβάθμιες αλγεβρικές εξισώσεις με την εφαρμογή του μετασχηματισμού αυτού. Σε μια τέτοια αλγεβρική εξίσωση άγνωστη συνάρτηση  $Y(s)$  θα είναι ο μετασχηματισμός Laplace (ή η μετασχηματισμένη

κατά Laplace) της αρχικά άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  στην ολοκληρωτική εξίσωση. Πολύ εύκολα επιλύεται η αλγεβρική εξίσωση ως προς  $Y(s)$ . (Πρόκειται για μια απλούστατη εργασία για πρωτοβάθμιες αλγεβρικές εξισώσεις!) Στη συνέχεια ένα δυσκολότερο καθήκον είναι το να προσδιορισθεί η αρχικά άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$  με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ . Κατάλληλες ολοκληρωτικές εξισώσεις για την εφαρμογή της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace είναι οι μονοδιάστατες γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra πρώτου ή δεύτερου είδους συνελκτικού τύπου. Αυτές έχουν πυρήνα  $K(x, t)$  ειδικής μορφής της διαφοράς  $x - t$ , δηλαδή

$$K(x, t) = k(x - t). \quad (2.2.1)$$

Παραδείγμα τέτοιας ολοκληρωτικής εξισώσεως είναι η ακόλουθη μη ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δεύτερου είδους στο διάστημα  $[0, a]$  (με το  $a$  φυσικά σταθερά):

$$y(x) + \int_0^x k(x - t)y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (2.2.2)$$

Στην εξίσωση αυτή άγνωστη συνάρτηση είναι η  $y(x)$ . Αντίθετα γνωστές συναρτήσεις είναι η συνάρτηση  $f(x)$  στο δεξιό μέλος καθώς και ο πυρήνας  $k(x - t)$  στο ολοκλήρωμα, που είναι πυρήνας διαφοράς ή συνελκτικού τύπου. Ένα δεύτερο παράδειγμα αποτελεί η απόλυτα αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση Volterra πρώτου είδους

$$\int_0^x k(x - t)y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (2.2.3)$$

Τέλος ένα τρίτο παράδειγμα αποτελεί και η πολύ απλή περίπτωση ελλείψεως πυρήνα:  $k(x - t) \equiv 1$ , όπως συμβαίνει στην ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) + \int_0^x y(t) dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (2.2.4)$$

Μια άλλη μορφή της ολοκληρωτικής αυτής εξισώσεως εξετάσθηκε ήδη στην Ενότητα Γ1.1 σε ένα πολύ απλό πρόβλημα Κινηματικής του υλικού σημείου με την επίλυση εκεί της ολοκληρωτικής εξισώσεως (1.1.4).

Ανάλογα βέβαια ισχύουν και για την περίπτωση της συνήθους δοκού μήκους  $L$  (με  $0 \leq x \leq L$ ). Στο πρόβλημα αυτό η κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$ , που θεωρείται εν προκειμένω άγνωστη, και η ελαστική γραμμή (δηλαδή το βέλος κάμψεως ή κάθετη μετατόπιση ή απλά βύθιση)  $y(x)$ , που θεωρείται στη συγκεκριμένη περίπτωση γνωστό, συνδέονται με τον τύπο

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2}y''(0) + \frac{x^3}{6}y'''(0) + \frac{1}{6EI} \int_0^x (x - \xi)^3 p(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2.2.5)$$

Στον τύπο αυτό το γινόμενο  $EI$  δηλώνει τη δυσκαμψία της δοκού. Όπως ήδη ξέρουμε, πρόκειται για το γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας (ή μέτρου του Young)  $E$  του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της δοκού επί τη ροπή αδραναίας  $I$  της διατομής της γύρω από τον ουδέτερο άξονα της στην κάμψη. Αυτός είναι ο άξονας  $Oz$  της διατομής. Ο πυρήνας  $K(x, \xi)$  έχει τη μορφή  $K(x, \xi) = (x - \xi)^3$  ή έστω  $(x - \xi)^3/(6EI)$ .

Ο τύπος αυτός (2.2.5) μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από τον κλασικό τύπο του Maclaurin (τύπο του Taylor στο αριστερό άκρο  $x = 0$  της δοκού)

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2}y''(0) + \frac{x^3}{6}y'''(0) + R_3(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2.2.6)$$

Όμως στον τύπο (2.2.5) ο όρος υπολοίπου  $R_3(x)$  (δηλαδή ο όρος  $R_n(x)$ , αλλά με  $n = 3$  εν προκειμένω), που γενικά έχει τη μορφή (Spivak, 1991, σ. 349)

$$R_3(x) = \frac{1}{6} \int_0^x (x - \xi)^3 y''''(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (2.2.7)$$

γράφτηκε με τη βοήθεια της κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x)$ . Έχει μάλιστα ληφθεί υπόψη ότι

$$EI y''''(x) = p(x) \implies y''''(x) = \frac{1}{EI} p(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2.2.8)$$

Τούτο είναι γνωστό για τη διαφορική εξίσωση της ελαστικής γραμμής  $y(x)$  συνήθους δοκού από την Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως στη Μηχανική των Υλικών (Μαστρογιάννης, 1999, Τόμος Δεύτερος, Ενότητα 11.2, σ. 137, εξ. (11.5)). Επομένως από τον τύπο (2.2.7) προκύπτει ότι

$$R_3(x) = \frac{1}{6EI} \int_0^x (x - \xi)^3 p(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (2.2.9)$$

Με αντικατάσταση του τελευταίου αυτού αποτελέσματος στον τύπο του Maclaurin (2.2.6) προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση της παρούσας δοκού (2.2.5) ως προς την κάθετη κατανεμημένη φόρτίσή της  $p(x)$ . Στην εξίσωση αυτή (2.2.5) το βέλος κάμψεως της δοκού  $y(x)$  (καλύτερα η ελαστική γραμμή της  $y(x)$ ) θεωρείται γνωστό. Άρα πρόκειται για ένα **αντίστροφο πρόβλημα** κάμψεως δοκού. Παρατηρείται ότι ο ολοκληρωτικός όρος στη μη ομογενή αυτή ολοκληρωτική εξίσωση Volterra πρώτου είδους και συνελκτικού τύπου (2.2.5) προέκυψε από τον όρο υπολοίπου  $R_n(x)$  (για  $n = 3$ ) στον κλασικό τύπο του Maclaurin στον απειροστικό λογισμό. Το γεγονός αυτό είναι ίσως ενδιαφέρον και κάπως παράδοξο. Σημειώνεται επίσης ότι η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace που εξετάζουμε είναι απόλυτα κατάλληλη για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξισώσεως Volterra (2.2.5). Εξαρτάται βέβαια από μας αν θα επιλέξουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση της παρούσας ολοκληρωτικής εξισώσεως (2.2.5).

Επανερχόμαστε τώρα στη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Σημειώνουμε καταρχήν τα βήματα για την εφαρμογή της σε ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra πρώτου ή δευτέρου είδους και συνελκτικού τύπου. Τα βήματα αυτά είναι τέσσερα και τα εξής:

- **ΒΗΜΑ 1:** Εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στην ολοκληρωτική εξίσωση Volterra που μας δίνεται, π.χ. της μορφής (2.2.2). Με αυτόν τον τρόπο άγνωστη συνάρτηση γίνεται τώρα ο μετασχηματισμός Laplace  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$  της αρχικά (και ακόμη) άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$ . Για την εφαρμογή του βήματος αυτού φυσικά απαιτείται ο υπολογισμός των μετασχηματισμών Laplace και των δύο μελών της ολοκληρωτικής εξισώσεως. Προκύπτει έτσι μια πρωτοβάθμια αλγεβρική (ασφαλώς ούτε ολοκληρωτική ούτε διαφορική) εξίσωση ως προς τη βοηθητική άγνωστη συνάρτηση  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ . Το πιο ουσιώδες σημείο στο παρόν βήμα είναι η εφαρμογή του θεωρήματος της συνελίξεως (Παράγραφος A10.3.7 του Κεφαλαίου A10 στο Μέρος A των διδακτικών βιβλίων) στον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace του ολοκληρώματος της ολοκληρωτικής εξισώσεως Volterra. Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x k(x-t)y(t) dt \right\} = \mathcal{L}\{k(x) * y(x)\} = \mathcal{L}\{k(x)\} \mathcal{L}\{y(x)\} = K_L(s) Y(s) \quad (2.2.10)$$

με το σύμβολο  $*$  να δηλώνει συνέλιξη (και όχι πολλαπλασιασμό!) και τη συνάρτηση  $K_L(s)$  να δηλώνει το μετασχηματισμό Laplace του πυρήνα  $k(x)$ . Επομένως ο ολοκληρωτικός όρος της ολοκληρωτικής εξισώσεως μετασχηματίζεται (κατά Laplace) στο γινόμενο  $K_L(s)Y(s)$  των μετασχηματισμών Laplace  $K_L(s)$  του πυρήνα  $k(x)$  και  $Y(s)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$ . Παραδείγματος χάρη, για την ολοκληρωτική εξίσωση δευτέρου είδους (2.2.2) θα έχουμε

$$Y(s) + K_L(s) Y(s) = F(s) \quad (2.2.11)$$

με  $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$ .

- **ΒΗΜΑ 2:** Επίλυση της πρωτοβάθμιας αυτής αλγεβρικής εξισώσεως ως προς  $Y(s)$ . Πρόκειται για μια πάρα πολύ απλή εργασία. Για παράδειγμα, με  $K_L(s) \neq -1$  από την εξίσωση (2.2.11) προκύπτει ότι

$$Y(s) = \frac{F(s)}{1 + K_L(s)}. \quad (2.2.12)$$



- **ΒΗΜΑ 3:** Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace  $Y(s)$ , που προσδιορίστηκε στο προηγούμενο βήμα, και προσδιορισμός της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Ας σημειωθεί παρενθετικά ότι στις ολοκληρωτικές εξισώσεις οι αρχικές συνθήκες είναι ενσωματωμένες σ' αυτές αντίθετα από ό,τι συμβαίνει στις διαφορικές εξισώσεις, όπου λαμβάνονται υπόψη ξεχωριστά. Παραδείγματος χάρη, από τη σχέση (2.2.12) προκύπτει ότι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{1 + K_L(s)}\right\} \quad (2.2.13)$$

και επομένως (θεωρητικά τουλάχιστον) η ζητούμενη συνάρτηση  $y(x)$  έχει πια προσδιορισθεί.

- **ΒΗΜΑ 4:** Επαλήθευση της λύσεως  $y(x)$  που προέκυψε με άμεση αντικατάστασή της στην ολοκληρωτική εξίσωση, υπολογισμό του ολοκληρώματος και διαπίστωση της ισχύος της. Το βήμα αυτό, αν και όχι πάντοτε απόλυτα αναγκαίο, συνιστάται έντονα να γίνεται επίσης, έτσι ώστε οποιοδήποτε σφάλμα στους υπολογισμούς, ιδίως των Βημάτων 1 και 3, να είναι δυνατόν να ανιχνευθεί. Επίσης με την επαλήθευση ελέγχεται κατά κάποιον τρόπο και η ορθότητα των άμεσων και έμμεσων υποθέσεων που έγιναν κατά την επίλυση. Παραδείγματος χάρη, έχει γίνει η υπόθεση ότι η άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$  διαθέτει πραγματικά μετασχηματισμό Laplace: τη συνάρτηση  $Y(s)$ .

Κάναμε ήδη την εισαγωγική (αλλ' απόλυτα συγκεκριμένη) χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace στο απλό παράδειγμα της Ενότητας Γ1.1. Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην επίδειξη της μεθόδου αυτής και σε κάπως δυσκολότερα παραδείγματα που αφορούν σε ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra συνελκτικού τύπου: με πυρήνα διαφοράς της μορφής  $k(x - t)$ .

### Γ2.2.2. Παραδείγματα

▼ **Παράδειγμα Γ2.2.2.1:** Σαν πρώτο παράδειγμα θεωρούμε τη μη ομογενή γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra πρώτου είδους

$$\int_0^t \cos(t - \tau)y(\tau) d\tau = t(t \cos t + \sin t), \quad t \geq 0. \quad (2.2.14)$$

Άγνωστη συνάρτηση είναι η συνάρτηση  $y(t)$ . Αντίθετα γνωστή συνάρτηση είναι εδώ η συνάρτηση  $f(t) = t(t \cos t + \sin t)$  στο δεξιό μέλος της. Γνωστή συνάρτηση είναι επίσης και ο συνελκτικός πυρήνας  $K(t, \tau) = k(t - \tau) = \cos(t - \tau)$  στο ολοκλήρωμα (πυρήνας διαφοράς). Πρόκειται για ολοκληρωτική εξίσωση όπου η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace είναι απόλυτα κατάλληλη και ιδιαίτερα αποτελεσματική. Θα ακολουθήσουμε τα βήματα που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη Παράγραφο 2.2.1.

Καταρχήν κάνουμε χρήση στοιχειωδών μετασχηματισμών Laplace, όπως, π.χ., του μετασχηματισμού Laplace της συνημιτονικής συναρτήσεως

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \frac{s}{s^2 + 1}, \quad s > 0. \quad (2.2.15)$$

Μετατρέπουμε έτσι και τα δύο μέλη της δοθείσας ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.2.14) στις μετασχηματισμένες τους κατά Laplace με το μετασχηματισμό  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$  προς το παρόν άγνωστη συνάρτηση. Σημειώνουμε τη χρήση του θεωρήματος της συνελίξεως (2.2.10) στον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace του συνελκτικού ολοκληρώματος στο αριστερό μέλος της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.2.14). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση

$$\frac{s}{s^2 + 1} Y(s) = \frac{4s(s^2 - 1)}{(s^2 + 1)^3}. \quad (2.2.16)$$

Η λύση  $Y(s)$  της απλούστατης αυτής αλγεβρικής εξίσωσης έχει τη μορφή

$$Y(s) = \frac{4(s^2 - 1)}{(s^2 + 1)^2} \quad (2.2.17)$$

ή, με ανάλυση σε απλά κλάσματα,

$$Y(s) = \frac{4}{s^2 + 1} - \frac{8}{(s^2 + 1)^2}. \quad (2.2.18)$$

Μέχρι στιγμής προσδιορίστηκε πλήρως ο μετασχηματισμός Laplace  $Y(s)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $y(t)$ . Απομένει η εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ . Αφού

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \sin t, \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2 + 1)^2}\right\} = \sin t - t \cos t, \quad (2.2.19)$$

προκύπτει τελικά ότι

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 4t \cos t. \quad (2.2.20)$$

Επαληθεύεται μάλιστα με την εκτέλεση των αναγκαίων πράξεων, δηλαδή κυρίως του υπολογισμού του ολοκληρώματος της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.2.14), ότι η έκφραση αυτή της συναρτήσεως  $y(t)$  είναι πραγματικά η λύση της παρούσας ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra (2.2.14). ▲

▼ **Παράδειγμα Γ2.2.2.2:** Σαν δεύτερο παράδειγμα θεωρούμε την επίσης μη ομογενή γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra, αλλά δευτέρου είδους τώρα

$$y(x) + \int_0^x (x - \xi) y(\xi) d\xi = x^4 + x^2 + 1 \quad \text{με } x \geq 0. \quad (2.2.21)$$

Όπως όμως είναι γνωστό (σχέση (10.2.18) της Παραγράφου Α10.2.2 του Κεφαλαίου Α10 του Μέρους Α),

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{για } s > 0 \quad \text{και για } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.22)$$

Επιπλέον ισχύει και το θεώρημα της συνελίξεως (2.2.10) στο μετασχηματισμό Laplace. Επομένως η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση (2.2.21), εάν μετασχηματισθεί κατά Laplace, παίρνει τη μορφή

$$Y(s) + \frac{1}{s^2} Y(s) = \frac{24}{s^5} + \frac{2}{s^3} + \frac{1}{s} \implies \frac{s^2 + 1}{s^2} Y(s) = \frac{s^4 + 2s^2 + 24}{s^5} \quad (2.2.23)$$

με  $Y(s) = \mathcal{L}\{y(x)\}$ . Λύνουμε την πιο πάνω πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς  $Y(s)$  και στη συνέχεια αναλύουμε τη λύση της σε απλά κλάσματα. Βρίσκουμε έτσι ότι

$$Y(s) = \frac{s^4 + 2s^2 + 24}{s^3(s^2 + 1)} = \frac{23s}{s^2 + 1} + \frac{24}{s^3} - \frac{22}{s}. \quad (2.2.24)$$

Τελικά παίρνουμε υπόψη και τους τύπους (2.2.15) και (2.2.22) κατά την αντιστροφή του πιο πάνω μετασχηματισμού Laplace. Διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 23 \cos x + 12x^2 - 22. \quad (2.2.25)$$

Η αντικατάσταση του αποτελέσματος αυτού στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.2.21) οδηγεί στην επαλήθευση της ορθότητάς του. ▲

Ασφαλώς δεν έχει νόημα η παράθεση και άλλων απλών παραδειγμάτων πάνω στη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace (σε συνδυασμό με το θεώρημα της συνελίξεως (2.2.10)) στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra. Αντίθετα έχει βέβαια νόημα να προχωρήσουμε σε συγκεκριμένες εφαρμογές, που να δείχνουν τη χρησιμότητα και την αποτελεσματικότητα της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace κατά την επίλυση πρακτικών προβλημάτων ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού. Οι εφαρμογές αυτές θα αποτελέσουν τη συνέχεια και τη γενίκευση της ομολογουμένως στοιχειώδους εισαγωγικής εφαρμογής της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace στην Ενότητα Γ1.1. Τέτοιες εφαρμογές θα παρατεθούν στο επόμενο και τελευταίο Κεφάλαιο Γ3.

### Γ2.3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΧΩΡΙΣΙΜΩΝ ΠΥΡΗΝΩΝ

#### Γ2.3.1. Περιγραφή της μεθόδου

Η μέθοδος των διαχωρίσιμων πυρήνων για την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων αφορά σε ειδικές ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm δευτέρου είδους, όπου ο πυρήνας  $K(x, t)$  είναι διαχωρίσιμος (ή πυρήνας Pincherle–Goursat). Ένας διαχωρίσιμος πυρήνας έχει τη γενική μορφή

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n L_i(x)M_i(t), \quad a \leq x \leq b, \quad a \leq t \leq b, \quad (2.3.1)$$

με γνωστές τις συναρτήσεις της μιας μεταβλητής  $L_i(x)$  (συναρτήσεις του  $x$  μόνο) και  $M_i(t)$  (συναρτήσεις του  $t$  μόνο). Η μορφή αυτή αναφέρθηκε μάλιστα και στην Ενότητα Γ1.3 σαν ευνοϊκή περίπτωση πυρήνα. Οι διαχωρίσιμοι πυρήνες επιτρέπουν την άμεση (και χωρίς προσεγγίσεις) αναγωγή ολοκληρωτικών εξισώσεων του τύπου που προαναφέρθηκε σε συστήματα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

Πιο συγκεκριμένα στην παρούσα περίπτωση η ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους (1.2.6) της Παραγράφου Γ1.2.2 παίρνει τη μορφή

$$y(x) + \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^n L_i(x)M_i(t) \right] y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.3.2)$$

αντί για τη γενικότερή της (1.2.6) στην Παράγραφο Γ1.2.2. Άγνωστη συνάρτηση είναι η  $y(x)$  και γνωστή συνάρτηση η  $f(x)$ . Οι συναρτήσεις  $L_i(x)$  και  $M_i(t)$  στον επίσης γνωστό πυρήνα  $K(x, t)$  της μορφής (2.3.1) είναι προφανώς και αυτές γνωστές.

Θα ξεκινήσουμε με την ειδική περίπτωση όπου  $n = 1$  στη γενική έκφραση (2.3.1) του διαχωρίσιμου πυρήνα  $K(x, t)$ , δηλαδή απλά

$$K(x, t) = L(x)M(t). \quad (2.3.3)$$

Τότε η ολοκληρωτική εξίσωσή μας (2.3.2) γράφεται σαν

$$y(x) + L(x) \int_a^b M(t)y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.3.4)$$

και παραπέρα σαν

$$y(x) = f(x) - L(x) \int_a^b M(t)y(t) dt, \quad a \leq x \leq b, \quad (2.3.5)$$

ή ακόμη και στη μορφή

$$y(x) = f(x) - cL(x). \quad (2.3.6)$$

Στην τελευταία αυτή μορφή το σύμβολο  $c$  δηλώνει τη σταθερά, αλλά δυστυχώς προς το παρόν άγνωστη, ποσότητα (ορισμένο ολοκλήρωμα)

$$c = \int_a^b M(t)y(t) dt = \int_a^b M(x)y(x) dx. \quad (2.3.7)$$

Για τον προσδιορισμό της σταθεράς  $c$  στην εξίσωση (2.3.6) πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση αυτή επί τη γνωστή συνάρτηση  $M(x)$  (δηλαδή  $M(t)$  για  $t = x$ ) στον πυρήνα (2.3.3). Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε στο διάστημα ολοκλήρωσης  $[a, b]$  παίρνοντας

$$\int_a^b M(x)y(x) dx = \int_a^b M(x)f(x) dx - c \int_a^b L(x)M(x) dx. \quad (2.3.8)$$

Μπορούμε μάλιστα να εισαγάγουμε τις άμεσα προσδιορίσιμες (μέσω ολοκλήρωσης) σταθερές

$$g = \int_a^b M(x)f(x) dx = \int_a^b M(t)f(t) dt, \quad d = \int_a^b L(x)M(x) dx = \int_a^b L(t)M(t) dt. \quad (2.3.9)$$

Αυτό είναι δυνατόν, επειδή τόσο ο πυρήνας  $K(x, t)$ , εξίσωση (2.3.3), όσο και η συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνωστές συναρτήσεις στην ολοκληρωτική μας εξίσωση (2.3.2). Τώρα η εξίσωση (2.3.8) παίρνει την τελική της μορφή (υποθέτοντας ότι  $d \neq -1$ )

$$c = g - cd \implies (1 + d)c = g \implies c = \frac{g}{1 + d}. \quad (2.3.10)$$

Άρα η σταθερά  $c$  στην τελική λύση (2.3.6) της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.3.2) (για  $n = 1$ ) είναι απόλυτα γνωστή (λόγω της πιο πάνω σχέσεως (2.3.10) και των τύπων (2.3.9)). Επομένως η λύση αυτή έχει οριστικά προσδιορισθεί. Τώρα απλά με τη χρήση των τύπων (2.3.9) και (2.3.10) η ίδια ακριβώς λύση, η λύση (2.3.6), μπορεί προφανώς να γραφεί και στην αναλυτική της μορφή

$$y(x) = f(x) - \frac{\int_a^b M(t) f(t) dt}{1 + \int_a^b L(t) M(t) dt} L(x). \quad (2.3.11)$$

Όμως στη μορφή αυτή προτιμήθηκε στα δύο ολοκληρώματα η μεταβλητή ολοκληρώσεως  $t$  αντί της απόλυτα ισοδύναμης της και εξίσου αποδεκτής μεταβλητής  $x$ . Αυτό έγινε, ώστε να φανεί ευκρινέστερα η μορφή της λύσεως  $y(x)$  και ο βαθμός της εξαρτήσεώς της από τις δύο γνωστές συναρτήσεις  $f(x)$  και  $L(x)$ .

Θα προχωρήσουμε τώρα (απολύτως ανάλογα, αλλά γενικεύοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα (2.3.10) ή (2.3.11)) στην εξέταση της γενικής μορφής (2.3.1) του διαχωρίσιμου πυρήνα  $K(x, t)$ . Υποθέτουμε μάλιστα τις συναρτήσεις  $L_i(x)$  (ανάλογα και τις  $M_i(t)$  ή  $M_i(x)$ , η μεταβλητή  $t$  ή  $x$  δεν έχει σημασία) στο διαχωρίσιμο αυτό πυρήνα  $K(x, t)$ , εξίσωση (2.3.1), γραμμικώς ανεξάρτητες. Την υπόθεση αυτή την κάνουμε τόσο για τις συναρτήσεις  $L_i(x)$  όσο και για τις συναρτήσεις  $M_i(t)$  με  $i = 1, 2, \dots, n$ . Στη γενική αυτή περίπτωση διαχωρίσιμου πυρήνα η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση (2.3.2) μπορεί ασφαλώς να γραφεί και στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή της

$$y(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n \left\{ L_i(x) \left[ \int_a^b M_i(t) y(t) dt \right] \right\}, \quad a \leq x \leq b. \quad (2.3.12)$$

Η μορφή αυτή προέκυψε, επειδή οι συναρτήσεις  $L_i(x)$  είναι ανεξάρτητες της μεταβλητής ολοκληρώσεως  $t$ . Άρα τα σύμβολα της αθροίσεως και της ολοκληρώσεως μπορούν να εναλλαχθούν, ακριβώς όπως έγινε πιο πάνω. Η μορφή αυτή της ολοκληρωτικής εξίσωσής μας γίνεται πολύ πιο διαφανής με την εισαγωγή των άγνωστων σταθερών

$$c_i = \int_a^b M_i(t) y(t) dt = \int_a^b M_i(x) y(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3.13)$$

Επαναλαμβάνεται ότι το σύμβολο της μεταβλητής ολοκληρώσεως,  $t$  ή  $x$  παραπάνω, δεν επηρεάζει καθόλου το αποτέλεσμα σε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα. Αρκεί φυσικά να μη γίνει σύγχυση με κάποια άλλη μεταβλητή. Όμως στις σχέσεις (2.3.13) δεν υπάρχει άλλη μεταβλητή στα σχετικά ολοκληρώματα.

Με τη χρήση των σχέσεων (2.3.13) η ολοκληρωτική μας εξίσωση (2.3.12) μπορεί να γραφεί και στην απλούστερη μορφή

$$y(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n c_i L_i(x), \quad (2.3.14)$$

που αποτελεί γενίκευση της εξίσωσης (2.3.6) για  $n = 1$ . Δυστυχώς όμως και πάλι οι σταθερές  $c_i$  δεν είναι ακόμη γνωστές. Ας σημειωθεί (παρενθετικά) ότι η εξίσωση (2.3.14) μπορεί να γραφεί και στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή της

$$y(x) - f(x) = - \sum_{i=1}^n c_i L_i(x). \quad (2.3.15)$$

Η μορφή αυτή μας αποκαλύπτει ότι η διαφορά  $y(x) - f(x)$  της ζητούμενης λύσεως  $y(x)$  μείον τη γνωστή συνάρτηση  $f(x)$  είναι οπωσδήποτε ένας γραμμικός συνδυασμός των γνωστών συναρτήσεων  $L_i(x)$ . Οι συναρτήσεις αυτές έχουν ήδη υποθεθεί γραμμικά ανεξάρτητες. Οι ίδιες συναρτήσεις παρουσιάζονται στον επίσης γνωστό διαχωρίσιμο πυρήνα  $K(x, t)$ . Ο πυρήνας αυτός δίνεται από τον τύπο (2.3.1).

Το επόμενο βήμα είναι και πάλι ο προσδιορισμός των σταθερών  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Προηγουμένως είχαμε μία μόνο σταθερά: τη  $c$ . Ο προσδιορισμός αυτός θα γίνει ανάλογα με την ήδη ειδική περίπτωση που ήδη εξετάστηκε και όπου  $n = 1$ . Πιο συγκεκριμένα πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξισώσεως (2.3.14) επί τη γνωστή συνάρτηση  $M_j(x)$  στον πυρήνα (2.3.1) και ολοκληρώνουμε στο διάστημα ολοκληρώσεως  $[a, b]$ . Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε (για  $j = 1, 2, \dots, n$ )

$$\int_a^b M_j(x) y(x) dx = \int_a^b M_j(x) f(x) dx - \sum_{i=1}^n c_i \left[ \int_a^b L_i(x) M_j(x) dx \right], \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3.16)$$

Εισάγουμε επιπλέον τις άμεσα προσδιορίσιμες σταθερές (με  $i, j = 1, 2, \dots, n$ )

$$g_j = \int_a^b M_j(x) f(x) dx = \int_a^b M_j(t) f(t) dt, \quad d_{ji} = \int_a^b L_i(x) M_j(x) dx = \int_a^b L_i(t) M_j(t) dt. \quad (2.3.17)$$

Τώρα παρατηρούμε αμέσως (λόγω και των τύπων (2.3.13)) ότι οι εξισώσεις (2.3.16) μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$c_j = g_j - \sum_{i=1}^n d_{ji} c_i, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3.18)$$

και ισοδύναμα

$$c_j + \sum_{i=1}^n d_{ji} c_i = g_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3.19)$$

Οι εξισώσεις αυτές αποτελούν έτσι ένα συνηθισμένο σύστημα  $n$  μη ομογενών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με γνωστές ποσότητες τις σταθερές (τα ολοκληρώματα)  $d_{ji}$  και  $g_j$ . Άγνωστοι είναι οι  $n$  προς προσδιορισμό σταθερές  $c_j$  (ή  $c_i$ ), οι οποίες είναι επίσης ολοκληρώματα. Το εάν υπάρχει (ή όχι) μία λύση (ή καμία λύση ή άπειρες λύσεις) του συστήματος αυτού εξαρτάται βέβαια από την ορίζουσα  $\Delta$  των συντελεστών των αγνώστων  $c_j$  στο ίδιο σύστημα. Στη συνηθισμένη περίπτωση που η ορίζουσα αυτή  $\Delta$  δεν είναι μηδέν ( $\Delta \neq 0$ ) έχουμε μία μόνο λύση  $c_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) του συστήματός μας (2.3.19). Επομένως έχουμε και μία μόνο λύση (2.3.14) της αρχικής ολοκληρωτικής εξισώσεως (2.3.2). Αυτή προέκυψε υπό την παραδοχή (2.3.1) του διαχωρίσιμου πυρήνα  $K(x, t)$ .

Ας σημειωθεί επίσης ότι με τη χρήση του μοναδιαίου (ή ταυτοτικού) μητρώου (ισοδύναμα πίνακα)  $\mathbf{I}$  διαστάσεων  $n \times n$  το σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (2.3.19) γράφεται και στην ισοδύναμη και οπτικά κάπως πιο συμπαγή μορφή

$$(\mathbf{I} + \mathbf{D})\mathbf{C} = \mathbf{G}. \quad (2.3.20)$$

Στη μορφή αυτή το σύμβολο  $\mathbf{D}$  δηλώνει το τετραγωνικό μητρώο (πίνακα) των γνωστών σταθερών  $d_{ji}$  προφανώς διαστάσεων και πάλι  $n \times n$ . Το σύμβολο  $\mathbf{C}$  δηλώνει το διάνυσμα στήλης (αλλ' όχι όμως και διανυσματικό μέγεθος) των αγνωστων σταθερών  $c_j$ . Τέλος το σύμβολο  $\mathbf{G}$  δηλώνει το διάνυσμα στήλης των γνωστών σταθερών  $g_j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). Πάλι σε μητρωϊκή μορφή η λύση του πιο πάνω συστήματος (2.3.20) μπορεί να γραφεί και σαν

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1} \mathbf{G} \quad (2.3.21)$$

με  $(\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1}$  το αντίστροφο μητρώο (τον αντίστροφο πίνακα) του μητρώου  $\mathbf{I} + \mathbf{D}$ . Το αντίστροφο αυτό μητρώο  $(\mathbf{I} + \mathbf{D})^{-1}$  υπάρχει, εάν η ορίζουσα  $\Delta$  του μητρώου  $\mathbf{I} + \mathbf{D}$ :  $\Delta = |\mathbf{I} + \mathbf{D}| \equiv \det(\mathbf{I} + \mathbf{D})$ , που ήδη αναφέρθηκε, είναι διάφορη του μηδενός. Η διερεύνηση της επίσης ενδιαφέρουσας αντίθετης

περιπτώσεως: της περιπτώσεως όπου  $\Delta = 0$ , οπότε είτε δεν υπάρχει καμία λύση  $C$  είτε υπάρχουν άπειρες τέτοιες λύσεις, αν και είναι απόλυτα εφικτή, δε θα εξετασθεί εδώ. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης/η ενδιαφερόμενη αναγνώστρια Πολιτικός Μηχανικός μπορεί ασφαλώς να ανατρέξει στη Βιβλιογραφία στο τέλος αυτού του Μέρους Γ, το οποίο αφορά στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις.

### Γ2.3.2. Παραδείγματα

▼ **Παράδειγμα Γ2.3.2.1:** Σαν πρώτο (και εξαιρετικά απλό) παράδειγμα επιλύσεως ολοκληρωτικών εξισώσεων με τη μέθοδο των διαχωρίσιμων πυρήνων θεωρούμε τη μη ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους

$$y(x) - \int_0^1 x^2 t^5 y(t) dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.3.22)$$

στο διάστημα  $[a, b] = [0, 1]$ . Η εξίσωση αυτή έχει διαχωρίσιμο πυρήνα  $K(x, t)$  που είναι της απλής μορφής (2.3.3), γιατί

$$K(x, t) = -x^2 t^5 \implies L(x) = -x^2, \quad M(t) = t^5. \quad (2.3.23)$$

Άρα πρόκειται για μια πολύ απλή ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm με διαχωρίσιμο πυρήνα. Η λύση της βρίσκεται άμεσα με τη μέθοδο της προηγούμενης Παραγράφου Γ2.3.1, πιο συγκεκριμένα με την άμεση χρήση του τύπου (2.3.11) για τη λύση  $y(x)$ . Στον τύπο αυτό θα πρέπει να θέσουμε  $f(x) = 1$  και  $f(t) = 1$ . Όσον αφορά στις συναρτήσεις  $L(x)$  και  $M(t)$ , αυτές έχουν προσδιορισθεί στις εξισώσεις (2.3.23) αμέσως πιο πάνω. Επομένως η ζητούμενη λύση  $y(x)$  έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) - \frac{\int_0^1 M(t) f(t) dt}{1 + \int_0^1 L(t) M(t) dt} L(x) = 1 + \frac{\int_0^1 t^5 \cdot 1 dt}{1 - \int_0^1 t^2 t^5 dt} x^2 = 1 + \frac{\int_0^1 t^5 dt}{1 - \int_0^1 t^7 dt} x^2 \\ &= 1 + \frac{1/6}{1 - (1/8)} x^2 = 1 + \frac{4}{21} x^2 = 1 + 0.1904761905 x^2. \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

Φυσικά η λύση αυτή μπορεί να επαληθευθεί με άμεση αντικατάσταση στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.3.22). Μπορούμε επίσης να καταλήξουμε στην ίδια λύση  $y(x)$  με εντελώς διαφορετικό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα στο Παράδειγμα Γ2.4.3.1 θα δούμε ότι ίδια λύση  $y(x)$ , η λύση (2.3.24), προκύπτει και με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Η μέθοδος αυτή δεν έχει καμία απολύτως σχέση με την παρούσα μέθοδο των διαχωρίσιμων πυρήνων πέραν του ότι και οι δύο αφορούν σε ολοκληρωτικές εξισώσεις. Πρέπει βέβαια να ομολογηθεί ότι η παρούσα μέθοδος, που αποφεύγει τις διαδοχικές προσεγγίσεις, είναι υπολογιστικά απλούστερη.

Θα προχωρήσουμε τώρα και σε ένα ακόμη πολύ απλό παράδειγμα ολοκληρωτικής εξίσωσης με διαχωρίσιμο πυρήνα  $K(x, t)$ , όπου εμφανίζεται και μια στοιχειώδης υπερβατική συνάρτηση: συγκεκριμένα η γνωστή εκθετική συνάρτηση  $e^z$ . ▲

▼ **Παράδειγμα Γ2.3.2.2:** Σαν δεύτερο και επίσης απλό (παρά την εμφάνιση της εκθετικής συναρτήσεως) παράδειγμα επιλύσεως ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm με τη μέθοδο των διαχωρίσιμων πυρήνων θεωρούμε τη μη ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους

$$y(x) + \int_{-1}^1 e^{x+2t} y(t) dt = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.3.25)$$

στο διάστημα  $[a, b] = [-1, 1]$ . Έχουμε ξανά διαχωρίσιμο πυρήνα  $K(x, t)$  της μορφής (2.3.3), επειδή

$$K(x, t) = e^{x+2t} = e^x e^{2t} \implies L(x) = e^x, \quad M(t) = e^{2t}. \quad (2.3.26)$$

Πρόκειται επομένως και πάλι για μια πολύ απλή ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm με διαχωρίσιμο πυρήνα. Η λύση της προσδιορίζεται άμεσα και πάλι με την μέθοδο της Παραγράφου Γ2.3.1. Πιο συγκεκριμένα θα γίνει ξανά άμεση χρήση του τύπου (2.3.11) για τη λύση  $y(x)$ , αλλά τώρα

με  $f(x) = x^2$ ,  $f(t) = t^2$  και με τις δύο συναρτήσεις  $L(x)$  και  $M(t)$  να έχουν ήδη προσδιορισθεί στις εξισώσεις (2.3.26). Επομένως η ζητούμενη λύση  $y(x)$  έχει τώρα τη μορφή

$$y(x) = f(x) - \frac{\int_{-1}^1 M(t)f(t) dt}{1 + \int_{-1}^1 L(t)M(t) dt} L(x) = x^2 - \frac{3e^{x+1}(e^4 - 5)}{4(e^6 + 3e^3 - 1)}. \quad (2.3.27)$$

Με άμεσο αριθμητικό υπολογισμό του συντελεστή του  $e^x$  η ίδια λύση  $y(x)$  παίρνει και τη μορφή

$$y(x) = x^2 - 0.218542256874 e^x. \quad (2.3.28)$$

Μπορούμε φυσικά να προχωρήσουμε και στη σχετική επαλήθευση της λύσεως αυτής. Αυτό γίνεται με αντικατάσταση της ακριβούς εκφράσεως (2.3.27) (ή της ελάχιστα προσεγγιστικής εκφράσεως (2.3.28)) στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.3.25). Εναλλακτικά μπορούμε να επαληθεύσουμε τη λύση αυτή  $y(x)$  καταλήγοντας στην ίδια λύση με εντελώς διαφορετικό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα στο Παράδειγμα Γ2.5.7.1 θα δούμε ότι η ίδια λύση, η λύση (2.3.28), προκύπτει και με τη μέθοδο της αριθμητικής ολοκληρώσεως. Η μέθοδος της αριθμητικής ολοκληρώσεως δεν έχει καμία απολύτως σχέση με την παρούσα μέθοδο των διαχωρίσιμων πυρήνων. Το μόνο κοινό στις δύο αυτές μεθόδους είναι ότι και οι δύο αφορούν σε ολοκληρωτικές εξισώσεις. Αντίθετα στο Παράδειγμα Γ2.4.3.2 πιο κάτω θα δούμε ότι η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων δεν είναι εφαρμόσιμη για την επίλυση της παρούσας ολοκληρωτικής εξισώσεως (2.3.25) και θα κάνουμε διάφορες σχετικές παρατηρήσεις. Προς το παρόν όμως ας προχωρήσουμε σε ένα ακόμη (αλλά κάπως λιγότερο απλό) παράδειγμα ολοκληρωτικής εξισώσεως με διαχωρίσιμο πυρήνα. ▲

▼ **Παράδειγμα Γ2.3.2.3:** Σαν τρίτο (τελευταίο, αλλά τώρα κάπως λιγότερο απλό) παράδειγμα επιλύσεως ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm δευτέρου είδους με διαχωρίσιμο πυρήνα  $K(x, t)$  θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους

$$y(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 \cos(x+t)y(t) dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.3.29)$$

Βλέπουμε ότι η εξίσωση αυτή έχει τριγωνομετρικό πυρήνα που περιέχει τη συνημιτονική συνάρτηση  $\cos(x+t)$ . Για την εφαρμογή της μεθόδου των διαχωρίσιμων πυρήνων καταρχήν παρατηρούμε ότι πραγματικά ο πυρήνας  $K(x, t)$  είναι διαχωρίσιμος, επειδή

$$K(x, t) = -\frac{1}{3} \cos(x+t) = -\frac{1}{3} \cos x \cos t + \frac{1}{3} \sin x \sin t = \sum_{i=1}^2 L_i(x)M_i(t). \quad (2.3.30)$$

Άρα προφανώς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$L_1(x) = -\frac{1}{3} \cos x, \quad L_2(x) = \frac{1}{3} \sin x, \quad M_1(t) = \cos t, \quad M_2(t) = \sin t. \quad (2.3.31)$$

Είναι επομένως απόλυτα εφικτή η εφαρμογή της μεθόδου των διαχωρίσιμων πυρήνων με  $n = 2$  στο βασικό τύπο (2.3.1), ενώ είχαμε  $n = 1$  στα δύο προηγούμενα παραδείγματα: εδώ πρόκειται για μια αρκετά απλούστερη περίπτωση.

Με τον τρόπο αυτό το όλο πρόβλημα θα αναχθεί σε ένα σύστημα  $n = 2$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, στο σύστημα (2.3.19). Το σύστημα αυτό στην περίπτωσή μας (όπου  $n = 2$ ) γράφεται αναλυτικότερα και ως εξής:

$$\begin{aligned} c_1 + d_{11}c_1 + d_{12}c_2 &= g_1, \\ c_2 + d_{21}c_1 + d_{22}c_2 &= g_2 \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

ή και στην ισοδύναμη (κι ακόμη πιο απλή) μορφή

$$\begin{aligned} (1 + d_{11})c_1 + d_{12}c_2 &= g_1, \\ d_{21}c_1 + (1 + d_{22})c_2 &= g_2. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Καταρχήν, πριν επιλύσουμε το σύστημα αυτό (2.3.33), πρέπει βέβαια να υπολογίσουμε τις ποσότητες  $g_{1,2}$  στα δεξιά μέλη, δηλαδή το διάνυσμα στήλης  $\mathbf{G}$ . Το ίδιο πρέπει να κάνουμε και για τους συντελεστές  $d_{11}$ ,  $d_{12}$ ,  $d_{21}$  και  $d_{22}$  των άγνωστων ποσοτήτων  $c_1$  και  $c_2$  στα αριστερά μέλη. Πρέπει επίσης να γράψουμε και το αντίστοιχο μητρώο (τον πίνακα)  $\mathbf{D}$  σε συμφωνία και με τη μητρωϊκή μορφή (2.3.20) του ίδιου συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Αυτό είναι ένα αρκετά εύκολο καθήκον.

Πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε τους πρώτους από τους τύπους (2.3.17) χωρίς ασφαλώς να ξεχνάμε ότι  $f(x) = 1$  στην παρούσα ολοκληρωτική εξίσωση (2.3.29). Παίρνουμε επίσης υπόψη και τις εκφράσεις (2.3.31) των γνωστών συναρτήσεων  $L_{1,2}(x)$  και  $M_{1,2}(t)$ . Έτσι προκύπτει αμέσως ότι

$$\begin{aligned} g_1 &= \int_0^1 M_1(t) f(t) dt = \int_0^1 \cos t dt = \sin 1 = 0.8414709848, \\ g_2 &= \int_0^1 M_2(t) f(t) dt = \int_0^1 \sin t dt = 1 - \cos 1 = 0.4596976941. \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας και τους δεύτερους από τους τύπους (2.3.17), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} d_{11} &= \int_0^1 L_1(t) M_1(t) dt = -\frac{1}{3} \int_0^1 \cos^2 t dt = -\frac{1}{12} (2 + \sin 2) = -0.2424414522, \\ d_{12} &= \int_0^1 L_2(t) M_1(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 \sin t \cos t dt = \frac{1}{6} \sin^2 1 = 0.1180122364, \\ d_{21} &= \int_0^1 L_1(t) M_2(t) dt = -\frac{1}{3} \int_0^1 \cos t \sin t dt = -\frac{1}{6} \sin^2 1 = -0.1180122364, \\ d_{22} &= \int_0^1 L_2(t) M_2(t) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 \sin^2 t dt = \frac{1}{12} (2 - \sin 2) = 0.0908918811. \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

Επομένως το σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (2.3.32) ή μάλλον (2.3.33), το οποίο πρέπει να επιλύσουμε, παίρνει τώρα τη μορφή

$$\begin{aligned} 0.7575585478 c_1 + 0.1180122364 c_2 &= 0.8414709848, \\ -0.1180122364 c_1 + 1.0908918811 c_2 &= 0.4596976941. \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

Πρόκειται για ένα πολύ απλό σύστημα δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με δύο αγνώστους: τους ζητούμενους συντελεστές  $c_1$  και  $c_2$ . Η λύση του είναι

$$c_1 = 1.0278012682, \quad c_2 = 0.5325833205. \quad (2.3.37)$$

Άρα η λύση  $y(x)$  της προς επίλυση ολοκληρωτικής εξισώσεως Fredholm δευτέρου είδους (2.3.29) προσδιορίζεται πλέον αμέσως από τον τύπο (2.3.14) με

$$f(x) = 1, \quad L_1(x) = -\frac{1}{3} \cos x, \quad L_2(x) = \frac{1}{3} \sin x \quad (2.3.38)$$

βάσει και των τύπων (2.3.31). Προκύπτει έτσι ότι η λύση  $y(x)$  αυτής της ολοκληρωτικής εξισώσεως είναι η εξής:

$$y(x) = 1 + 0.3426004227 \cos x - 0.1775277735 \sin x. \quad (2.3.39)$$

Ας σημειωθεί ότι η λύση αυτή είναι η ακριβής (όχι προσεγγιστική) λύση της ολοκληρωτικής εξισώσεως (2.3.29). Μόνη προσέγγιση σ' αυτήν αποτελεί η χρήση δεκαδικών αριθμών, που περιέχουν το συνηθισμένο σφάλμα στρογγυλεύσεως. Είναι επίσης προφανές ότι η ίδια λύση (2.3.39) αποτελεί και τη μοναδική λύση της παρούσας ολοκληρωτικής εξισώσεως (2.3.29). Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι το πιο πάνω σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (2.3.32) (ισοδύναμα (2.3.33))



στην τελική μορφή του (2.3.36) έχει ορίζουσα των συντελεστών του  $\Delta$  διάφορη του μηδενός:  $\Delta \neq 0$ . Κατά συνέπεια έχει μία και μόνο μία λύση: τη λύση (2.3.37). ▲

Θα προχωρήσουμε τώρα (στη επόμενη Ενότητα Γ2.4) σε μια άλλη και πιο γενική μάλιστα μέθοδο επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων: στη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Σε αντίθεση όμως με τη μέθοδο των διαχωρίσιμων πυρήνων, η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι μια προσεγγιστική (και όχι ακριβής) μέθοδος επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων.

## Γ2.4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΔΙΑΔΟΧΙΚΩΝ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ

### Γ2.4.1. Περιγραφή της μεθόδου

Η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι μια πάρα πολύ απλή μέθοδος, που μπορεί πολλές φορές να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία για την προσεγγιστική επίλυση μη ομογενών ολοκληρωτικών εξισώσεων δευτέρου είδους είτε Fredholm είτε Volterra. Συνήθως οι εξισώσεις αυτές είναι γραμμικές, αλλά μπορούν καταρχήν να είναι και μη γραμμικές. Ας εξετάσουμε αρχικά τη γραμμική και μη ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους της μορφής

$$y(x) + \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.4.1)$$

στο διάστημα  $[a, b]$ . Γνωστές συναρτήσεις είναι ο πυρήνας  $K(x, t)$  στο ολοκλήρωμα καθώς και η συνάρτηση  $f(x)$  στο δεξιό μέλος. Άγνωστη συνάρτηση είναι η συνάρτηση  $y(x)$ . Καταρχήν έχουμε βέβαια τη δυνατότητα να ξαναγράψουμε την ίδια ολοκληρωτική εξίσωση με τον ολοκληρωτικό όρο στο δεξιό μέλος της, οπότε παίρνουμε

$$y(x) = f(x) - \int_a^b K(x, t) y(t) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (2.4.2)$$

Η παραπέρα σκέψη στη μέθοδο είναι αρκετά απλή. Υποθετικά, αν η συνάρτηση  $y(x)$  (που γράφεται και σαν  $y(t)$ ) στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους ήταν γνωστή (όπως ήδη είναι γνωστός ο πυρήνας  $K(x, t)$ ), τότε ο πιο πάνω τύπος (2.4.2) θα μας έδινε αμέσως τη ζητούμενη άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$ . Δυστυχώς όμως η συνάρτηση  $y(x)$  δεν είναι γνωστή, οπότε αναγκαζόμαστε να την «προσεγγίσουμε» με μια γνωστή συνάρτηση. Πολλές φορές η αρχική αυτή προσέγγιση μπορεί να μην είναι καθόλου καλή, γι' αυτό βάλουμε και τα εισαγωγικά στη λέξη «προσεγγίσουμε». Πιο συγκεκριμένα μια εξαιρετικά απλή αρχική προσέγγιση, που την καλούμε συνήθως  $y_0(x)$ , θα μπορούσε να είναι η μηδενική συνάρτηση

$$y_0(x) = 0. \quad (2.4.3)$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τον τύπο (2.4.2) και θέτουμε στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους του τη μηδενική αυτή συνάρτηση  $y_0(x) = 0$  σαν τη συνάρτηση  $y(x)$ , πιο συγκεκριμένα τη συνάρτηση  $y(t)$  στο ολοκλήρωμα. Βρίσκουμε έτσι μια μάλλον καλύτερη επόμενη προσέγγιση της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$ , δηλαδή τη συνάρτηση

$$y_1(x) = f(x). \quad (2.4.4)$$

Τη νέα αυτή προσέγγιση την εισάγουμε και πάλι στο δεξιό μέλος του τύπου (2.4.2), για να πάρουμε μια ακόμη καλύτερη (σε πάρα πολλές περιπτώσεις) προσέγγιση της αληθινής λύσεως  $y(x)$ , τη συνάρτηση

$$y_2(x) = f(x) - \int_a^b K(x, t) y_1(t) dt. \quad (2.4.5)$$

Συνεχίζουμε με όμοιο τρόπο. Γενικά η  $n$ στή προσέγγιση  $y_n(x)$  της αληθινής λύσεως  $y(x)$  της ολοκληρωτικής εξισώσεως (2.4.1) (ή, ισοδύναμα, (2.4.2)) ορίζεται μέσω του επαναληπτικού τύπου

$$y_n(x) = f(x) - \int_a^b K(x, t) y_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.4.6)$$

με αρχική προσέγγιση τη μηδενική συνάρτηση  $y_0(x) = 0$ . Μπορεί βέβαια να χρησιμοποιηθεί αντί της μηδενικής συναρτήσεως και όποια άλλη συνάρτηση  $y_0(x)$  κρίνει καταλληλότερη ο Πολιτικός Μηχανικός σε μια συγκεκριμένη ολοκληρωτική εξίσωσή του και θέλει να τη δοκιμάσει σαν αρχική προσέγγιση. Πάρα πολύ συχνά σαν αρχική προσέγγιση  $y_0(x)$  επιλέγεται η γνωστή συνάρτηση  $f(x)$ , δηλαδή η συνάρτηση  $y_1(x)$  στον τύπο (2.4.4). Βέβαια δεν υπάρχει έτσι κανένα ουσιαστικό κέρδος στην όλη διαδικασία σε σύγκριση με τη μηδενική αρχική προσέγγιση  $y_0(x) = 0$ .

Με τον τρόπο αυτό δημιουργείται μια ακολουθία συναρτήσεων, η ακολουθία

$$y_0(x), y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots, y_{n-1}(x), y_n(x), \dots \quad (2.4.7)$$

Υπό κατάλληλες συνθήκες (οι οποίες δεν ισχύουν πάντοτε) η ακολουθία αυτή προσεγγίζει όλο και καλύτερα την αληθινή λύση  $y(x)$  της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.4.1). Συγκεκριμένα για  $n \rightarrow \infty$

$$y_n(x) \rightarrow y(x) \quad \text{για } n \rightarrow \infty \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x) \quad (2.4.8)$$

για κάθε τιμή του  $x$  με  $a \leq x \leq b$ . Με άλλα λόγια το σφάλμα της προσεγγίσεως, δηλαδή η διαφορά  $y(x) - y_n(x)$ , τείνει στο μηδέν καθώς ο δείκτης  $n \rightarrow \infty$ . Ισοδύναμα σε ολόκληρο το διάστημα ολοκληρώσεως  $[a, b]$  στην ολοκληρωτική μας εξίσωση (2.4.1) ισχύει ότι

$$\|y - y_n\|_\infty := \max_{a \leq x \leq b} |y(x) - y_n(x)| \rightarrow 0 \quad \text{για } n \rightarrow \infty. \quad (2.4.9)$$

Ας σημειωθεί ότι ο συμβολισμός  $\|y - y_n\|_\infty$  στο παραπάνω όριο (2.4.9) δηλώνει απλά τη μέγιστη τιμή που ακολουθεί στο ίδιο όριο. Επομένως ο συμβολισμός αυτός δεν πρέπει να μας απασχολήσει ιδιαίτερα: είναι απλά ένας χρήσιμος συμβολισμός. Στη Θεωρία Προσεγγίσεως ο ίδιος συμβολισμός καλείται **μέγιστη** (ή μερικές φορές **ομοιόμορφη**) **νόρμα**. Εν προκειμένω χρησιμοποιούμε αυτήν τη μέγιστη (ή ομοιόμορφη) νόρμα για τη συνάρτηση σφάλματος  $\varepsilon_n(x) := y(x) - y_n(x)$ .

Αυτό που πρέπει οπωσδήποτε πάντως να τονισθεί είναι ότι η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων  $y_n(x)$  που έχει περιγραφεί πιο πάνω δε συγκλίνει πάντοτε στην άγνωστη λύση  $y(x)$  της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.4.1). Εντούτοις συγκλίνει αρκετές φορές, ιδίως μάλιστα συγκλίνει, εάν ο πυρήνας  $K(x, t)$  στην ολοκληρωτική αυτή εξίσωση είναι αρκετά μικρός. Στην περίπτωση αυτή το σφάλμα της  $n - 1$  προσεγγίσεως  $y_{n-1}(x)$  δε θα επηρεάζει έντονα την επόμενη προσέγγιση  $y_n(x)$ , επειδή θα πολλαπλασιάζεται επί έναν αρκετά μικρό πυρήνα  $K(x, t)$ . Περισσότερες λεπτομέρειες για τη σύγκλιση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων θα αναφερθούν στην επόμενη Παράγραφο Γ2.4.2.

Εν πάση περιπτώσει, εάν η πιο πάνω ακολουθία (2.4.7) των συναρτήσεων  $y_n(x)$  συγκλίνει (καθώς ο δείκτης  $n \rightarrow \infty$ ) σε μια συγκεκριμένη συνάρτηση, ας την αποκαλέσουμε  $y_\infty(x)$ , τότε θα ασφαλώς θα έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(x) = y_\infty(x). \quad (2.4.10)$$

Όμως από την άλλη πλευρά ο τύπος (2.4.6) για την επαναληπτική διαδικασία δημιουργίας της ακολουθίας των προσεγγίσεων  $y_n(x)$  παίρνει για  $n \rightarrow \infty$  (όπως μπορεί να αποδειχθεί μαθηματικά) τη μορφή

$$y_\infty(x) = f(x) - \int_a^b K(x, t) y_\infty(t) dt. \quad (2.4.11)$$

Η μορφή αυτή ισχύει λόγω και της υποθέσεως υπάρξεως του ορίου  $y_\infty(x)$  στην ακολουθία των συναρτήσεων  $y_n(x)$  για  $n \rightarrow \infty$ , μια υπόθεση που ήδη υιοθετήθηκε.

Συγκρίνουμε τώρα τις εξισώσεις (2.4.2), δηλαδή την απόλυτα ισοδύναμη μορφή της αρχικής ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm (2.4.1), και (2.4.11), δηλαδή την οριακή μορφή (για  $n \rightarrow \infty$ ) του επαναληπτικού τύπου (2.4.6) στη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Έτσι διαπιστώνουμε

άμεσα ότι η συνάρτηση  $y_\infty(x)$  στο όριο (2.4.10) είναι πράγματι λύση της μη ομογενούς γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm δευτέρου είδους (2.4.2), ισοδύναμα (2.4.1). Και μάλιστα μια τέτοια εξίσωση Fredholm έχει συνήθως μόνο μία λύση (με την ολοκληρωτική εξίσωση να μη συνοδεύεται από αρχικές συνθήκες αντίθετα με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις). Επομένως εύλογα συνάγεται το συμπέρασμα ότι η συνάρτηση  $y_\infty(x)$ , δηλαδή το όριο για  $n \rightarrow \infty$  στην ακολουθία των συναρτήσεων (2.4.7), είναι πραγματικά η ζητούμενη λύση  $y(x)$  της αρχικής ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.4.1) ή (2.4.2).

Αντίθετα, εάν η ίδια ακολουθία συναρτήσεων  $y_n(x)$  δε συγκλίνει σε μια συνάρτηση  $y_\infty(x)$ , τότε η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων έχει αποτύχει. Πρέπει τότε να εφαρμοσθεί κάποια εναλλακτική μέθοδος επίλυσης της αρχικής ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.4.1). Τέτοια εναλλακτική μέθοδος είναι, π.χ., η πιο γενική μέθοδος της αριθμητικής ολοκληρώσεως, η οποία θα εξετασθεί στην επόμενη Ενότητα Γ2.5. Σε ειδικές περιπτώσεις μπορούν επίσης να εφαρμοσθούν και ειδικές μέθοδοι επίλυσης, όπως αυτές των Ενοτήτων Γ2.1, Γ2.2 και Γ2.3, που ήδη εξετάστηκαν.

Η σύγκλιση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων θα εξετασθεί σύντομα στην επόμενη Παράγραφο Γ2.4.2. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης/η ενδιαφερόμενη αναγνώστρια Πολιτικός Μηχανικός μπορεί επίσης να ανατρέξει (για πολύ περισσότερες λεπτομέρειες) και στη σχετική πλούσια βιβλιογραφία. Πολύ σχετικές είναι και οι τόσο διάσημες σειρές Neumann. Αυτές όμως θα παραλειφθούν λόγω του μάλλον θεωρητικού ενδιαφέροντός τους.

Όλα αυτά που ήδη αναφέρθηκαν για τις μη ομογενείς γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm δευτέρου είδους ως προς τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων ισχύουν και για τις αντίστοιχες ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra. Η μόνη διαφορά έγκειται στο γεγονός ότι το πάνω όριο ολοκληρώσεως  $b$  είναι τώρα πια μεταβλητό,  $x$ , και όχι σταθερό.

Ακόμη πιο πέρα η παρούσα μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων, την οποία ήδη περιγράψαμε συνοπτικά, είναι εφαρμόσιμη (και συχνά συγκλίνει) ακόμη και στην περίπτωση μη γραμμικών, μη ομογενών ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm (ή και Volterra) δευτέρου είδους. Οι εξισώσεις αυτές Fredholm έχουν τη γενική μορφή

$$y(x) + \int_a^b K(x, t, y(t)) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (2.4.12)$$

(Ανάλογη είναι η μορφή των αντίστοιχων εξισώσεων Volterra.) Ισοδύναμη μορφή για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm είναι και η ακόλουθη:

$$y(x) = f(x) - \int_a^b K(x, t, y(t)) dt, \quad a \leq x \leq b. \quad (2.4.13)$$

Τώρα η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων (2.4.6) παίρνει προφανώς την τροποποιημένη μορφή

$$y_n(x) = f(x) - \int_a^b K(x, t, y_{n-1}(t)) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4.14)$$

με κατάλληλη αρχική υπόθεση για τη συνάρτηση  $y_0(x)$ , π.χ.  $y_0(x) = 0$ . Παρουσιάζεται επομένως στις μη γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις πλήρης αναλογία με όσα ήδη αναφέρθηκαν, επαναληπτικός τύπος (2.4.6), για την περίπτωση των γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Ασφαλώς βέβαια η ανάλυση της συγκλίσεως της μεθόδου για τη γραμμική περίπτωση, που θα περιγραφεί στην επόμενη Παράγραφο Γ2.4.2, θα πρέπει να γενικευθεί κατάλληλα, έτσι ώστε να ισχύει και για τη μη γραμμική περίπτωση, που δε θα μας απασχολήσει περισσότερο. Απλά θελήσαμε να τονίσουμε τη γενικότητα της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων (σε πλήρη αντίθεση π.χ. με τις μεθόδους του μετασχηματισμού Laplace και των διαχωρίσιμων πυρήνων) όσον αφορά στην εφαρμοσιμότητά της και σε μη γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις.

Ας σημειωθεί τέλος και το γεγονός της εξαιρετικής προγραμματιστικής απλότητας (π.χ. μια γραμμή προγράμματος συνήθως αρκεί στη *Mathematica* ή στη *Maxima*) για τον προγραμματισμό

της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων. Η μέθοδος αυτή βασίζεται βέβαια στην αρχική και συνήθως μηδενική «προσέγγιση» (2.4.3),  $y_0(x) = 0$ , και στον επαναληπτικό τύπο (2.4.6) για τη γραμμική περίπτωση ή στον αντίστοιχο (γενικευμένο) τύπο (2.4.14) για τη μη γραμμική περίπτωση.

### Γ2.4.2. Σύγκλιση της μεθόδου

Στην παράγραφο αυτή θα διερευνήσουμε τη σύγκλιση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων (2.4.6) στη μονοδιάστατη γραμμική περίπτωση τόσο για ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm όσο και για ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra. (Υπενθυμίζεται ότι οι εξισώσεις Volterra έχουν διάστημα ολοκληρώσεως το διάστημα  $[a, x]$  αντί για το διάστημα  $[a, b]$  που ισχύει στις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm.) Για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm θα αποδείξουμε ότι για συνεχείς (άρα και φραγμένες) γνωστές συναρτήσεις  $f(x)$  και  $K(x, t)$  στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.4.1) μια προκύπτουσα ανισοτική συνθήκη αποτελεί ικανή συνθήκη συγκλίσεως της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων. (Εντούτοις αυτή η ανισοτική συνθήκη δεν είναι και αναγκαία: είναι μόνο ικανή.) Αντίθετα για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra ισχύει πάντοτε η σύγκλιση της ίδιας μεθόδου. Πρόκειται για μια κλασική και αρκετά ενδιαφέρουσα διερεύνηση, όχι μάλιστα ιδιαίτερα δύσκολη. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης/η ενδιαφερόμενη αναγνώστρια Πολιτικός Μηχανικός μπορεί να ανατρέξει για περισσότερες λεπτομέρειες και γενικεύσεις (π.χ. τη γενίκευση στις μη γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις) στη σχετική βιβλιογραφία.

#### Γ2.4.2.1. Ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm

Για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm ισχύει ο επαναληπτικός τύπος (2.4.6), δηλαδή ο εξής τύπος:

$$y_n(x) = f(x) - \int_a^b K(x, t) y_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4.15)$$

Επιλέγοντας τη μηδενική αρχική προσέγγιση, έχουμε επίσης από τον τύπο αυτό

$$y_0(x) = 0 \implies y_1(x) = f(x). \quad (2.4.16)$$

Ανεξάρτητα από τους τύπους αυτούς ισχύει επίσης η προφανής σχέση

$$\begin{aligned} y_n(x) &= y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + [y_2(x) - y_1(x)] + \dots \\ &\quad + [y_k(x) - y_{k-1}(x)] + \dots + [y_n(x) - y_{n-1}(x)] \\ &= \sum_{k=1}^n [y_k(x) - y_{k-1}(x)]. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

Στη σχέση αυτή πήραμε επίσης υπόψη την υπόθεση ότι  $y_0(x) = 0$ .

Από την άλλη πλευρά, εφαρμόζοντας τον επαναληπτικό τύπο (2.4.15) με  $n - 1$  αντί για  $n$  και επίσης με το ίδιο το  $n$  (ο αρχικός τύπος) παίρνουμε

$$\begin{aligned} y_{n-1}(x) &= f(x) - \int_a^b K(x, t) y_{n-2}(t) dt, \quad n = 2, 3, \dots, \\ y_n(x) &= f(x) - \int_a^b K(x, t) y_{n-1}(t) dt, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

αντίστοιχα. Αφαιρώντας την πρώτη από τις σχέσεις αυτές από τη δεύτερη, προκύπτει κι ο εξής κάπως συνθετότερος επαναληπτικός τύπος, όπου πλέον δεν παρουσιάζεται, έχει απαλειφθεί η γνωστή συνάρτηση  $f(x)$ :

$$y_n(x) - y_{n-1}(x) = - \int_a^b K(x, t) [y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)] dt, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.4.19)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου  $n = 2$ , ο τελευταίος αυτός τύπος απλοποιείται στη μορφή

$$y_2(x) - y_1(x) = - \int_a^b K(x, t) [y_1(t) - y_0(t)] dt = - \int_a^b K(x, t) f(t) dt \quad (2.4.20)$$

λόγω και των σχέσεων (2.4.16).

Υποθέτουμε τώρα τις δύο γνωστές συναρτήσεις  $f(x)$  και  $K(x, t)$  συνεχείς στο διάστημα  $[a, b]$ . Άρα είναι και φραγμένες στο ίδιο διάστημα. Συμβολίζουμε τα ελάχιστα άνω φράγματα των απολύτων τιμών τους (στο διάστημα αυτό  $[a, b]$ ) με  $F$  και  $M$  αντίστοιχα, πιο συγκεκριμένα,

$$|f(x)| \leq F, \quad |K(x, t)| \leq M \quad \text{με} \quad a \leq x \leq b, \quad a \leq t \leq b. \quad (2.4.21)$$

Τότε οι σχέσεις (2.4.16) μας δίνουν την ανισότητα

$$|y_1(x) - y_0(x)| = |f(x)| \leq F. \quad (2.4.22)$$

Στη συνέχεια ο γενικός τύπος (2.4.19) με εφαρμογή του για  $n = 2, 3, 4, \dots$  μας δίνει διαδοχικά (με την προϋπόθεση ότι  $a < b$ ) τις εξής προφανείς ανισότητες:

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &\leq \int_a^b |K(x, t)| |y_1(t) - y_0(t)| dt \leq (b - a)MF = F[(b - a)M], \\ |y_3(x) - y_2(x)| &\leq \int_a^b |K(x, t)| |y_2(t) - y_1(t)| dt \leq (b - a)M[(b - a)MF] = F[(b - a)M]^2, \\ &\dots \\ |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &\leq \int_a^b |K(x, t)| |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| dt \\ &\leq (b - a)M \{F[(b - a)M]^{n-2}\} = F[(b - a)M]^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

Ουσιαστικά πρόκειται για μια επαγωγική διαδικασία, όπου η κάθε μια ανισότητα προκύπτει από την προηγούμενη της με τη χρήση επίσης των άνω φραγμάτων (2.4.21). Ειδικά η πρώτη από τις ανισότητες αυτές (για  $n = 2$ ) προέκυψε βάσει της σχέσεως (2.4.22). Εισάγοντας μάλιστα και την ποσότητα

$$\rho := (b - a)M, \quad (2.4.24)$$

με βάση τις πιο πάνω ανισότητες, (2.4.22) και (2.4.23), έχουμε γενικά ότι

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq F\rho^{n-1} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4.25)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να χρησιμοποιήσουμε και τη σχέση (2.4.17). Από τη σχέση αυτή προκύπτει ευχερώς ότι

$$|y_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n |y_k(x) - y_{k-1}(x)|. \quad (2.4.26)$$

Στη συνέχεια λόγω του ορισμού (2.4.24) για τη σταθερά  $\rho$  καθώς και των ανισοτήτων (2.4.25) προκύπτει επίσης ότι

$$|y_n(x)| \leq F \sum_{k=1}^n \rho^{k-1} = F \sum_{m=0}^{n-1} \rho^m \quad (2.4.27)$$

με  $m = k - 1$ . Συνεπώς οι όροι της σειράς (του αθροίσματος (2.4.17) για  $n \rightarrow \infty$ )

$$y_\infty(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [y_k(x) - y_{k-1}(x)] \quad (2.4.28)$$

είναι φραγμένοι κατ' απόλυτο τιμή από τους αντίστοιχους όρους της γνωστής γεωμετρικής σειράς

$$S = F \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{k-1} = F \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m. \quad (2.4.29)$$

Άρα η σειρά (2.4.28) για τη συνάρτηση  $y_{\infty}(x)$  δεσπόζεται (κατ' απόλυτο τιμή) από τη σειρά (2.4.29): τη σειρά  $S$ . Όμως η σειρά  $S$  είναι μια συγκλίνουσα αριθμητική σειρά με άθροισμα

$$S = \frac{F}{1 - \rho}, \quad (2.4.30)$$

εάν

$$\rho := (b - a)M < 1 \quad (\text{ικανή συνθήκη συγκλίσεως}), \quad (2.4.31)$$

και μια αποκλίνουσα αριθμητική σειρά (με άθροισμα  $S = \infty$ ) στην αντίθετη περίπτωση:  $\rho \geq 1$ .

Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο της συγκρίσεως για σειρές, μια ικανή συνθήκη υπάρξεως της οριακής συναρτήσεως  $y_{\infty}(x)$ , που ισούται με τη σειρά (2.4.28), είναι η ισχύς της πιο πάνω ικανής συνθήκης συγκλίσεως (2.4.31). Αντίθετα, εάν η συνθήκη αυτή δεν ισχύει (δηλαδή  $\rho \geq 1$ ), τότε η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων που εξετάζουμε για ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm δευτέρου είδους μπορεί είτε να συγκλίνει είτε να αποκλίνει. Ασφαλώς μπορεί να παρουσιάζεται και απόκλιση, επειδή η γεωμετρική σειρά  $S$  στη σχέση (2.4.29), που δεσπόζει (απόλυτα) της σειράς (2.4.28), είναι τώρα πια αποκλίνουσα. Πρόκειται επομένως για ικανή, αλλ' όχι και αναγκαία συνθήκη συγκλίσεως και μάλιστα απόλυτης και ομοιομόρφης συγκλίσεως, γιατί οι όροι  $\rho^{k-1}$  της γεωμετρικής σειράς  $S$  στη σχέση (2.4.29) είναι ανεξάρτητοι από τη μεταβλητή  $x$  (με  $a \leq x \leq b$ ).

Πρακτικά θεωρούμε καταρχήν δεδομένο το διάστημα ολοκληρώσεως  $[a, b]$ . Τότε η ικανή συνθήκη συγκλίσεως (2.4.31) την οποία βρήκαμε ορίζει ότι το ελάχιστο άνω φράγμα  $M$  της απολύτου τιμής  $|K(x, t)|$  του πυρήνα  $K(x, t)$  δεν πρέπει να υπερβαίνει την ποσότητα  $1/(b - a)$ . Δηλαδή σε ολόκληρη την περιοχή  $[a, b] \times [a, b]$  το φράγμα αυτό  $M$  δε μπορεί να είναι μεγαλύτερο από το αντίστροφο του μήκους  $b - a$  του διαστήματος ολοκληρώσεως  $[a, b]$ . Έτσι θα έχουμε σίγουρη σύγκλιση. Στην περίπτωση αυτή η σύγκλιση της μεθόδου για ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm είναι βέβαιη και πρόκειται μάλιστα για απόλυτη και ομοιόμορφη σύγκλιση. Διαφορετικά είναι αβέβαιη, δηλαδή μπορεί να έχουμε είτε σύγκλιση είτε απόκλιση και το παρόν κριτήριο αποτυγχάνει να μας δώσει μια συγκεκριμένη απάντηση. Ας σημειωθεί τέλος ότι το ελάχιστο άνω φράγμα  $F$  της απολύτου τιμής  $|f(x)|$  της γνωστής συναρτήσεως  $f(x)$  δεν υπεισέρχεται καθόλου στο παρόν κριτήριο συγκλίσεως (2.4.31).

Ένα τελευταίο βήμα αφορά στην εύρεση φράγματος (σε περίπτωση συγκλίσεως) για την απόλυτο τιμή της διαφοράς (του σφάλματος της προσεγγίσεως)

$$\varepsilon_n(x) := y(x) - y_n(x) = y_{\infty}(x) - y_n(x). \quad (2.4.32)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.4.17), διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$\varepsilon_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [y_k(x) - y_{k-1}(x)] - \sum_{k=1}^n [y_k(x) - y_{k-1}(x)] = \sum_{k=n+1}^{\infty} [y_k(x) - y_{k-1}(x)]. \quad (2.4.33)$$

Άρα με τη χρήση και απολύτων τιμών καθώς και της ανισότητας (2.4.25) παίρνουμε την ανισότητα

$$|\varepsilon_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq F \sum_{k=n+1}^{\infty} \rho^{k-1} = F \rho^n \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m = \frac{F \rho^n}{1 - \rho} \quad (2.4.34)$$

με  $m = k - n - 1$ . Η ανισότητα αυτή μας επιτρέπει την εκτίμηση του σφάλματος  $\varepsilon_n(x)$  και μάλιστα κατ' απόλυτο τιμή. Εάν ισχύει η ικανή συνθήκη συγκλίσεως  $\rho < 1$ , όπως ήδη υποθέσαμε, τότε ασφαλώς το σφάλμα αυτό  $\varepsilon_n(x)$  τείνει κατ' απόλυτο τιμή,  $|\varepsilon_n(x)|$ , στο μηδέν για  $n \rightarrow \infty$ . Αυτό θα συμβαίνει, γιατί τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^n = 0$ .

Θα προχωρήσουμε τώρα στις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra. Γι' αυτές όμως είναι αναγκαίες ορισμένες τροποποιήσεις της πιο πάνω διαδικασίας, ώστε να αποδεικνύεται η σχετική σύγκλιση. Η σύγκλιση αυτή μάλιστα, όπως θα δούμε, ισχύει γενικά: χωρίς περιορισμούς.

### Γ2.4.2.2. Ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra

Στην περίπτωση των ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra το διάστημα ολοκλήρωσεως είναι το  $[a, x]$  αντί του  $[a, b]$  στις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm. Δηλαδή τη θέση του πάνω ορίου ολοκλήρωσεως  $b$  παίρνει τώρα η κύρια μεταβλητή  $x$  (η ανεξάρτητη μεταβλητή) της ολοκληρωτικής εξισώσεως με  $a \leq x \leq b$ . Με τον τρόπο αυτό ο βασικός επαναληπτικός τύπος (2.4.15) παίρνει τώρα τη μορφή

$$y_n(x) = f(x) - \int_a^x K(x, t) y_{n-1}(t) dt \quad \mu\epsilon \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4.35)$$

Ακολουθούμε ακριβώς τον ίδιο τρόπο εργασίας όπως και προηγουμένως για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm, τώρα όμως συνεχώς με το  $x$  αντί για το  $b$  σαν πάνω όριο ολοκλήρωσεως. Με την ισχύ των ανισοτήτων (φραγμάτων) (2.4.21) και της σχέσεως (2.4.22) παρατηρούμε πως οι ανισότητες (2.4.23) τροποποιούνται ως εξής:

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &\leq \int_a^x |K(x, t)| |y_1(t) - y_0(t)| dt \leq \int_a^x MF dt = FM(x - a), \\ |y_3(x) - y_2(x)| &\leq \int_a^x |K(x, t)| |y_2(t) - y_1(t)| dt \leq \int_a^x M[FM(t - a)] dt \\ &= FM^2 \int_a^x (t - a) dt = F \frac{[M(x - a)]^2}{2!}, \\ &\dots \\ |y_n(x) - y_{n-1}(x)| &\leq \int_a^x |K(x, t)| |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| dt \leq \int_a^x M \left\{ F \frac{[M(t - a)]^{n-2}}{(n - 2)!} \right\} dt \\ &= F \frac{M^{n-1}}{(n - 2)!} \int_a^x (t - a)^{n-2} dt = F \frac{M^{n-1}}{(n - 2)!} \frac{(x - a)^{n-1}}{n - 1} \\ &= F \frac{[M(x - a)]^{n-1}}{(n - 1)!}. \end{aligned} \quad (2.4.36)$$

Άρα αποδείχθηκε (ουσιαστικά επαγωγικά και πάλι) ότι ισχύει γενικά η ανισότητα

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq F \frac{[M(x - a)]^{n-1}}{(n - 1)!}. \quad (2.4.37)$$

Κατά συνέπεια ανάλογα με προηγουμένως για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm διαπιστώνουμε και τώρα ότι οι όροι της σειράς (2.4.17) είναι φραγμένοι (απόλυτα) από τους αντίστοιχους όρους της σειράς Maclaurin της εκθετικής συναρτήσεως  $e^{M(x-a)}$ . Αυτή όμως η σειρά συγκλίνει για κάθε τιμή του  $x$ . Επομένως και πάλι σύμφωνα με το κριτήριο της συγκρίσεως στις σειρές και η σειρά (2.4.17) συγκλίνει και αυτή απόλυτα για κάθε τιμή του  $x$ . Η σύγκλιση αυτή ισχύει μάλιστα ανεξάρτητα από τις τιμές  $F$  και  $M$  των άνω φραγμάτων (2.4.21). Υποθέτοντας επιπλέον ότι  $a \leq x \leq b$ , όπως πράγματι συμβαίνει για κάποια σταθερή τιμή του  $b$ , μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε επίσης (επειδή  $x - a \leq b - a$ ) ότι η ίδια σύγκλιση είναι και ομοιόμορφη.

Με τον τρόπο αυτό οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra αποτελούν καλύτερο πεδίο πιθανής εφαρμογής της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων σε σύγκριση με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm. Αυτό συμβαίνει, επειδή, όπως ήδη είδαμε, στις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm έχουμε μεν την ικανή συνθήκη συγκλίσεως (2.4.31), αλλ' όχι όμως και βέβαιη σύγκλιση σε κάθε

περίπτωση. Αντίθετα στις ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra έχουμε βέβαιη σύγκλιση υπό τη μοναδική προϋπόθεση ότι πάντοτε αναφερόμαστε σε συνεχείς, επομένως και φραγμένες, γνωστές συναρτήσεις  $f(x)$  και  $K(x, t)$ .

Ας σημειωθεί τέλος ότι όσον αφορά στο σφάλμα  $\varepsilon_n(x)$  της  $n$ σής προσεγγίσεως, που δίνεται από τον τύπο (2.4.32), αυτό είναι φραγμένο (κατ' απόλυτο τιμή) ως εξής:

$$\begin{aligned}
 |\varepsilon_n(x)| &= |y_\infty(x) - y_n(x)| \\
 &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k(x) - y_{k-1}(x)| \\
 &\leq F \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{[M(x-a)]^{k-1}}{(k-1)!} \\
 &= F \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[M(x-a)]^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{[M(x-a)]^{k-1}}{(k-1)!} \right] \\
 &= F \left[ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[M(x-a)]^j}{j!} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{[M(x-a)]^j}{j!} \right] \\
 &= F \left[ e^{M(x-a)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{[M(x-a)]^j}{j!} \right] \tag{2.4.38}
 \end{aligned}$$

με  $j = k - 1$ . Στην απόδειξη αυτή πήραμε υπόψη μας τις σχέσεις (2.4.33) και (2.4.37) καθώς και τη γνωστή σειρά Maclaurin της εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$ .

Στα τέσσερα παραδείγματα αμέσως πιο κάτω θα έχουμε την ευκαιρία να παρατηρήσουμε τη σύγκλιση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων σε τρία από αυτά και την απόκλιση της ίδιας μεθόδου σε ένα από αυτά. (Βέβαια στο παράδειγμα με απόκλιση της μεθόδου θα δούμε ότι έχουμε ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm.) Θα παρατηρήσουμε επίσης ότι σε ένα από τα παραδείγματα αυτά (και πάλι για ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm) παρουσιάζεται σύγκλιση της ίδιας μεθόδου έστω και χωρίς την ισχύ της ικανής συνθήκης συγκλίσεως (2.4.31). Τονίζεται και πάλι ότι η συνθήκη αυτή είναι ικανή συνθήκη συγκλίσεως, αλλ' όχι και αναγκαία. Επομένως είναι μια κάπως «συντηρητική» ικανή συνθήκη συγκλίσεως.

### Γ2.4.3. Παραδείγματα

▼ **Παράδειγμα Γ2.4.3.1:** Σαν πρώτο (και μάλιστα εξαιρετικά απλό) παράδειγμα θεωρούμε και πάλι την ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm (2.3.22)

$$y(x) - \int_0^1 x^2 t^5 y(t) dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{2.4.39}$$

Την εξίσωση αυτή τη λύσαμε ήδη στο Παράδειγμα Γ2.3.2.1 της Ενότητας Γ2.3 με τη μέθοδο των διαχωρίσιμων πυρήνων. Στο παρόν παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε την εναλλακτική μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Συγκεκριμένα θα δημιουργήσουμε μια συγκλίνουσα ακολουθία συναρτήσεων  $y_n(x)$ , που να προσεγγίζει τη λύση  $y(x)$  της ολοκληρωτικής αυτής εξίσωσης και να τείνει σ' αυτή για  $n \rightarrow \infty$ . Θα ξεκινήσουμε από τη μηδενική αρχική προσέγγιση (2.4.3), δηλαδή την προσέγγιση  $y_0(x) = 0$ , και θα προχωρήσουμε με τη χρήση του επαναληπτικού τύπου (2.4.6) για τη συγκεκριμένη ολοκληρωτική εξίσωση (2.4.39), δηλαδή του τύπου

$$y_n(x) = 1 + \int_0^1 x^2 t^5 y_{n-1}(t) dt \quad \text{με } n = 1, 2, \dots \tag{2.4.40}$$



Παρενθετικά σημειώνεται ότι η σύγκλιση, όπως εν προκειμένω για την παρούσα ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm (2.4.39), ή και η απόκλιση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων για κάποια άλλη ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της αρχικής προσεγγίσεως  $y_0(x)$ . Σημειώνεται επίσης ότι, όπως ήδη είδαμε, η σύγκλιση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι εξασφαλισμένη για κάθε συνηθισμένη ολοκληρωτική εξίσωση Volterra.

Χρησιμοποιώντας επομένως τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων στην ολοκληρωτική μας εξίσωση (2.4.39) παίρνουμε την εξής συγκλίνουσα ακολουθία συναρτήσεων  $y_n(x)$  για  $0 \leq n \leq 12$ :

$$\begin{aligned}
 y_0(x) &= 0, \\
 y_1(x) &= 1, \\
 y_2(x) &= 1 + \frac{1}{6}x^2 = 1 + 0.1666666667x^2, \\
 y_3(x) &= 1 + \frac{3}{16}x^2 = 1 + 0.1875000000x^2, \\
 y_4(x) &= 1 + \frac{73}{384}x^2 = 1 + 0.1901041667x^2, \\
 y_5(x) &= 1 + \frac{195}{1024}x^2 = 1 + 0.1904296875x^2, \\
 y_6(x) &= 1 + \frac{4681}{24576}x^2 = 1 + 0.1904703776x^2, \\
 y_7(x) &= 1 + \frac{12483}{65536}x^2 = 1 + 0.1904754639x^2, \\
 y_8(x) &= 1 + \frac{299593}{1572864}x^2 = 1 + 0.1904760997x^2, \\
 y_9(x) &= 1 + \frac{798915}{4194304}x^2 = 1 + 0.1904761791x^2, \\
 y_{10}(x) &= 1 + \frac{19173961}{100663296}x^2 = 1 + 0.1904761891x^2, \\
 y_{11}(x) &= 1 + \frac{51130563}{268435456}x^2 = 1 + 0.1904761903x^2, \\
 y_{12}(x) &= 1 + \frac{1227133513}{6442450944}x^2 = 1 + 0.1904761905x^2.
 \end{aligned} \tag{2.4.41}$$

Η σύγκλιση είναι προφανής από τα παραπάνω αποτελέσματα. Επιπλέον διαπιστώνουμε την ίδια σύγκλιση και από την κλειστή λύση (2.3.24) στο Παράδειγμα Γ2.3.2.1 της Ενότητας Γ2.3, η οποία συμφωνεί απόλυτα με την παρούσα προσεγγιστική λύση (2.4.41).

Ας σημειωθεί τέλος ότι όσον αφορά στην ικανή (αλλ' όχι και αναγκαία) συνθήκη συγκλίσεως (2.4.31) της Παραγράφου Γ2.4.2 για ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm, δηλαδή στη συνθήκη

$$(b - a)M < 1 \implies 1 \cdot \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq t \leq 1}} x^2 t^5 < 1 \implies 1 < 1, \tag{2.4.42}$$

αυτή δεν πληρούται: είναι ψευδής. Τούτο μάλιστα συμβαίνει, παρόλο που έχουμε αληθινή σύγκλιση στην ακολουθία των συναρτήσεων (2.4.41). Παρατηρούμε εντούτοις ότι η μη πλήρωση της συνθήκης αυτής (2.4.42) είναι κατά κάποιον τρόπο «οριακή»:  $1 < 1$ . Εν πάση περιπτώσει επαναλαμβάνουμε ότι η συνθήκη αυτή προέκυψε με συντηρητικό τρόπο, συγκεκριμένα χωρίς ακριβείς εξισώσεις, αλλά με πολύ συντηρητικά, όχι εξαιρετικά ακριβή, ανισοτικά φράγματα. Επομένως είναι εύλογο να έχουμε μερικές φορές σύγκλιση στη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων για

ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm έστω και χωρίς να πληρούται αυτή η ικανή (αλλά μη αναγκαία) συνθήκη συγκλίσεως. Το παρόν παράδειγμα αποτελεί μια τέτοια περίπτωση συγκλίσεως παρά τη μη πλήρωση της συνθήκης (2.4.42). Ακριβώς το αντίθετο (δηλαδή απόκλιση, όχι σύγκλιση) συμβαίνει, όπως θα δούμε, στο αμέσως επόμενο παράδειγμα. ▲

▼ **Παράδειγμα Γ2.4.3.2:** Σαν δεύτερο παράδειγμα (μάλλον αντιπαράδειγμα) θεωρούμε και την ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm (2.3.25)

$$y(x) + \int_{-1}^1 e^{x+2t} y(t) dt = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (2.4.43)$$

Θα δούμε ότι στην εξίσωση αυτή η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων αποτυγχάνει, δηλαδή δεν έχουμε σύγκλιση της ακολουθίας των συναρτήσεων  $y_n(x)$  σε μια συγκεκριμένη οριακή συνάρτηση  $y_\infty(x)$ . Αντίθετα θα παρατηρήσουμε την απόκλιση της ακολουθίας αυτής. Πιο συγκεκριμένα, ξεκινάμε και πάλι από τη μηδενική αρχική προσέγγιση (2.4.3). (Ας σημειωθεί και πάλι ότι η σύγκλιση ή η απόκλιση, όπως εν προκειμένω, της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι ανεξάρτητη από την επιλογή της αρχικής προσεγγίσεως  $y_0(x)$ .) Προχωράμε τώρα με τη χρήση του επαναληπτικού τύπου (2.4.6) για τη συγκεκριμένη ολοκληρωτική εξίσωση (2.4.43), δηλαδή του τύπου

$$y_n(x) = x^2 - \int_{-1}^1 e^{x+2t} y_{n-1}(t) dt \quad \mu\epsilon \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4.44)$$

Παίρνουμε έτσι την ακόλουθη αποκλίνουσα ακολουθία συναρτήσεων  $y_n(x)$  για  $0 \leq n \leq 12$ :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0, \\ y_1(x) &= x^2, \\ y_2(x) &= x^2 - 1.6781 e^x, \\ y_3(x) &= x^2 + 9.5292 e^x, \\ y_4(x) &= x^2 - 65.320 e^x, \\ y_5(x) &= x^2 + 434.56 e^x, \\ y_6(x) &= x^2 - 2903.9 e^x, \\ y_7(x) &= x^2 + 19393 e^x, \\ y_8(x) &= x^2 - 129517 e^x, \\ y_9(x) &= x^2 + 864988 e^x, \\ y_{10}(x) &= x^2 - 5.7769 \times 10^6 e^x, \\ y_{11}(x) &= x^2 + 3.8582 \times 10^7 e^x, \\ y_{12}(x) &= x^2 - 2.5767 \times 10^8 e^x. \end{aligned} \quad (2.4.45)$$

Η απόκλιση της ακολουθίας αυτής είναι εμφανής εξαιτίας της εναλλαγής του προσήμου (καθώς αυξάνει το  $n$ ) και της έντονης αυξήσεως της απολύτου τιμής του συντελεστή του όρου  $e^x$  στην παραπάνω ακολουθία συναρτήσεων  $y_n(x)$ .

Ασφαλώς η απόκλιση αυτή δεν είναι ασύμβατη με την ικανή (αλλά βέβαια όχι και αναγκαία) συνθήκη συγκλίσεως (2.4.31) της Παραγράφου Γ2.4.2, δηλαδή τη συνθήκη

$$(b-a)M < 1 \implies 2 \max_{\substack{-1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq t \leq 1}} e^{x+2t} < 1 \implies 2e^3 < 1 \implies 2 \times 20.08554 < 1. \quad (2.4.46)$$

Προφανώς δεν πληρούται, είναι ψευδής στην παρούσα περίπτωση η συνθήκη αυτή (2.4.31).

Βέβαια όλα αυτά με κανέναν τρόπο δε σημαίνουν ότι η ολοκληρωτική εξίσωση (2.4.43) που εξετάζουμε στερείται λύσεως και μάλιστα μοναδικής λύσεως. Απλά δηλώνουν ότι η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι μια ακατάλληλη μέθοδος για την ολοκληρωτική αυτή εξίσωση. Το ίδιο βέβαια ισχύει και για την τροποποίησή της με αριθμητικό υπολογισμό του ολοκληρώματος στον επαναληπτικό τύπο (2.4.44). Το ίδιο (η ακαταλληλότητα) ισχύει προφανώς και για τη μέθοδο της αναγωγής σε διαφορική εξίσωση της Ενότητας Γ2.1, απλά επειδή η παρούσα ολοκληρωτική εξίσωση (2.4.43) είναι τύπου Fredholm. Ανάλογα ισχύουν και για τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace της Ενότητας Γ2.2, γιατί η ίδια ολοκληρωτική εξίσωση δεν είναι συνελκτικού τύπου, με πυρήνα διαφοράς, όπως άμεσα διαπιστώνεται. Απεναντίας, όπως ήδη είδαμε στο Παράδειγμα Γ2.3.2.2, η ίδια ολοκληρωτική εξίσωση (2.4.43) έχει πολύ απλή κλειστή λύση που προσδιορίζεται πολύ εύκολα με τη μέθοδο των διαχωρίσιμων πυρήνων. Όπως μάλιστα θα δούμε και στην επόμενη Ενότητα Γ2.5 (Παράδειγμα Γ2.5.7.1), η μέθοδος της αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι επίσης απόλυτα κατάλληλη για την (προσεγγιστική) επίλυση της ολοκληρωτικής αυτής εξίσωσης (2.4.43). ▲

◆ **Συμπέρασμα:** Δεν υπάρχει μία και μόνο μία μέθοδος επίλυσεως ολοκληρωτικών εξισώσεων, που να αποτελεί πανάκεια για κάθε ολοκληρωτική εξίσωση που χρειάζεται να επιλυθεί από τον Πολιτικό Μηχανικό. Ούτε καν οι παρουσιαζόμενες στο κεφάλαιο αυτό πέντε μέθοδοι καλύπτουν όλες τις περιπτώσεις στην πράξη, αν και ασφαλώς καλύπτουν πολλές περιπτώσεις. Όπως θα αναφέρουμε και προς το τέλος της Παραγράφου Γ2.5.6 πιο κάτω, ανάλογα ισχύουν και για τα πολύ πιο συχνά απαντώμενα συστήματα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα άλλοτε είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε μια άμεση μέθοδο (π.χ. την απαλοιφή Gauss) και άλλοτε μια επαναληπτική (π.χ. τη μέθοδο Gauss-Seidel). Αλλά και στις επαναληπτικές μεθόδους χρειάζεται προσοχή στην επιλογή της κάθε φορά καλύτερης ή, τουλάχιστον, σχεδόν καλύτερης. Όλα αυτά απαιτούν βέβαια γνώσεις, εξοικείωση και πείρα, που αποκτώνται, δυστυχώς, αφιερώνοντας χρόνο και κάνοντας (αρχικά) σφάλματα επιλογής μεθόδου. Από τα σφάλματα αυτά διδασκόμαστε και συνήθως βελτιωνόμαστε.

Σαν παράδειγμα, ας αναφερθούμε και στο δύσπιστο αναγνώστη/στη δύσπιστη αναγνώστρια που ίσως να ενοχλήθηκε με την πιο πάνω θεωρία συγκλίσεως της Παραγράφου Γ2.4.2. Η θεωρία αυτή ίσως θεωρηθεί πολύ μαθηματική (και πραγματικά είναι μαθηματική) και επομένως ακατάλληλη για έναν Πολιτικό Μηχανικό. Αλλ' όμως η θεωρία αυτή δίνει ένα αρχικό προσανατολισμό. Στη συγκεκριμένη περίπτωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.4.43) προσανατολίζει το φιλόδοξο Πολιτικό Μηχανικό που θέλει ή είναι πρακτικά υποχρεωμένος να τη λύσει να αποφύγει μάλλον (όχι σίγουρα) την παρούσα μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Πρέπει πραγματικά να την αποφύγει εξαιτίας της μη ισχύος (κατά πολύ μάλιστα, όχι οριακά) της ικανής (αλλ' όχι και αναγκαίας) συνθήκης συγκλίσεως (2.4.46). Η μη ισχύς της συνθήκης αυτής μπορεί (και πραγματικά έτσι συμβαίνει) να οδηγήσει σε απόκλιση της μεθόδου με κάποιο κόστος κόπου και χρόνου (στη σκέψη και στους υπολογισμούς) για τον Πολιτικό Μηχανικό, όπως ήδη είδαμε. Έπειτα πρέπει να ληφθεί από αυτόν η απόφαση για την αλλαγή μεθόδου, μελέτη της νέας μεθόδου και εφαρμογή της. Άραγε ποιο κόστος χρόνου είναι το ακριβότερο για τον Πολιτικό Μηχανικό στη μελέτη μιας σύνθετης κατασκευής, π.χ. ενός μεγάλου κτιρίου, στο επάγγελμά του; Του ίδιου ή του υπολογιστή του;

▼ **Παράδειγμα Γ2.4.3.3:** Σαν τρίτο (και μάλιστα επιτυχές, όπως θα διαπιστώσουμε) παράδειγμα θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

$$y(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 \cos(x+t)y(t) dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2.4.47)$$

Η εξίσωση αυτή έχει τριγωνομετρικό πυρήνα  $K(x, t)$ : τη συνημιτονική συνάρτηση  $\cos(x+t)$ , που είναι μάλιστα φραγμένη κατ' απόλυτο τιμή από τη μονάδα. Την επίλυση της ολοκληρωτικής

αυτής εξίσωσης την εξετάσαμε ήδη και στο Παράδειγμα Γ2.3.2.3 με τη μέθοδο των διαχωρίσιμων πυρήνων έχοντας βρει τη λύση της

$$y(x) = 1 + 0.3426004227 \cos x - 0.1775277735 \sin x. \quad (2.4.48)$$

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε διαφορετική μέθοδο: τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων.

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου αυτής ξεκινάμε και πάλι από τη μηδενική συνάρτηση  $y_0(x) = 0$ , αν και πολλές ακόμη αρχικές προσεγγίσεις θα ήσαν απόλυτα αποδεκτές. Συνεχίζουμε με τη χρήση του επαναληπτικού τύπου (2.4.6), στην περίπτωση μας

$$y_n(x) = 1 + \frac{1}{3} \int_0^1 \cos(x+t) y_{n-1}(t) dt \quad \mu\epsilon \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4.49)$$

Με τον τρόπο αυτό προέκυψαν (αριθμητικά) οι εξής εκφράσεις των πρώτων 15 προσεγγίσεων  $y_n(x)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$ , που είναι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm (2.4.47):

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1, \\ y_2(x) &= 1 + 0.2804903283 \cos x - 0.1532325647 \sin x, \\ y_3(x) &= 1 + 0.3304094931 \cos x - 0.1724062596 \sin x, \\ y_4(x) &= 1 + 0.3402492374 \cos x - 0.1765545987 \sin x, \\ y_5(x) &= 1 + 0.3421452445 \cos x - 0.1773387585 \sin x, \\ y_6(x) &= 1 + 0.3425123747 \cos x - 0.1774912368 \sin x, \\ y_7(x) &= 1 + 0.3425833880 \cos x - 0.1775207036 \sin x, \\ y_8(x) &= 1 + 0.3425971271 \cos x - 0.1775264058 \sin x, \\ y_9(x) &= 1 + 0.3425997851 \cos x - 0.1775275089 \sin x, \\ y_{10}(x) &= 1 + 0.3426002994 \cos x - 0.1775277223 \sin x, \\ y_{11}(x) &= 1 + 0.3426003989 \cos x - 0.1775277636 \sin x, \\ y_{12}(x) &= 1 + 0.3426004181 \cos x - 0.1775277716 \sin x, \\ y_{13}(x) &= 1 + 0.3426004218 \cos x - 0.1775277731 \sin x, \\ y_{14}(x) &= 1 + 0.3426004225 \cos x - 0.1775277734 \sin x, \\ y_{15}(x) &= 1 + 0.3426004227 \cos x - 0.1775277735 \sin x. \end{aligned} \quad (2.4.50)$$

Επιτεύχθηκε έτσι ακρίβεια εννέα ή μάλλον δέκα σημαντικών (εν προκειμένω και δεκαδικών) ψηφίων. Η ακρίβεια της λύσεως αυτής ελέγχεται και με σύγκρισή της με τη λύση (2.4.48), που έχει προσδιορισθεί με τη μέθοδο των διαχωρίσιμων πυρήνων.

Ας παρατηρηθεί τέλος ότι η σύγκλιση που πετύχαμε της χρησιμοποιηθείσας μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι και θεωρητικά αναμενόμενη έστω και με τη συντηρητική ικανή συνθήκη συγκλίσεως (2.4.31) της Παραγράφου Γ2.4.2. Αυτό συμβαίνει, επειδή τώρα

$$(b-a)M < 1 \quad \implies \quad 1 \cdot \frac{1}{3} \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq t \leq 1}} \cos(x+t) = \frac{1}{3} < 1. \quad (2.4.51)$$

Δηλαδή η ικανή συνθήκη συγκλίσεως (2.4.31) πληρούται, είναι αληθής για την εξίσωση (2.4.47).

Θα προχωρήσουμε τώρα και σε μια τέταρτη (και τελευταία) εφαρμογή της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων. Στην εφαρμογή αυτή θα εξετάσουμε όμως μια ολοκληρωτική εξίσωση

Volterra (και όχι πια Fredholm). Επαναλαμβάνουμε ότι για τις εξισώσεις Volterra η σύγκλιση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι πάντοτε εξασφαλισμένη. ▲

▼ **Παράδειγμα Γ2.4.3.4:** Σαν τελευταίο (και επίσης επιτυχές ως προς τη σύγκλιση, όπως και αναμένεται) παράδειγμα θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση Volterra

$$x(t) + \omega^2 \int_0^t (t - \tau)x(\tau) d\tau = x_0 + v_0 t, \quad t > 0. \quad (2.4.52)$$

Η εξίσωση αυτή αναφέρεται σε μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου, σε αρμονικό ταλαντωτή σε ελεύθερη ταλάντωση και χωρίς απόσβεση. Δηλώνουμε με  $x(t)$  τη θέση (ακριβέστερα τη μετατόπιση) του υλικού σημείου και με  $t$  το χρόνο. Η κυκλική συχνότητα  $\omega$  του μηχανικού συστήματός μας είναι μια γνωστή σταθερά. Παραπέρα η αρχική θέση του υλικού σημείου είναι  $x(0) = x_0$  και η αρχική ταχύτητά του είναι  $\dot{x}(0) = v_0$ . Οι αρχικές αυτές συνθήκες είναι βέβαια ενσωματωμένες στην πιο πάνω ολοκληρωτική εξίσωση Volterra (2.4.52). Το γεγονός αυτό μπορεί σχετικά εύκολα να διαπιστωθεί (για  $t = 0$ ) ανεξάρτητα από τη λύση  $x(t)$ , που ακόμη δεν έχει προσδιορισθεί. Η παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση Volterra (2.4.52) μπορεί να προσδιορισθεί με τη μέθοδο της Παραγράφου Γ1.4.4 του Κεφαλαίου Γ1. Αρκεί να γίνει αναγωγή (με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις) της αντίστοιχης (και πιο γνωστής) διαφορικής εξίσωσης (1.4.38) σε ολοκληρωτική εξίσωση. Θα πρέπει βέβαια να ληφθούν υπόψη και οι δύο σχετικές αρχικές συνθήκες:  $x(0) = x_0$  και  $\dot{x}(0) = v_0$  κατά τις ολοκληρώσεις.

Θα επιλύσουμε την πιο πάνω ολοκληρωτική εξίσωση Volterra (2.4.52) και πάλι με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. Ξεκινάμε ξανά από τη μηδενική αρχική συνάρτηση  $x_0(t) = 0$ . Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον επαναληπτικό τύπο (2.4.6). Αμέσως διαπιστώνουμε ότι ο τύπος αυτός παίρνει τώρα τη μορφή

$$x_n(t) = x_0 + v_0 t - \omega^2 \int_0^t (t - \tau)x_{n-1}(\tau) d\tau \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4.53)$$

Προσδιορίζουμε έτσι τους επόμενους όρους της σχετικής ακολουθίας συναρτήσεων  $x_n(t)$ . Οι όροι αυτοί προσεγγίζουν (οπιασδήποτε όλο και καλύτερα στο παρόν παράδειγμα) όλο και καλύτερα την άγνωστη συνάρτηση: τη θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου. Οι αναλυτικές εκφράσεις των έξι πρώτων προσεγγίσεων αυτών είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + v_0 t = x_0 + \frac{v_0}{\omega} \omega t, \\ x_2(t) &= x_0 \left( 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} \right) + \frac{v_0}{\omega} \left( \omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} \right), \\ x_3(t) &= x_0 \left( 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \frac{\omega^4 t^4}{24} \right) + \frac{v_0}{\omega} \left( \omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} + \frac{\omega^5 t^5}{120} \right), \\ x_4(t) &= x_0 \left( 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \frac{\omega^4 t^4}{24} - \frac{\omega^6 t^6}{720} \right) + \frac{v_0}{\omega} \left( \omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} + \frac{\omega^5 t^5}{120} - \frac{\omega^7 t^7}{5040} \right), \\ x_5(t) &= x_0 \left( 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \frac{\omega^4 t^4}{24} - \frac{\omega^6 t^6}{720} + \frac{\omega^8 t^8}{40320} \right) \\ &\quad + \frac{v_0}{\omega} \left( \omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} + \frac{\omega^5 t^5}{120} - \frac{\omega^7 t^7}{5040} + \frac{\omega^9 t^9}{362880} \right), \\ x_6(t) &= x_0 \left( 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2} + \frac{\omega^4 t^4}{24} - \frac{\omega^6 t^6}{720} + \frac{\omega^8 t^8}{40320} - \frac{\omega^{10} t^{10}}{3628800} \right) \\ &\quad + \frac{v_0}{\omega} \left( \omega t - \frac{\omega^3 t^3}{6} + \frac{\omega^5 t^5}{120} - \frac{\omega^7 t^7}{5040} + \frac{\omega^9 t^9}{362880} - \frac{\omega^{11} t^{11}}{39916800} \right). \end{aligned} \quad (2.4.54)$$

Από τις διαδοχικές αυτές προσεγγίσεις παρατηρούμε πρώτα-πρώτα την προφανή σύγκλιση τους. Παρατηρούμε όμως επίσης ότι οι όροι στις παρενθέσεις δεν είναι τίποτε άλλο παρά οι πρώτοι όροι των σειρών Maclaurin των συναρτήσεων  $\cos \omega t$  και  $\sin \omega t$  για τους συντελεστές των όρων  $x_0$  και  $v_0/\omega$  αντίστοιχα. Εύλογα εικάζεται επομένως (και διαπιστώνεται επίσης εύκολα και με παραπέρα διαδοχικές προσεγγίσεις) ότι η λύση  $x(t)$  της πιο πάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.4.52) είναι η γνωστή τριγωνομετρική συνάρτηση

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (2.4.55)$$

Βέβαια δεν υπάρχει όρος ανάλογος του  $t$ . Αν υπήρχε, θα αντιστοιχούσε σε συντονισμό, πράγμα εξάλλου παράλογο για μια ελεύθερη (όχι εξαναγκασμένη) ταλάντωση στον αρμονικό ταλαντωτή μας, δηλαδή χωρίς την επίδραση απολύτως καμίας εξωτερικής δυνάμεως.

Η κλειστή τριγωνομετρική αυτή λύση (2.4.55) της παρούσας ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.4.52) του αρμονικού ταλαντωτή σε σύστημα μάζας-ελατηρίου μπορεί εύκολα να βρεθεί και με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, που ήδη εξετάστηκε στην Ενότητα Γ2.2. Πιο συγκεκριμένα καλούμε  $X(s)$  το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συναρτήσεως  $x(t)$  στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.4.52). Στη συνέχεια παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace και των δύο μελών της. Δεν ξεχνάμε φυσικά ότι το ολοκλήρωμα που έχουμε είναι συνελκτικού τύπου, επειδή ο πυρήνας  $K(t, \tau)$  της ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.4.52) είναι πυρήνας διαφοράς. Έτσι βρίσκουμε αμέσως ότι για  $s > 0$

$$X(s) + \omega^2 \frac{X(s)}{s^2} = \frac{x_0}{s} + \frac{v_0}{s^2}. \quad (2.4.56)$$

Επομένως, λύνοντας ως προς το μετασχηματισμό Laplace  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ , προσδιορίζουμε τη λύση

$$X(s) = \frac{x_0 s + v_0}{s^2 + \omega^2} = x_0 \frac{s}{s^2 + \omega^2} + \frac{v_0}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}. \quad (2.4.57)$$

Αντιστρέφουμε τώρα αυτό το μετασχηματισμό Laplace  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ , όπου έχει γίνει ήδη η κατάλληλη ανάλυση σε κλάσματα. Διαπιστώνουμε έτσι την ισχύ της λύσεως (2.4.55) για τη θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου στο σύστημα μάζας-ελατηρίου που εξετάζουμε. Αν θέλουμε να είμαστε ακόμη πιο σίγουροι, μπορούμε σχετικά εύκολα και να επαληθεύσουμε τη λύση αυτή  $x(t)$ . ▲

Προφανώς βέβαια η ύπαρξη κλειστής λύσεως σε μια ολοκληρωτική εξίσωση δεν είναι ιδιαίτερα συνηθισμένη. Πολλές φορές μάλιστα ο Πολιτικός Μηχανικός αναγκάζεται να καταφεύγει στην ασφαλέστερη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων και αρκείται έτσι σε μια προσεγγιστική λύση. Δεν πρέπει επίσης να λησμονείται ότι ούτε η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace είναι πάντοτε εφαρμόσιμη. (Συγκεκριμένα είναι εφαρμόσιμη κυρίως σε συνελκτικές ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra.) Αυτά βέβαια δε σημαίνουν ότι η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων συγκλίνει πάντοτε. Όπως ήδη είδαμε στην Παράγραφο Γ2.4.2, η σύγκλιση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι βέβαιη για ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra, όχι όμως και για ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm, όπου είναι αβέβαιη. Ίσως η μέθοδος της αριθμητικής ολοκλήρωσης, που θα εξετασθεί αμέσως πιο κάτω για ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm, θα μπορούσε να θεωρηθεί αρκετά γενικότερη από τις ήδη αναφερθείσες μεθόδους. Εντούτοις ο Πολιτικός Μηχανικός έχει πολύ συχνά (και δικαιολογημένα μάλιστα) προτίμηση στη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων για την επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών σε διδιάστατα ή τριδιάστατα μέσα στην Ελαστικότητα, στη Ρευστομηχανική και σε άλλες ενδιαφέρουσες περιοχές της επιστήμης του.

## Γ2.5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ

### Γ2.5.1. Προκαταρκτικά σχόλια για τη μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσης

Η μέθοδος της αριθμητικής ολοκλήρωσης για την επίλυση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm (ή Volterra) συνίσταται απλά στην προσέγγιση του ολοκληρώματος στην ολοκληρωτική

εξίσωση με άθροισμα. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιείται ένας κατάλληλος κανόνας (τύπος) αριθμητικής ολοκλήρωσης  $[a, b]$ . Η επιλογή του κανόνα αυτού εξαρτάται βέβαια από το είδος της ολοκληρωτικής εξισώσεως καθώς και από το διάστημα ολοκλήρωσης. Οι κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης εξετάζονται στην Αριθμητική Ανάλυση. (Εμείς έχουμε πάρει ήδη μια πρώτη εικόνα τους στην Παράγραφο Α15.1.4 του Κεφαλαίου Α15 του Μέρους Α με τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss–Legendre (15.1.18) που εξετάσαμε εκεί.) Με τον προσεγγιστικό αυτό τρόπο απαλλασσόμαστε από το ολοκλήρωμα και έχουμε την άγνωστη συνάρτηση σαν άγνωστη μόνο στους κόμβους (στις τετμημένες, ακόμη πιο απλά στα σημεία) της αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την προσεγγιστική εξίσωση που προκύπτει (με άθροισμα, όχι πια ολοκλήρωμα σ' αυτήν) στους κόμβους (στα σημεία) της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε τελικά ένα σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για τον προσδιορισμό των αγνώστων μας, δηλαδή των τιμών της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  στους κόμβους (στα σημεία) της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί με μια άμεση μέθοδο (όπως είναι η απαλοιφή Gauss) ή με μια επαναληπτική μέθοδο (όπως είναι η μέθοδος Jacobi). Προσδιορίζονται έτσι οι προσεγγιστικές τιμές της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  στους κόμβους του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης που χρησιμοποιήθηκε. Τελικά πέρα από τα σημεία αυτά (τους κόμβους) μπορεί να χρησιμοποιηθεί και μια μέθοδος παρεμβολής, π.χ. η πολυωνυμική παρεμβολή ή, καλύτερα, η φυσική παρεμβολή. (Τη φυσική παρεμβολή θα την εξηγήσουμε πιο κάτω, στην Παράγραφο Γ2.5.4.) Μπορούμε έτσι να υπολογίσουμε τις προσεγγιστικές τιμές της άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  σε κάθε σημείο  $x$  του διαστήματος ολοκλήρωσης.

Στην ενότητα αυτή θα περιορισθούμε σε μονοδιάστατες γραμμικές μη ομογενείς ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm δευτέρου είδους της μορφής

$$y(x) + \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (2.5.1)$$

Η μέθοδος της αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι επίσης άμεσα εφαρμόσιμη και σε αντίστοιχες ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm πρώτου είδους της μορφής

$$\int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (2.5.2)$$

Αντίθετα σε ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra η μέθοδος της αριθμητικής ολοκλήρωσης απαιτεί ορισμένες τροποποιήσεις. Αυτό συμβαίνει, γιατί το πάνω όριο ολοκλήρωσης  $x$  είναι μεταβλητή.

### Γ2.5.2. Αριθμητική ολοκλήρωση

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσης για την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων, εν προκειμένω τύπου Fredholm δευτέρου είδους, όπως ήδη ρητά αναφέρθηκε. Η όλη ιδέα της μεθόδου αυτής είναι να αντικατασταθεί το ολοκλήρωμα στην προς προσεγγιστική επίλυση ολοκληρωτική εξίσωση (2.5.1), αλλά και στη (2.5.2), με άθροισμα. Για την προσεγγιστική αυτή αντικατάσταση χρησιμοποιείται ένας κατάλληλος κανόνας (τύπος) αριθμητικής ολοκλήρωσης. Τέτοιοι κανόνες (τύποι) που προσεγγίζουν ολοκληρώματα με αθροίσματα αναφέρονται στο βιβλίο των *Αριθμητικών Μεθόδων* (Μάρκελλος, 2001, *Αριθμητικές Μέθοδοι*, Ενότητα 3.2, σσ. 105–117). Σε πολύ μεγαλύτερη έκταση αναφέρονται σε άλλα, πιο εξειδικευμένα βιβλία. Τέτοια βιβλία είναι το κλασικό σύγγραμμα για την αριθμητική ολοκλήρωση των Davis and Rabinowitz (1984) ή το κάπως νεότερο (και πολύ λιγότερο γνωστό) βιβλίο του Evans (1993).

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ένας κανόνας (τύπος) αριθμητικής ολοκλήρωσης με  $n$  κόμβους (σημεία) στο διάστημα  $[a, b]$  έχει πολύ συχνά την εξής γενική μορφή:

$$\int_a^b g(t) dt = \sum_{i=1}^n w_{in} g(t_{in}) + E_n[g]. \quad (2.5.3)$$

Στον τύπο αυτό  $g(t)$  είναι η ολοκληρωτέα (η προς ολοκλήρωση) συνάρτηση. Οι κόμβοι (τα σημεία) της αριθμητικής ολοκληρώσεως, όπου (μόνο) πρέπει να υπολογισθεί η συνάρτηση  $g(t)$  δηλώνονται με  $t_{in}$ . Τα αντίστοιχα βάρη δηλώνονται με  $w_{in}$ . Τέλος το σύμβολο  $E_n[g]$  δηλώνει το σφάλμα που προκύπτει από την πιο πάνω αριθμητική ολοκλήρωση της συναρτήσεως  $g(t)$ . Το σφάλμα αυτό, όπως είναι βέβαια αναμενόμενο, σπάνια είναι μηδέν.

Ίσως να υπήρξαμε λίγο αυστηροί έχοντας δηλώσει το γεγονός της εξαρτήσεως των κόμβων  $t_{in}$  και των αντίστοιχων βαρών  $w_{in}$  από τον αριθμό των κόμβων  $n$ . Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει τον απλούστερο συμβολισμό  $t_i$  και  $w_i$  αντίστοιχα. Δεν πρέπει όμως ποτέ να ξεχνάμε την εξάρτηση και των κόμβων  $t_i$  και των βαρών  $w_i$  από τον αριθμό τους  $n$ .

Δεν πρέπει επίσης να λησμονούμε ότι συχνά ο Πολιτικός Μηχανικός (και όχι μόνο) γράφει (πολύ σωστά) το γενικό τύπο (2.5.3) και στην κάπως απλούστερη μορφή

$$\int_a^b g(t) dt \approx \sum_{i=1}^n w_{in} g(t_{in}). \quad (2.5.4)$$

Στη μορφή αυτή παραλείφθηκε ο όρος σφάλματος  $E_n[g]$  με «κόστος» την αντικατάσταση του συμβόλου της ισότητας (=) στον τύπο (2.5.3) από το σύμβολο της προσεγγίσεως ( $\approx$ ) στον τύπο (2.5.4).

Υπάρχουν ποικίλοι κανόνες (τύποι) αριθμητικής ολοκληρώσεως. Αυτοί βασίζονται σε διαφορετικές αρχές και έχουν διαφορετικά πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα. Στην παρούσα ενότητα θα θεωρήσουμε μόνο κανόνες τύπου Gauss (ή έστω συγγενείς, ανάλογης ακρίβειας κανόνες) της μορφής (2.5.3) ή (2.5.4). Θα αποφύγουμε ακόμη πιο κλασικούς (και ομολογουμένως απλούστερους) κανόνες αριθμητικής ολοκληρώσεως όπως τους κανόνες του τραπεζίου (τραπεζοειδή κανόνα) και του Simpson. Γιατί; Η απάντηση είναι πολύ απλή: Όπως είναι γνωστό, ένας κανόνας αριθμητικής ολοκληρώσεως τύπου Gauss με  $n$  κόμβους (σημεία) έχει (πολυωνυμικό) βαθμό ακρίβειας  $m = 2n - 1$  (Μάρκελλος, 2001, *Αριθμητικές Μέθοδοι*, σ. 113). Αυτό σημαίνει ότι κάθε φορά που η ολοκληρωτέα συνάρτηση  $g(t)$  είναι πολυώνυμο μέχρι και  $2n - 1$  βαθμού (με  $n$  τον αριθμό των κόμβων  $t_{in}$  του κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως) το σφάλμα  $E_n[g]$  είναι μηδενικό. Ισχύει δηλαδή ότι

$$\forall g \in \mathcal{P}^{(2n-1)} \quad E_n[g] = 0, \quad (2.5.5)$$

όπου το σύνολο  $\mathcal{P}^{(2n-1)}$  δηλώνει όλα τα πολυώνυμα βαθμού μέχρι και  $2n - 1$ .

Επομένως, χρησιμοποιώντας έναν κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως τύπου Gauss (με τόσο υψηλή πολυωνυμική ακρίβεια, τη μεγαλύτερη δυνατή:  $m = 2n - 1$ ), ξέρουμε ότι συνήθως χρειαζόμαστε πολύ λιγότερους κόμβους (σημεία)  $t_{in}$  στην αριθμητική ολοκλήρωση. Το γεγονός αυτό, εάν είχαμε απλά να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα, δε θα σήμαινε και πολλά πράγματα. (Πολλοί κανόνες «αυτόματης» αριθμητικής ολοκληρώσεως έχουν το περιθώριο να χρησιμοποιούν πάρα πολλούς κόμβους στην αριθμητική ολοκλήρωση και πραγματικά το κάνουν.) Ειδικά όμως στην αριθμητική επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων κάθε ένας επιπλέον κόμβος στην αριθμητική ολοκλήρωση σημαίνει και έναν επιπλέον άγνωστο κατά την ώρα της επίλυσεως του σχετικού προς διαμόρφωση συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Στο σύστημα αυτό θα αναχθεί τελικά (προσεγγιστικά βέβαια) η ολοκληρωτική εξίσωση (2.5.1).

Άρα ο αριθμός  $n$  των κόμβων  $t_{in}$  στον κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως (2.5.4) πρέπει να διατηρείται όσο το δυνατόν μικρότερος. Με τον τρόπο αυτό τελικά θα έχουμε να επιλύσουμε  $n$  γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις με  $n$  συνολικά αγνώστους: τις προσεγγιστικές τιμές της άγνωστης συναρτήσεως στην ολοκληρωτική εξίσωσή μας ακριβώς στους κόμβους αυτούς  $t_{in}$ . Με κανέναν τρόπο δε μας συμφέρει μεγάλη τιμή του  $n$ . Έτσι για την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων συχνά προτιμάται ένας κανόνας αριθμητικής ολοκληρώσεως τύπου Gauss με  $n$  κόμβους (σημεία)  $t_{in}$ . Βέβαια η επιλογή αυτή έχει σαν συνέπεια κάποιον αρχικό κόμπο (μια φορά βέβαια) για τον προσδιορισμό των σχετικών κόμβων (σημείων)  $t_{in}$  και των αντίστοιχων βαρών  $w_{in}$ .



Ανάμεσα στους κανόνες τύπου Gauss ο πιο γνωστός αφορά στο απλό διάστημα  $[-1, 1]$  (χωρίς συνάρτηση βάρους  $w(t)$ , ισοδύναμα με  $w(t) \equiv 1$ ). Ο κανόνας αυτός έχει τη μορφή

$$\int_{-1}^1 g(t) dt \approx \sum_{i=1}^n w_{in} g(t_{in}) \quad (2.5.6)$$

με εύνοιά μας υπέρ αυτής της μορφής: με το σύμβολο της προσεγγίσεως αντί του όρου σφάλματος  $E_n[g]$ . Ο κανόνας αυτός καλείται και κανόνας Gauss–Legendre, γιατί αποδεικνύεται ότι οι  $n$  κόμβοι  $t_{in}$  είναι απλά οι ρίζες (τα μηδενικά) του αντίστοιχου πολυωνύμου Legendre  $P_n(t)$  βαθμού  $n$  (Μάρκελλος, 2001, *Αριθμητικές Μέθοδοι*, σσ. 114–115). Οι κόμβοι μάλιστα αυτοί  $t_{in}$  αποδεικνύεται ότι είναι όλοι πραγματικοί, συμμετρικοί ως προς το σημείο  $t = 0$  και επιπλέον βρίσκονται μέσα στο διάστημα ολοκληρώσεως  $[-1, 1]$ . Ανάλογα ισχύουν και για όλους σχεδόν τους κανόνες (τύπους) αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss. Πίνακες για τους κόμβους  $t_{in}$  και τα βάρη  $w_{in}$  είναι ευρέως διαθέσιμοι. Στον Πίνακα A15.1 της Παραγράφου A15.1.4 του Κεφαλαίου A15 του Μέρους A δίνονται οι κόμβοι και τα βάρη για  $n = 4$ . Επίσης στην Παράγραφο A15.1.1 του ίδιου Κεφαλαίου A15 δίνονται και τα πρώτα πολυώνυμα Legendre  $P_n(x)$  και οι γραφικές παραστάσεις τους: στο Σχήμα A15.1.

Με την πάροδο του χρόνου ο χρήστης της μεθόδου προτιμάει βέβαια να βρίσκει τους κόμβους κατευθείαν στον υπολογιστή του τη στιγμή που τους χρειάζεται. (Αυτό είναι προτιμότερο παρά να τους παίρνει έτοιμους από βιβλία, έστω και από ειδικά βιβλία πινάκων κόμβων  $t_{in}$  και βαρών  $w_{in}$  για αριθμητικές ολοκληρώσεις τύπου Gauss.) Παραδείγματος χάρη, η *Mathematica* και η *Maxima* διαθέτουν έτοιμες εντολές για τα πολυώνυμα Legendre  $P_n(t)$ , όπως βέβαια και εντολές για την εύρεση των  $n$  ριζών πολυωνύμου βαθμού  $n$ . Επομένως πέρα από τον εκπαιδευτικό τους χαρακτήρα οι πίνακες δεν είναι πια χρήσιμοι στην αριθμητική ολοκλήρωση, τουλάχιστον όσον αφορά στους κόμβους  $t_{in}$  στην αριθμητική ολοκλήρωση τύπου Gauss.

Αλλά και ως προς τα βάρη  $w_{in}$  πάλι οι πίνακες δεν είναι αναγκαίοι. Είναι εύκολο να προγραμματισθεί κατάλληλα (π.χ. στη *Mathematica* ή στη *Maxima*) η εύρεση των βαρών αυτών  $w_{in}$  μέσω της απαιτήσεως που προαναφέρθηκε η πολυωνυμική ακρίβεια της μεθόδου (με  $n$  κόμβους) να είναι  $m = 2n - 1$ . Στο βιβλίο των *Αριθμητικών Μεθόδων* (Μάρκελλος, 2001, σσ. 113–115) αναφέρονται οι σχετικές εξισώσεις για  $n = 2$ . Αναφέρεται επίσης και το γεγονός ότι με τους  $n$  κόμβους  $t_{in}$  γνωστούς σαν ρίζες του πολυωνύμου Legendre  $P_n(t)$ , το σύστημα των εξισώσεων για τα βάρη  $w_{in}$  είναι απλά ένα γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων. Το σύστημα αυτό μπορεί ευκολότατα να επιλυθεί. Ακόμη όμως πιο εύκολο είναι να προσδιορισθούν τα βάρη  $w_{in}$  στον κανόνα (τύπο) αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss–Legendre μέσω των τελικών κλειστών τύπων (Hildebrand, 1974, Ενότητα 8.5, σ. 391)

$$w_{in} = \frac{2(1 - t_{in}^2)}{(n + 1)^2 P_{n+1}^2(t_{in})} \quad \text{με } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5.7)$$

Ο τρόπος αυτός είναι ακόμη πιο εύχρηστος από την επίλυση ενός συστήματος  $n$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για συγκεκριμένη τιμή του  $n$ .

Πάντως, για να πάρουμε και εδώ μια εικόνα των κόμβων (σημείων ολοκληρώσεως)  $t_{in}$  και των αντίστοιχων βαρών  $w_{in}$ , παραθέτουμε στον Πίνακα Γ2.1 της επόμενης σελίδας τις τιμές τους για τον κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss–Legendre με  $n = 10$  κόμβους. Ο κανόνας αυτός αφορά στο κλασικό διάστημα  $[-1, 1]$  και μάλιστα χωρίς συνάρτηση βάρους:  $w(t) \equiv 1$ .

Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφερθεί ότι, αν το διάστημα ολοκληρώσεως είναι το γενικότερο πεπερασμένο διάστημα  $[a, b]$  αντί του  $[-1, 1]$ , που ισχύει για τον κανόνα Gauss–Legendre, τότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια απλή αλλαγή μεταβλητής της μορφής

$$t = \frac{b + a}{2} + \frac{b - a}{2} s. \quad (2.5.8)$$

Αυτή η αλλαγή μεταβλητής μας επιτρέπει την άμεση αλλαγή του διαστήματος ολοκληρώσεως από το διάστημα  $[-1, 1]$  (με μεταβλητή την  $s$ ) στο διάστημα  $[a, b]$  (με μεταβλητή την  $t$ ) και αντίστροφα.

**Πίνακας Γ2.1:** Κόμβοι (σημεία)  $t_{in}$  και αντίστοιχα βάρη  $w_{in}$  στον κανόνα (τύπο) αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss–Legendre για  $n = 10$  σημεία ολοκληρώσεως.

$i$	$t_{in}$	$w_{in}$
1	−0.97390 65285 17171 72008	+0.06667 13443 08688 13759
2	−0.86506 33666 88984 51073	+0.14945 13491 50580 59315
3	−0.67940 95682 99024 40623	+0.21908 63625 15982 04400
4	−0.43339 53941 29247 19080	+0.26926 67193 09996 35509
5	−0.14887 43389 81631 21088	+0.29552 42247 14752 87017
6	+0.14887 43389 81631 21088	+0.29552 42247 14752 87017
7	+0.43339 53941 29247 19080	+0.26926 67193 09996 35509
8	+0.67940 95682 99024 40623	+0.21908 63625 15982 04400
9	+0.86506 33666 88984 51073	+0.14945 13491 50580 59315
10	+0.97390 65285 17171 72008	+0.06667 13443 08688 13759

Υπάρχουν ποικίλοι κανόνες αριθμητικής ολοκληρώσεως τύπου Gauss για πεπερασμένα, ημιάπειρα και άπειρα διαστήματα ολοκληρώσεως  $[a, b]$ . Οι περισσότεροι από τους κανόνες αυτούς περιλαμβάνουν και μια (συνήθως μη αρνητική) συνάρτηση βάρους  $w(t)$ . Είναι δηλαδή της γενικής μορφής

$$\int_a^b w(t)g(t) dt \approx \sum_{i=1}^n w_{in}g(t_{in}) \quad (2.5.9)$$

αντί για την κάπως απλούστερη μορφή (2.5.4), στην οποία δεν υπάρχει συνάρτηση βάρους  $w(t)$ .

Για παράδειγμα, σε προβλήματα ρωγμών στη Θραυστομηχανική ή Μηχανική της Θραύσεως (στο βασικό διάστημα  $[-1, 1]$  και πάλι) με απειρισμούς δύο συνιστωσών του τανυστή των τάσεων στα άκρα της ρωγμής, η κατάλληλη συνάρτηση βάρους είναι η εξής:

$$w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (2.5.10)$$

Τότε χρειαζόμαστε τον κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss–Chebyshev (αντί για τον κανόνα Gauss–Legendre χωρίς συνάρτηση βάρους:  $w(t) = 1$ , τον οποίο ήδη πρόχειρα εξετάσαμε). Ο κανόνας αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss–Chebyshev αποδεικνύεται ότι έχει την εξής απλή μορφή:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} g(t) dt \approx \frac{\pi}{n} \sum_{i=1}^n g(t_{in}). \quad (2.5.11)$$

Εδώ οι κόμβοι  $t_{in}$  είναι οι ρίζες του πολυωνύμου Chebyshev  $T_n(t)$  πρώτου είδους και βαθμού  $n$ . Επειδή μάλιστα, όπως είναι γνωστό,

$$T_n(t) = \cos n\theta \quad \text{με} \quad t = \cos \theta, \quad (2.5.12)$$

προκύπτει εύκολα ότι

$$t_{in} = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n} \quad \text{με} \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5.13)$$

Με άλλα λόγια στον κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss–Chebyshev (2.5.11) τα βάρη  $w_{in}$  είναι όλα ίσα με  $\pi/n$ . Επίσης οι κόμβοι  $t_{in}$  δίνονται από εξαιρετικά απλούς τριγωνομετρικούς τύπους.

Δεν κρίνεται σκόπιμο να δώσουμε περισσότερες λεπτομέρειες για τη μονοδιάστατη αριθμητική ολοκλήρωση και, ειδικότερα, για τους τύπους Gauss, που μας επιτρέπουν να έχουμε μεγάλη (πολυωνυμική) ακρίβεια  $(2n-1)$  για σχετικά μικρές τιμές του αριθμού των κόμβων  $n$ . Θα προχωρήσουμε τώρα στην άμεση εφαρμογή των λίγων αυτών γνώσεών μας πάνω στην Αριθμητική Ανάλυση (συγκεκριμένα εδώ στην Αριθμητική Ολοκλήρωση) στην αριθμητική επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm δευτέρου είδους της μορφής (2.5.1).

### Γ2.5.3. Αριθμητική επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

Η όλη διαδικασία για την αριθμητική επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm δευτέρου είδους (2.5.1) με τη μέθοδο της αριθμητικής ολοκληρώσεως (ή μέθοδο του Nyström) είναι πια αρκετά απλή και σαφής. Αρκεί να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα (με μεταβλητή ολοκληρώσεως την  $t$ ) στην ολοκληρωτική μας αυτή εξίσωση με άθροισμα. Χρησιμοποιώντας έναν κατάλληλο τύπο αριθμητικής ολοκληρώσεως (π.χ. έναν κανόνα Gauss) της μορφής (2.5.4), έχουμε αμέσως την προσεγγιστική εξίσωση

$$y(x) + \sum_{i=1}^n w_{in} K(x, t_{in}) y(t_{in}) \approx f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (2.5.14)$$

Βέβαια στην εξίσωση αυτή η μεταβλητή  $x$  δεν έχει σχέση (υπήρξε σταθερά) ως προς την ολοκλήρωση. Δεν ξεχάσαμε επίσης τα βάρη  $w_{in}$  στο άθροισμα που αντικατέστησε το ολοκλήρωμα, αλλ' ούτε και το σύμβολο της προσεγγίσεως ( $\approx$ ) αντί για το σύμβολο της ισότητας ( $=$ ). Έχουμε έτσι μια προσέγγιση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm (2.5.1). Η προσέγγιση αυτή (2.5.14) θα μας βοηθήσει να προσδιορίσουμε μια προσεγγιστική λύση της

$$y_n(x) \approx y(x). \quad (2.5.15)$$

Ο δείκτης  $n$  στη συνάρτηση  $y_n(x)$  δηλώνει κατά κάποιον τρόπο ότι πρόκειται για προσεγγιστική λύση και μάλιστα για λύση που βασίστηκε σε κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως με  $n$  κόμβους (σημεία).

Δεχόμαστε εύλογα ότι η παραπάνω λύση  $y_n(x)$  επαληθεύει ακριβώς την προσεγγιστική εξίσωσή μας (2.5.14), δηλαδή ότι είναι ακριβής λύση της προσεγγιστικής εξίσωσης

$$y_n(x) + \sum_{i=1}^n w_{in} K(x, t_{in}) y_n(t_{in}) = f(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (2.5.16)$$

Στην εξίσωση αυτή άγνωστη συνάρτηση είναι πια η  $y_n(x)$  αντί της  $y(x)$ . Επιπλέον έχει χρησιμοποιηθεί το σύμβολο της ισότητας αντί για το σύμβολο της προσεγγίσεως. Με την αύξηση του αριθμού των κόμβων  $n$  στην αριθμητική ολοκλήρωση εικάζεται (και συνήθως ισχύει) ότι το σφάλμα (λόγω της αριθμητικής ολοκληρώσεως) θα μειώνεται. Επομένως η προσέγγιση  $y_n(x)$  θα βελτιώνεται.

Για την επίλυση της προσεγγιστικής εξίσωσης (2.5.16) πρέπει ασφαλώς να προσδιορίσουμε τις τιμές  $y_n(t_{in})$  της άγνωστης συναρτήσεως  $y_n(x)$  στα σημεία  $t_{in}$ . Αυτές είναι οι άγνωστες ποσότητες στο άθροισμα που έχουμε στην προσεγγιστική αυτή εξίσωση (2.5.16). Για τον προσδιορισμό αυτό αρκεί η εφαρμογή της ίδιας εξίσωσης στα ίδια ακριβώς σημεία  $x = t_{kn}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), δηλαδή στους ίδιους τους κόμβους του κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως που χρησιμοποιήθηκε. Έτσι παίρνουμε από την προηγούμενη προσεγγιστική εξίσωση (2.5.16)

$$y_n(t_{kn}) + \sum_{i=1}^n w_{in} K(t_{kn}, t_{in}) y_n(t_{in}) = f(t_{kn}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5.17)$$

Τί πετύχαμε με τον τρόπο αυτό; Να κατασκευάσουμε ένα σύστημα  $n$  γραμμικών αλγεβρικών (όχι βέβαια ολοκληρωτικών ή διαφορικών) εξισώσεων. Στις εξισώσεις αυτές (2.5.17) άγνωστοι είναι οι  $n$  τιμές  $y_n(t_{kn})$  (απόλυτα ισοδύναμα  $y_n(t_{in})$ ) της προσεγγίσεως  $y_n(x)$  της αρχικής άγνωστης συναρτήσεως  $y(x)$  στους κόμβους (στα σημεία)  $t_{kn}$  της αριθμητικής ολοκληρώσεως. Με την επίλυση του συστήματος αυτού, του γραμμικού συστήματος (2.5.17), είτε με άμεση είτε με επαναληπτική μέθοδο έχουμε πλέον διαθέσιμες τις προαναφερθείσες τιμές  $y_n(t_{kn})$  στα σημεία  $t_{kn}$  που βρίσκονται στο διάστημα  $[a, b]$  ισχύος της ολοκληρωτικής εξίσωσης:  $a \leq t_{kn} \leq b$  με  $k = 1, 2, \dots, n$ . Μερικές φορές αυτό μας είναι αρκετό, άλλες φορές όμως δεν είναι, γιατί χρειαζόμαστε την άγνωστη συνάρτηση  $y(x)$ , έστω την προσέγγισή της  $y_n(x)$ , και σε άλλα σημεία (ή ακόμη και σε όλα τα σημεία)

του διαστήματος ολοκλήρωσεως  $[a, b]$ . Προς το σκοπό αυτό μπορούμε, μάλλον υποχρεωνόμενα, να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο παρεμβολής, όπως είναι η πολυωνυμική και η φυσική παρεμβολή, που αναφέρονται στην αμέσως επόμενη ενότητα.

#### Γ2.5.4. Πολυωνυμική και φυσική παρεμβολή

Μια πολύ γνωστή μέθοδος παρεμβολής είναι η πολυωνυμική παρεμβολή (Μάρκελλος, 2001, *Αριθμητικές Μέθοδοι*, Ενότητα 3.1, σσ. 86–87). Η πολυωνυμική παρεμβολή μπορεί ασφαλώς να χρησιμοποιηθεί και στην αριθμητική επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων. Η παρεμβολή αυτή καταλήγει στην περίπτωση μας στον εξής τελικό πολυωνυμικό τύπο:

$$\rho_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{L_i(x)}{L_i(t_{in})} y_n(t_{in}). \quad (2.5.18)$$

Ο τύπος αυτός δίνει το καλούμενο πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange  $\rho_n(x)$ . Τα  $n$  πολυώνυμα  $L_i(x)$  (που είναι όλα βαθμού  $n - 1$ ) στον ίδιο τύπο (2.5.18) προσδιορίζονται από τα γινόμενα

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - t_{jn}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5.19)$$

Επομένως και το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange  $\rho_n(x)$  που αντιστοιχεί στην προσεγγιστική λύση  $y_n(x)$  είναι και αυτό βαθμού  $n - 1$ . Μάλιστα, όπως προκύπτει από τη φιλοσοφία της πολυωνυμικής παρεμβολής και εύκολα επαληθεύεται μέσω του τύπου παρεμβολής (2.5.18) (με  $x = t_{in}$  για κάποια τιμή του  $i$ ), ισχύει ότι

$$\rho_n(t_{in}) = y_n(t_{in}) \approx y(t_{in}). \quad (2.5.20)$$

Στις σχέσεις αυτές έχουμε το σύμβολο της ισότητας μεταξύ  $\rho_n(t_{in})$  και  $y_n(t_{in})$  και της προσεγγίσεως μεταξύ  $y_n(t_{in})$  και  $y(t_{in})$ . Αυτό συμβαίνει, επειδή η ζητούμενη συνάρτηση  $y_n(x)$  αποτελεί, όπως ήδη αναφέρθηκε, προσέγγιση της αληθινής λύσεως  $y(x)$ . Η προσέγγιση αυτή οφείλεται στον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσεως που χρησιμοποιήθηκε. Με τον τρόπο αυτό, υποθέτοντας ότι έχουμε λύσει το σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (2.5.17), πετύχαμε να έχουμε διαθέσιμο το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange  $\rho_n(x)$ . Το πολυώνυμο αυτό ασφαλώς αποτελεί προσέγγιση της λύσεως  $y(x)$  της ολοκληρωτικής εξισώσεως Fredholm δευτέρου είδους (2.5.1), από την οποία και ξεκινήσαμε, δηλαδή  $\rho_n(x) \approx y(x)$ .

Μια εναλλακτική και συνήθως προτιμώμενη δυνατότητα μας παρέχει η καλούμενη φυσική παρεμβολή ή παρεμβολή του Nyström. Και η φυσική παρεμβολή χρησιμοποιεί τη λύση του γραμμικού συστήματος (2.5.17), αλλ' όχι και το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange  $\rho_n(x)$ . Η μέθοδος παρεμβολής αυτή είναι κυριολεκτικά απλούστατη στη σκέψη της. Συγκεκριμένα χρησιμοποιεί απλά την εξίσωση (2.5.16), που προσεγγίζει την ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm (2.5.1), με μεταφορά του αθροίσματος της αριθμητικής ολοκλήρωσεως στο δεξιό μέλος. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε

$$y_n(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n w_{in} K(x, t_{in}) y_n(t_{in}), \quad a \leq x \leq b. \quad (2.5.21)$$

Οι τιμές  $y_n(t_{in})$  στο άθροισμα του δεξιού μέλους είναι ήδη διαθέσιμες σ' εμάς από τη λύση (άμεση ή επαναληπτική) του γραμμικού συστήματος (2.5.17).

Έχουμε επομένως τη δυνατότητα να υπολογίζουμε την προσέγγιση  $y_n(x)$  της λύσεως  $y(x)$  σε κάθε σημείο  $x$  του διαστήματος ολοκλήρωσεως  $[a, b]$ . Ο τύπος λοιπόν της φυσικής παρεμβολής ή παρεμβολής του Nyström (2.5.21) είναι απλά η εξίσωση (2.5.16), η οποία προσεγγίζει την αρχική ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm (2.5.1), λυμένη όμως ως προς  $y_n(x)$ . (Δηλαδή το άθροισμα έχει μεταφερθεί στο δεξιό μέλος της.) Δεν έχουμε πια πολυωνυμική παρεμβολή αντίθετα με την παρεμβολή του Lagrange (2.5.18), που ήδη εξετάσαμε και που είναι πραγματικά πολυωνυμική

παρεμβολή. Έχουμε εντούτοις μια άριστη παρεμβολή  $y_n(x)$ , γιατί οι κανόνες (τύποι) αριθμητικής ολοκληρώσεως Gauss (όπως ο κανόνας Gauss–Legendre στο διάστημα  $[-1, 1]$ ) είναι ακριβείς, όπως έχει ήδη αναφερθεί, για πολυώνυμα βαθμού  $m$  μέχρι και  $2n - 1$ . Αντίθετα η πολυωνυμική παρεμβολή του Lagrange (2.5.18) είναι ακριβής για πολυώνυμα μόλις μέχρι  $n - 1$  βαθμού. Η παρεμβολή του Lagrange παρουσιάζει επίσης και το μειονέκτημα ότι απαιτεί τον υπολογισμό των πολυωνύμων  $L_i(x)$ , τύποι (2.5.19), τα οποία υπεισέρχονται στον τύπο πολυωνυμικής παρεμβολής του Lagrange (2.5.18). Ασφαλώς κάτι τέτοιο δεν ισχύει στη φυσική παρεμβολή ή παρεμβολή του Nyström (2.5.21).

Παραλείψαμε βέβαια να πούμε ότι στην αριθμητική ολοκλήρωση έχει υπεισέλθει και ο πυρήνας  $K(x, t)$  της ολοκληρωτικής εξισώσεως Fredholm (2.5.1). Και πάλι όμως η φυσική παρεμβολή ή παρεμβολή του Nyström (2.5.21) είναι συνήθως αριθμητικά πολύ ακριβέστερη από την πολυωνυμική παρεμβολή του Lagrange (2.5.18).

### Γ2.5.5. Σχόλια για τα σφάλματα και τη σύγκλιση της μεθόδου

Για μια ικανοποιητική προσέγγιση  $y_n(x)$  της άγνωστης λύσεως  $y(x)$  της ολοκληρωτικής εξισώσεως Fredholm (2.5.1) είναι αναγκαίο (σύμφωνα με τα παραπάνω) η προσέγγισή της αυτή να υπολογισθεί με επαρκώς μεγάλη τιμή του  $n$ . Συχνά χρησιμοποιούμε μια ακολουθία τιμών  $n = 2^m$  με  $m = 2, 3, \dots, M$ , μέχρι να καταλήξουμε σε μια τιμή  $N = 2^M$  που να μας εξασφαλίζει (πρακτικά τουλάχιστον) την επιθυμητή ακρίβεια στους υπολογισμούς μας. Επίσης συχνά σαν σχετικό κριτήριο χρησιμοποιούμε την απόλυτο τιμή της διαφοράς

$$|y_{2^m}(x) - y_{2^{m-1}}(x)| \leq \varepsilon, \quad a \leq x \leq b. \quad (2.5.22)$$

Η απόλυτος αυτή τιμή γράφεται και σαν μέγιστη νόρμα ως εξής:

$$\|y_{2^m} - y_{2^{m-1}}\|_\infty := \max_{a \leq x \leq b} |y_{2^m}(x) - y_{2^{m-1}}(x)| \leq \varepsilon. \quad (2.5.23)$$

Γι' αυτήν την απόλυτο τιμή θέλουμε να μην υπερβαίνει ένα μικρό θετικό αριθμό  $\varepsilon$ , που τον έχουμε προεπιλέξει για το ανώτατο αποδεκτό σφάλμα στη διαφορά αυτή, όχι ασφαλώς και στην ίδια την προσέγγιση  $y_n(x)$ . Εάν η μέγιστη τιμή της πιο πάνω απολύτου τιμής της διαφοράς υπερβαίνει το  $\varepsilon$ , τότε πρέπει ίσως να επιλέξουμε ακόμη περισσότερους κόμβους (σημεία) στην αριθμητική ολοκλήρωση, π.χ.  $n^* = 2n$  (διπλούς) κόμβους. Με τον τρόπο αυτό υπό συνήθεις συνθήκες το σφάλμα  $\varepsilon$  στην πιο πάνω διαφορά θα μειωθεί σημαντικά. Ας μη λησμονείται εξάλλου ότι στην αριθμητική ολοκλήρωση Gauss (όπως, π.χ., στον κανόνα Gauss–Legendre) το σχετικό σφάλμα  $E_n$  (στην περίπτωση μας για  $a \leq x \leq b$ ) συνήθως μειώνεται πολύ δραστικά με την αύξηση του αριθμού των κόμβων  $n$ . (Αυτό συμβαίνει για συναρτήσεις με καλή συμπεριφορά, δηλαδή για συναρτήσεις που διαθέτουν επαρκή αριθμό συνεχών παραγώγων σε ολόκληρο το διάστημα ολοκληρώσεως  $[a, b]$ .)

Παραδείγματος χάρη, έχουμε ήδη αναφέρει τον κανόνα Gauss–Legendre. Αυτός είναι και ο κανόνας αριθμητικής ολοκληρώσεως που συνήθως χρησιμοποιείται για πεπερασμένα διαστήματα  $[a, b]$  με αναγωγή τους βέβαια στο βασικό διάστημα  $[-1, 1]$ . Για τον κανόνα αυτό το σφάλμα  $E_n[g]$  της αριθμητικής ολοκληρώσεως συναρτήσεως  $g(t)$  που διαθέτει επαρκή αριθμό συνεχών παραγώγων έχει την εξής μορφή (Hildebrand, 1974, Ενότητα 8.5, σ. 391):

$$E_n[g] = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n + 1) [(2n)!]^3} g^{(2n)}(\xi). \quad (2.5.24)$$

Στο σφάλμα αυτό  $E_n[g]$  η  $2n$  τάξεως παράγωγος  $g^{(2n)}(\xi)$  υπολογίζεται σε κάποια (άγνωστη) τιμή του  $\xi$ , αλλά πάντως μέσα στο διάστημα  $[-1, 1]$ . Υποθέτουμε ότι το μέγιστο της παραγώγου αυτής στο ίδιο διάστημα  $[-1, 1]$  είναι  $M_{2n}$ , δηλαδή

$$\|g^{(2n)}\|_\infty := \max_{-1 \leq \xi \leq 1} |g^{(2n)}(\xi)| = M_{2n}. \quad (2.5.25)$$

Τότε ο πιο πάνω τύπος (2.5.24) για το σφάλμα στη μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Legendre παίρνει τη μορφή της ακόλουθης ανισότητας, τώρα πλέον για την απόλυτο τιμή  $|E_n[g]|$  του σφάλματος  $E_n[g]$ :

$$|E_n[g]| \leq \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} M_{2n}. \quad (2.5.26)$$

Παρατηρούμε ότι τόσο ο αριθμητής όσο και ο παρονομαστής στο κλάσμα  $c_n$  των πιο πάνω τύπων (2.5.24) και (2.5.26), δηλαδή στο κλάσμα

$$c_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3}, \quad (2.5.27)$$

αυξάνονται καθώς μεγαλώνει το  $n$ , δηλαδή αυξάνεται ο αριθμός των κόμβων  $t_{in}$  στην αριθμητική ολοκλήρωση. Παρά ταύτα το ίδιο το κλάσμα  $c_n$  μειώνεται δραστικά με την αύξηση του αριθμού των κόμβων  $n$ , πιο συγκεκριμένα παίρνει τις εξής τιμές για  $1 \leq n \leq 10$  στον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Legendre που εξετάζουμε:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{3} = 3.33333 \times 10^{-1}, \\ c_2 &= \frac{1}{135} = 7.40741 \times 10^{-3}, \\ c_3 &= \frac{1}{15750} = 6.34921 \times 10^{-5}, \\ c_4 &= \frac{1}{3472875} = 2.87946 \times 10^{-7}, \\ c_5 &= \frac{1}{1237732650} = 8.07929 \times 10^{-10}, \\ c_6 &= \frac{1}{648984486150} = 1.54087 \times 10^{-12}, \\ c_7 &= \frac{1}{470050192111500} = 2.12743 \times 10^{-15}, \\ c_8 &= \frac{1}{449485496206621875} = 2.22477 \times 10^{-18}, \\ c_9 &= \frac{1}{548472191037902381250} = 1.82325 \times 10^{-21}, \\ c_{10} &= \frac{1}{831593536051667590451250} = 1.20251 \times 10^{-24}. \end{aligned} \quad (2.5.28)$$

Αυτή η ιδιαίτερα γρήγορη μείωση του κλάσματος  $c_n$  είναι εξαιρετικά ευπρόσδεκτη και συμβάλλει υπό συνηθισμένες συνθήκες στην επίσης γρήγορη μείωση του σφάλματος  $E_n[g]$  σύμφωνα με τον τύπο (2.5.24) ή μάλλον το σχετικό άνω φράγμα (2.5.26). Αλλ' η μείωση αυτή μπορεί να επιβραδυνθεί λιγότερο ή περισσότερο, αν το άνω φράγμα  $M_{2n}$  για την παράγωγο τάξεως  $2n$ , δηλαδή την παράγωγο  $g^{(2n)}(t)$ , της ολοκληρωτέας συναρτήσεως  $g(t)$ , αυξάνεται έντονα με την τάξη της παραγώγου της συναρτήσεως αυτής. Κάτι τέτοιο δε μπορεί βέβαια να αποκλεισθεί. Παρά ταύτα ας μη λησμονείται ότι η μέθοδος Gauss-Legendre συγκλίνει για συνεχείς συναρτήσεις που δε διαθέτουν παράγωγο καμίας τάξεως, συγκλίνει ακόμη και για τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις. Αλλά βέβαια σε τέτοιες περιπτώσεις η σύγκλιση είναι αργή. Απολύτως ανάλογα ισχύουν και για κάθε κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης τύπου Gauss.

Στο σημείο αυτό ας κάνουμε τις εξής υποθέσεις στη μέθοδο της αριθμητικής ολοκληρώσεως ή μέθοδο του Nyström που εξετάσαμε. Υποθέτουμε ότι ο πυρήνας  $K(x, t)$  και η επίσης γνωστή συνάρτηση  $f(x)$  είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις σε ολόκληρο το διάστημα ολοκληρώσεως  $[a, b]$ , ο πυρήνας  $K(x, t)$  μάλιστα και ως προς τις δύο μεταβλητές του  $x$  και  $t$ . Υποθέτουμε επιπλέον ότι έχουμε χρησιμοποιήσει έναν κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως που να συγκλίνει για  $n \rightarrow \infty$  για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση  $g(x)$ . (Τέτοιος κανόνας είναι, π.χ., ο κανόνας Gauss–Legendre.) Υπό τις υποθέσεις αυτές, εάν η ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους (2.5.1) έχει μία και μόνο μία λύση  $y(x)$ , τότε η προσέγγισή της  $y_n(x)$  με τη μέθοδο της αριθμητικής ολοκληρώσεως που βασίζεται στον κανόνα αυτό θα συγκλίνει στην  $y(x)$ . Η σύγκλιση αυτή θα ισχύει μάλιστα για κάθε σημείο  $x$  του διαστήματος ολοκληρώσεως  $[a, b]$ , δηλαδή θα έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x), \quad a \leq x \leq b. \quad (2.5.29)$$

Στη σχέση αυτή υποτίθεται ότι έχει χρησιμοποιηθεί τελικά η φυσική παρεμβολή ή παρεμβολή του Nyström (2.5.21) για τον καθορισμό της συναρτήσεως  $y_n(x)$  πέραν των σημείων ολοκληρώσεως  $t_{in}$  και σε κάθε σημείο του διαστήματος  $[a, b]$ . Οι σχετικές αποδείξεις περιλαμβάνονται στη μονογραφία του Baker (1977, Ενότητα 4.16, σσ. 432–440) και οδηγούν στο συμπέρασμα ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\|y_n - y\|_\infty] := \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \max_{a \leq x \leq b} |y_n(x) - y(x)| \right] = 0. \quad (2.5.30)$$

### Γ2.5.6. Σύγκριση με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων

Στην Ενότητα Γ2.4 αναφερθήκαμε στη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων για την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων. Παραδείγματος χάρη, για την κλασική μη ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους (2.5.1)

$$y(x) + \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2.5.31)$$

και με τη μηδενική αρχική προσέγγιση της λύσεως  $y_0(x) = 0$  η ακολουθία των προσεγγίσεων  $y_m(x)$  έχει τη μορφή (2.4.6), δηλαδή

$$y_m(x) = f(x) - \int_a^b K(x, t) y_{m-1}(t) dt, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.5.32)$$

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιούμε το δείκτη  $m$  αντί του  $n$  για την ακολουθία των προσεγγίσεων  $y_m(x)$ . Ο δείκτης  $n$  θα δηλώνει τον αριθμό των κόμβων της αριθμητικής ολοκληρώσεως.

Ασφαλώς είναι αρκετές φορές δυνατός ο υπολογισμός των όρων  $y_m(x)$  της ακολουθίας αυτής βάσει του πιο πάνω επαναληπτικού τύπου (2.5.32) με υπολογισμό των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων. Θέλουμε βέβαια να έχουμε σύγκλιση της μεθόδου για αυξανόμενες τιμές του  $m$ . Συχνά όμως για τον αναλυτικό υπολογισμό του ολοκληρώματος στον επαναληπτικό τύπο (2.5.32) απαιτείται επίπονη προσπάθεια, ιδίως μετά τις πρώτες δύο–τρεις προσεγγίσεις  $y_m(x)$ . Ακόμη και ειδικά προγράμματα συμβολικών υπολογισμών, όπως η *Mathematica* ή η *Maxima*, μπορεί να χρειάζονται πάρα πολύ χρόνο ή/και να οδηγούνται σε εξαιρετικά πολύπλοκα αναλυτικά αποτελέσματα. Ας μην ξεχνάμε εξάλλου ότι στην πράξη του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζονται και υπολογιστικά δύσκολα προβλήματα. Τέτοια προβλήματα μπορεί να μη διαθέτουν απλές αναλυτικές λύσεις. Συχνά μάλιστα δεν έχουν καθόλου αναλυτικές λύσεις ούτε απλές, αλλ’ ούτε και πολύπλοκες.

Σύμφωνα με τις σκέψεις αυτές είναι πρακτικά σκόπιμη η προσέγγιση του ολοκληρώματος στον επαναληπτικό τύπο (2.5.32) της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων. Για το σκοπό αυτό γίνεται χρήση αριθμητικής ολοκληρώσεως της μορφής (2.5.4), εννοείται ως προς τη μεταβλητή ολοκληρώσεως  $t$ . Τότε ο επαναληπτικός τύπος (2.5.32) παίρνει την εξής προσεγγιστική μορφή:

$$y_{m,n}(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n w_{in} K(x, t_{in}) y_{m-1,n}(t_{in}), \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.5.33)$$

Στη μορφή αυτή ο δείκτης  $m$  αναφέρεται στην τάξη της προσεγγίσεως (π.χ. εδώ έχουμε στην αρχή  $y_{0,n}(x) = 0$ , έπειτα  $y_{1,n}(x) = f(x)$ , κλπ.). Αντίθετα ο δείκτης  $n$  αναφέρεται στον αριθμό των χρησιμοποιούμενων κόμβων  $t_{in}$ . Με τον τρόπο αυτό (με αριθμητική ολοκλήρωση) η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων πήρε μια υπολογιστικά απλούστερη μορφή: τη μορφή (2.5.33). Υπήρξε όμως και κάποιο κόστος: η αύξηση του σφάλματος σε κάθε προσέγγιση  $y_{m,n}(x)$ , γιατί τώρα υπεισέρχεται και το σφάλμα  $E_n$  της αριθμητικής ολοκλήρωσεως.

Ασφαλώς το πρώτο πράγμα το οποίο χρειαζόμαστε για την εφαρμογή του προσεγγιστικού τύπου (2.5.33) είναι οι τιμές  $y_{m-1,n}(t_{in})$  της προσεγγίσεως  $y_{m-1,n}(x)$  στους  $n$  κόμβους  $t_{in}$  του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσεως που χρησιμοποιούμε. (Σημειώνουμε ότι κάνουμε διπλή προσέγγιση χρησιμοποιώντας τόσο τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων όσο και αριθμητική ολοκλήρωση.) Σε κάθε νέα προσέγγιση, θεωρώντας ότι ο αριθμός των κόμβων  $n$  είναι σταθερός, όπως ασφαλώς και ο κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσεως παραμένει ο ίδιος, χρειαζόμαστε τις τιμές αυτές από την προηγούμενη προσέγγιση. Επομένως, για να τις υπολογίσουμε, αρκεί απλά να εφαρμόσουμε τον προσεγγιστικό επαναληπτικό τύπο (2.5.33) στους κόμβους  $x = t_{kn}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) του κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσεως που χρησιμοποιούμε. Τότε προκύπτει αμέσως ότι

$$y_{m,n}(t_{kn}) = f(t_{kn}) - \sum_{i=1}^n w_{in} K(t_{kn}, t_{in}) y_{m-1,n}(t_{in}), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.5.34)$$

Με τον τρόπο αυτό από την αρχική προσέγγιση  $y_{0,n}(x) = 0$  βρίσκονται οι τιμές  $y_{1,n}(t_{kn}) = f(t_{kn})$  στους  $n$  κόμβους  $t_{kn}$  (πρώτη προσέγγιση). Οι τιμές αυτές  $y_{1,n}(t_{kn})$  ασφαλώς χρησιμοποιούνται αμέσως μετά για τον προσδιορισμό των επόμενων  $n$  τιμών  $y_{2,n}(t_{kn})$  (δεύτερη προσέγγιση), κλπ. Δεν είναι βέβαιο ότι η παρούσα τροποποιημένη (μέσω της αριθμητικής ολοκλήρωσεως) μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων συγκλίνει. (Μερικές φορές δε συγκλίνει η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων για ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm, όπως είναι η παρούσα, και χωρίς μάλιστα να φταίει η αριθμητική ολοκλήρωση που χρησιμοποιήσαμε επιπλέον.) Αλλ' έτσι κι αλλιώς (με σύγκλιση ή χωρίς σύγκλιση) η προσεγγιστική μέθοδος που στηρίζεται στον τύπο (2.5.34) δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια επαναληπτική μέθοδος επίλυσεως του βασικού συστήματος των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (2.5.17). Οι εξισώσεις αυτές προέκυψαν με τη μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσεως. Μάλιστα με μεταφορά του αθροίσματος στο δεξιό μέλος έχουμε τις εξισώσεις

$$y_n(t_{kn}) = f(t_{kn}) - \sum_{i=1}^n w_{in} K(t_{kn}, t_{in}) y_n(t_{in}), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5.35)$$

Η σύγκριση των δύο τύπων (2.5.34) και (2.5.35) μας αποκαλύπτει σαφώς ότι πρόκειται (στους τύπους (2.5.34)) για την επαναληπτική μέθοδο του Jacobi (σε μια λίγο τροποποιημένη μορφή της) για την επίλυση του συστήματος των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (2.5.35). Η επαναληπτική μέθοδος του Jacobi αποτελεί μια εναλλακτική δυνατότητα σε σχέση με τη χρήση μιας άμεσης μεθόδου επίλυσεως γραμμικών συστημάτων, όπως είναι η μέθοδος απαλοιφής του Gauss.

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η επίλυση των  $n$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (2.5.17) της Παραγράφου Γ2.5.3 μπορεί (μεταξύ διαφόρων αμέσων και επαναληπτικών δυνατοτήτων) να γίνει και με την επαναληπτική μέθοδο του Jacobi στην ελαφρά τροποποιημένη μορφή της (2.5.34). Τούτο ισχύει, εάν βέβαια συγκλίνει η μέθοδος αυτή. Στην ειδική όμως αυτή περίπτωση είναι ακριβώς σαν να είχαμε χρησιμοποιήσει τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων σε συνδυασμό με τον ίδιο (με εκείνο στην Παράγραφο Γ2.5.3) κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσεως (συνήθως τύπου Gauss με  $n$  κόμβους). Φαίνεται να είναι μάλλον αξιοσημείωτη η παρατήρηση αυτή, που συσχετίζει τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων με τη μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσεως κατά την αριθμητική επίλυση μη ομογενών ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm δευτέρου είδους.

Βέβαια, πρακτικά μιλώντας, ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί άμεσες μεθόδους, όπως είναι η απαλοιφή Gauss, σε περιπτώσεις μικρών συστημάτων γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, π.χ. μέχρι και 100 αγνώστους. Αντίθετα χρησιμοποιεί επαναληπτικές μεθόδους, όπως είναι οι μέθοδοι



Jacobi και Gauss–Seidel, σε περιπτώσεις μεγάλων συστημάτων, π.χ. με 1 000 ή και 10 000 αγνώστους. Πολύ περισσότερες λεπτομέρειες είναι διαθέσιμες στο βιβλίο των *Αριθμητικών Μεθόδων* (Μάρκελλος, 2001, Ενότητα 2.1 και 2.2, σσ. 47–67) και σε άλλα ακόμη πιο εξειδικευμένα βιβλία.

Αυτό που είναι βέβαιο είναι ότι ο Πολιτικός Μηχανικός συχνά αντιμετωπίζει στην εργασία του τεράστια συστήματα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων σε αναλύσεις σύνθετων κατασκευών που σχετίζονται με ποικίλες μεθόδους. Τέτοια συστήματα παρουσιάζονται: (α) στην Ανάλυση Γραμμικών Φορέων στις Κατασκευές, (β) στις Πεπερασμένες Διαφορές για την επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους, (γ) στα Πεπερασμένα Στοιχεία, (δ) στα Συνοριακά Στοιχεία, κλπ. Ασφαλώς δεν προσδοκά κανείς από τον Πολιτικό Μηχανικό να λύσει τέτοια συστήματα με το χέρι. Αναμένει όμως από αυτόν να έχει στοιχειώδεις σχετικές γνώσεις, που θα του επιτρέψουν να επιλέξει τον υπολογιστικά σωστό αλγόριθμο. Ένας τέτοιος αλγόριθμος πρέπει καταρχήν να έχει σύγκλιση και δεύτερο, και εξίσου σημαντικό, να έχει αρκετά γρήγορη σύγκλιση. Μια σωστή επιλογή αλγόριθμου θα επιτρέψει στον Πολιτικό Μηχανικό να βρει τη ζητούμενη λύση και μάλιστα σε πολύ μικρό κλάσμα του χρόνου που απαιτείται με τη χρήση ενός κακού (κατά περίπτωση βέβαια) αλγόριθμου (έστω και με αργή σύγκλιση). Τα σχόλια αυτά αναφέρονται βέβαια σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα επίλυσης ενός συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

Στην επόμενη (και τελευταία) παράγραφο (Παράγραφος Γ2.5.7) θα επανέλθουμε στην καθαυτό μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσης με τη χρήση του δημοφιλούς κανόνα Gauss–Legendre, στον οποίο ήδη έχουμε αναφερθεί. Θα παραθέσουμε ένα απλό αριθμητικό παράδειγμα με τους υπολογισμούς να έχουν εκτελεσθεί με τη χρήση της *Mathematica* (version 4.1). Ασφαλώς, εναλλακτικά, οι ίδιοι υπολογισμοί μπορούν να εκτελεσθούν και με άλλα προγράμματα όπως η *Maxima*.

### Γ2.5.7. Παράδειγμα

▼ **Παράδειγμα Γ2.5.7.1:** Σαν παράδειγμα της μεθόδου της αριθμητικής ολοκλήρωσης ή μεθόδου του Nyström για την αριθμητική επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm δεύτερου είδους θα επιλύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση (2.5.1) στο διάστημα  $[a, b] = [-1, 1]$ . Σαν πυρήνα  $K(x, t)$  και δεξιό μέλος  $f(x)$  θα πάρουμε τις εξής συγκεκριμένες συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις:

$$K(x, t) = e^{x+2t}, \quad f(x) = x^2. \quad (2.5.36)$$

Υπό τις συνθήκες αυτές η αρχική ολοκληρωτική εξίσωση (2.5.1) παίρνει τη συγκεκριμένη μορφή

$$y(x) + \int_{-1}^1 e^{x+2t} y(t) dt = x^2, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (2.5.37)$$

Τη μορφή αυτή την εξετάσαμε ήδη επιτυχώς και με τη μέθοδο των διαχωρίσιμων πυρήνων στο Παράδειγμα Γ2.3.2.2. Επίσης την εξετάσαμε και με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων στο Παράδειγμα Γ2.4.3.2 ανεπιτυχώς όμως. Παρουσιάστηκε απόκλιση της τελευταίας αυτής μεθόδου.

Για την αριθμητική επίλυση της ολοκληρωτικής αυτής εξισώσεως (2.5.37) θα χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss–Legendre με  $n = 10$  κόμβους. Οι κόμβοι αυτοί  $t_{in}$  και τα αντίστοιχα βάρη  $w_{in}$  (με  $n = 10$ ) προσδιορίστηκαν (με τη χρήση της *Mathematica*) σαν ρίζες του πολυωνύμου Legendre  $P_{10}(t)$  και με βάση τον τύπο (2.5.7) αντίστοιχα. Δεν υπάρχει κανένας λόγος αντιγραφής (ή έστω μεταφοράς) των τιμών τους από τον Πίνακα 1 της Παραγράφου Γ2.5.2. Μια τέτοια αντιγραφή, αν υιοθετηθεί βέβαια, πέραν του ότι θα είναι χρονοβόρα, μπορεί μάλιστα να οδηγήσει επίσης και σε κάποιο αριθμητικό λάθος σε κάποιο ψηφίο. (Ας εγκαταλειφθεί λοιπόν κάθε τέτοια σκέψη!) Ακολουθώντας κατά βήμα τη σχετική πορεία, την οποία έχουμε περιγράψει στην Παράγραφο Γ2.5.3, οδηγούμαστε στο σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (2.5.17) στην ειδική ολοκληρωτική εξίσωσή μας (2.5.37). Οι άγνωστοι στο σύστημα αυτό είναι οι τιμές

$$y_i := y_{10}(t_{i,10}), \quad i = 1, 2, \dots, 10. \quad (2.5.38)$$

Για λόγους οικονομίας χώρου θα παραθέσουμε εδώ μόνο την πρώτη από τις εξισώσεις αυτές: αυτήν που αναφέρεται στον κόμβο  $t_{1,10} \approx -0.973907$ . Η εξίσωση αυτή είναι η εξής:

$$1.003590y_1 + 0.010004y_2 + 0.021258y_3 + 0.042734y_4 + 0.082855y_5 + 0.150294y_6 \\ + 0.241915y_7 + 0.321944y_8 + 0.318363y_9 + 0.176564y_{10} = 0.948494 \quad (2.5.39)$$

με ακρίβεια έξι δεκαδικών ψηφίων. Εντούτοις οι υπολογισμοί έγιναν με τη συνηθισμένη ακρίβεια των 15 περίπου σημαντικών ψηφίων που χρησιμοποιούν συνήθως οι υπολογιστές. Την ακρίβεια αυτή την υιοθετούν επίσης (εκτός από την περίπτωση αντίθετης ρητής εντολής του χρήστη) η *Mathematica* και η *Maxima*.

Με την επίλυση των  $n = 10$  γραμμικών αυτών αλγεβρικών εξισώσεων (για όλους τους κόμβους  $t_{i,10}$  της αριθμητικής ολοκληρώσεως) βρέθηκαν οι επίσης  $n = 10$  άγνωστες προσεγγιστικές τιμές  $y_i$ , που ορίστηκαν στις εξισώσεις (2.5.38). Οι τιμές αυτές που προσδιορίστηκαν είναι οι εξής:

$$y_1 = +0.865971, \quad y_2 = +0.656323, \quad y_3 = +0.350815, \quad y_4 = +0.046150, \\ y_5 = -0.166149, \quad y_6 = -0.231461, \quad y_7 = -0.149267, \\ y_8 = +0.030476, \quad y_9 = +0.229263, \quad y_{10} = +0.369735. \quad (2.5.40)$$

Με βάση τις προσεγγιστικές αυτές τιμές  $y_i$  ο τύπος φυσικής παρεμβολής ή παρεμβολής του Nyström (2.5.21) για την προσέγγιση  $y_{10}(x)$  (με  $n = 10$  κόμβους και ταυτόχρονα σημεία εφαρμογής της ολοκληρωτικής εξισώσεως στην προσεγγιστική έκφρασή της) παίρνει την εξής απλή μορφή:

$$y_{10}(x) = x^2 - 0.218542e^x, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (2.5.41)$$

Η φυσική αυτή παρεμβολή αναφέρεται βέβαια στην προσεγγιστική λύση  $y_{10}(x)$  της στοιχειώδους ολοκληρωτικής εξισώσεως (2.5.37). Ο λόγος που επέτρεψε μια τόσο απλή μορφή (χωρίς δηλαδή να υπάρξει άθροισμα) στον τύπο αυτό φυσικής παρεμβολής (2.5.41) είναι απλά ότι ο γνωστός πυρήνας  $K(x, t)$  της ολοκληρωτικής εξισώσεως (2.5.37) στο παράδειγμα που εξετάζουμε εδώ είναι διαχωρίσιμος πυρήνας, δηλαδή

$$K(x, t) = e^{x+2t} = e^x e^{2t}. \quad (2.5.42)$$

Για το λόγο αυτό είναι εύλογη η εμφάνιση του εκθετικού όρου  $e^x$  στον πιο πάνω τύπο φυσικής παρεμβολής ή παρεμβολής του Nyström (2.5.41).

Η επίλυση των  $n$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (2.5.17) επιτεύχθηκε με άμεσο τρόπο με τη χρήση της *Mathematica*. Πρέπει μάλιστα να σημειωθεί ότι η χρήση της (τροποποιημένης) επαναληπτικής μεθόδου του Jacobi (2.5.34) (με τον ίδιο κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως) στη συγκεκριμένη ολοκληρωτική εξίσωση (2.5.37) δεν είναι εφικτή. Με άλλα λόγια η μέθοδος αυτή οδηγεί σε αποτελέσματα που αποκλίνουν, δε συγκλίνουν. Αυτό διαπιστώθηκε και αριθμητικά. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι ο πυρήνας  $K(x, t) = e^{x+2t}$  (πρώτη σχέση (2.5.36)) παίρνει αξιολογα μεγάλες τιμές στην περιοχή  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  (για  $(x, t) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ ). Με όμοιο τρόπο βέβαια αποκλίνει και η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων στη συγκεκριμένη ολοκληρωτική εξίσωση (2.5.37), όπως ήδη έχουμε δει στο Παράδειγμα Γ2.4.3.2. Αντίθετα είναι φυσικά ιδιαίτερα αποτελεσματική η μέθοδος των διαχωρίσιμων πυρήνων, όπως έχουμε διαπιστώσει στο Παράδειγμα Γ2.3.2.2.

Πραγματικά η κλειστή λύση (2.3.28) στο τελευταίο αυτό παράδειγμα συμπίπτει απόλυτα με την αριθμητική λύση (2.5.41) (σε περισσότερα από 15 σημαντικά ψηφία). Το γεγονός αυτό μας δείχνει επίσης ότι η ο κανόνας Gauss-Legendre με  $n = 10$  κόμβους, που χρησιμοποιήθηκε στο παρόν παράδειγμα, είναι απόλυτα επαρκής για την εξασφάλιση 15 σωστών σημαντικών ψηφίων. Άρα για λιγότερα σωστά σημαντικά ψηφία θα μπορούσε ασφαλώς να είχε χρησιμοποιηθεί και μικρότερος αριθμός κόμβων  $n$ . Δεν πρέπει φυσικά να λησμονούμε το γεγονός πως ο αριθμός  $n$  των κόμβων ισούται με τον αριθμό των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (2.5.17) που πρέπει να επιλυθεί. ▲

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ

## ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούν ορισμένες εφαρμογές των ολοκληρωτικών εξισώσεων σε προβλήματα της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού. Σε ορισμένες από τις εφαρμογές αυτές μεταξύ άλλων θα εξετασθούν:

1. Η συσχέτιση των ολοκληρωτικών εξισώσεων με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με αναγωγή των συνήθων διαφορικών εξισώσεων σε ολοκληρωτικές και αντίστροφα.
2. Η επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων με τις κλασικές μεθόδους που ήδη έχουν αναφερθεί και επιδειχθεί μέσω παραδειγμάτων στο Κεφάλαιο Γ2.
3. Η δυνατότητα της αυτοδύναμης χρήσεως των ολοκληρωτικών εξισώσεων σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού εντελώς ανεξάρτητα από τις διαφορικές εξισώσεις.
4. Η επίδειξη των δυνατοτήτων που προσφέρει η μέθοδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων και (σε αρκετές περιπτώσεις) των πλεονεκτημάτων της σε σύγκριση με εναλλακτικές μεθόδους επίλυσης των ίδιων προβλημάτων.

Στόχο του παρόντος κεφαλαίου αποτελεί η διαπίστωση από το φοιτητή και τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό ότι οι ολοκληρωτικές εξισώσεις δεν αποτελούν απλά ένα θεωρητικό κατασκεύασμα με ενδιαφέρον μόνο για τους Μαθηματικούς ή, έστω, και τους Φυσικούς σε θεωρητικά προβλήματα. Είναι πραγματικά πρακτικά χρήσιμες και στο Μηχανικό, εν προκειμένω στον Πολιτικό Μηχανικό, στους καθημερινούς υπολογισμούς του είτε αναλυτικούς είτε αριθμητικούς.

### Γ3.1. ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Εξετάζουμε την ελεύθερη πτώση υλικού σημείου  $M$  κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα  $Ox$  (με θετική διεύθυνση προς τα επάνω) και υπό την αποκλειστική επίδραση της γήινης βαρύτητας. Η θέση  $x(t)$ , η ταχύτητα  $v(t)$  και η επιτάχυνση  $a(t)$  του υλικού αυτού σημείου υποτίθενται ότι προσδιορίστηκαν πειραματικά, δηλαδή από παρατηρήσεις στη συγκεκριμένη αυτή πτώση. Τα μεγέθη αυτά δίνονται από τους εξής τύπους:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0, \quad v(t) = -gt + v_0, \quad a(t) = -g, \quad t \geq 0, \quad (3.1.1)$$

με  $t$  το χρόνο και τα  $x_0$ ,  $v_0$  και  $g$  σταθερές. Η τελευταία αυτή σταθερά  $g$  προφανώς αναφέρεται στη σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας, που έχει μάλιστα διεύθυνση προς τη γη.

Καταρχήν παρατηρούμε ότι οι αρχικές τιμές (τη χρονική στιγμή  $t = 0$ ) της θέσεως  $x(t)$  και της ταχύτητας  $v(t)$  είναι ίσες με  $x(0) = x_0$  και  $v(0) = v_0$  αντίστοιχα. Επομένως το υλικό σημείο  $M$  έχει

ξεκινήσει από τη θέση  $x_0$  και με ταχύτητα  $v_0$  (προς τα επάνω για  $v_0 > 0$ , προς τα κάτω για  $v_0 < 0$  καθώς και για  $v_0 = 0$ ).

Στο τόσο απλό και κλασικό αυτό πρόβλημα της Κινηματικής-Δυναμικής του υλικού σημείου μπορούμε αμέσως να διαπιστώσουμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις

$$\dot{y}(t) = v(t), \quad \dot{v}(t) = a(t), \quad t \geq 0, \quad (3.1.2)$$

έχουν λύσεις  $y(t)$  τις πιο πάνω συναρτήσεις  $x(t)$  και  $v(t)$  αντίστοιχα. Πραγματικά

$$\dot{x}(t) = -gt + v_0 = v(t), \quad \dot{v}(t) = -g = a(t). \quad (3.1.3)$$

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε ότι οι ήδη αναφερθείσες στην Ενότητα Γ1.1 μη ομογενείς γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra πρώτου είδους

$$x(t) = x_0 + \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad v(t) = v_0 + \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0, \quad (3.1.4)$$

έχουν λύσεις  $y(t)$  τις συναρτήσεις  $v(t)$  και  $a(t)$  αντίστοιχα. Πραγματικά

$$\int_0^t v(\tau) d\tau = \int_0^t (-g\tau + v_0) d\tau = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t = x(t) - x_0. \quad (3.1.5)$$

Άρα ισχύει η πρώτη πιο πάνω ολοκληρωτική εξίσωση (3.1.4) για  $y(t) = v(t)$  εξαιτίας και των σχέσεων (3.1.1). Επίσης

$$\int_0^t a(\tau) d\tau = \int_0^t (-g) d\tau = -gt = v(t) - v_0 \quad (3.1.6)$$

και πάλι λόγω των ίδιων σχέσεων (3.1.1). Άρα ισχύει και η δεύτερη ολοκληρωτική εξίσωση (3.1.4): αυτή ισχύει για  $y(t) = a(t)$ .

Επομένως το συμπέρασμα είναι ότι οι παρατηρηθείσες εκφράσεις (3.1.1) της θέσεως  $x(t)$ , της ταχύτητας  $v(t)$  και της επιταχύνσεως  $a(t)$  του υλικού σημείου  $M$  κατά την παραπάνω ελεύθερη πτώση του πληρούν τις σχετικές διαφορικές εξισώσεις. Πληρούν επίσης και τις αντίστοιχες ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra πρώτου είδους. Προφανώς η παρούσα εφαρμογή των ολοκληρωτικών εξισώσεων στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού είναι ιδιαίτερα απλή αφορώντας σε επαλήθευση παρά σε εύρεση λύσεως. Δυσκολότερες εφαρμογές θα αναφερθούν σε επόμενες ενότητες του κεφαλαίου αυτού.

### Γ3.2. ΑΠΛΗ ΡΩΓΜΗ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟ ΜΕΣΟΝ

Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα της απλής ευθύγραμμης ρωγμής κατά μήκος του άξονα  $Ox$  μήκους  $2a$  (με  $-a \leq x \leq a$ ). Η ρωγμή αυτή έχει σχηματισθεί μέσα σε άπειρο (δηλαδή πρακτικά επαρκώς μεγάλων διαστάσεων σχετικά με το μήκος  $2a$  της ρωγμής) ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό μέσον υπό συνθήκες γενικευμένης επίπεδης εντάσεως ή επίπεδης παραμορφώσεως. Η φόρτιση του ρηγματωμένου (με ρωγμή) αυτού μέσου είναι μια σταθερή εφελκυστική τάση  $\sigma$  στο άπειρο κάθετα προς τη διεύθυνση της ρωγμής (δηλαδή κατά τη διεύθυνση του άξονα  $Oy$ ).

Αποδεικνύεται ότι το πρόβλημα αυτό της Επίπεδης Ελαστικότητας και της Μηχανικής της Θραύσεως ανάγεται στην εξής μονοδιάστατη, μη ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} dt = \sigma, \quad -a \leq x \leq a. \quad (3.2.1)$$

Η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση συνοδεύεται από τη συνθήκη του μονοσήμαντου των μετατοπίσεων

$$\int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - t^2}} g(t) dt = 0. \quad (3.2.2)$$

Η άγνωστη συνάρτηση  $g(t)$  επί  $1/\sqrt{a^2 - t^2}$  είναι ανάλογη της κλίσεως των χειλέων της ρωγμής. Με τη βοήθειά της μπορούν άμεσα να υπολογισθούν οι **συντελεστές εντάσεως τάσεων**  $K$  στα δύο άκρα  $t = \pm a$  της ρωγμής με βάση τους τύπους

$$K(a) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} g(a), \quad K(-a) = -\sqrt{\frac{\pi}{a}} g(-a). \quad (3.2.3)$$

Οι συντελεστές εντάσεως τάσεων  $K$  είναι αυτοί που ουσιαστικά καθορίζουν το πότε θα επέλθει η θραύση του δοκιμίου. Αυτό συμβαίνει, επειδή προφανώς η έναρξη της θραύσεως θα γίνει από ένα άκρο ρωγμής. Στη γειτονιά ενός άκρου ρωγμής αναπτύσσονται εξαιτίας της ιδιόμορφης γεωμετρίας του (με γωνία  $2\pi$  rad μεταξύ των χειλέων της ρωγμής στα άκρα της) πάρα πολύ υψηλές τάσεις. Θεωρητικά τουλάχιστον (αγνοώντας την πλαστική παραμόρφωση) οι τάσεις αυτές τείνουν στο άπειρο. Πιο συγκεκριμένα η θραύση αρχίζει, όταν ένας συντελεστής εντάσεως τάσεων  $K$  σε ένα άκρο της ρωγμής (όχι αναγκαία και οι δύο συντελεστές εντάσεως τάσεων και στα δύο άκρα) φθάσει σε μια ορισμένη κρίσιμη τιμή  $K_0$ . Η τιμή αυτή εξαρτάται από το ισότροπο ελαστικό υλικό του δοκιμίου μας. Θα αρχίσει δηλαδή η θραύση, εννοείται με διάδοση της ρωγμής που υπάρχει, όταν

$$K = K_0 \implies \text{έναρξη θραύσεως.} \quad (3.2.4)$$

Είναι επομένως ιδιαίτερα ενδιαφέρον να ξέρουμε τις τιμές του συντελεστή εντάσεως τάσεων  $K$  στα δύο άκρα της ρωγμής. Θα είμαστε έτσι βέβαιοι (με δεδομένα το μήκος της ρωγμής  $2a$  και την τιμή  $\sigma$  της εφελκυστικής τάσεως στο άπειρο και κάθετα προς τη ρωγμή) για το εάν ισχύει ή όχι η εξής λογική σύζευξη (με τη χρήση ανισοτήτων  $<$  καθώς και του και στη Λογική, του λογικού και):

$$K(a) < K_0 \quad \text{και} \quad K(-a) < K_0 \implies \text{αποφυγή θραύσεως.} \quad (3.2.5)$$

Αντίθετη της λογικής αυτής συζεύξεως είναι η ακόλουθη λογική διάζευξη (με τη χρήση ανισοτήτων  $\geq$  και του ή στη Λογική, του λογικού ή):

$$K(a) \geq K_0 \quad \text{ή} \quad K(-a) \geq K_0 \implies \text{θραύση.} \quad (3.2.6)$$

Η έναρξη της θραύσεως θα γίνει για  $K(a) = K_0$  ή  $K(-a) = K_0$ . Οι τόσο απλοί αυτοί τύποι είναι οι τύποι που χρησιμοποιούνται στη Μηχανική της Θραύσεως για τον έλεγχο της θραύσεως και την επιδίωξη της αποφυγής της. Παραδείγματος χάρη, ο Πολιτικός Μηχανικός μπορεί να αποφύγει τη θραύση επιδιώκοντας (σε περίπτωση που δε μπορεί να αποφύγει την ύπαρξη ρωγμών) τουλάχιστον οι ρωγμές να έχουν μικρά μήκη  $2a$ . Επίσης μικρές τιμές  $\sigma$  της εφελκυστικής τάσεως στο άπειρο και κάθετα στη ρωγμή προφανώς οδηγούν σε μικρές τιμές των συντελεστών εντάσεως τάσεων  $K(a)$  και  $K(-a)$ .

Πίσω από τα απλά αυτά λόγια και τον εξίσου απλό τύπο (3.2.5) για την αποφυγή της θραύσεως που επιδιώκουμε κρύβεται η επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης που ισχύει κάθε φορά. Συνήθως η επίλυση αυτή δεν είναι απλή. Εν προκειμένω επιλέξαμε την απλούστερη δυνατή περίπτωση: αυτήν της απλής ευθύγραμμης ρωγμής μέσα σε άπειρο ισότροπο και γραμμικά ελαστικό μέσον. Στην απλή αυτή περίπτωση ο ολοκληρωτική εξίσωση (3.2.1) έχει μια εξαιρετικά απλή κλειστή λύση: τη λύση

$$g(x) = \sigma x. \quad (3.2.7)$$

Η λύση αυτή μπορεί πάρα πολύ εύκολα να ελεγχθεί ότι πληροί την ολοκληρωτική εξίσωση (3.2.1). Αυτό συμβαίνει, επειδή

$$\frac{g(t) - g(x)}{t - x} = \frac{\sigma t - \sigma x}{t - x} = \sigma \quad (3.2.8)$$

και

$$J := \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = 1, \quad (3.2.9)$$

όπως εύκολα διαπιστώνεται. Παραδείγματος χάρη, το πιο πάνω ολοκλήρωμα  $J$  μπορεί να υπολογισθεί με την αλλαγή μεταβλητής

$$t = a \sin \theta \implies \sqrt{a^2 - t^2} = a \cos \theta, \quad dt = a \cos \theta d\theta. \quad (3.2.10)$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$J = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a \cos \theta} a \cos \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{\pi} = 1. \quad (3.2.11)$$

Επίσης άμεσα διαπιστώνεται ότι η ίδια λύση (3.2.7) πληροί και τη συνθήκη του μονοσήμαντου των μετατοπίσεων (3.2.2). Αυτό ισχύει, γιατί η λύση αυτή (3.2.7) είναι περιττή συνάρτηση στο συμμετρικό (ως προς το κέντρο  $O$  της ρωγμής) διάστημα ολοκληρώσεως  $[-a, a]$ . Κατά συνέπεια η ίδια λύση,  $g(x) = \sigma x$ , είναι η λύση του παρόντος και ομολογουμένως εξαιρετικά απλού προβλήματος ρωγμής στην Επίπεδη Ελαστικότητα και στη Μηχανική της Θραύσεως.

Όσον αφορά τέλος στους συντελεστές εντάσεως τάσεων  $K(\pm a)$  στα δύο άκρα  $x = \pm a$  της ρωγμής, αυτοί προσδιορίζονται ευκολότατα βάσει των τύπων (3.2.3). Στο απλό πρόβλημά μας λόγω της λύσεως (3.2.7) και οι δύο αυτοί συντελεστές  $K(\pm a)$  είναι ίσοι με

$$K(\pm a) \equiv K = \sigma \sqrt{\pi a}. \quad (3.2.12)$$

Επομένως για την αποφυγή της διαδόσεως της ρωγμής και της θραύσεως του δοκιμίου (κάτι που είναι επιθυμητό για τον Πολιτικό Μηχανικό), θα πρέπει σύμφωνα με τη λογική σύζευξη ανισοτήτων (3.2.5) να έχουμε

$$\sigma \sqrt{\pi a} < K_0 \implies \sigma < \frac{K_0}{\sqrt{\pi a}} \quad \text{ή} \quad 2a < \frac{2}{\pi} \left( \frac{K_0}{\sigma} \right)^2. \quad (3.2.13)$$

Δηλαδή θα πρέπει η εφελκυστική τάση  $\sigma$  που επιβάλλεται στο άπειρο να είναι επαρκώς μικρή ή/και το μήκος της ρωγμής  $2a$  να είναι αρκετά μικρό. Βέβαια δεν πρέπει επίσης να λησμονείται ότι το φράγμα  $K_0$  του συντελεστή εντάσεως τάσεων εξαρτάται από το ελαστικό υλικό που χρησιμοποιείται. Έτσι σε ένα πρόβλημα μελέτης (σχεδιάσεως, design) και οι τρεις ποσότητες:  $\sigma$ ,  $2a$  και  $K_0$ , έχουν τη σημασία τους. Εντούτοις θα ήταν σαφώς προτιμότερο για τον Πολιτικό Μηχανικό να μην υπάρχει καθόλου η ρωγμή, η οποία παρουσιάζει (θεωρητικά τουλάχιστον) σχεδόν απειρισμό των τάσεων του δοκιμίου γύρω από τα άκρα της. Αντίθετα μια κυκλική (ή μια ελλειπτική) οπή στο επίπεδο ελαστικό μέσον δημιουργεί απλά συγκέντρωση μιας τάσεως γύρω από ορισμένα, δύο συνήθως, σημεία της. Οπωσδήποτε όμως δεν προκαλεί τον απειρισμό κάποιας τάσεως.

### Γ3.3. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΚΙΝΗΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΜΕ ΑΝΤΙΣΤΑΣΗ ΤΟΥ ΑΕΡΑ

Στις προηγούμενες δύο εφαρμογές του παρόντος κεφαλαίου (ελεύθερη πτώση υλικού σημείου, Ενότητα Γ3.1, και απλή ρωγμή σε ελαστικό μέσον, Ενότητα Γ3.2) ουσιαστικά επαληθεύσαμε την ισχύ των σχετικών ολοκληρωτικών εξισώσεων βάσει των λύσεων που διαθέτουμε. Αντίθετα στην παρούσα εφαρμογή θα προχωρήσουμε στην επίλυση της ολοκληρωτικής εξισώσεως που ισχύει αντί απλά της επαληθεύσεώς της.

Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα της κατακόρυφης κινήσεως υλικού σημείου  $M$  (μάζας  $m$ ) υπό την επίδραση του γήινου πεδίου βαρύτητας (με επιτάχυνση  $g$  προς τα κάτω), όπως και στην Ενότητα Γ3.1. Εν προκειμένω όμως δεχόμαστε και αντίσταση του αέρα  $mc\dot{x}(t) = mc\dot{x}(t)$  (με σταθερά αναλογίας  $c_0 = mc > 0$ ) ανάλογη της ταχύτητας  $v(t) = \dot{x}(t)$  του υλικού σημείου  $M$ . Το υλικό σημείο  $M$  ξεκινάει την κίνησή του (προς τα επάνω ή/και προς τα κάτω) από την αρχική θέση του  $x(0) = x_0$  και με αρχική ταχύτητα  $\dot{x}(0) = v(0) = v_0$ . Με βάση το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα προκύπτει η εξής διαφορική εξίσωση της κινήσεως του υλικού σημείου  $M$ :

$$m\ddot{x}(t) = -mg - mc\dot{x}(t) \implies \ddot{x}(t) = -g - c\dot{x}(t), \quad c > 0, \quad t \geq 0, \quad (3.3.1)$$

μετά βέβαια από διαίρεση δια της μάζας  $m$ . Από τη διαφορική αυτή εξίσωση μαζί με τις αρχικές συνθήκες που ήδη αναφέρθηκαν:

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v(0) = v_0 \quad (3.3.2)$$

προκύπτει η θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου  $M$ . Η θέση αυτή έχει την εξής έκφραση:

$$x(t) = x_0 - \frac{gt}{c} + \frac{g + cv_0}{c^2} (1 - e^{-ct}), \quad t \geq 0. \quad (3.3.3)$$

Στην παρούσα εφαρμογή ενδιαφερόμαστε για την εναλλακτική δυνατότητα χρήσεως ολοκληρωτικής εξισώσεως Volterra αντί για διαφορική εξίσωση. Η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση θα ισοδυναμεί με ολόκληρο το πιο πάνω πρόβλημα αρχικών τιμών (3.3.1) και (3.3.2) λαμβάνοντας υπόψη τόσο τη διαφορική εξίσωση (3.3.1) όσο και τις αρχικές συνθήκες (3.3.2) που τη συνοδεύουν. Ένας δημοφιλής τρόπος αναγωγής ενός προβλήματος αρχικών τιμών σε ολοκληρωτική εξίσωση είναι άμεσα με ολοκληρώσεις (δύο στην περίπτωσή μας) της διαφορικής εξισώσεως ως προς το χρόνο  $t$ . Φυσικά οι αρχικές συνθήκες πρέπει να λαμβάνονται και αυτές συγχρόνως υπόψη.

Εν προκειμένω εμείς θα υιοθετήσουμε την εξίσου απλή και κλασική δυνατότητα της αλλαγής της άγνωστης συναρτήσεως στη διαφορική εξίσωση από τη θέση  $x(t)$  στη δεύτερη παράγωγο της

$$a(t) = \ddot{x}(t), \quad (3.3.4)$$

δηλαδή στην επιτάχυνση  $a(t)$  του υλικού σημείου  $M$ . Εάν η επιτάχυνση αυτή προσδιορισθεί, τότε η ταχύτητα  $v(t)$  και η θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου  $M$  προκύπτουν άμεσα με ολοκληρώσεις, δηλαδή

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau, \quad x(t) = x_0 + \int_0^t v(\tau) d\tau. \quad (3.3.5)$$

Η δυνατότητα αυτή αναφέρθηκε ήδη και στην Ενότητα Γ1.1: τύποι (1.1.13) και (1.1.4) εκεί αντίστοιχα.

Με βάση τον ορισμό (3.3.4) και τον πρώτο από τους ολοκληρωτικούς τύπους (3.3.5) (για την ταχύτητα  $v(t) = \dot{x}(t)$ ), η διαφορική εξίσωση (3.3.1) παίρνει την ακόλουθη μορφή μη ομογενούς ολοκληρωτικής εξισώσεως Volterra δευτέρου είδους

$$a(t) = -g - c \left( v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau \right), \quad t \geq 0. \quad (3.3.6)$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί εύκολα να επιλυθεί και να μας δώσει την άγνωστη επιτάχυνση  $a(t)$  του υλικού σημείου  $M$ . Αμέσως παρακάτω θα επιδείξουμε δύο απλές μεθόδους επιλύσεως της ολοκληρωτικής αυτής εξισώσεως (3.3.6).

• **Μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace:** Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της ολοκληρωτικής εξισώσεως (3.3.6). Συμβολίζουμε με  $A(s)$  το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης επιταχύνσεως  $a(t)$ . Τότε προκύπτει άμεσα η ακόλουθη πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση:

$$A(s) = -\frac{g}{s} - \frac{cv_0}{s} - \frac{cA(s)}{s}. \quad (3.3.7)$$

Η λύση της  $A(s)$  είναι προφανώς η εξής:

$$A(s) = -\frac{g + cv_0}{s + c}. \quad (3.3.8)$$

Η αντιστροφή του παραπάνω μετασχηματισμού Laplace είναι επίσης ευκολότατη στην παρούσα απλή εφαρμογή και μας δίνει την επιτάχυνση  $a(t)$  του υλικού σημείου  $M$ :

$$a(t) = -(g + cv_0)e^{-ct}. \quad (3.3.9)$$

Είναι εύλογο που η επιτάχυνση αυτή  $a(t)$  είναι αρνητική για  $v_0 > 0$  με (αρχικά τουλάχιστον) κίνηση του υλικού σημείου  $M$  προς τα επάνω. Αυτό είναι σωστό, αφού η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$  είναι αρνητική (προς τα κάτω), ενώ ο αέρας ανθίσταται στην προς τα επάνω αυτή κίνηση: με  $c > 0$ , όπως ήδη έχει υποθεθεί. Ας σημειωθεί επίσης ότι η επαλήθευση του αποτελέσματος αυτού, που είναι πολύ απλή, μας επιβεβαιώνει την ορθότητα των πιο πάνω υπολογισμών.

• **Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων:** Ένας εναλλακτικός και ασφαλώς ενδιαφέρων τρόπος επιλύσεως της ίδιας ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.3.6) είναι η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων. Η μέθοδος αυτή περιγράφηκε στην Ενότητα Γ2.4. Σύμφωνα με την ίδια μέθοδο, μπορούμε να δεχθούμε καταρχήν σαν αρχική προσέγγιση (πολύ κακή βέβαια)  $a_0(t)$  της άγνωστης συναρτήσεως (δηλαδή της επιταχύνσεως  $a(t)$  του υλικού σημείου  $M$ ) τη μηδενική συνάρτηση

$$a_0(t) = 0. \quad (3.3.10)$$

Στη συνέχεια μπορούμε να προχωρήσουμε σε παραπέρα διαδοχικές προσεγγίσεις  $a_n(t)$  ( $n \geq 1$ ) της ίδιας συναρτήσεως  $a(t)$  βάσει του επαναληπτικού τύπου

$$a_n(t) = -g - c \left( v_0 + \int_0^t a_{n-1}(\tau) d\tau \right) \quad \text{με } t \geq 0 \quad \text{και } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.3.11)$$

Θεωρούμε δηλαδή στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της ολοκληρωτικής μας εξίσωσης (3.3.6) την άγνωστη συνάρτηση  $a(t)$  «γνωστή» προσεγγιστικά την πρώτη φορά σαν  $a_0(t) = 0$ . Έπειτα υπολογίζουμε μια καλύτερη (υποθετικά τουλάχιστον) προσέγγιση με εφαρμογή του παραπάνω επαναληπτικού τύπου (3.3.11), π.χ. την πρώτη φορά την καλύτερη προσέγγιση

$$a_1(t) = -(g + cv_0). \quad (3.3.12)$$

Για να είμαστε ειλικρινείς, η προσέγγιση αυτή (3.3.12) στ' αλήθεια είναι καλύτερη προσέγγιση σε σχέση με την προσέγγιση  $a_0(t) = 0$  που είχαμε υιοθετήσει αρχικά. (Αυτή τουλάχιστον η νέα προσέγγιση, η  $a_1(t) = -(g + cv_0)$ , παρόλο που είναι σταθερά, ισούται εντούτοις με την αρχική επιτάχυνση  $a(0)$  του υλικού σημείου  $M$ .)

Συνεχίζοντας, προσδιορίζουμε και τις επόμενες προσεγγίσεις  $a_n(t)$  της άγνωστης συναρτήσεως  $a(t)$ . Οι πρώτες από αυτές (μέχρι και  $n = 8$ ) είναι οι εξής:

$$\begin{aligned} a_2(t) &= -(g + cv_0)(1 - ct), \\ a_3(t) &= -(g + cv_0) \left( 1 - ct + \frac{c^2 t^2}{2} \right), \\ a_4(t) &= -(g + cv_0) \left( 1 - ct + \frac{c^2 t^2}{2} - \frac{c^3 t^3}{6} \right), \\ a_5(t) &= -(g + cv_0) \left( 1 - ct + \frac{c^2 t^2}{2} - \frac{c^3 t^3}{6} + \frac{c^4 t^4}{24} \right), \\ a_6(t) &= -(g + cv_0) \left( 1 - ct + \frac{c^2 t^2}{2} - \frac{c^3 t^3}{6} + \frac{c^4 t^4}{24} - \frac{c^5 t^5}{120} \right), \\ a_7(t) &= -(g + cv_0) \left( 1 - ct + \frac{c^2 t^2}{2} - \frac{c^3 t^3}{6} + \frac{c^4 t^4}{24} - \frac{c^5 t^5}{120} + \frac{c^6 t^6}{720} \right), \\ a_8(t) &= -(g + cv_0) \left( 1 - ct + \frac{c^2 t^2}{2} - \frac{c^3 t^3}{6} + \frac{c^4 t^4}{24} - \frac{c^5 t^5}{120} + \frac{c^6 t^6}{720} - \frac{c^7 t^7}{5040} \right). \end{aligned} \quad (3.3.13)$$



Παρατηρούμε ότι οι διαδοχικές αυτές προσεγγίσεις έχουν της εξής μορφή:

$$a_n(t) = -(g + cv_0) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{c^k t^k}{k!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.3.14)$$

συγκλίνοντας (για  $n \rightarrow \infty$ ) προφανώς στην εκθετική μορφή (3.3.9). Αυτή ήδη βρέθηκε με εντελώς διαφορετική μέθοδο: εκείνη της εφαρμογής του μετασχηματισμού Laplace. Ασφαλώς και αντίστροφα η εκθετική αυτή μορφή (3.3.9) έχει ανάπτυγμα σε σειρά Maclaurin τη μορφή (3.3.14) συν τον όρο υπολοίπου  $R_{n-1}(t)$ , που τείνει στο μηδέν για  $n \rightarrow \infty$ . Το συμπέρασμα είναι ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση (ακριβώς όπως και σε πολλές άλλες περιπτώσεις) η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων συγκλίνει για  $n \rightarrow \infty$ . Βέβαια ο Πολιτικός Μηχανικός θα κρίνει μέχρι ποιας ακριβώς προσεγγίσεως  $a_n(t)$  θα πρέπει να προχωρήσει σε ένα πρακτικό πρόβλημα. Τούτο θα εξαρτάται βέβαια και από την ακρίβεια που επιδιώκει να πετύχει τελικά. Ας σημειωθεί επίσης ότι ο προγραμματισμός της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων είναι εξαιρετικά απλός. Εν προκειμένω μπορεί να γίνει μέσω μιας μόνο εντολής στη *Mathematica* (Wolfram, 1999).

Οι τελικοί υπολογισμοί που είναι σκόπιμο (ή μάλλον αναγκαίο) να εκτελεσθούν αφορούν στην εύρεση της ταχύτητας  $v(t)$  και της θέσεως  $x(t)$  του υλικού σημείου  $M$ . Αυτό μπορεί πολύ εύκολα να επιτευχθεί μέσω δύο ολοκληρώσεων της ήδη προσδιορισθείσας επιταχύνσεως  $a(t)$  του σημείου αυτού βάσει των τύπων (3.3.5). Ξεκινάμε από την εκθετική έκφραση (3.3.9) της επιταχύνσεως  $a(t)$ , που είναι «βολικότερη» υπολογιστικά από τη σχεδόν ισοδύναμη δυναμοσειρά, τη σειρά Maclaurin (3.3.14). Εκτελώντας τις υποδειχθείσες ολοκληρώσεις, βρίσκουμε εύκολα ότι η ταχύτητα  $v(t)$  δίνεται από τον τύπο

$$v(t) = v_0 - \frac{g + cv_0}{c} (1 - e^{-ct}), \quad (3.3.15)$$

ενώ η θέση  $x(t)$  δίδεται από τον τύπο (3.3.3) που ήδη αναφέρθηκε. Πρόκειται για μια πάρα πολύ καλή τελική επαλήθευση των αποτελεσμάτων που βρέθηκαν στην παρούσα εφαρμογή.

Ένας εναλλακτικός τρόπος καθορισμού της ολοκληρωτικής εξισώσεως Volterra σε προβλήματα αρχικών τιμών που σχετίζονται με διαφορικές εξισώσεις (κυρίως με σταθερούς συντελεστές) στην Κινηματική-Δυναμική του υλικού σημείου παρουσιάζεται στην επόμενη εφαρμογή.

### Γ3.4. ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΑΖΑΣ-ΕΛΑΤΗΡΙΟΥ: ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ-ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

Σαν μια κάπως δυσκολότερη εφαρμογή των ολοκληρωτικών εξισώσεων στην Κινηματική-Δυναμική του υλικού σημείου (τώρα και στις Ταλαντώσεις) θεωρούμε το απλό και κλασικό μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου (μάζα  $m$ , σταθερά ελατηρίου  $k$ ) χωρίς απόσβεση. Πρόκειται για τον τόσο γνωστό αρμονικό ταλαντωτή. Υποθέτουμε ότι το μηχανικό αυτό σύστημα βρίσκεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση υπό την επίδραση συνημιτονικής εξωτερικής δυνάμεως (φορτίσεως) της μορφής  $p(t) = p_0 \cos \omega_0 t$  με το  $p_0$  σταθερά. Η κυκλική συχνότητα  $\omega_0$  της φορτίσεως αυτής  $p(t)$  θεωρείται ίση με εκείνη του μηχανικού συστήματος, έχουμε δηλαδή περίπτωση συντονισμού. Η σχετική διαφορική εξίσωση (συνήθης, γραμμική, δευτέρας τάξεως και μη ομογενής λόγω της εξωτερικής φορτίσεως  $p(t)$ ) ως προς τη θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου παίρνει τελικά (δηλαδή μετά τη διαίρεση δια της μάζας  $m$  του σημείου αυτού) τη γνωστή μορφή

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = p_0^* \cos \omega_0 t, \quad t \geq 0. \quad (3.4.1)$$

Στη διαφορική αυτή εξίσωση οι ποσότητες  $p_0^* = p_0/m$  (δηλαδή το εύρος φορτίσεως  $p_0$  ανηγμένο στη μάζα  $m$  του υλικού σημείου) και  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  υποτίθενται σταθερές. Θεωρούμε επίσης γνωστές και τις αρχικές συνθήκες που είναι: (α) αρχική θέση  $x_0$  και (β) μηδενική αρχική ταχύτητα, δηλαδή

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v(0) = 0. \quad (3.4.2)$$

Μέσω της θεωρίας των συνήθων γραμμικών διαφορικών εξισώσεων προκύπτει η λύση του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών (3.4.1) και (3.4.2). Η λύση αυτή είναι η εξής:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{p_0^*}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t. \quad (3.4.3)$$

Παρουσιάζεται επομένως το αναμενόμενο φαινόμενο του συντονισμού. Έχουμε δηλαδή ταλαντώσεις διαρκώς αυξανόμενου εύρους (γραμμικά όμως) λόγω και της ελλείψεως αποσβέσεως των ταλαντώσεων αυτών. Το φαινόμενο του συντονισμού έχει συνήθως βλαβερή συνέπεια στο μηχανικό μας σύστημα. Εν προκειμένω βέβαια δε θα δώσουμε ιδιαίτερη βαρύτητα στο φαινόμενο αυτό του συντονισμού. Απλά θα επιδείξουμε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών εξισώσεων στην επίλυση του παρόντος προβλήματος εξαναγκασμένης ταλαντώσεως.

Πιο συγκεκριμένα στην προηγούμενη εφαρμογή (Ενότητα Γ3.3) επιλέξαμε τη λίγο-πολύ άμεση χρήση της διαθέσιμης διαφορικής εξίσωσης (3.3.1) με αλλαγή της άγνωστης συναρτήσεως. Συγκεκριμένα θέσαμε  $\ddot{x}(t) = a(t)$ , δηλαδή επιλέξαμε την επιτάχυνση  $a(t)$  αντί για τη θέση  $x(t)$  σαν άγνωστη συνάρτηση. Το καθήκον του προσδιορισμού της θέσεως  $x(t)$  το αφήσαμε για το τέλος. Αυτό γίνεται με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις της επιταχύνσεως  $a(t)$  που έχει βρεθεί. Αντίθετα στην παρούσα εφαρμογή θα διατηρήσουμε σαν άγνωστη συνάρτηση τη θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου και θα προχωρήσουμε σε δύο ολοκληρώσεις της ίδιας της διαφορικής εξίσωσης (3.4.1) λαμβάνοντας υπόψη και τις αρχικές συνθήκες (3.4.2). Έτσι θα καταλήξουμε τελικά στη ζητούμενη ολοκληρωτική εξίσωση με την παρούσα μέθοδο προσεγγίσεως του προβλήματος.

Η πρώτη ολοκλήρωση της διαφορικής εξίσωσης (3.4.1) οδηγεί στην εξίσωση

$$\dot{x}(t) + \omega_0^2 \int_0^t x(\tau) d\tau = \frac{p_0^*}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \quad t \geq 0. \quad (3.4.4)$$

Η δεύτερη από τις αρχικές συνθήκες (3.4.2) (μηδενική αρχική ταχύτητα) έχει τώρα ληφθεί υπόψη. Φυσικά και η ολοκλήρωση στο δεξιό μέλος έχει ήδη (και πολύ εύκολα) εκτελεσθεί. Οδηγηθήκαμε επομένως από μια διαφορική εξίσωση συν δύο αρχικές συνθήκες σε μια ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση συν μία αρχική συνθήκη: την πρώτη από τις αρχικές συνθήκες (3.4.2). (Σημειώνουμε ότι ολοκληρωτικοδιαφορική καλείται μια εξίσωση που εμφανίζει την άγνωστη συνάρτηση  $x(t)$  και σε παράγωγο και σε ολοκλήρωμα.) Την πρώτη αρχική συνθήκη (3.4.2) δεν είχαμε ακόμη την ευκαιρία να την πάρουμε υπόψη. Παρατηρούμε επίσης αμέσως από την ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση (3.4.4) (για  $t = 0$ ) ότι  $\dot{x}(0) = v(0) = 0$ . Ισχύει επομένως η δεύτερη αρχική συνθήκη (3.4.2), αυτή που ήδη την πήραμε υπόψη.

Προχωράμε τώρα στη δεύτερη αναγκαία ολοκλήρωση, αυτήν της ολοκληρωτικοδιαφορικής εξίσωσης (3.4.4) χωρίς όμως να ξεχνάμε και την πρώτη αρχική συνθήκη (3.4.2). Και η ολοκλήρωση αυτή δεν παρουσιάζει καμία ιδιαίτερη δυσκολία, εάν βέβαια χρησιμοποιηθεί και ο τύπος (1.1.18) του Κεφαλαίου Γ1 (Ενότητα Γ1.1). Πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση μας χρησιμοποιούμε τον τύπο αυτό με τη θέση  $x(t)$  αντί για την επιτάχυνση  $a(t)$ . Έτσι έχουμε

$$\int_0^t \left( \int_0^{t^*} x(\tau) d\tau \right) dt^* = \int_0^t (t - \tau)x(\tau) d\tau. \quad (3.4.5)$$

Με τον τρόπο αυτό παρουσιάζεται τελικά μόνο ένα απλό ολοκλήρωμα (αντί για ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα). Έτσι προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) + \omega_0^2 \int_0^t (t - \tau)x(\tau) d\tau = x_0 + \frac{p_0^*}{\omega_0^2} (1 - \cos \omega_0 t), \quad t \geq 0, \quad (3.4.6)$$

με την ολοκλήρωση στο δεξιό μέλος της ολοκληρωτικοδιαφορικής εξίσωσης (3.4.4) να είναι και αυτή ιδιαίτερα απλή. Σημειώνεται ότι ο όρος  $p_0^*/\omega_0^2 = p_0/(m\omega_0^2)$  στο δεξιό μέλος, κάτι σαν σταθερά ολοκληρώσεως, αποσκοπεί απλά στην πλήρωση της αρχικής συνθήκης  $x(0) = x_0$ .

Μπορούμε πια εύκολα να διαπιστώσουμε ότι η τελική αυτή εξίσωση, δηλαδή η ολοκληρωτική εξίσωση (3.4.6), στην οποία έχουμε καταλήξει, πληροί και τις δύο αρχικές συνθήκες (3.4.2). Ασφαλώς πληρούται και η αρχική διαφορική εξίσωση (3.4.1). Αυτό το διαπιστώνουμε, εάν έχουμε την υπομονή να εκτελέσουμε τις πράξεις αντίστροφα, δηλαδή να παραγωγίσουμε δύο φορές την ολοκληρωτική εξίσωση (3.4.6). Μπορούμε έτσι να επαληθεύουμε τους υπολογισμούς μας γυρίζοντας πίσω στη διαφορική εξίσωση (3.4.1). Εναλλακτικά μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η λύση (3.4.3) του προβλήματος αρχικών τιμών (3.4.1) και (3.4.2) στο παρόν μηχανικό σύστημα μάζας-ελατηρίου υπό συνθήκες συντονισμού πραγματικά πληροί τόσο την ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση (3.4.4) όσο και την ολοκληρωτική εξίσωση (3.4.6).

Μετά το μάλλον εισαγωγικό αυτό μέρος της παρούσας εφαρμογής στην Κινηματική-Δυναμική και στις Ταλαντώσεις, θα προχωρήσουμε στο πιο ουσιαστικό μέρος της. Αυτό είναι η αληθινή, η ευθεία επίλυση της ολοκληρωτικής εξισώσεως (3.4.6). Έχουμε μάλιστα ήδη υπόψη μας ότι οι ολοκληρωτικές εξισώσεις δε συνοδεύονται από αρχικές ή συνοριακές συνθήκες. Οι συνθήκες αυτές είναι ενσωματωμένες στις ολοκληρωτικές εξισώσεις.

Για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξισώσεως (3.4.6), καταρχήν παρατηρούμε ότι αυτή είναι μονοδιάστατη, γραμμική, μη ομογενής, τύπου Volterra και, το πιο σημαντικό, συνελκτικού τύπου με πυρήνα  $K(t, \tau) = t - \tau$ . Άρα η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace, που ήδη αναπτύχθηκε στο Ενότητα Γ2.2, είναι μια πολύ καλή επιλογή για την επίλυσή της και αυτήν τη μέθοδο θα προτιμήσουμε. Χρησιμοποιούμε το προφανές σύμβολο  $X(s)$  για το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συναρτήσεως (της θέσεως του υλικού σημείου)  $x(t)$ , δηλαδή  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ , και προχωράμε στην εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace και στα δύο μέλη της ολοκληρωτικής εξισώσεως (3.4.6).

Έτσι βρίσκουμε εύκολα ότι

$$X(s) + \omega_0^2 \frac{X(s)}{s^2} = \frac{x_0}{s} + \frac{p_0^*}{\omega_0^2} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} \right) \quad (3.4.7)$$

έχοντας λάβει υπόψη μας και το θεώρημα της συνελίξεως. Με τον τρόπο αυτό η ολοκληρωτική εξίσωση (3.4.6) μετατράπηκε σε αλγεβρική εξίσωση. Η λύση της τελευταίας  $X(s)$  προκύπτει αμέσως ότι είναι

$$X(s) = x_0 \frac{s}{s^2 + \omega_0^2} + p_0^* \frac{s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}. \quad (3.4.8)$$

Τελικά, αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace  $X(s)$ , καταλήγουμε στη ζητούμενη έκφραση της θέσεως  $x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$ . Διαπιστώνεται εύλογα και όπως αναμενόταν ότι η έκφραση αυτή συμπίπτει με τη λύση (3.4.3) του προβλήματός μας. Η λύση αυτή βρέθηκε με την αρχική επιλογή μας για τη μοντελοποίηση του παρόντος μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου με τη χρήση διαφορικής εξισώσεως (καλύτερα προβλήματος αρχικών τιμών). Αντίθετα τώρα έχει υιοθετηθεί η χρήση ολοκληρωτικής εξισώσεως.

Ας σημειωθεί τέλος ότι ασφαλώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace τόσο για την επίλυση της διαφορικής εξισώσεως (3.4.1) όσο και για την επίλυση της ολοκληρωτικοδιαφορικής εξισώσεως (3.4.4). Καταλήγουμε και πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα, (3.4.8), για το μετασχηματισμό Laplace  $X(s)$  και, τελικά, στο αποτέλεσμα (3.4.3) για τη θέση  $x(t)$  του υλικού σημείου. Άρα υπάρχουν διάφορες δυνατότητες για τη μαθηματική μοντελοποίηση και την εύρεση της λύσεως του παρόντος μηχανικού συστήματος. Εάν όμως ο συντονισμός που παρουσιάζεται είναι ανεπιθύμητος; Τί δυνατότητες αποφυγής του υπάρχουν τότε; Τέτοιες δυνατότητες είναι οι εξής: (α) Η τροποποίηση του ίδιου του μηχανικού συστήματος, π.χ. με αλλαγή των παραμέτρων του  $m$  (για τη μάζα) και  $k$  (για τη σταθερά του ελατηρίου), ώστε να αλλάξει η φυσική (κυκλική) συχνότητά του  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . (Εν ανάγκη μπορεί να γίνει εισαγωγή στο μηχανικό μας σύστημα μάζας-ελατηρίου και αποσβεστήρα σταθεράς  $c$ .) (β) Δεύτερη δυνατότητα αποτελεί η μεταβολή της ασκούμενης εξωτερικής δυνάμεως (φορτίσεως)  $p(t)$  ως προς την (κυκλική) συχνότητά της  $\omega_0$ , αν βέβαια η μεταβολή της συχνότητας  $\omega_0$  είναι δυνατή. (Εντούτοις ας μην περιμένει ο αναγνώστης/η αναγνώστρια Πολιτικός Μηχανικός μια ακόμη πιο λεπτομερή ανάλυση-απάντηση εδώ!)

### Γ3.5. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΠΙΡΡΟΗΣ ΣΕ ΧΟΡΔΗ, ΔΟΚΟ ΚΑΙ ΠΛΑΚΑ

Οι *συναρτήσεις επιρροής (influence functions)* παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε πολλές ολοκληρωτικές εξισώσεις που προκύπτουν στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Οι συναρτήσεις επιρροής επιτρέπουν σε ορισμένες περιπτώσεις τη διαμόρφωση ολοκληρωτικών εξισώσεων βασικά μέσω της χρήσεως μόνο απλών, φυσικών εννοιών. Στην ενότητα αυτή θα επιδείξουμε τη μέθοδο των συναρτήσεων επιρροής στα προβλήματα της χορδής, της δοκού και της πλάκας.

#### Γ3.5.1. Συνάρτηση επιρροής στο πρόβλημα της χορδής

Θεωρούμε συνήθη ελαστική χορδή μήκους  $L$  κατά μήκος του άξονα  $Ox$  ( $0 \leq x \leq L$ ) υπό τάση (ένταση)  $T$  (σε N ή, προτιμότερο, σε kN) κατά μήκος της χορδής. Στη χορδή αυτή ασκείται επίσης και κάθετο συγκεντρωμένο μοναδιαίο φορτίο (κατά τον άξονα  $Oy$ ) στο σημείο  $\xi$  (με  $0 \leq \xi \leq L$ ) της χορδής. Τά άκρα της χορδής ( $x = 0$  και  $x = L$ ) θεωρούνται στερεά στηριγμένα, δηλαδή με μηδενικές κάθετες μετατοπίσεις

$$y(0) = y(L) = 0. \quad (3.5.1)$$

Η συνάρτηση  $y(x)$  δηλώνει εδώ την κάθετη μετατόπιση των σημείων της χορδής. Είναι επίσης γνωστό ότι η χορδή (σε αντίθεση με τη δοκό) στερείται εντελώς δυσκαμψίας (δηλαδή ικανότητας να υφίσταται καμπτικές ροπές  $M$ ), είναι δηλαδή εξαιρετικά εύκαμπτη.

Η συνήθης διαφορική εξίσωση που διέπει το συγκεκριμένο πρόβλημα χορδής αποδεικνύεται ότι έχει την εξής εξαιρετικά απλή μορφή (Wylie, 1975, Ενότητα 2.7, σ. 79):

$$y''(x) = -\frac{1}{T}p(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.5.2)$$

με  $p(x)$  την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση επί της χορδής. (Σημειώνεται ότι η σχετική απόδειξη γίνεται με απλό τρόπο που βασίζεται στη στατική ισορροπία κατά τον άξονα  $Oy$ , κάθετα στη χορδή, πάνω σε στοιχειώδες τμήμα  $[x, x + \Delta x]$  της χορδής και με την υπόθεση μικρών εγκάρσιων μετατοπίσεων  $y(x)$  κατά μήκος της χορδής.) Βρέθηκε λοιπόν μια πολύ απλή, στοιχειώδης διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως, η εξίσωση (3.5.2). Η εξίσωση αυτή που μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (3.5.1) αποτελούν ένα απλό πρόβλημα συνοριακών τιμών. Το πρόβλημα αυτό θα το αναγάγουμε σε ισοδύναμο ολοκληρωτικό τύπο με τις συνοριακές συνθήκες ενσωματωμένες σ' αυτόν. Προς το σκοπό αυτό, καταρχήν απλά ολοκληρώνουμε μια φορά τη διαφορική εξίσωση (3.5.2) αγνοώντας προς το παρόν τις συνοριακές συνθήκες (3.5.1). Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η εξής διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως ως προς  $y(x)$  και πάλι:

$$y'(x) = y'(0) - \frac{1}{T} \int_0^x p(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.5.3)$$

Προχωράμε τώρα και σε δεύτερη ολοκλήρωση, οπότε προκύπτει ο εξής ολοκληρωτικός τύπος, όπου έχουμε πάρει υπόψη και την πρώτη από τις συνοριακές συνθήκες (3.5.1):

$$y(x) = y'(0)x - \frac{1}{T} \int_0^x (x - \xi)p(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.5.4)$$

Ο ολοκληρωτικός αυτός τύπος δίνει την κάθετη μετατόπιση  $y(x)$  των σημείων της χορδής με γνωστή την κατανεμημένη κάθετη φόρτισή της  $p(x)$ . Για την εύρεση της μορφής αυτής (3.5.4) του ολοκληρωτικού τύπου πήραμε υπόψη μας και το θεμελιώδη τύπο (1.1.18) στην Ενότητα Γ1.1 του Κεφαλαίου Γ1, που προέκυψε εκεί με παραγοντική ολοκλήρωση.

Η τιμή της κλίσεως  $y'(0)$  της χορδής στο άκρο της  $x = 0$  δεν είναι γνωστή στο συγκεκριμένο πρόβλημα συνοριακών τιμών και πρέπει να απαλειφθεί επ' ωφελεία της δεύτερης συνοριακής συνθήκης (3.5.1):  $y(L) = 0$  στο δεξιό άκρο  $x = L$  της χορδής. Επομένως από τον ολοκληρωτικό

τύπο (3.5.4) παίρνουμε για  $x = L$

$$y(L) = y'(0)L - \frac{1}{T} \int_0^L (L - \xi) p(\xi) d\xi = 0. \quad (3.5.5)$$

Έτσι προσδιορίζουμε την άγνωστη τιμή της κλίσεως της χορδής στο αριστερό άκρο της  $x = 0$ :

$$y'(0) = \frac{1}{TL} \int_0^L (L - \xi) p(\xi) d\xi. \quad (3.5.6)$$

Αντικαθιστώντας τώρα την τιμή αυτή στον ολοκληρωτικό τύπο (3.5.4), παίρνουμε τη σχεδόν τελική μορφή του

$$y(x) = \frac{x}{TL} \int_0^L (L - \xi) p(\xi) d\xi - \frac{1}{T} \int_0^x (x - \xi) p(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.5.7)$$

Η μορφή αυτή επαληθεύει όχι μόνο τη διαφορική εξίσωση της χορδής (3.5.2), αλλ' επίσης και τις δύο συνοριακές συνθήκες (3.5.1). Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί.

Ένα τελευταίο (αλλ' ουσιαστικό) βήμα είναι να ξαναγράψουμε το σχεδόν τελικό ολοκληρωτικό τύπο (3.5.7) διασπώντας το πρώτο ολοκλήρωμα σ' αυτόν (στο διάστημα  $[0, L]$ , δηλαδή κατά μήκος όλης της χορδής) σε δύο ολοκληρώματα: στα επί μέρους διαστήματα  $[0, x]$  και  $[x, L]$ . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ότι

$$y(x) = \frac{x}{TL} \int_0^x (L - \xi) p(\xi) d\xi + \frac{x}{TL} \int_x^L (L - \xi) p(\xi) d\xi - \frac{1}{T} \int_0^x (x - \xi) p(\xi) d\xi. \quad (3.5.8)$$

Επειδή όμως

$$\frac{x(L - \xi)}{TL} - \frac{x - \xi}{T} = \frac{\xi(L - x)}{TL}, \quad (3.5.9)$$

ο πιο πάνω τύπος (3.5.8) μπορεί να συμπτυχθεί και ως εξής:

$$y(x) = \frac{L - x}{TL} \int_0^x \xi p(\xi) d\xi + \frac{x}{TL} \int_x^L (L - \xi) p(\xi) d\xi. \quad (3.5.10)$$

Ο τελικός αυτός ολοκληρωτικός τύπος μπορεί να γραφεί και σε απόλυτα ισοδύναμη μορφή με τη χρήση της εξής συναρτήσεως:

$$G(x, \xi) = \frac{(L - x)\xi}{TL}, \quad \text{εάν } 0 \leq \xi \leq x \leq L, \quad G(x, \xi) = \frac{x(L - \xi)}{TL}, \quad \text{εάν } 0 \leq x \leq \xi \leq L. \quad (3.5.11)$$

Τότε προκύπτει τελικά ότι

$$y(x) = \int_0^L G(x, \xi) p(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.5.12)$$

Η συνάρτηση  $G(x, \xi)$  στον πιο πάνω ολοκληρωτικό τύπο μας δηλώνει την επίδραση που έχει στην κάθετη μετατόπιση  $y(x)$  (στο σημείο  $x$  της χορδής) το κάθετο φορτίο  $p(\xi) d\xi$  (στο σημείο  $x = \xi$  της χορδής και σε απειροστό διάστημα  $d\xi$ ). Αυτό φαίνεται από τον πολλαπλασιασμό  $G(x, \xi) p(\xi)$  στην ολοκληρωτέα συνάρτηση στον πιο πάνω τύπο (3.5.12). Για το λόγο αυτό η συνάρτηση  $G(x, \xi)$  καλείται **συνάρτηση επιρροής (influence function)** και είναι πάρα πολύ σημαντική στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Πέρα από την παραπάνω μέθοδο προσδιορισμού της συναρτήσεως αυτής  $G(x, \xi)$ , μπορούμε να εργασθούμε απλά και με τις εξισώσεις ισορροπίας κατά μήκος της χορδής και (κυρίως) κάθετα σ' αυτήν. Έτσι δε χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε καθόλου τη διαφορική εξίσωση (3.5.2) (Wylie, 1975, Ενότητα 2.7, σσ. 79–81). Με τη δεύτερη αυτή δυνατότητα θεωρούμε τη χορδή ότι φορτίζεται με μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο στη θέση της  $\xi$ .

Σημειώνεται επίσης ότι η συνάρτηση επιρροής  $G(x, \xi)$  μηδενίζεται, όπως ακριβώς οφείλει, στα άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  της χορδής (για συγκεκριμένη τιμή του  $\xi$ ), επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση της χορδής (3.5.2) (εκτός από το σημείο  $x = \xi$ ) και είναι συνεχής κατά μήκος της χορδής. Ειδικότερα είναι συνεχής και στο «κρίσιμο» σημείο  $x = \xi$ , όπου, όπως διαπιστώνεται από τους τύπους (3.5.11),

$$G(\xi, \xi) = \frac{(L - \xi)\xi}{TL}. \quad (3.5.13)$$

Η ίδια συνάρτηση επιρροής  $G(x, \xi)$  έχει επίσης σταθερές πρώτες παραγώγους ως προς  $x$  στα διαστήματα  $[0, \xi)$  και  $(\xi, L]$  χωρίς όμως να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x = \xi$ . Προφανώς έχει επίσης μηδενική δεύτερη παράγωγο (ως προς  $x$ ) στα ίδια διαστήματα και (κάτι που είναι σημαντικό, ιδιαίτερα σημαντικό) είναι συμμετρική ως προς  $x$  και  $\xi$ , δηλαδή

$$G(x, \xi) = G(\xi, x). \quad (3.5.14)$$

Τη συμμετρία αυτή της συναρτήσεως επιρροής  $G(x, \xi)$  ο Πολιτικός Μηχανικός την εξηγεί σαν άμεση συνέπεια της ισχύος της θεμελιώδους **αρχής της αμοιβαιότητας των μετατοπίσεων** του Maxwell ή των Betti–Maxwell στη Μηχανική (Μαστρογιάννης, 1999, Τόμος Πρώτος, Ενότητα 6.7, σσ. 237–239). Σύμφωνα με την αρχή της αμοιβαιότητας των μετατοπίσεων η μετατόπιση  $G(x, \xi)$  στο σημείο  $x$  που οφείλεται σε μοναδιαία φόρτιση  $p_\xi(x) = \delta(x - \xi)$  (με  $\delta(x)$  την ωστική ή κρουστική συνάρτηση δέλτα του Dirac: Ενότητα A10.6 του Κεφαλαίου A10 του Μέρους A) στο σημείο  $\xi$  της χορδής ισούται με τη μετατόπιση  $G(\xi, x)$  στο σημείο  $\xi$  που οφείλεται σε μοναδιαία φόρτιση  $p_x(\xi) = \delta(\xi - x)$  στο σημείο  $x$  της χορδής.

Μια εναλλακτική τρίτη δυνατότητα προσφέρεται από την κατευθείαν λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (3.5.2) και (3.5.1), π.χ. με τη χρήση της *Mathematica* (Wolfram, 1999). Είναι επίσης απόλυτα δυνατή και η κατευθείαν χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace, όπου η φόρτιση  $p(x)$  της χορδής θεωρείται ίση με τη συνάρτηση δέλτα του Dirac στη θέση  $x = \xi$ , δηλαδή

$$p_\xi(x) = \delta(x - \xi), \quad 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq \xi \leq L. \quad (3.5.15)$$

Η λύση αυτού του προβλήματος συνοριακών τιμών προκύπτει ότι ισούται με

$$G^*(x, \xi) = \frac{1}{\pi L} [(L - \xi)x + L(\xi - x)H(x - \xi)], \quad (3.5.16)$$

όπου  $H(x)$  δηλώνει τη μοναδιαία βηματική συνάρτηση του Heaviside, που ήδη τη γνωρίζουμε από την Παράγραφο A10.3.4 του Κεφαλαίου A10 του Μέρους A. Άμεσα επαληθεύεται ότι η συνάρτηση αυτή, η  $G^*(x, \xi)$ , ταυτίζεται με την συνάρτηση επιρροής  $G(x, \xi)$  που ήδη προσδιορίστηκε στις σχέσεις (3.5.11). Σημειώνεται, επ' ευκαιρία, ότι η ίδια συνάρτηση  $G(x, \xi)$  είναι η καλούμενη **συνάρτηση Green** στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών για την ελαστική χορδή που εξετάζουμε εδώ.

Συμπερασματικά, μέχρι στιγμής στην παρούσα ενότητα ξεκινήσαμε από το πρόβλημα συνοριακών τιμών για μια ελαστική χορδή στερεωμένη στα άκρα της (διαφορική εξίσωση (3.5.2) και συνοριακές συνθήκες (3.5.1)) και λύσαμε το πρόβλημα αυτό. Καταλήξαμε έτσι σε ένα αρκετά απλό ολοκληρωτικό τύπο, στον τύπο (3.5.12) για τον προσδιορισμό της κάθετης μετατοπίσεως  $y(x)$  των σημείων της χορδής υπό τυχαία κάθετη φόρτιση  $p(x)$  κατά μήκος της. Πρόκειται για ένα αρκετά ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει πώς μπορεί να αντικατασταθεί η χρήση παραγώγων (εν προκειμένω της δεύτερης παραγώγου στην αρχική διαφορική εξίσωση της χορδής (3.5.2)) από τη χρήση ολοκληρωμάτων (εν προκειμένω ένα ολοκλήρωμα στον τελικό ολοκληρωτικό τύπο (3.5.12)). Σημειώνεται επίσης ότι ο ολοκληρωτικός αυτός τύπος (3.5.12) έχει ενσωματώσει και τις δύο συνοριακές συνθήκες στα άκρα της χορδής. Έτσι οι συνθήκες αυτές δε χρειάζεται να λαμβάνονται χωριστά υπόψη αντίθετα από ό,τι συμβαίνει στα προβλήματα αρχικών ή συνοριακών τιμών για διαφορικές εξισώσεις.

Το επόμενο βήμα, μετά την απαλλαγή μας πια από τις αναλυτικές πράξεις, είναι να συνδέσουμε τον τελικό ολοκληρωτικό τύπο (3.5.12), στον οποίο καταλήξαμε, με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις. Βέβαια δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι ο ολοκληρωτικός αυτός τύπος είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τον προσδιορισμό της κάθετης μετατοπίσεως  $y(x)$  σε κάθε σημείο της χορδής ( $0 \leq x \leq L$ ). Φυσικά αυτό ισχύει υπό την προϋπόθεση ότι η κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$  που ασκείται πάνω στη χορδή είναι απόλυτα γνωστή. Ερώτημα: Εάν όμως δεν είναι γνωστή η φόρτιση  $p(x)$ , αλλ' είναι γνωστή η κάθετη μετατόπιση  $y(x)$ , το σχήμα της χορδής που παραμορφώθηκε; Έχουμε

τότε ένα **αντίστροφο πρόβλημα** (*inverse problem*). Υποθέτουμε λοιπόν ότι θέλουμε η χορδή μας να έχει συγκεκριμένο (αλλά φυσικά παραδεκτό) σχήμα  $y(x)$  υπό κάποια κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$ , η οποία μας είναι όμως ακόμη άγνωστη. Στην περίπτωση αυτή ο ολοκληρωτικός τύπος (3.5.12) έχει αυτόματα μεταπέσει σε μια ολοκληρωτική εξίσωση. Αυτό συμβαίνει, επειδή τώρα πια η άγνωστη συνάρτηση, η  $p(x)$  (ή ισοδύναμα  $p(\xi)$ ), βρίσκεται κάτω από το σύμβολο της ολοκλήρωσης (στο δεξιό μέλος). Η συνάρτηση  $y(x)$  (στο αριστερό μέλος) καθώς και ο πυρήνας (ή συνάρτηση επιρροής)  $G(x, \xi)$  μέσα στο ολοκλήρωμα είναι γνωστές συναρτήσεις. Σημειώνουμε ότι ο πυρήνας αυτός  $G(x, \xi)$ , που δίνεται από τους τύπους (3.5.11) ή τον απόλυτα ισοδύναμο τους τύπο (3.5.16), έχει να κάνει μόνο με την ίδια τη χορδή (συμπεριλαμβανοντας και τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα της). Εντούτοις δεν εξαρτάται από το σχήμα, τη μορφή την οποία παίρνει κάθε φορά η χορδή που εξετάζουμε εξαιτίας της φορτίσεως της  $p(x)$ .

Η ολοκληρωτική εξίσωση (3.5.12) που προαναφέρθηκε υπό τις παρούσες συνθήκες που υιοθετήθηκαν είναι μια μονοδιάστατη (κατά μήκος της χορδής μόνο), προφανώς γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm, γιατί το διάστημα ολοκλήρωσης είναι σταθερό: ολόκληρη η χορδή  $[0, L]$ . Είναι επίσης πρώτου είδους, επειδή η άγνωστη συνάρτηση  $p(x)$  παρουσιάζεται μόνο μέσα στο ολοκλήρωμα. Φυσικά είναι και μη ομογενής, γιατί υπάρχει πέρα από τον πυρήνα  $G(x, \xi)$  και η γνωστή συνάρτηση  $y(x)$  του σχήματος της χορδής. Επομένως χωρίς την εκτέλεση καμιάς αναλυτικής πράξεως ερμηνεύσαμε τον ολοκληρωτικό τύπο (3.5.12) σαν ολοκληρωτική εξίσωση. Η εξίσωση αυτή είναι χρήσιμη για τον προσδιορισμό της φορτίσεως  $p(x)$  χορδής με δεδομένο σχήμα (μορφή)  $y(x)$  υπό τη φόρτιση αυτή. Ασφαλώς ο πνευματικά ανήσυχος αναγνώστης/η πνευματικά ανήσυχη αναγνώστρια Πολιτικός Μηχανικός μπορεί θαυμάσια να θεωρήσει (χωρίς να κινδυνεύει καθόλου να κατηγορηθεί) το πρόβλημα αυτό σαν ένα **αντίστροφο πρόβλημα**. Με τον τρόπο αυτό διατηρεί τον όρο **ευθύ πρόβλημα** για την περίπτωση που εξετάστηκε αρχικά. Αυτή είναι η περίπτωση που δίνεται η κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$  και ζητείται το σχήμα  $y(x)$  της χορδής.

Στο σημείο αυτό είναι λίγο-πολύ εύλογο να θέσουμε και ένα ερώτημα. Ναι, ασφαλώς είναι ενδιαφέρουσα η αρκετά λεπτομερής μαθηματική εύρεση που προηγήθηκε της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.5.12) με τη συνάρτηση επιρροής (τον πυρήνα της)  $G(x, \xi)$  να καθορίζεται από τους τύπους (3.5.11), δηλαδή η εξίσωση (3.5.10). Επίσης χρήσιμη είναι και η απόδοση χαρακτηρισμών σ' αυτήν την ολοκληρωτική εξίσωση: Fredholm, πρώτου είδους, κλπ. Εντούτοις παραμένει το ερώτημα ποια είναι η λύση της  $p(x)$  με τη συνάρτηση  $y(x)$  να υποτίθεται ότι είναι γνωστή. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δεν απαιτεί τη χρήση σύνθετων μεθόδων επιλύσεως ολοκληρωτικών εξισώσεων. Είναι πραγματικά εξαιρετικά απλή! Πιο συγκεκριμένα, παραγωγίζοντας μια φορά την ολοκληρωτική εξίσωση (3.5.10), οδηγούμαστε στον εξής τύπο για τη γνωστή κλίση  $y'(x)$  της χορδής (που προκύπτει με μία παραγωγή της γνωστής μετατοπίσεως  $y(x)$ ):

$$y'(x) = -\frac{1}{L} \int_0^x \xi p(\xi) d\xi + \frac{1}{L} \int_x^L (L - \xi) p(\xi) d\xi. \quad (3.5.17)$$

Πρόκειται για μια δεύτερη ολοκληρωτική εξίσωση ως προς  $p(x)$ . Ακόμη μια παραγωγή, τώρα της εξίσωσης (3.5.17), μας οδηγεί στο ακόλουθο εκπληκτικά απλό αποτέλεσμα:

$$y''(x) = -\frac{1}{L} p(x) \implies p(x) = -Ly''(x). \quad (3.5.18)$$

Αυτή είναι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσής μας (3.5.12) (τόσο απλή!) και δεν πρέπει να εκπλησσομάστε καθόλου γι' αυτό. Πραγματικά η διαφορική εξίσωση της χορδής (3.5.2) ήταν αυτή που απετέλεσε τη βάση της παρούσας ενότητας (μαζί με τις συνοριακές συνθήκες (3.5.1) βέβαια). Επομένως ο τελικός τύπος (3.5.18) για την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(x)$  της χορδής στο αντίστροφο πρόβλημα που εξετάζουμε απλά ταυτίζεται με την αρχική μας διαφορική εξίσωση (3.5.2). Ακριβώς αυτό όφειλε να συμβαίνει στο παρόν τόσο απλό πρόβλημα και πράγματι το διαπιστώνουμε ότι συμβαίνει! Τούτο αποτελεί και σαφή επαλήθευση των υπολογισμών μας.

### Γ3.5.2. Συνάρτηση επιρροής στο πρόβλημα της δοκού

Στην παράγραφο αυτή απλά επεκτείνουμε την έννοια της **συναρτήσεως επιρροής** (ή **συναρτήσεως Green**) για το σχετικό πρόβλημα συνοριακών τιμών  $G(x, \xi)$  από το πρόβλημα της χορδής στο πιο ενδιαφέρον πρόβλημα της δοκού. Θεωρούμε μια συνήθη δοκό μήκους  $L$  (με  $0 \leq x \leq L$ ) και δυσκαμψίας  $EI$  με φόρτιση απλά ένα μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο  $P_\xi = 1$  στη θέση  $\xi$  της δοκού (με  $0 \leq \xi \leq L$ ). Για να γίνουμε περισσότερο σαφείς, σαν δοκό υποθέτουμε εδώ έναν πρόβολο μήκους  $L$  με πάκτωση στο αριστερό άκρο του  $x = 0$  και με ελεύθερο το δεξιό άκρο του  $x = L$ .

Το πρώτο ερώτημά μας είναι ποιο είναι το βέλος κάμψεως  $v(x)$  της δοκού, εδώ του προβόλου που υποθέσαμε, υπό τη μοναδιαία φόρτιση  $P_\xi = 1$  στη θέση  $\xi$  του προβόλου που προαναφέραμε. Σχετικό πρόβλημα έχουμε λύσει στην Ενότητα A11.14 του Κεφαλαίου A11 του Μέρους Α των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς με χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Συγκεκριμένα εκεί υποθέσαμε για φόρτιση  $p(x)$  του προβόλου τη γενικευμένη φόρτιση

$$p(x) = P\delta(x - a) \equiv P(x - a)^{-1} \quad \text{με} \quad 0 \leq a \leq L \quad \text{και} \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.5.19)$$

με  $\delta(x - a)$  τη γνωστή συνάρτηση δέλτα του Dirac και  $(x - a)^{-1}$  την ισοδύναμη συνάρτηση Macaulay: τύπος (11.15.8) στην Ενότητα A11.15. Πρόκειται απλά για ένα συγκεντρωμένο φορτίο  $P$  στη θέση  $x = a$  του προβόλου. Προσδιορίσαμε έπειτα το βέλος κάμψεως  $v(x)$  στη μορφή (11.14.15)

$$v(x) = \frac{P}{6EI} [3ax^2 - x^3 + (x - a)^3 H(x - a)] \quad \text{με} \quad 0 \leq a \leq L \quad \text{και} \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.5.20)$$

με  $H(x)$  τη βηματική συνάρτηση του Heaviside. Με τη χρήση της σχετικής συναρτήσεως Macaulay (Ενότητα A11.15) αυτό γράφεται και στην ισοδύναμη (αλλ' απλούστερη στη γραφή) μορφή (11.15.9)

$$v(x) = \frac{P}{6EI} [3ax^2 - x^3 + \langle x - a \rangle^3] \quad \text{με} \quad 0 \leq a \leq L \quad \text{και} \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.5.21)$$

Φυσικά αυτό το βέλος κάμψεως  $v(x)$  επαληθεύει τόσο τη συνήθη διαφορική εξίσωση της δοκού όσο και τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες ανά δύο στα δύο άκρα  $x = 0$  και  $x = L$  του προβόλου

$$v''''(x) = \frac{p(x)}{EI}, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v''(L) = 0, \quad v'''(L) = 0, \quad (3.5.22)$$

όπως εύκολα μπορεί να επαληθευθεί. Εντούτοις στο σημείο  $x = a$  της εφαρμογής του συγκεντρωμένου φορτίου  $P$  το βέλος κάμψεως  $v(x)$  δεν έχει τρίτη παράγωγο  $v'''(a)$ , αφού η τέμνουσα δύναμη  $Q$  είναι ασυνεχής στο σημείο αυτό, ούτε τέταρτη παράγωγο ούτε παραγώγους ανωτέρων τάξεων.

Εδώ θα αξιοποιήσουμε το αποτέλεσμα αυτό (3.5.20) ή (3.5.21), ώστε να προσδιορίσουμε τη σχετική συνάρτηση επιρροής  $G(x, \xi)$ . Το συγκεντρωμένο φορτίο  $P_\xi$  είναι τώρα μοναδιαίο,  $P_\xi = 1$ , και η θέση εφαρμογής του δηλώνεται από 'δώ και πέρα με  $\xi$  (φυσικά με  $0 \leq \xi \leq L$ ) αντί με  $a$ . Τότε απλά το πιο πάνω βέλος κάμψεως  $v(x)$  στη σχέση (3.5.20) ή ισοδύναμα στη σχέση (3.5.21) με τη χρήση συναρτήσεως Macaulay δηλώνει τη σχετική **συνάρτηση επιρροής** (ή **συνάρτηση Green**)  $G(x, \xi)$  στο παρόν πρόβλημα συνήθους δοκού, εδώ του προβόλου που εξετάζουμε. Άρα έχουμε τη συνάρτηση επιρροής (με  $0 \leq \xi \leq L$  και  $0 \leq x \leq L$  κατά μήκος του προβόλου που μελετάμε)

$$G(x, \xi) = \frac{1}{6EI} [3\xi x^2 - x^3 + (x - \xi)^3 H(x - \xi)] \equiv \frac{1}{6EI} [3\xi x^2 - x^3 + \langle x - \xi \rangle^3]. \quad (3.5.23)$$

Βέβαια η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί πιο αναλυτικά σαν δύο χωριστές σχέσεις: μία για το διάστημα  $0 \leq x \leq \xi$  (αριστερά από το μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο  $P_\xi = 1$  στη θέση  $\xi$ ) και μία για το διάστημα  $\xi \leq x \leq L$  (δεξιά από το ίδιο συγκεντρωμένο φορτίο). Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη ότι  $H(x) = 0$  για  $x < 0$ , ενώ  $H(x) = 1$  για  $x \geq 0$ , βρίσκουμε πολύ εύκολα ότι τελικά

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x^2}{6EI} (3\xi - x), & \text{εάν} \quad 0 \leq x \leq \xi \leq L, \\ \frac{\xi^2}{6EI} (3x - \xi), & \text{εάν} \quad 0 \leq \xi \leq x \leq L. \end{cases} \quad (3.5.24)$$



Ο τύπος αυτός (3.5.24) είναι απόλυτα ανάλογος με τον τύπο (11.14.19) στην Ενότητα Α11.14 του Μέρους Α για το βέλος κάμψεως  $v(x)$  της σχέσεως (3.5.20) ή της σχέσεως (3.5.21). Εδώ όμως έχουμε  $P = P_\xi = 1$  και  $a = \xi$ . Επίσης ο ίδιος παραπάνω τύπος (3.5.24) είναι ο αντίστοιχος τύπος με τον ομολογουμένως αρκετά απλούστερο τύπο (3.5.11) στην προηγούμενη Παράγραφο Γ3.5.1 εκεί για τη συνάρτηση επιρροής  $G(x, \xi)$  στο πρόβλημα της χορδής αντί στο πρόβλημα της δοκού.

Προφανώς η συνάρτηση επιρροής  $G(x, \xi)$  από την ίδια την εύρεσή της αφορά στο βέλος κάμψεως  $v(x)$  της δοκού, εδώ του προβόλου που μελετάμε, που οφείλεται σ' ένα μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο  $P_\xi = 1$  στη θέση  $\xi$  της δοκού. Όταν στη δοκό έχουμε ένα οποιοδήποτε συγκεντρωμένο φορτίο  $P_\xi$  στην ίδια θέση  $\xi$ , τότε το βέλος κάμψεως  $v(x)$  της δοκού θα είναι απλά  $v(x) = P_\xi G(x, \xi)$ . Αυτό συμβαίνει εξαιτίας της γραμμικότητας της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$EIv''''(x) = p(x) \quad (3.5.25)$$

που ισχύει στο πρόβλημα της συνήθους δοκού. Τώρα, όταν έχουμε μια συνηθισμένη κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(\xi)$  κατά μήκος της δοκού, τότε στη θέση  $\xi$  θεωρούμε το στοιχειώδες φορτίο  $dP_\xi = p(\xi)d\xi$ . Σ' αυτό αντιστοιχεί σύμφωνα με τα παραπάνω το στοιχειώδες βέλος κάμψεως

$$dv_\xi(x) = dP_\xi G(x, \xi) = [p(\xi)d\xi]G(x, \xi) = G(x, \xi)p(\xi)d\xi. \quad (3.5.26)$$

Επαναλαμβάνουμε τη γραμμικότητα της διαφορικής εξίσωσης της δοκού (3.5.25). Είναι τώρα πια προφανές ότι όταν έχουμε ολόκληρη την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση  $p(\xi)$  στη δοκό, τότε το συνολικό βέλος κάμψεως  $v(x)$  θα είναι το άθροισμα των επιμέρους βελών κάμψεως  $dv_\xi(x)$  στην πιο πάνω σχέση (3.5.26) που οφείλονται στα στοιχειώδη φορτία  $p(\xi)d\xi$ . Και στο όριο ( $d\xi \rightarrow 0$ ) το άθροισμα αυτό τείνει στο αντίστοιχο ολοκλήρωμα σε όλο το μήκος της δοκού. Δηλαδή έχουμε

$$v(x) = \int_0^L G(x, \xi)p(\xi)d\xi, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3.5.27)$$

φυσικά με  $G(x, \xi)$  τη σχετική **συνάρτηση επιρροής**. (Αυτή καλείται επίσης και **συνάρτηση Green**, όπως έχουμε ήδη αναφέρει.) Στην ειδική περίπτωση του προβόλου με πάκτωση στο αριστερό άκρο του  $x = 0$  αυτή δίνεται από τον τύπο (3.5.23) ή τον απόλυτα ισοδύναμο τύπο (3.5.24). Εντούτοις σε άλλες περιπτώσεις δοκών (με διαφορετικές συνοριακές συνθήκες) εύλογα δίνεται από διαφορετικούς τύπους που πληρούν τις συνοριακές συνθήκες οι οποίες ισχύουν κάθε φορά.

Σημειώνουμε ότι αυτός ο τελικός τύπος (3.5.27) ισχύει για κάθε συνήθη δοκό που υπακούει στη γραμμική διαφορική εξίσωση (3.5.25) ανεξάρτητα από συνοριακές συνθήκες και όχι βέβαια μονάχα στον πρόβολο που εξετάζουμε. Προφανώς όμως σε άλλη περίπτωση δοκού και η σχετική συνάρτηση επιρροής  $G(x, \xi)$  θα είναι διαφορετική από την παρούσα συνάρτηση επιρροής (3.5.23) ή (3.5.24). Αυτή ισχύει μόνο στο παρόν παράδειγμα προβόλου (με πάκτωση στο αριστερό του άκρο  $x = 0$ ). Σημειώνουμε επίσης ότι ο ίδιος τελικός μας τύπος (3.5.27) είναι ο αντίστοιχος τύπος με τον τύπο (3.5.12), ο οποίος ισχύει στο πρόβλημα της χορδής που μελετήθηκε στην προηγούμενη Παράγραφο Γ3.5.1 και μάλιστα εκεί με πολύ πιο αυστηρό τρόπο από ό,τι εδώ. Εντούτοις κι εδώ είναι δυνατή η αυστηρά μαθηματική απόδειξη του τύπου (3.5.27), παρόλο που την παραλείψουμε.

Για τον ίδιο τύπο (3.5.27) διακρίνουμε φυσικά, όπως και στο πρόβλημα της χορδής στην προηγούμενη Παράγραφο Γ3.5.1, δύο περιπτώσεις: (α) Στο **ευθύ πρόβλημα** είναι γνωστή η κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$  (ή ισοδύναμα  $p(\xi)$ ) κατά μήκος της δοκού και ζητείται το βέλος κάμψεως  $v(x)$  της δοκού. Αυτό προσδιορίζεται αμέσως από τον ολοκληρωτικό τύπο (3.5.27). (β) Αντίθετα στο **αντίστροφο πρόβλημα** είναι γνωστό το βέλος κάμψεως  $v(x)$  κατά μήκος της δοκού και ζητείται η κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$  που το έχει προκαλέσει. Στη δεύτερη αυτή περίπτωση έχουμε προφανώς μια ολοκληρωτική εξίσωση. Πρόκειται φυσικά για ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm μονοδιάστατη, γραμμική, πρώτου είδους, μη ομογενή με πυρήνα  $G(x, \xi)$  και με άγνωστη συνάρτηση τη φόρτιση  $p(x)$ . Για την επίλυσή της μπορούμε ασφαλώς να εργασθούμε ανάλογα με

το πρόβλημα της χορδής στην προηγούμενη Παράγραφο Γ3.5.1 παραγωγίζοντάς την εδώ τέσσερις φορές (αντί για δύο) ως προς  $x$ . Η λύση αυτής της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.5.27) είναι η εξής:

$$p(x) = EIV''''(x). \quad (3.5.28)$$

Εξάλλου αυτό είναι προφανές από τη γνωστή διαφορική εξίσωση (3.5.25) της συνήθους δοκού.

Επίσης, όπως και στο πρόβλημα της χορδής, έτσι κι εδώ στο πρόβλημα της δοκού η συνάρτηση επιρροής  $G(x, \xi)$  στη σχέση (3.5.23) ή ισοδύναμα (3.5.24) είναι συμμετρική ως προς τις δύο μεταβλητές της  $x$  και  $\xi$ . Δηλαδή ισχύει και πάλι η σχέση συμμετρίας (3.5.14), την επαναλαμβάνουμε

$$G(x, \xi) = G(\xi, x). \quad (3.5.29)$$

Αυτό συμβαίνει από φυσικής απόψεως εξαιτίας της ήδη γνωστής μας **αρχής της αμοιβαιότητας των μετατοπίσεων** του Maxwell ή των Betti–Maxwell ακριβώς όπως και στην προηγούμενη Παράγραφο Γ3.5.1. Για τη μαθηματική απόδειξή της στο παρόν πρόβλημα προβόλου (ή απλά την επαλήθευσή της, εάν προτιμάμε αυτήν τη λέξη) αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τους ήδη συμμετρικούς τύπους (3.5.24) για τον υπολογισμό της συναρτήσεως επιρροής  $G(x, \xi)$  κατά μήκος του προβόλου μας  $[0, L]$ . Διακρίνουμε μάλιστα τις εξής δύο περιπτώσεις: (α)  $0 \leq x \leq \xi \leq L$  και (β)  $0 \leq \xi \leq x \leq L$ . Παρατηρούμε αμέσως πως και στις δύο αυτές περιπτώσεις ισχύει η σχέση συμμετρίας (3.5.29).

Ένα τελευταίο σημείο που καλό είναι να θίξουμε εδώ με τη **συνάρτηση επιρροής** (ή **συνάρτηση Green**)  $G(x, \xi)$ , στην οποία αναφερόμαστε και που είναι συνάρτηση και των δύο μεταβλητών  $x$  και  $\xi$ , είναι η φυσική ερμηνεία της για σταθερό  $\xi$  ή σταθερό  $x$ . Και πρώτα η εύκολη περίπτωση που το  $\xi$  θεωρείται σταθερό. Σ' αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση  $G(x, \xi)$  δηλώνει εύλογα από τον προσδιορισμό της με μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο  $P_\xi = 1$  (στη θέση  $\xi$ ) το βέλος κάμψεως της δοκού (εδώ του προβόλου) στο σημείο  $x$  που οφείλεται στο μοναδιαίο αυτό φορτίο (στη θέση  $\xi$ ). Άρα, αν σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση της συναρτήσεως  $G(x, \xi)$  για σταθερή τιμή του  $\xi$  (το τονίζουμε αυτό: σταθερή τιμή!), τότε παίρνουμε απλά την **ελαστική γραμμή** της δοκού, δηλαδή το σχήμα που παίρνει η δοκός στην παρούσα καταπόνησή της σε κάμψη. Αυτή η ελαστική γραμμή οφείλεται σε μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο  $P_\xi = 1$  στη θέση  $\xi$ . Είναι τόσο μα τόσο απλό!

Λίγο πιο δύσκολη είναι η ερμηνεία της γραφικής παραστάσεως της ίδιας συναρτήσεως επιρροής (ή συναρτήσεως Green)  $G(x, \xi)$ , όταν είναι σταθερό το  $x$  και μεταβλητό το  $\xi$ . Σ' αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση αυτή  $G(x, \xi)$  παριστάνει το βέλος κάμψεως  $v(x)$  στο σταθερό **σημείο αναφοράς**  $x$ , όταν το μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο  $P_\xi = 1$  κινείται, αλλάζει θέση  $\xi$  κατά μήκος της δοκού. Δηλαδή μεταβάλλεται το **σημείο φορτίσεως**  $\xi$ . Άρα η σχετική γραφική παράσταση κατά μήκος της δοκού, δηλαδή στο διάστημα  $0 \leq \xi \leq L$ , εκφράζει απλά το βέλος κάμψεως όχι όμως κατά μήκος της δοκού, αλλ' ειδικά στο σταθερό σημείο αναφοράς  $x$ , που οφείλεται όμως στο μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο  $P_\xi = 1$  στο μεταβλητό σημείο φορτίσεως  $\xi$ . Δηλαδή η γραφική αυτή παράσταση δείχνει την επιρροή στο σταθερό σημείο αναφοράς  $x$  που έχει το μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο  $P_\xi = 1$  στο μεταβλητό σημείο φορτίσεως  $\xi$ . Μια τέτοια γραφική παράσταση ο Πολιτικός Μηχανικός την αποκαλεί **γραμμή επιρροής**. Πρόκειται για μια πάρα πολύ ενδιαφέρουσα έννοια στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού τόσο από θεωρητικής όσο και από πρακτικής σκοπιάς.

### Γ3.5.3. Συνάρτηση επιρροής στο πρόβλημα της πλάκας

Εύλογα η έννοια της συναρτήσεως επιρροής (ή συναρτήσεως Green) σε δοκό που κάμπτεται και που την εξετάσαμε στην προηγούμενη Παράγραφο Γ3.5.2 μπορεί να γενικευθεί εύκολα και σε περίπτωση κάμψεως συνήθους πλάκας  $P$  (τώρα βέβαια στις δύο διαστάσεις  $x$  και  $y$ ). Η δυσκαμψία της πλάκας είναι  $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$  με  $E$  και  $\nu$  τις ελαστικές σταθερές του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της πλάκας: μέτρο ελαστικότητας και λόγος του Poisson αντίστοιχα, και  $h$  το υποτιθέμενο σταθερό πάχος της πλάκας. Το πρόβλημα της πλάκας το μελετήσαμε σε αρκετή έκταση στο Κεφάλαιο Β7 του Μέρους Β των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς στην ειδική περίπτωση της ορθογωνικής πλάκας  $P = [0, a] \times [0, b]$  με απλή στήριξη

(έδραση) στο σύνορό της. Εδώ θα αναφερθούμε στο ίδιο πρόβλημα με χρήση των αποτελεσμάτων που έχουμε διαθέσιμα για τη μέθοδο του Navier (1820). Αυτήν την αναπτύξαμε στην Ενότητα Β7.1.

Εδώ, ακριβώς όπως και στην προηγούμενη Παράγραφο Γ3.5.2, θεωρούμε ένα μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο  $P_{\xi\eta} = 1$ . Όμως το φορτίο αυτό εφαρμόζεται τώρα στην πλάκα  $P$  συγκεκριμένα στο σημείο της  $(\xi, \eta)$  φυσικά με  $(\xi, \eta) \in P$  ή πιο αναλυτικά με  $0 \leq \xi \leq a$  και  $0 \leq \eta \leq b$ . Ανάλογα με ό,τι συμβαίνει στη χορδή (Παράγραφος Γ3.5.1) και στη δοκό (Παράγραφος Γ3.5.2) έτσι κι εδώ στην πλάκα το μοναδιαίο συγκεντρωμένο φορτίο  $P_{\xi\eta} = 1$  στη θέση  $(\xi, \eta)$  της πλάκας μπορεί να παρασταθεί με τη χρήση της συναρτήσεως δέλτα του Dirac, τώρα όμως στις δύο διαστάσεις  $(\xi, \eta)$ . Συγκεκριμένα έχουμε για το συγκεντρωμένο φορτίο  $P_{\xi\eta} = 1$  την παράστασή του σαν γενικευμένο κατανεμημένο φορτίο  $p(x, y)$

$$p(x, y) = \delta(x - \xi)\delta(y - \eta). \quad (3.5.30)$$

Εδώ θα προσδιορίσουμε τώρα τη σχετική **συνάρτηση επιρροής** (ή **συνάρτηση Green**)  $G(x, y, \xi, \eta)$ . Αυτή είναι απλά το βέλος κάμψεως (η βύθιση)  $v_{\xi\eta}(x, y)$  της πλάκας  $P$  που οφείλεται στο πιο πάνω συγκεντρωμένο φορτίο  $P_{\xi\eta} = 1$  με την παράστασή του (3.5.30) σαν γενικευμένη συνάρτηση.

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε εδώ τα αποτελέσματα της Ενότητας Β7.1 για τη μέθοδο του Navier (1820), που βασίζεται στις διπλές ημιτονικές σειρές Fourier. Αρκεί να βρούμε πρώτα τους συντελεστές  $p_{mn}$  της σχετικής διπλής ημιτονικής σειράς Fourier για την πιο πάνω μοναδιαία φόρτιση  $P_{\xi\eta} = 1$  στο σημείο  $(\xi, \eta)$  της ορθογωνικής πλάκας που εκφράζεται με τη σχέση (3.5.30). Προς το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τους σχετικούς ολοκληρωτικούς τύπους (7.1.18) (με την ολοκλήρωση σ' ολόκληρη την πλάκα  $P$ ). Αυτούς τους τύπους τους επαναλαμβάνουμε κι εδώ

$$p_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (x, y) \in P. \quad (3.5.31)$$

Γνωρίζουμε επίσης ήδη από το Μέρος Α για τις Εφαρμοσμένες Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς, Κεφάλαιο Α10 για το μετασχηματισμό Laplace και Ενότητα Α10.6 για τη συνάρτηση δέλτα του Dirac, που είναι μια γενικευμένη συνάρτηση, ότι ισχύει ο τύπος (10.6.7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t)p(\tau) d\tau = p(t) \quad (3.5.32)$$

με την  $p(t)$  μια αυθαίρετη (οποιαδήποτε) συνεχή συνάρτηση. Επομένως εδώ με τη φόρτιση  $p(x, y)$  της πλάκας  $P = [0, a] \times [0, b]$  με  $(x, y) \in P$  να δίνεται από τη σχέση (3.5.30) έχουμε στην πλάκα  $P$ , δηλαδή με  $0 \leq x \leq a$  και  $0 \leq y \leq b$ , με χρήση του πιο πάνω τύπου (3.5.32) με  $p(t) = 1$  και επίσης με  $x$  ή  $y$  αντί για  $\tau$  και με  $\xi$  ή  $\eta$  αντί για  $t$  και τέλος με  $0 < \xi < a$  και  $0 < \eta < b$  στον ίδιο τύπο ότι

$$\int_0^a \int_0^b p(x, y) dx dy = \int_0^a \int_0^b \delta(x - \xi)\delta(y - \eta) dx dy = \int_0^a \delta(x - \xi) dx \int_0^b \delta(y - \eta) dy = 1 \cdot 1 = 1. \quad (3.5.33)$$

Άρα πράγματι η γενικευμένη φόρτιση  $p(x, y)$  στη σχέση (3.5.30) αφορά σε συνολικά μοναδιαία φόρτιση της πλάκας  $P$ . Τώρα για την ίδια φόρτιση  $p(x, y)$  μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε τους συντελεστές  $p_{mn}$  της διπλής ημιτονικής σειράς Fourier της με βάση τους πιο πάνω τύπους (3.5.31). Με τον τρόπο αυτό προκύπτουν σχετικά εύκολα, όπως φαίνεται αμέσως παρακάτω, και πάλι με τη χρήση του βασικού τύπου (3.5.32) για τη γενικευμένη συνάρτηση δέλτα του Dirac, οι τύποι

$$\begin{aligned} p_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \delta(x - \xi)\delta(y - \eta) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{4}{ab} \int_0^a \delta(x - \xi) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \delta(y - \eta) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\ &= \frac{4}{ab} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (x, y) \in P. \end{aligned} \quad (3.5.34)$$

Τώρα με βάση αυτούς τους συντελεστές  $p_{mn}$  της ειδικής φορτίσεως  $p(x, y)$  της πλάκας στη σχέση (3.5.30) υπολογίζουμε εύκολα στη συνέχεια (ουφ, χωρίς πια ολοκληρώσεις!) τους αντίστοιχους συντελεστές  $w_{mn}$  της διπλής ημιτονικής σειράς Fourier του βέλους κάμψεως (της βύθισης) της πλάκας με βάση τους τύπους (7.1.25) της Παραγράφου Β7.1.4 που τους αναφέρουμε κι εδώ

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{\pi^4 D \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.5.35)$$

Έτσι αντικαθιστώντας εδώ τους συντελεστές  $p_{mn}$  από τους τύπους (3.5.34), παίρνουμε χωρίς καμία δυσκολία

$$w_{mn} = \frac{4 \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\pi^4 ab D \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.5.36)$$

Με γνωστούς τώρα και τους συντελεστές αυτούς  $w_{mn}$  το βέλος κάμψεως  $w(x, y)$  της πλάκας  $P$  θα δίνεται τελικά από τον τύπο (7.1.8) της Παραγράφου Β7.1.2. Τον υπενθυμίζουμε κι αυτόν

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (x, y) \in P. \quad (3.5.37)$$

Εδώ βέβαια ο τύπος αυτός μας δίνει τη συνάρτηση επιρροής  $G(x, y, \xi, \eta)$ , την οποία ζητάμε. Αυτό συμβαίνει, επειδή είχαμε σαν φόρτιση  $p(x, y)$  την κάθετη μοναδιαία φόρτιση  $P_{\xi\eta} = 1$  στο σημείο  $(\xi, \eta)$  της πλάκας  $P$ . Αντικαθιστούμε τώρα τις εκφράσεις (3.5.36) των συντελεστών  $w_{mn}$  του βέλους κάμψεως  $w(x, y)$  της πλάκας στη διπλή σειρά Fourier (3.5.37). Παίρνουμε έτσι εύκολα την τελική μορφή της συναρτήσεως επιρροής  $G(x, y, \xi, \eta)$  στο παρόν πρόβλημα πλάκας και πάλι σε μορφή διπλής ημιτονικής σειράς Fourier με βάση την κλασική μέθοδο του Navier (1820)

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{4}{\pi^4 ab D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b}}{\left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}, \quad (x, y) \in P, \quad (\xi, \eta) \in P. \quad (3.5.38)$$

Υπενθυμίζουμε ότι  $a$  και  $b$  είναι οι διαστάσεις της πλάκας  $P = [0, a] \times [0, b]$  και  $D$  η δυσκαμψία της.

Σημειώνουμε επίσης ότι άμεσα προκύπτει από τον πιο πάνω τύπο (3.5.38) για τη συνάρτηση επιρροής  $G(x, y, \xi, \eta)$  ότι αυτή είναι συμμετρική ως προς τα πιο πάνω σημεία  $(x, y)$  και  $(\xi, \eta)$ , δηλαδή

$$G(x, y, \xi, \eta) = G(\xi, \eta, x, y) \quad (3.5.39)$$

σύμφωνα με την **αρχή της αμοιβαιότητας** του Maxwell ή των Betti–Maxwell. Για την απόδειξη αρκεί απλά να εναλλάξουμε τα σύμβολα  $x$  και  $\xi$  και τα σύμβολα  $y$  και  $\eta$  στον παραπάνω τύπο (3.5.38).

Με γνωστή τώρα αυτήν τη συνάρτηση επιρροής (ή συνάρτηση Green)  $G(x, y, \xi, \eta)$  μπορούμε να εκφράσουμε το βέλος κάμψεως (τη βύθιση)  $w(x, y)$  της πλάκας υπό αυθαίρετη (οποιαδήποτε) κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x, y)$  ή ισοδύναμα  $p(\xi, \eta)$  στην πλάκα. Προκύπτει γενικά η σχέση

$$w(x, y) = \iint_P G(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (3.5.40)$$

με διπλή ολοκλήρωση πάνω σ' ολόκληρη την πλάκα  $P$ , εδώ με  $P = [0, a] \times [0, b]$ . Αυτή η σχέση είναι αντίστοιχη της σχέσεως (3.5.27) για δοκό με απλή ολοκλήρωση κατά μήκος της δοκού. Εδώ όμως για πλάκα  $P$  απαιτείται διπλή ολοκλήρωση (αντί για απλή ολοκλήρωση) σ' ολόκληρη την πλάκα  $P$ .

Όταν η κάθετη κατανεμημένη φόρτιση  $p(x, y)$  της πλάκας είναι γνωστή, δηλαδή στο **ευθύ πρόβλημα**, η πιο πάνω σχέση (3.5.40) αποτελεί έναν ολοκληρωτικό τύπο (με διπλό όμως ολοκλήρωμα, ολοκλήρωση πάνω στην πλάκα  $P$ ) για τον υπολογισμό του βέλους κάμψεως  $w(x, y)$  της πλάκας  $P$ . Αντίθετα, όταν είναι το βέλος κάμψεως  $w(x, y)$  γνωστό και ζητείται η φόρτιση  $p(x, y)$

η οποία το προκάλεσε, δηλαδή στο **αντίστροφο πρόβλημα**, τότε ακριβώς ο ίδιος τύπος (3.5.40) αποτελεί μια ολοκληρωτική εξίσωση. Και μάλιστα ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm διδιάστατη, γραμμική, πρώτου είδους και μη ομογενή με πυρήνα τη συνάρτηση επιρροής  $G(x, y, \xi, \eta)$ . Εξαιτίας της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους της πλάκας (7.1.2) στην Παράγραφο Β7.1.1:

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{D} \quad (3.5.41)$$

η λύση της ολοκληρωτικής εξισώσεως (3.5.40) θα είναι προφανώς

$$\rho(x, y) = D \nabla^4 w(x, y). \quad (3.5.42)$$

Αντίστοιχο αποτέλεσμα προέκυψε στη δοκό στην προηγούμενη Παράγραφο Γ3.5.2, σχέση (3.5.28).

Σημειώνουμε ότι η τριδιάστατη γραφική παράσταση της συναρτήσεως επιρροής  $G(x, y, \xi, \eta)$  που ήδη προσδιορίσαμε στη σχέση (3.5.38) για σταθερό το σημείο  $(\xi, \eta)$  εφαρμογής του μοναδιαίου συγκεντρωμένου φορτίου  $P_{\xi\eta} = 1$  και μεταβλητές τις  $x$  και  $y$  δίνει φυσικά την **ελαστική επιφάνεια** της πλάκας η οποία οφείλεται στο φορτίο αυτό  $P_{\xi\eta} = 1$ . Από την άλλη πλευρά με σταθερό το σημείο  $(x, y)$  και μεταβλητές τις  $\xi$  και  $\eta$  η ίδια συνάρτηση επιρροής  $G(x, y, \xi, \eta)$  δίνει μια **επιφάνεια επιρροής** της πλάκας. Προφανώς εδώ αυτή η επιφάνεια επιρροής αφορά στο βέλος κάμψεως  $w(x, y)$  ακριβώς στο σταθερό **σημείο αναφοράς**  $(x, y)$ , όταν όμως το **σημείο φορτίσεως**  $(\xi, \eta)$ , δηλαδή το σημείο εφαρμογής του μοναδιαίου συγκεντρωμένου φορτίου  $P_{\xi\eta} = 1$ , κινείται πάνω στην πλάκα  $P$ . Φυσικά πρόκειται για δύο έννοιες απόλυτα ανάλογες με εκείνες που ήδη δώσαμε στην προηγούμενη Παράγραφο Γ3.5.2 για το αντίστοιχο (αλλά και πιο απλό) πρόβλημα της δοκού.

### Γ3.6. ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΗΣ ΦΟΡΤΙΣΕΩΣ ΣΕ ΠΡΟΒΟΛΟ

Στην παρούσα εφαρμογή θεωρούμε πρόβολο υπό κάμψη στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως στη Μηχανική των Υλικών. Ο πρόβολος έχει μήκος  $L$  με ελεύθερο το αριστερό άκρο του  $x = 0$  και πακτωμένο το δεξιό άκρο του  $x = L$ . Θεωρούνται επίσης ότι ισχύουν όλες οι συνηθισμένες υποθέσεις στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως ως προς συνήθεις δοκούς υπό κάμψη εν προκειμένω ως προς τον πρόβολο που θα εξετάσουμε. Στο παρόν πρόβλημα ζητάμε τον προσδιορισμό της κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x)$  κατά μήκος του προβόλου ( $0 \leq x \leq L$ ). Η φόρτιση αυτή  $p(x)$  υποτίθεται ότι είναι φραγμένη, δεν απειρίζεται σε κανένα σημείο του προβόλου. Η ίδια φόρτιση  $p(x)$  θεωρείται εδώ άγνωστη συνάρτηση. Ο προσδιορισμός της θα γίνει έτσι, ώστε η ροπή κάμψεως (ή καμπτική ροπή)  $M(x)$  που αντιστοιχεί στη φόρτιση αυτή  $p(x)$  να είναι ίση με το  $1/(c + 1)$  (όπου το  $c$  είναι θετική σταθερά:  $c > 0$ ) μιας υποθετικής (όχι της αληθινής) ροπής κάμψεως  $M^*(x)$ . Η υποθετική αυτή ροπή  $M^*(x)$  θα προέκυπτε στη θέση  $x$  ( $0 \leq x \leq L$ ) κατά μήκος του προβόλου, εάν η φόρτιση του προβόλου ήταν σταθερή και ίση με  $p(x)$  σε όλο το τμήμα  $[0, x]$  του προβόλου. Η απαίτηση αυτή είναι επιθυμητό να ισχύει καθ' όλο το μήκος του προβόλου:  $0 \leq x \leq L$ .

Παρακάτω δε θα δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση στις στερεοστατικές εξισώσεις ισορροπίας που καθορίζουν τη ροπή κάμψεως  $M(x)$  σε δοκό και θεωρούνται λίγο-πολύ γνωστές. Σκοπεύουμε όμως να καταστρώσουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση Volterra προς προσδιορισμό της άγνωστης φορτίσεως  $p(x)$  του προβόλου με βάση την προαναφερθείσα απαίτηση για την αντίστοιχη ροπή κάμψεως (καμπτική ροπή)  $M(x)$ . Στη συνέχεια θα λύσουμε την εξίσωση αυτή μέσω της μετατροπής της σε συνήθη διαφορική εξίσωση. Θα δούμε επίσης ότι η γραμμικά μεταβαλλόμενη φόρτιση  $p(x)$  παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον από μαθηματικής πλευράς) σ' αυτήν την εφαρμογή στη Στατική.

Καταρχήν με την ήδη αναφερθείσα υπόθεση ότι το αριστερό άκρο του προβόλου  $x = 0$  είναι το ελεύθερο άκρο του, ενώ η φόρτιση του προβόλου είναι η  $p(x)$ , γνωρίζουμε ότι η ροπή κάμψεως  $M(x)$  και η τέμνουσα δύναμη  $Q(x)$  είναι και οι δυο τους μηδενικές σε τούτο το ελεύθερο άκρο  $x = 0$ . Άρα  $M(0) = 0$  και  $Q(0) = 0$ . Παραπέρα διαπιστώνουμε εύκολα ότι το στοιχειώδες φορτίο  $p(\xi) d\xi$

στο σημείο  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq x$ ) προκαλεί αντίστοιχη ροπή κάμψεως  $dM = (x - \xi)p(\xi) d\xi$  στο σημείο  $x$  της δοκού με  $L \geq x > \xi \geq 0$ . Αυτό συμβαίνει, γιατί η απόσταση των δύο αυτών σημείων είναι ίση με  $x - \xi$  και θετική βέβαια για  $x > \xi$ . Κατ' αυτόν τον τρόπο η συνολική ροπή κάμψεως  $M(x)$  στο σημείο  $x$  εξαιτίας της συνολικής φορτίσεως της δοκού στο αριστερό μέρος της ( $0 \leq \xi \leq x$ ) θα ισούται με το ολοκλήρωμα της προαναφερθείσας στοιχειώδους ροπής  $dM$ , πιο συγκεκριμένα,

$$M(x) = \int_0^x (x - \xi)p(\xi) d\xi. \quad (3.6.1)$$

Από την άλλη πλευρά, αν (υποθετικά) η φόρτιση της δοκού ήταν ίση με  $p(x)$  σε ολόκληρο το αριστερό τμήμα της  $0 \leq \xi \leq x$  (δηλαδή μέχρι και το σημείο  $x$ ), τότε η αντίστοιχη ροπή κάμψεως  $M^*(x)$  θα ήταν ίση με

$$M^*(x) = \frac{x}{2} [xp(x)] = \frac{x^2}{2} p(x). \quad (3.6.2)$$

Αυτό διαπιστώνεται εύκολα για σταθερή φόρτιση  $p(x)$ . Δηλαδή η ροπή κάμψεως  $M^*(x)$  είναι ίση με το συνολικό φορτίο  $xp(x)$  επί την απόσταση  $x/2$  του κέντρου εφαρμογής του από το σημείο  $x$ .

Η απαίτηση στη διατύπωση της παρούσας εφαρμογής είναι να ισχύει (καθ' όλο το μήκος του προβόλου) η σχέση

$$M(x) = \frac{1}{c+1} M^*(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.6.3)$$

Η σχέση αυτή λόγω των εκφράσεων (3.6.1) και (3.6.2) για την αληθινή ροπή κάμψεως  $M(x)$  και την υποθετική ροπή κάμψεως  $M^*(x)$  αντίστοιχα παίρνει την τελική της μορφή

$$\int_0^x (x - \xi)p(\xi) d\xi = \frac{1}{2(c+1)} x^2 p(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.6.4)$$

Με τον τρόπο αυτό πετύχαμε να αναγάγουμε το στατικό πρόβλημα για τον εξεταζόμενο πρόβλο που τέθηκε στην παρούσα εφαρμογή σε μια μονοδιάστατη ομογενή γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra δευτέρου είδους. Μάλιστα η εξίσωση αυτή (3.6.4) είναι συνελκτικού τύπου, επειδή ο πυρήνας της είναι πυρήνας διαφοράς:  $K(x, \xi) = x - \xi$ . Την ολοκληρωτική εξίσωση (3.6.4) μπορούμε να τη λύσουμε με αναγωγή της σε ισοδύναμη συνήθη διαφορική εξίσωση. Σημειώνουμε επίσης ότι η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace δεν είναι πρόσφορη στην περίπτωση αυτή, γιατί υπάρχει ο όρος  $x^2$  στο συντελεστή της άγνωστης συναρτήσεως  $p(x)$  στο δεξιό μέλος της ολοκληρωτικής εξισώσεως Volterra (3.6.4).

Προχωράμε τώρα στην εύρεση της ισοδύναμης συνήθους και ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξισώσεως. Μια πρώτη παραγωγή της ολοκληρωτικής εξισώσεως Volterra (3.6.4) μας οδηγεί στην ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση

$$\int_0^x p(\xi) d\xi = \frac{1}{2(c+1)} [x^2 p'(x) + 2xp(x)], \quad 0 < x < L. \quad (3.6.5)$$

Η εξίσωση αυτή δεν παρουσιάζει κάποιο ιδιαίτερο πρακτικό ενδιαφέρον, δηλαδή ενδιαφέρον ως προς τη λύση της ολοκληρωτικής εξισώσεως (3.6.4). Με μια ακόμη παραγωγή οδηγούμαστε πλέον στη συνήθη και ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$p(x) = \frac{1}{2(c+1)} [x^2 p''(x) + 4xp'(x) + 2p(x)], \quad 0 < x < L. \quad (3.6.6)$$

Η εξίσωση αυτή άμεσα απλοποιείται και στη μορφή

$$x^2 p''(x) + 4xp'(x) - 2cp(x) = 0, \quad 0 < x < L. \quad (3.6.7)$$

Δυστυχώς η γραμμική αυτή διαφορική εξίσωση είναι με μη σταθερούς συντελεστές. Παρά ταύτα είναι γνωστής μορφής: διαφορική εξίσωση Euler ή Cauchy-Euler. Άρα επιδέχεται κλειστές λύσεις της μορφής

$$p(x) = x^\mu \quad (3.6.8)$$

με το  $\mu$  προσδιοριστέα σταθερά. Πραγματικά η μορφή αυτή, εάν αντικατασταθεί στη διαφορική εξίσωση (3.6.7), οδηγεί άμεσα στη δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση (χαρακτηριστική εξίσωση):

$$\mu(\mu - 1) + 4\mu - 2c = \mu^2 + 3\mu - 2c = 0. \quad (3.6.9)$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής μας δίνει τις ζητούμενες τιμές  $\mu_{1,2}$  της άγνωστης σταθεράς  $\mu$ :

$$\mu_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{9+8c}-3}{2}. \quad (3.6.10)$$

Έχουμε όμως ήδη υποθέσει θετική τη σταθερά  $c$ , ενώ την κατανεμημένη φόρτιση  $p(x)$  την υποθέσαμε φραγμένη (δηλαδή μη απειριζόμενη) κατά μήκος του προβόλου. Άρα η λύση  $\mu_2$  απορρίπτεται, γιατί, επειδή είναι πάντοτε αρνητική, οδηγεί σε μη επιθυμητό απειρισμό της φορτίσεως  $p(x)$  στο ελεύθερο άκρο  $x = 0$  του προβόλου. Απομένει επομένως μόνο η θετική τιμή  $\mu_1$  (για  $c > 0$ , όπως έχει ήδη υποτεθεί)

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{9+8c}-3}{2} \quad (3.6.11)$$

σαν αποδεκτή τιμή. Τότε η σχέση (3.6.8) παίρνει την τελική έκφρασή της

$$p(x) = Cx^{\mu_1} = Cx^{(\sqrt{9+8c}-3)/2}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.6.12)$$

Βέβαια στη σχέση αυτή θέσαμε και την αυθαίρετη σταθερά  $C$ . Η ύπαρξη της αυθαίρετης αυτής σταθεράς είναι απόλυτα δικαιολογημένη για την ομογενή διαφορική εξίσωση (3.6.7), που προέκυψε από την επίσης ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση (3.6.4). (Η ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση (3.6.5) που βρέθηκε ενδιάμεσα είναι φυσικά και αυτή ομογενής.) Κατά συνέπεια υπάρχει μια απλή απειρία λύσεων, που θα ήταν βέβαια διπλή, εάν δεν είχαμε απορρίψει τη σταθερά  $\mu_2$ . Παρά ταύτα ο ρόλος της σταθεράς  $C$  είναι πολύ μικρός, επειδή είναι μόνο μια πολλαπλασιαστική σταθερά στη μορφή (3.6.12) της φορτίσεως  $p(x)$  του προβόλου που βρήκαμε. Τελικά βέβαια μπορεί να διαπιστωθεί και η ορθότητα της πιο πάνω λύσεως (3.6.12) με επαλήθευση κατευθείαν της ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra (3.6.4).

Θα εξετάσουμε τώρα και την ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση όπου η σταθερά  $c$  παίρνει την τιμή 2:  $c = 2$ . Στην περίπτωση αυτή καταρχήν η έκφραση (3.6.12) της ζητούμενης φορτίσεως  $p(x)$  απλοποιείται στη μορφή

$$p(x) = Cx, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3.6.13)$$

Προκύπτει δηλαδή απλά μια γραμμική, τριγωνική φόρτιση του προβόλου. Αν θεωρήσουμε τώρα το αριστερό τμήμα  $[0, x]$  του προβόλου, η τέμνουσα (διατμητική) δύναμη  $Q(x)$  θα είναι τώρα ασφαλώς

$$Q(x) = \frac{1}{2}x(Cx) = \frac{C}{2}x^2, \quad (3.6.14)$$

δηλαδή το εμβαδόν του σχετικού τριγώνου για  $C > 0$ .

Επίσης η αντίστοιχη ροπή κάμψεως (καμπτική ροπή)  $M(x)$  θα δίνεται από τον τύπο

$$M(x) = \frac{x}{3}Q(x) = \frac{C}{6}x^3. \quad (3.6.15)$$

Ο τύπος αυτός ισχύει, επειδή το κέντρο βάρους της τριγωνικής φορτίσεως βρίσκεται ασφαλώς στη θέση  $2x/3$  στην ειδική περίπτωση γραμμικής φορτίσεως  $p(x)$  (για  $c = 2$ ) που εξετάζεται. Από την άλλη πλευρά η υποθετική ροπή κάμψεως  $M^*(x)$  στον τύπο (3.6.2) είναι τώρα (για  $c = 2$ ) προφανώς ίση με

$$M^*(x) = \frac{x^2}{2}p(x) = \frac{C}{2}x^3. \quad (3.6.16)$$

Άρα με σύγκριση των δύο προηγούμενων τύπων διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$M(x) = \frac{1}{3}M^*(x) \quad (3.6.17)$$

με επαλήθευση της αρχικής απαιτήσεως (3.6.3) (εδώ με  $c = 2$ ). Διαπιστώνεται επομένως πως η απαίτηση αυτή ισχύει στη συγκεκριμένη ενδιαφέρουσα περίπτωση κάθετης κατανεμημένης φορτίσεως  $p(x)$ : γραμμική φόρτιση  $p(x) = Cx$  του προβόλου με  $c = 2$ . Μάλιστα δεν απαιτείται ο υπολογισμός κάποιου ολοκληρώματος, γιατί η ροπή κάμψεως  $M(x)$  προέκυψε με γεωμετρικό τρόπο στον τύπο (3.6.15) εξαιτίας της τριγωνικής φορτίσεως  $p(x)$  κατά μήκος του προβόλου.

### Γ3.7. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΙΞΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ

#### Γ3.7.1. Εισαγωγή στη γραμμική Ιξοελαστικότητα

Τις περισσότερες φορές ο Πολιτικός Μηχανικός αντιμετωπίζει στην εργασία του υλικά με μηχανική συμπεριφορά σε καταπόνηση ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$ , εφόσον βέβαια και η καταπόνηση είναι ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$ . Παραδείγματος χάρη, στην ισότροπη και γραμμική Ελαστικότητα ισχύει η βασική μορφή του τόσο γνωστού μας νόμου του Hooke

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.7.1)$$

για το απλό πείραμα εφελκυσμού ράβδου κατά τη διεύθυνση του άξονα  $Ox$ . Στον τύπο αυτό  $\sigma$  είναι η τάση που επιβάλλεται,  $\varepsilon$  η αντίστοιχη παραμόρφωση (κατά τη διεύθυνση του ίδιου άξονα  $Ox$ ) και  $E$  το μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young) του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της ράβδου. Επομένως στο πείραμα αυτό η επιβολή της εφελκυστικής τάσεως  $\sigma$  κάποια χρονική στιγμή (έστω τη στιγμή  $t = 0$ ) στη ράβδο που θεωρούμε και η διατήρηση της τάσεως αυτής  $\sigma$  αμετάβλητης για  $t \geq 0$  έχει σαν άμεση συνέπεια την πρόκληση παραμορφώσεως

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (3.7.2)$$

στη ράβδο αυτή που διατηρείται επίσης αμετάβλητη για  $t \geq 0$ . Η παραμόρφωση αυτή  $\varepsilon$  είναι φυσικά σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη από το χρόνο  $t$ , εφόσον βέβαια το ίδιο ισχύει και για την εφελκυστική (ή τη θλιπτική) τάση  $\sigma$  η οποία επιβάλλεται στη ράβδο στην παρούσα μονοαξονική καταπόνησή της. Πρόκειται για την κλασική ελαστική συμπεριφορά του υλικού της ράβδου που είναι κι αυτή που συνήθως ισχύει (ή έστω προσεγγιστικά υιοθετείται) από τον Πολιτικό Μηχανικό.

Μερικές φορές όμως στο ίδιο και τόσο απλό πείραμα εφελκυσμού (ή και στο ανάλογο πείραμα θλίψεως) ράβδου η πιο πάνω απλή μορφή (3.7.1) του νόμου του Hooke δεν είναι ικανοποιητική στην πράξη του Πολιτικού Μηχανικού. Αυτό συμβαίνει, όταν το υλικό της ράβδου έχει χρονικά μεταβλητή συμπεριφορά, δηλαδή έστω κι αν η τάση  $\sigma$  διατηρεί σταθερή τιμή,  $\sigma = \sigma_0$  για  $t \geq 0$ , δεν ισχύει το ίδιο και για την παραμόρφωση  $\varepsilon$  που προκαλείται. Αυτή είναι συνάρτηση του χρόνου  $t$ , δηλαδή  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ . Εάν τώρα περιορισθούμε στο απλό πείραμα του εφελκυσμού, διαπιστώνουμε ότι σ' ένα τέτοιο υλικό η παραμόρφωση  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  είναι συνεχώς αύξουσα (ή τουλάχιστον συνεχώς μη φθίνουσα) συνάρτηση του χρόνου  $t$ . Δηλαδή η παραμόρφωση  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  αυξάνει με την πάροδο του χρόνου  $t$ , παρόλο που η εφελκυστική τάση  $\sigma = \sigma_0$  είναι σταθερή συνάρτησι του χρόνου  $t$ .

Το φαινόμενο αυτό καλείται **Ιξοελαστικότητα** (ή ισοδύναμα **Ιξωδοελαστικότητα**, στα Αγγλικά **Viscoelasticity**) και το υλικό που έχει αυτήν την ιδιότητα καλείται **ιξοελαστικό (viscoelastic)**. Στην παρούσα ενότητα θα περιορισθούμε φυσικά στη **γραμμική Ιξοελαστικότητα**, ακριβώς όπως στη Μηχανική των Υλικών (ή Αντοχή των Υλικών) περιοριζόμαστε γενικά στη γραμμική Ελαστικότητα. Πρέπει να σημειωθεί επίσης ότι στο πιο πάνω απλό πείραμα εφελκυσμού ράβδου υπό σταθερή τάση  $\sigma = \sigma_0$  η ιξοελαστική συμπεριφορά του υλικού μας που ήδη αναφέρθηκε έχει οδηγήσει στο φαινόμενο του **ερπυσμού** (στην ειδική αυτή περίπτωση) με αύξηση της παραμορφώσεως  $\varepsilon = \varepsilon(t)$  συναρτήσι του χρόνου  $t$ . Πολύ συχνά παρουσιάζεται επίσης και το φαινόμενο της **χαλαρώσεως**. Αυτό συνίσταται στη μείωση της τάσεως  $\sigma = \sigma(t)$  συναρτήσι του χρόνου  $t$  υπό σταθερή παραμόρφωση  $\varepsilon = \varepsilon_0$  (για  $t \geq 0$ ) στη ράβδο που εφελκύεται. Και τα δύο αυτά φαινόμενα αποτελούν πάρα πολύ ειδικές περιπτώσεις εμφανίσεως **ιξοελαστικής** συμπεριφοράς στο υλικό της ράβδου.



Γενικότερα μπορούμε ασφαλώς να έχουμε ένα ολόκληρο ισοελαστικό μέσον στις δύο ή ακόμη και στις τρεις διαστάσεις. Εντούτοις σ' αυτήν εδώ την ενότητα περιοριζόμαστε στη μία διάσταση.

Σημειώνουμε επίσης ότι αρκετά υλικά τα οποία ενδιαφέρουν τον Πολιτικό Μηχανικό είναι ισοελαστικά. Αυτό συμβαίνει κυρίως (α) με πλαστικά υλικά, (β) με μέταλλα σε υψηλές θερμοκρασίες και (γ) σε μικρό βαθμό και με το σκυρόδεμα και το ασφαλικό σκυρόδεμα (ή ασφαλοσκυρόδεμα).

Ένα κλασικό βιβλίο για την Ισοελαστικότητα (Viscoelasticity) είναι το βιβλίο του Flügge (1975), *Viscoelasticity*. Αυτό απετέλεσε και το βασικό βοήθημα του συγγραφέα για την προετοιμασία της παρούσας ενότητας. (Αυτό το βιβλίο και δύο ακόμη σχετικά βιβλία αναφέρονται στην τελευταία σελίδα της Βιβλιογραφίας.) Πάρα πολλά επίσης βιβλία της Μηχανικής των Υλικών (ή Αντοχής των Υλικών) αφιερώνουν μερικές σελίδες στο ισοελαστικό φαινόμενο. Δίνουν έμφαση στις δύο ειδικές περιπτώσεις του ερπυσμού (creep) και της χαλαρώσεως (relaxation) στο στοιχειώδες πείραμα της απλής ράβδου σε μονοαξονικό εφελκυσμό υπό σταθερή τάση  $\sigma = \sigma_0$  (ερπυσμός) ή υπό σταθερή παραμόρφωση  $\varepsilon = \varepsilon_0$  (χαλάρωση). Στο υπόλοιπο μέρος της παρούσας ενότητας έχουμε την πρόθεση να γενικεύσουμε αυτά τα δύο απλά πειράματα (σταθερή τάση  $\sigma_0$  στον ερπυσμό ή σταθερή παραμόρφωση  $\varepsilon_0$  στη χαλάρωση) στη γενική περίπτωση μεταβλητής τάσεως  $\sigma = \sigma(t)$  και επίσης μεταβλητής παραμορφώσεως  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ . Θα γίνει έτσι μια ήπια εισαγωγή του φοιτητή και της φοιτήτριας Πολιτικού Μηχανικού στις εξισώσεις της Ισοελαστικότητας με έμφαση στη χρησιμότητα των ολοκληρωτικών εξισώσεων στη μαθηματική διατύπωση του ισοελαστικού φαινομένου.

### Γ3.7.2. Ερπυσμός και χαλάρωση. Υλικά Kelvin, Maxwell και γενικότερα ισοελαστικά υλικά

Σε πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού σε ένα κοινό γραμμικά ελαστικό υλικό (χωρίς βέβαια ισοελαστική συμπεριφορά) υπό σταθερή τάση  $\sigma_0$  η παραμόρφωση  $\varepsilon$  που αναπτύσσεται είναι επίσης σταθερή και ίση με  $\varepsilon = \sigma_0/E$  με  $E$  το μέτρο ελαστικότητας (ή μέτρο του Young) του ελαστικού υλικού. Αντίθετα σε ένα γραμμικά ισοελαστικό υλικό πάλι υπό σταθερή τάση  $\sigma_0$  (πείραμα **ερπυσμού**) η παραμόρφωση  $\varepsilon$  που αναπτύσσεται είναι μεταβλητή,  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ , και ίση με  $\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t)$  αυξάνοντας με το χρόνο  $t$ . Η συνάρτηση αυτή  $J(t)$  καλείται **ενδοτικότητα σε ερπυσμό (creep compliance)** και είναι χαρακτηριστική συνάρτηση για ένα γραμμικά ισοελαστικό υλικό. Από την άλλη πλευρά, εάν η παραμόρφωση που επιβάλλεται στην παρούσα μονοαξονική καταπόνηση του ισοελαστικού υλικού είναι σταθερή  $\varepsilon_0$  (πείραμα **χαλαρώσεως**), τότε η τάση  $\sigma$  που αναπτύσσεται θα είναι μεταβλητή,  $\sigma = \sigma(t)$ , και ίση με  $\sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t)$  φθίνοντας με το χρόνο  $t$ . Η συνάρτηση αυτή  $Y(t)$  καλείται **μέτρο χαλαρώσεως (relaxation modulus)** και είναι κι αυτή (ακριβώς όπως κι η ενδοτικότητα σε ερπυσμό  $J(t)$ ) μια χαρακτηριστική συνάρτηση για ένα γραμμικά ισοελαστικό υλικό. Δηλαδή για ένα γραμμικά ισοελαστικό υλικό σε μονοαξονική καταπόνηση ισχύουν οι ακόλουθες δύο σχέσεις:

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) \quad (\text{σε ερπυσμό}) \quad \text{και} \quad \sigma(t) = \varepsilon_0 Y(t) \quad (\text{σε χαλάρωση}). \quad (3.7.3)$$

Φυσικά στην ειδική περίπτωση του γραμμικά ελαστικού υλικού από το νόμο του Hooke συνάγουμε ότι  $J(t) = 1/E$  και  $Y(t) = E$ . Είναι η μόνη ειδική περίπτωση με σταθερές τις συναρτήσεις  $J(t)$  και  $Y(t)$ .

Για γραμμικά ισοελαστικό υλικό η ενδοτικότητα σε ερπυσμό  $J(t)$  και το μέτρο χαλαρώσεως  $Y(t)$  μπορούν να υπολογισθούν πειραματικά από τα δύο απλά πειράματα του ερπυσμού και της χαλαρώσεως αντίστοιχα. Πιο κάτω θα δούμε μάλιστα ότι για τα γραμμικά ισοελαστικά υλικά που υποθέτουμε τα  $J(t)$  και  $Y(t)$  δεν είναι ανεξάρτητες συναρτήσεις, αλλά συνδέονται με έναν απλό ολοκληρωτικό τύπο. Δηλαδή γενικά οι συναρτήσεις  $J(t)$  και  $Y(t)$  εξαρτώνται η μία από την άλλη.

Υπάρχουν όμως πολλά ισοελαστικά υλικά των οποίων η ισοελαστική συμπεριφορά στη μονοαξονική καταπόνηση μοντελοποιείται κι εκφράζεται με τη βοήθεια λίγων μόνο παραμέτρων (και στο ελαστικό υλικό μόνο με μία παράμετρο: το μέτρο ελαστικότητας  $E$ ). Τα υλικά αυτά θεωρούνται ότι συμπεριφέρονται σαν ελατήρια (ελαστικά στερεά) και αποσβεστήρες (ιξώδη ρευστά), συγκεκριμένα σαν συνδυασμοί ελατηρίων και αποσβεστήρων στη σειρά, παράλληλα ή με πιο πολύπλοκο τρόπο. Δύο κλασικά διπαραμετρικά ισοελαστικά υλικά είναι τα υλικά Kelvin (ή Voigt) και Maxwell:

• **Υλικό Kelvin (ή Voigt):** Το υλικό αυτό θεωρείται πως συμπεριφέρεται σαν ένα ελατήριο παράλληλα με έναν αποσβεστήρα και έχει δύο μόνο παραμέτρους, τις  $q_0$  και  $q_1$ , σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Αποδεικνύεται μαθηματικά (μέσω δύο απλών συνήθων διαφορικών εξισώσεων) ότι η ενδοτικότητα σε ερπυσμό  $J(t)$  και το μέτρο χαλαρώσεως  $Y(t)$  έχουν για το υλικό Kelvin (ή Voigt) τις απλές μορφές

$$J(t) = \frac{1}{q_0} (1 - e^{-\lambda t}) \quad \text{και} \quad Y(t) = q_0 + q_1 \delta(t) \quad \text{με} \quad \lambda = \frac{q_0}{q_1}, \quad t \geq 0 \quad (3.7.4)$$

και  $\delta(t)$  τη γνωστή μας συνάρτηση δέλτα του Dirac. Υπενθυμίζουμε ότι στο υλικό Kelvin (ή Voigt) και στην ιξοελαστική συμπεριφορά του αναφερθήκαμε σύντομα και στην Ενότητα A11.4 για την Ιξοελαστικότητα του Μέρους Α των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς.

• **Υλικό Maxwell:** Το υλικό αυτό θεωρείται ότι συμπεριφέρεται σαν ένα ελατήριο στη σειρά με έναν αποσβεστήρα και έχει κι αυτό δύο μόνο παραμέτρους, τις  $p_1$  και  $q_1$ , σε μονοαξονικό εφελκυσμό. Αποδεικνύεται ξανά μαθηματικά (και πάλι μέσω δύο απλών συνήθων διαφορικών εξισώσεων) ότι η ενδοτικότητα σε ερπυσμό  $J(t)$  και το μέτρο χαλαρώσεως  $Y(t)$  παίρνουν για το υλικό Maxwell τις απλές μορφές

$$J(t) = \frac{p_1 + t}{q_1} \quad \text{και} \quad Y(t) = \frac{q_1}{p_1} e^{-t/p_1} \quad \text{με} \quad t \geq 0. \quad (3.7.5)$$

Προχωρώντας σε περισσότερα από δύο στοιχεία (ελατήρια και αποσβεστήρες), μπορούμε να ορίσουμε τριπαραμετρικά, τετραπαραμετρικά και γενικά  $n$ -παραμετρικά ιξοελαστικά υλικά. Για καθένα από αυτά μπορούμε να σχηματίσουμε τις δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που οι λύσεις τους θα μας δώσουν την ενδοτικότητα σε ερπυσμό  $J(t)$  και το μέτρο χαλαρώσεως  $Y(t)$ . Δε μας ενδιαφέρει όμως εδώ αυτή η προσέγγιση του προβλήματος. Μας ενδιαφέρει πολύ περισσότερο η σχέση των ιξοελαστικών υλικών με τους ολοκληρωτικούς τύπους και τις ολοκληρωτικές εξισώσεις κι αυτή θα διερευνήσουμε απο 'δώ και πέρα. Μάλιστα αυτό θα το κάνουμε για γενικά ιξοελαστικά υλικά (με οποιοσδήποτε συναρτήσεις  $J(t)$  και  $Y(t)$ ) και όχι για ιξοελαστικά υλικά με συγκεκριμένο αριθμό παραμέτρων. Και συνεχώς βέβαια μέσα στα πλαίσια της γραμμικής Ιξοελαστικότητας.

### Γ3.7.3. Η αρχή της υπερθέσεως του Boltzmann

Έχουμε υποθέσει γραμμική Ιξοελαστικότητα (όχι μη γραμμική) και ένα πείραμα μονοαξονικού εφελκυσμού (ή θλίψεως) σε ράβδο από γραμμικά ιξοελαστικό υλικό. Στο πείραμα αυτό θεωρούμε πρώτα μια σταθερή τάση  $\sigma_1$  που εφαρμόζεται στη ράβδο τη χρονική στιγμή  $t_1$ . Τότε η αντίστοιχη παραμόρφωση θα είναι μεταβλητή: γενικά αύξουσα (ή καλύτερα μη φθίνουσα) και ίση με  $\varepsilon_1(t)$ . (Αυτό βέβαια θα ισχύει για  $t \geq t_1$ . Για  $t < t_1$  η παραμόρφωση  $\varepsilon_1(t)$  είναι προφανώς μηδενική.) Ανάλογα θεωρούμε στη συνέχεια και μια δεύτερη σταθερή τάση  $\sigma_2$  που εφαρμόζεται στην ίδια ράβδο τη χρονική στιγμή  $t_2$  (με  $t_2 > t_1$ ). Τότε η αντίστοιχη παραμόρφωση θα είναι ανάλογα  $\varepsilon_2(t)$  (επίσης ανάλογα για  $t \geq t_2$ ). Γνωρίζοντας μάλιστα και την ενδοτικότητα σε ερπυσμό  $J(t)$  για το ιξοελαστικό υλικό το οποίο εξετάζουμε σε εφελκυσμό (ή σε θλίψη), από τον ορισμό της  $J(t)$  έχουμε

$$\varepsilon_1(t) = \sigma_1 J(t - t_1) \quad (\text{φυσικά με } t \geq t_1) \quad \text{και} \quad \varepsilon_2(t) = \sigma_2 J(t - t_2) \quad (\text{φυσικά με } t \geq t_2), \quad (3.7.6)$$

γιατί πέρασε χρόνος  $t - t_1$  για την παραμόρφωση  $\varepsilon_1(t)$  και χρόνος  $t - t_2$  για την παραμόρφωση  $\varepsilon_2(t)$ .

Τώρα, απλά επειδή το ιξοελαστικό υλικό της ράβδου μας είναι γραμμικό, η συνολική παραμόρφωσή της  $\varepsilon(t)$  (για  $t \geq t_2$ , οπότε θα έχουν ήδη εφαρμοσθεί και οι δύο τάσεις  $\sigma_1$  και  $\sigma_2$  μαζί), θα είναι απλά ίση με το άθροισμα των δύο πιο πάνω μετατοπίσεων  $\varepsilon_1(t)$  και  $\varepsilon_2(t)$ . Δηλαδή θα έχουμε

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) = \sigma_1 J(t - t_1) + \sigma_2 J(t - t_2) \quad \text{με} \quad t \geq t_2 \quad \text{και} \quad t_2 > t_1. \quad (3.7.7)$$

Αυτό το τόσο ενδιαφέρον αποτέλεσμα της γραμμικότητας, η υπέρθεση των δύο παραμορφώσεων  $\varepsilon_1(t)$  και  $\varepsilon_2(t)$  (και γενικότερα πολλών παραμορφώσεων), καλείται στη γραμμική Ιξοελαστικότητα **αρχή της υπερθέσεως του Boltzmann**. (Προφανώς δεν ισχύει στη μη γραμμική Ιξοελαστικότητα.)

**Γ3.7.4. Ολοκληρωτικοί τύποι και ολοκληρωτικές εξισώσεις στη γραμμική Ιξοελαστικότητα**

Ας υποθέσουμε τώρα στο ίδιο πείραμα εφελκυσμού (ή θλίψεως) ράβδου από ένα γραμμικά ιξοελαστικό υλικό ότι η τάση  $\sigma$  που εφαρμόζεται σ' αυτό είναι γενικά συνάρτηση του χρόνου  $t$ , δηλαδή  $\sigma = \sigma(t)$  με  $t \geq 0$ . Δηλώνουμε την αρχική τιμή της με  $\sigma_0$ , δηλαδή  $\sigma_0 = \sigma(0)$ . Προφανώς, αφού

$$\int_0^t \dot{\sigma}(\tau) d\tau = \sigma(\tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \sigma(t) - \sigma(0) = \sigma(t) - \sigma_0, \quad (3.7.8)$$

θα ισχύει ο σχετικός απλός ολοκληρωτικός τύπος

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \int_0^t \dot{\sigma}(\tau) d\tau = \sigma_0 + \int_0^t d\sigma(\tau) \quad \text{με} \quad d\sigma(\tau) = \dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (3.7.9)$$

Στον τύπο αυτό παρατηρούμε ότι η μεταβλητή τάση  $\sigma(t)$  που εφαρμόζεται στην ιξοελαστική ράβδο σε εφελκυσμό (ή θλίψη) αποτελεί υπέρθεση (επαλληλία) της αρχικής τιμής της  $\sigma_0 = \sigma(0)$  την αρχική χρονική στιγμή  $t = 0$  και των στοιχειωδών (απειροστών) μεταβολών της  $d\sigma \equiv d\sigma(\tau)$  το χρονικό διάστημα  $0 \leq \tau \leq t$ . Οι μεταβολές αυτές μπορούν να είναι είτε (α) θετικές, όταν  $\dot{\sigma}(\tau) > 0$ , είτε (β) αρνητικές, όταν  $\dot{\sigma}(\tau) < 0$ , είτε τέλος (γ) μηδενικές, όταν  $\dot{\sigma}(\tau) = 0$ , πάντα ως προς την τάση  $\sigma(t)$ .

Και τώρα με βάση τον παραπάνω ολοκληρωτικό τύπο (3.7.9) μπορούμε να υπολογίσουμε την παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  της ιξοελαστικής ράβδου μας που οφείλεται στην τάση  $\sigma(t)$ . Η τάση αυτή  $\sigma(t)$  έχει ήδη αναλυθεί στην αρχική τιμή της  $\sigma_0 = \sigma(0)$  και στις στοιχειώδεις (απειροστές) μεταβολές της  $d\sigma(\tau)$ . Για την αρχική τιμή της  $\sigma_0 = \sigma(0)$  η αντίστοιχη παραμόρφωση  $\varepsilon_0(t)$  θα είναι βέβαια

$$\varepsilon_0(t) = \sigma(0)J(t) = \sigma_0 J(t) \quad (3.7.10)$$

(με  $J(t)$ , επαναλαμβάνουμε, την ενδοτικότητα σε ερπυσμό), μια που το  $\sigma_0$  είναι σταθερά. Τώρα παραπέρα για την κάθε στοιχειώδη μεταβολή της  $d\sigma \equiv d\sigma(\tau) = \dot{\sigma}(\tau) d\tau$  ακριβώς τη χρονική στιγμή  $\tau$  (φυσικά με  $\tau \geq 0$ ) η αντίστοιχη στοιχειώδης παραμόρφωση  $d\varepsilon \equiv d\varepsilon(\tau, t)$  θα είναι ανάλογα

$$d\varepsilon \equiv d\varepsilon(\tau, t) = d\sigma(\tau)J(t - \tau) = [\dot{\sigma}(\tau) d\tau]J(t - \tau) = J(t - \tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (3.7.11)$$

Σημειώνουμε ότι θέσαμε  $t - \tau$  αντί για  $t$  στη συνάρτηση  $J(t)$ , επειδή ο χρόνος που μεσολάβησε από τη χρονική στιγμή  $\tau$  της εφαρμογής της στοιχειώδους τάσεως  $d\sigma(\tau)$  μέχρι τη χρονική στιγμή  $t$  που μας ενδιαφέρει να μάθουμε τι γίνεται με την παραμόρφωση  $d\varepsilon(\tau, t)$  είναι απλά  $t - \tau$ , όχι βέβαια  $t$ .

Όσον αφορά τώρα σε ολόκληρη την παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  τη χρονική στιγμή  $t$ , αυτή θα είναι η υπέρθεση (ή επαλληλία) της αρχικής παραμορφώσεως  $\varepsilon_0(t)$  στη σχέση (3.7.10) και όλων των στοιχειωδών (απειροστών) παραμορφώσεων  $d\varepsilon(\tau, t)$  στη σχέση (3.7.11). Αυτό προβλέπει η αρχή της υπερθέσεως του Boltzmann που ήδη την αναφέραμε και θα πρέπει βέβαια να ισχύει εξαιτίας της γραμμικότητας του γραμμικά ιξοελαστικού υλικού της ράβδου μας. Κατά συνέπεια έχουμε

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0(t) + \int_0^t d\varepsilon(\tau, t) = \sigma_0 J(t) + \int_0^t J(t - \tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau. \quad (3.7.12)$$

Αυτή είναι η συνολική παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  της ράβδου μας τη χρονική στιγμή  $t$ . Μια χαρά τύπος φαίνεται (καλύτερα ολοκληρωτικός τύπος), αν και δυστυχώς περιέχει την παράγωγο  $\dot{\sigma}(\tau)$ . Και παρατηρούμε ότι με γνωστή την ενδοτικότητα σε ερπυσμό  $J(t)$  καταφέραμε να υπολογίζουμε την παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  όχι μόνο για ερπυσμό ( $\sigma(t) = \sigma_0$ ), αλλά για οποιαδήποτε κατανομή τάσεως  $\sigma(t)$ .

Μερικές φορές όμως ο πιο πάνω ολοκληρωτικός τύπος (3.7.12) γράφεται και σε ισοδύναμη εναλλακτική μορφή απαλλαγμένη από την παράγωγο  $\dot{\sigma}(\tau)$  της τάσεως  $\sigma(\tau)$ . Αυτήν τη δεύτερη μορφή την παίρνουμε απλά κάνοντας παραγοντική ολοκλήρωση (ή ολοκλήρωση κατά παράγοντες ή κατά μέρη) στο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους του τύπου (3.7.12). Έτσι βρίσκουμε τον τύπο

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t) + [J(t - \tau)\sigma(\tau)]_{\tau=0}^{\tau=t} - \int_0^t \dot{J}(t - \tau)(-1)\sigma(\tau) d\tau \quad (3.7.13)$$

με  $\dot{J}(t)$  την παράγωγο της συναρτήσεως  $J(t)$ . Επίσης το  $-1$  εμφανίσθηκε, απλά γιατί η ολοκλήρωση ήταν ως προς  $\tau$  και όχι ως προς  $t$ , ενώ είχαμε  $t - \tau$  στη συνάρτηση  $J(t - \tau)$ . Επειδή μάλιστα

$$[J(t - \tau)\sigma(\tau)]_{\tau=0}^{\tau=t} = J(t - t)\sigma(t) - J(t - 0)\sigma(0) = J(0)\sigma(t) - J(t)\sigma(0) = J(0)\sigma(t) - \sigma_0 J(t), \quad (3.7.14)$$

ο πιο πάνω ολοκληρωτικός τύπος (3.7.13) παίρνει τώρα την τελική και απλοποιημένη μορφή του

$$\varepsilon(t) = J(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t - \tau)\sigma(\tau) d\tau. \quad (3.7.15)$$

Βλέπουμε ότι στον τύπο αυτό δεν παρουσιάζεται πια η χρονική παράγωγος  $\dot{\sigma}(\tau)$  της τάσεως  $\sigma(\tau)$ . Όμως τη θέση της την πήρε τώρα η παράγωγος  $\dot{J}(t - \tau)$  της γνωστής συναρτήσεως  $J(t)$  για  $t \rightarrow t - \tau$ .

Μια εντελώς ανάλογη εργασία μπορεί να γίνει με εναλλαγή της τάσεως  $\sigma(t)$  και της παραμορφώσεως  $\varepsilon(t)$  και με αντίστοιχη χρήση του μέτρου χαλαρώσεως  $Y(t)$  αντί για την ενδοτικότητα σε ερπυσμό  $J(t)$ . Δηλαδή βασιζόμαστε τώρα στο πείραμα της χαλαρώσεως ισοελαστικού υλικού (με  $Y(t)$ ) αντί στο αντίστοιχο πείραμα του ερπυσμού (με  $J(t)$ ). Στην εξίσου ενδιαφέρουσα αυτή περίπτωση οι βασικοί ολοκληρωτικοί τύποι (3.7.12) και (3.7.15) παίρνουν τις ανάλογες μορφές

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) + \int_0^t d\sigma(\tau, t) = \varepsilon_0 Y(t) + \int_0^t Y(t - \tau)\dot{\varepsilon}(\tau) d\tau \quad (3.7.16)$$

με  $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$  και τελικά (μετά και την παραγοντική ολοκλήρωση) αντίστοιχα

$$\sigma(t) = Y(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{Y}(t - \tau)\varepsilon(\tau) d\tau. \quad (3.7.17)$$

Ας περιορισθούμε τώρα στους ολοκληρωτικούς τύπους (3.7.15) και (3.7.17). Με γνωστή την τάση  $\sigma(t)$  και την ενδοτικότητα σε ερπυσμό  $J(t)$  ο πρώτος τύπος (3.7.15) μας δίνει την παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  που προκύπτει. Επίσης με γνωστή την παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  και το μέτρο χαλαρώσεως  $Y(t)$  ο δεύτερος τύπος (3.7.17) μας δίνει την τάση  $\sigma(t)$  που την προκάλεσε. (Λόγια είναι αυτά! Συχνά στις μηχανές εφελκυσμού επιβάλλεται η παραμόρφωση μέσω μετατοπίσεως και προκύπτει η τάση.)

Εδώ το ουσιαστικό είναι ότι εάν είναι γνωστή η παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  και η ενδοτικότητα σε ερπυσμό  $J(t)$  και θέλουμε να προσδιορίσουμε την τάση  $\sigma(t)$  από τον ολοκληρωτικό τύπο (3.7.15), αυτός έχει μεταπέσει τότε σε ολοκληρωτική εξίσωση. Και μάλιστα ολοκληρωτική εξίσωση Volterra μονοδιάστατη, γραμμική, δευτέρου είδους, μη ομογενή, συνελκτικού τύπου, με πυρήνα τη συνάρτηση  $\dot{J}(t - \tau)$ , με γνωστή συνάρτηση την παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  και άγνωστη την τάση  $\sigma(t)$ . Και μπορούμε να τη λύσουμε με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Ανάλογα ισχύουν για τη σχέση (3.7.17), η οποία είναι επίσης ολοκληρωτική εξίσωση, όταν μας είναι άγνωστη η παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$ . Ωραία!

### Γ3.7.5. Σχέση της ενδοτικότητας σε ερπυσμό και του μέτρου χαλαρώσεως

Αφού είναι δύο οι ολοκληρωτικές σχέσεις (3.7.15) και (3.7.17) που συνδέουν την τάση  $\sigma(t)$  και την παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$ , προφανώς οι συναρτήσεις  $J(t)$  (ενδοτικότητα σε ερπυσμό) και  $Y(t)$  (μέτρο χαλαρώσεως) δε μπορούν να είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, όπως ήδη αναφέραμε. Ας το δούμε μαθηματικά αυτό μετασχηματίζοντας κατά Laplace τις δύο αυτές σχέσεις (και μη ξεχνώντας βέβαια ότι ισχύει το θεώρημα της συνελίξεως). Συμβολίζουμε εδώ τους μετασχηματισμούς Laplace με χρήση του δείκτη  $L$ . Οι σχέσεις (3.7.15) και (3.7.17) παίρνουν έτσι τις μετασχηματισμένες κατά Laplace μορφές τους

$$\varepsilon_L(s) = J(0)\sigma_L(s) + [sJ_L(s) - J(0)]\sigma_L(s) = sJ_L(s)\sigma_L(s), \quad (3.7.18)$$

$$\sigma_L(s) = Y(0)\varepsilon_L(s) + [sY_L(s) - Y(0)]\varepsilon_L(s) = sY_L(s)\varepsilon_L(s), \quad (3.7.19)$$

αφού  $\mathcal{L}\{\dot{X}(t)\} = sX_L(s) - X(0)$ . Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη αυτές τις δύο σχέσεις, βρίσκουμε ότι

$$\varepsilon_L(s)\sigma_L(s) = [sJ_L(s)\sigma_L(s)][sY_L(s)\varepsilon_L(s)] = s^2 J_L(s)Y_L(s)\sigma_L(s)\varepsilon_L(s) \implies [s^2 J_L(s)Y_L(s) - 1]\sigma_L(s)\varepsilon_L(s) = 0. \quad (3.7.20)$$

Η τελευταία σχέση θα πρέπει να ισχύει για κάθε  $\varepsilon(t)$  (άρα και  $\varepsilon_L(s)$ ) και το αντίστοιχο  $\sigma(t)$  (άρα και  $\sigma_L(s)$ ). Επομένως ο όρος  $s^2 J_L(s) Y_L(s) - 1$  στις αγκύλες δεξιά πρέπει σίγουρα να μηδενίζεται. Άρα

$$s^2 J_L(s) Y_L(s) = 1 \implies J_L(s) Y_L(s) = \frac{1}{s^2} \implies \int_0^t J(t-\tau) Y(\tau) d\tau = t, \quad \text{αφού } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \quad (3.7.21)$$

και ισχύει επίσης και το γνωστό θεώρημα της συνελιξέως στο μετασχηματισμό Laplace. Η δεύτερη και η τρίτη από τις πιο πάνω σχέσεις (3.7.21) δείχνουν καθαρά την αλληλεξάρτηση της ενδοτικότητας σε ερπυσμό  $J(t)$  και του μέτρου χαλαρώσεως  $Y(t)$  τόσο στο πεδίο της μεταβλητής  $s$  του μετασχηματισμού Laplace (η δεύτερη) όσο και στο πεδίο του χρόνου  $t$  (η τρίτη). Δηλαδή, όταν ξέρουμε τη μία, μπορούμε να προσδιορίσουμε και την άλλη χωρίς δεύτερο πείραμα. Μόνο ερπυσμός (ή μόνο χαλάρωση) αρκεί! *Ερώτημα:* Ποιο από τα δύο είναι πιο εύκολο για τον Πολιτικό Μηχανικό;

### Γ3.7.6. Επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων της γραμμικής Ισοελαστικότητας

Εδώ που φθάσαμε ένα βήμα μας απομένει, ώστε να λύσουμε και τις δύο ολοκληρωτικές μας εξισώσεις (3.7.15) και (3.7.17). Ξεκινάμε με την πρώτη, την (3.7.15), με γνωστή την παραμόρφωση  $\varepsilon(t)$  και άγνωστη την τάση  $\sigma(t)$ . Θα χρησιμοποιήσουμε κι εδώ (μια που μπορούμε λόγω του συνελκτικού πυρήνα  $J(t-\tau)$ ) την προσφιλή μας μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Και είμαστε σχεδόν έτοιμοι, γιατί ήδη κάναμε μετασχηματισμό Laplace στην ολοκληρωτική εξίσωση (3.7.15) και βρήκαμε το αποτέλεσμα (3.7.18). Απλά τώρα το λύνουμε ως προς  $\sigma_L(s)$ . Παίρνουμε έτσι τη λύση

$$\sigma_L(s) = \frac{1}{s J_L(s)} \varepsilon_L(s) \implies \sigma_L(s) = s Y_L(s) \varepsilon_L(s) \quad (3.7.22)$$

εξαιτίας της πρώτης σχέσεως (3.7.21). Είναι πραγματικά προτιμότερη η δεύτερη μορφή της λύσεως (3.7.22), επειδή επιτρέπει μια πιο εύκολη αντιστροφή με βάση το θεώρημα της συνελιξέως.

Μα να και μια ακόμη ευχάριστη έκπληξη πέρα από τις τόσο ενδιαφέρουσες σχέσεις (3.7.21). Τώρα παρατηρούμε ότι η λύση μας  $\sigma_L(s)$  στη δεύτερη σχέση (3.7.22) απλά συμπίπτει (ναι, συμπίπτει απόλυτα!) με τη δεύτερη σχέση (3.7.19). Και η σχέση (3.7.19) ήταν ο μετασχηματισμός Laplace του ολοκληρωτικού τύπου (3.7.17). Το έχουμε ήδη βρει αυτό. Άρα, αντιστρέφοντας κατά Laplace τη σχέση (3.7.22) στη δεύτερη μορφή της, οδηγούμαστε κατευθείαν στον ολοκληρωτικό τύπο (3.7.17). Αυτός ο τύπος δίνει τη λύση της ολοκληρωτικής εξισώσεως (3.7.15). (Εκπληκτικά πράγματα συμβαίνουν στη γραμμική Ισοελαστικότητα! Και μαθηματικά κομψά!) Και ανάλογα είναι επίσης κατανοητό ότι η λύση  $\varepsilon(t)$  της ολοκληρωτικής εξισώσεως (3.7.17) δίνεται από τον ολοκληρωτικό τύπο (3.7.15). Με τις δύο συναρτήσεις  $J(t)$  και  $Y(t)$  να τις συνδέει η τρίτη σχέση (3.7.21). Και με αυτές τις ευχάριστες παρατηρήσεις τελειώνουμε τούτη την ενότητα για την Ισοελαστικότητα.

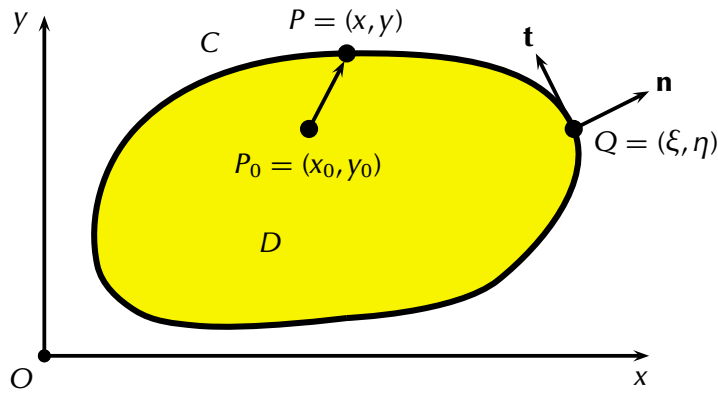
## Γ3.8. ΣΥΝΟΡΙΑΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE

Μια ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα εφαρμογή των ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι στην αριθμητική επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών για διδιάστατες ή τριδιάστατες ανοικτές περιοχές  $D$  με σύνορα καμπύλες  $C$  ή επιφάνειες  $S$ . Στις περιοχές  $D$  ισχύει μια συνήθως ομογενής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς. Εδώ θα αναφερθούμε μόνο στην εξίσωση του Laplace σε περιοχή  $D$

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2} = 0 \quad (3.8.1)$$

με  $u = u(x,y)$  στις δύο διαστάσεις και  $u = u(x,y,z)$  στις τρεις διαστάσεις. Γνωρίζουμε πολύ καλά ήδη από την Παράγραφο B2.1.1 του Κεφαλαίου B2 του Μέρους B τις ποικίλες εφαρμογές της εξισώσεως του Laplace  $\nabla^2 u = 0$  στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, π.χ. στη Ρευστομηχανική.

Ας θεωρήσουμε την πεπερασμένη και απλής συνοχής ανοικτή περιοχή  $D$  του αμέσως πιο κάτω Σχήματος Γ3.1 με σύνορο λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$ . Στην περιοχή  $D$  υποθέτουμε ότι ισχύει η διδιάστατη εξίσωση του Laplace για την άγνωστη συνάρτηση  $u = u(x,y)$ , δηλαδή  $\nabla^2 u(x,y) = 0$ .



**Σχήμα Γ3.1:** Πεπερασμένη ανοικτή περιοχή  $D$  στο επίπεδο  $Oxy$  με σύνορο λεία απλή καμπύλη  $C$ .

Επίσης στο σύνορο  $C$  της περιοχής  $D$  είναι διαθέσιμη και μία συνοριακή συνθήκη: είτε (α) οι τιμές της ίδιας της άγνωστης συναρτήσεως  $u$  (πρόβλημα Dirichlet) είτε (β) οι τιμές της παραγώγου της  $\partial u/\partial n$  κατά το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα  $\mathbf{n}$  (Σχήμα Γ3.1) στην καμπύλη  $C$  (πρόβλημα Neumann).

Εάν σε όλο το σύνορο  $C$  της περιοχής  $D$  υποθέσουμε γνωστές τις τιμές τόσο της άγνωστης συναρτήσεως  $u(x, y)$  όσο και της παραγώγου της  $\partial u/\partial n$ , τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει ο ενδιαφέρων ολοκληρωτικός τύπος

$$u(P_0) = \oint_C \left[ H(P_0, Q)u(Q) - G(P_0, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q) \right] ds. \quad (3.8.2)$$

Εδώ  $\mathbf{n}$  είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη θέση  $Q$  της κλειστής καμπύλης  $C$  και  $s$  το μήκος τόξου στην καμπύλη  $C$  σε τούτο το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα. Στον τύπο αυτό (3.8.2) δηλώνουμε με  $P_0 = (x_0, y_0)$  ένα σημείο της περιοχής  $D$  και με  $Q = (\xi, \eta)$  ένα σημείο του συνόρου  $C$  της  $D$ . Επιπλέον αποδεικνύεται επίσης ότι οι δύο σχετικοί πυρήνες  $G(P_0, Q)$  και  $H(P_0, Q)$  δίνονται από τους τύπους

$$G(P_0, Q) = \frac{1}{2\pi} \ln r \quad \text{με} \quad r = |P_0 - Q| = \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2} \quad \text{και} \quad H(P_0, Q) = \frac{\partial G}{\partial n}(P_0, Q). \quad (3.8.3)$$

Άρα από τον τύπο (3.8.2) με γνωστές τις συνοριακές τιμές της  $u$  και της  $\partial u/\partial n$  προσδιορίζουμε εύκολα με ολοκλήρωση (συνήθως αριθμητική) την άγνωστη συνάρτηση  $u = u(P_0)$  σε κάθε σημείο  $P_0$  της περιοχής  $D$ . Προφανώς αυτή πληροί την εξίσωση του Laplace (3.8.1) στις δύο διαστάσεις  $(x, y)$ .

Τώρα ερχόμαστε στο δυσκολότερο μέρος της παρούσας εργασίας. Υπενθυμίζουμε πως στο σύνορο  $C$  της περιοχής  $D$  μας είναι γνωστή είτε (α) η ποσότητα  $u$  είτε (β) η ποσότητα  $\partial u/\partial n$  είτε ίσως (γ) η μία σε ένα τμήμα του συνόρου  $C$  κι η άλλη σε άλλο, όχι κι οι δύο ταυτόχρονα. Άρα λείπει η μία από τις δύο συνοριακές αυτές ποσότητες. Θα πρέπει όμως να προσδιορισθεί κι αυτή. Έτσι μόνο θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ολοκληρωτικός τύπος (3.8.2). Προς το σκοπό αυτό στον ίδιο τύπο παίρνουμε το εσωτερικό σημείο  $P_0 = (x_0, y_0)$  να τείνει να συμπίπτει με ένα συνοριακό σημείο  $P = (x, y)$  (πάνω στην καμπύλη  $C$ ), δηλαδή  $P_0 \rightarrow P$ , όπως φαίνεται και στο πιο πάνω Σχήμα Γ3.1.

Τότε και με την υπόθεση ότι η καμπύλη  $C$  είναι λεία ο πιο πάνω τύπος (3.8.2) παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{2} u(P) = \oint_C \left[ H(P, Q)u(Q) - G(P, Q) \frac{\partial u}{\partial n}(Q) \right] ds \quad (3.8.4)$$

με συντελεστή  $1/2$  στο αριστερό μέλος. Αυτή είναι μια ολοκληρωτική εξίσωση, εδώ μια **συνοριακή ολοκληρωτική εξίσωση**, με άγνωστη τη συνάρτηση  $u$  ή τη συνάρτηση  $\partial u/\partial n$ . (Αυτήν που λείπει πάνω στην καμπύλη  $C$ .) Η επίλυσή της γίνεται συνήθως αριθμητικά με την πολύ γνωστή μέθοδο των **συνοριακών στοιχείων**. Η μέθοδος αυτή κάνει **διακριτοποίηση** του συνόρου  $C$  προσεγγίζοντάς το με απλά συνοριακά στοιχεία. Επιπλέον πάνω σε κάθε στοιχείο προσεγγίζει την άγνωστη συνάρτηση συνήθως γραμμικά ή με πολυώνυμο δευτέρου βαθμού. Τελικά η επίλυση της συνοριακής ολοκληρωτικής εξισώσεως (3.8.4) ανάγεται προσεγγιστικά σε σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Βέβαια η μέθοδος γενικεύεται από την εξίσωση του Laplace και σε πολλά άλλα διδιάστατα και τριδιάστατα προβλήματα, όπως είναι π.χ. το πρόβλημα της γραμμικής Ελαστικότητας. Σχετική εκτενής βιβλιογραφία έχει περιληφθεί παρακάτω στην τρίτη σελίδα της Βιβλιογραφίας.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

• Τα πιο κάτω βιβλία αναφέρονται αποκλειστικά στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για περαπέρα μελέτη από τον ενδιαφερόμενο φοιτητή/την ενδιαφερόμενη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό. Δυστυχώς φαίνεται να μην υπάρχουν διαθέσιμα στο εμπόριο Ελληνικά βιβλία που να αφορούν αποκλειστικά ή κατά μεγάλο μέρος στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις.

1. Chambers, Ll. G. (1976), *Integral Equations: A Short Course*. International Textbook Company, London. (Πολύ ενδιαφέρον, κατανοητό, συνοπτικό, γενικό βιβλίο για τις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις. Περιλαμβάνει πολλά λυμένα παραδείγματα καθώς και κεφάλαιο για τις προσεγγιστικές μεθόδους. Πολύ χρήσιμο για το φοιτητή/τη φοιτήτρια σε ειδικό μάθημα Ολοκληρωτικών Εξισώσεων.)
2. Jerri, A. J. (1999), *Introduction to Integral Equations with Applications*, 2nd Edition. John Wiley and Sons, New York. (Πολύ ενδιαφέρον, κατανοητό, εκτενές βιβλίο με μελέτη όλων των τύπων γραμμικών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων. Εκτείνεται από το θεωρητικό υπόβαθρο μέχρι τις αριθμητικές μεθόδους. Δίνει έμφαση στη διδασκαλία των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων και στις εφαρμογές τους σε φυσικά προβλήματα και σε προβλήματα του μηχανικού. Υπάρχει διαθέσιμο και ειδικό εγχειρίδιο με λεπτομερείς λύσεις των ασκήσεων για το φοιτητή και τη φοιτήτρια.)
3. Kanwal, R. P. (1997), *Linear Integral Equations, Theory and Technique*, 2nd Edition. Birkhäuser, Boston. (Χρήσιμο, κλασικό βιβλίο για τις γραμμικές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις και με ένα αρκετά μεγάλο αριθμό εφαρμογών.)
4. Kondo, J. (1991), *Integral Equations*. Kodansha, Tokyo, and Clarendon Press/Oxford University Press, Oxford. (Ενδιαφέρον, αρκετά λεπτομερές βιβλίο και με αρκετές εφαρμογές σε δύο ολόκληρα κεφάλαια.)
5. Moiseiwitsch, B. L. (2005), *Integral Equations*. Dover Publications, Mineola, New York. (Επανεκτύπωση της αρχικής εκδόσεως: Longman, London, 1977.) (Συνοπτικό, κατανοητό, εύχρηστο βιβλίο για τις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις. Ασφαλώς πολύ χρήσιμο για το φοιτητή και τη φοιτήτρια σε μάθημα Ολοκληρωτικών Εξισώσεων.)
6. Pipkin, A. C. (1991), *A Course on Integral Equations*. Springer-Verlag, New York. (Χρήσιμο, μέσου μεγέθους διδακτικό βιβλίο για τις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις με κάλυψη όλης της κλασικής ύλης.)
7. Pogorzelski, W. (1966), *Integral Equations and their Applications*, Vol. I. Pergamon Press, Oxford, and PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa (Βαρσοβία). (Ιδιαίτερα λεπτομερές βιβλίο για εμβάθυνση επί του θέματος.)
8. Polyanin, A. D. and Manzhirov, A. V. (2008), *Handbook of Integral Equations*, 2nd Edition. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, Florida. (Εξαιρετικά λεπτομερές και ογκώδες εγχειρίδιο για κάθε κατηγορία Ολοκληρωτικών Εξισώσεων. Εξετάζει όλες τις μεθόδους επιλύσεως Ολοκληρωτικών Εξισώσεων και περιλαμβάνει λύσεις πάρα πολλών ολοκληρωτικών εξισώσεων.)
9. Tricomi, F. G. (1985), *Integral Equations*. Dover Publications, New York. (Επανεκτύπωση της αρχικής εκδόσεως: Interscience Publishers, New York, 1957.) (Συνοπτικό, πολύ ωραίο γραμμένο βιβλίο πάνω στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις. Περιλαμβάνει πλήρη ανάλυση του θέματος καθώς και ορισμένες εφαρμογές, κυρίως σε δοκούς και σε ταλαντώσεις.)

• Τα πιο κάτω βιβλία δεν αναφέρονται αποκλειστικά στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, αλλά περιέχουν σχετικές ενότητες ή κεφάλαια.

1. Arfken, G. B. and Weber, H.-J. (2005), *Mathematical Methods for Physicists*, 6th Edition. Academic Press, New York and London. (Κλασικό βιβλίο Μαθηματικών Μεθόδων για Φυσικούς με ειδικό κεφάλαιο πάνω στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις. Περιέχει πρακτική και χρήσιμη ανάπτυξη του θέματος χωρίς έμφαση στη μαθηματική ανάλυση και με έμφαση στη χρήση των συναρτήσεων Green. Ενδιαφέρον για μια εισαγωγική μελέτη των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων.)
2. Myškis, A. D. (1975), *Advanced Mathematics for Engineers: Special Courses*, Mir Publishers, Moscow (Μόσχα). (Περιλαμβάνει εκτενέστατο κεφάλαιο, το Κεφάλαιο VII με 120 σελίδες, πάνω στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις.)
3. Smirnov, V. I. (1964), *A Course of Higher Mathematics, Vol. IV: Integral Equations and Partial Differential Equations*. Pergamon Press, Oxford, and Addison-Wesley, Reading, Massachusetts. (Κλασικό μαθηματικό σύγγραμμα με εκτενή ανάπτυξη στον τόμο αυτό και του θέματος των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων: Κεφάλαιο 1, σσ. 1-190.)

• Τα πιο κάτω βιβλία αναφέρονται στην αριθμητική επίλυση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων. Ας σημειωθεί και πάλι ότι οι περισσότερες ολοκληρωτικές εξισώσεις που συναντάει ο Πολιτικός Μηχανικός δε διαθέτουν κλειστή λύση. Επομένως η αριθμητική επίλυσή τους είναι απόλυτα αναγκαία στην πράξη.

1. Baker, C. T. H. (1977), *The Numerical Treatment of Integral Equations*. Clarendon Press/Oxford University Press, Oxford. (Λεπτομερές, ιδιαίτερα εκτενές, πολύ χρήσιμο βιβλίο πάνω στο θέμα.)
2. Baker, C. T. H. and Miller, G. F., editors (1982), *Treatment of Integral Equations by Numerical Methods*. Academic Press, London and New York. (Συλλογή από ενδιαφέρουσες επιστημονικές εργασίες επί του θέματος που παρουσιάστηκαν σε συμπόσιο στο Durham, Ιούλιος 1982, προς τιμή του Καθηγητή Lelsie Fox.)
3. Delves, L. M. and Mohamed, J. L. (1985), *Computational Methods for Integral Equations*. Cambridge University Press, Cambridge. (Χρήσιμο, πλήρες, καλογραμμένο σύγγραμμα πάνω σε όλες τις κλασικές μεθόδους αριθμητικής επίλυσεως μονοδιάστατων Ολοκληρωτικών Εξισώσεων και σχετικών θεμάτων.)
4. Delves, L. M. and Walsh, J., editors (1974), *Numerical Solution of Integral Equations*. Clarendon Press, Oxford, and Oxford University Press, London. (Ενδιαφέρουσα συλλογή 25 επιστημονικών εργασιών επί του θέματος με ταξινόμησή τους σε βασική θεωρία, γενικές αριθμητικές μεθόδους και εφαρμογές.)
5. Golberg, M. A., editor (1990), *Numerical Solution of Integral Equations*. Plenum Press, New York and London. (Οκτώ εκτενή, καλογραμμένα και ενδιαφέροντα κεφάλαια από διαφορετικούς συγγραφείς.)

• Τα πιο κάτω βιβλία αναφέρονται στις Συνοριακές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις (*Boundary Integral Equations*) και στα Συνοριακά Στοιχεία (*Boundary Elements*) που χρησιμοποιούνται σ' αυτές για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων του Πολιτικού Μηχανικού. Η εργασία γίνεται μόνο στο σύνορο (μονοδιάστατο ή διδιάστατο σύνορο) του μέσου που εξετάζεται (διδιάστατου ή τριδιάστατου μέσου αντίστοιχα) και όχι σε ολόκληρη την περιοχή του μέσου αυτού. Με κανέναν τρόπο δεν αποτελεί υπερβολή να λεχθεί ότι πρόκειται για την πιο ενδιαφέρουσα εφαρμογή των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Βέβαια η εφαρμογή αυτή γίνεται σε συνδυασμό με τις Αριθμητικές Μεθόδους, δηλαδή αυτά καθεαυτά τα Συνοριακά Στοιχεία. Επιτυγχάνεται έτσι η αριθμητική επίλυση των Συνοριακών Ολοκληρωτικών Εξισώσεων μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσεως.



1. Κατσικαδέλης, Ι. Θ. (1999), *Συνοριακά Στοιχεία στην Επιστήμη του Μηχανικού: Θεωρία και Εφαρμογές*. Εκδόσεις Συμεών, Ζωγράφου, Αθήνα. (Πάρα πολύ ενδιαφέρον βιβλίο για τον Πολιτικό Μηχανικό. Συνοδεύεται και από δισκέτα με τα προγράμματα. Αντιμετωπίζονται πολλά προβλήματα που έχουν σχέση με τις εξισώσεις του Laplace και του Poisson, προβλήματα Στρέψεως, Πλακών, Ρευστομηχανικής, Μεταδόσεως Θερμότητας καθώς και προβλήματα στην Ελαστοστατική με κάποια έμφαση στην τελευταία.)
2. Banerjee, P. K. (1994), *The Boundary Element Methods in Engineering*, 2nd Edition. McGraw-Hill, London and New York. (Χρήσιμο, απλά γραμμένο, γενικό βιβλίο πάνω στη μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων.)
3. Becker, A. A. (1992), *The Boundary Element Method in Engineering: A Complete Course*. McGraw-Hill, London. (Χρήσιμο βιβλίο για τη μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων με έμφαση σε προβλήματα της Μηχανικής των Στερεών. Περιέχει και το πρόγραμμα BEACON.)
4. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C. (1984), *Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, Berlin. (Κλασικό και χρήσιμο βιβλίο για τη μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων.)
5. Hartmann, F. (1989), *Introduction to Boundary Elements: Theory and Applications*. Springer-Verlag, Berlin. (Ενδιαφέρον, αρκετά απλά γραμμένο βιβλίο πάνω στη μέθοδο των Συνοριακών Στοιχείων.)
6. Katsikadelis, J. T. (2002), *Boundary Elements: Theory and Applications*. Elsevier Science, Oxford. (Η Αγγλική έκδοση του πιο πάνω Βιβλίου 1 του ίδιου συγγραφέα.)
  - Πρέπει επίσης να σημειωθεί με έμφαση ότι ιδιαίτερη ερευνητική δραστηριότητα στα Συνοριακά Στοιχεία αναπτύσσεται κατά την τελευταία εικοσιπενταετία στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών από μέλη Δ.Ε.Π. του Τμήματος με επικεφαλής τον Καθηγητή κ. Δημήτριο Μπέσκο. Η ερευνητική αυτή δραστηριότητα έχει οδηγήσει σε έναν εξαιρετικά μεγάλο αριθμό επιστημονικών δημοσιεύσεων στα Συνοριακά Στοιχεία σε διεθνή επιστημονικά περιοδικά και σε πρακτικά διεθνών συνεδρίων και σε αντίστοιχη επιστημονική αναγνώριση. Υπάρχουν επίσης και πολλά βιβλία στην ίδια περιοχή των Συνοριακών Στοιχείων που εκδόθηκαν από τον Καθηγητή κ. Μπέσκο και συνεργάτες του. Ενδεικτικά αναφέρονται μεταξύ αυτών τα εξής:
    1. Beskos, D. E. (1989), *Boundary Element Methods in Structural Analysis*. American Society of Civil Engineers.
    2. Beskos, D. E., editor (1992), *Boundary Element Analysis of Plates and Shells* (Springer Series in Computational Mechanics). Springer-Verlag, Berlin.
    3. Beskos, D. E., Brebbia, C. A., Katsikadelis, J. T. and Manolis, G. D., editors (2001), *Boundary Elements XXIII* (Σειρά: *Advances in Boundary Elements*, Τόμος 10). Computational Mechanics Publications, Wessex Institute of Technology (WIT) Press, Southampton.
    4. Beskos, D. E. and Maier, G., editors (2003), *Boundary Element Advances in Solid Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin.
    5. Manolis, G. D. and Polyzos, D., editors (2008), *Recent Advances in BEM*, book to honor Professor D.E. Beskos. Springer-Verlag, Berlin (υπό εκτύπωση).
  - Τα δύο πρώτα πιο κάτω βιβλία αναφέρονται στην Ιξοελαστικότητα (*Viscoelasticity*), όπου και παρουσιάζονται ενδιαφέρουσες ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra συνελκτικού τύπου. Το τρίτο πιο κάτω βιβλίο περιλαμβάνει ειδικό κεφάλαιο, το Κεφάλαιο 6, για τη γραμμική Ιξοελαστικότητα.
    1. Findley, W. N., Lai, J. S. and Onaran, K. (1989), *Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity*. Dover Publications, New York. (Επανεκτύπωση της αρχικής εκδόσεως: North-Holland, Amsterdam, 1976.)

2. Flügge, W. (1975), *Viscoelasticity*, 2nd Edition. Springer-Verlag, Berlin.
3. Shames, I. H. και Cozzarelli, F. A. (1997), *Elastic and Inelastic Stress Analysis*, Revised Printing. Taylor & Francis, Washington, DC. (Chapter 6: *Linear Viscoelastic Behavior*, pp. 161–201.)

• Τα πιο κάτω βιβλία αναφέρονται μέσα στο κείμενο στο παρόν Μέρος Γ των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς, το οποίο αφορά στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις. Παρόλο που τα βιβλία αυτά δεν αφορούν άμεσα στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, εντούτοις η μελέτη των ενοτήτων τους στα οποία γίνονται οι αναφορές είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την κατανόηση των αντίστοιχων σημείων του παρόντος Μέρους Γ από όπου γίνονται οι αναφορές.

1. Μάρκελλου, Β. Β. (2000), *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Τόμος II: Τεύχος 4: Γραμμική Άλγεβρα, Εφαρμοσμένη Θεωρία Πινάκων και Τεύχος 5: Διαφορικές Εξισώσεις, Εισαγωγή. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
2. Μάρκελλου, Β. Β. (2001), *Αριθμητικές Μέθοδοι*, 5η Έκδοση. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
3. Μαστρογιάννης, Ε. Ν. (1999), *Μηχανική των Υλικών*, Τόμοι Πρώτος και Δεύτερος. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
4. Davis, P. J. and Rabinowitz, P. (2007), *Methods of Numerical Integration*, 2nd Edition, Dover Edition. Dover, Mineola, New York.
5. Evans, G. (1993), *Practical Numerical Integration*. John Wiley & Sons, Chichester, England.
6. Hildebrand, F. B. (1974), *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Edition. McGraw-Hill, New York.
7. Spivak, M. (1991), *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός, Μια Εισαγωγή στην Ανάλυση*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο.
8. Wylie, C. R., Barrett, L. C., Wylie, C. Ray (1995), *Advanced Engineering Mathematics*, 6th Edition. McGraw-Hill, New York. (Ένα από τα πιο κλασικά βιβλία Προχωρημένων Μαθηματικών για Μηχανικούς με μελέτη της ολοκληρωτικής εξίσωσης της ταλαντούμενης χορδής.)





**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ**  
**για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**  
**Τεύχος 1**

---

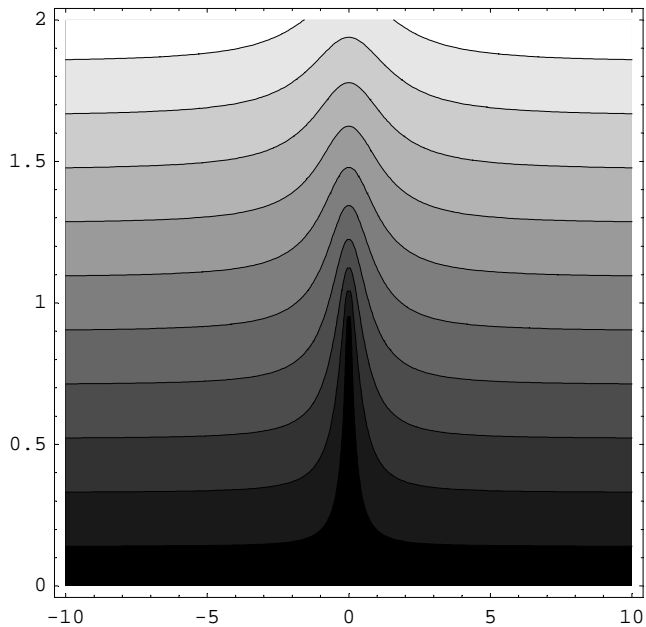
**Μέρος** *D*

**ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ**  
**ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**  
**για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ**

---

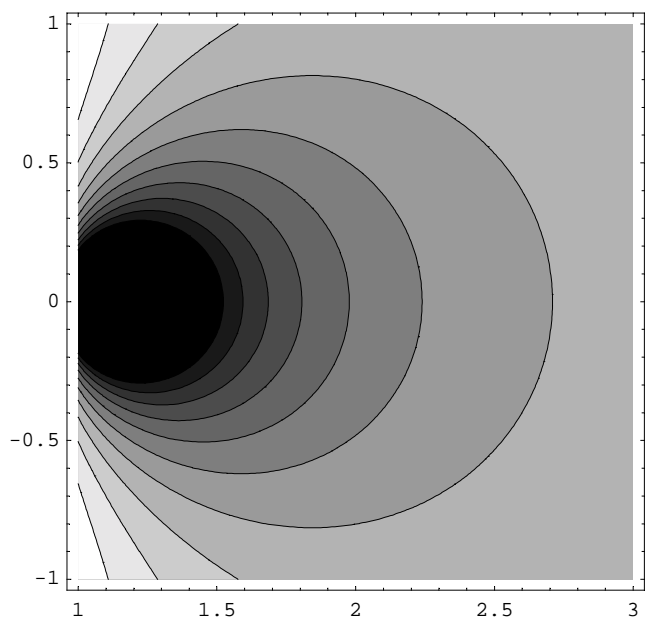
## ■ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΓΡΑΜΜΕΣ ΡΟΗΣ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΑΘΕΤΟ ΕΜΠΟΔΙΟ

```
In[1]:= Needs["Algebra`ReIm`"];
z = x + i y; Ω[z_] = i V Sqrt[(i z)^2 - a^2];
Ψ[x_, y_] = Im[Ω[z]] /. {a → 1, V → 1} // ComplexExpand // Simplify;
ContourPlot[Ψ[x, y], {x, -10, 10}, {y, 0, 2}, PlotPoints → 200, ImageSize → 300];
```



## ■ ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΟΡΘΩΝ ΤΑΣΕΩΝ ΣΕ ΑΚΡΟ ΡΩΓΜΗΣ

```
In[5]:= Z[z_] = (σ - i τ) z / Sqrt[z^2 - a^2];
s[x_, y_] = 2 Re[Z[z]] /. {a → 1, σ → -0.5, τ → 0};
ContourPlot[s[x, y], {x, 1, 3}, {y, -1, 1}, PlotPoints → 200, ImageSize → 300];
```



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

• ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΜΕΡΟΥΣ Δ	iii-iv
• ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Δ	v-vi
• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΜΕΡΟΥΣ Δ	vii-viii
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ1: ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ	1-12
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 12 σελίδες)</i>	1
Δ1.1. Εισαγωγικές Παρατηρήσεις	1
Δ1.2. Βασικές Έννοιες στους Μιγαδικούς Αριθμούς	6
Δ1.3. Πράξεις με τους Μιγαδικούς Αριθμούς	7
Δ1.4. Παράσταση των Μιγαδικών Αριθμών στο Μιγαδικό Επίπεδο	8
Δ1.5. Πολική Μορφή Μιγαδικού Αριθμού	9
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ2: ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	13-30
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 18 σελίδες)</i>	13
Δ2.1. Μιγαδικές Συναρτήσεις	14
Δ2.2. Η Μιγαδική Εκθετική Συνάρτηση	18
Δ2.3. Μιγαδικές Υπερβολικές Συναρτήσεις	21
Δ2.4. Μιγαδικές Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις	24
Δ2.5. Η Μιγαδική Λογαριθμική Συνάρτηση	27
Δ2.6. Αντίστροφες Μιγαδικές Υπερβολικές και Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις	29
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ3: ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ	31-48
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 18 σελίδες)</i>	31
Δ3.1. Όριο και Συνέχεια Μιγαδικής Συναρτήσεως	32
Δ3.2. Παράγωγος Μιγαδικής Συναρτήσεως - Αναλυτικές Συναρτήσεις	33
Δ3.3. Συνθήκες των Cauchy-Riemann	35
Δ3.4. Ανεξαρτησία Αναλυτικής Συναρτήσεως από τη Συζυγή Μιγαδική Μεταβλητή	40
Δ3.5. Προσδιορισμός της Συζυγούς Αρμονικής Συναρτήσεως	41
Δ3.6. Το Μιγαδικό Δυναμικό Ροής για Ιδεατό Ρευστό	42
Δ3.7. Τα Μιγαδικά Δυναμικά της Επίπεδης Ελαστικότητας	45
• ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ4: ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ	49-62
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 14 σελίδες)</i>	49
Δ4.1. Μιγαδική Ολοκλήρωση	49
Δ4.2. Το Θεώρημα των Cauchy-Goursat	54
Δ4.3. Ο Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy	56
Δ4.4. Αρχές Μεγίστου και Ελαχίστου	59
Δ4.5. Εφαρμογές στη Ρευστομηχανική	60

● <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ5: ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR ΚΑΙ LAURENT</b>	<b>63-70</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 8 σελίδες)</i> .....	63
Δ5.1. Γενικά για Μιγαδικές Δυναμοσειρές .....	63
Δ5.2. Σειρές Taylor .....	64
Δ5.3. Σειρές Laurent .....	66
Δ5.4. Εφαρμογές στη Ρευστομηχανική .....	69
● <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ6: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ</b>	<b>71-84</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 14 σελίδες)</i> .....	71
Δ6.1. Ορισμός και Υπολογισμός του Ολοκληρωτικού Υπολοίπου .....	71
Δ6.2. Υπολογισμός Μιγαδικών Ολοκληρωμάτων σε Κλειστές Καμπύλες .....	74
Δ6.3. Εφαρμογή στη Ρευστομηχανική .....	77
Δ6.4. Υπολογισμός Πραγματικών Τριγωνομετρικών Ολοκληρωμάτων .....	79
Δ6.5. Εφαρμογή στην Αντιστροφή του Μετασχηματισμού Laplace .....	80
● <b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ7: ΣΥΜΜΟΡΦΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ</b>	<b>85-89</b>
<i>Περίληψη του Κεφαλαίου (Κεφάλαιο με 6 σελίδες)</i> .....	85
Δ7.1. Η Έννοια της Σύμμορφης Απεικόνισης .....	85
Δ7.2. Χρησιμότητα της Σύμμορφης Απεικόνισης στην Εξίσωση του Laplace .....	87
Δ7.3. Εφαρμογές της Σύμμορφης Απεικόνισης στη Ρευστομηχανική .....	89
● <b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (3 σελίδες)</b>	<b>91-93</b>



## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν Μέρος Δ των συγγραμμάτων **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς** καλύπτει τη σχετική θεωρία, η οποία αφορά στις **Εφαρμοσμένες Μιγαδικές Συναρτήσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Μετά τα Μέρη Β και Γ το Μέρος Δ αποτελεί το τρίτο και τελευταίο τμήμα (με έκταση 100 περίπου σελίδες) του Τεύχους 1 του συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Ειδικότερα στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών το σύγγραμμα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς** προορίζεται για το αντίστοιχο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III του τρίτου εξαμήνου σπουδών.

Τα υπόλοιπα τρία μέρη της θεωρίας αφορούν στις **Εφαρμοσμένες Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** (το Μέρος Α), στις **Εφαρμοσμένες Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους για Πολιτικούς Μηχανικούς** (το Μέρος Β) και στις **Εφαρμοσμένες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** (το Μέρος Γ). Από αυτά το Μέρος Α αποτελεί το Τεύχος 1 του πρώτου συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Τα Μέρη Β και Γ αποτελούν τμήματα αυτού του Τεύχους 1 του δευτέρου συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς** και προηγούνται εδώ του παρόντος Μέρους Δ.

Σύμφωνα με τη σύγχρονη άποψη (που υιοθετείται και εδώ χωρίς επιφυλάξεις) σαν θεωρία στο παρόν Μέρος Δ του συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς** δε νοείται μόνο η ίδια η θεωρία, αλλά και τα παραδείγματα και οι εφαρμογές στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού που τη συνοδεύουν. Οι εφαρμογές αυτές προέρχονται κυρίως από τη Ρευστομηχανική στη μόνιμη, διδιάστατη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού με χρήση του μιγαδικού δυναμικού ροής. Σε μικρότερο βαθμό οι εφαρμογές προέρχονται από την επίπεδη Ελαστικότητα με χρήση των μιγαδικών δυναμικών των Kolosov–Muskhelishvili και τη Θραυστομηχανική (ή Μηχανική της Θραύσεως) με χρήση του μιγαδικού δυναμικού του Westergaard. Στην αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace με ολοκλήρωμα Bromwich παρουσιάζεται και μία εφαρμογή από τις Ταλαντώσεις.

Το παρόν Τεύχος 1 των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς** συμπληρώνεται από ένα ακόμη (αλλά μικρότερο) τεύχος: Το Τεύχος 2 με τίτλο **Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks III για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Αυτό το χωριστό τεύχος περιλαμβάνει τις άλυτες (αλλά όμως εφαρμοσμένες) ασκήσεις και από τα τρία Μέρη Β, Γ και Δ του παρόντος Τεύχους 1 των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς** για το φοιτητή και τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό. Περιλαμβάνει επίσης εννέα notebooks της Mathematica με λυμένες ομάδες ασκήσεων, δύο notebooks με εφαρμογές και δύο ακόμη ανάλογα notebooks για animations (κινούμενα σχήματα). Τέλος το Τεύχος 3 του πρώτου συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς** με τίτλο **Χρήσιμες Εντολές της Mathematica για Πολιτικούς Μηχανικούς** αποτελεί ουσιαστικά ένα εκτενές «ευρετήριο» των κυριότερων εντολών της Mathematica τις οποίες χρειάζεται ο Πολιτικός Μηχανικός για την επίλυση ασκήσεων είτε γενικών είτε της επιστήμης του.

Εξαιρώντας την έμφαση η οποία δίνεται σ' αυτό το Μέρος Δ σε προβλήματα της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού, κατά τα λοιπά καλύπτεται σε μεγάλο μέρος η γνωστή ύλη των Μιγαδικών Συναρτήσεων που είναι διαθέσιμη στα κλασικά διδακτικά βιβλία. Η ύλη του μέρους αυτού αναφέρεται εκτενώς στον πίνακα των περιεχομένων του στις προηγούμενες δύο σελίδες, που δεν υπάρχει λόγος να επαναληφθεί, και κατανέμεται σε επτά κεφάλαια, άλλα μικρότερης κι άλλα μεγαλύτερης έκτασης. Εντούτοις σε όλα τα σημεία της η παρούσα ύλη υστερεί πολύ σχετικά με εκείνη στα κλασικά διδακτικά βιβλία. Δυστυχώς το μέγεθος της ύλης στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III δεν επέτρεψε εδώ μια εκτενέστερη ανάπτυξη του θέματος των Μιγαδικών Συναρτήσεων.

Από την άλλη πλευρά η ανάπτυξη αποτελεσματικών αριθμητικών μεθόδων μείωσε τις τελευταίες δεκαετίες την πρακτική χρησιμότητα των Μιγαδικών Συναρτήσεων στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού παρά το αναμφισβήτητο μαθηματικό ενδιαφέρον της και την κομψότητα των τύπων.

Στο σημείο αυτό ας μου επιτραπεί να αναφέρω ότι τις Μιγαδικές Συναρτήσεις τις χρησιμοποίησα εκτενώς στη διπλωματική εργασία μου (1973), στη διδακτορική διατριβή μου (1976), και τις δύο σε θέματα Ελαστικότητας και Θραυστομηχανικής, κι έπειτα σε πολλές επιστημονικές εργασίες μου. Επομένως είμαι ιδιαίτερα ευτυχής που έχω και εδώ την ευκαιρία να τις παρουσιάσω (έστω και με σύντομο τρόπο) σαν μέρος των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς**.

Πέρα από τον προσανατολισμό του παρόντος Μέρους Δ για τις Μιγαδικές Συναρτήσεις στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού δίνεται επίσης έμφαση στη δυνατότητα σχετικά εύκολης κατανοήσεώς του από το μέσο φοιτητή και τη μέση φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό. Για το σκοπό αυτό έχει γίνει και εδώ μια πολύ έντονη προσπάθεια να είναι γραμμένο απλά, πάρα πολύ απλά, παρόλο που αυτό συνεπάγεται πολύ μεγαλύτερη έκτασή του, και επίσης σε όχι υψηλό μαθηματικό επίπεδο.

Επαναλαμβάνω ότι είμαι πραγματικά, ειλικρινέστατα πολύ ευτυχής για τη συνεχή ενθάρρυνση και τη βοήθεια που μου δόθηκε και μου δίνεται από τους συναδέλφους μου στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών ως προς τα μαθήματα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III που μου έχουν ανατεθεί μέσω του Γενικού Τμήματος. Ας μου επιτραπεί να αναφερθώ ξανά ιδιαίτερα στο συνάδελφο Καθηγητή κ. Δημήτριο Μπέσκο του Τομέα Κατασκευών και να τον ευχαριστήσω θερμά. Αυτός μου υπέδειξε την πιθανή χρησιμότητα μιας προσπάθειας προετοιμασίας διδακτικών συγγραμμάτων για τα δύο αυτά μαθήματα. Ακόμη όμως μεγαλύτερη ενθάρρυνση μου έδωσαν η συνεργασία, η συνέπεια κι ο ζήλος των φοιτητών και φοιτητριών μου Πολιτικών Μηχανικών στα μαθήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III, τα οποία έχω εδώ και πολλά χρόνια την τιμή και τη χαρά να τους διδάσκω.

Θα αποτελούσε επίσης ιδιαίτερη τιμή και χαρά μου αν το παρόν Μέρος Δ για τις **Εφαρμοσμένες Μιγαδικές Συναρτήσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** μπορούσε να συμβάλει, έστω και πάρα πολύ λίγο, στην καλύτερη μελέτη του ενδιαφέροντος και ιδιαίτερα κλασικού αυτού θέματος από τους φοιτητές και τις φοιτήτριες Πολιτικούς Μηχανικούς. Σ' αυτούς και σ' αυτές απευθύνεται και αυτό το Μέρος Δ, όπως φαίνεται κι από τον τίτλο του, κι όχι σε κάθε φοιτητή και φοιτήτρια έστω και Μηχανικό. Πρόκειται, νομίζω, για μια προσέγγιση κάπως διαφορετική στο περιεχόμενο και στους στόχους της από αυτές στα αναμφίβολα πολύ αξιολογότερα διαθέσιμα σχετικά διδακτικά βιβλία.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω και πάλι τις **GOTSIS Εκδόσεις** στην Πάτρα και ιδιαίτερα τον υπεύθυνό τους κ. Άγγελο Γκότση για το ενδιαφέρον τους σ' ολόκληρο το παρόν βιβλίο και την τόσο επιμελημένη προετοιμασία και εκτύπωσή του. Πρόκειται για μια ιδιαίτερα αξιέπαινη πρωτοβουλία από τις **GOTSIS Εκδόσεις** και μάλιστα χωρίς ιδιαίτερο οικονομικό όφελος. Τούτο δυστυχώς ισχύει εξαιτίας του εξειδικευμένου χαρακτήρα των διδακτικών αυτών βιβλίων που δεν επιτρέπει τη διάθεσή τους σε ευρύ αναγνωστικό κοινό περιορίζοντάς τη σε Πολιτικούς Μηχανικούς.

Εντούτοις θεωρώ πως είναι προτιμότερο να διαθέτουν οι φοιτητές και οι φοιτήτριες Πολιτικοί Μηχανικοί τα «δικά τους» βιβλία Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Με τα συγγράμματα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς** γίνεται προσπάθεια να καταστεί εμφανές ότι τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III δεν είναι αποκομμένα από τα άλλα μαθήματα που διδάσκεται ο Πολιτικός Μηχανικός. Αντίθετα είναι φυσιολογικά συνδεδεμένα με αυτά σε μια αλυσίδα γνώσεων.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να σημειώσω ότι με πολύ μεγάλη χαρά μου θα δεχθώ κάθε υπόδειξη για τη βελτίωση αυτού του βιβλίου είτε με τη διόρθωση λαθών και σημείων με ασάφειες που έχουν παρεισφύσει είτε με ουσιαστικότερες υποδείξεις ως προς την επιλογή του περιεχομένου, των παραδειγμάτων και των εφαρμογών, κλπ. Θα είμαι πραγματικά ευγνώμων για κάθε τέτοια υπόδειξη!

Πάτρα, Φεβρουάριος 2008

Νικόλαος Ι. Ιωακείμης

e-mail: n.ioakimidis@upatras.gr

## ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

Το περιεχόμενο στο παρόν **Μέρος Δ** των διδακτικών βιβλίων **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς**, που αφορά στις **Εφαρμοσμένες Μηγαδικές Συναρτήσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς**, είναι απόλυτα κλασικό (τόσο στη θεωρία όσο και στις εφαρμογές) και βασίζεται στη σχετική εκτενέστατη μαθηματική και τεχνική βιβλιογραφία. Τα ίδια ισχύουν και για τα περιεχόμενα στο **Μέρος Α** για τις **Εφαρμοσμένες Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς**, στο **Μέρος Β** για τις **Εφαρμοσμένες Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους για Πολιτικούς Μηχανικούς** καθώς και στο **Μέρος Γ** για τις **Εφαρμοσμένες Ολοκληρωτικές Εξισώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς** των ίδιων διδακτικών βιβλίων **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Η συμβολή του γράφοντα περιορίζεται απλά στον τρόπο παρουσιάσεως της τόσο κλασικής αυτής ύλης, που δίνει έντονη έμφαση στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΣΗ ΤΩΝ ΤΥΠΩΝ

Οι μαθηματικοί τύποι αριθμούνται ανά κεφάλαιο και ενότητα. Ο κάθε τύπος έχει το δικό του αριθμό στη μορφή: αριθμός κεφαλαίου, τελεία, αριθμός ενότητας, τελεία, αριθμός τύπου, όπως ακριβώς γίνεται και στα περισσότερα επιστημονικά βιβλία. Δεν υπάρχει έτσι περίπτωση συγχύσεως στην αρίθμηση των τύπων. Πολύτιμος βοηθός για τις αναφορές από το κείμενο σε μαθηματικούς τύπους (σε κάθε ενότητα χωριστά) υπήρξε το γνωστό πρόγραμμα στοιχειοθεσίας  $\text{\TeX}$ , το οποίο έχει φυσικά και το πλεονέκτημα ότι δεν κάνει λάθη σ' αυτό το τόσο χρήσιμο έργο του.

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ

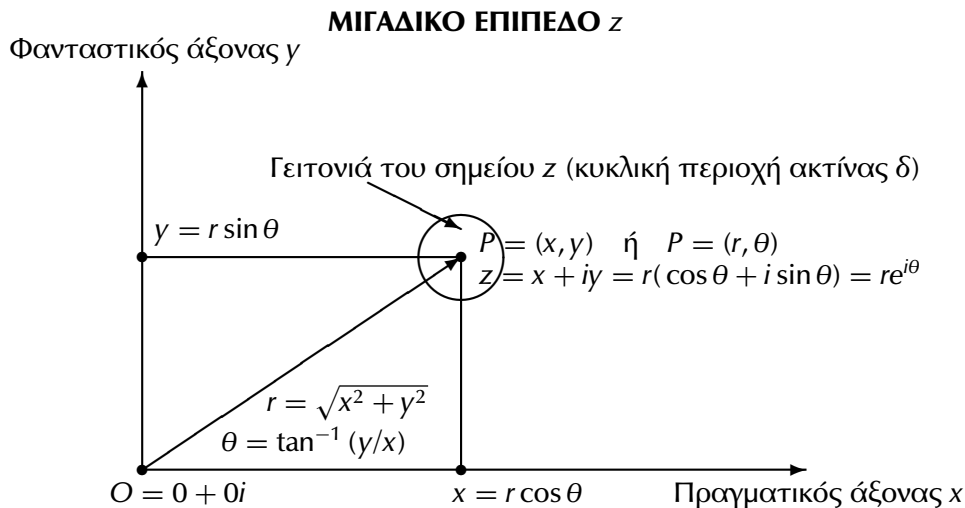
Η βασική γραμματοσειρά στα παρόντα διδακτικά βιβλία είναι η Optima, μια γραμματοσειρά κυρίως νεοκλασικού τύπου. Η Optima σχεδιάστηκε από το διάσημο σχεδιαστή γραμματοσειρών Hermann Zapf μεταξύ των ετών 1952 και 1955 και διατέθηκε εμπορικά αρχικά από την εταιρεία Linotype το 1958. Η Ελληνική παραλλαγή της, η MgOptima, που χρησιμοποιείται εδώ, διατίθεται από την εταιρεία Magenta στην Αθήνα σε CD-ROM Ελληνικών γραμματοσειρών. Και η Ελληνική παραλλαγή της Optima, η Optima Greek, σχεδιάστηκε αρχικά από τον ίδιο το Zapf και κυκλοφόρησε πρώτα επίσης από τη Linotype το 1971.<sup>1</sup> Το κείμενο και οι μαθηματικοί τύποι στοιχειοθετήθηκαν με τα προγράμματα στοιχειοθεσίας  $\text{Y\&Y \TeX}$  και  $\text{\TeX}$  στην Ελληνική παραλλαγή τους. Τα προγράμματα αυτά είναι ισχυρότατα ιδίως για τη στοιχειοθεσία μαθηματικού κειμένου και υποστηρίζουν γραμματοσειρές PostScript. Τα τελικά αρχεία είναι σε μορφές DVI (Device Independent) και PDF (Portable Document Format). Φυσικά, όπως συμβαίνει συνήθως, στην τελική εκτύπωση χρησιμοποιήθηκε η μορφή PDF. Αυτή είναι και η πιο εύχρηστη και γενικά χρησιμοποιούμενη στις εκτυπώσεις.

<sup>1</sup>Όλες αυτές οι πληροφορίες για τη γραμματοσειρά Optima προέρχονται από το τόσο ενδιαφέρον βιβλίο του Brighurst, R. (2001), *Στοιχεία της Τυπογραφικής Τέχνης* (Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτότυπου: *The Elements of Typographic Style*, 2η Έκδοση. Hartley & Marks, 1996). Εταιρεία Ελληνικών Τυπογραφικών Στοιχείων και Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, σ. 292.

Ενδιαφέροντα σχόλια για την Optima αναφέρονται επίσης και στο βιβλίο των Grosvenor, J., Morrison, K. and Pim, A. (1992), *The PostScript Font Handbook: A Directory of Type 1 Fonts* (αναθεωρημένη έκδοση). Addison-Wesley, Wokingham, England, σ. 308. Μεταξύ αυτών των σχολίων αναφέρεται ότι η Optima είναι ίσως η πιο πρωτότυπη σχεδίαση (γραμματοσειράς εννοείται) του Hermann Zapf. Επίσης η εμφάνισή της το 1958 προκάλεσε «θόρυβο» στον κόσμο της τυπογραφίας. Έχει αρκετά παχείς και σαφείς χαρακτήρες και θεωρείται κατάλληλη όχι μόνο για τίτλους, αλλά και για συνεχές κείμενο, όπως συμβαίνει εδώ.

### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Το μιγαδικό επίπεδο μας επιτρέπει την παράσταση των μιγαδικών αριθμών  $z$  στο επίπεδο. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται ένα σημείο  $z = x + iy = re^{i\theta}$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$ , μια γειτονιά του σημείου αυτού και οι συντεταγμένες του ίδιου σημείου  $z$  τόσο σε Καρτεσιανή μορφή  $(x, y)$  όσο και σε πολική μορφή  $(r, \theta)$ . Οι γνωστοί τύποι  $x = r \cos \theta$  και  $y = r \sin \theta$  δίνουν τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$  από τις πολικές  $(r, \theta)$ . Οι αντίστοιχοι τύποι  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  και  $\theta = \tan^{-1}(y/x)$  δίνουν τις πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  από τις Καρτεσιανές  $(x, y)$ . Το σχήμα αυτό προετοιμάστηκε με το πρόγραμμα στοιχειοθείας ΕΓΕΧ.



### • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΑ ΔΥΟ ΣΧΗΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΡΧΗ (ΜΕΤΑ ΤΗ ΣΕΛΙΔΑ ΤΙΤΛΟΥ) ΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ Δ

Τα σχήματα αυτά αναφέρονται σε δύο κλασικές Μιγαδικές Συναρτήσεις του Πολιτικού Μηχανικού, πιο συγκεκριμένα: (α) στο μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z)$  ( $z = x + iy$ ) στη Ρευστομηχανική και (β) στην τασική συνάρτηση του Westergaard  $Z(z)$  ( $z = x + iy$ ) στη Θραυστομηχανική. Για τη δημιουργία τους χρησιμοποιήθηκε η *Mathematica*, συγκεκριμένα η εντολή *ContourPlot* για τη σχεδίαση ισοσταθμικών καμπύλων. Χρησιμοποιήθηκαν και άλλες εντολές (φαίνονται στα ίδια τα σχήματα!), όπως οι εντολές *Re* και *Im* για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού.

Από πιο τεχνικής απόψεως το πρώτο σχήμα στη Ρευστομηχανική δείχνει πώς ένα επίπεδο εμπόδιο (φράγμα) κάθετο σε επίπεδη, μόνιμη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού (π.χ. μέσα σε ένα κανάλι) την παρεμποδίζει. Οι γραμμές που φαίνονται στο σχήμα αυτό είναι οι γραμμές ροής με εξισώσεις  $\Psi(x, y) = \text{Im} \Omega(z) = c$  με το  $c$  σταθερά και με  $\Omega(z)$  ( $z = x + iy$ ) το μιγαδικό δυναμικό ροής. Φυσικά οι γραμμές ροής δε μπορούν να διασχίζουν το εμπόδιο και έτσι αναγκάζονται να αποκλίνουν, για να το παρακάμψουν, με αρκετή συγκέντρωσή τους στο πάνω άκρο του εμποδίου.

Το δεύτερο σχήμα στη Θραυστομηχανική (με τη χρήση της Θεωρίας της Ελαστικότητας) αναφέρεται στο άθροισμα  $s = \sigma_x + \sigma_y$  των ορθών τάσεων (ή των κυρίων τάσεων). Η ρωγμή θεωρείται ευθύγραμμη, μήκους 2 και σε άπειρο επίπεδο δοκίμιο. Η φόρτιση θεωρείται εφελκυστική ( $\sigma \neq 0$ ,  $\tau = 0$ ) στο άπειρο ( $y \rightarrow \pm\infty$ ) και κάθετη στη ρωγμή. Το άθροισμα  $s$  δίνεται από τον τύπο  $s = 2\text{Re} Z(z)$  με  $Z(z)$  ( $z = x + iy$ ) το μιγαδικό δυναμικό του Westergaard. Οι ισοσταθμικές γραμμές στο δεύτερο αυτό σχήμα είναι οι γραμμές σταθερών τιμών του αθροίσματος  $s = \sigma_x + \sigma_y$  των ορθών τάσεων. Μεγάλες τιμές του  $s$  παρατηρούνται κοντά στο άκρο  $z = 1$  της ρωγμής (μαύρη περιοχή στο σχήμα) και μπορεί να προκαλέσουν τη διάδοση της ρωγμής ακόμη και τη θραύση του ρηγματωμένου δοκιμίου.

Σημειώνονται τέλος οι δύο τύποι που δίνουν τα δύο πιο πάνω μιγαδικά δυναμικά  $\Omega(z)$  και  $Z(z)$ :

$$\Omega(z) = V\sqrt{z^2 + a^2} = iV\sqrt{(iz)^2 - a^2} \quad \text{και} \quad Z(z) = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad \text{για } \tau = 0.$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ1

## ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο παρόν Κεφάλαιο Δ1 αναπτύσσεται σύντομα το θέμα των μιγαδικών αριθμών. Οι μιγαδικοί αριθμοί, της μορφής  $z = x + iy$  (με τα  $x$  και  $y$  πραγματικούς αριθμούς και  $i = \sqrt{-1}$  τη φανταστική μονάδα), αποτελούν μια πολύ ενδιαφέρουσα γενίκευση των πραγματικών αριθμών και είναι χρήσιμοι σε πολλές περιπτώσεις. Σε επόμενα κεφάλαια θα τους χρησιμοποιήσουμε σαν μεταβλητές, μιγαδικές μεταβλητές, σε μιγαδικές συναρτήσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε απλά στην εκτέλεση πράξεων με μιγαδικούς αριθμούς (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση και ρίζα) και στις σχετικές ιδιότητές τους.

Θα αναφερθούμε επίσης στις έννοιες του πραγματικού και του φανταστικού μέρους ενός μιγαδικού αριθμού  $z$  και στο συζυγή μιγαδικό αριθμό  $\bar{z}$ . Επίσης στις έννοιες του μέτρου (ή απολύτου τιμής)  $r = |z|$  και του ορίσματος  $\theta = \arg z$  ενός μιγαδικού αριθμού  $z$  καθώς και στην παράστασή τους στο μιγαδικό επίπεδο σε Καρτεσιανή και σε πολική μορφή. Θα αναφέρουμε ακόμη το γνωστό και τόσο χρήσιμο τύπο του Euler, που συνδέει τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο. Ειδικά για τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση θα σημειώσουμε επίσης τη χρησιμότητά της στην επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως και στους ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς Fourier και Laplace.

Το περιεχόμενο του παρόντος κεφαλαίου αποτελεί τη βάση για την ανάπτυξη του θέματος των μιγαδικών συναρτήσεων σε επόμενα κεφάλαια και την επίδειξη της χρησιμότητάς τους σε προβλήματα ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού. Συγκεκριμένα οι Μιγαδικές Συναρτήσεις είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος σε επίπεδα προβλήματα: (α) της Ρευστομηχανικής και (β) της Ελαστικότητας. (Στην Ελαστικότητα συμπεριλαμβάνονται και εφαρμογές στη Θραυστομηχανική.) Σε πολύ μικρότερο βαθμό οι Μιγαδικές Συναρτήσεις είναι χρήσιμες και σε προβλήματα Πλακών.

### Δ1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

#### Δ1.1.1. Η φανταστική μονάδα $i$

Οι αριθμοί που συνήθως χρησιμοποιούνται στην πράξη είναι οι πραγματικοί αριθμοί  $x$ , όπως είναι π.χ. οι αριθμοί  $-2$ ,  $3$ ,  $3/4$ ,  $-\sqrt{5}$ ,  $3.14159$ ,  $5!$ ,  $\cos 1$ , κλπ. Σε μερικές όμως περιπτώσεις είναι χρήσιμες η εισαγωγή και η χρήση και των μιγαδικών αριθμών. Ένας μιγαδικός αριθμός  $z$  γράφεται συνήθως στην Καρτεσιανή μορφή του  $z = x + iy$ , όπου  $x$  και  $y$  είναι πραγματικοί αριθμοί και  $i$  η φανταστική μονάδα, δηλαδή η τετραγωνική ρίζα του  $-1$ . Επομένως έχουμε

$$i = \sqrt{-1}, \quad (1.1.1)$$

οπότε

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = (-1)i = -i, \quad i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1, \quad i^5 = i^4 i = 1i = i, \quad \text{κλπ.} \quad (1.1.2)$$

Ουσιαστικά, μιλώντας για το μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$ , αναφερόμαστε σε ένα διατεταγμένο ζεύγος  $(x, y)$  δύο πραγματικών αριθμών  $x$  και  $y$ . Εντούτοις η γραφή  $z = x + iy$  είναι προτιμότερη στην πράξη από τη γραφή  $z = (x, y)$  και αυτή θα χρησιμοποιούμε αποκλειστικά. Ας σημειώσουμε μόνο ότι στη γραφή  $(x, y)$  η φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  είναι το διατεταγμένο ζεύγος  $i = (0, 1)$  των πραγματικών αριθμών  $x = 0$  και  $y = 1$ .

Στην ειδική περίπτωση που στο μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$  έχουμε  $y = 0$  παίρνουμε βέβαια έναν πραγματικό αριθμό  $x$ . Οι μιγαδικοί αριθμοί αποτελούν γενίκευση των πραγματικών αριθμών ή, ισοδύναμα, οι πραγματικοί αριθμοί είναι μια ειδική περίπτωση (με  $y = 0$ ) των μιγαδικών αριθμών. Στην επίσης ειδική περίπτωση όπου  $x = 0$ , δηλαδή  $z = iy$ , μιλάμε για έναν καθαρά φανταστικό αριθμό: τον αριθμό  $z = iy$ .

### Δ1.1.2. Οι μιγαδικοί αριθμοί στις πολυωνυμικές εξισώσεις

Τους μιγαδικούς αριθμούς χρειάστηκε να τους εισαγάγουμε και να τους χρησιμοποιήσουμε για πρώτη φορά κατά την επίλυση δευτεροβάθμιων πολυωνυμικών εξισώσεων με πραγματικούς συντελεστές  $a, b$  και  $c$  της μορφής

$$p_2(x) = ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{με αρνητική διακρίνουσα} \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0. \quad (1.1.3)$$

Οι εξισώσεις αυτές (επαναλαμβάνουμε με αρνητική διακρίνουσα  $\Delta$ ) στερούνται πραγματικών λύσεων. Παραδείγματος χάρη, η εξίσωση  $x^2 + 1 = 0$  με  $\Delta = -4 < 0$  έχει τις καθαρά φανταστικές λύσεις  $x_{1,2} = \pm i$ . Είναι λοιπόν αναγκαίοι οι μιγαδικοί αριθμοί για να μπορούμε να καθορίζουμε όλες τις λύσεις μιας πολυωνυμικής εξισώσεως, όπως της πιο πάνω εξισώσεως  $ax^2 + bx + c = 0$  με αρνητική διακρίνουσα  $\Delta$ . Φυσικά πολλές φορές και τριτοβάθμιες ή και ακόμη μεγαλύτερου βαθμού  $n$  πολυωνυμικές εξισώσεις  $p_n(x) = 0$  με πραγματικούς συντελεστές έχουν μιγαδικές ρίζες. Οι ρίζες αυτές παρουσιάζονται κατά ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών, π.χ.  $x_{1,2} = \lambda \pm i\mu$ . Αυτή η εμφάνιση των μιγαδικών ριζών κατά ζεύγη συζυγών μιγαδικών αριθμών δεν ισχύει βέβαια για πολυωνυμικές εξισώσεις  $p_n(x) = 0$  με μιγαδικούς συντελεστές.

### Δ1.1.3. Οι τύποι του Euler

Εκτός από τις ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων  $p_n(x) = 0$  έχουμε επίσης συναντήσει μιγαδικούς αριθμούς, καλύτερα τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^{i\theta}$ , στους πολύ γνωστούς τύπους του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta. \quad (1.1.4)$$

Οι τύποι αυτοί ορίζουν τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^{\pm i\theta}$  για την καθαρά φανταστική τιμή  $\pm i\theta$  με τη βοήθεια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων  $\cos \theta$  (συνημίτονο) και  $\sin \theta$  (ημίτονο). Μπορούμε μάλιστα να θεωρήσουμε τους τύπους του Euler (1.1.4) (ο πρώτος από αυτούς αρκεί!) σαν ορισμό της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^{\pm i\theta}$ .

Προσθέτοντας και αφαιρώντας τους τύπους του Euler (1.1.4), παίρνουμε τις εξής γνωστές εκφράσεις για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο (με πραγματική τιμή  $\theta$  της μεταβλητής τους):

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \quad (1.1.5)$$

Επίσης διαιρώντας τους τύπους αυτούς (1.1.5), βρίσκουμε αμέσως και τους αντίστοιχους τύπους για τη συνεφαπτομένη  $\cot \theta$  και την εφαπτομένη  $\tan \theta$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = i \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} = i \frac{e^{2i\theta} + 1}{e^{2i\theta} - 1}, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{i} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = -i \frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1}. \quad (1.1.6)$$

Προφανώς ισχύει ότι  $\cot \theta \tan \theta = 1$ .

Σημειώνουμε επίσης ότι τύποι αντίστοιχοι με τους τύπους του Euler (1.1.4) (για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο) ισχύουν και για τις αντίστοιχες υπερβολικές συναρτήσεις (υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο) και έχουν τη μορφή

$$e^x = \cosh x + \sinh x, \quad e^{-x} = \cosh x - \sinh x. \quad (1.1.7)$$

Βέβαια οι τελευταίοι αυτοί τύποι (1.1.7) σε αντίθεση με τους τύπους του Euler (1.1.4) δεν αφορούν καθόλου (προς το παρόν μόνο!) σε μιγαδικούς αριθμούς ούτε στη μιγαδική εκθετική συνάρτηση.

#### Δ1.1.4. Οι μιγαδικοί αριθμοί στις διαφορικές εξισώσεις

Και στις διαφορικές εξισώσεις έχουμε δει τη συχνή εμφάνιση μιγαδικών αριθμών. Πιο συγκεκριμένα αναφερόμαστε στην περίπτωση ομογενών γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς και πραγματικούς συντελεστές. Σε μια τέτοια διαφορική εξίσωση στη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης  $e^{\mu t}$  (ή  $e^{\mu x}$ ) είναι δυνατόν η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση  $p(\mu) = 0$  (με  $p(\mu)$  το σχετικό χαρακτηριστικό πολυώνυμο) να έχει μιγαδικές ρίζες  $\mu_k$ . Τότε η σχετική εκθετική συνάρτηση  $e^{\mu_k t}$  είναι ασφαλώς και αυτή μιγαδική, συγκεκριμένα μιγαδική εκθετική συνάρτηση.

Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η απλή συνήθης διαφορική εξίσωση των ιδιοταλαντώσεων και των ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad (1.1.8)$$

ως προς τη μετατόπιση  $u(t)$ . Η ιδιοσυχνότητα  $\omega_0$  στο σχετικό μονοβάθμιο (δηλαδή με ένα βαθμό ελευθερίας) μηχανικό σύστημα μάζας  $m$  και ελατηρίου σταθεράς  $k$  δίνεται από τον πολύ γνωστό τύπο  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ . Η αντίστοιχη χαρακτηριστική εξίσωση στη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης  $u_0(t) = e^{\mu t}$  είναι η δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση

$$p_2(\mu) = \mu^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (1.1.9)$$

Η χαρακτηριστική αυτή εξίσωση έχει προφανώς δύο συζυγείς μιγαδικές (εδώ καθαρά φανταστικές) ρίζες, τις εξής:

$$\mu_{1,2} = \pm i\omega_0. \quad (1.1.10)$$

Επομένως η γενική λύση  $u(t)$  της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (1.1.8) έχει τη μορφή

$$u(t) = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t} \quad (1.1.11)$$

με τα  $A$  και  $B$  αυθαίρετες και γενικά μιγαδικές σταθερές.

Με τη χρήση τώρα των τύπων του Euler (1.1.4) η γενική αυτή λύση (1.1.11) παίρνει τη μορφή

$$u(t) = A(\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + B(\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) = (A + B) \cos \omega_0 t + i(A - B) \sin \omega_0 t. \quad (1.1.12)$$

Άρα

$$u(t) = C \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t \quad \text{με} \quad C = A + B \quad \text{και} \quad D = i(A - B) \quad (1.1.13)$$

τις δύο νέες αυθαίρετες σταθερές. Η τριγωνομετρική μορφή (1.1.13) είναι αυτή που συνήθως χρησιμοποιείται στην πράξη.

Ανάλογα και στις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών αναγόμαστε σε αντίστοιχες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που μπορεί να έχουν μιγαδικές ρίζες στις χαρακτηριστικές τους εξισώσεις. Για παράδειγμα σε πρόβλημα ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων ταλαντώσεων συνήθους δοκού προκύπτει (με χωρισμό των μεταβλητών) η εξής ομογενής γραμμική συνήθης διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως (Παράγραφος Β6.2.2, Εξίσωση (6.2.12)):

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0. \quad (1.1.14)$$

Το  $\beta$  είναι πραγματική και μάλιστα θετική σταθερά.

Η σχετική τεταρτοβάθμια χαρακτηριστική εξίσωση είναι η εξής:

$$\rho_4(\mu) = \mu^4 - \beta^4 = (\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 + \beta^2) = 0. \quad (1.1.15)$$

Η αλγεβρική αυτή εξίσωση έχει τέσσερις ρίζες: δύο πραγματικές και δύο καθαρά φανταστικές ρίζες, τις ακόλουθες:

$$\mu_{1,2} = \pm\beta, \quad \mu_{3,4} = \pm i\beta. \quad (1.1.16)$$

Άρα η γενική λύση  $X(x)$  της συνήθους διαφορικής εξισώσεως (1.1.14) είναι της μορφής

$$X(x) = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x} + Ce^{i\beta x} + De^{-i\beta x} \quad (1.1.17)$$

με τα  $A, B, C$  και  $D$  αυθαίρετες και γενικά μιγαδικές σταθερές.

Και εδώ επομένως είναι παρούσα η εκθετική συνάρτηση όχι μόνο στην πραγματική της μορφή: στους όρους  $e^{\pm\beta x}$ , αλλά και στη μιγαδική της μορφή: στους όρους  $e^{\pm i\beta x}$ . Και στην παρούσα γενική λύση  $X(x)$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους του Euler (1.1.4) και τους αντίστοιχους πραγματικούς τύπους (1.1.7) για τις υπερβολικές συναρτήσεις. Με τον τρόπο αυτό μετατρέπουμε τη γενική λύση  $X(x)$  στην ακόλουθη ισοδύναμη υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή της

$$X(x) = E \cosh \beta x + F \sinh \beta x + G \cos \beta x + H \sin \beta x \quad (1.1.18)$$

με τα σύμβολα  $E, F, G$  και  $H$  να δηλώνουν αυθαίρετες (και εδώ συνήθως πραγματικές) σταθερές.

#### Δ1.1.5. Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση στις σειρές Fourier

Έχουμε συναντήσει επίσης τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^{i\theta}$  στη μιγαδική (ή εκθετική) σειρά Fourier περιοδικής συναρτήσεως  $p(t)$  με περίοδο  $T$ : Μέρος A, Ενότητα A17.3, Εξίσωση (17.3.8)

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \quad \text{με} \quad \omega_n = n\omega_1 = n \frac{2\pi}{T} = \frac{2n\pi}{T}. \quad (1.1.19)$$

Στη σειρά αυτή οι μιγαδικοί συντελεστές  $c_n$  δίνονται από τους τύπους (17.3.12) της Ενότητας A17.3

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) e^{-i\omega_n t} dt \quad (1.1.20)$$

για κάθε ακέραιη τιμή του  $n$ : από μείον άπειρο μέχρι συν άπειρο. Οι τύποι αυτοί επίσης περιέχουν τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση.

Φυσικά η χρήση των τύπων του Euler (1.1.4) μας επιτρέπει τη μετατροπή της μιγαδικής (ή εκθετικής) σειράς Fourier (1.1.19) στην αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά Fourier. Παρ' όλα αυτά η χρήση της μιγαδικής (ή εκθετικής) σειράς Fourier (1.1.19) πλεονεκτεί σε σχέση με την αντίστοιχη τριγωνομετρική σειρά Fourier κατά την επίλυση της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξισώσεως στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, όπου  $p(t)$  είναι η σχετική φόρτιση. Ας υπενθυμίσουμε ακόμη και τη μιγαδική συνάρτηση αποκρίσεως  $H(\omega)$  στο πεδίο της κυκλικής συχνότητας  $\omega$ .

#### Δ1.1.6. Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση στο μετασχηματισμό Fourier

Εκτός από τη μιγαδική (ή εκθετική) μορφή της σειράς Fourier (1.1.19) η μιγαδική εκθετική συνάρτηση παρουσιάζεται, όπως γνωρίζουμε, και στον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier  $\mathcal{F}\{f(t)\}$  συναρτήσεως  $f(t)$

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt, \quad (1.1.21)$$



εδώ ως προς το χρόνο  $t$ , απολύτως ανάλογα και ως προς τη θέση  $x$ . Και στον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier  $\mathcal{F}^{-1}$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega \quad (1.1.22)$$

παρουσιάζεται πάλι η μιγαδική εκθετική συνάρτηση.

### Δ1.1.7. Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση στο μετασχηματισμό Laplace

Στο μετασχηματισμό Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad (1.1.23)$$

εδώ ξανά ως προς το χρόνο  $t$ , απολύτως ανάλογα και ως προς τη θέση  $x$ , δεν παρουσιάζεται ρητά η μιγαδική εκθετική συνάρτηση. Εντούτοις η μεταβλητή  $s$  στην εκθετική συνάρτηση  $e^{-st}$  θεωρείται γενικά ότι παίρνει μιγαδικές τιμές και δεν περιορίζεται σε πραγματικές τιμές. Όμως στον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds \quad (1.1.24)$$

παρουσιάζεται ρητά η φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  στον παρονομαστή του κλάσματος  $1/(2\pi i)$ .

Επίσης, αν και η σταθερά  $c$  στα όρια ολοκλήρωσης  $c \mp i\infty$  είναι πραγματική, εντούτοις η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος ευθείας παράλληλης προς το φανταστικό άξονα. Άρα η μεταβλητή ολοκλήρωσης  $s$  κινείται κατά μήκος αυτής της ευθείας με μιγαδικές τιμές. Πρόκειται για καθαρά μιγαδική ολοκλήρωση στο μιγαδικό αυτό τύπο (1.1.24), που είναι και ο μοναδικός τύπος αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace.

Θα είμασταν ανειλικρινείς χαρακτηρίζοντας το μιγαδικό ολοκληρωτικό τύπο (1.1.24) σαν ιδιαίτερα εύχρηστο και, πραγματικά, δεν τον είχαμε αναφέρει μέχρι τώρα. Εντούτοις πρόκειται για ένα θεωρητικά ενδιαφέροντα τύπο, ο οποίος μάλιστα μπορεί να μας δώσει κλειστά αποτελέσματα σε δύσκολες αντιστροφές μετασχηματισμών Laplace  $F(s)$  με βάση τη θεωρία των Μιγαδικών Συναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα για την αντιστροφή αυτή χρησιμοποιείται η καλούμενη ευθεία του Bromwich σε συνδυασμό με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων στη Μιγαδική Ανάλυση. Ο τρόπος αυτός αντιστροφής θα εκτεθεί στην Ενότητα Δ6.5 με εφαρμογή του στο συντονισμό.

### Δ1.1.8. Γενικότερη χρησιμότητα των μιγαδικών συναρτήσεων

Για τις απλές χρήσεις των μιγαδικών αριθμών στις μιγαδικές ρίζες πολυωνυμικών εξισώσεων απλές γνώσεις για τις σχετικές πράξεις αρκούν και θα τις επαναλάβουμε στο κεφάλαιο αυτό. Επίσης η εμφάνιση της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως στις μιγαδικές (ή εκθετικές) σειρές Fourier, στο μετασχηματισμό Fourier και στον αντίστροφό του απαιτεί απλές γνώσεις μιγαδικών συναρτήσεων, εδώ της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως. Αντίθετα η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace στο μιγαδικό επίπεδο μέσω του τύπου (1.1.24) απαιτεί τον καλό χειρισμό της μεθόδου των ολοκληρωτικών υπολοίπων στη σχετική καμπύλη του Bromwich. Αυτό είναι ένα μάλλον δύσκολο έργο, στο οποίο θα αναφερθούμε σύντομα στο Κεφάλαιο Δ6 παρακάτω, που αφορά στα ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Προς το παρόν όμως δεν έχουμε μελετήσει την αντιστροφή αυτή.

Στο παρόν Κεφάλαιο Δ1 θα περιορισθούμε στις απλές πράξεις, στις σχετικές ιδιότητες και στη γεωμετρική ερμηνεία των μιγαδικών αριθμών. Από το επόμενο όμως Κεφάλαιο Δ2 θα ξεκινήσουμε τη μελέτη των ίδιων των Μιγαδικών Συναρτήσεων ή Συναρτήσεων Μιγαδικής Μεταβλητής

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{με μιγαδική μεταβλητή τη } z = x + iy. \quad (1.1.25)$$

Στο επόμενο Κεφάλαιο Δ2 θα αναφερθούμε κυρίως στις Στοιχειώδεις Μιγαδικές Συναρτήσεις. Στη συνέχεια στο μεθεπόμενο Κεφάλαιο Δ3 θα δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση στις καλούμενες Αναλυτικές Συναρτήσεις σε μια επίπεδη ανοικτή περιοχή  $D$ , δηλαδή σε συναρτήσεις  $f(z)$  που διαθέτουν

παράγωγο  $f'(z)$  στην περιοχή αυτή  $D$ . Οι συναρτήσεις αυτές είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στην επίπεδη μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική. Είναι επίσης πολύ χρήσιμες και στην Ελαστικότητα για τον προσδιορισμό των τάσεων σε επίπεδο ελαστικό μέσον. Σε πολύ μικρότερο βαθμό είναι χρήσιμες και στη Θεωρία των Πλακών για τον προσδιορισμό του βέλους κάμψης  $w(x, y)$  σε συνήθεις πλάκες. Και στα τρία αυτά ενδιαφέροντα θέματα του Πολιτικού Μηχανικού σκοπεύουμε να αναφερθούμε πολύ εκτενέστερα στο μεθεπόμενο Κεφάλαιο Δ3, που αφορά στις Αναλυτικές Συναρτήσεις.

Στις επόμενες ενότητες του παρόντος Κεφαλαίου Δ1 θα περιορίσουμε την προσοχή μας απλά στους μιγαδικούς αριθμούς  $z = x + iy$  χωρίς καμία επέκταση στις μιγαδικές συναρτήσεις  $f(z)$  των αριθμών αυτών  $z = x + iy$ .

## Δ1.2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

### Δ1.2.1. Ισότητα μιγαδικών αριθμών

Δύο μιγαδικοί αριθμοί  $z_1 = x_1 + iy_1$  και  $z_2 = x_2 + iy_2$  καλούνται ίσοι, εάν και μόνο εάν έχουν ίσα πραγματικά και φανταστικά μέρη. Δηλαδή ισχύει

$$z_1 = z_2 \quad \text{ή} \quad x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \quad \iff \quad x_1 = x_2 \quad \text{και ταυτόχρονα} \quad y_1 = y_2. \quad (1.2.1)$$

### Δ1.2.2. Πραγματικό και φανταστικό μέρος μιγαδικού αριθμού

Αναφερθήκαμε ήδη στην Παράγραφο Δ1.1.1 στη φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$ , οπότε  $i^2 = -1$  και  $i^4 = 1$ , και στους μιγαδικούς αριθμούς  $z = x + iy$  με ειδικές περιπτώσεις: (α) τους πραγματικούς αριθμούς  $z = x$  (με  $y = 0$ ) και (β) τους καθαρά φανταστικούς αριθμούς  $z = iy$  (με  $x = 0$ ).

Σημειώνουμε στο σημείο αυτό ότι για ένα μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$  ο πραγματικός αριθμός  $x$  καλείται πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού  $z$ . Ο επίσης πραγματικός αριθμός  $y$ , που είναι όμως πολλαπλασιασμένος επί τη φανταστική μονάδα  $i$ , καλείται φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού  $z$ . Για το πραγματικό μέρος (real part)  $x$  και το φανταστικό μέρος (imaginary part)  $y$  του μιγαδικού αριθμού  $z = x + iy$  χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$x = \Re z, \quad y = \Im z \quad (1.2.2)$$

αντίστοιχα. Συχνότερα χρησιμοποιούμε τον απλούστερο (λιγότερο καλλιγραφικό) συμβολισμό

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \quad (1.2.3)$$

Το σύμβολο  $\operatorname{Re}$  αποτελεί σύντμηση της Αγγλικής λέξεως *real* (πραγματικός), ενώ το σύμβολο  $\operatorname{Im}$  αποτελεί σύντμηση της λέξεως *imaginary* (φανταστικός).

### Δ1.2.3. Συζυγής μιγαδικού αριθμού

Για το μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$  (με τα  $x$  και  $y$  πραγματικούς αριθμούς) ορίζουμε το συζυγή του μιγαδικό αριθμό σαν  $\bar{z} = x - iy$ . Επομένως έχουμε

$$z = x + iy \quad \iff \quad \bar{z} = x - iy. \quad (1.2.4)$$

Δηλαδή για το συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού  $z$ , που συμβολίζεται με  $\bar{z}$  (μία παύλα πάνω από το σύμβολο  $z$ ) απλά θέτουμε  $-i$  στη θέση της φανταστικής μονάδας  $i$ . Παραδείγματος χάρη ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού  $1 + 2i$  είναι ο μιγαδικός αριθμός  $1 - 2i$ . Επίσης ο συζυγής του μιγαδικού αριθμού  $3 - 4i$  είναι ο μιγαδικός αριθμός  $3 + 4i$ . (Σημειώνουμε ότι και στις δύο αυτές περιπτώσεις απλά θέσαμε το  $-i$  στη θέση του  $i$ .)

**Δ1.3. ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ****Δ1.3.1. Πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση**

Οι πράξεις με τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  εκτελούνται εντελώς ανάλογα με τις πράξεις για τους πραγματικούς αριθμούς  $x$ . Δεν παραλείπουμε όμως τη φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  σε ένα μιγαδικό αριθμό  $z$  και φροντίζουμε πάντοτε να κάνουμε τις σχετικές απλοποιήσεις (κυρίως  $i^2 = -1$  και  $i^4 = 1$ ), βέβαια όσες φορές αυτό είναι εφικτό. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε δύο συγκεκριμένους μιγαδικούς αριθμούς, τους αριθμούς

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad \text{και} \quad z_2 = x_2 + iy_2. \quad (1.3.1)$$

Με βάση τους μιγαδικούς αυτούς αριθμούς  $z_1$  και  $z_2$  το άθροισμά τους  $z_3$  υπολογίζεται σαν

$$z_3 = z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1.3.2)$$

Έχουμε δηλαδή με τη χρήση και των τελεστών  $\text{Re}$  (πραγματικό μέρος) και  $\text{Im}$  (φανταστικό μέρος)

$$\text{Re}(z_1 + z_2) = \text{Re } z_1 + \text{Re } z_2 \quad \text{και} \quad \text{Im}(z_1 + z_2) = \text{Im } z_1 + \text{Im } z_2. \quad (1.3.3)$$

Απολύτως ανάλογα στην αφαίρεση  $z_1 - z_2$  δύο μιγαδικών αριθμών ( $z_1$  πλην  $z_2$ ) έχουμε

$$z_4 = z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (1.3.4)$$

Για  $z_1 = 0 + 0i = 0$  με την αφαίρεση  $z_1 - z_2 = 0 - z_2 = -z_2$  προκύπτει ο αντίθετος του μιγαδικού αριθμού  $z_2$

$$-z_2 = -x_2 - iy_2. \quad (1.3.5)$$

Παραπέρα στον πολλαπλασιασμό  $z_1 z_2$  των μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$  προκύπτει εύκολα ότι

$$z_5 = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2. \quad (1.3.6)$$

Λαμβάνοντας μάλιστα υπόψη ότι  $i^2 = -1$ , έχουμε τελικά

$$z_5 = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (1.3.7)$$

Τέλος για τη διαίρεση  $z_1/z_2$  των δύο μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$  (φυσικά με  $z_2 \neq 0$ ) έχουμε

$$z_6 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}. \quad (1.3.8)$$

Ο μαθηματικός τρόπος εργασίας στη διαίρεση είναι να δηλώσουμε το πηλίκο  $z_6$  σαν  $z_6 = x_6 + iy_6$  και να προσδιορίσουμε το πραγματικό μέρος  $x_6$  και το φανταστικό  $y_6$  του πηλίκου  $z_6$  έτσι, ώστε

$$z_6 z_2 = z_1 \iff (x_6 + iy_6)(x_2 + iy_2) = x_1 + iy_1 \iff x_2 x_6 - y_2 y_6 + i(x_2 y_6 + y_2 x_6) = x_1 + iy_1. \quad (1.3.9)$$

Πρέπει επομένως τόσο τα πραγματικά μέρη όσο και τα φανταστικά μέρη στην τελευταία εξίσωση να είναι ίσα. Άρα έχουμε το σύστημα των δύο γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων

$$x_2 x_6 - y_2 y_6 = x_1, \quad x_2 y_6 + y_2 x_6 = y_1 \quad (1.3.10)$$

ως προς το πραγματικό μέρος  $x_6 = \text{Re } z_6$  και το φανταστικό μέρος  $y_6 = \text{Im } z_6$  του ζητούμενου πηλίκου  $z_6 = z_1/z_2$ . Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε

$$x_6 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y_6 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \implies z_6 = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.3.11)$$

Στην πράξη βέβαια ποτέ δεν εργαζόμαστε έτσι. Υπάρχει ένας πολύ ευκολότερος τρόπος προσδιορισμού του πηλίκου  $z_6 = z_1/z_2$ . Απλά πολλαπλασιάζουμε και τον αριθμητή  $z_1$  και τον παρονομαστή  $z_2$  στο πηλίκο αυτό  $z_1/z_2$  επί  $\bar{z}_2 = x_2 - iy_2$ . Διαπιστώνουμε έτσι ότι

$$z_6 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (1.3.12)$$

έχοντας βέβαια θέσει  $i^2 = -1$ . Προκύπτει λοιπόν ξανά το ίδιο πηλίκο  $z_6$ , ακριβώς όπως και στον προηγούμενο τύπο (1.3.11), τώρα όμως με πολύ απλούστερο, αλλά και πολύ λιγότερο δικαιολογημένο τρόπο από αυστηρά μαθηματικής απόψεως. Για  $z_1 = x_1 + iy_1 = 1 + 0i = 1$  προκύπτει ο αντίστροφος μιγαδικός αριθμός  $(z_2)^{-1} \equiv z_2^{-1}$  του μιγαδικού αριθμού  $z_2$

$$(z_2)^{-1} = \frac{1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_2 - iy_2}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (1.3.13)$$

Επ' ευκαιρία για το μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$  σημειώνεται και η πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - iy^2 + ix^2 - i^2 y^2 = x^2 - (-1)y^2 = x^2 + y^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2. \quad (1.3.14)$$

### Δ1.3.2. Ιδιότητες στις πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

Οι πράξεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός και διαίρεση) με μιγαδικούς αριθμούς γίνονται απολύτως ανάλογα με τις αντίστοιχες πράξεις για τους πραγματικούς αριθμούς μην ξεχνώντας όμως ότι  $i^2 = -1$ . Αν και δεν υπήρξαμε καθόλου αυστηροί στον ορισμό των πράξεων αυτών στην προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε εντούτοις να διαπιστώσουμε την ισχύ των βασικών ιδιοτήτων των αντίστοιχων πράξεων στους πραγματικούς αριθμούς. Έτσι και στους μιγαδικούς αριθμούς ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό, δηλαδή

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 z_2 = z_2 z_1, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3). \quad (1.3.15)$$

Ισχύει επίσης η επιμεριστική ιδιότητα

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3. \quad (1.3.16)$$

Υπάρχει ακόμη ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση: ο μηδενικός μιγαδικός αριθμός, το μηδέν  $0 + 0i = 0$ , όπως πολύ εύκολα διαπιστώνεται. Ανάλογα υπάρχει και ουδέτερο στοιχείο για τον πολλαπλασιασμό: η μονάδα  $1 + 0i = 1$ , ακριβώς όπως και στους πραγματικούς αριθμούς. Δεν έχει νόημα η επέκτασή μας και σε άλλες απλές ιδιότητες των πράξεων στους μιγαδικούς αριθμούς.

### Δ1.4. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Όταν χρησιμοποιούμε το επίπεδο  $Oxy$  για την παράσταση μιγαδικών αριθμών, όπως του αριθμού  $z = (x, y) = x + iy$ , τότε το καλούμε μιγαδικό επίπεδο. (Σχήμα για το μιγαδικό επίπεδο υπάρχει στη δεύτερη σελίδα των Παρατηρήσεων ακριβώς πριν από το παρόν Κεφάλαιο Δ1.) Φυσικά σε κάθε μιγαδικό αριθμό  $z = (x, y) = x + iy$  αντιστοιχεί ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου: το σημείο  $P = (x, y)$ . Επίσης συγχέουμε το μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$  με το σημείο  $P = (x, y)$  που τον παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο. Ασφαλώς το σημείο  $P$  έχει τετμημένη  $x = \operatorname{Re} z$  και τεταγμένη  $y = \operatorname{Im} z$ . Ο συζυγής μιγαδικός αριθμός  $\bar{z} = x - iy$  παριστάνεται βέβαια με το συμμετρικό σημείο  $\bar{P}$  του σημείου  $P$  ως προς τον πραγματικό άξονα  $Ox$  του μιγαδικού επιπέδου. (Ο άξονας  $Oy$  είναι ο φανταστικός άξονας του μιγαδικού επιπέδου.) Ανάλογα ο αντίθετος μιγαδικός αριθμός  $-z = -x - iy$  παριστάνεται με το συμμετρικό σημείο  $\hat{P}$  του σημείου  $P$  ως προς την αρχή των αξόνων  $O = (0, 0)$ . Ισοδύναμα ο μιγαδικός αριθμός  $-z$  παριστάνεται με το ίδιο συμμετρικό σημείο  $\hat{P}$  του σημείου  $\bar{P}$  ως προς το φανταστικό άξονα  $Oy$ .

Το σημείο  $P$  που παριστάνει το μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$  είναι φυσικά το άκρο του αντίστοιχου διανύσματος  $\mathbf{P}$  (ισοδύναμη γραφή  $\vec{P}$ ) από την αρχή των αξόνων  $O = (0, 0)$  μέχρι το σημείο  $P = (x, y)$ . Φυσικά το διάνυσμα αυτό  $\mathbf{P}$  έχει συνιστώσες  $x = \operatorname{Re} z$  και  $y = \operatorname{Im} z$  κατά τους άξονες  $Ox$  (τον πραγματικό άξονα) και  $Oy$  (το φανταστικό άξονα) αντίστοιχα. Το μήκος του ίδιου διανύσματος  $\mathbf{P}$  είναι προφανώς ίσο με

$$r = |\mathbf{P}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}. \quad (1.4.1)$$

Επίσης δηλώνουμε με  $\theta$  τη γωνία που σχηματίζεται ανάμεσα στον πραγματικό άξονα  $Ox$  (κατά τη θετική διεύθυνσή του) και στο διάνυσμα  $\mathbf{P}$  κατά την ανθρωπολογιακή φορά, δηλαδή κατά τη φορά που είναι αντίθετη στην κίνηση των δεικτών του ρολογιού. Αυτή είναι η θετική φορά.

## Δ1.5. ΠΟΛΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

### Δ1.5.1. Παράσταση μιγαδικού αριθμού σε πολική μορφή

Μέχρι τώρα είχαμε χρησιμοποιήσει αποκλειστικά την παράσταση ενός μιγαδικού αριθμού  $z$  σε Καρτεσιανή μορφή:  $z = x + iy$ , δηλαδή με τη χρήση των Καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x, y)$  του σημείου  $P$  που τον παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο. Ένας πολύ χρήσιμος και αρκετά διαφορετικός τρόπος παραστάσεως του ίδιου μιγαδικού αριθμού  $z$  είναι σε πολική μορφή χρησιμοποιώντας τώρα τις πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  του ίδιου σημείου  $P$  στο μιγαδικό επίπεδο. Γνωρίζουμε ήδη ότι μεταξύ των Καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x, y)$  και των πολικών συντεταγμένων  $(r, \theta)$  ενός σημείου  $P$  (εδώ βέβαια και του αντίστοιχου μιγαδικού αριθμού  $z$ ) ισχύουν οι τύποι μετατροπής

$$x = r \cos \theta \quad \text{και} \quad y = r \sin \theta \quad \implies \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \quad (1.5.1)$$

Στον τελευταίο τύπο η συνάρτηση  $\tan^{-1}$  είναι η συνάρτηση τόξο εφαπτομένης. (Μερικές φορές η συνάρτηση αυτή  $\tan^{-1}$  δηλώνεται και με το σύμβολο  $\arctan$  αντί για το σύμβολο  $\tan^{-1}$ .) Εδώ όμως γίνεται ερμηνεία της γωνίας  $\theta$  σαν της γωνίας που σχηματίζεται ανάμεσα στον άξονα  $Ox$  (κατά τη θετική διεύθυνσή του) και στο διάνυσμα  $\mathbf{P}$ , οπότε  $\tan^{-1}(y/x) = \theta$ . Επομένως η γωνία  $\theta$  μπορεί τώρα να πάρει τιμές στο διάστημα  $[0, 2\pi)$  ή στο διάστημα  $(-\pi, \pi]$ . (Αυτή είναι μια δεύτερη δυνατότητα.)

Οι τύποι (1.5.1) μας επιτρέπουν μια εναλλακτική γραφή του μιγαδικού αριθμού  $z = x + iy$ , τώρα σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Έχουμε έτσι

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1.5.2)$$

Μάλιστα με τη χρήση του τύπου του Euler:  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , πρώτος τύπος (1.1.4), έχουμε την εξής τελική και σύντομη πολική μορφή του μιγαδικού αριθμού  $z$ :

$$z = re^{i\theta}. \quad (1.5.3)$$

### Δ1.5.2. Μέτρο και όρισμα μιγαδικού αριθμού

Με βάση την πολική μορφή  $z = re^{i\theta}$  του μιγαδικού αριθμού  $z$  ορίζουμε το μέτρο του (modulus, mod) ή απόλυτη τιμή του  $|z| = r$  και το όρισμά του  $\theta$ . Το όρισμα (argument) το συμβολίζουμε με το σύμβολο  $\arg$ . Επομένως με βάση τους τύπους (1.5.1) έχουμε

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arg z = \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \quad (1.5.4)$$

Σημειώνουμε επίσης ότι, αφού  $z = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , είναι στ' αλήθεια εύλογο να έχουμε

$$|z| = |re^{i\theta}| = |r||e^{i\theta}| = r \cdot 1 = r, \quad \text{επειδή} \quad r \geq 0 \quad \text{και} \quad |e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1 \quad (1.5.5)$$

Ξανά με βάση τον τύπο του Euler (1.1.4):  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . Προφανώς ισχύει επίσης ότι

$$|z|^2 = z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = r^2 \implies |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}. \quad (1.5.6)$$

▼ **Παράδειγμα Δ1.1:** Για το μιγαδικό αριθμό  $z = 3 + 4i$  ισχύει  $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$ . ▲

Για τα μέτρα (ή τις απόλυτες τιμές)  $|z_1|$  και  $|z_2|$  των μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$  αντίστοιχα αποδεικνύεται επίσης ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.5.7)$$

Ισχύουν επίσης και προφανείς γενικεύσεις της εντελώς ανάλογα με τους πραγματικούς αριθμούς.

Επίσης για το μέτρο (ή την απόλυτο τιμή)  $|z_1 - z_2|$  της διαφοράς  $z_1 - z_2$  των δύο μιγαδικών αριθμών  $z_1 = x_1 + iy_1$  και  $z_2 = x_2 + iy_2$  ισχύει η σχέση

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad (1.5.8)$$

Προφανώς πρόκειται για την απόσταση των σημείων  $z_1$  και  $z_2$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ , καλύτερα των σημείων  $P_1$  και  $P_2$  που παριστάνουν τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1$  και  $z_2$  αντίστοιχα στο μιγαδικό αυτό επίπεδο. Γενικά όμως δεν κάνουμε ιδιαίτερη διάκριση μεταξύ ενός μιγαδικού αριθμού  $z$  και του αντίστοιχου σημείου  $P$  που τον παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο.

Επαναλαμβάνουμε ότι το όρισμα  $\arg z = \theta$  ορίζεται έτσι, ώστε να αντιστοιχεί στη γωνία μεταξύ του άξονα  $Ox$  και του διανύσματος  $\mathbf{P}$  που συνδέει την αρχή των αξόνων  $O$  με το σημείο  $P = (x, y)$ . Επίσης το σημείο αυτό  $P$  αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy = re^{i\theta}$  στο μιγαδικό επίπεδο.

Τονίζουμε ακόμη ότι το όρισμα  $\arg z = \theta$  του μιγαδικού αριθμού  $z = x + iy = re^{i\theta}$  δε μπορεί να ορισθεί κατά μονοσήμαντο τρόπο. Όχι μόνο μια γωνία  $\theta_1$  (σε ακτίνια, rad εννοείται), αλλά και κάθε άλλη γωνία  $\theta$  που διαφέρει από αυτήν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο  $2n\pi$  του  $2\pi$  είναι όρισμα του μιγαδικού αριθμού  $z$ . Για έμφαση θα μπορούσαμε ίσως να γράψουμε

$$\arg z = \theta = \theta_1 + 2n\pi = \tan^{-1} \frac{y}{x} + 2n\pi \quad (1.5.9)$$

με το  $n$  οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό. Συνήθως όμως χρησιμοποιούμε ένα πρωτεύον (ή κύριο) όρισμα  $\theta$  (έστω το όρισμα  $\theta_1$  στον πιο πάνω τύπο) στο διάστημα  $[0, 2\pi)$  ή στο διάστημα  $(-\pi, \pi]$ . Για το διάστημα  $[0, 2\pi)$  τα σημεία του θετικού πραγματικού άξονα στο μιγαδικό επίπεδο έχουν πρωτεύον όρισμα  $\theta = 0$  και τα σημεία του αρνητικού πραγματικού άξονα έχουν πρωτεύον όρισμα  $\theta = \pi$ . Επίσης τα σημεία του θετικού φανταστικού άξονα έχουν πρωτεύον όρισμα  $\theta = \pi/2$ , ενώ τα σημεία του αρνητικού φανταστικού άξονα έχουν πρωτεύον όρισμα  $\theta = 3\pi/2$ . Για την αρχή των αξόνων  $O = (0, 0) = 0 + 0i$  δε μπορεί να καθορισθεί κανένα όρισμα: δεν υπάρχει, είναι απροσδιόριστο το όρισμα  $\arg(0 + 0i)$ .

▼ **Παράδειγμα Δ1.2:** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $\pm 1 \pm i$  έχουμε τα ακόλουθα πρωτεύοντα ορίσματά τους στο διάστημα  $[0, 2\pi)$ :

$$\arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}, \quad \arg(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}, \quad \arg(-1 - i) = \frac{5\pi}{4}, \quad \arg(1 - i) = \frac{7\pi}{4}. \quad (1.5.10)$$

Παρατηρούμε ότι τα ορίσματα αυτά σέβονται τις αληθινές θέσεις των τεσσάρων πιο πάνω σημείων  $\pm 1 \pm i$  στο μιγαδικό επίπεδο. Άμεσα επίσης διαπιστώνουμε ότι το μέτρο (ή η απόλυτος τιμή) και των τεσσάρων αυτών μιγαδικών αριθμών είναι

$$|\pm 1 \pm i| = \sqrt{(\pm 1)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}. \quad (1.5.11)$$

Δηλαδή και οι τέσσερις αυτοί μιγαδικοί αριθμοί  $\pm 1 \pm i$  έχουν την ίδια ακριβώς απόλυτο τιμή  $\sqrt{2}$ . ▲

### Δ1.5.3. Πολλαπλασιασμός και διαίρεση σε πολική μορφή

Με τις πολικές μορφές  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  και  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  των μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$  μπορούμε πολύ εύκολα να υπολογίσουμε το γινόμενο τους  $z_1 z_2$  και το πηλίκο τους  $z_1/z_2$ . Πρώτα για το γινόμενο  $z_1 z_2$  έχουμε

$$z_1 z_2 = (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = (r_1 r_2)(e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (1.5.12)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το γινόμενο  $z_1 z_2$  δύο μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$  έχει μέτρο (ή απόλυτο τιμή)  $|z_1 z_2|$  το γινόμενο  $r_1 r_2$  των μέτρων τους και όρισμα το άθροισμα  $\theta_1 + \theta_2$  των ορισμάτων τους (εννοείται συν  $2\pi n$  με το  $n$  ακέραιο αριθμό).

Απολύτως ανάλογα για το πηλίκο  $z_1/z_2$  (ασφαλώς με  $z_2 \neq 0$ ) έχουμε

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} \frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (1.5.13)$$

Επομένως το πηλίκο  $z_1/z_2$  δύο μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$  έχει μέτρο (ή απόλυτο τιμή)  $|z_1/z_2|$  το πηλίκο  $r_1/r_2$  των μέτρων τους  $r_1$  και  $r_2$  αντίστοιχα και όρισμα τη διαφορά  $\theta_1 - \theta_2$  των ορισμάτων τους  $\theta_1$  και  $\theta_2$  αντίστοιχα (εννοείται πάλι συν  $2\pi n$  με το  $n$  ακέραιο αριθμό).

Παραδεχόμαστε βέβαια ότι η εκτέλεση των πιο πάνω πράξεων δεν είναι μαθηματικά αυστηρή. Ας εκτελέσουμε αυστηρά τους σχετικούς υπολογισμούς για το γινόμενο  $z_1 z_2$  βασιζόμενοι στον τύπο του Euler (1.1.4), δηλαδή στον τύπο  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . (Ο τύπος του Euler είναι προς το παρόν το μοναδικό εφόδιό μας για τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση, αν και αυτή η κατάσταση θα αλλάξει προς το καλύτερο στο επόμενο Κεφάλαιο Δ2 με τον ορισμό της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$ .) Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) \\ &= [r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)][r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned} \quad (1.5.14)$$

Στην απόδειξη αυτή του τύπου (1.5.12) εκτός από τον τύπο του Euler (1.1.4) χρησιμοποιήσαμε επίσης και τους γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους για το συνημίτονο ( $\cos$ ) και το ημίτονο ( $\sin$ ) του αθροίσματος  $\theta_1 + \theta_2$ , δηλαδή τους τύπους

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad (1.5.15)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2. \quad (1.5.16)$$

Φυσικά το τελικό αποτέλεσμα στην απόδειξη (1.5.14) συμφωνεί με τον τύπο (1.5.12) για το γινόμενο  $z_1 z_2$  δύο μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$ . Ανάλογα αποδεικνύεται αυστηρά και ο τύπος (1.5.13) για το πηλίκο  $z_1/z_2$  των ίδιων μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$ .

Είναι επίσης προφανές ότι ο τύπος (1.5.12) για το γινόμενο  $z_1 z_2$  μπορεί εύκολα να γενικευθεί και σε  $n$  (με  $n > 1$ ) μιγαδικούς αριθμούς  $z_k = r_k e^{i\theta_k}$  (με  $k = 1, 2, \dots, n$ ) με παράστασή τους πάλι σε πολική μορφή. Στην περίπτωση αυτή ο ίδιος τύπος (1.5.12) παίρνει τη γενικότερη μορφή του

$$\prod_{k=1}^n z_k = \left( \prod_{k=1}^n r_k \right) \exp\left(i \sum_{k=1}^n \theta_k\right), \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.5.17)$$

Υπενθυμίζεται ότι τα σύμβολα  $\sum$  και  $\prod$  δηλώνουν άθροισμα και γινόμενο αντίστοιχα. Επίσης το σύμβολο  $\exp$  δηλώνει την εκθετική συνάρτηση:  $\exp z \equiv e^z$  (είτε είναι πραγματική είτε μιγαδική).

**Δ1.5.4. Θεώρημα του de Moivre**

Υποθέτουμε τώρα ότι και οι  $n$  μιγαδικοί αριθμοί  $z_k$  στον προηγούμενο τύπο (1.5.17) είναι όλοι ίσοι με το μιγαδικό αριθμό  $z = re^{i\theta}$ . Στην ειδική αυτή περίπτωση ο τύπος αυτός παίρνει την πολύ απλούστερη μορφή

$$z^n = r^n \exp(in\theta) \equiv r^n e^{in\theta} \implies (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (1.5.18)$$

επειδή  $z = re^{i\theta}$ . Θέτοντας  $r = 1$  στον τελευταίο αυτό τύπο έχουμε

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.5.19)$$

Ο σημαντικός αυτός τύπος (1.5.19) καλείται θεώρημα του de Moivre. Συνήθως βέβαια παίρνουμε υπόψη μας τον τύπο του Euler (1.1.4):  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  και γράφουμε έτσι τον τύπο (1.5.19), δηλαδή το θεώρημα του de Moivre, σε ισοδύναμη τριγωνομετρική μορφή

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \implies (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1.5.20)$$

**Δ1.5.5. Ρίζες μιγαδικών αριθμών**

Η πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού  $z = re^{i\theta}$  μας διευκολύνει αφάνταστα στον υπολογισμό ριζών (φυσικά ακέραιης τάξεως  $m$ ) του μιγαδικού αυτού αριθμού  $z$ . Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε τη  $m$ -στή ρίζα  $\sqrt[m]{z}$  ( $m = 2, 3, \dots$ ) του μιγαδικού αριθμού  $z = re^{i\theta}$ . Τη δηλώνουμε με το σύμβολο  $w = \rho e^{i\varphi}$  (με το μέτρο του  $\rho$  και το όρισμά του  $\varphi$  προς το παρόν άγνωστα) και έχουμε

$$w = \rho e^{i\varphi} = \sqrt[m]{z} \implies w^m = z \implies (\rho e^{i\varphi})^m = re^{i\theta} \implies \rho^m e^{im\varphi} = re^{i\theta}. \quad (1.5.21)$$

Για την εύρεση της τελευταίας σχέσεως (1.5.21) πήραμε υπόψη μας το γνωστό μας θεώρημα του de Moivre (1.5.19) με  $m$  όμως στη θέση του  $n$  (με  $m = 2, 3, \dots$ ). Από την τελευταία αυτή σχέση (1.5.21) συμπεραίνουμε ότι για να είναι οι μιγαδικοί αριθμοί  $\rho^m e^{im\varphi}$  και  $re^{i\theta}$  ίσοι, θα πρέπει να έχουν και ίσα μέτρα και ίσα ορίσματα. Η εξίσωση των μέτρων  $\rho^m$  και  $r$  (τα μέτρα  $\rho$  και  $r$  είναι φυσικά και τα δύο μη αρνητικοί αριθμοί) μας δίνει

$$\rho^m = r \iff \rho = \sqrt[m]{r}. \quad (1.5.22)$$

Άρα έχουμε πλήρως προσδιορίσει το μέτρο  $\rho$  του άγνωστου μιγαδικού αριθμού  $w = \rho e^{i\varphi} = \sqrt[m]{z}$ .

Απομένει η εύρεση του ορίσματος  $\varphi = \arg w$  του ίδιου αριθμού  $w = \sqrt[m]{z}$ . Όμως η εξίσωση των ορισμάτων στην τελευταία από τις σχέσεις (1.5.21) παρουσιάζει κάποια πολυπλοκότητα. Αυτό συμβαίνει γιατί, όπως γνωρίζουμε, το όρισμα  $\arg z$  ενός μιγαδικού αριθμού  $z = re^{i\theta}$  δεν είναι μονότιμα (μονοσήμαντα) καθορισμένο, αλλ' έχει τη μορφή  $\theta = \theta_1 + 2k\pi$  με  $\theta_1$  την πρωτεύουσα (ή κύρια) τιμή του και  $k$  έναν ακέραιο αριθμό. Επομένως η εξίσωση των ορισμάτων στην τελευταία από τις σχέσεις (1.5.21) πρέπει να ερμηνευθεί μαζί με τον επιπλέον όρο  $2k\pi$ . Άρα θα έχουμε

$$m\varphi = \theta + 2k\pi \implies \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{m} \quad (1.5.23)$$

με το  $\theta$  να ερμηνεύεται σαν το πρωτεύον (κύριο) όρισμα  $\theta_1$  του γνωστού μιγαδικού αριθμού  $z = re^{i\theta}$ , του οποίου επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε την  $m$ -στή ρίζα  $w = \sqrt[m]{z} \equiv z^{1/m}$ . Εύκολα συνάγουμε ότι μονάχα  $m$  τιμές του  $k$  στη σχέση (1.5.23) έχουν νόημα. Ας πούμε οι τιμές  $k = 0, 1, \dots, m-1$ . (Για  $k = m$  το όρισμα  $\varphi$  απλά αυξάνεται κατά  $2\pi$  ως προς την αρχική τιμή του  $\theta/m$  για  $k = 0$ .) Άρα για το μιγαδικό αριθμό  $w = \sqrt[m]{z}$  έχουμε μια τιμή του μέτρου του  $\rho = |w| = \sqrt[m]{r}$ , αλλά  $m$  τιμές  $\varphi_k = (\theta + 2k\pi)/m$  του ορίσματος του  $\varphi = \arg w$ . Άρα συνολικά υπάρχουν  $m$  τον αριθμό  $m$ -στές ρίζες  $\sqrt[m]{z}$  ενός μιγαδικού αριθμού  $z$ . Από τις σχέσεις (1.5.22) και (1.5.23) συμπεραίνουμε ότι οι  $m$  αυτές ρίζες  $\sqrt[m]{z}$  δίνονται από τους εξής τύπους χρησιμοποιώντας τελικά και τον τύπο του Euler:

$$w_k = \sqrt[m]{r} \exp \frac{(\theta + 2k\pi)i}{m} = \sqrt[m]{r} \left( \cos \frac{\theta + 2k\pi}{m} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{m} \right), \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1.5.24)$$



---

# Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο *Δ2*

## ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

---

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο Κεφάλαιο αυτό Δ2 θα αναφερθούμε σε ορισμένες βασικές και στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις που συναντάμε συχνά στην πράξη. Πρόκειται για την εκθετική συνάρτηση και την αντίστροφη της, δηλαδή τη λογαριθμική συνάρτηση, για τις υπερβολικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους και για τις τριγωνομετρικές (ή κυκλικές) συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους.

Πριν αναφερθούμε εκτενώς στις στοιχειώδεις αυτές μιγαδικές συναρτήσεις, στην αρχή του κεφαλαίου αυτού θα αναφερθούμε γενικά στις μιγαδικές συναρτήσεις, στα πραγματικά και φανταστικά μέρη τους και (με κάποια έμφαση) στις συζυγείς μιγαδικές συναρτήσεις.

Η βασική συνάρτηση είναι η μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^z$ . Αυτή θα την ορίσουμε πρώτη με τρόπο όμως που να σέβεται τις ιδιότητες της πραγματικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^x$  καθώς και τους τύπους του Euler (1.1.4). Στη συνέχεια θα ορίσουμε τις μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις και μετά τις μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Σημειώνουμε και πάλι ότι οι ορισμοί που θα δώσουμε θα είναι σύμφωνοι με εκείνους που ισχύουν για τις αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις. (Οι πραγματικές συναρτήσεις αποτελούν ειδική περίπτωση των πολύ γενικότερων μιγαδικών συναρτήσεων.) Θα αναφέρουμε επίσης και αρκετές ιδιότητες όλων των μιγαδικών αυτών συναρτήσεων και ορισμένες θα τις αποδείξουμε με βάση τους ορισμούς τους.

Το χαρακτηριστικό της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως και των μιγαδικών υπερβολικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων (αλλ' όχι και των αντιστρόφων τους) είναι ότι είναι μονότιμες. Παίρνουν δηλαδή μια συγκεκριμένη τιμή για κάθε τιμή του  $z = x + iy$ . Αντίθετα η μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση καθώς και οι μιγαδικές αντίστροφες υπερβολικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις, που θα τις εξετάσουμε μετά, είναι πλειονότιμες. Δηλαδή αυτές παίρνουν πολλές τιμές (εδώ άπειρες) για κάθε συγκεκριμένη τιμή του  $z = x + iy$ . Η ιδιότητα τους αυτή δε μας είναι καθόλου ευχάριστη, αλλά δε μπορούμε και να την αποφύγουμε. Υπάρχει μόνο η δυνατότητα να ορίσουμε μια πρωτεύουσα (ή κύρια) τιμή για τη μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση και τις μιγαδικές αντίστροφες υπερβολικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Και για τις συναρτήσεις αυτές θα αναφέρουμε ορισμένες βασικές ιδιότητές τους και μια-δυο από αυτές θα τις αποδείξουμε.

Το προηγούμενο Κεφάλαιο Δ1 αναφερόταν στους μιγαδικούς αριθμούς, ενώ το παρόν Κεφάλαιο Δ2 αναφέρεται στις στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις. Μετά το κεφάλαιο αυτό θα είμαστε πια έτοιμοι να προχωρήσουμε (στο επόμενο Κεφάλαιο Δ3) στον ορισμό του ορίου, της συνέχειας και της παραγώγου μιας μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$  (με  $z = x + iy$ ) σε ένα σημείο  $z_0$  του μιγαδικού επιπέδου. Επίσης και στην έννοια της αναλυτικής συναρτήσεως, η οποία είναι θεμελιώδους σημασίας στη Μιγαδική Ανάλυση και, κυρίως, στις εφαρμογές της. Αυτά όμως θα γίνουν στο επόμενο Κεφάλαιο Δ3 με διαθέσιμα εκεί τα εφόδια των δύο πρώτων Κεφαλαίων Δ1 και Δ2.

---

## Δ2.1. ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### Δ2.1.1. Εισαγωγή στις μιγαδικές συναρτήσεις

Οι μιγαδικές συναρτήσεις  $f(z)$  ορίζονται ανάλογα με τις πραγματικές συναρτήσεις  $f(x)$ , αλλά τώρα με μιγαδικούς αριθμούς στη θέση της μεταβλητή  $z = x + iy$ . (Οπωσδήποτε όχι μόνο η μεταβλητή  $z$ , αλλά και η ίδια η μιγαδική συνάρτηση μπορεί να περιέχει τη φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$ .) Μπορούμε έτσι να μιλάμε για τη μιγαδική συνάρτηση

$$w = f(z), \quad z \in D, \quad (2.1.1)$$

που ορίζεται σε μια περιοχή  $D$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$ . Πολύ συχνά η περιοχή  $D$  ορισμού της μιγαδικής συναρτήσεως  $f$  θεωρείται ανοικτή, δηλαδή δεν περιλαμβάνει τα συνοριακά της σημεία. Με τον τρόπο αυτό (ανοικτή περιοχή  $D$ , το σύμβολο  $D$  προέρχεται από την Αγγλική λέξη domain) θα μπορούμε να μιλάμε (στο επόμενο Κεφάλαιο Δ3) για παραγωγίσιμη μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  στην ανοικτή περιοχή  $D$ .

Η συνάρτηση  $f(z)$  παίρνει τη μεταβλητή της, δηλαδή το μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$  (στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ ), και την απεικονίζει στον επίσης μιγαδικό αριθμό  $w = u + iv$  (στο διαφορετικό μιγαδικό επίπεδο  $w$ ). Συνήθως η συνάρτηση  $f(z)$  είναι μονότιμη, δηλαδή για κάθε τιμή της μεταβλητής της  $z$  μας δίνει μια τιμή  $w$  σαν αποτέλεσμα. Αυτό είναι και το επιθυμητό, αλλά δυστυχώς δεν ισχύει πάντοτε. Ήδη είδαμε στην Παράγραφο Δ1.4.3 ότι η συνάρτηση που δίνει το όρισμα (argument) ενός μιγαδικού αριθμού, συγκεκριμένα η συνάρτηση  $\arg z$ , δεν είναι μονότιμη, αλλ' είναι πλειονότιμη. (Με τον όρο πλειονότιμη εννοούμε ότι παίρνει δύο ή περισσότερες τιμές για την ίδια τιμή της μεταβλητής  $z$ .) Με πιο απλές λέξεις για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  η συνάρτηση του ορίσματος  $\arg z$  δίνει πολλά ορίσματα, συγκεκριμένα άπειρα ορίσματα της μορφής (1.5.9).

### Δ2.1.2. Μιγαδικές πολυωνυμικές και ρητές συναρτήσεις

Με τις πράξεις για τους μιγαδικούς αριθμούς που ήδη γνωρίζουμε από το προηγούμενο Κεφάλαιο Δ1 μπορούμε εύκολα να ορίσουμε απλές συναρτήσεις  $f(z)$ . Ένα τέτοιο παράδειγμα αποτελούν οι πολυωνυμικές συναρτήσεις  $p_n(z)$ . (Ο δείκτης  $n$  δηλώνει το βαθμό του πολυωνύμου  $p_n(z)$ .) Παραδείγματος χάρη, μια μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  είναι το συγκεκριμένο δευτεροβάθμιο πολυώνυμο

$$p_{2c}(z) = z^2 + iz + 3. \quad (2.1.2)$$

Μια άλλη μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  είναι το γενικό δευτεροβάθμιο πολυώνυμο

$$p_{2g}(z) = az^2 + bz + c \quad (2.1.3)$$

με τους συντελεστές του  $a$ ,  $b$  και  $c$  γενικά μιγαδικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, με  $a = 1$ ,  $b = i$  και  $c = 3$  το πιο πάνω γενικό δευτεροβάθμιο μιγαδικό πολυώνυμο  $p_{2g}(z)$  μεταπίπτει στο ειδικό πολυώνυμο  $p_{2c}(z)$ . Ασφαλώς μπορούμε να ορίσουμε απειρία μιγαδικών πολυωνύμων  $p_n(z)$  κάθε βαθμού  $n$ . Έχουμε επίσης τη δυνατότητα να ορίσουμε και μιγαδικές ρητές συναρτήσεις  $r(z)$  σαν πηλίκα  $r(z) = p(z)/q(z)$  δύο πολυωνύμων  $p(z)$  και  $q(z)$ , κλπ.

Υπάρχει αρκετή αναλογία με τις πραγματικές συναρτήσεις και δε χρειάζεται να επεκταθούμε περισσότερο στις εισαγωγικές έννοιες για τις μιγαδικές συναρτήσεις. Συγκρατούμε όμως ότι η μιγαδική συνάρτηση  $w = f(z)$  απεικονίζει το μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$  στον επίσης μιγαδικό αριθμό  $w = u + iv$  του διαφορετικού μιγαδικού επιπέδου  $w$ . Συνήθως (για μονότιμες συναρτήσεις  $f(z)$ ) η απεικόνιση αυτή είναι μονοσήμαντη. Αρκετές φορές όμως (για πλειονότιμες συναρτήσεις) η απεικόνιση είναι πολυσήμαντη. Δε μας είναι καταρχήν αρεστές οι πλειονότιμες συναρτήσεις και οι αντίστοιχες πολυσήμαντες απεικονίσεις, αλλά δυστυχώς παρουσιάζονται στις μιγαδικές συναρτήσεις συχνά μάλιστα. Άρα πρέπει να συνηθίσουμε την παρουσία τους.

**Δ2.1.3. Πραγματικό και φανταστικό μέρος μιγαδικής συναρτήσεως**

Όπως σε ένα μιγαδικό αριθμό  $z$  έχουμε το πραγματικό μέρος του  $x = \operatorname{Re} z$  και το φανταστικό μέρος του  $y = \operatorname{Im} z$ , με τον ίδιο τρόπο και στο μιγαδικό αριθμό  $w = f(z)$  έχουμε επίσης το πραγματικό μέρος του  $u = \operatorname{Re} w$  και το φανταστικό  $v = \operatorname{Im} w$ . Συγκεκριμένα στην περίπτωση μιας μιγαδικής συναρτήσεως  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

$$w = f(z) \quad (\text{με } z = x + iy) \quad \text{ή} \quad w = u + iv \quad \text{με} \quad u = u(x, y) \quad \text{και} \quad v = v(x, y). \quad (2.1.4)$$

Επειδή η συνάρτηση  $w = f(z)$  είναι μιγαδική συνάρτηση, είμαστε υποχρεωμένοι να δηλώσουμε τη μεταβλητή της με  $z$  και όχι με  $x$  και  $y$  (δύο πραγματικές μεταβλητές), παρόλο που  $z = x + iy$ . Επίσης οι πραγματικές συναρτήσεις  $u$  και  $v$  (με  $w = u + iv$ ) δηλώνουν το πραγματικό μέρος ( $\operatorname{Re}$ ) και το φανταστικό μέρος ( $\operatorname{Im}$ ) αντίστοιχα της τιμής  $w = f(z)$  της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$ . Είναι επομένως σκόπιμο να τις γράψουμε με δύο μεταβλητές: τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  και  $y$  αντί για το μιγαδικό αριθμό  $z$ , δηλαδή  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$ . Έτσι συνήθως ξαναγράφουμε τις σχέσεις (2.1.4) στη μορφή

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{με} \quad u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) \quad \text{και} \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z). \quad (2.1.5)$$

▼ **Παράδειγμα Δ2.1:** Για το πιο πάνω πολυώνυμο  $p_{2c}(z)$  (ορισμός (2.1.2)) έχουμε

$$\begin{aligned} p_{2c}(z) &= z^2 + iz + 3 = (x + iy)^2 + i(x + iy) + 3 \\ &= x^2 - y^2 + 2ixy + ix - y + 3 = (x^2 - y^2 - y + 3) + i(2xy + x). \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Είναι τώρα προφανές ότι οι τύποι

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - y + 3 \quad \text{και} \quad v(x, y) = 2xy + x \quad (2.1.7)$$

δίνουν τις δύο πραγματικές συναρτήσεις  $u(x, y) = \operatorname{Re} p_{2c}(z)$  και  $v(x, y) = \operatorname{Im} p_{2c}(z)$  αντίστοιχα. ▲

**Δ2.1.4. Συζυγείς μιγαδικές συναρτήσεις και σχετικά σχόλια**

Στην Παράγραφο Δ1.2.3 είχαμε αναφερθεί στο συζυγή μιγαδικό αριθμό  $\bar{z} = x - iy$  του μιγαδικού αριθμού  $z = x + iy$ . Μπορούμε ασφαλώς να επεκτείνουμε την έννοια αυτή και στις μιγαδικές συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα και για μια μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  (με τις συναρτήσεις  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  πραγματικές) έχουμε

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \iff \quad \overline{f(z)} = u(x, y) - iv(x, y). \quad (2.1.8)$$

Τώρα όμως η παύλα στη συνάρτηση  $\overline{f(z)}$  καλύπτει ολόκληρη τη συνάρτηση  $f(z)$  (μαζί με τη μεταβλητή της  $z$ !). Η έννοια της παύλας αυτής είναι πως κάθε φορά που παρουσιάζεται η φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  στην αρχική συνάρτηση  $f(z)$  πρέπει να αντικαθίσταται με  $-i$  στη συζυγή της  $\overline{f(z)}$ .

Υπήρξαμε μάλλον ασαφείς (όχι εκ προθέσεως βέβαια!) και πρέπει τώρα να επανορθώσουμε. Ας πάρουμε τη συγκεκριμένη μιγαδική συνάρτηση

$$g(z) = z^2 + iz + 3 + 4i = (x + iy)^2 + i(x + iy) + 3 + 4i. \quad (2.1.9)$$

Τί ακριβώς παριστάνει το σύμβολο  $\overline{g(z)}$ ; Μα βέβαια την αντικατάσταση της φανταστικής μονάδας  $i$  (του  $i$ ) από το  $-i$  στη συνάρτηση  $g(z)$ . Δηλαδή

$$\overline{g(z)} = \bar{z}^2 - i\bar{z} + 3 - 4i = (x - iy)^2 - i(x - iy) + 3 - 4i. \quad (2.1.10)$$

Τί κάναμε επομένως; Θέσαμε το  $-i$  στη θέση του  $i$  όχι μόνο στην ίδια, τη ρητή παρουσία της φανταστικής μονάδας  $i$  στη μιγαδική συνάρτηση  $g(z)$ , αλλά και στην ίδια τη μεταβλητή της  $z = x + iy$ .

Συγκεκριμένα θέσαμε  $\bar{z} = x - iy$  στη θέση της μεταβλητής αυτής  $z$ . Άρα αντικαταστάθηκε παντού το  $i$  από το  $-i$  στη συνάρτηση  $g(z)$ . Αυτή είναι η έννοια της μεγάλης παύλας στο σύμβολο  $\overline{g(z)}$ .

Θα μπορούσαμε (σε κάθε περίπτωση που το χρειαζόμαστε) να αντικαταστήσουμε το  $i$  από το  $-i$  μόνο στη μεταβλητή  $z = x + iy$ . Τότε θα είχαμε

$$g(\bar{z}) = g(x - iy) = \bar{z}^2 + i\bar{z} + 3 + 4i = (x - iy)^2 + i(x - iy) + 3 + 4i. \quad (2.1.11)$$

Τώρα βλέπουμε ότι η φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  στην ίδια τη συνάρτηση  $g(z)$  παρέμεινε σαν  $i$ , δεν αντικαταστάθηκε από το  $-i$ . Η αντικατάσταση αυτή έγινε μόνο στη μεταβλητή  $z = x + iy$ . Δίκαια λοιπόν και η παύλα μίκρυνε, περιορίσθηκε στη μεταβλητή  $z$  στο πιο πάνω σύμβολο  $g(\bar{z})$ .

Και το αντίθετο είναι βέβαια απόλυτα εφικτό. Να αντικατασταθεί η φανταστική μονάδα  $i$  από το  $-i$  μόνο στις ρητές εμφανίσεις της στη συνάρτηση  $g(z)$  χωρίς να πειραχθεί καθόλου η μεταβλητή  $z = x + iy$ , δηλαδή χωρίς να αντικατασταθεί από το συζυγή της μιγαδικό αριθμό  $\bar{z} = x - iy$ . Είναι και αυτό δυνατό. Έτσι τώρα έχουμε

$$\bar{g}(z) = z^2 - iz + 3 - 4i = (x + iy)^2 - i(x + iy) + 3 - 4i. \quad (2.1.12)$$

Καταπληκτικά! Με τα σχόλια αυτά ελπίζεται ότι έγινε κατανοητό πως οι τέσσερις μιγαδικοί αριθμοί  $g(z)$ ,  $\overline{g(z)}$ ,  $g(\bar{z})$  και  $\bar{g}(z)$  είναι γενικά διαφορετικοί μεταξύ τους. Με τις επίσης τέσσερις σχέσεις (2.1.9), (2.1.10), (2.1.11) και (2.1.12) αντίστοιχα υπήρξαμε σαφείς στο σημείο αυτό στο παρόν παράδειγμα της μιγαδικής συναρτήσεως  $g(z)$ . Και αν το  $z$  πάρει την πραγματική τιμή  $z = x$ ; Στην ειδική αυτή περίπτωση θα έχουμε φυσικά  $g(\bar{z}) = g(z)$ , απλά επειδή το  $z$  είναι τώρα πραγματικός αριθμός  $z = x$  (δεν περιέχει τη φανταστική μονάδα  $i$ ) και επομένως συμπίπτει με το συζυγή του  $\bar{z} = x$  και πάλι. Και αν η ίδια η συνάρτηση  $g(z)$  δεν περιέχει σε ρητή εμφάνιση τη φανταστική μονάδα  $i$ , όπως συμβαίνει π.χ. στη συνάρτηση

$$g^*(z) = z^2 + 2z + 3 = (x + iy)^2 + 2(x + iy) + 3; \quad (2.1.13)$$

Είναι προφανές ότι σ' αυτήν την περίπτωση (που δεν είναι και τόσο σπάνια) θα έχουμε  $\bar{g}(z) = g(z)$  και επίσης  $\overline{g(z)} = g(\bar{z})$ . Αυτά ισχύουν, επειδή στην ίδια τη συνάρτηση  $g(z)$  (όχι στη μεταβλητή της  $z = x + iy$ ) δεν παρουσιάζεται πουθενά το  $i$ , για να δώσει τη θέση του στο  $-i$ .

Το συμπέρασμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ότι το σύμβολο  $\overline{f(z)}$  (μεγάλη παύλα) δηλώνει την πλήρη αντικατάσταση του  $i$  από το  $-i$  και στην ίδια τη συνάρτηση  $f$  και στη μεταβλητή της  $z = x + iy$ . Είναι επομένως προφανές ότι η μεγάλη αυτή παύλα μπορεί θαυμάσια να διασπασθεί σε δύο μικρότερες: μία για την ίδια τη συνάρτηση  $f$  και μία δεύτερη για τη μεταβλητή της  $z = x + iy$ . Επομένως ισχύει η προφανής σχέση

$$\overline{\overline{f(z)}} = \bar{f}(\bar{z}). \quad (2.1.14)$$

Ας σημειωθεί τέλος ότι ο συζυγής μιγαδικός αριθμός  $\bar{\bar{z}}$  (με δύο παύλες) του συζυγούς μιγαδικού αριθμού  $\bar{z}$  (με μία παύλα) του μιγαδικού αριθμού  $z$  (αυτός είναι χωρίς παύλα) συμπίπτει με το μιγαδικό αριθμό  $z$ , δηλαδή  $\bar{\bar{z}} = z$ . Αυτό συμβαίνει, γιατί η διπλή αντικατάσταση (με τις δύο παύλες) του  $i$  από το  $-i$  το επανέφερε στο  $i$ : προφανώς  $-(-i) = i$ . Δηλαδή οι δύο παύλες αλληλοαναιρούνται. Άρα με αυτήν τη λογική και τη σχέση (2.1.14) ισχύει και ο τύπος

$$\overline{\bar{f}(\bar{z})} = \bar{f}(z), \quad \text{επειδή προφανώς } \bar{\bar{z}} = z. \quad (2.1.15)$$

Δεν είναι έτσι; Είναι! Ας κατανοήσουμε λοιπόν τα σχόλια αυτά και ας είμαστε προσεκτικοί!

Γνωρίζοντας το μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$ , γνωρίζουμε επίσης και το συζυγή του  $\bar{z} = x - iy$ . (Απλά θέτουμε το  $-i$  στη θέση του  $i$  πριν από το φανταστικό μέρος  $y$  του μιγαδικού αριθμού  $z$ .)

Αυτό το δηλώσαμε ρητά στη σχέση (1.2.4). Ένα-δύο βήματα ακόμη. Προσθέτουμε και αφαιρούμε τις δύο σχέσεις (1.2.4). Έτσι διαπιστώνουμε ότι

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (2.1.16)$$

για το πραγματικό μέρος  $x = \operatorname{Re} z$  και το φανταστικό μέρος  $y = \operatorname{Im} z$  αντίστοιχα του μιγαδικού αριθμού  $z = x + iy$ .

Θα ήταν απόλυτα τετριμμένο να παρατηρήσουμε ότι γνωρίζοντας το μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$ , επομένως και το συζυγή του  $\bar{z} = x - iy$ , προσδιορίζουμε το πραγματικό μέρος  $x$  και το φανταστικό μέρος  $y$  του μιγαδικού αριθμού  $z = x + iy$  από τις σχέσεις (2.1.16). Ο στόχος μας είναι κάπως μακρύτερος. Πραγματικά οι στοιχειώδεις τύποι (2.1.16) μας επιτρέπουν κατά κάποιον τρόπο να αντικαταστήσουμε τις δύο πραγματικές μεταβλητές  $x$  και  $y$  από τη μιγαδική μεταβλητή  $z$  και τη συζυγή της  $\bar{z}$ . Άρα, μιλώντας γενικά, μπορούμε να γράψουμε μια πραγματική συνάρτηση  $u(x, y)$  των δύο πραγματικών μεταβλητών  $x$  και  $y$  και σε μιγαδική μορφή, δηλαδή

$$u(x, y) = u\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \equiv u^*(z, \bar{z}) \quad (2.1.17)$$

με τον ταυτόχρονο ορισμό και της νέας συναρτήσεως  $u^*(z, \bar{z}) \equiv u(x, y)$  για  $z = x + iy$ . Μια τέτοια γραφή μας διευκολύνει μερικές φορές, ιδίως κατά την επίλυση της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{ή, καλύτερα,} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{όπου} \quad u = u(x, y) \quad (2.1.18)$$

με τη μετατροπή της στις νέες, τις μιγαδικές μεταβλητές  $z$  και  $\bar{z}$ . Αυτήν τη δυνατότητα θα τη διερευνήσουμε καλύτερα στο επόμενο Κεφάλαιο Δ3.

Τελειώνοντας την ενότητα αυτή ας κάνουμε την παρατήρηση ότι από μαθηματικής απόψεως ο συμβολισμός  $u^*(z, \bar{z})$  είναι γενικά απαράδεκτος. Στη θέση του θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο απλούστερος συμβολισμός  $\hat{u}(z)$ , επειδή ξέροντας το  $z = x + iy$ , ξέρουμε ταυτόχρονα και το  $\bar{z} = x - iy$ . Επομένως η συνάρτηση  $u^*(z, \bar{z})$  είναι ουσιαστικά συνάρτηση μόνο του  $z = x + iy$ , όπως και η συνάρτηση  $h(x) = ax^2 + bx + c$  είναι συνάρτηση μόνο του  $x$  και όχι και του  $x^2$  με άστοχο το συμβολισμό  $h(x, x^2)$  γι' αυτή. (Το  $x^2$  είναι απλά το τετράγωνο του  $x$ , όπως το  $\bar{z} = x - iy$  είναι το  $z = x + iy$  με μείον πριν τη φανταστική μονάδα  $i$ .)

Είναι λογικά αυτά και γίνονται απόλυτα σεβαστά στα μαθηματικά βιβλία (όπως και στα περισσότερα βιβλία για μηχανικούς), αλλά ... Αλλά τί; Στο επόμενο Κεφάλαιο Δ3 θα δούμε πως ο Πολιτικός Μηχανικός (και ο κάθε Μηχανικός και ο Φυσικός γενικότερα) συχνά ενδιαφέρονται για μια συγκεκριμένη κατηγορία μιγαδικών συναρτήσεων που καλούνται αναλυτικές συναρτήσεις. Σ' αυτές τις συναρτήσεις πρέπει οπωσδήποτε να απουσιάζει το  $\bar{z}$  στον τύπο που τις δίνει. Άρα ο συμβολισμός  $f(z)$  μπορεί να ερμηνευθεί και σαν δήλωση απουσίας του  $\bar{z}$  στις αναλυτικές συναρτήσεις, που είναι πρακτικά και οι χρησιμότερες μιγαδικές συναρτήσεις. (Μάλιστα θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι οι μόνες πρακτικά χρήσιμες.)

Επομένως για μιγαδικές συναρτήσεις και του  $z$  και του  $\bar{z}$  δε μπορεί να απαγορευθεί στο Μηχανικό η χρήση του συμβόλου  $f(z, \bar{z})$ . Επίσης το σύμβολο  $f(\bar{z})$  δηλώνει την απουσία του  $z$  στον τύπο υπολογισμού της συναρτήσεως αυτής. Η έννοια είναι ότι μόνο το  $\bar{z}$  είναι παρόν στον τύπο αυτό. Είναι αποδεκτός λοιπόν εδώ και ο συμβολισμός  $f(z, \bar{z})$ , όπως και ο  $f(\bar{z})$ , σε όσες περιπτώσεις κρίνονται χρήσιμοι.

Θα προχωρήσουμε τώρα στο κύριο μέρος του κεφαλαίου αυτού: στον ορισμό και στις ιδιότητες της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως, των μιγαδικών υπερβολικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων και των αντιστρόφων τους μιγαδικών συναρτήσεων.

## Δ2.2. Η ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

### Δ2.2.1. Ορισμός της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως

Ξεκινάμε με την εκθετική συνάρτηση (exponential function)  $e^z \equiv \exp z$ . Μας είναι πολύ γνωστή από τους πραγματικούς αριθμούς  $x$  ( $e^x \equiv \exp x$ ) και στην ειδική περίπτωση καθαρά φανταστικής τιμής  $i\theta$  της μεταβλητής  $z$  (οπότε  $z = i\theta$ ) από τον τύπο του Euler (1.1.4), δηλαδή από τον τύπο

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (2.2.1)$$

Ανάλογα με  $-\theta$  αντί για  $\theta$  στον τύπο του Euler:  $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$ .

Ορίζουμε τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^z$  με βάση τον απλό τύπο

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{με} \quad z = x + iy, \quad (2.2.2)$$

όπου βέβαια τα σύμβολα  $x$  και  $y$  δηλώνουν το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα της μιγαδικής μεταβλητής  $z$ , δηλαδή  $x = \operatorname{Re} z$  και  $y = \operatorname{Im} z$ . Άρα ισχύουν οι σχέσεις

$$\operatorname{Re} e^z = u(x, y) = e^x \cos y, \quad \operatorname{Im} e^z = v(x, y) = e^x \sin y \quad \text{με} \quad e^z = u(x, y) + iv(x, y). \quad (2.2.3)$$

Είναι λογικός ο ορισμός αυτός (2.2.2) της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$ , την οποία θα μπορούσαμε ίσως να αποκαλούμε και απλά εκθετική συνάρτηση εννοώντας το χαρακτηρισμό μιγαδική. Πραγματικά με τον ορισμό αυτό (2.2.2) πετυχαίνουμε τα εξής:

1. Για πραγματικές τιμές του  $z$ :  $z = x$  (με  $y = 0$ ) ο ορισμός (2.2.2) δίνει πραγματικό αποτέλεσμα  $e^z = e^x$ , την πραγματική εκθετική συνάρτηση  $e^x$ , επειδή εδώ έχουμε  $\cos y = \cos 0 = 1$  και  $\sin y = \sin 0 = 0$ . Ειδικότερα για  $z = 0$  παίρνουμε  $e^0 = 1$ . Κατά συνέπεια ο ορισμός (2.2.2) είναι συμβατός με την πραγματική εκθετική συνάρτηση  $e^x$ .
2. Για καθαρά φανταστικές τιμές του  $z$ :  $z = iy$  (τώρα με  $x = 0$ ) ο ίδιος ορισμός (2.2.2) μας δίνει

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad (2.2.4)$$

επειδή τώρα  $e^x = e^0 = 1$ . Ισχύει λοιπόν ο τύπος του Euler (2.2.1), ο οποίος ξαναβρέθηκε εδώ με  $y$  αντί  $\theta$  στη μορφή (2.2.4). Ο ορισμός (2.2.2) σέβεται λοιπόν, λαμβάνει υπόψη και τον τύπο του Euler (1.1.4) ή (2.2.1). Επομένως είμαστε πια βέβαιοι και για τη σωστή χρήση της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$  για καθαρά φανταστικές τιμές  $z = i\theta$  της μεταβλητής  $z$  βάσει του τύπου του Euler. Τη χρήση αυτή ήδη την κάναμε: (α) στις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως, (β) στις μιγαδικές (ή εκθετικές) σειρές Fourier και στο μετασχηματισμό Fourier, ευθύ και αντίστροφο, καθώς και (γ) στον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Αυτά ήδη τα αναφέραμε στις Παραγράφους Δ1.1.4 έως και Δ1.1.7.

3. Επίσης με βάση τον παραπάνω ορισμό (2.2.2) της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$  ισχύει η προσθετική ιδιότητα στους εκθέτες κατά τον πολλαπλασιασμό  $e^{z_1}$  επί  $e^{z_2}$ , δηλαδή

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \quad \text{με} \quad z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}. \quad (2.2.5)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι φυσικά γενίκευση της αντίστοιχης ιδιότητας

$$e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2} \quad (2.2.6)$$

για πραγματικούς εκθέτες  $x_1$  και  $x_2$ . Επομένως η ιδιότητα αυτή συνεχίζει να ισχύει και για μιγαδικούς εκθέτες  $z_1$  και  $z_2$  στη μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^z$ . (Η απόδειξή της αμέσως παρακάτω.)

4. Τέλος ισχύει και η ανάλογη ιδιότητα για το πηλίκο  $e^{z_1}/e^{z_2}$  δύο τιμών  $e^{z_1}$  και  $e^{z_2}$  της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$ , δηλαδή

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2} \quad \text{με} \quad z_{1,2} = x_{1,2} + iy_{1,2}. \quad (2.2.7)$$

### Δ2.2.2. Άθροιση των εκθετών στον πολλαπλασιασμό

Ας αποδείξουμε στο σημείο αυτό την ιδιότητα (2.2.5) της αθροίσεως των εκθετών στον πολλαπλασιασμό δύο εκθετικών συναρτήσεων. (Σημειώνουμε ότι ανάλογη είναι και η απόδειξη της ιδιότητας (2.2.7) της αφαιρέσεως των εκθετών στη διαίρεση δύο εκθετικών συναρτήσεων.)

**Απόδειξη:** Επιθυμούμε να αποδείξουμε την ιδιότητα (2.2.5). Εύλογα χρησιμοποιούμε τον ορισμό (2.2.2) της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως σε συνδυασμό με τις εκφράσεις  $z_1 = x_1 + iy_1$  και  $z_2 = x_2 + iy_2$  για τους εκθέτες. Επομένως, ξεκινώντας από το αριστερό μέλος, έχουμε

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= [e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1)] [e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2)] \\ &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1) (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1 + x_2} [(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)] \\ &= e^{x_1 + x_2} [\cos (y_1 + y_2) + i \sin (y_1 + y_2)] \\ &= e^{z_1 + z_2}. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Στην πιο πάνω απόδειξη πήραμε υπόψη μας τρεις φορές τον ορισμό (2.2.2) της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$ . Αυτό έγινε δύο φορές στην πρώτη γραμμή για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1 = x_1 + iy_1$  και  $z_2 = x_2 + iy_2$  και μία φορά στην τελευταία γραμμή για το μιγαδικό αριθμό  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$  (το άθροισμα). Στην τρίτη γραμμή χρησιμοποιήσαμε επίσης την αντίστοιχη ιδιότητα (2.2.6) για τους πραγματικούς αριθμούς  $x_1$  και  $x_2$ , για την οποία είμαστε βέβαιοι ότι ισχύει από τις γνώσεις μας για την πραγματική εκθετική συνάρτηση  $e^x$ . Στην ίδια, την τρίτη γραμμή πήραμε επίσης υπόψη ότι για τη φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  ισχύει ότι  $i^2 = -1$ . Τέλος στην τέταρτη γραμμή της αποδείξεως αυτής πήραμε υπόψη και τους γνωστούς τριγωνομετρικούς τύπους (1.5.15) και (1.5.16) για το  $\cos (\theta_1 + \theta_2)$  και το  $\sin (\theta_1 + \theta_2)$  αντίστοιχα.  $\square$

Θα τολμούσαμε να πούμε ότι δεν παρουσιάζει καμία ουσιαστική δυσκολία η πιο πάνω απόδειξη (2.2.8) της ιδιότητας (2.2.5) στον πολλαπλασιασμό δύο εκθετικών συναρτήσεων  $e^{z_1}$  επί  $e^{z_2}$ . Απολύτως ανάλογα ισχύουν και για την ιδιότητα (2.2.7) στη διαίρεση δύο εκθετικών συναρτήσεων.

### Δ2.2.3. Μέτρο και όρισμα

Και πάλι με βάση τον ορισμό (2.2.2) της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$  διαπιστώνουμε άμεσα για το μέτρο της (την απόλυτο τιμή της)  $|e^z|$  ότι

$$|e^z| = |e^x (\cos y + i \sin y)| = |e^x| |\cos y + i \sin y| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x \cdot 1 = e^x. \quad (2.2.9)$$

Στη συνέχεια για το όρισμα  $\arg e^z$  της ίδιας εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$  συνάγουμε ότι

$$\arg e^z = \tan^{-1} \left( \frac{\operatorname{Im} e^z}{\operatorname{Re} e^z} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{e^x \sin y}{e^x \cos y} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\sin y}{\cos y} \right) = \tan^{-1} (\tan y) = y \quad (2.2.10)$$

εννοείται συν  $2n\pi$  με το  $n$  ακέραιο αριθμό. Άρα  $\arg e^z = y + 2n\pi$ .

### Δ2.2.4. Περιοδικότητα και εφαρμογές της

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η περιοδικότητα της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$  με καθαρά φανταστική περίοδο  $T = 2\pi i$ , δηλαδή

$$e^{z+nT} = e^z \quad \text{με το } n \text{ ακέραιο αριθμό και } T = 2\pi i, \quad \text{οπότε } e^{z+2n\pi i} = e^z. \quad (2.2.11)$$

Ίσως η περιοδικότητα αυτή να μας εκπλήσσει λίγο, επειδή η πραγματική εκθετική συνάρτηση  $e^x$  δεν είναι περιοδική, η μιγαδική όμως είναι και μάλιστα με καθαρά φανταστική περίοδο  $T = 2\pi i$ .

**Απόδειξη:** Θα αποδείξουμε εύκολα τη σχέση περιοδικότητας  $e^{z+2n\pi i} = e^z$ , που μόλις αναφέραμε: δεύτερη σχέση (2.2.11). Προς το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ξανά τον ορισμό (2.2.2) της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$ , τον υπενθυμίζουμε

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \quad \text{με} \quad z = x + iy. \quad (2.2.12)$$

Με βάση τον ορισμό αυτό έχουμε την εξής απλή απόδειξη:

$$\begin{aligned} e^{z+2n\pi i} &= e^{x+iy+2n\pi i} = e^{x+i(y+2n\pi)} \\ &= e^x[\cos(y+2n\pi) + i \sin(y+2n\pi)] = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Στη σύντομη αυτή απόδειξη χρησιμοποιήσαμε βέβαια επίσης και τη γνωστή περιοδικότητα (τώρα με πραγματική περίοδο  $T_0 = 2\pi$ ) των τριγωνομετρικών συναρτήσεων συνημίτονο και ημίτονο, δηλαδή ότι

$$\cos(y+2n\pi) = \cos y, \quad \sin(y+2n\pi) = \sin y. \quad (2.2.14)$$

Το συμπέρασμά μας είναι ότι η μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^z$  έχει περίοδο  $T = 2\pi i$ . Επιπλέον μάλιστα δεν είναι ούτε άρτια συνάρτηση, αλλ' ούτε και περιττή. Άρα είναι η κατάλληλη προς χρήση συνάρτηση για τον Πολιτικό Μηχανικό στις περιπτώσεις που πρέπει να επιλύσει περιοδικά προβλήματα τόσο στη γεωμετρία όσο και στις συνοριακές συνθήκες, ας πούμε με περίοδο κατά τον άξονα  $Oy$  ίση με  $T = iH$ . Στην περίπτωση αυτή η μιγαδική εκθετική συνάρτηση

$$h(z) = e^{2\pi z/H} \equiv \exp\left(\frac{2\pi z}{H}\right) \quad (2.2.15)$$

είναι η σωστή συνάρτηση που πρέπει να χρησιμοποιήσει ο Πολιτικός Μηχανικός. Αυτό συμβαίνει, επειδή με το  $n$  ακέραιο αριθμό

$$\begin{aligned} h(z + niH) &= \exp\left(\frac{2\pi(z + niH)}{H}\right) = \exp\left(\frac{2\pi z + 2n\pi iH}{H}\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi z}{H} + 2n\pi i\right) = \exp\left(\frac{2\pi z}{H}\right) = h(z), \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

επειδή η βασική μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^z \equiv \exp z$  είναι περιοδική με περίοδο  $T = 2\pi i$  με βάση τις σχέσεις (2.2.11).

Τέτοια περιοδικά προβλήματα (με περίοδο  $H$  κατά τον άξονα  $Oy$ , δηλαδή ουσιαστικά  $T = iH$ ) παρουσιάζονται στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Στη Ρευστομηχανική πρώτα μπορεί να υπάρχει ένα περιοδικό σύστημα εμποδίων σε επίπεδη μόνιμη ροή παράλληλη προς τον άξονα  $Ox$  και ομοιόμορφη μακριά από τα εμπόδια, δηλαδή για  $x \rightarrow \pm\infty$ . Παρουσιάζονται επίσης στην Ελαστικότητα: περιοδικό σύστημα οπών ή εγκλεισμάτων και στη Μηχανική της Θραύσεως: περιοδική διάταξη ρωγμών.

Φυσικά με την ίδια λογική η μιγαδική συνάρτηση

$$h^*(z) = e^{2\pi iz/H} \equiv \exp\left(\frac{2\pi iz}{H}\right) \quad (2.2.17)$$

(τώρα και με τη φανταστική μονάδα  $i$  στον εκθέτη!) είναι και αυτή περιοδική, αλλά τώρα με πραγματική περίοδο  $T = H$  κατά μήκος του πραγματικού άξονα  $Ox$ . Αυτό ισχύει, γιατί με το  $n$  ακέραιο αριθμό

$$\begin{aligned} h^*(z + nH) &= \exp\left(\frac{2\pi i(z + nH)}{H}\right) = \exp\left(\frac{2\pi iz + 2\pi inH}{H}\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi iz}{H} + 2n\pi i\right) = \exp\left(\frac{2\pi iz}{H}\right) = h^*(z). \end{aligned} \quad (2.2.18)$$



Ασφαλώς περιοδικότητα παρουσιάζεται και στις συναρτήσεις συνημίτονο και ημίτονο: (α) υπερβολικό συνημίτονο και υπερβολικό ημίτονο με περιοδικότητα κατά το φανταστικό άξονα  $Oy$  και (β) τριγωνομετρικό συνημίτονο και τριγωνομετρικό ημίτονο με περιοδικότητα κατά τον πραγματικό άξονα  $Ox$ . Τις συναρτήσεις αυτές θα τις ορίσουμε αμέσως πιο κάτω. Πρόκειται όμως είτε για άρτιες συναρτήσεις (τα συνημίτονα) είτε για περιττές (τα ημίτονα), ενώ η εκθετική συνάρτηση  $e^z \equiv \exp z$  δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή. Είναι επομένως γενικότερη στην εφαρμογή της.

## Δ2.3. ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### Δ2.3.1. Ορισμοί

Ακριβώς όπως κάναμε στις Πραγματικές Συναρτήσεις, έτσι κι εδώ στις Μιγαδικές Συναρτήσεις (συναρτήσεις της μιγαδικής μεταβλητής  $z = x + iy$ ) μπορούμε να ορίσουμε τις υπερβολικές συναρτήσεις. Πρόκειται για τις υπερβολικές συναρτήσεις συνημίτονο ( $\cosh z$ ), ημίτονο ( $\sinh z$ ), εφαπτομένη ( $\tanh z$ ), συνεφαπτομένη ( $\coth z$ ), τέμνουσα ( $\operatorname{sech} z$ ) και συντέμνουσα ( $\operatorname{csch} z$ ). Για τις τέσσερις πρώτες από αυτές, που είναι και οι σημαντικότερες, έχουμε τους ορισμούς

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} \quad (2.3.1)$$

με  $z = x + iy$  τη μιγαδική μεταβλητή. Οι ορισμοί αυτοί είναι ολόιδιοι με εκείνους που ήδη γνωρίζουμε από τις Πραγματικές Συναρτήσεις. Καμία διαφορά! Άρα είναι εύλογο να περιμένουμε (και αυτό συμβαίνει!) να ισχύουν και οι ίδιες ιδιότητες, οι ίδιοι τύποι στους σχετικούς υπολογισμούς.

### Δ2.3.2. Πραγματικά και φανταστικά μέρη

Από τους ορισμούς αυτούς (2.3.1) μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των μιγαδικών υπερβολικών συναρτήσεων για μια τιμή  $z = x + iy$  της μιγαδικής μεταβλητής. Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις αυτές με τη βοήθεια μόνο γνωστών πραγματικών συναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα για  $z = x + iy$  οι τύποι υπολογισμού των μιγαδικών υπερβολικών συναρτήσεων συνημίτονο ( $\cosh z$ ) και ημίτονο ( $\sinh z$ ) είναι οι εξής:

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y, \quad (2.3.2)$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y. \quad (2.3.3)$$

Με τον τρόπο αυτό αρκεί να υπολογίσουμε τις πραγματικές συναρτήσεις  $\cosh x$ ,  $\sinh x$ ,  $\cos y$  και  $\sin y$ , ώστε να υπολογίσουμε κατόπιν και τις μιγαδικές συναρτήσεις  $\cosh z$  και  $\sinh z$ . Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τους σχετικούς τύπους (2.3.1), μπορούμε να υπολογίσουμε και τις μιγαδικές συναρτήσεις  $\tanh z = \sinh z / \cosh z$  και  $\coth z = \cosh z / \sinh z$ .

Ας σημειώσουμε επίσης ότι είναι απόλυτα προφανές από τους δύο πιο πάνω τύπους (2.3.2) και (2.3.3) ότι τα πραγματικά μέρη  $u_{c,s}(x, y)$  και τα φανταστικά μέρη  $v_{c,s}(x, y)$  των δύο μιγαδικών συναρτήσεων  $\cosh z$  και  $\sinh z$  δίνονται από τους τύπους

$$\cosh z = u_c(x, y) + iv_c(x, y) \implies u_c(x, y) = \cosh x \cos y \quad \text{και} \quad v_c(x, y) = \sinh x \sin y, \quad (2.3.4)$$

$$\sinh z = u_s(x, y) + iv_s(x, y) \implies u_s(x, y) = \sinh x \cos y \quad \text{και} \quad v_s(x, y) = \cosh x \sin y. \quad (2.3.5)$$

Εδώ θα περιορίσουμε την προσοχή μας στην απόδειξη του τύπου (2.3.2) για τη μιγαδική συνάρτηση  $\cosh z$ . (Η απόδειξη του τύπου (2.3.3) για τη μιγαδική συνάρτηση  $\sinh z$  είναι εντελώς παρόμοια και για οικονομία χώρου θα την παραλείψουμε.)

**Απόδειξη:** Ξεκινάμε από το αριστερό μέλος  $\cosh z$  του τύπου (2.3.2) και φυσικά με  $z = x + iy$ . Θα εφαρμόσουμε στην αρχή απλά τον ορισμό (2.3.1) της μιγαδικής αυτής συναρτήσεως  $\cosh z$ . Στη συνέχεια θα εκτελέσουμε τις σχετικές απλές πράξεις λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$e^{\pm iy} = \cos y \pm i \sin y \quad (2.3.6)$$

σύμφωνα με τους τύπους του Euler (1.1.4), ισοδύναμα με τον ορισμό (2.2.2) της μιγαδικής εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$  για καθαρά φανταστική τιμή  $z = iy$  (με πραγματικό μέρος  $x = 0$ ) της μιγαδικής μεταβλητής  $z$ . Στο τέλος θα χρησιμοποιήσουμε και τους γνωστούς πραγματικούς τύπους

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (2.3.7)$$

δηλαδή τους σχετικούς τύπους (2.3.1) για πραγματικές τιμές  $z = x$  της μιγαδικής μεταβλητής  $z$ .

Ας γίνουμε τώρα σαφέστεροι παρουσιάζοντας τη συνολική σχετική απλή απόδειξη σύμφωνα με τις πιο πάνω σκέψεις:

$$\begin{aligned} \cosh z = \cosh(x + iy) &= \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} = \frac{e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)}{2} \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y + i \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin y = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

### Δ2.3.3. Μερικές ακόμη ιδιότητες και αποδείξεις

Δεν είναι σκόπιμο να αναλώσουμε πολλές σελίδες σε καταγραφή και αποδείξεις ιδιοτήτων των μιγαδικών υπερβολικών συναρτήσεων, που μόλις ορίσαμε. Τόσο οι ιδιότητες όσο και οι αποδείξεις τους είναι απόλυτα ανάλογες με εκείνες που ήδη γνωρίζουμε από τις Πραγματικές Συναρτήσεις. Και στ' αλήθεια οι πιο πάνω μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις ανάγονται στις αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις, αρκεί να έχουμε πραγματική μεταβλητή  $z = x$  (με φανταστικό μέρος  $y = 0$ ).

Παραδείγματος χάρη, από τους ορισμούς (2.3.1) είναι προφανείς οι ιδιότητες

$$\tanh z = \frac{1}{\coth z}, \quad \coth z = \frac{1}{\tanh z}, \quad \tanh z \coth z = 1, \quad (2.3.9)$$

εφόσον βέβαια οι ποσότητες αυτές δε μηδενίζονται ή απειρίζονται. Συναφής είναι και η ιδιότητα:

■ **ΙΔΙΟΤΗΤΑ:** Για τις συναρτήσεις  $\tanh z$  (υπερβολική εφαπτομένη) και  $\coth z$  (υπερβολική συνεφαπτομένη) ισχύουν οι τύποι

$$\tanh z = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \quad \coth z = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}. \quad (2.3.10)$$

**Απόδειξη:** Χρησιμοποιούμε τους ορισμούς (2.3.1) των συναρτήσεων  $\tanh z$  και  $\coth z$  μέσω των συναρτήσεων  $\sinh z$  και  $\cosh z$ . Σ' αυτούς τους ορισμούς (2.3.1) χρησιμοποιούμε στη συνέχεια και τους ορισμούς (2.3.1) των συναρτήσεων  $\sinh z$  και  $\cosh z$  με βάση τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση. Ακολουθούν οι λεπτομέρειες της αποδείξεως για τη μιγαδική συνάρτηση  $\tanh z$ :

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{(e^z - e^{-z})/2}{(e^z + e^{-z})/2} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}. \quad (2.3.11)$$

Στο τέλος κάναμε πολλαπλασιασμό αριθμητή και παρονομαστή επί  $e^z$  και πήραμε υπόψη ότι

$$e^z \cdot e^z = e^{z+z} = e^{2z} \quad \text{και επίσης ότι} \quad e^z \cdot e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1 \quad (2.3.12)$$

με βάση την προσθετική ιδιότητα (2.2.5) στους εκθέτες (σε γινόμενο  $e^{z_1}$  επί  $e^{z_2}$ ) για τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^z$ . □

■ **ΙΔΙΟΤΗΤΑ:** Για το μιγαδικό υπερβολικό συνημίτονο  $\cosh z$  και το μιγαδικό υπερβολικό ημίτονο  $\sinh z$  η γνωστή σχέση (από τις αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις) που τα συνδέει είναι η εξής:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1. \quad (2.3.13)$$

Βέβαια στις υπερβολικές συναρτήσεις έχουμε πλην (διαφορά) στο αριστερό μέλος, ενώ αντίθετα στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουμε συν (άθροισμα) στην ίδια θέση! Για να κατανοήσουμε

τις απλές πράξεις που απαιτούνται σε αποδείξεις αυτού του είδους (που είναι καθαρά υπολογιστικές αποδείξεις χωρίς θεωρητικό ενδιαφέρον), παραθέτουμε τη σχετική απόδειξη:

**Απόδειξη:** Αυτή βασίζεται απλά και πάλι στους ορισμούς (2.3.1) των δύο συναρτήσεων  $\cosh z$  και  $\sinh z$  και είναι η εξής ξεκινώντας από το αριστερό μέλος και καταλήγοντας στο δεξιό:

$$\begin{aligned} \cosh^2 z - \sinh^2 z &= \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 - \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2z} + e^{-2z} + 2}{4} - \frac{e^{2z} + e^{-2z} - 2}{4} = \frac{2}{4} - \frac{-2}{4} = \frac{2+2}{4} = 1. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Εύκολη, πολύ εύκολη η απόδειξη αυτή! Ακόμη και ένα πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών, όπως είναι η *Mathematica* και η *Maxima*, θα μπορούσε θαυμάσια να την είχε εκτελέσει με επιτυχία.  $\square$

■ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:** Η συνάρτηση  $\cosh z$  είναι άρτια, ενώ η συνάρτηση  $\sinh z$  περιττή, δηλαδή

$$\cosh(-z) = \cosh z, \quad \sinh(-z) = -\sinh z. \quad (2.3.15)$$

**Αποδείξεις:** Είναι και οι δύο άμεσες και πάλι με βάση τους ορισμούς (2.3.1):

$$\cosh(-z) = \frac{e^{-z} + e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z, \quad (2.3.16)$$

$$\sinh(-z) = \frac{e^{-z} - e^{-(-z)}}{2} = \frac{e^{-z} - e^z}{2} = -\frac{e^z - e^{-z}}{2} = -\sinh z. \quad (2.3.17)$$

■ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:** Για το άθροισμα  $z_1 + z_2$  δύο μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$  ισχύουν οι τύποι

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2, \quad (2.3.18)$$

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2. \quad (2.3.19)$$

► **Παρατήρηση Δ2.1:** Πρόκειται για τους ίδιους ακριβώς τύπους που ισχύουν και στις αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις  $\cosh(x_1 + x_2)$  και  $\sinh(x_1 + x_2)$ . Επίσης οι τύποι αυτοί είναι ανάλογοι με εκείνους που ισχύουν για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos(x_1 + x_2)$  και  $\sin(x_1 + x_2)$ , δηλαδή τους τύπους (1.5.15) και (1.5.16) στο Κεφάλαιο Δ1 αντίστοιχα. (Υπάρχει όμως ένα μείον διαφορά στον πρώτο από τους τύπους αυτούς.)

**Απόδειξη:** Θα περιορισθούμε στην απόδειξη του πρώτου τύπου (2.3.18) για το υπερβολικό συνημίτονο  $\cosh(z_1 + z_2)$ . Ανάλογη είναι και η απόδειξη του δεύτερου τύπου (2.3.19) για το υπερβολικό ημίτονο  $\sinh(z_1 + z_2)$ . Για την απόδειξη αυτή είναι σαφώς ευκολότερο να ξεκινήσουμε από το δεξιό μέλος του τύπου (2.3.18). Χρησιμοποιούμε φυσικά τους ορισμούς (2.3.1) των συναρτήσεων  $\cosh z$  και  $\sinh z$  και εκτελούμε τους αλγεβρικούς υπολογισμούς που απαιτούνται. Στο τέλος χρησιμοποιούμε και πάλι τον ορισμό (2.3.1), αλλά τούτη τη φορά για τη συνάρτηση  $\cosh(z_1 + z_2)$ , δηλαδή με  $z = z_1 + z_2$ . Καταλήγουμε έτσι στο αριστερό μέλος  $\cosh(z_1 + z_2)$  του τύπου (2.3.18).

Ακολουθούν οι υπολογιστικές λεπτομέρειες της σχετικής αποδείξεως:

$$\begin{aligned} \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2 &= \frac{e^{z_1} + e^{-z_1}}{2} \frac{e^{z_2} + e^{-z_2}}{2} + \frac{e^{z_1} - e^{-z_1}}{2} \frac{e^{z_2} - e^{-z_2}}{2} \\ &= \frac{e^{z_1+z_2} + e^{z_1-z_2} + e^{-z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2}}{4} + \frac{e^{z_1+z_2} - e^{z_1-z_2} - e^{-z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2}}{4} \\ &= \frac{2e^{z_1+z_2} + 2e^{-z_1-z_2}}{4} = \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2}}{2} = \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \cosh(z_1 + z_2). \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Στη δεύτερη γραμμή της αποδείξεως αυτής λάβαμε υπόψη μας και την ιδιότητα (2.2.5), δηλαδή ότι  $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$  για τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^z$ .  $\square$

Δε θα παραθέσουμε άλλες ιδιότητες των μιγαδικών υπερβολικών συναρτήσεων. Θα προχωρήσουμε τώρα στις αντίστοιχες μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Στη συνέχεια, μετά και την εισαγωγή της μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως  $\ln z$  (ή ισοδύναμα  $\log z$ ) θα έχουμε την ευκαιρία να αναφερθούμε σύντομα και στις μιγαδικές αντίστροφες υπερβολικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

## Δ2.4. ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### Δ2.4.1. Ορισμοί

Εντελώς ανάλογες με τις μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις είναι και οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, οι οποίες μερικές φορές καλούνται και κυκλικές συναρτήσεις. Και αυτές αποτελούν απλή επέκταση των πραγματικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων στις μιγαδικές μορφές τους, εδώ και πάλι με τη χρήση της μιγαδικής μεταβλητής  $z = x + iy$ . Μπορούμε έτσι να ορίσουμε τις μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις συνημίτονο ( $\cos z$ ), ημίτονο ( $\sin z$ ), εφαπτομένη ( $\tan z$ ), συνεφαπτομένη ( $\cot z$ ), τέμνουσα ( $\sec z$ ) και συντέμνουσα ( $\csc z$ ). Για τις τέσσερις πρώτες από αυτές, που είναι και οι σημαντικότερες, έχουμε τους ακόλουθους ορισμούς τους:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad (2.4.1)$$

με  $z = x + iy$  τη μιγαδική μεταβλητή.

Οι ορισμοί αυτοί είναι εντελώς ανάλογοι με τους ορισμούς (2.3.1) των αντίστοιχων μιγαδικών υπερβολικών συναρτήσεων. Οι μόνες διαφορές αφορούν: (α) στην εμφάνιση της φανταστικής μονάδας  $i = \sqrt{-1}$  πριν τον εκθέτη  $\pm z$  (δηλαδή τώρα  $\pm iz$ ) στις εκθετικές συναρτήσεις  $e^{\pm iz}$  που παρουσιάζονται στους ορισμούς αυτών και (β) στην παρουσία του  $i$  στον παρονομαστή της ημιτονικής συναρτήσεως  $\sin z$ . Δεν υπάρχει καμία άλλη διαφορά! Υπάρχει επίσης απόλυτη αναλογία και με τις αντίστοιχες πραγματικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις (σ' αυτές με πραγματική τιμή της μεταβλητής  $z$ , δηλαδή με  $z = x$ , ενώ  $y = 0$ ). Άρα είναι εύλογο να περιμένουμε (και πραγματικά αυτό συμβαίνει!) να ισχύουν και οι ίδιες ιδιότητες, οι ίδιοι τύποι στους σχετικούς υπολογισμούς.

### Δ2.4.2. Πραγματικά και φανταστικά μέρη

Όπως ήδη κάναμε στις μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις, έτσι κι εδώ στις μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις από τους παραπάνω ορισμούς (2.4.1) μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε τα πραγματικά και τα φανταστικά μέρη των συναρτήσεων αυτών για μια τιμή  $z = x + iy$  της μιγαδικής μεταβλητής. Άρα μπορούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις αυτές με τη βοήθεια μόνο γνωστών πραγματικών συναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα για  $z = x + iy$  οι τύποι υπολογισμού των μιγαδικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων συνημίτονο ( $\cos z$ ) και ημίτονο ( $\sin z$ ) είναι οι εξής:

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \quad (2.4.2)$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y. \quad (2.4.3)$$

Με τον τρόπο αυτό αρκεί να υπολογίσουμε τις πραγματικές συναρτήσεις  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\cosh y$  και  $\sinh y$ , ώστε να υπολογίσουμε τις μιγαδικές συναρτήσεις  $\cos z$  και  $\sin z$ . Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τους σχετικούς τύπους (2.4.1), μπορούμε να υπολογίσουμε και τις μιγαδικές συναρτήσεις  $\tan z = \sin z / \cos z$  και  $\cot z = \cos z / \sin z$ .

Οι αποδείξεις των τύπων αυτών (2.4.2) και (2.4.3) είναι απλές και απόλυτα ανάλογες με την απόδειξη (2.3.8), που έχουμε ήδη παραθέσει για τη συνάρτηση  $\cosh z$ . Επομένως παραλείπονται.

### Δ2.4.3. Μερικές ακόμη ιδιότητες και αποδείξεις

Όπως κάναμε και στις μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις στην προηγούμενη Ενότητα Δ2.3, και πάλι δεν είναι φρόνιμο να αναλώσουμε πολλές σελίδες σε καταγραφή και αποδείξεις ιδιοτήτων

των μιγαδικών τριγωνομετρικών (ή κυκλικών) συναρτήσεων που μόλις ορίσαμε. Επαναλαμβάνουμε ότι οι σχετικές ιδιότητες είναι ανάλογες με εκείνες που ήδη γνωρίζουμε από τις Πραγματικές Συναρτήσεις: την Τριγωνομετρία, αν και τώρα χρησιμοποιείται στους ορισμούς (2.4.1) η μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^{\pm iz}$ .

Παραδείγματος χάρι, από τους ορισμούς αυτούς (2.4.1) είναι προφανείς οι ιδιότητες

$$\tan z = \frac{1}{\cot z}, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z}, \quad \tan z \cot z = 1, \quad (2.4.4)$$

εφόσον βέβαια οι ποσότητες αυτές δε μηδενίζονται ή απειρίζονται. (Ακριβώς τα ίδια είδαμε ότι ισχύουν και στις μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις.) Σχετική είναι και η ιδιότητα:

■ **ΙΔΙΟΤΗΤΑ:** Για τις συναρτήσεις  $\tan z$  (εφαπτομένη) και  $\cot z$  (συνεφαπτομένη) ισχύουν οι τύποι

$$\tan z = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}, \quad \cot z = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}. \quad (2.4.5)$$

**Απόδειξη:** Χρησιμοποιούμε τους ορισμούς (2.4.1) των συναρτήσεων  $\tan z$  και  $\cot z$  μέσω των συναρτήσεων  $\sin z$  και  $\cos z$ . Σ' αυτούς τους ορισμούς χρησιμοποιούμε στη συνέχεια και τους ορισμούς (2.4.1) των συναρτήσεων  $\sin z$  και  $\cos z$  κι εδώ με βάση τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση. Παραθέτουμε τις λεπτομέρειες για τη μιγαδική συνάρτηση  $\cot z$ :

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})/2}{(e^{iz} - e^{-iz})/(2i)} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}. \quad (2.4.6)$$

Στο τέλος κάναμε πολλαπλασιασμό αριθμητή και παρονομαστή επί  $e^{iz}$  και πήραμε υπόψη ότι

$$e^{iz} \cdot e^{iz} = e^{iz+iz} = e^{2iz} \quad \text{και επίσης ότι} \quad e^{iz} \cdot e^{-iz} = e^{iz-iz} = e^0 = 1 \quad (2.4.7)$$

και πάλι με βάση την προσθετική ιδιότητα (2.2.5) στους εκθέτες για το γινόμενο  $e^{z_1}$  επί  $e^{z_2}$  δύο μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων  $e^{z_1}$  και  $e^{z_2}$ . □

■ **ΙΔΙΟΤΗΤΑ:** Για το μιγαδικό συνημίτονο  $\cos z$  και το μιγαδικό ημίτονο  $\sin z$  η γνωστή σχέση (από τις πραγματικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις) που τα συνδέει είναι η εξής:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1. \quad (2.4.8)$$

Για να κατανοήσουμε τις απλές πράξεις που απαιτούνται σε αποδείξεις αυτού του είδους (επαναλαμβάνουμε ότι είναι καθαρά υπολογιστικές αποδείξεις), παραθέτουμε τη σχετική απόδειξη:

**Απόδειξη:** Αυτή βασίζεται ξανά απλά στους ορισμούς (2.4.1) των συναρτήσεων  $\cos z$  και  $\sin z$  και είναι η ακόλουθη ξεκινώντας ξανά από το αριστερό μέλος και καταλήγοντας στο δεξιό:

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} + 2}{4} - \frac{e^{2iz} + e^{-2iz} - 2}{4} = \frac{2}{4} - \frac{-2}{4} = \frac{2+2}{4} = 1. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

Πήραμε επίσης υπόψη μας και ότι  $i^2 = -1$ . Εύκολη, πολύ εύκολη η απόδειξη αυτή! Και πάλι ακόμη και ένα πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών, όπως είναι η *Mathematica* και η *Maxima*, θα μπορούσε να την είχε εκτελέσει εξίσου καλά με τον άνθρωπο και μάλιστα χωρίς τον κίνδυνο υπολογιστικών λαθών! □

■ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:** Η συνάρτηση  $\cos z$  είναι άρτια, ενώ η συνάρτηση  $\sin z$  περιττή, δηλαδή

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z. \quad (2.4.10)$$

**Αποδείξεις:** Είναι και οι δύο άμεσες και πάλι με βάση τους ορισμούς (2.4.1):

$$\cos(-z) = \frac{e^{-iz} + e^{-(-iz)}}{2} = \frac{e^{-iz} + e^{iz}}{2} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \quad (2.4.11)$$

$$\sin(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{-(-iz)}}{2i} = \frac{e^{-iz} - e^{iz}}{2i} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z. \quad (2.4.12)$$

■ **ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:** Για το άθροισμα  $z_1 + z_2$  δύο μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$  ισχύουν οι τύποι

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad (2.4.13)$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2. \quad (2.4.14)$$

► **Παρατήρηση Δ2.2:** Πρόκειται για τους ίδιους τύπους (1.5.15) και (1.5.16) στο Κεφάλαιο Δ1, που ισχύουν και στις αντίστοιχες πραγματικές συναρτήσεις  $\cos(\theta_1 + \theta_2)$  και  $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ . Επιπλέον οι τύποι αυτοί (2.4.13) και (2.4.14) είναι ανάλογοι με τους τύπους (2.3.18) και (2.3.19) αντίστοιχα, οι οποίοι ισχύουν για τις μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις  $\cosh(z_1 + z_2)$  και  $\sinh(z_1 + z_2)$ . Εντούτοις υπάρχει μία διαφορά: τώρα έχουμε πλην αντί για συν στον πρώτο τύπο: στον τύπο (2.4.13).

**Απόδειξη:** Θα περιορισθούμε στην απόδειξη του δεύτερου τύπου, του τύπου (2.4.14), για το ημίτονο αθροίσματος  $\sin(z_1 + z_2)$ . Προηγουμένως στις υπερβολικές συναρτήσεις είχαμε κάνει την απόδειξη του τύπου για το υπερβολικό συνημίτονο  $\cosh(z_1 + z_2)$ . Εδώ θα παραθέσουμε την απόδειξη για το τριγωνομετρικό ημίτονο  $\sin(z_1 + z_2)$ . Ανάλογη βέβαια είναι και η απόδειξη του πρώτου τύπου (2.4.13) για το τριγωνομετρικό συνημίτονο  $\cos(z_1 + z_2)$ . Για την απόδειξη αυτή και πάλι είναι πολύ καλύτερα να ξεκινήσουμε από το δεξιό μέλος του τύπου (2.4.14). Χρησιμοποιούμε τους ορισμούς (2.4.1) των συναρτήσεων  $\cos z$  και  $\sin z$  και απλά εκτελούμε τους αλγεβρικούς υπολογισμούς που απαιτούνται. Στο τέλος χρησιμοποιούμε και πάλι τον ορισμό (2.4.1), τώρα όμως για τη συνάρτηση  $\sin(z_1 + z_2)$ , δηλαδή με  $z = z_1 + z_2$ . Με τον τρόπο αυτό καταλήγουμε στο αριστερό μέλος  $\sin(z_1 + z_2)$  του προς απόδειξη τύπου (2.4.14).

Ακολουθούν οι υπολογιστικές λεπτομέρειες της σχετικής αποδείξεως:

$$\begin{aligned} \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} + e^{i(z_1-z_2)} - e^{i(-z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} + \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{i(z_1-z_2)} + e^{i(-z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} \\ &= \frac{2e^{i(z_1+z_2)} - 2e^{-i(z_1+z_2)}}{4i} = \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2). \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

Πήραμε ξανά υπόψη τον τύπο (2.2.5):  $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$  στη δεύτερη γραμμή της αποδείξεως. □

Δε θα παραθέσουμε άλλες ιδιότητες των μιγαδικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Αυτό δεν έχει απολύτως κανένα νόημα. Μπορούμε όμως να αναφέρουμε σύντομα τις πολύ απλές, αλλά και τόσο ενδιαφέρουσες και λίγο απροσδόκητες σχέσεις που συνδέουν τις μιγαδικές υπερβολικές και τις μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις και αυτό ακριβώς σκοπεύουμε να κάνουμε τώρα!

#### Δ2.4.4. Σχέσεις μεταξύ των μιγαδικών υπερβολικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Οι σχέσεις αυτές είναι πραγματικά απίστευτα απλές, ακριβώς όπως και οι αποδείξεις τους. Συγκεκριμένα ισχύουν οι σχέσεις

$$\cosh(iz) = \cos z, \quad \cos(iz) = \cosh z, \quad \sinh(iz) = i \sin z, \quad \sin(iz) = i \sinh z. \quad (2.4.16)$$

**Απόδειξη:** Θα αποδείξουμε πρώτα τις δύο πρώτες από τις σχέσεις αυτές. Χρειάζεται απλά να λάβουμε υπόψη μας τους ορισμούς (2.3.1) και (2.4.1) για τις μιγαδικές συναρτήσεις υπερβολικό και τριγωνομετρικό συνημίτονο αντίστοιχα. Έτσι έχουμε

$$\cosh(iz) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, \quad (2.4.17)$$

$$\cos(iz) = \frac{e^{i^2z} + e^{-i^2z}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cosh z, \quad (2.4.18)$$

επειδή  $i^2 = -1$ . Θα αποδείξουμε τώρα με τον ίδιο ακριβώς τρόπο την τρίτη και την τέταρτη από τις σχέσεις (2.4.16), οι οποίες αφορούν στις μιγαδικές συναρτήσεις υπερβολικό και τριγωνομετρικό ημίτονο. Και πάλι με βάση τους ορισμούς (2.3.1) και (2.4.1) διαπιστώνουμε ότι

$$\sinh(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \sin z, \quad (2.4.19)$$

$$\sin(iz) = \frac{e^{i^2z} - e^{-i^2z}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = -\frac{1}{i} \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \frac{e^z - e^{-z}}{2} = i \sinh z, \quad (2.4.20)$$

αφού  $1/i = i/i^2 = i/(-1) = -i$ . Στ' αλήθεια ήσαν πολύ εύκολες και οι τέσσερις αυτές αποδείξεις!  $\square$

Θα προχωρήσουμε τώρα στο πιο ενδιαφέρον θέμα της εισαγωγής της μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως  $\ln z$  (ή  $\log z$ ). Στη συνέχεια θα έχουμε την ευκαιρία να αναφερθούμε σύντομα και στις αντίστροφες μιγαδικές υπερβολικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

## Δ2.5. Η ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

### Δ2.5.1. Ορισμός

Για το μιγαδικό αριθμό  $z = re^{i\theta}$  (σε πολική μορφή) ορίζουμε το μιγαδικό λογάριθμο του  $\ln z$  (ή  $\log z$ : φυσικό λογάριθμο με βάση τον αριθμό  $e \approx 2.71828$ , όχι το 10) μέσω του απλού τύπου

$$\ln z = \ln r + i\theta. \quad (2.5.1)$$

Αν θέλουμε, ξαναγράφουμε τον τύπο αυτό και στην ισοδύναμη μορφή του

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z \quad (2.5.2)$$

με  $|z| = r$  το μέτρο (ή απόλυτο τιμή) του μιγαδικού αριθμού  $z = re^{i\theta}$  και  $\theta = \arg z$  το όρισμα (argument) του ίδιου μιγαδικού αριθμού. Κατανοούμε βέβαια ότι το όρισμα  $\theta = \arg z$  είναι πλειονότιμη συνάρτηση (δεν ορίζεται μονοσήμαντα), είναι συνάρτηση της μορφής  $\theta = \theta_1 + 2n\pi$  με το  $n$  οποιοδήποτε ακέραιο αριθμό και  $\theta_1$  το πρωτεύον (ή κύριο) όρισμα, π.χ. στο διάστημα  $[0, 2\pi)$  ή  $(-\pi, \pi]$ . Άρα και η μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση (ο μιγαδικός λογάριθμος)  $\ln z$ , τον οποίο ήδη ορίσαμε μέσω του τύπου (2.5.1) ή του ισοδύναμου τύπου (2.5.2), είναι και αυτή πλειονότιμη (και όχι μονότιμη) συνάρτηση. Μπορούμε ασφαλώς να αναφερόμαστε (βέβαια σε όσο βαθμό οι συνθήκες μας το επιτρέπουν σε ένα πρακτικό πρόβλημα) στην πρωτεύουσα (ή κύρια) τιμή  $\ln z = \ln r + i\theta_1$  της συναρτήσεως  $\ln z$  με  $\theta_1$  την πρωτεύουσα τιμή του ορίσματος  $\theta = \arg z$ .

Σημειώνουμε επίσης παρενθετικά ότι το μέτρο (ή απόλυτος τιμή)  $r = |z|$  ενός μιγαδικού αριθμού  $z = re^{i\theta}$  είναι βέβαια μη αρνητικός αριθμός (θετικός ή μηδέν). Εφόσον  $r > 0$ , έχει έννοια να μιλάμε για το λογάριθμο  $\ln r = \ln |z|$  στον τύπο ορισμού (2.5.1) ή στον ισοδύναμο του τύπο (2.5.2). Αντίθετα για  $r = |z| = 0$ , κάτι που συμβαίνει μόνο για  $z = 0 + 0i = 0$ , δεν υπάρχει ο πραγματικός λογάριθμος  $\ln r$  ούτε βέβαια και ο μιγαδικός  $\ln z$ . Άρα, για να υπάρχει ο μιγαδικός λογάριθμος  $\ln z$ , θα πρέπει ο μιγαδικός αριθμός  $z$  να είναι διάφορος του μηδενός:  $z \neq 0$ .

Επαναλαμβάνουμε επίσης, ώστε να μη λησμονείται αυτό, ότι η μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση  $\ln z$  είναι πλειονότιμη (δεν ορίζεται μονοσήμαντα) εξαιτίας της παρουσίας του ορίσματος  $\theta = \arg z$  του μιγαδικού αριθμού  $z$  στο φανταστικό μέρος  $i\theta$  του ορισμού της (2.5.1) ή (2.5.2).

Παρατηρούμε επίσης ότι ο ορισμός (2.5.1) ή (2.5.2) δεν είναι τυχαίος ή αυθαίρετος. Πράγματι για δύο θετικούς πραγματικούς αριθμούς  $x_1$  και  $x_2$  γνωρίζουμε ότι ισχύει η θεμελιώδης ιδιότητα

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2. \quad (2.5.3)$$

Βλέποντας το μιγαδικό αριθμό  $z = re^{i\theta}$  σαν γινόμενο του  $r$  επί  $e^{i\theta}$  και επιθυμώντας να μεταφερθεί η πιο πάνω ιδιότητα (2.5.3) και στους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ , απαιτούμε να ισχύει η σχέση

$$\ln z = \ln(re^{i\theta}) = \ln r + \ln(e^{i\theta}) = \ln r + i\theta. \quad (2.5.4)$$

Η απαίτησή μας αυτή οδήγησε απλά στον ορισμό (2.5.1), από τον οποίο ξεκινήσαμε. Άρα ο ορισμός αυτός (2.5.1) απλά απέβλεπε στην ισχύ της ιδιότητας (2.5.3) και για μιγαδικούς αριθμούς  $z$  με την παραδοχή ότι οι μιγαδικές συναρτήσεις λογαριθμική και εκθετική είναι αντίστροφες συναρτήσεις.

### Δ2.5.2. Σχέσεις λογαριθμικής και εκθετικής συναρτήσεως

Ας προσπαθήσουμε να διαπιστώσουμε μέχρι ποιου ακριβώς βαθμού ισχύει ο παραπάνω ισχυρισμός για αντίστροφες τη μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση  $\ln z$  και τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^z$ . Καταρχήν με τη χρήση του ορισμού (2.5.1) της μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως  $\ln z$  έχουμε για ένα μιγαδικό αριθμό  $z = re^{i\theta}$

$$e^{\ln z} = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} e^{i\theta} = re^{i\theta} = z. \quad (2.5.5)$$

Αυτό ισχύει σίγουρα αφού ισχύει η ιδιότητα (2.2.5):  $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$  για τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^z$ , επίσης δε  $e^{\ln r} = r$  (με το  $r = |z|$  προφανώς θετικό αριθμό για  $z \neq 0$ ). Άρα  $e^{\ln z} = z$  και οι δύο αυτές μιγαδικές συναρτήσεις (εκθετική και λογαριθμική) είναι αντίστροφες με την έννοια αυτή.

Από την άλλη όμως πλευρά και πάλι σύμφωνα με τον ορισμό (2.5.1) του  $\ln z$  έχουμε

$$\ln e^z = \ln |e^z| + i \arg e^z = \ln e^x + i(y + 2n\pi) = x + iy + 2n\pi i = z + 2n\pi i. \quad (2.5.6)$$

Στη σχέση αυτή πήραμε υπόψη μας ότι  $|e^z| = e^x$ , σχέση (2.2.9), και επίσης ότι  $\arg e^z = y + 2n\pi$ , σχέση (2.2.10), και το σχόλιο που ακολουθεί. Επομένως  $\ln e^z = z + 2n\pi i$ , δηλαδή και με την έννοια αυτή οι μιγαδικές συναρτήσεις λογαριθμική και εκθετική είναι σχεδόν αντίστροφες. Δεν είναι όμως ακριβώς αντίστροφες, γιατί υπάρχει ο επιπλέον όρος  $2n\pi i$  στην πιο πάνω σχέση (2.5.6). Ο πρόσθετος αυτός όρος απλά οφείλεται, όπως έχουμε επαναληφθέντα εξηγήσει, στο ότι η συνάρτηση του ορίσματος  $\arg z$  είναι πλειονότιμη. Άρα και ο ορισμός (2.5.1) της μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως  $\ln z$  οδηγεί και αυτός σε μια πλειονότιμη συνάρτηση: στη μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση. Ας είμαστε λοιπόν λίγο προσεκτικοί, επαναλαμβάνουμε, με τη μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση  $\ln z$ .

### Δ2.5.3. Άλλες ιδιότητες της μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως

Η μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση  $\ln z$ , αν εξαιρέσουμε προς στιγμή το γεγονός ότι είναι πλειονότιμη (η πρωτεύουσα τιμή της συν  $2n\pi i$ ), έχει ιδιότητες ανάλογες με την αντίστοιχη πραγματική συνάρτηση  $\ln x$  (εννοείται εδώ με  $x > 0$ ). Δύο βασικές ιδιότητές της είναι οι εξής:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \quad \text{και επίσης} \quad \ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2 \quad \text{με} \quad z_1 \neq 0 \quad \text{και} \quad z_2 \neq 0. \quad (2.5.7)$$

Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη από τις ιδιότητες αυτές. (Ανάλογα αποδεικνύεται και η δεύτερη.)

**Απόδειξη:** Χρησιμοποιούμε βέβαια τις πολικές μορφές  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$  και  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  των μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών  $z_1$  και  $z_2$ . (Άρα  $r_1 > 0$  και  $r_2 > 0$ .) Στην πιο κάτω απόδειξη χρησιμοποιούμε και τον ορισμό (2.5.1) της μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως  $\ln z$ . Διαπιστώνουμε έτσι ότι

$$\begin{aligned} \ln(z_1 z_2) &= \ln(r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2}) = \ln(r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}) = \ln(r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) = \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2) \\ &= \ln r_1 + \ln r_2 + i\theta_1 + i\theta_2 = (\ln r_1 + i\theta_1) + (\ln r_2 + i\theta_2) = \ln z_1 + \ln z_2. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Σημειώνουμε ότι ο ορισμός της λογαριθμικής συναρτήσεως (2.5.1) χρησιμοποιήθηκε στην πιο πάνω απόδειξη στην ισότητα  $\ln(r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}) = \ln(r_1 r_2) + i(\theta_1 + \theta_2)$ . Ο ίδιος ορισμός χρησιμοποιήθηκε με την αντίστροφη έννοιά του και στο τέλος της αποδείξεως, όπου θέσαμε  $\ln r_1 + i\theta_1 = \ln z_1$



και ανάλογα  $\ln r_2 + i\theta_2 = \ln z_2$ . Έγινε επίσης χρήση και της ιδιότητας (2.5.3) για την πραγματική λογαριθμική συνάρτηση  $\ln x$  (με  $x > 0$ ), συγκεκριμένα στο σημείο όπου θέσαμε  $\ln(r_1 r_2) = \ln r_1 + \ln r_2$ . Ακόμη κάναμε χρήση και της τόσο γνωστής πια ιδιότητας  $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$  για τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση. Τέλος στην πιο πάνω απόδειξη (2.5.8) θεωρήθηκαν προφανείς (και πραγματικά είναι προφανείς!) οι ιδιότητες της αντιμεταθετικότητας και της προσεταιριστικότητας για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών  $z$ .

Λίγο-πολύ είναι εύλογα όλα αυτά. Ίσως το σημαντικότερο είναι να μη λησμονούμε ότι και οι δύο θεμελιώδεις ιδιότητες (2.5.7) ισχύουν με την έννοια ότι η μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση  $\ln z$  είναι πλειονότιμη. Δηλαδή ισχύουν με την έννοια του «συν  $2n\pi i$ » (φυσικά με το  $n$  ακέραιο αριθμό) και στις δύο αυτές ιδιότητες. Χωρίς το  $2n\pi i$  δεν ισχύουν πάντοτε ούτε για τις πρωτεύουσες (πιο κύριες) τιμές των τεσσάρων μιγαδικών λογαριθμικών συναρτήσεων που εμφανίζονται στις δύο αυτές ιδιότητες, τις επαναλαμβάνουμε:  $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$  και  $\ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2$ .

#### Δ2.5.4. Μιγαδικές δυνάμεις

Με τη βοήθεια της μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως  $\ln z$  μπορούμε εύκολα να ορίσουμε και της μιγαδικές δυνάμεις  $z^a$  και  $c^z$  (με τα  $a$  και  $c$  μιγαδικούς αριθμούς και  $z$  τη μιγαδική μεταβλητή) ως εξής:

$$z^a = e^{a \ln z}, \quad z \neq 0, \quad \text{και} \quad c^z = e^{z \ln c}, \quad c \neq 0. \quad (2.5.9)$$

Εννοείται βέβαια ότι στη δύναμη  $z^a$ , αν το  $a$  είναι ακέραιος αριθμός  $n$ , επίσης στη δύναμη  $c^z$ , αν το  $z$  είναι ακέραιος αριθμός, αλλά και σε άλλες ειδικές περιπτώσεις δεν είναι ανάγκη να προσφεύγουμε σ' αυτούς τους ορισμούς (2.5.9).

### Δ2.6. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

#### Δ2.6.1. Αντίστροφες μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις

Πρόκειται ασφαλώς για τις αντίστροφες συναρτήσεις υπερβολικό συνημίτονο:  $\cosh^{-1} z$ , ημίτονο:  $\sinh^{-1} z$ , εφαπτομένη:  $\tanh^{-1} z$ , κλπ. Αυτές μπορούν να υπολογισθούν με τη βοήθεια της μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως  $\ln z$ , την οποία ήδη ορίσαμε στην προηγούμενη Ενότητα Δ2.5.

Οι μιγαδικές αυτές υπερβολικές συναρτήσεις λέγονται βέβαια αντίστροφες, επειδή στον ορισμό τους απαιτούμε να έχουμε

$$\cosh(\cosh^{-1} z) = z, \quad \sinh(\sinh^{-1} z) = z, \quad \tanh(\tanh^{-1} z) = z. \quad (2.6.1)$$

Προκύπτουν τελικά οι εξής λογαριθμικοί τύποι υπολογισμού τους:

$$\cosh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \quad \sinh^{-1} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}), \quad \tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}. \quad (2.6.2)$$

Σημειώνουμε με ιδιαίτερη έμφαση ότι και οι τρεις αυτές αντίστροφες μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις,  $\cosh^{-1} z$ ,  $\sinh^{-1} z$  και  $\tanh^{-1} z$ , είναι πλειονότιμες. Αυτό μπορεί να διαπιστωθεί άμεσα εξαιτίας της παρουσίας της πλειονότιμης μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως  $\ln z$  στους πιο πάνω τύπους (2.6.2). Επιπλέον οι συναρτήσεις  $\cosh^{-1} z$  και  $\sinh^{-1} z$  περιέχουν και από μία μιγαδική τετραγωνική ρίζα ( $\sqrt{z^2 - 1}$  και  $\sqrt{z^2 + 1}$  αντίστοιχα), η οποία είναι μια δίτιμη συνάρτηση. Άρα τελικά έχουν διπλή απειρία τιμών.

#### Δ2.6.2. Αντίστροφες μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Αρκετά ανάλογοι τύποι ισχύουν και για τις αντίστροφες μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Τις συναρτήσεις  $\cos^{-1} z$ ,  $\sin^{-1} z$  και  $\tan^{-1} z$  μερικές φορές τις δηλώνουμε και με τα ισοδύναμα σύμβολα  $\arccos z \equiv \cos^{-1} z$  ( $\arccos$ : τόξο συνημιτόνου),  $\arcsin z \equiv \sin^{-1} z$  ( $\arcsin$ : τόξο ημιτόνου)

και  $\arctan z \equiv \tan^{-1} z$  ( $\arctan$ : τόξο εφαπτομένης). Είναι όμως πλειονότιμες και ο υπολογισμός τους βασίζεται και πάλι στη μιγαδική λογαριθμική συνάρτηση  $\ln z$ . Ισχύουν οι σχετικοί τύποι

$$\cos^{-1} z = -i \ln(z + i\sqrt{1-z^2}), \quad \sin^{-1} z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2}), \quad \tan^{-1} z = \frac{i}{2} \ln \frac{i+z}{i-z}. \quad (2.6.3)$$

Οι τύποι αυτοί είναι αντίστοιχοι με τους τύπους (2.6.2) για τις σχετικές αντίστροφες μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις και πραγματικά μοιάζουν αρκετά μ' αυτούς. Εντούτοις και οι τρεις αυτοί τύποι (2.6.3) περιέχουν ρητά τη φανταστική μονάδα  $i = \sqrt{-1}$  σε αντίθεση με τους τύπους (2.6.2).

### Δ2.6.3. Απόδειξη του τύπου για την αντίστροφη μιγαδική υπερβολική εφαπτομένη

Από τους έξι πιο πάνω τύπους (2.6.2) και (2.6.3) θα αποδείξουμε μόνο εκείνο για την αντίστροφη μιγαδική υπερβολική εφαπτομένη  $\tanh^{-1} z$ , δηλαδή τον τύπο

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}. \quad (2.6.4)$$

**Απόδειξη:** Για να αποδείξουμε τον τύπο αυτό (2.6.4), ισοδύναμα τον τρίτο τύπο (2.6.2), θα κάνουμε τον εξής απλό συλλογισμό: Ας δηλώσουμε τη μιγαδική συνάρτηση  $\tanh^{-1} z$  που θέλουμε να υπολογίσουμε με το σύμβολο  $w$ , δηλαδή  $w = \tanh^{-1} z$ . Επομένως θα έχουμε

$$w = \tanh^{-1} z \implies z = \tanh w, \quad (2.6.5)$$

αφού θέλουμε οι δύο μιγαδικές υπερβολικές συναρτήσεις  $\tanh$  και  $\tanh^{-1}$  να είναι οπωσδήποτε αντίστροφες συναρτήσεις. (Αυτή ακριβώς είναι και η έννοια δύο αντίστροφων συναρτήσεων. Με κανέναν τρόπο το σύμβολο  $\tanh^{-1} z$  δε δηλώνει ύψωση στη δύναμη  $-1$  της συναρτήσεως  $\tanh z$ .) Αλλά για τη συνάρτηση μιγαδική υπερβολική εφαπτομένη  $\tanh z$  γνωρίζουμε ήδη τον τύπο

$$\tanh z = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \quad (2.6.6)$$

τον οποίο μάλιστα τον αποδείξαμε στη σχέση (2.3.11). Τον τύπο αυτό (2.6.6) το χρησιμοποιούμε εδώ, αλλά γράφοντάς τον τώρα με μεταβλητή το  $w$  αντί για το  $z$ . Παίρνοντας υπόψη μας και τη δεύτερη σχέση (2.6.5), έχουμε

$$z = \tanh w = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1}. \quad (2.6.7)$$

Πρόκειται για μια πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση ως προς  $e^{2w}$ . Τη λύνουμε άμεσα:

$$\begin{aligned} z = \frac{e^{2w} - 1}{e^{2w} + 1} &\implies z(e^{2w} + 1) = e^{2w} - 1 \implies ze^{2w} + z = e^{2w} - 1 \\ &\implies e^{2w}(1 - z) = 1 + z \implies e^{2w} = \frac{1+z}{1-z} \\ &\implies 2w = \ln \frac{1+z}{1-z} \implies w = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Ξέραμε λοιπόν το μιγαδικό αριθμό  $z$  και μόλις προσδιορίσαμε το μιγαδικό αριθμό  $w$ . Τί είναι όμως το  $w$ ; Ας θυμηθούμε ότι στην πρώτη σχέση (2.6.5) ονομάσαμε  $w$  τη μιγαδική συνάρτηση  $\tanh^{-1} z$ , της οποίας επιζητούμε να βρούμε τύπο υπολογισμού. Έχοντας βρεί το  $w$  στην λύση (2.6.8), έχουμε βρεί ταυτόχρονα και την έκφραση της μιγαδικής συναρτήσεως  $\tanh^{-1} z$ , την επαναλαμβάνουμε:

$$w = \tanh^{-1} z \quad \text{και επίσης} \quad w = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} \implies \tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}. \quad (2.6.9)$$

Αποδείξαμε έτσι την ισχύ του τύπου (2.6.4), που μας δίνει την αντίστροφη μιγαδική συνάρτηση υπερβολική εφαπτομένη,  $\tanh^{-1} z$ , με τη βοήθεια της μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως  $\ln z$ .

Ανάλογα μπορούμε να εργαστούμε και για τη μιγαδική συνάρτηση αντίστροφη τριγωνομετρική εφαπτομένη,  $\tan^{-1} z$ , που συχνά καλείται και τόξο εφαπτομένης με  $\arctan z \equiv \tan^{-1} z$ . Λίγο πιο δύσκολες, αν και όχι ιδιαίτερα δύσκολες, είναι οι αποδείξεις και των άλλων τύπων (2.6.2) και (2.6.3).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ3

## ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες τόσο από θεωρητικής όσο και από πρακτικής απόψεως είναι οι καλούμενες αναλυτικές συναρτήσεις. Αυτές θα τις εξετάσουμε λεπτομερώς στο παρόν Κεφάλαιο Δ3. Διαθέτουμε τώρα σαν εφόδιά μας τις γνώσεις που αποκτήσαμε στα δύο πρώτα Κεφάλαια Δ1: για τις πράξεις με τους μιγαδικούς αριθμούς, και Δ2: για τις μιγαδικές συναρτήσεις και τις κυριότερες στοιχειώδεις μιγαδικές συναρτήσεις: εκθετική, λογαριθμική, υπερβολικές, τριγωνομετρικές και τις αντίστροφές τους. Εδώ απλά θα προχωρήσουμε στο σχετικό διαφορικό λογισμό: στην παράγωγο.

Στην αρχή θα ορίσουμε τις έννοιες του ορίου και της συνεχείας για μιγαδικές όμως συναρτήσεις  $f(z)$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ . Ακολούθως θα δώσουμε την πολύ πιο βασική έννοια της παραγώγου  $f'(z)$  μιας μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$ . Αν η παράγωγος αυτή υπάρχει (δεν υπάρχει πάντα!), τότε ισχύουν οι γνωστοί από τις πραγματικές συναρτήσεις  $f(x)$  κανόνες παραγωγίσεως. Ισχύουν επίσης και τα σχετικά αποτελέσματα: οι παράγωγοι που ήδη γνωρίζουμε για συγκεκριμένες στοιχειώδεις συναρτήσεις μεταφέρονται ουσιαστικά αναλλοίωτες και στις μιγαδικές συναρτήσεις  $f(z)$ . Μια μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $z_0$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$  και σε μια μικρή γειτονιά του καλείται **αναλυτική** στο σημείο αυτό  $z_0$ . Ανάλογα και σε ανοικτή περιοχή  $D$ .

Δυστυχώς όμως δεν είναι όλες οι μιγαδικές συναρτήσεις  $f(z)$  παραγωγίσιμες. Γενικά μιλώντας, παραγωγίσιμες είναι μόνο οι συναρτήσεις  $f(z)$  που εξαρτώνται από τη μιγαδική μεταβλητή  $z$ , **όχι όμως και από τη συζυγή της** μιγαδική μεταβλητή  $\bar{z}$ . Οι σχετικές συνθήκες παραγωγισιμότητας μιας μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$  είναι οι καλούμενες **συνθήκες (ή εξισώσεις) Cauchy-Riemann**. Αυτές βασίζονται στο πραγματικό μέρος  $u(x, y)$  και στο φανταστικό μέρος  $v(x, y)$  της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$ . Θα επιμείνουμε στις συνθήκες Cauchy-Riemann παρουσιάζοντάς τις τόσο σε Καρτεσιανή όσο και σε πολική μορφή. Ουσιαστικά πρόκειται για ένα σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους ως προς  $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  και  $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ . Οι πραγματικές αυτές συναρτήσεις  $u$  και  $v$  καλούνται **συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις**, επειδή επαληθεύουν και οι δύο τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace, είναι δηλαδή πραγματικά αρμονικές συναρτήσεις. Αυτό είναι ένα θεμελιώδους σημασίας θεώρημα, που επιτρέπει τη χρήση των αναλυτικών συναρτήσεων  $f(z)$  σε μια περιοχή  $D$  στην επίλυση της εξισώσεως του Laplace. (Ανάλογα και για τη διαρμονική εξίσωση.)

Θα αναφερθούμε με έμφαση σε προβλήματα επίπεδης, μόνιμης και αστρόβιλης ροής ιδεατού ρευστού. Σε τέτοια προβλήματα το **δυναμικό ταχύτητας**  $\Phi(x, y)$  και η **συνάρτηση ροής**  $\Psi(x, y)$  είναι συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις. Μπορούμε έτσι να ορίσουμε το **μιγαδικό δυναμικό ροής**  $\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$ , που είναι αναλυτική συνάρτηση σε κάθε ομαλό σημείο του πεδίου της ροής. Θα παρουσιάσουμε εκτενώς και δύο σχετικά παραδείγματα. Σε μικρότερο βαθμό θα αναφερθούμε ακόμη στην Επίπεδη Ελαστικότητα, όπου επίσης παρουσιάζονται δύο μιγαδικά δυναμικά. Στο τέλος θα κάνουμε μνεία της χρησιμότητας των αναλυτικών συναρτήσεων και σε προβλήματα πλακών.

### Δ3.1. ΟΡΙΟ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

#### Δ3.1.1. Όριο μιγαδικής συναρτήσεως

Κάναμε ήδη μια επαρκή εισαγωγή στο κεφάλαιο αυτό στην περίληψή του στην προηγούμενη σελίδα. Προχωράμε αμέσως τώρα στον ορισμό του ορίου μιας μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$ .

■ **ΟΡΙΣΜΟΣ (του ορίου):** Για μια μονότιμη μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  λέμε ότι έχει **όριο** το μιγαδικό αριθμό  $w_0$ , όταν η μιγαδική μεταβλητή  $z$  τείνει σε συγκεκριμένο σημείο  $z_0$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$ , και γράφουμε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \quad (3.1.1)$$

στην περίπτωση που η συνάρτηση  $f(z)$  έχει τις εξής δύο ιδιότητες:

(α) Είναι ορισμένη σε όλα τα σημεία μιας (κυκλικής) γειτονιάς του σημείου  $z_0$  (με πιθανή εξαίρεση το ίδιο το σημείο  $z_0$ ) και, το σημαντικότερο,

(β) Για κάθε θετικό αριθμό  $\varepsilon$  οσοδήποτε μικρό υπάρχει ένας αντίστοιχος και επίσης θετικός αριθμός  $\delta = \delta(\varepsilon)$  που εξαρτάται από τον αριθμό  $\varepsilon$  (αλλά φυσικά και από το ίδιο το σημείο  $z_0$ ) και ισχύει η ανισότητα

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{για κάθε σημείο } z \text{ τέτοιο ώστε } 0 < |z - z_0| < \delta \quad (3.1.2)$$

ή κάπως συνοπτικότερα

$$\forall z : 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon. \quad (3.1.3)$$

Η πρώτη πιο πάνω ιδιότητα της μιγαδικής συναρτήσεώς μας  $f(z)$  είναι λίγο-πολύ προφανής. Η δεύτερη και πιο σημαντική ιδιότητά της μας λέει ότι, καθώς το σημείο  $z$  πλησιάζει το σημείο  $z_0$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ , η τιμή  $w = f(z)$  της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$  πλησιάζει και αυτή το μιγαδικό αριθμό  $w_0$ , το όριό της. Θεωρώντας και το δεύτερο μιγαδικό επίπεδο  $w$ , εκείνο των τιμών  $w = f(z)$  της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$ , διαπιστώνουμε εύκολα από τον πιο πάνω ορισμό του ορίου (3.1.2) ότι, όταν  $z \rightarrow z_0$  (στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ ), τότε και  $w \rightarrow w_0$  στο μιγαδικό επίπεδο  $w$ .

Παρατηρούμε ασφαλώς ότι ο ορισμός του ορίου (3.1.2) μοιάζει καταρχήν με τον αντίστοιχο ορισμό του ορίου για πραγματικές συναρτήσεις  $f(x)$ . Εντούτοις υπάρχει και μια ουσιαστική διαφορά. Συγκεκριμένα στις πραγματικές συναρτήσεις  $f(x)$  απλά αναφερόμασταν στον πραγματικό άξονα  $x$ , δηλαδή είχαμε μία διάσταση να κινηθούμε. Αντίθετα στις μιγαδικές συναρτήσεις  $f(z)$  (εδώ με  $z = x + iy$ ,  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ ) αναφερόμαστε στις δύο διαστάσεις  $x$  και  $y$ . Στην έννοια του ορίου λοιπόν της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$  για  $z \rightarrow z_0$ , την οποία μόλις καθορίσαμε, υπεισέρχονται διδιάστατες περιοχές γύρω από το σημείο  $z_0$ , συγκεκριμένα μια ανοικτή κυκλική γειτονιά (ή απλά γειτονιά)  $|z - z_0| < \delta$  του σημείου  $z_0$ . Αυτό ήδη το αναφέραμε και επιπλέον το καταστήσαμε σαφές στον ορισμό (3.1.2):  $0 < |z - z_0| < \delta$ . Έχουμε λοιπόν εδώ δύο διαστάσεις (τις  $x$  και  $y$ ) και όχι μόνο μία (τη  $x$ ), την οποία είχαμε στις πραγματικές συναρτήσεις  $f(x)$ .

Ευτυχώς το καλό είναι ότι με την εξωτερική ομοιότητα που παρουσιάζει ο ορισμός (3.1.2) με τον αντίστοιχο ορισμό του ορίου για τις πραγματικές συναρτήσεις παρουσιάζονται τελικά και σ' αυτόν πραγματικοί αριθμοί. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας των απολύτων τιμών  $|f(z) - w_0|$  και  $|z - z_0|$ , που υπεισέρχονται στον ορισμό αυτό, αλλά και των ίδιων των πραγματικών (για την ακρίβεια θετικών) σταθερών  $\varepsilon$  και  $\delta = \delta(\varepsilon)$ .

Για τα μιγαδικά όρια ισχύουν ιδιότητες απόλυτα ανάλογες με εκείνες οι οποίες ισχύουν για τα πραγματικά όρια. Παραδείγματος χάρη, για δύο μιγαδικές συναρτήσεις  $f_1(z)$  και  $f_2(z)$  που έχουν όρια  $w_1$  και  $w_2$  αντίστοιχα καθώς  $z \rightarrow z_0$  (στο ίδιο σημείο  $z_0$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$ ), το όριο του αθροίσματος  $f_1(z) + f_2(z)$  ισούται με το άθροισμα των ορίων  $w_1 + w_2$ . Δηλαδή ισχύει η ιδιότητα

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) = w_1 \quad \text{και επίσης} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) = w_2 \implies \lim_{z \rightarrow z_0} [f_1(z) + f_2(z)] = w_1 + w_2. \quad (3.1.4)$$

Και πάρα πολλές ακόμη ιδιότητες ισχύουν για τα όρια στις μιγαδικές συναρτήσεις  $f(z)$ , όπως, π.χ., για το όριο διαφοράς, γινομένου και πηλίκου δύο μιγαδικών συναρτήσεων  $f_1(z)$  και  $f_2(z)$ . Επίσης για τα όρια του πραγματικού μέρους  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$  και του φανταστικού της μέρους  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ . Εντούτοις, για να προχωρήσουμε σε πιο χρήσιμα (από πρακτικής απόψεως) θέματα, θα τις παραλείψουμε τις ιδιότητες αυτές. Έτσι κι αλλιώς από απόψεως εννοιών δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και πρωτοτυπία.

Τέλος με βάση τον πιο πάνω ορισμό (3.1.2) του ορίου μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$  μπορούν μάλλον εύκολα να λυθούν και σχετικές ασκήσεις. Για παράδειγμα, μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση  $f(z) = z^2$  ισχύει το όριο  $\lim_{z \rightarrow z_0} z^2 = z_0^2$ , όταν το σημείο  $z$  τείνει στο συγκεκριμένο σημείο  $z_0$  ασφαλώς με τη γενική έννοια που συνάγεται από τον ορισμό (3.1.2). Η γενική αυτή έννοια περιλαμβάνει βέβαια ολόκληρη την ανοικτή κυκλική περιοχή  $|z - z_0| < \delta$ , που είναι μια κατάλληλα μικρή γειτονιά, η  $\delta$ -γειτονιά, του σημείου  $z_0$  με εξαίρεση το ίδιο το σημείο  $z_0$ .

Ανάλογα και στην ανισότητα  $|f(z) - w_0| < \varepsilon$  στον ίδιο ορισμό (3.1.2). Γράφοντας  $w = f(z)$ , έχουμε  $|w - w_0| < \varepsilon$  τώρα στην  $\varepsilon$ -γειτονιά του σημείου  $w_0$  στο μιγαδικό επίπεδο  $w$ , το οποίο είναι όμως διαφορετικό από το μιγαδικό επίπεδο  $z$ . Με άλλα λόγια το μιγαδικό επίπεδο  $z$  αφορά στην ανεξάρτητη μεταβλητή  $z = x + iy$ , ενώ αντίθετα το μιγαδικό επίπεδο  $w$  αφορά στην εξαρτημένη μεταβλητή  $w = u + iv$ , όπου βέβαια  $w = f(z)$ . Δηλαδή η μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  παίρνει τα σημεία  $z$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$  και τα απεικονίζει στα σημεία  $w$  του μιγαδικού επιπέδου  $w$ . (Αυτός είναι ουσιαστικά και ο ορισμός μιας μιγαδικής συναρτήσεως, όπως ήδη γνωρίζουμε από την Παράγραφο Δ2.1.1.)

### Δ3.1.2. Συνέχεια μιγαδικής συναρτήσεως

Έπειτα από τον ορισμό του ορίου  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  προχωράμε τώρα στον ορισμό της συνέχειας μιας μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$ . Πρόκειται για έναν αρκετά απλό ορισμό:

■ **ΟΡΙΣΜΟΣ (της συνέχειας):** Μια μονότιμη μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  που ορίζεται σε ένα σημείο  $z_0$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$  και σ' όλα τα σημεία  $z$  μιας γειτονιάς του σημείου αυτού  $z_0$  καλείται **συνεχής** στο σημείο  $z_0$ , εάν το όριο της συναρτήσεως  $f(z)$  για  $z \rightarrow z_0$  υπάρχει και είναι ίσο με  $f(z_0)$ , δηλαδή εφόσον

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (3.1.5)$$

Πρόκειται για ακριβώς ανάλογο ορισμό με εκείνο που ισχύει για τις πραγματικές συναρτήσεις  $f(x)$ . Το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο (εάν υπάρχει) και η σύνθεση δύο συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων  $f_1(z)$  και  $f_2(z)$  είναι και αυτά συνεχείς συναρτήσεις. Τα μιγαδικά πολυώνυμα  $p_n(z)$ , η μιγαδική εκθετική συνάρτηση  $e^z$ , οι μιγαδικές συναρτήσεις  $\cosh z$ ,  $\sinh z$ ,  $\cos z$  και  $\sin z$  και πάρα πολλές άλλες μιγαδικές συναρτήσεις είναι συνεχείς και μάλιστα σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο  $z$ . Ειδικά οι μιγαδικές συναρτήσεις που αναφέρθηκαν ρητά είναι και παραγωγίσιμες σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο  $z$ , όπως θα δούμε αμέσως πιο κάτω.

## Δ3.2. ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ - ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

### Δ3.2.1. Ορισμός της παραγώγου

Το επόμενο βήμα μας θα είναι να ορίσουμε και την παράγωγο  $f'(z)$  μιας μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$ . Ο ορισμός αυτός είναι ανάλογος με εκείνο που ισχύει στις πραγματικές συναρτήσεις  $f(x)$ . Τώρα όμως αναφερόμαστε στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ , δηλαδή στις δύο διαστάσεις  $x$  και  $y$ .

■ **ΟΡΙΣΜΟΣ (της παραγώγου):** Μια μονότιμη μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  που ορίζεται σε ένα σημείο  $z_0$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$  καθώς και σ' όλα τα σημεία μιας γειτονιάς του σημείου αυτού  $z_0$  καλείται **παραγωγίσιμη** στο ίδιο σημείο  $z_0$ , εάν υπάρχει το όριο

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (3.2.1)$$

Επιπλέον το όριο αυτό  $f'(z_0)$  καλείται **παράγωγος** της συναρτήσεως  $f(z)$  στο σημείο  $z_0$ . Εάν δεν υπάρχει το πιο πάνω όριο (3.2.1), η μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $z_0$ .

Φυσικά ισοδύναμη γραφή του ίδιου ορίου (3.2.1) είναι και η ακόλουθη:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \quad (3.2.2)$$

Στο όριο αυτό  $f'(z)$  απλά θέσαμε το σύμβολο  $\Delta z$  στη θέση της διαφοράς  $z - z_0$  (δηλαδή  $\Delta z = z - z_0$ ) και το σύμβολο  $z$  στη θέση του  $z_0$ . Με λίγο θράσος γράφουμε ακόμη  $\Delta w = \Delta f = f(z + \Delta z) - f(z)$  και  $df/dz = f'(z)$ . Τότε το αμέσως πιο πάνω όριο (3.2.2), δηλαδή η παράγωγος  $f'(z)$ , παίρνει και τη συντομότερη μορφή

$$\frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} \quad \text{ή καλύτερα} \quad \frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \quad (3.2.3)$$

γράφοντας επίσης  $w = f(z)$  για την τιμή  $w$  της συναρτήσεως  $f(z)$  στο (διαφορετικό) μιγαδικό επίπεδο  $w$ . Η μορφή αυτή (3.2.3) μας δείχνει κάπως καλύτερα την έννοια της παραγωγού  $f'(z)$  σαν το όριο του πηλίκου των μεταβολών  $\Delta w = \Delta f = f(z + \Delta z) - f(z)$  δια  $\Delta z = z - z_0$ , όταν  $\Delta z \rightarrow 0$ . Και στις πραγματικές συναρτήσεις  $f(x)$  γράφαμε ανάλογα  $df/dx = f'(x)$ .

### Δ3.2.2. Αναλυτικές συναρτήσεις

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τους ορισμούς της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ : (α) σε ένα σημείο  $z$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$  καθώς και (β) σε μια ανοικτή περιοχή  $D$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$ . Σημειώνουμε ότι μερικές φορές οι **αναλυτικές συναρτήσεις** καλούνται και **ολόμορφες συναρτήσεις**. Αυτός είναι ένας ισοδύναμος όρος.

■ **ΟΡΙΣΜΟΣ (αναλυτικής συναρτήσεως σε ένα σημείο):** Μια μονότιμη μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  καλείται **αναλυτική** σε ένα σημείο  $z$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$ , εάν ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη και στο ίδιο το σημείο  $z$ , αλλά και σε όλα τα σημεία μιας γειτονιάς του σημείου  $z$ .

■ **ΟΡΙΣΜΟΣ (αναλυτικής συναρτήσεως σε μια ανοικτή περιοχή):** Μια μονότιμη μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  καλείται **αναλυτική** σε μια ανοικτή περιοχή  $D$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$ , εάν ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία  $z$  της ανοικτής αυτής περιοχής  $D$ .

Σημειώνουμε επίσης ότι μια αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο  $z$  καλείται **ακέραιη συνάρτηση**.

Πρακτικά κυρίως ο δεύτερος ορισμός μας είναι χρήσιμος. Συγκεκριμένα σε μια ανοικτή περιοχή  $D$ , εφόσον η μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  έχει παράγωγο  $f'(z)$  (σε όλα τα σημεία  $z$  της ανοικτής περιοχής  $D$ ), τότε είναι αναλυτική στην περιοχή αυτή. Μια τέτοια περιοχή  $D$  μπορεί, π.χ., να είναι:

- Στη **Ρευστομηχανική** ένα πεδίο  $D$  μόνιμης και αστρόβιλης επίπεδης ροής ιδεατού ρευστού. Στην περίπτωση αυτή έχουμε το μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z)$ , το οποίο είναι γενικά (με την εξαίρεση μεμονωμένων σημείων) αναλυτική συνάρτηση. Τέτοια μεμονωμένα σημεία μπορεί να είναι, π.χ., τα σημεία  $z_0$  όπου υπάρχει μια πηγή, μια καταβόθρα, μια δίνη, ένα δίπολο, ένα άκρο γραμμικού εμποδίου (φράγματος), κλπ.
- Στην **Ελαστικότητα** ένα επίπεδο ελαστικό μέσον  $D$  υπό στατικές συνθήκες. Στην περίπτωση αυτή έχουμε τα δύο μιγαδικά δυναμικά  $\varphi(z)$  και  $\psi(z)$  των Kolosov–Muskhelishvili. Αυτά είναι γενικά (με την εξαίρεση μεμονωμένων σημείων) και τα δύο αναλυτικές συναρτήσεις. Τέτοια μεμονωμένα σημεία μπορεί να είναι τα σημεία εφαρμογής μιας συγκεντρωμένης δύναμews, μιας ροπής, ένα γωνιακό σημείο, στη Θραυστομηχανική (Μηχανική της Θραύσεως) ένα άκρο ρωγμής, στα Σύνθετα Υλικά τα άκρα γραμμικών εγκλεισμάτων στο υλικό, κλπ.

Γενικά πάντως τα μιγαδικά δυναμικά, π.χ.  $\Omega(z)$ ,  $\varphi(z)$  και  $\psi(z)$ , είναι αναλυτικές συναρτήσεις σχεδόν παντού και αποτελούν έναν πολύ ενδιαφέροντα τρόπο αντιμετώπισης επιπέδων προβλημάτων που ανάγονται στην εξίσωση του Laplace και παραπέρα στη διαρμονική εξίσωση. Θα δώσουμε πολύ περισσότερες λεπτομέρειες ειδικά για το μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z)$  παρακάτω.

Μετά τους πιο πάνω Ορισμούς Α και Β των αναλυτικών (ή ολόμορφων) συναρτήσεων επανερχόμαστε στην παραγωγήιση μιγαδικών συναρτήσεων  $f(z)$ .

### Δ3.2.3. Κανόνες παραγωγίσεως

Λόγω του τύπου (3.2.1) ή (3.2.2) ορισμού της παραγώγου  $f'(z)$  της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$  και της αναλογίας του με τον αντίστοιχο τύπο που ισχύει για πραγματικές συναρτήσεις  $f(x)$ , όλοι οι κανόνες παραγωγίσεως πραγματικών συναρτήσεων  $f(x)$  επεκτείνονται και στις μιγαδικές συναρτήσεις  $f(z)$ . Επίσης οι παράγωγοι μονωνύμων  $z^n$ , πολυωνύμων  $p_n(z)$ , της εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$ , των υπερβολικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων, των αντιστρόφων τους συναρτήσεων, κλπ. που ίσχυαν στις πραγματικές συναρτήσεις  $f(x)$  εξακολουθούν να ισχύουν και στις αντίστοιχες μιγαδικές συναρτήσεις  $f(z)$ . Αυτές είναι βέβαια απλά επεκτάσεις των σχετικών πραγματικών συναρτήσεων. Έτσι μπορούμε, π.χ., να γράψουμε

$$\frac{d}{dz} [f_1(z)f_2(z)] = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z), \quad \frac{d}{dz} z^3 = 3z^2, \quad \frac{d}{dz} e^z = e^z, \quad \frac{d}{dz} \ln z = \frac{1}{z}, \quad (3.2.4)$$

$$\frac{d}{dz} \cosh z = \sinh z, \quad \frac{d}{dz} \sinh z = \cosh z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z, \quad (3.2.5)$$

$$\frac{d}{dz} \cosh^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{z^2 - 1}}, \quad \frac{d}{dz} \sinh^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{z^2 + 1}}, \quad \frac{d}{dz} \tanh^{-1} z = \frac{1}{1 - z^2}, \quad (3.2.6)$$

$$\frac{d}{dz} \cos^{-1} z = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad \frac{d}{dz} \sin^{-1} z = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}, \quad \frac{d}{dz} \tan^{-1} z = \frac{1}{1 + z^2}, \quad \text{κλπ.} \quad (3.2.7)$$

Δε θα προχωρήσουμε στην παράθεση και άλλων τύπων παραγωγίσεως και παραγώγων  $f'(z)$  συγκεκριμένων μιγαδικών συναρτήσεων  $f(z)$ . Αντίθετα θα εστιάσουμε τώρα την προσοχή μας στο πότε ακριβώς είναι παραγωγίσιμη μια μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$ . Θα δούμε ότι αυτό συμβαίνει πρακτικά, όταν ισχύουν οι συνθήκες (ή εξισώσεις) των Cauchy-Riemann. Σ' αυτές θα αφιερώσουμε την επόμενη Ενότητα Δ3.3.

## Δ3.3. ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΤΩΝ CAUCHY-RIEMANN

### Δ3.3.1. Οι συνθήκες των Cauchy-Riemann

Θεωρούμε μονότιμη μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  ( $z = x + iy$ ) στο μιγαδικό επίπεδο  $z$  με πραγματικό μέρος  $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$  και φανταστικό μέρος  $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$ . Δηλαδή έχουμε

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (3.3.1)$$

εννοείται βέβαια στα σημεία  $z = x + iy$  της ανοικτής περιοχής  $D$  όπου ορίζεται η συνάρτηση  $f(z)$ . Εάν υπάρχει η παράγωγος  $f'(z)$  της συναρτήσεως  $f(z)$  σε ένα σημείο  $z = x + iy$ , τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχουν και οι πρώτες μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$  στο ίδιο σημείο  $z = x + iy$  και ικανοποιούν μάλιστα τις ακόλουθες δύο συνθήκες των Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{συνθήκες των Cauchy-Riemann}) \quad (3.3.2)$$

στο σημείο αυτό  $z = x + iy$ .

Σημειώνουμε ότι οι συνθήκες των Cauchy-Riemann καλούνται αρκετές φορές και εξισώσεις των Cauchy-Riemann. Πρόκειται βέβαια για ένα σύστημα δύο γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως με άγνωστες συναρτήσεις (εξαρτημένες μεταβλητές) το πραγματικό και το φανταστικό μέρος  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$  αντίστοιχα της παραγωγίσιμης μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$ .

Και αντίστροφα, θεωρούμε δύο μονότιμες πραγματικές συναρτήσεις  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$  που ορίζονται σε κάθε σημείο  $z = x + iy$  μιας ανοικτής περιοχής  $D$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$ . Υποθέτουμε επίσης ότι οι συναρτήσεις αυτές  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$  έχουν και οι δύο συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους (και ως προς  $x$  και ως προς  $y$ ) που επαληθεύουν ταυτόχρονα και τις δύο συνθήκες Cauchy–Riemann (3.3.2). Τότε μπορεί να αποδειχθεί ότι η μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , που ορίζεται και αυτή μονότιμα μέσω της σχέσεως (3.3.1) στην περιοχή αυτή  $D$ , είναι παραγωγίσιμη, έχει παράγωγο  $f'(z)$ , σε κάθε σημείο  $z$  της ανοικτής περιοχής  $D$ . Επομένως είναι αναλυτική στην περιοχή  $D$ .

Η απόδειξη της αναγκαιότητας της ισχύος των δύο συνθηκών Cauchy–Riemann (3.3.2) βασίζεται πρώτα στη χρήση της διεύθυνσεως του πραγματικού άξονα  $Ox$  για τον υπολογισμό της μιγαδικής παραγώγου  $f'(z)$ . Τότε  $\Delta z = \Delta x$  (ενώ  $\Delta y = 0$ ). Με την επιλογή της διεύθυνσεως αυτής προκύπτει αρκετά εύκολα η εξής έκφραση υπολογισμού της παραγώγου  $f'(z)$ :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \quad \text{με} \quad \Delta z = \Delta x \quad \text{και} \quad \Delta y = 0. \quad (3.3.3)$$

Με ανάλογο τρόπο χρησιμοποιούμε έπειτα τη διεύθυνση του φανταστικού άξονα  $Oy$  για τον υπολογισμό της ίδιας παραγώγου  $f'(z)$ . Τότε  $\Delta z = i\Delta y$  (ενώ  $\Delta x = 0$ ). Με την επιλογή της διεύθυνσεως αυτής προκύπτει επίσης αρκετά εύκολα η εξής έκφραση υπολογισμού της παραγώγου  $f'(z)$ :

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \quad \text{με} \quad \Delta z = i\Delta y \quad \text{και} \quad \Delta x = 0. \quad (3.3.4)$$

Εξισώνοντας τις δύο αυτές εκφράσεις (3.3.3) και (3.3.4) της ίδιας παραγώγου  $f'(z)$  διαπιστώνουμε άμεσα ότι

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x, y). \quad (3.3.5)$$

Στη συνέχεια η εξίσωση των πραγματικών μερών καθώς και των φανταστικών μερών στη σχέση αυτή (3.3.5) (ισότητα του δεύτερου και του τρίτου μέλους της) μας οδηγεί κατευθείαν στις δύο συνθήκες των Cauchy–Riemann (3.3.2). Άρα οι συνθήκες αυτές είναι αναγκαίες με δεδομένη την ύπαρξη της παραγώγου  $f'(z)$ . Όπως ήδη αναφέρθηκε, μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι είναι και ικανές για την ύπαρξη της ίδιας παραγώγου  $f'(z)$  βέβαια με την προϋπόθεση ότι οι μερικές παράγωγοι στις συνθήκες των Cauchy–Riemann είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Χρήσιμο είναι να αναφέρουμε επίσης ότι καθένας από τους δύο παραπάνω τύπους (3.3.3) και (3.3.4) μπορεί θαυμάσια να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της παραγώγου  $f'(z)$  μιας αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ . Αυτό πετυχαίνεται άμεσα μέσω των πρώτων μερικών παραγώγων (είτε ως προς  $x$  είτε ως προς  $y$ ) του πραγματικού μέρους  $u(x, y)$  και του φανταστικού μέρους  $v(x, y)$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ . (Εννοείται ότι οι συνθήκες των Cauchy–Riemann (3.3.2) πρέπει να ισχύουν για έναν τέτοιο υπολογισμό.)

Το συμπέρασμα είναι απλό και το εξής: Η ισχύς των δύο συνθηκών των Cauchy–Riemann (3.3.2) σε κάθε σημείο  $z = x + iy$  ανοικτής περιοχής  $D$  με συνεχείς τις τέσσερις πρώτες μερικές παραγώγους στις συνθήκες αυτές αποτελεί την αναγκαία και ικανή συνθήκη, έτσι ώστε η μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  (με  $z = x + iy$ ) να είναι αναλυτική στην περιοχή αυτή  $D$ .

Είναι πάρα πολύ σημαντικές οι συνθήκες των Cauchy–Riemann (3.3.2) σε πρακτικά προβλήματα που έχουν να κάνουν με τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace (θα το δούμε σε λίγο αυτό) και τις αναλυτικές συναρτήσεις, όπως είναι το μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z)$ . Άρα αξίζει μια επανάληψη για την εμπέδωσή τους.

Ξανά λοιπόν: Η ισχύς των δύο συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy–Riemann (3.3.2) σε ανοικτή περιοχή  $D$  (με συνεχείς τις τέσσερις πρώτες μερικές παραγώγους σ' αυτές) είναι αναγκαία σε περίπτωση που έχουμε μια μονότιμα ορισμένη αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  στην περιοχή  $D$ . Και αντίστροφα η ισχύς των εξισώσεων αυτών (3.3.2) μας επιτρέπει την κατασκευή αναλυτικής



συναρτήσεως  $f(z)$  στην περιοχή  $D$  από τις πραγματικές συναρτήσεις  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$  προφανώς με  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , σχέση (3.3.1). Πρόκειται λοιπόν για αναγκαίες και ικανές συνθήκες παραγωγισιμότητας της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$ , επαναλαμβάνεται με τις μερικές παραγώγους σ' αυτές συνεχείς, κάτι όμως που γενικά ισχύει.

### Δ3.3.2. Συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις

Θεωρούμε μια αναλυτική συνάρτηση  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  (με  $z = x + iy$ ) σε ανοικτή περιοχή  $D$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$ . Τότε το πραγματικό μέρος της  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  καθώς και το φανταστικό μέρος της  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$  επαληθεύουν τις δύο συνθήκες των Cauchy–Riemann (3.3.2), δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{συνθήκες των Cauchy–Riemann}) \quad (3.3.6)$$

στην ανοικτή περιοχή  $D$ .

Θα αποδείξουμε τώρα ότι από τις συνθήκες αυτές των Cauchy–Riemann (3.3.6) μπορεί παραπέρα να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  είναι και οι δύο αρμονικές συναρτήσεις. Για την απόδειξη αυτή αρκεί να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  έχουν και δεύτερες συνεχείς μερικές παραγώγους. Τότε παραγωγίζοντας την πρώτη συνθήκη των Cauchy–Riemann ως προς τη μεταβλητή  $x$  και τη δεύτερη ως προς τη μεταβλητή  $y$ , βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}. \quad (3.3.7)$$

Εφόσον όμως οι δεύτερες μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων  $u$  και  $v$  έχουν υποτεθεί συνεχείς, αυτό συμπεριλαμβάνει και τις σχετικές δύο παραπάνω μικτές μερικές παραγώγους. Άρα, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα από το διαφορικό λογισμό, οι δύο αυτές μικτές μερικές παράγωγοι, αφού είναι συνεχείς, θα είναι και ίσες μεταξύ τους. Επομένως θα έχουμε

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \implies \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0. \quad (3.3.8)$$

Τώρα απλά προσθέτοντας τις εξισώσεις (3.3.7) και λαμβάνοντας υπόψη τη δεύτερη σχέση (3.3.8) στο δεξιό μέλος του αθροίσματος που προκύπτει, συνάγουμε ευθύς ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3.3.9)$$

Άρα αποδείξαμε ότι η πραγματική συνάρτηση  $u = u(x, y)$ , δηλαδή το πραγματικό μέρος  $\operatorname{Re} f(z)$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ , πληροί τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Είναι επομένως μια αρμονική συνάρτηση.

Με αντίστοιχο τρόπο μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι η πραγματική συνάρτηση  $v(x, y)$ , το φανταστικό μέρος  $\operatorname{Im} f(z)$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ , είναι και αυτή αρμονική συνάρτηση. Πραγματικά, παραγωγίζουμε τώρα την πρώτη συνθήκη των Cauchy–Riemann (3.3.6) ως προς τη μεταβλητή  $y$ , ενώ προηγουμένως την είχαμε παραγωγίσει ως προς τη μεταβλητή  $x$ . Επίσης παραγωγίζουμε και τη δεύτερη συνθήκη των Cauchy–Riemann (3.3.6), αυτήν ως προς τη μεταβλητή  $x$ , ενώ προηγουμένως την είχαμε παραγωγίσει ως προς τη μεταβλητή  $y$ . Βρίσκουμε έτσι τις σχέσεις

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (3.3.10)$$

Αφαιρούμε τώρα τη δεύτερη σχέση (3.3.10) από την πρώτη και λαμβάνουμε υπόψη την ισότητα των μικτών μερικών παραγώγων

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \implies \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0. \quad (3.3.11)$$

Αυτό το κάναμε ήδη και στις σχέσεις (3.3.8), εκεί όμως για τη συνάρτηση  $v = v(x, y)$ . Με την αφαίρεση αυτή των σχέσεων (3.3.10) και τη δεύτερη σχέση (3.3.11) διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (3.3.12)$$

Έτσι αποδείξαμε ότι όχι μόνο η συνάρτηση  $u = u(x, y)$  είναι αρμονική συνάρτηση, αλλά και η συνάρτηση  $v = v(x, y)$  είναι κι αυτή αρμονική συνάρτηση. Οι δύο αυτές συναρτήσεις είναι βέβαια το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα μιας μόνο αναλυτικής συναρτήσεως: της  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Υπό τις συνθήκες αυτές καλούνται συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις, καλύτερα η συνάρτηση  $v(x, y)$  καλείται συζυγής αρμονική συνάρτηση της συναρτήσεως  $u(x, y)$ . Οι δύο αυτές συναρτήσεις  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  επαληθεύουν τις δύο συνθήκες των Cauchy–Riemann (3.3.6).

Μπορούμε επίσης εύκολα να επαληθεύσουμε ότι και οι δύο συναρτήσεις  $v(x, y)$  και  $-u(x, y)$  είναι και αυτές συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ , δηλαδή

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (3.3.13)$$

οπότε

$$-if(z) = -i[u(x, y) + iv(x, y)] = -iu(x, y) - i^2v(x, y) = -iu(x, y) + v(x, y) = v(x, y) - iu(x, y), \quad (3.3.14)$$

επειδή  $i^2 = -1$ . Άρα οι συναρτήσεις  $v(x, y)$  και  $-u(x, y)$  είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα της λίγο διαφορετικής αναλυτικής συναρτήσεως  $f^*(z) = -if(z)$ . Επομένως είναι και αυτές συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις.

Ίσως τα δύο παρακάτω απλά παραδείγματα να βοηθήσουν στην κατανόηση των συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy–Riemann (3.3.6) καθώς επίσης και της έννοιας των συζυγών αρμονικών συναρτήσεων  $u$  και  $v$ . Αυτές πληρούν τις δύο συνθήκες των Cauchy–Riemann και είναι επιπλέον και αρμονικές συναρτήσεις, όπως αποδείξαμε προηγουμένως.

### Δ3.3.3. Παραδείγματα

▼ **Παράδειγμα Δ3.1:** Θεωρούμε την πολύ απλή αναλυτική συνάρτηση

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \quad (3.3.15)$$

Προφανώς η συνάρτηση αυτή  $f(z)$  είναι ορισμένη, μονότιμη και παραγωγίσιμη (συγκεκριμένα έχει παράγωγο  $f'(z) = 2z$ ) σε κάθε σημείο  $z$  του πεπερασμένου μιγαδικού επιπέδου  $z$ . Επομένως είναι αναλυτική σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο  $z$ : είναι ακέραια συνάρτηση. Επιπλέον από την παραπάνω σχέση (3.3.15) προκύπτουν άμεσα το πραγματικό μέρος  $u = u(x, y)$  και το φανταστικό μέρος  $v = v(x, y)$  της αναλυτικής αυτής συναρτήσεως  $f(z) = z^2$ , που δίνονται από τις σχέσεις

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy. \quad (3.3.16)$$

Θα επαληθεύσουμε πρώτα ότι οι δύο αυτές συναρτήσεις  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  πληρούν τις συνθήκες των Cauchy–Riemann (3.3.6). Στ' αλήθεια ισχύουν οι συνθήκες αυτές, επειδή

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.3.17)$$

Θα επαληθεύσουμε τώρα ότι είναι επιπλέον και αρμονικές συναρτήσεις, δηλαδή πληρούν τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Πραγματικά από τις αμέσως προηγούμενες σχέσεις (3.3.17) παραγωγίζοντας κατάλληλα ξανά ως προς  $x$  και  $y$ , διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 + 0 = 0. \quad (3.3.18)$$

Επαληθεύσαμε λοιπόν ότι οι δύο συναρτήσεις  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  είναι συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις. Αυτό το περιμέναμε βέβαια, γιατί οι δύο αυτές συναρτήσεις ορίστηκαν σαν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα:  $u(x, y) = x^2 - y^2 = \operatorname{Re} f(z)$  και  $v(x, y) = 2xy = \operatorname{Im} f(z)$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z) = z^2 = (x + iy)^2$ . ▲

▼ **Παράδειγμα Δ3.2:** Θεωρούμε τώρα ανάλογα και την κάπως δυσκολότερη αναλυτική συνάρτηση μιγαδικό υπερβολικό συνημίτονο

$$f(z) = \cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \quad (3.3.19)$$

σύμφωνα με τον τύπο (2.3.2). Πρόκειται και πάλι για παραγωγίσιμη συνάρτηση (με παράγωγο  $f'(z) = \sinh z$ ) σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο. Άρα η συνάρτηση  $f(z) = \cosh z$  είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Το πραγματικό μέρος της  $u(x, y)$  και το φανταστικό μέρος της  $v(x, y)$  δίνονται, λόγω της σχέσεως (3.3.19), από τους τύπους

$$u(x, y) = \cosh x \cos y, \quad v(x, y) = \sinh x \sin y \quad (3.3.20)$$

και είναι βέβαια συνεχείς συναρτήσεις.

Με αναλυτική την πιο πάνω μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = \cosh z$  τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος της  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  αντίστοιχα πρέπει να πληρούν τις δύο συνθήκες των Cauchy-Riemann (3.3.6). Και πραγματικά συμβαίνει αυτό, επειδή πολύ εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sinh x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\cosh x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.3.21)$$

Οι ίδιες συναρτήσεις  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  και  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$  είναι επιπλέον συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις. Η αρμονικότητά τους αυτή πρέπει οπωσδήποτε να ισχύει, γιατί η μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  είναι παντού (για κάθε τιμή του  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο) παραγωγίσιμη, άρα είναι και αναλυτική. Ας επαληθεύσουμε τώρα ότι στ' αλήθεια οι δύο αυτές πραγματικές συναρτήσεις  $u(x, y) = \cosh x \cos y$  και  $v(x, y) = \sinh x \sin y$  είναι αρμονικές. Εύκολη είναι και τούτη η απόδειξη:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cosh x \cos y - \cosh x \cos y = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \sinh x \sin y - \sinh x \sin y = 0. \quad (3.3.22)$$

Άρα οι πραγματικές συναρτήσεις  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \cosh x \cos y$  και  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \sinh x \sin y$  είναι δύο συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις. Καλύτερα όμως είναι να λέμε ότι η συνάρτηση  $v(x, y)$  είναι συζυγής αρμονική της συναρτήσεως  $u(x, y)$ . Επίσης ότι η συνάρτηση  $-u(x, y)$  είναι συζυγής αρμονική της συναρτήσεως  $v(x, y)$ , όπως εύκολα μπορούμε επίσης να διαπιστώσουμε. ▲

### Δ3.3.4. Πολική μορφή των συνθηκών Cauchy-Riemann

Οι δύο συνθήκες των Cauchy-Riemann (3.3.6) σε Καρτεσιανή μορφή, τις επαναλαμβάνουμε,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{συνθήκες των Cauchy-Riemann σε Καρτεσιανή μορφή}) \quad (3.3.23)$$

μπορούν βέβαια να γραφούν και σε πολική μορφή με τη χρήση των πολικών συντεταγμένων  $(r, \theta)$  αντί για τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$ . Αυτό είναι βέβαια χρήσιμο σε περίπτωση που το πραγματικό μέρος  $u$  και το φανταστικό μέρος  $v$  της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z) = u + iv$  είναι εκφρασμένα σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ , οπότε έχουμε

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta). \quad (3.3.24)$$

Σ' αυτήν την περίπτωση των πολικών συντεταγμένων  $(r, \theta)$  μπορεί να αποδειχθεί ότι οι συνθήκες των Cauchy-Riemann (3.3.23) παίρνουν την εξής μορφή:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \quad (\text{συνθήκες των Cauchy-Riemann σε πολική μορφή}). \quad (3.3.25)$$

▼ **Παράδειγμα Δ3.3:** Συνεχίζοντας το πιο πάνω Παράδειγμα Δ3.1 της Παραγράφου Δ3.3.3, μπορούμε να γράψουμε την ίδια μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  ως εξής:

$$f(z) = z^2 = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta} = r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) = r^2 \cos 2\theta + ir^2 \sin 2\theta. \quad (3.3.26)$$

Επομένως το πραγματικό μέρος  $u$  και το φανταστικό μέρος  $v$  αυτής της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z) = z^2$  (με παράγωγο, επαναλαμβάνουμε,  $f'(z) = 2z$ ) έχουν σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  τις εκφράσεις

$$u(r, \theta) = r^2 \cos 2\theta, \quad v(r, \theta) = r^2 \sin 2\theta. \quad (3.3.27)$$

Αντικαθιστούμε τώρα τις εκφράσεις αυτές (3.3.27) στις δύο συνθήκες των Cauchy–Riemann στην πολική τους μορφή (3.3.25). Με άμεσες μερικές παραγωγίσεις προκύπτει ότι

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2r \cos 2\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{και} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -2r \sin 2\theta = -\frac{\partial v}{\partial r}. \quad (3.3.28)$$

Διαπιστώνουμε έτσι την ισχύ των δύο συνθηκών των Cauchy–Riemann στο παράδειγμα αυτό. ▲

### Δ3.4. ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΖΥΓΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ

Στην ενότητα αυτή θα αποδείξουμε ότι μια αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  σε μια ανοικτή περιοχή  $D$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$  πρέπει οπωσδήποτε να μην εξαρτάται από τη συζυγή μιγαδική μεταβλητή  $\bar{z} = x - iy$  της μιγαδικής μεταβλητής  $z = x + iy$ .

Υποθέτουμε προς στιγμή ότι η αναλυτική αυτή συνάρτηση  $f$  εξαρτάται και από τη μιγαδική μεταβλητή  $z = x + iy$  και από τη συζυγή της  $\bar{z} = x - iy$ . Τώρα δεχόμαστε ότι ίσως έχουμε το δικαίωμα να γράψουμε  $f = f(z, \bar{z})$ . Δηλώνουμε επίσης το πραγματικό μέρος και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z, \bar{z})$  με  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$  αντίστοιχα, οπότε έχουμε

$$f(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (3.4.1)$$

Τώρα, για να αποδείξουμε την ανεξαρτησία της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z, \bar{z})$  από τη συζυγή μιγαδική μεταβλητή  $\bar{z} = x - iy$ , απλά θα υπολογίσουμε την πρώτη μερική παράγωγο της  $f(z, \bar{z})$  ως προς  $\bar{z}$ . Λαμβάνουμε επίσης υπόψη και τη σχέση (3.4.1). Έτσι βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(u + iv)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(u + iv)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial(u + iv)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}}. \quad (3.4.2)$$

Αλλά λόγω των γνωστών τύπων

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad \iff \quad x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \quad (3.4.3)$$

προκύπτουν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}. \quad (3.4.4)$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις μερικές αυτές παραγώγους στη σχέση (3.4.2), βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{1}{2} + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{i}{2} \quad (3.4.5)$$

και τελικά

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]. \quad (3.4.6)$$

Τελικά διαπιστώνουμε ότι εξαιτίας των συνθηκών των Cauchy–Riemann (3.3.23) και οι δύο μέσα στις παρενθέσεις όροι της σχέσεως (3.4.6) μηδενίζονται για κάθε αναλυτική συνάρτηση  $f$ . Για μια τέτοια συνάρτηση ισχύουν οι συνθήκες των Cauchy–Riemann (3.3.23)! Επομένως συνάγουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{και ολοκληρώνοντας} \quad f = f(z). \quad (3.4.7)$$

Συνεπώς μια μιγαδική συνάρτηση  $f$  που εξαρτάται όχι μόνο από τη μιγαδική μεταβλητή  $z$ , αλλ' επιπλέον και από τη συζυγή της μιγαδική μεταβλητή  $\bar{z}$ , δε μπορεί να είναι αναλυτική συνάρτηση σε μια ανοικτή περιοχή  $D$ . Μόνο οι μιγαδικές συναρτήσεις  $f(z)$  που εξαρτώνται αποκλειστικά από τη μιγαδική μεταβλητή  $z$  (όχι όμως και από τη συζυγή της  $\bar{z}$ ) είναι αναλυτικές συναρτήσεις.

### Δ3.5. ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΣΥΖΥΓΟΥΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ

Μερικές φορές γνωρίζουμε μια αρμονική συνάρτηση  $u$  ή  $v$  και θέλουμε να βρούμε τη συζυγή της αρμονική συνάρτηση. Οι συνθήκες (ή εξισώσεις) των Cauchy–Riemann (σε Καρτεσιανές ή σε πολικές συντεταγμένες) αποτελούν ένα άριστο εργαλείο για το σκοπό αυτό. Πρέπει όμως να προσέχουμε, ώστε να ισχύουν και οι δύο αυτές συνθήκες. Θα επιδείξουμε τη σχετική διαδικασία σε ένα απλό παράδειγμα χρησιμοποιώντας τις συνθήκες των Cauchy–Riemann σε Καρτεσιανή μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{συνθήκες των Cauchy–Riemann σε Καρτεσιανή μορφή}). \quad (3.5.1)$$

▼ **Παράδειγμα Δ3.4:** Συνεχίζοντας το Παράδειγμα Δ3.2 της Παραγράφου Δ3.3.3, θεωρούμε την αρμονική συνάρτηση

$$u(x, y) = \cosh x \cos y \quad (3.5.2)$$

σαν γνωστή συνάρτηση. Δε γνωρίζουμε όμως τη συζυγή της αρμονική συνάρτηση  $v(x, y)$ . Αυτήν τη συνάρτηση  $v(x, y)$  θα την βρούμε κάνοντας χρήση των συνθηκών των Cauchy–Riemann (3.5.1). Υπολογίζοντας τις πρώτες μερικές παραγώγους της γνωστής συναρτήσεως  $u(x, y)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sinh x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\cosh x \sin y, \quad (3.5.3)$$

διαπιστώνουμε ότι οι δύο συνθήκες των Cauchy–Riemann (3.5.1) παίρνουν τώρα τη μορφή

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sinh x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \cosh x \sin y. \quad (3.5.4)$$

Έχουμε δηλαδή δύο πολύ απλές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους πρώτης τάξεως με μία μόνο άγνωστη συνάρτηση: την αρμονική συνάρτηση  $v(x, y)$  που θέλουμε να προσδιορίσουμε.

Ας ξεκινήσουμε από την πρώτη από τις εξισώσεις αυτές (3.5.4), δηλαδή από την εξίσωση

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sinh x \cos y. \quad (3.5.5)$$

Ολοκληρώνοντας ως προς  $y$ , έχουμε τη σχετική λύση

$$v(x, y) = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int \sinh x \cos y dy = \sinh x \sin y + A(x). \quad (3.5.6)$$

Σημειώνουμε σχετικά ότι η μεταβλητή ολοκληρώσεως ήταν εδώ η  $y$ , οπότε η σχετική «σταθερά» ολοκληρώσεως είναι η συνάρτηση  $A(x)$ . Αυτή εξαρτάται από τη μεταβλητή  $x$ , αλλά προφανώς όχι και από τη μεταβλητή ολοκληρώσεως  $y$ .

Έχουμε φθάσει στα μισά της εργασίας μας. Θα πρέπει τώρα να προσδιορίσουμε επιπλέον και τη συνάρτηση  $A(x)$  στην έκφραση (3.5.6) της συναρτήσεως  $v(x, y)$ . Προς το σκοπό αυτό απλά θα κάνουμε χρήση και της δεύτερης συνθήκης των Cauchy–Riemann (3.5.4), δηλαδή της εξισώσεως

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cosh x \sin y. \quad (3.5.7)$$

Παραγωγίζοντας τη λύση (3.5.6) για τη συνάρτηση  $v(x, y)$  ως προς  $x$ , έχουμε

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \cosh x \sin y + A'(x). \quad (3.5.8)$$

Τη μερική αυτή παράγωγο την αντικαθιστούμε τώρα στην εξίσωση (3.5.7), δηλαδή στη δεύτερη συνθήκη των Cauchy–Riemann (3.5.4) στο παρόν παράδειγμα. Προκύπτει

$$\cosh x \sin y + A'(x) = \cosh x \sin y \implies A'(x) = 0 \implies A(x) = C \quad (3.5.9)$$

φυσικά με το  $C$  αυθαίρετη σταθερά. Άρα η σχέση (3.5.6) για τη συζυγή αρμονική συνάρτηση  $v(x, y)$  της γνωστής αρμονικής συναρτήσεως  $u(x, y)$  παίρνει την τελική της μορφή

$$v(x, y) = \sinh x \sin y + C. \quad (3.5.10)$$

Κατορθώσαμε λοιπόν να προσδιορίσουμε την αρμονική συνάρτηση  $v(x, y)$  που είναι συζυγής της γνωστής αρμονικής συναρτήσεως  $u(x, y)$ . Για επαλήθευση μπορούμε να τις αντικαταστήσουμε στις συνθήκες των Cauchy–Riemann (3.5.1). Προφανώς είναι επίσης δυνατόν να ξέρουμε την αρμονική συνάρτηση  $v(x, y)$  και να θέλουμε να προσδιορίσουμε την επίσης αρμονική συνάρτηση  $u(x, y)$ , της οποίας η  $v(x, y)$  είναι η συζυγής. Ο τρόπος της σχετικής εργασίας είναι απόλυτα ανάλογος. ▲

### Δ3.6. ΤΟ ΜΙΓΑΔΙΚΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΡΟΗΣ ΓΙΑ ΙΔΕΑΤΟ ΡΕΥΣΤΟ

Όλα τα παραπάνω βρίσκουν εφαρμογή στη Ρευστομηχανική, συγκεκριμένα στη διδιάστατη, μόνιμη (σταθερή) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού στο επίπεδο  $Oxy$ . Έχουμε μελετήσει με αρκετές λεπτομέρειες τις σχετικές εξισώσεις στην Ενότητα Β3.4 του Μέρους Β των διδακτικών αυτών βιβλίων, που αφορά στις Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους. Συνεπώς, παράκληση, ας ανατρέξουμε στην ενότητα αυτή, για να μην επαναλαμβάνουμε τις σχετικές εξισώσεις.

Οι δύο σχετικές βασικές πραγματικές συναρτήσεις είναι οι εξής: (α) Το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi = \Phi(x, y)$  και η συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση)  $\Psi(x, y)$ . Έχει αποδειχθεί στην Ενότητα Β3.4 που προαναφέραμε ότι και οι δύο αυτές πραγματικές συναρτήσεις είναι αρμονικές. Πιο συγκεκριμένα, το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi = \Phi(x, y)$  είναι αρμονική συνάρτηση, επειδή πρέπει να ισχύει (όταν χρησιμοποιούμε το δυναμικό ταχύτητας) η τόσο θεμελιώδης εξίσωση της συνεχείας στη ροή ιδεατού ρευστού που εξετάζουμε. (Σημειώνεται ότι η εξίσωση του αστρόβιλου της ροής πληρούται αυτόματα!) Από την άλλη πλευρά η συνάρτηση ροής  $\Psi = \Psi(x, y)$  είναι και αυτή αρμονική συνάρτηση, γιατί πρέπει να ισχύει (με τη χρήση της συναρτήσεως ροής) η εξίσωση του αστρόβιλου της ροής. (Σημειώνεται επίσης ότι η εξίσωση της συνεχείας πληρούται αυτόματα!)

Κάνοντας ταυτόχρονη αναφορά και στο δυναμικό ταχύτητας  $\Phi = \Phi(x, y)$  και στη συνάρτηση ροής  $\Psi = \Psi(x, y)$ , έχουμε τις σχέσεις (3.4.26) και (3.4.27) της Παραγράφου Β3.4.5 του Μέρους Β των διδακτικών αυτών βιβλίων για τις δύο συνιστώσες  $V_x$  και  $V_y$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού:

$$V_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.6.1)$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι, για να μη μπορεί να γίνει σύγχυση με το πραγματικό μέρος  $u$  και το φανταστικό μέρος  $v$  μιας αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ , χρησιμοποιούμε εδώ τα σύμβολα  $V_x$  και  $V_y$  (αντί για τα σύμβολα  $u$  και  $v$  αντίστοιχα) για τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού.

Τί ακριβώς μας δείχνουν οι δύο εξισώσεις (3.6.1); Απλά ότι το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi = \Phi(x, y)$  και η συνάρτηση ροής  $\Psi = \Psi(x, y)$  δεν είναι δύο τυχαίες, ανεξάρτητες μεταξύ τους αρμονικές συναρτήσεις, αλλ' είναι δύο συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις. Αυτό συμβαίνει, επειδή οι δύο πιο πάνω εξισώσεις (3.6.1) είναι ουσιαστικά οι συνθήκες των Cauchy–Riemann για τις δύο συναρτήσεις  $\Phi = \Phi(x, y)$  και  $\Psi = \Psi(x, y)$ . Εάν αμφιβάλλουμε, ας κάνουμε μια σύγκριση των εξισώσεων (3.6.1) με τις συνθήκες των Cauchy–Riemann (3.3.2) ή (3.3.6) ή (3.3.23) ή (3.5.1).

Για το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi = \Phi(x, y)$  και τη συνάρτηση ροής  $\Psi = \Psi(x, y)$  υποθέτουμε επίσης ότι έχουν πρώτες συνεχείς μερικές παραγώγους στις εξισώσεις (3.6.1). Επομένως οι συνιστώσες της ταχύτητας  $V_x$  και  $V_y$  στις εξισώσεις αυτές είναι συνεχείς συναρτήσεις, κάτι που γενικά ισχύει.

Άρα με την ισχύ των εξισώσεων (3.6.1), ουσιαστικά των συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy–Riemann, οι δύο αυτές συναρτήσεις  $\Phi = \Phi(x, y)$  (δυναμικό ταχύτητας) και  $\Psi = \Psi(x, y)$  (συνάρτηση ροής) αποτελούν το πραγματικό μέρος (Re) και το φανταστικό μέρος (Im) αντίστοιχα μιας αναλυτικής συναρτήσεως  $\Omega(z)$  στο πεδίο της ροής. (Εξαιρούνται μεμονωμένα σημεία του πεδίου αυτού.) Την αναλυτική αυτή συνάρτηση  $\Omega(z)$  την καλούμε **μιγαδικό δυναμικό ροής**. Επομένως έχουμε

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad \text{με} \quad z = x + iy. \quad (3.6.2)$$

Με την εισαγωγή του μιγαδικού δυναμικού ροής  $\Omega(z)$  δε χρειάζεται πια να εργαζόμαστε με τις δύο πραγματικές μεταβλητές  $x$  και  $y$ : η μία μιγαδική μεταβλητή  $z$  αρκεί! Αποδείξαμε μάλιστα στην προπροηγούμενη Ενότητα Δ3.4 ότι μια αναλυτική συνάρτηση  $f$  είναι συνάρτηση μόνο της μιγαδικής μεταβλητής  $z = x + iy$  και όχι και της συζυγούς της  $\bar{z} = x - iy$ . Η απόδειξη αυτή ισχύει βέβαια και για το μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z)$  στην περίπτωση της Ρευστομηχανικής: είναι και αυτό συνάρτηση μιας μόνο μιγαδικής μεταβλητής: της  $z$ . (Δηλαδή δεν παρουσιάζεται καθόλου σ' αυτό η συζυγής μιγαδική μεταβλητή  $\bar{z}$ .) Άρα έχουμε, ουσιαστικά μάλιστα!, μία μόνο μεταβλητή: τη  $z$ . Επιπλέον, έχοντας προσδιορίσει το μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z)$ , μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε τόσο το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi = \Phi(x, y)$  όσο και τη συνάρτηση ροής  $\Psi = \Psi(x, y)$  σαν το πραγματικό μέρος (Re) και το φανταστικό μέρος (Im) αντίστοιχα του μιγαδικού δυναμικού ροής  $\Omega(z)$ .

Με γνωστό είτε το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi = \Phi(x, y)$  είτε τη συνάρτηση ροής  $\Psi = \Psi(x, y)$  έχουμε βέβαια τη δυνατότητα να προσδιορίσουμε την ταχύτητα  $\mathbf{V}$  του ρευστού μέσω των συνιστωσών της  $V_x$  και  $V_y$  χρησιμοποιώντας τους τύπους (3.6.1). Όπως ήδη αναφέραμε, οι τύποι αυτοί είναι ουσιαστικά οι συνθήκες των Cauchy–Riemann για το πρόβλημα Ρευστομηχανικής που εξετάζουμε.

Εντούτοις μια εναλλακτική και υπολογιστικά καλύτερη δυνατότητα είναι η ακόλουθη: Με βάση τις σχέσεις (3.3.3) και (3.3.4) για την παράγωγο  $f'(z)$  μιας αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  έχουμε

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{ή} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.6.3)$$

Στην περίπτωσή μας, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.6.1) και (3.6.2), απλά διαπιστώνουμε ότι οι σχέσεις (3.6.3) παίρνουν για το μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z)$  τις μορφές

$$\Omega'(z) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \text{ή} \quad \Omega'(z) = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - i \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (3.6.4)$$

Ακόμη καλύτερη (ξανά λόγω των σχέσεων (3.6.1)) είναι η τελική τους μορφή

$$\Omega'(z) = V_x - iV_y. \quad (3.6.5)$$

Η παράγωγος αυτή  $\Omega'(z)$  καλείται συχνά **μιγαδική ταχύτητα** του ρευστού. Η συνηθισμένη όμως ταχύτητα είναι η συζυγής της  $V_x + iV_y$  (επίσης σε μιγαδική μορφή). Αυτή βρίσκεται άμεσα από την προηγούμενη σχέση (3.6.5) απλά παίρνοντας τη συζυγή της:

$$\overline{\Omega'(z)} = V_x + iV_y \quad \text{ή} \quad \text{απόλυτα ισοδύναμα} \quad \overline{\Omega'(\bar{z})} = V_x + iV_y. \quad (3.6.6)$$

### Δ3.6.1. Εφαρμογή: Ροή ιδεατού ρευστού σε ορθή γωνία

Όταν η ροή της προηγούμενης παραγράφου γίνεται στην ορθή γωνία  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$ , δηλαδή στο πρώτο τεταρτημόριο των Καρτεσιανών συντεταγμένων  $Oxy$  (με τοιχώματα για τη ροή αυτή τους δύο άξονες  $Ox$  και  $Oy$ ), τότε το μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z)$  θα είναι

$$\Omega(z) = Az^2, \quad \text{οπότε} \quad \Omega'(z) = 2Az. \quad (3.6.7)$$

(Το  $A$  είναι μια κατάλληλη πραγματική σταθερά.) Την αναλυτική αυτή συνάρτηση  $z^2$ , χωρίς όμως τη σταθερά  $A$ , την έχουμε ήδη μελετήσει διεξοδικά σε παραδείγματα των Παραγράφων Δ3.3.3 (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες) και Δ3.3.4 (σε πολικές συντεταγμένες). Άρα ουσιαστικά έχουμε ήδη μελετήσει τη ροή σε ορθή γωνία. Για παράδειγμα, εδώ

$$\Phi(x, y) = \operatorname{Re} \Omega(z) = \operatorname{Re} Az^2 = A(x^2 - y^2) \quad \text{και} \quad \Psi(x, y) = \operatorname{Im} \Omega(z) = \operatorname{Im} Az^2 = 2Axy \quad (3.6.8)$$

(πραγματικό μέρος και φανταστικό μέρος του μιγαδικού δυναμικού ροής  $\Omega(z)$  αντίστοιχα).

Επίσης από τον τύπο (3.6.5), συγκεκριμένα τον τύπο  $\Omega'(z) = V_x - iV_y$ , για τη μιγαδική ταχύτητα του ρευστού, εδώ την  $\Omega'(z) = 2Az$ , προκύπτει αμέσως (με  $z = x + iy$ ) ότι

$$\Omega'(z) = 2Az = 2Ax + i2Ay \implies V_x = \operatorname{Re} \Omega'(z) = 2Ax \quad \text{και} \quad V_y = -\operatorname{Im} \Omega'(z) = -2Ay. \quad (3.6.9)$$

Φυσικά οι δύο συνιστώσες  $V_x$  και  $V_y$  της ταχύτητας  $\mathbf{V}$  του ρευστού πληρούν και την εξίσωση της συνεχείας και την εξίσωση του αστρόβιλου της ροής (Παράγραφος Β3.4.3), δηλαδή τις εξισώσεις

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} = 0 \quad (3.6.10)$$

αντίστοιχα, όπως άμεσα μπορεί να επαληθευθεί.

### Δ3.6.2. Έξι παραδείγματα μιγαδικών δυναμικών ροής

Πέρα από το παράδειγμα του μιγαδικού δυναμικού ροής (3.6.7) για τη ροή ιδεατού ρευστού στην ορθή γωνία  $x \geq 0$  και  $y \geq 0$  υπάρχουν πάρα πολλά ακόμη γνωστά παραδείγματα μιγαδικών δυναμικών ροής  $\Omega(z)$  στη Ρευστομηχανική. Αναφέρουμε έξι πολύ γνωστά και χρήσιμα από αυτά:

1. Ομοιόμορφη ροή παράλληλη στον άξονα  $Ox$  με ταχύτητα  $V_0$ :

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = V_0 z, \quad \text{οπότε} \quad \Omega'(z) = V_x - iV_y = V_0. \quad (3.6.11)$$

2. Ροή που οφείλεται σε **πηγή** εντάσεως (παροχής)  $Q$  στο σημείο  $z_0$ :

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0), \quad \text{οπότε} \quad \Omega'(z) = V_x - iV_y = \frac{Q}{2\pi(z - z_0)}. \quad (3.6.12)$$

Σημειώνεται ότι εάν η ποσότητα  $Q$  είναι αρνητική, αντί πηγή έχουμε **καταβόθρα** ή **απαγωγή**.

3. Ροή που οφείλεται σε **δίνη** κυκλοφορίας  $\Gamma$  στο σημείο  $z_0$ :

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0), \quad \text{οπότε} \quad \Omega'(z) = V_x - iV_y = \frac{\Gamma}{2\pi i(z - z_0)}. \quad (3.6.13)$$

4. Ροή που οφείλεται σε **δίπολο** εντάσεως  $\mu$  στο σημείο  $z_0$  με γωνία  $\alpha$  ως προς τον άξονα  $Ox$ :

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = \frac{\mu e^{i\alpha}}{2\pi(z - z_0)}, \quad \text{οπότε} \quad \Omega'(z) = V_x - iV_y = -\frac{\mu e^{i\alpha}}{2\pi(z - z_0)^2}. \quad (3.6.14)$$

5. Ομοιόμορφη ροή παράλληλη στον άξονα  $Ox$  με ταχύτητα  $V_0$  που παρεμποδίζεται από σταθερό στερεό κυκλικό κύλινδρο με κέντρο το σημείο  $z_0 = 0$  και ακτίνα  $a$ :

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = V_0 \left( z + \frac{a^2}{z} \right), \quad \text{οπότε} \quad \Omega'(z) = V_x - iV_y = V_0 \left( 1 - \frac{a^2}{z^2} \right). \quad (3.6.15)$$

6. Ομοιόμορφη ροή παράλληλη στον άξονα  $Ox$  με ταχύτητα  $V_0$  που παρεμποδίζεται από σταθερό στερεό ευθύγραμμο (επίπεδο) εμπόδιο (πλάκα) μήκους  $2a$  που είναι κάθετο στη ροή:

$$\Omega(z) = \Phi + i\Psi = V_0 \sqrt{z^2 + a^2}, \quad \text{οπότε} \quad \Omega'(z) = V_x - iV_y = V_0 \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}. \quad (3.6.16)$$

Σημειώνεται ότι πρόκειται για παρόμοιο παράδειγμα ροής με το παράδειγμα Ρευστομηχανικής στο πίσω μέρος της σελίδας τίτλου αυτού του Μέρους Δ για τις Μιγαδικές Συναρτήσεις.



### Δ3.7. ΤΑ ΜΙΓΑΔΙΚΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΤΗΣ ΕΠΙΠΕΔΗΣ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

#### Δ3.7.1. Τα μιγαδικά δυναμικά των Kolosov–Muskhelishvili στην Επίπεδη Ελαστικότητα

Ανάλογα με τη Ρευστομηχανική οι Μιγαδικές Συναρτήσεις, ειδικότερα οι αναλυτικές συναρτήσεις, είναι ιδιαίτερα χρήσιμες και στην Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών. Συγκεκριμένα είναι χρήσιμες στην Επίπεδη Ελαστικότητα για ένα ισότροπο και γραμμικά ελαστικό μέσον  $R$  με την ισχύ του νόμου του Hooke. Σε ένα τέτοιο μέσον  $R$  σημαντικές για τον Πολιτικό Μηχανικό είναι κυρίως οι τάσεις (καλύτερα οι συνιστώσες του ταυυστή των τάσεων)  $\sigma_x, \sigma_y$ , ορθές τάσεις, και  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ , διατμητικές τάσεις, και δευτερευόντως οι παραμορφώσεις (καλύτερα οι συνιστώσες του ταυυστή των παραμορφώσεων)  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ , ορθές παραμορφώσεις, και  $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$ , διατμητικές παραμορφώσεις. (Πιο συχνά χρησιμοποιούνται οι  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$  με  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ .) Προφανώς με τη χρήση του νόμου του Hooke γνωρίζοντας τις τάσεις μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τις παραμορφώσεις. Περιοριζόμαστε λοιπόν στις τρεις τάσεις  $\sigma_x, \sigma_y$  (ορθές τάσεις) και  $\tau_{xy}$  (διατμητική τάση), μια που  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ .

Στην Ενότητα Β3.1 του Μέρους Β των διδακτικών αυτών βιβλίων αναφερθήκαμε ήδη στο επίπεδο ελαστικό πρόβλημα στη Μηχανική των Υλικών. Στο πρόβλημα αυτό το σύστημα των τριών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους που ισχύει για τις τάσεις  $\sigma_x, \sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  αποτελείται από τις δύο εξισώσεις ισορροπίας και την εξίσωση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων. (Αυτή συχνά γράφεται τελικά συναρτήσει μόνο του αθροίσματος  $\sigma_x + \sigma_y$  των ορθών τάσεων  $\sigma_x$  και  $\sigma_y$ .) Στην ίδια ενότητα είδαμε πως το σύστημα των τριών αυτών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους ανάγεται τελικά στη διαρμονική εξίσωση  $\nabla^4 A(x, y) = 0$ , εξίσωση (3.1.41) της Ενότητας Β3.1 του Μέρους Β των διδακτικών βιβλίων, για την τασική συνάρτηση του Airy  $A(x, y)$ .

Μπορεί να αποδειχθεί με γενίκευση της μεθόδου της Παραγράφου Β4.2.1 του Μέρους Β για την εξίσωση του Laplace  $\nabla^2 u(x, y) = 0$  πως η διαρμονική εξίσωση  $\nabla^4 A(x, y) = 0$  έχει τη γενική λύση

$$A(x, y) = \text{Re} [\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \quad \text{με} \quad z = x + iy \quad (3.7.1)$$

και  $\varphi(z)$  και  $\psi(z)$  δύο μιγαδικά δυναμικά. Η λύση αυτή βρέθηκε για πρώτη φορά από τον Goursat το 1898. Όμως αξιοποιήθηκε ουσιαστικά στην Επίπεδη Ελαστικότητα αργότερα. Πρώτος ο Kolosov το 1909 προσδιόρισε (χωρίς τη χρήση της τασικής συναρτήσεως  $A(x, y)$ ) τις τάσεις  $\sigma_x, \sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  σε κάθε επίπεδο ελαστικό μέσον  $R$  με τη χρήση των δύο μιγαδικών δυναμικών  $\varphi(z)$  και  $\psi(z) = \chi'(z)$ . Αυτά καλούνται **μιγαδικά δυναμικά των Kolosov–Muskhelishvili**. Οι σχετικοί τύποι γραμμένοι με τις παραγώγους

$$\Phi(z) = \varphi'(z) \quad \text{και} \quad \Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z) \quad (3.7.2)$$

είναι οι εξής δύο:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \text{Re} \Phi(z) \quad \text{ισοδύναμα} \quad \sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad (3.7.3)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]. \quad (3.7.4)$$

Για να γίνουμε λίγο πιο συγκεκριμένοι, από τη δεύτερη εξίσωση (3.7.4), η οποία είναι καθαρά μιγαδική, παίρνοντας το φανταστικό μέρος στο δεξιό μέλος και διαιρώντας δια 2, προσδιορίζουμε τη διατμητική τάση  $\tau_{xy}$ . Παίρνοντας ανάλογα το πραγματικό μέρος της ίδιας εξισώσεως (3.7.4), προσδιορίζουμε τη διαφορά  $\sigma_y - \sigma_x$  των δύο ορθών τάσεων  $\sigma_y$  και  $\sigma_x$ . Όμως από την πρώτη εξίσωση (3.7.3) γνωρίζουμε το άθροισμα  $\sigma_x + \sigma_y$  των ίδιων ορθών τάσεων  $\sigma_x$  και  $\sigma_y$ . Ξέροντας λοιπόν τόσο το άθροισμα  $\sigma_x + \sigma_y$  όσο και τη διαφορά  $\sigma_y - \sigma_x$  των ορθών τάσεων, τις υπολογίζουμε άμεσα και τις δυο τους, δηλαδή και τη  $\sigma_x$  και τη  $\sigma_y$ .

Και με άλλα λόγια: για οποιοσδήποτε αναλυτικές συναρτήσεις  $\Phi(z)$  και  $\Psi(z)$  σε ένα επίπεδο ελαστικό μέσον  $R$  οι τύποι (3.7.3) και (3.7.4) των Kolosov–Muskhelishvili μας εξασφαλίζουν αυτόματα (χωρίς κανέναν υπολογισμό!) την πλήρωση και των εξισώσεων ισορροπίας και της εξισώσεως συμβιβαστού των παραμορφώσεων στο εσωτερικό  $D$  του ελαστικού μέσου  $R$ . Επομένως το μόνο που μας απομένει τώρα είναι ο κατάλληλος προσδιορισμός των μιγαδικών δυναμικών  $\varphi(z)$  και  $\psi(z)$  των

Koloson–Muskhelishvili ή καλύτερα των παραγώγων τους  $\Phi(z) = \varphi'(z)$  και  $\Psi(z) = \psi'(z) = \chi''(z)$ , ώστε να πληρούνται οι συνοριακές συνθήκες στο σύνορο  $C$  του ελαστικού μέσου  $R$ . Δυστυχώς όμως κι αυτό το καθήκον δεν είναι τετριμμένο: απαιτεί αρκετό κόπο από τον Πολιτικό Μηχανικό.

Ας σημειώσουμε στο σημείο αυτό πως οι παραπάνω θεμελιώδεις τύποι (3.7.3) και (3.7.4) των Koloson–Muskhelishvili είναι γραμμένοι τώρα με τις Καρτεσιανές μορφές των τάσεων  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$ . Μπορούν όμως να γραφούν επίσης και με τις πολικές μορφές των τάσεων  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  και  $\tau_{r\theta}$  (με  $r$  τη διεύθυνση της πολικής ακτίνας και  $\theta$  την κάθετη προς αυτή διεύθυνση της πολικής γωνίας κατά τη θετική φορά) αντίστοιχα. Τότε οι παραπάνω τύποι (3.7.3) και (3.7.4) τροποποιούνται ως εξής:

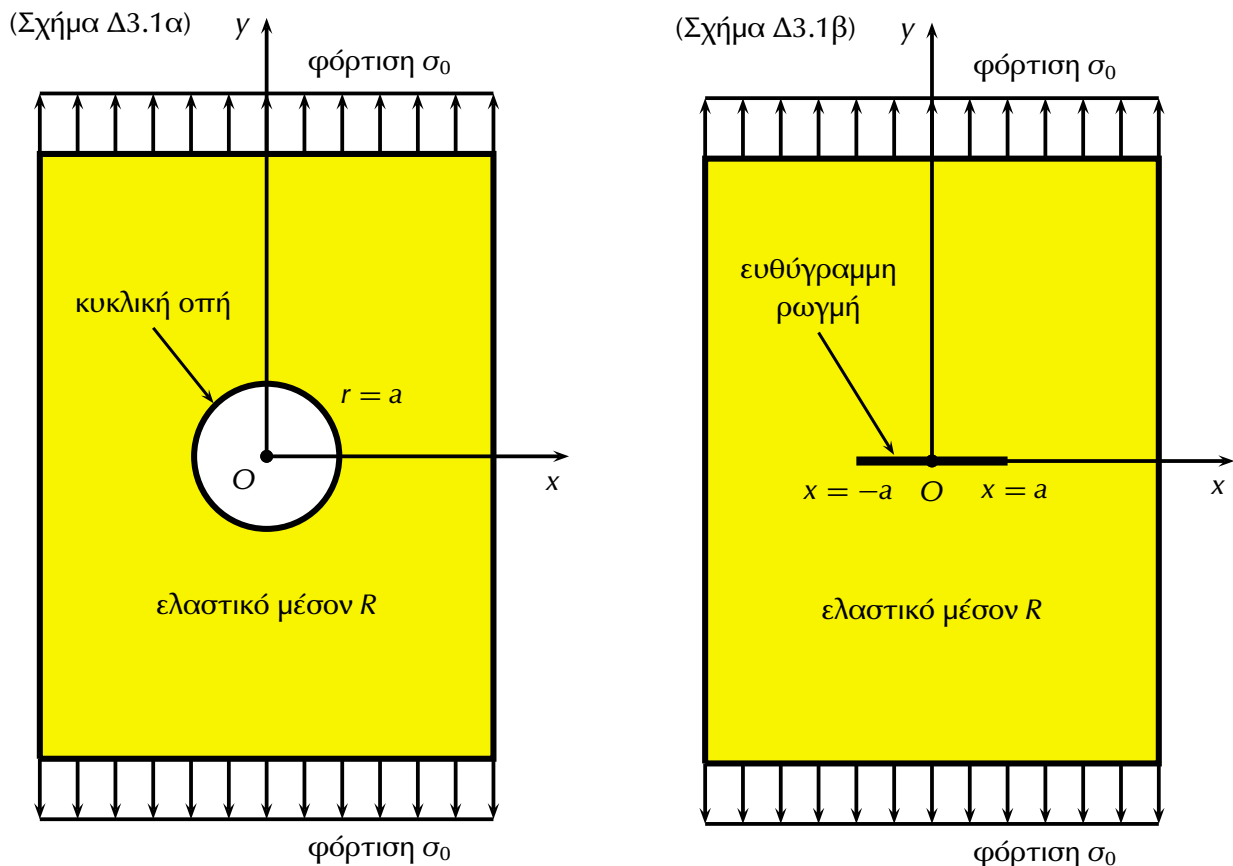
$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \Phi(z) \quad \text{ισοδύναμα} \quad \sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad (3.7.5)$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\theta} \quad (3.7.6)$$

με  $\theta$  τη γνωστή μας πολική γωνία ( $z = re^{i\theta}$ ). Αυτή μεταβάλλεται συνήθως στο διάστημα  $[0, 2\pi)$ .

### Δ3.7.2. Εφαρμογή: Άπειρο ελαστικό μέσον με κυκλική οπή: συγκέντρωση τάσεων

Σαν εφαρμογή της χρήσεως των μιγαδικών δυναμικών των Koloson–Muskhelishvili  $\varphi(z)$  και  $\psi(z)$  θεωρούμε το πρόβλημα του εφελκυσμού με φόρτιση  $\sigma_0$  στο άπειρο κατά τη διεύθυνση του άξονα  $Oy$  ενός άπειρου ελαστικού μέσου  $R$  με κυκλική οπή ακτίνας  $a$  με κέντρο το σημείο  $O = (0, 0)$ . Πάνω στην κυκλική οπή δεν υπάρχει φόρτιση: ούτε κάθετη ούτε διατμητική. Στο παρακάτω Σχήμα Δ3.1α δείχνουμε ένα πεπερασμένο μέσον που προσεγγίζει το άπειρο αυτό μέσον. Στο διπλανό του Σχήμα Δ3.1β δείχνουμε ένα αντίστοιχο μέσον με ευθύγραμμη ρωγμή στο διάστημα  $[-a, a]$  με ενδιαφέρον στη Θραυστομηχανική. Αυτό θα το εξετάσουμε στην επόμενη Παράγραφο Δ3.7.3.



**Σχήμα Δ3.1:** Ένα προσεγγιστικά άπειρο επίπεδο ελαστικό μέσον  $R$  υπό εφελκυστική φόρτιση  $\sigma_0$  στο άπειρο κατά τη διεύθυνση του άξονα  $Oy$  (α) με κυκλική οπή κέντρου  $O = (0, 0)$  και ακτίνας  $a$  (Παράγραφος Δ3.7.2) και (β) με ευθύγραμμη ρωγμή  $[-a, a]$  στον άξονα  $Ox$  (Παράγραφος Δ3.7.3).

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει βρεθεί στην Επίπεδη Ελαστικότητα ότι τα δύο μιγαδικά δυναμικά  $\varphi(z)$  και  $\psi(z)$  των Koloson–Muskhelishvili δίνονται από τους ακόλουθους απλούς τύπους

$$\varphi(z) = \frac{\sigma_0}{4} \left( z - \frac{2a^2}{z} \right) \quad \text{και} \quad \psi(z) = \frac{\sigma_0}{2} \left( z - \frac{a^2}{z} - \frac{a^4}{z^3} \right). \quad (3.7.7)$$

Με παραγωγίσεις τους ως προς  $z$ , παίρνουμε εύκολα τις παραγώγους τους που χρειαζόμαστε

$$\Phi(z) = \varphi'(z) = \frac{\sigma_0}{4} \left( 1 + \frac{2a^2}{z^2} \right), \quad \Phi'(z) = \varphi''(z) = -\frac{\sigma_0 a^2}{z^3} \quad (3.7.8)$$

και επίσης

$$\Psi(z) = \psi'(z) = \frac{\sigma_0}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{z^2} + \frac{3a^4}{z^4} \right). \quad (3.7.9)$$

Λόγω της κυκλικής οπής μας διευκολύνει εδώ να εργασθούμε σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  χρησιμοποιώντας τους δύο σχετικούς τροποποιημένους τύπους (3.7.5) και (3.7.6) των Koloson–Muskhelishvili που ήδη αναφέραμε. Σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  με  $z = re^{i\theta}$  διαπιστώνουμε ότι

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{r^2 e^{2i\theta}} = \frac{1}{r^2} e^{-2i\theta}, \quad \frac{1}{z^3} = \frac{1}{r^3 e^{3i\theta}} = \frac{1}{r^3} e^{-3i\theta} \quad \text{και} \quad \frac{1}{z^4} = \frac{1}{r^4 e^{4i\theta}} = \frac{1}{r^4} e^{-4i\theta}. \quad (3.7.10)$$

Έτσι και με  $\bar{z} = re^{-i\theta}$  εύκολα βρίσκουμε από τον πρώτο τύπο (3.7.5) με τη χρήση και της αναλυτικής συναρτήσεως (του μιγαδικού δυναμικού)  $\Phi(z)$  της πρώτης σχέσεως (3.7.8) ότι

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 4 \operatorname{Re} \left[ \frac{\sigma_0}{4} \left( 1 + \frac{2a^2}{z^2} \right) \right] = \sigma_0 \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta \right). \quad (3.7.11)$$

Ανάλογα κι εξίσου εύκολα βρίσκουμε από το δεύτερο τύπο (3.7.6) με τη χρήση των αναλυτικών συναρτήσεων  $\Phi'(z)$  και  $\Psi(z)$  από τη δεύτερη σχέση (3.7.8) και τη σχέση (3.7.9) αντίστοιχα ότι

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\theta} = 2 \left[ re^{-i\theta} \left( -\frac{\sigma_0 a^2}{r^3 e^{3i\theta}} \right) + \frac{\sigma_0}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} e^{-2i\theta} + \frac{3a^4}{r^4} e^{-4i\theta} \right) \right] e^{2i\theta} \\ &= \sigma_0 \left( -\frac{2a^2}{r^2} e^{-4i\theta} + 1 + \frac{a^2}{r^2} e^{-2i\theta} + \frac{3a^4}{r^4} e^{-4i\theta} \right) e^{2i\theta} = \sigma_0 \left( e^{2i\theta} - \frac{2a^2}{r^2} e^{-2i\theta} + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} e^{-2i\theta} \right). \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

Παίρνοντας τώρα το φανταστικό μέρος της τελευταίας σχέσεως (3.7.12), με χρήση και των γνωστών μας τύπων του Euler (1.1.4):  $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ , και διαιρώντας δια 2, προσδιορίζουμε τη διατμητική τάση  $\tau_{r\theta}$  φυσικά σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Αυτή έχει τη μορφή

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sigma_0}{2} \left( \sin 2\theta + \frac{2a^2}{r^2} \sin 2\theta - \frac{3a^4}{r^4} \sin 2\theta \right) = \frac{\sigma_0}{2} \left( 1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta. \quad (3.7.13)$$

Ειδικά τώρα στην περιφέρεια  $r = a$  της κυκλικής οπής ο τύπος αυτός για τη διατμητική τάση  $\tau_{r\theta}$  μας δίνει (με  $r = a$ )  $\tau_{r\theta} = 0$ , όπως πολύ εύκολα διαπιστώνουμε, αφού με  $r = a$  έχουμε στο δεξιό μέλος του  $1 + (2a^2/a^2) - (3a^4/a^4) = 1 + 2 - 3 = 3 - 3 = 0$ . Ήταν αναμενόμενο αυτό: να μην υπάρχει καθόλου διατμητική τάση πάνω στην περιφέρεια της κυκλικής οπής, αφού αυτή θεωρήθηκε χωρίς καθόλου εξωτερική φόρτιση. Επαληθεύσαμε λοιπόν τη συνοριακή συνθήκη ελλείψεως διατμητικής φορτίσεως πάνω στην περιφέρεια της κυκλικής οπής βρίσκοντας  $\tau_{r\theta} = 0$  σ' αυτήν. Προχωράμε!

Θα προσδιορίσουμε τώρα τις δύο ορθές τάσεις  $\sigma_r$  και  $\sigma_\theta$  συνεχίζοντας να δουλεύουμε εδώ σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Διαθέτουμε ήδη τη σχέση (3.7.11) για το άθροισμά τους  $\sigma_r + \sigma_\theta$ . Παίρνουμε τώρα και το φανταστικό μέρος της σχέσεως (3.7.12) χρησιμοποιώντας ξανά και τους τύπους του Euler:  $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ . Χωρίς καμία δυσκολία προκύπτει έτσι η διαφορά  $\sigma_\theta - \sigma_r$ :

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \sigma_0 \left( \cos 2\theta - \frac{2a^2}{r^2} \cos 2\theta + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \cos 2\theta \right). \quad (3.7.14)$$

Τώρα προσθαφαιρώντας τους δύο τύπους (3.7.11) και (3.7.14), προσδιορίζουμε αμέσως και τις δύο ορθές τάσεις  $\sigma_r$  και  $\sigma_\theta$ , εδώ βέβαια σε πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$ . Προκύπτουν οι τύποι

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right], \quad \sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2} \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right]. \quad (3.7.15)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι δύο αυτοί τύποι πάνω στην περιφέρεια της κυκλικής οπής με  $r = a$ . Πράγματι για  $r = a$  προκύπτει  $\sigma_r = 0$  σε όλη την περιφέρεια  $r = a$ , ακριβώς όπως είχε συμβεί και με τη διατμητική τάση  $\tau_{r\theta}$ . Αυτό είναι απόλυτα δικαιολογημένο, επειδή η κυκλική οπή έχει υποθεθεί πως είναι αφόρτιστη. Άρα πρέπει να ισχύει  $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$  στην περιφέρειά της.

Προχωράμε τώρα και στη δεύτερη ορθή τάση  $\sigma_\theta$ . Αυτή δεν είναι ανάγκη να μηδενίζεται στην περιφέρεια  $r = a$  της κυκλικής οπής. Πράγματι για  $r = a$  η πιο πάνω σχέση (3.7.15) δίνει για τη  $\sigma_\theta$

$$\sigma_\theta = \sigma_0(1 + 2 \cos 2\theta). \quad (3.7.16)$$

Δε μηδενίζεται λοιπόν η τάση  $\sigma_\theta$  στην περιφέρεια  $r = a$ . Μπορούμε να δούμε ότι τη μέγιστη τιμή της την παίρνει όταν  $\cos 2\theta = 1$ , δηλαδή όταν  $\theta = 0$  ή  $\theta = \pi$ . Τότε η μέγιστη αυτή τιμή είναι

$$\sigma_{\theta, \max} = 3\sigma_0 \quad \text{και ισοδύναμα} \quad \frac{\sigma_{\theta, \max}}{\sigma_0} = 3. \quad (3.7.17)$$

Δηλαδή στα σημεία  $(x = a, y = 0)$  (με  $\theta = 0$ ) και  $(x = -a, y = 0)$  (με  $\theta = \pi$ ) η τάση κατά τη διεύθυνση του άξονα  $Oy$  (αυτή είναι προφανώς η τάση  $\sigma_\theta$  για  $\theta = 0$  ή  $\theta = \pi$ ) είναι τριπλάσια της σταθερής τάσεως  $\sigma_0$  κατά τον άξονα  $Oy$  στο άπειρο (Σχήμα Δ3.1α). Υπό τις συνθήκες αυτές λέμε ότι η ύπαρξη της κυκλικής οπής στο άπειρο ελαστικό μέσον προκαλεί **συντελεστή συγκεντρώσεως τάσεων** ίσο με 3. Άρα ακόμη κι οι τόσο λείες κυκλικές οπές είναι καλό να αποφεύγονται όσες φορές είναι δυνατόν από τον Πολιτικό Μηχανικό. Δημιουργούν συκέντρωση τάσεων (με συντελεστή 3) και επομένως μπορούν να οδηγήσουν σε διαρροή ή σε θραύση με ξεκίνημα από τα σημεία  $(\pm a, 0)$ .

### Δ3.7.3. Το μιγαδικό δυναμικό του Westergaard στη Θραυστομηχανική: απειρισμός των τάσεων

Τα δύο μιγαδικά δυναμικά  $\phi(z)$  και  $\psi(z)$  των Kolosov–Muskhelishvili και οι παράγωγοί τους  $\Phi(z) = \phi'(z)$  και  $\Psi(z) = \psi'(z)$  είναι επίσης χρήσιμα και σε προβλήματα ρωγμών στη Θραυστομηχανική. Ένα τέτοιο πρόβλημα φαίνεται στο Σχήμα Δ3.1β της προπροηγούμενης σελίδας. Σε ειδικά προβλήματα Θραυστομηχανικής, όπως αυτό του Σχήματος Δ3.1β με τη ρωγμή (ή τις ρωγμές) πάνω στον άξονα  $Ox$  και τη φόρτιση κατά τον άξονα  $Oy$ , μπορούμε εναλλακτικά (και πιο εύκολα) να χρησιμοποιήσουμε το μιγαδικό δυναμικό του Westergaard  $Z(z) = 2\Phi(z)$ : μονάχα ένα μιγαδικό δυναμικό. Για παράδειγμα, για το μέσον  $R$  του Σχήματος Δ3.1β και τη σχετική φόρτιση  $\sigma_0$  έχουμε

$$Z(z) = \frac{\sigma_0 z}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (3.7.18)$$

Με τη χρήση του μιγαδικού δυναμικού  $Z(z)$  του Westergaard (στα ειδικά προβλήματα όπου αυτό ισχύει) μπορεί να αποδειχθεί ότι οι τρεις τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  δίνονται από τους τρεις τύπους

$$\sigma_x = \operatorname{Re} Z(z) - y \operatorname{Im} Z'(z), \quad \sigma_y = \operatorname{Re} Z(z) + y \operatorname{Im} Z'(z), \quad \tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z'(z). \quad (3.7.19)$$

Όμως το σημαντικό είναι ότι υπάρχει κακιά γεωμετρία στη ρωγμή (εδώ στα άκρα της  $z = \pm a$ ), που εμφανίζεται με απειρισμό (και έλλειψη αναλυτικότητας) στο πιο πάνω μιγαδικό δυναμικό του Westergaard  $Z(z)$  για  $z = \pm a$ : απειρισμός τύπου τετραγωνικής ρίζας. Αυτός ο απειρισμός φθάνει και στις τάσεις  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  μέσω των τύπων (3.7.19) και από της απόψεως της Μηχανικής των Υλικών είναι εύλογος. Από της απόψεως της Θραυστομηχανικής προκαλεί διαρροές του υλικού (πλαστικές ζώνες) στα άκρα της ρωγμής, που μπορεί να φθάσουν μέχρι και τη θραύση του υλικού.

Η θραύση αυτή επηρεάζεται από ένα μέγεθος που καλείται **συντελεστής εντάσεως τάσεων**  $K$  (σε αντίθεση με το **συντελεστή συγκεντρώσεως τάσεων** στην προηγούμενη Παράγραφο Δ3.7.2) και αφορά σε άκρο ρωγμής (εδώ στα άκρα  $z = \pm a$  της ρωγμής). Στο συντελεστή εντάσεως τάσεων  $K$  αναφερθήκαμε ήδη στην Ενότητα Γ3.2 του Μέρους Γ και εξηγήσαμε πως δεν πρέπει να ξεπερνάει μια κρίσιμη τιμή  $K_0$  που χαρακτηρίζει το υλικό, ώστε να αποφευχθεί η θραύση. Ασφαλώς η θραύση θα ξεκινήσει από ένα άκρο ρωγμής, εδώ  $z = \pm a$ . Για  $z = a$  ισχύει μάλιστα και ο ενδιαφέρων τύπος

$$K = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} [\sqrt{z - a} Z(z)] \quad \text{που εδώ με τη σχέση (3.7.18) δίνει} \quad K = \sigma_0 \sqrt{\pi a}. \quad (3.7.20)$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ4

## ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο παρόν Κεφάλαιο Δ4 θα προχωρήσουμε στο θέμα της μιγαδικής ολοκληρώσεως, δηλαδή της ολοκληρώσεως μιγαδικών συναρτήσεων, κυρίως αναλυτικών συναρτήσεων, στο μιγαδικό επίπεδο.

Ασφαλώς πρώτα θα δώσουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος μιας μιγαδικής συναρτήσεως σε πραγματικό διάστημα και μετά, αυτό που κυρίως μας ενδιαφέρει, σε τμηματικά λεία απλή καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο. Αρκετές φορές η καμπύλη αυτή ολοκληρώσεως είναι επιπλέον και κλειστή.

Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στο ιδιαίτερα αξιόλογο **θεώρημα των Cauchy-Goursat**. Αυτό αφορά στο μηδενισμό του επικαμπύλιου μιγαδικού ολοκληρώματος μιας αναλυτικής συναρτήσεως κατά μήκος μιας τμηματικά λείας απλής κλειστής καμπύλης.

Έπειτα θα ασχοληθούμε και με τον **ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy**. Αυτός μας επιτρέπει τον υπολογισμό μιας αναλυτικής συναρτήσεως στην ανοικτή περιοχή που περικλείει μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη με βάση μόνο τις τιμές της πάνω στην καμπύλη. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω κατάλληλης μιγαδικής ολοκληρώσεως. Πρόκειται για έναν πολύ ενδιαφέροντα τύπο, που σε πρώτη ματιά ίσως να φαντάζει απρόσμενος και σίγουρα είναι πρακτικά πάρα πολύ χρήσιμος. Ανάλογοι τύποι ισχύουν και για τις παραγώγους μιας αναλυτικής συναρτήσεως στην ίδια περιοχή.

Ακολουθως αναφέρουμε και την **αρχή του μέγιστου μέτρου** (ή της μέγιστης απόλυτης τιμής) μιας αναλυτικής συναρτήσεως πάλι σε περιοχή που περικλείεται από τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη καθώς και την αντίστοιχη **αρχή του ελάχιστου μέτρου** (ή της ελάχιστης απόλυτης τιμής). Μετά αναφέρουμε και τις σχετικές αρχές για αρμονικές συναρτήσεις (αυτές χωρίς απόλυτες τιμές!).

Τέλος εφαρμόζουμε όλα τα παραπάνω σε μια εφαρμογή που αφορά στη μόνιμη (σταθερή) διδιάστατη (επίπεδη) αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική. Ιδιαίτερη έμφαση δίνουμε στην **κυκλοφορία** του ιδεατού ρευστού κατά μήκος απλής κλειστής καμπύλης σε μια τέτοια ροή. Ανάλογες εφαρμογές είναι δυνατές πέρα από τη Ρευστομηχανική και στην Επίπεδη Ελαστικότητα.

### Δ4.1. ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

#### Δ4.1.1. Ολοκλήρωμα μιγαδικής συναρτήσεως

Θεωρούμε γνωστά από τον Απειροστικό Λογισμό στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά I όλα όσα αφορούν στο ολοκλήρωμα

$$I = \int_a^b u(x) dx \quad (4.1.1)$$

μιας ολοκληρώσιμης πραγματικής συναρτήσεως  $u(x)$  σε ένα διάστημα  $[a, b]$  του πραγματικού άξονα  $Ox$ . Εδώ επεκτεινόμαστε εύκολα, πολύ εύκολα σε αντίστοιχες μιγαδικές συναρτήσεις  $f(x)$  με

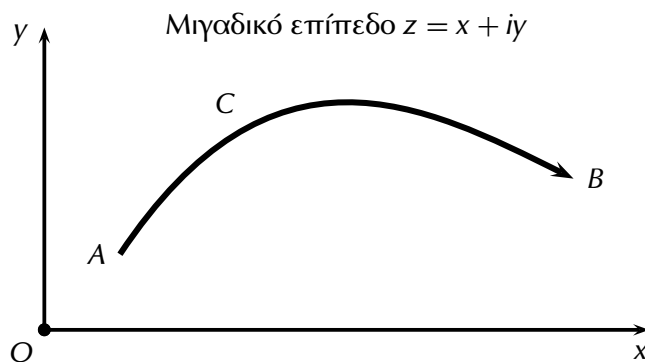
$$f(x) = u(x) + iv(x) \quad \text{με} \quad i = \sqrt{-1} \quad (4.1.2)$$

τη φανταστική μονάδα και  $u = u(x)$  και  $v = v(x)$  δύο πραγματικές συναρτήσεις. Είναι τώρα εύλογος, προφανής ο ακόλουθος ορισμός του σχετικού μιγαδικού ολοκληρώματος:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b [u(x) + iv(x)] dx := \int_a^b u(x) dx + i \int_a^b v(x) dx \quad (4.1.3)$$

με την υπόθεση ότι οι δύο πραγματικές συναρτήσεις  $u(x)$  και  $v(x)$  είναι ολοκληρώσιμες στο πραγματικό διάστημα  $[a, b]$ . Άρα το ολοκλήρωμα της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(x)$  στο πραγματικό διάστημα  $[a, b]$  είναι ίσο με το ολοκλήρωμα του πραγματικού μέρους της  $u(x)$  συν  $i$  επί το ολοκλήρωμα του φανταστικού μέρους της  $v(x)$  φυσικά στο ίδιο διάστημα  $[a, b]$ . Και ασφαλώς πολλές ιδιότητες των ολοκληρωμάτων πραγματικών συναρτήσεων  $u(x)$  γενικεύονται και στα ολοκληρώματα μιγαδικών συναρτήσεων, όπως είναι η συνάρτηση  $f(x) = u(x) + iv(x)$ . Ωραία ως εδώ. Παρακάτω ...

Παρακάτω έρχεται η σειρά της επικαμπύλιας ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο κατά μήκος μιας καμπύλης  $C$ . Αυτή είναι κάπως δυσκολότερη, αλλά βέβαια και πιο χρήσιμη στις εφαρμογές.



**Σχήμα Δ4.1:** Καμπύλη  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy$  με κατεύθυνση από το  $A$  προς το  $B$ .

Πιο συγκεκριμένα τώρα θεωρούμε μια καμπύλη  $C$  στο επίπεδο  $Oxy$  (Σχήμα Δ4.1) με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x(t) \quad \text{και} \quad y = y(t), \quad \text{οπότε} \quad z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad (4.1.4)$$

με παράμετρο το  $t$  που παίρνει πραγματικές μόνο τιμές. Η καμπύλη αυτή ξεκινάει από το σημείο  $A$  με  $t = a$  και τελειώνει στο σημείο  $B$  με  $t = b$ . (Προφανώς, εάν η καμπύλη αυτή είναι επιπλέον και κλειστή, τότε  $A = B$  και ισοδύναμα  $z(a) = z(b)$ .) Την ίδια καμπύλη  $C$  τη θεωρούμε επίσης **τμηματικά λεία** με την έννοια ότι υπάρχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου  $t$  στην παραπάνω παραμετρική της παράσταση  $z(t) = x(t) + iy(t)$  οι δύο παράγωγοι  $x'(t)$  και  $y'(t)$  με την πιθανή εξαίρεση μόνο μεμονωμένων σημείων της. (Για το λόγο αυτό μιλάμε για τμηματικά λεία καμπύλη  $C$ .) Τότε έχουμε

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t) \quad \text{ή σχεδόν ισοδύναμα} \quad dz = dx + idy. \quad (4.1.5)$$

Θεωρούμε επίσης και μια μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  της μιγαδικής μεταβλητής  $z$  της μορφής

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{με} \quad z = x + iy \quad (4.1.6)$$

που δεν είναι απαραίτητα αναλυτική συνάρτηση. Φυσικά η συνάρτηση αυτή  $f(z)$  ορίζεται σε όλα τα σημεία της τμηματικά λείας καμπύλης  $C$ . Υπό τις συνθήκες αυτές ορίζουμε το μιγαδικό ολοκλήρωμα της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$  πάνω στην τμηματικά λεία καμπύλη  $C$  ως εξής:

$$\int_C f(z) dz := \int_a^b f(z) z'(t) dt. \quad (4.1.7)$$

δηλαδή μέσω ενός ολοκληρώματος στο πραγματικό διάστημα  $[a, b]$ . Αποδεικνύεται ότι γενικά το ολοκλήρωμα αυτό παραμένει αμετάβλητο, αν αλλάξει η παραμετρική παράσταση  $z(t)$  της καμπύλης  $C$ . Άρα δε μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα ποια ακριβώς παράμετρος  $t$  χρησιμοποιείται. Ασφαλώς πρέπει να σημειώσουμε επίσης πως επειδή  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  και  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ , όπως προαναφέρθηκε, η τελική ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι η μιγαδική συνάρτηση

$$f(z)z'(t) = [u(x, y) + iv(x, y)][x'(t) + iy'(t)] = u(x, y)x'(t) - v(x, y)y'(t) + i[v(x, y)x'(t) + u(x, y)y'(t)]. \quad (4.1.8)$$

Επομένως το πιο πάνω ολοκλήρωμα  $\int_C f(z) dz$  παίρνει τελικά τη μορφή

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b [u(x, y)x'(t) - v(x, y)y'(t)] dt + i \int_a^b [v(x, y)x'(t) + u(x, y)y'(t)] dt. \quad (4.1.9)$$

Εδώ λάβαμε υπόψη μας και τον ορισμό (4.1.3) του ολοκληρώματος μιας μιγαδικής συναρτήσεως κατά μήκος ενός πραγματικού διαστήματος, εδώ του πραγματικού διαστήματος  $[a, b]$  για την παράμετρο  $t$ . Φυσικά, για να υπάρχει το μιγαδικό ολοκλήρωμα  $\int_C f(z) dz$ , θα πρέπει να υπάρχουν και τα δύο πραγματικά ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της πιο πάνω σχέσεως (4.1.9) είτε σαν κοινά πραγματικά ολοκληρώματα είτε (σε μερικές περιπτώσεις) σαν καταχρηστικά (ή γενικευμένα), αλλά και πάλι πραγματικά ολοκληρώματα.

Η πιο πάνω έκφραση (4.1.9) του μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος  $\int_C f(z) dz$  με τη χρήση δύο πραγματικών ολοκληρωμάτων γράφεται βέβαια απλούστερα και στη μορφή

$$\int_C f(z) dz = \int_C [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \int_C [v(x, y) dx + u(x, y) dy] \quad (4.1.10)$$

σύμφωνα με τον ορισμό των πραγματικών επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων ή, πιο πρακτικά, αφού

$$dx = x'(t) dt \quad \text{και} \quad dy = y'(t) dt. \quad (4.1.11)$$

Πρέπει να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι πολλές σημαντικές ιδιότητες των πραγματικών ολοκληρωμάτων γενικεύονται με βάση τον πιο πάνω ορισμό (4.1.7) και σε μιγαδικά επικαμπύλια ολοκληρώματα. Για παράδειγμα, αποδεικνύεται εύκολα η γραμμική ιδιότητα

$$\int_C [c_1 f_1(z) + c_2 f_2(z)] dz = c_1 \int_C f_1(z) dz + c_2 \int_C f_2(z) dz \quad (4.1.12)$$

με  $f_1(z)$  και  $f_2(z)$  δύο ολοκληρώσιμες μιγαδικές συναρτήσεις και  $c_1$  και  $c_2$  δύο μιγαδικές σταθερές. Ανάλογα, εάν η τμηματικά λεία καμπύλη  $C$  διαγραφεί στην πιο πάνω ολοκλήρωση με αντίθετη κατεύθυνση: από το σημείο  $B$  (με  $t = b$ ) προς το σημείο  $A$  (με  $t = a$ ) με ολοκλήρωμα το  $\int_{-C} f(z) dz$ , τότε αποδεικνύεται επίσης εύκολα ότι

$$\int_{-C} f(z) dz = - \int_C f(z) dz. \quad (4.1.13)$$

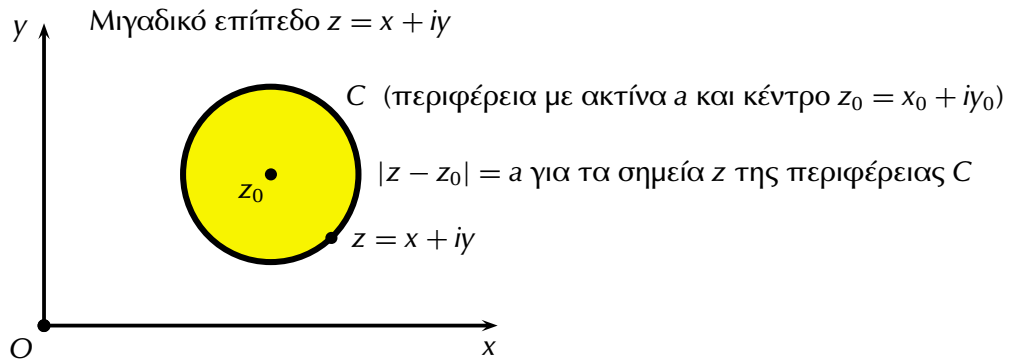
Φυσικά ο δείκτης  $-C$  στο αριστερό ολοκλήρωμα δηλώνει απλά την αντίθετη φορά διαγραφής της καμπύλης  $C$ : από το σημείο  $B$  προς το σημείο  $A$  αντί από το σημείο  $A$  προς το σημείο  $B$  αρχικά.

#### Δ4.1.2. Παράδειγμα μιγαδικής ολοκλήρωσεως κατά μήκος περιφέρειας

Σαν παράδειγμα μιγαδικής ολοκλήρωσεως θεωρούμε τώρα το ιδιαίτερα κλασικό παράδειγμα της ολοκλήρωσεως της συναρτήσεως

$$f(z) = (z - z_0)^m \quad \text{με το } m \text{ ακέραιο αριθμό: } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (4.1.14)$$

κατά μήκος της περιφέρειας  $C$  κύκλου  $D$  με κέντρο το σημείο  $z = z_0 = x_0 + iy_0$  και ακτίνα  $a$  (Σχήμα Δ4.2). Σημειώνεται ότι η περιφέρεια αυτή  $C$  είναι βέβαια μια λεία καμπύλη και επίσης μια κλειστή καμπύλη. Είναι επίσης απλή καμπύλη με την έννοια ότι δεν τέμνει πουθενά τον εαυτό της.



**Σχήμα Δ4.2:** Περιφέρεια  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy$  με κέντρο το σημείο  $z_0$  και ακτίνα  $a$ .

Προφανώς τα σημεία της περιφέρειας  $C$  είναι τα σημεία

$$z = z(\theta) = z_0 + ae^{i\theta} = (x_0 + iy_0) + a(\cos \theta + i \sin \theta) = (x_0 + a \cos \theta) + i(y_0 + a \sin \theta), \quad (4.1.15)$$

όπου χρησιμοποιήθηκε σαν παράμετρος  $t$  η πολική γωνία  $\theta$  με  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . (Εναλλακτικά άλλη κατάλληλη παράμετρος θα ήταν το μήκος  $s$  καθώς διαγράφεται η περιφέρεια  $C$  με  $s = a\theta$  και επομένως  $0 \leq s \leq 2\pi a$ .) Παίρνοντας τώρα το πραγματικό μέρος  $x(\theta)$  καθώς και το φανταστικό μέρος  $y(\theta)$  στην πιο πάνω σχέση (4.1.15), διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$z = z(\theta) = x(\theta) + iy(\theta) \quad \text{με} \quad x(\theta) = x_0 + a \cos \theta \quad \text{και} \quad y(\theta) = y_0 + a \sin \theta \quad \text{με} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (4.1.16)$$

Παραγωγίζουμε τώρα ως προς  $\theta$  και έχουμε

$$z'(\theta) = x'(\theta) + iy'(\theta) \quad \text{με} \quad x'(\theta) = -a \sin \theta \quad \text{και} \quad y'(\theta) = a \cos \theta. \quad (4.1.17)$$

Από την άλλη πλευρά η ολοκληρωτέα μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = (z - z_0)^m$ , επειδή  $z = z_0 + ae^{i\theta}$ , οπότε  $z - z_0 = ae^{i\theta}$ , γράφεται εύκολα και στη μορφή

$$f(z) = (ae^{i\theta})^m = a^m (e^{i\theta})^m = a^m e^{im\theta} = a^m (\cos m\theta + i \sin m\theta) = a^m \cos m\theta + ia^m \sin m\theta. \quad (4.1.18)$$

Δηλαδή η μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  γράφεται με το πραγματικό μέρος της  $u$  και το φανταστικό μέρος της  $v$  ως εξής:

$$f(z) = u + iv \quad \text{με} \quad u = a^m \cos m\theta \quad \text{και} \quad v = a^m \sin m\theta. \quad (4.1.19)$$

Εδώ βέβαια εργαζόμαστε με πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  (με  $r = a$  πάνω στην περιφέρεια  $C$ ) αντί με Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y)$ . Επομένως

$$\begin{aligned} f(z)z'(\theta) &= (a^m \cos m\theta + ia^m \sin m\theta)(-a \sin \theta + ia \cos \theta) \\ &= a^{m+1} [(-\cos m\theta \sin \theta - \sin m\theta \cos \theta) + i(\cos m\theta \cos \theta - \sin m\theta \sin \theta)] \\ &= a^{m+1} [-\sin(m+1)\theta + i \cos(m+1)\theta] \\ &= ia^{m+1} [\cos(m+1)\theta + i \sin(m+1)\theta] \\ &= ia^{m+1} e^{i(m+1)\theta}. \end{aligned} \quad (4.1.20)$$

Στις πιο πάνω σχέσεις ληφθήκανε υπόψη και οι δύο πολύ γνωστοί μας τριγωνομετρικοί τύποι

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \quad \text{και} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (4.1.21)$$



Στο τέλος έγινε χρήση και του εξίσου γνωστού μας τύπου του Euler (1.1.4) ή (2.2.1)

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (4.1.22)$$

Τώρα σύμφωνα με τον ορισμό (4.1.7) του μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος, εδώ στην περίπτωση της περιφέρειας  $C$ , και με χρήση της παραπάνω σχέσεως (4.1.20) διαπιστώνουμε ότι

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = ia^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\theta} d\theta. \quad (4.1.23)$$

(Σημειώνουμε ότι γενικά, όμως όχι πάντα, κάνουμε χρήση του συμβόλου ολοκληρώσεως  $\oint$ , όταν η μιγαδική ολοκλήρωση γίνεται πάνω σε μια κλειστή καμπύλη  $C$ , όπως είναι εδώ η περιφέρεια  $C$ .)

Στο σημείο αυτό διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Πρώτα, εάν  $m + 1 \neq 0$  (υπενθυμίζουμε με το  $m$  ακέραιο αριθμό), δηλαδή  $m \neq -1$ , τότε

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = ia^{m+1} \left. \frac{e^{i(m+1)\theta}}{i(m+1)} \right|_0^{2\pi} = \frac{a^{m+1}}{m+1} [e^{2\pi i(m+1)} - e^0] = \frac{a^{m+1}}{m+1} (1 - 1) = 0, \quad (4.1.24)$$

αφού το  $m+1$  είναι ακέραιος αριθμός, οπότε  $e^{2\pi i(m+1)} = \cos 2(m+1)\pi + i \sin 2(m+1)\pi = 1 + i0 = 1$ .

(β) Στη συνέχεια, στην ειδική περίπτωση που  $m + 1 = 0$ , δηλαδή  $m = -1$ , το παραπάνω αποτέλεσμα (4.1.24) προφανώς δεν ισχύει, γιατί μηδενίζεται ο παρονομαστής  $m + 1$ . Όμως στην ειδική (αλλά και τόσο ενδιαφέρουσα!) αυτή περίπτωση όπου  $m + 1 = 0$  (ή ισοδύναμα  $m = -1$ ) η σχέση (4.1.23) παίρνει την απλούστατη μορφή

$$\oint_C (z - z_0)^{-1} dz \equiv \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = ia^0 \int_0^{2\pi} e^{i0\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} 1 d\theta = i2\pi = 2\pi i, \quad (4.1.25)$$

όπου υπολογίσαμε και το σχετικό στοιχειώδες ολοκλήρωμα.

Συνοψίζουμε τώρα τα δύο αμέσως παραπάνω αποτελέσματά μας στην ακόλουθη σχέση:

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & \text{εάν } m \neq -1, \\ 2\pi i & \text{εάν } m = -1. \end{cases} \quad (4.1.26)$$

Ξαναγράφουμε μάλιστα την κάτω μορφή της σχέσεως αυτής, που είναι πάρα πολύ χρήσιμη στις εφαρμογές, απλούστερα ως εξής:

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i. \quad (4.1.27)$$

Υπενθυμίζουμε τέλος ότι  $z_0$  είναι το κέντρο της περιφέρειας  $C$ , όπου ολοκληρώνουμε.

► **Παρατήρηση Δ4.1:** Ένας πιο απλός τρόπος για να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα (4.1.23) είναι να χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν τη μιγαδική εκθετική γραφή (4.1.18) της συναρτήσεως  $f(z)$ , δηλαδή

$$f(z) = a^m e^{im\theta} \quad (4.1.28)$$

(χωρίς να τη γράψουμε καθόλου με συνημίτονα και ημίτονα) σε συνδυασμό με τη σχέση (4.1.15) σε πολική μορφή

$$z = z(\theta) = z_0 + ae^{i\theta} \quad \text{που δίνει} \quad z'(\theta) = ia e^{i\theta}. \quad (4.1.29)$$

Τώρα

$$f(z)z'(\theta) = (a^m e^{im\theta})(ia e^{i\theta}) = ia^{m+1} e^{i(m+1)\theta}, \quad (4.1.30)$$

ακριβώς όπως προέκυψε ήδη στη σχέση (4.1.20) με τη χρήση και τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Κι ακόμη πιο απλά, αλλά τώρα θυσιάζοντας δυστυχώς τη μαθηματική αυστηρότητα, μπορούμε να τροποποιήσουμε τη σχέση (4.1.29) γράφοντάς τη στη μορφή

$$z = z(\theta) = z_0 + ae^{i\theta} \quad \text{που δίνει} \quad dz = ia e^{i\theta} d\theta, \quad (4.1.31)$$

οπότε

$$f(z) dz = (a^m e^{im\theta})(iae^{i\theta} d\theta) = ia^{m+1} e^{i(m+1)\theta} d\theta. \quad (4.1.32)$$

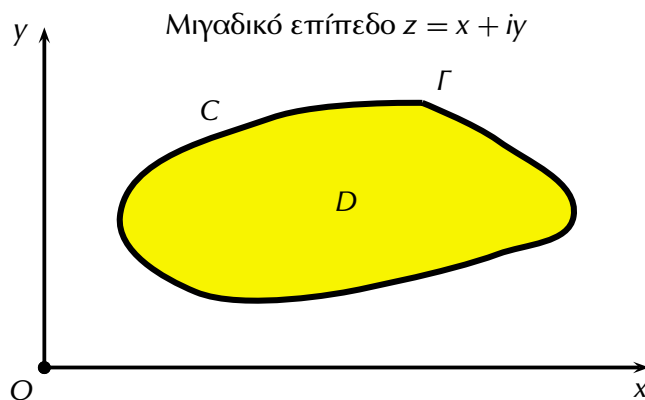
Έτσι παίρνουμε και πάλι ουσιαστικά τη σχέση (4.1.23), αφού  $dz = z'(\theta) d\theta$ . Δυστυχώς όμως τώρα ενεργήσαμε χωρίς αυστηρότητα, χωρίς καν να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό (4.1.7) του μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Εντούτοις παίρνουμε ξανά σωστό αποτέλεσμα και εδώ, αλλά και σε ανάλογες περιπτώσεις μιγαδικών ολοκληρώσεων με εργασία κατευθείαν με το μιγαδικό διαφορικό  $dz$  στο αρχικό μιγαδικό ολοκλήρωμα  $\int_C f(z) dz$ .

#### Δ4.2. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ CAUCHY-GOURSAT

Ένα ιδιαίτερα σημαντικό και κάπως απρόσμενο θεώρημα στη μιγαδική ολοκλήρωση είναι το **θεώρημα των Cauchy-Goursat**. Αναφέρουμε το θεώρημα αυτό:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεώρημα των Cauchy-Goursat):** Θεωρούμε μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z$  (Σχήμα Δ4.3). Θεωρούμε επίσης μια μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  η οποία είναι αναλυτική τόσο πάνω στην καμπύλη  $C$  όσο και σε όλη την ανοικτή περιοχή  $D$  που αυτή περικλείει. Τότε ισχύει ο τύπος

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (4.2.1)$$



**Σχήμα Δ4.3:** Τμηματικά λεία (εδώ με ένα γωνιακό σημείο  $\Gamma$ ) απλή κλειστή καμπύλη  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy$ . Η καμπύλη  $C$  αποτελεί το σύνορο της ανοικτής περιοχής  $D$  που περικλείει.

Το θεώρημα αυτό οφείλεται αρχικά στον Cauchy. (Γι' αυτό πάρα πολύ συχνά καλείται απλά **θεώρημα του Cauchy**.) Ο Cauchy έκανε όμως και την πρόσθετη υπόθεση ότι η παράγωγος  $f'(z)$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ , που έτσι κι αλλιώς υπάρχει, επειδή η συνάρτηση  $f(z)$  έχει υποτεθεί αναλυτική (Παράγραφος Δ3.2.2), είναι επιπλέον και συνεχής. Την απόδειξη του Cauchy με την πρόσθετη αυτή υπόθεση θα τη δώσουμε αμέσως παρακάτω. Την επιπλέον αυτή υπόθεση της συνεχείας της  $f'(z)$  την απάλειψε αργότερα ο Goursat με μια πολύ πιο δύσκολη απόδειξη που εδώ θα την παραλείψουμε. Στη γενικότερη αυτή περίπτωση, όπου δεν υποθέτουμε την  $f'(z)$  συνεχή, ενώ βέβαια σίγουρα υπάρχει, αναφερόμαστε στο **θεώρημα των Cauchy-Goursat**.

**Απόδειξη του Cauchy:** Πρόκειται ουσιαστικά για μια μάλλον απλή εφαρμογή του θεωρήματος του Green που ισχύει στο επίπεδο  $Oxy$ . Υπενθυμίζουμε το θεώρημα αυτό, που μας είναι γνωστό από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά I:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεώρημα του Green):** Θεωρούμε μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  στο επίπεδο  $Oxy$  που περικλείει μια περιοχή  $D$ . Θεωρούμε επίσης δύο συνεχείς συναρτήσεις  $P(x, y)$  και  $Q(x, y)$ , οι οποίες ορίζονται μονοσήμαντα στην καμπύλη  $C$  και στην περιοχή  $D$  και επιπλέον

έχουν στη  $C$  και στη  $D$  συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους  $\partial P/\partial x$ ,  $\partial P/\partial y$ ,  $\partial Q/\partial x$  και  $\partial Q/\partial y$ . Τότε ισχύει

$$\oint_C (P dx + Q dy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4.2.2)$$

Δηλαδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (στο αριστερό μέλος) για τις ίδιες τις συναρτήσεις  $P$  και  $Q$  εκφράζεται με ένα διπλό ολοκλήρωμα (στο δεξιό μέλος) με τις πρώτες μερικές παραγώγους τους.

Τώρα στην περίπτωση μας θέλουμε να αποδείξουμε το θεώρημα των Cauchy–Goursat που ήδη αναφέραμε μαζί με την πρόσθετη υπόθεση του Cauchy για τη συνέχεια της παραγώγου  $f'(z)$  της  $f(z)$ . Πρώτα ξαναγράφουμε το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στη σχέση (4.2.1) στη μορφή

$$\oint_C f(z) dz = \oint_C [u(x, y) dx - v(x, y) dy] + i \oint_C [v(x, y) dx + u(x, y) dy] \quad (4.2.3)$$

σύμφωνα με τη σχέση (4.1.10), εδώ όμως για μια κλειστή καμπύλη  $C$  (με το σύμβολο  $\oint$  αντί για  $\int$ ).

Και τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι και τα δύο πραγματικά επικαμπύλια ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της σχέσεως (4.2.3) είναι ίσα με το μηδέν. Τότε και το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος θα είναι κι αυτό ίσο με το μηδέν. Προχωράμε! Σύμφωνα με το πιο πάνω θεώρημα του Green (4.2.2) στο επίπεδο  $Oxy$  το πρώτο πραγματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στη σχέση (4.2.3) παίρνει εδώ προφανώς με  $P = u$  και  $Q = -v$  τη μορφή ενός διπλού ολοκληρώματος

$$\oint_C [u(x, y) dx - v(x, y) dy] = \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4.2.4)$$

Ανάλογα το δεύτερο πραγματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στη σχέση (4.2.3) παίρνει εδώ με  $P = v$  και  $Q = u$  στο θεώρημα του Green (4.2.2) την αντίστοιχη μορφή

$$\oint_C [v(x, y) dx + u(x, y) dy] = \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy. \quad (4.2.5)$$

Στο σημείο αυτό οφείλουμε βέβαια να σημειώσουμε ότι ισχύουν οι τύποι (3.3.3) και (3.3.4):

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{και} \quad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (4.2.6)$$

Άρα η συνέχεια της παραγώγου  $f'(z)$  που υπέθεσε ο Cauchy στην παρούσα απόδειξη έχει σαν συνέπεια τη συνέχεια των τεσσάρων πρώτων μερικών παραγώγων  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial u/\partial y$ ,  $\partial v/\partial x$  και  $\partial v/\partial y$  του πραγματικού μέρους της  $u = u(x, y)$  και του φανταστικού μέρους της  $v = v(x, y)$ . Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το πιο πάνω θεώρημα του Green (4.2.2) για τις συναρτήσεις  $u$  και  $v$  κι αυτό θα κάνουμε στη συνέχεια. (Όμως αν δεν ήσαν συνεχείς οι παράγωγοι αυτές, δε θα μπορούσαμε!)

Λοιπόν λίγη ακόμη υπομονή. Έχουμε σχεδόν τελειώσει! Συγκεκριμένα η μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = u + iv$  που εξετάζουμε έχει υποτεθεί αναλυτική στην κλειστή καμπύλη  $C$  και στην περιοχή  $D$  που αυτή περικλείει. Συνεπώς θα ισχύουν οπωσδήποτε για το πραγματικό μέρος της  $u = u(x, y)$  και για το φανταστικό μέρος της  $v = v(x, y)$  οι δύο γνωστές μας συνθήκες (ή εξισώσεις) των Cauchy–Riemann (3.3.2) στην Παράγραφο Δ3.3.1 της Ενότητας Δ3.3. Δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{οπότε προφανώς} \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (4.2.7)$$

Μα οι δύο τελευταίες σχέσεις απλά δηλώνουν ότι οι δύο ολοκληρωτέες συναρτήσεις στα δύο διπλά ολοκληρώματα στα δεξιά μέλη των σχέσεων (4.2.5) και (4.2.4) αντίστοιχα είναι μηδενικές. Άρα και τα δύο αυτά διπλά ολοκληρώματα είναι σίγουρα μηδενικά. Συνεπώς οι σχέσεις (4.2.4) και (4.2.5) απλοποιούνται παίρνοντας τις μορφές

$$\oint_C [u(x, y) dx - v(x, y) dy] = 0 \quad \text{και} \quad \oint_C [v(x, y) dx + u(x, y) dy] = 0. \quad (4.2.8)$$

Επομένως και τα δύο πραγματικά επικαμπύλια ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της σχέσεως (4.2.3) είναι ίσα με το μηδέν. Άρα το ίδιο ακριβώς ισχύει και για το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της ίδιας σχέσεως (4.2.3): είναι κι αυτό ίσο με το μηδέν:  $\oint_C f(z) dz = 0$ . Επομένως αποδείχθηκε το θεώρημα των Cauchy–Goursat με την πρόσθετη υπόθεση του Cauchy της συνεχειάς της παράγωγου  $f'(z)$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ . (Αναφέραμε ήδη ότι θα παραλείψουμε τη δύσκολη γενική απόδειξη του θεωρήματος των Cauchy–Goursat χωρίς την υπόθεση του Cauchy.)  $\square$

▼ **Παράδειγμα Δ4.1:** Για κάθε τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z$  να αποδειχθεί ότι

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad \text{με} \quad f(z) = p_n(z), \quad e^z, \quad \cosh z, \quad \sinh z, \quad \cos z \quad \text{και} \quad \sin z, \quad (4.2.9)$$

όπου  $p_n(z)$  δηλώνει ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο βαθμού  $n$  της μιγαδικής μεταβλητής  $z = x + iy$ .

**Απόδειξη:** Πρόκειται για αναλυτικές συναρτήσεις σε ολόκληρο το επίπεδο  $z$ . Άρα σύμφωνα με το θεώρημα των Cauchy–Goursat, που μόλις αποδείξαμε, πραγματικά  $\oint_C f(z) dz = 0$ , αρκεί βέβαια η καμπύλη  $C$  να είναι και κλειστή, όπως σωστά έχει υποτεθεί και δεν πρέπει να λησμονείται.  $\blacktriangle$

Αναφέρουμε τέλος και μια ενδιαφέρουσα γενίκευση του θεωρήματος των Cauchy–Goursat:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Γενίκευση του θεωρήματος των Cauchy–Goursat):** Θεωρούμε δύο τμηματικά λείες απλές κλειστές καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z$  με τη  $C_2$  να κείται στο εσωτερικό της  $C_1$ . Θεωρούμε επίσης μια μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  η οποία είναι αναλυτική τόσο πάνω στις δύο καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  όσο και σε όλη την ανοικτή περιοχή  $D$  που περικλείουν (κείται μεταξύ τους). Τότε ισχύει ο τύπος

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz \quad (4.2.10)$$

φυσικά με την ίδια φορά διαγραφής (συνήθως τη θετική) και στις δύο καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$ .

### Δ4.3. Ο ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ CAUCHY

Πέρα από το θεώρημα των Cauchy–Goursat στην προηγούμενη ενότητα ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο **ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy** ή απλούστερα **τύπος του Cauchy**. Αναφέρουμε τον τύπο αυτό σαν θεώρημα:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy):** Θεωρούμε μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη στο μιγαδικό επίπεδο  $z$  (Σχήμα Δ4.3). Θεωρούμε επίσης μια αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  πάνω στην καμπύλη  $C$  και σε όλη την περιοχή  $D$  που αυτή περικλείει. Τότε για κάθε σημείο  $z$  στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης  $C$  (δηλαδή στην ανοικτή περιοχή  $D$ ) ισχύει ο τύπος

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4.3.1)$$

Σημειώνουμε ότι εδώ χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $\zeta$  για τη μιγαδική μας μεταβλητή πάνω στην καμπύλη  $C$ . Αυτή είναι η μεταβλητή ολοκληρώσεως στο μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους, γιατί το σύμβολο  $z$  το χρησιμοποιούμε σαν το σημείο υπολογισμού της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  στο εσωτερικό  $D$  της καμπύλης  $C$ .

Ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy είναι ένας ιδιαίτερα αξιόλογος και ενδιαφέρων τύπος. Αυτό συμβαίνει, επειδή μας επιτρέπει τον άμεσο υπολογισμό (με ολοκλήρωση) μιας αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  στο εσωτερικό  $D$  μιας τμηματικά λείας απλής κλειστής καμπύλης  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z$  με γνωστές τις τιμές  $f(\zeta)$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  μόνο πάνω στην καμπύλη  $C$ . Αρκεί να υπολογισθεί το επικαμπύλιο μιγαδικό ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος του τύπου αναλυτικά ή αριθμητικά: με αριθμητική ολοκλήρωση. Βέβαια πίσω από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy,

που αρχικά μας ξαφνιάζει, υποκρύπτεται η ισχύς δύο διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους σε ολόκληρη την περιοχή  $D$ : των δύο συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy-Riemann (3.3.2).

Προφανώς όμως ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy δεν ισχύει, εάν η συνάρτηση  $f(z)$  δεν είναι αναλυτική ακόμη και σε ένα σημείο της καμπύλης  $C$  ή της εσωτερικής της περιοχής  $D$ . Επίσης δεν ισχύει και για τα σημεία της ίδιας της καμπύλης  $C$ , όπου βέβαια δεν ορίζεται και το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος σαν κοινό ή καταχρηστικό (γενικευμένο) ολοκλήρωμα, αφού ο παρονομαστής  $\zeta - z$  της ολοκληρωτέας συναρτήσεως  $f(\zeta)/(\zeta - z)$  προφανώς μηδενίζεται για  $\zeta = z$ .

**Σχόλιο για την απόδειξη:** Θα παραλείψουμε την αυστηρή μαθηματική απόδειξη του πιο πάνω ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy, αν και δεν παρουσιάζει πολύ σοβαρές μαθηματικές δυσκολίες. Θα περιορισθούμε όμως σε μια πρόχειρη ένδειξη ότι ο τύπος αυτός είναι σωστός, που είναι χρήσιμη στην πλήρη απόδειξή του. Προς το σκοπό αυτό θεωρούμε εδώ τη μιγαδική συνάρτηση  $g(\zeta)$  που ορίζεται ως εξής:

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{για } \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{για } \zeta = z \end{cases} \quad (4.3.2)$$

με το μιγαδικό αριθμό  $z$  σταθερό. Αυτή είναι μια συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής  $\zeta$  που συμπεριφέρεται πολύ καλά. Συγκεκριμένα με την  $f(z)$  αναλυτική είναι και αυτή αναλυτική για  $\zeta \neq z$ , αφού ορίζεται σαν  $g(\zeta) = [f(\zeta) - f(z)]/(\zeta - z)$ . Από την άλλη πλευρά ειδικά για  $\zeta = z$  ορίζεται σαν  $f'(z)$  δηλαδή σαν το όριο του γενικού ορισμού της για  $\zeta \rightarrow z$ . Κατά συνέπεια προσδοκάται υπό ήπιες προϋποθέσεις να ισχύει το θεώρημα των Cauchy-Goursat (4.2.1) για τη συνάρτηση αυτή  $g(\zeta)$  (επαναλαμβάνεται με το  $z$  σταθερά). Τώρα, υποθέτοντας ότι πραγματικά ισχύει το θεώρημα των Cauchy-Goursat για τη συνάρτηση  $g(\zeta)$ , η οποία μόλις ορίστηκε παραπάνω, προκύπτει ότι

$$\oint_C g(\zeta) d\zeta = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \oint_C \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0. \quad (4.3.3)$$

Μια που το σημείο  $z$  είναι στο εσωτερικό της καμπύλης  $C$  (στην ανοικτή περιοχή  $D$  που περικλείει), δεν υπάρχει καμία περίπτωση να έχουμε  $\zeta = z$  στην ολοκληρωτέα συνάρτηση με το  $\zeta$  πάνω στην καμπύλη  $C$ : ο παρονομαστής  $\zeta - z$  δε μηδενίζεται πουθενά. Αφού μάλιστα για  $\zeta - z \neq 0$

$$\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{f(z)}{\zeta - z}, \quad (4.3.4)$$

διασπάμε τώρα το ολοκλήρωμα (4.3.3) σε δύο ολοκληρώματα και παίρνουμε

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_C \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = 0. \quad (4.3.5)$$

Αλλ' η ποσότητα  $f(z)$  είναι σταθερή στο δεύτερο ολοκλήρωμα, επειδή μεταβλητή ολοκληρώσεως είναι η  $\zeta$  και όχι η  $z$ . Επομένως βγαίνει έξω από το ολοκλήρωμα. Έτσι καταλήγουμε στη σχέση

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \oint_C \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = 0 \implies f(z) \oint_C \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4.3.6)$$

Όμως η ολοκληρωτέα συνάρτηση  $1/(\zeta - z)$  στο πρώτο ολοκλήρωμα είναι αναλυτική συνάρτηση με την εξαίρεση του σημείου  $\zeta = z$ , όπου μηδενίζεται ο παρονομαστής  $\zeta - z$ . Άρα σύμφωνα με τη γενίκευση του θεωρήματος των Cauchy-Goursat το ολοκλήρωμά της πάνω στην καμπύλη  $C$  θα είναι ίσο με το ολοκλήρωμά της πάνω σε μια περιφέρεια  $C_0$  (όχι κατ' ανάγκη μικρή) με κέντρο το σημείο  $z$ . Αλλά το τελευταίο αυτό ολοκλήρωμα (στην περιφέρεια  $C_0$ ) το έχουμε ήδη υπολογίσει στη σχέση (4.1.25) και το έχουμε βρει ίσο με  $2\pi i$ . Κατά συνέπεια η σχέση (4.3.6) παίρνει τη μορφή

$$f(z)2\pi i = \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4.3.7)$$

Αυτή με διαίρεση και των δύο μελών της δια  $2\pi i$  καταλήγει αμέσως στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy (4.3.1). Τον υπενθυμίζουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (4.3.8)$$

Από τον τύπο αυτό του Cauchy μπορεί να αποδειχθεί ότι με γνωστές τις τιμές  $f(\zeta)$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  πάνω στην τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  όχι μόνο η αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  αλλά και όλες οι παράγωγοί της  $f^{(n)}(z)$  (δηλαδή οι παράγωγοι κάθε τάξεως  $n$ ) μπορούν να προσδιορισθούν. Βέβαια ο προσδιορισμός και των παραγώγων  $f^{(n)}(z)$  γίνεται και αυτός με επικαμπύλια ολοκλήρωση πάνω στην απλή κλειστή καμπύλη  $C$ . Συγκεκριμένα ισχύουν οι τύποι:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Ολοκληρωτικοί τύποι για τις παραγώγους):** Θεωρούμε μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z$ . Θεωρούμε επίσης μια αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  πάνω στην καμπύλη  $C$  και σε όλη την ανοικτή περιοχή  $D$  που αυτή περικλείει. Τότε για κάθε σημείο  $z$  στο εσωτερικό  $D$  της κλειστής καμπύλης  $C$  (δηλαδή στην ανοικτή περιοχή  $D$ ) ισχύει για τη  $n$ -στή παράγωγο  $f^{(n)}(z)$  της  $f(z)$  ο τύπος

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \text{με } n = 1, 2, \dots. \quad (4.3.9)$$

Ο τύπος αυτός εξασφαλίζει μάλιστα την ύπαρξη της  $n$ -στής παραγώγου  $f^{(n)}(z)$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  σε κάθε σημείο  $z$  στο εσωτερικό  $D$  της κλειστής καμπύλης  $C$ . Δηλαδή, με άλλα λόγια, αν η συνάρτηση  $f(z)$  είναι αναλυτική πάνω στην κλειστή καμπύλη  $C$  και σε όλη την περιοχή  $D$  που περικλείει, τότε έχει παραγώγους κάθε τάξεως στην περιοχή  $D$ . Αυτές υπολογίζονται από τον πιο πάνω τύπο (4.3.9). Ο ίδιος μάλιστα γενικός ολοκληρωτικός τύπος (4.3.9) ισχύει και για  $n = 0$ , οπότε αφορά στην ίδια την αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$ , αφού  $f^{(0)}(z) := f(z)$ . (Δηλαδή εννοείται ότι η παράγωγος μηδενικής τάξεως μιας συναρτήσεως  $f(z)$  είναι προφανώς η ίδια η συνάρτηση  $f(z)$ .)

Θα παραλείψουμε εντελώς την απόδειξη του βασικού αυτού ολοκληρωτικού τύπου (4.3.9) για τις παραγώγους  $f^{(n)}(z)$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ . Θα σημειώσουμε όμως το μνημονικό κανόνα ότι, αφού η αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  δίνεται στην περιοχή  $D$  από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy (4.3.1) ή (4.3.8), δηλαδή από τον τύπο

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (4.3.10)$$

οι παράγωγοί της  $f^{(n)}(z)$ , που τις υποθέτουμε εδώ ότι υπάρχουν, θα δίνονται από τους τύπους

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d^n}{dz^n} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{με } n = 1, 2, \dots. \quad (4.3.11)$$

Στο μνημονικό κανόνα που αναφέρουμε εδώ απλά δεχόμαστε (αυθαίρετα, χωρίς απόδειξη) ότι μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά παραγωγίσεως και ολοκληρώσεως στον αμέσως πιο πάνω τύπο (4.3.11) για τις παραγώγους  $f^{(n)}(z)$ . Τότε προκύπτει ότι

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{1}{\zeta - z} \right) f(\zeta) d\zeta \quad \text{με } n = 1, 2, \dots, \quad (4.3.12)$$

αφού η παραγωγή γίνεται ως προς  $z$  κι όχι ως προς  $\zeta$ , όχι ως προς τη μεταβλητή ολοκληρώσεως. Και είναι τώρα πολύ εύκολη η παραγωγή. Προκύπτει, όπως μπορεί άμεσα να διαπιστωθεί με διαδοχικές παραγωγίσεις (με  $n = 1, 2, \dots$ ) ή επαγωγικά, ότι

$$\frac{d^n}{dz^n} \left( \frac{1}{\zeta - z} \right) = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}}. \quad (4.3.13)$$

Αντικαθιστώντας τώρα αυτήν την παράγωγο στη θέση της στην ολοκληρωτέα συνάρτηση στον τύπο (4.3.12), τον φέρνουμε στη μορφή του (4.3.9). Επαναλαμβάνουμε όμως πως αυτό που

κάναμε δεν είναι απόδειξη. Είναι απλά ένας μνημονικός κανόνας, ώστε να θυμόμαστε απ' έξω τον τύπο (4.3.9). Θα ήταν απόδειξη, εάν ήταν μαθηματικά δικαιολογημένο να εναλλάξουμε τη σειρά παραγωγίσεως και ολοκληρώσεως και να εισαγάγουμε έτσι την παραγωγή μέσα στην ολοκληρωτέα συνάρτηση. Αλλά δεν έχουμε καμία απόδειξη για την εναλλαγή αυτή και την κάναμε αυθαίρετα. Την αληθινή απόδειξη (που ισχύει βέβαια!) την παραλείπουμε, όπως ήδη αναφέραμε.

Σημειώνουμε τέλος πως ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy στην αρχική του μορφή (4.3.1) για τη συνάρτηση  $f(z)$  και στη γενίκευσή του (4.3.9) για τις παραγώγους  $f^{(n)}(z)$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί και αντίστροφα: για τον υπολογισμό των μιγαδικών επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων στα δεξιά μέλη. Εντούτοις αυτή η δυνατότητα δεν είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα για τον Πολιτικό Μηχανικό, ενώ αντίθετα είναι ενδιαφέρουσα για το Μαθηματικό.

#### Δ4.4. ΑΡΧΕΣ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ

Με βάση τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy μπορεί να αποδειχθεί η καλούμενη αρχή του μέγιστου μέτρου (ή της μέγιστης απόλυτης τιμής). Αναφέρουμε χωρίς απόδειξη την αρχή αυτή:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Αρχή του μέγιστου μέτρου):** Θεωρούμε μια μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  που είναι αναλυτική σε μια κλειστή φραγμένη περιοχή  $R$  με σύνορο μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  και δεν είναι σταθερή στην περιοχή  $R$ . Τότε η απόλυτος τιμή  $|f(z)|$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  παρουσιάζει μέγιστο σε κάποιο σημείο (ή σε κάποια σημεία)  $\zeta$  του συνόρου  $C$  της περιοχής  $R$  και όχι στο εσωτερικό  $D$  της  $R$ .

Εφαρμόζουμε τώρα την αρχή αυτή του μέγιστου μέτρου για τη συνάρτηση  $f^*(z) = 1/f(z)$  στην ίδια περιοχή  $R$  (με την υπόθεση ότι η  $f(z)$  δε μηδενίζεται σε κανένα σημείο  $z$  της περιοχής  $R$ ). Υπό τις συνθήκες αυτές προκύπτει η αντίστοιχη αρχή του ελάχιστου μέτρου (ή της ελάχιστης απόλυτης τιμής). Την αναφέρουμε και αυτή:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Αρχή του ελάχιστου μέτρου):** Θεωρούμε μια μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  που είναι αναλυτική σε μια κλειστή φραγμένη περιοχή  $R$  με σύνορο μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  και δεν είναι σταθερή στην περιοχή  $R$ . Επίσης υποθέτουμε ότι  $f(z) \neq 0$  σε κάθε σημείο  $z$  της περιοχής  $R$ . Τότε η απόλυτος τιμή  $|f(z)|$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  παρουσιάζει ελάχιστο σε κάποιο σημείο (ή σε κάποια σημεία)  $\zeta$  του συνόρου  $C$  της περιοχής  $R$  και όχι στο εσωτερικό  $D$  της  $R$ .

Οι δύο αυτές αρχές: του μέγιστου και του ελάχιστου μέτρου για την απόλυτη τιμή  $|f(z)|$  μιας αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες. Είναι ενδιαφέρουσες, επειδή μας εξασφαλίζουν υπό τις συνθήκες που αναφέρθηκαν προηγουμένως ότι τόσο το μέγιστο  $\max_{z \in R} |f(z)|$  όσο και το ελάχιστο  $\min_{z \in R} |f(z)|$  της απολύτου τιμής  $|f(z)|$  της συναρτήσεως  $f(z)$  παρουσιάζονται πάντοτε στο σύνορο  $C$  της κλειστής περιοχής  $R$  και ποτέ στο εσωτερικό της  $D$ .

Σχετικές και εξίσου χρήσιμες είναι και οι αρχές μέγιστου και ελαχίστου για αρμονικές συναρτήσεις  $u(x, y)$ . (Ξέρουμε ήδη ότι τόσο το πραγματικό μέρος  $u(x, y)$  όσο και το φανταστικό μέρος  $v(x, y)$  μιας αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  είναι αρμονικές συναρτήσεις.) Όμως οι αρχές αυτές αναφέρονται στην ίδια τη συνάρτηση  $u(x, y)$  και όχι στο μέτρο της (ή απόλυτο τιμή της) αντίθετα με προηγουμένως. Παραλείπουμε και εδώ τις αποδείξεις αναφέροντας απλά τις αρχές αυτές:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Αρχές μέγιστου και ελαχίστου για αρμονικές συναρτήσεις):** Θεωρούμε μια μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  που είναι αναλυτική σε μια φραγμένη κλειστή περιοχή  $R$  με σύνορο μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  και δεν είναι σταθερή στην περιοχή  $R$ . Τότε οι αρμονικές συναρτήσεις  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$  (το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συναρτήσεως  $f(z)$  αντίστοιχα) παίρνουν τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές τους στο σύνορο  $C$  της κλειστής περιοχής  $R$  και όχι στο εσωτερικό  $D$  της  $R$ .

#### Δ4.5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

Πέρα απ' τα Μαθηματικά στις εφαρμογές η μιγαδική επικαμπύλια ολοκλήρωση απαντάται εκεί όπου απαντώνται και μιγαδικές συναρτήσεις, βασικά αναλυτικές συναρτήσεις. Τούτο συμβαίνει π.χ. στη Ρευστομηχανική: στη μόνιμη (σταθερή) διδιάστατη (επίπεδη) αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού, όπου έχουμε το γνωστό μας από την Ενότητα Δ3.6 **μιγαδικό δυναμικό ροής**  $\Omega(z)$ . Αυτό είναι σχεδόν παντού (με την εξαίρεση μεμονωμένων σημείων) αναλυτική συνάρτηση. Με τη βοήθεια του μιγαδικού δυναμικού ροής  $\Omega(z)$ , συγκεκριμένα της παραγώγου του  $\Omega'(z)$ , υπολογίζουμε τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας  $V_x$  και  $V_y$  του ρευστού μέσω του τύπου (3.6.5):

$$\Omega'(z) = V_x - iV_y, \quad \text{δηλαδή} \quad V_x = \operatorname{Re}\Omega'(z) \quad \text{και} \quad V_y = -\operatorname{Im}\Omega'(z). \quad (4.5.1)$$

Ανάλογα ισχύουν και στην επίπεδη Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών, όπου έχουμε τα δύο **μιγαδικά δυναμικά**  $\varphi(z)$  και  $\psi(z)$  των Kolosov–Muskhelishvili με παραγώγους τους τα μιγαδικά δυναμικά  $\Phi(z) = \varphi'(z)$  και  $\Psi(z) = \psi'(z)$ . Με τη βοήθεια των δυναμικών αυτών  $\Phi(z)$  και  $\Psi(z)$  υπολογίζουμε τις συνιστώσες των τάσεων  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  και  $\tau_{xy}$  και έπειτα (με το νόμο του Hooke) και τις συνιστώσες των παραμορφώσεων  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  και  $\varepsilon_{xy}$  (ή  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ ) στο επίπεδο ελαστικό μέσον μας.

##### Δ4.5.1. Κυκλοφορία ιδεατού ρευστού

Αλλά απομακρυνθήκαμε λιγάκι από το στόχο μας που αφορά σε εφαρμογές στη Ρευστομηχανική συγκεκριμένα στη ροή που προαναφέραμε με μιγαδικό δυναμικό ροής το  $\Omega(z)$ . Πριν ξεκινήσουμε τις εφαρμογές μας στη Ρευστομηχανική θα ορίσουμε την **κυκλοφορία** ιδεατού ρευστού πάνω σε μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  σε μόνιμη (σταθερή) διδιάστατη (επίπεδη) ροή με χρήση της παραγώγου  $\Omega'(z)$  του μιγαδικού δυναμικού ροής  $\Omega(z)$ . Η κυκλοφορία  $\Gamma$  πάνω στην καμπύλη  $C$  ορίζεται στη Ρευστομηχανική με βάση το πραγματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\Gamma := \oint_C (V_x dx + V_y dy). \quad (4.5.2)$$

Γενικά μιλώντας, η καμπύλη  $C$  στην επικαμπύλια ολοκλήρωση θα μπορούσε να είναι και ανοικτή καμπύλη (εννοείται βέβαια τμηματικά λεία και απλή). Εντούτοις σχεδόν πάντοτε είναι κλειστή καμπύλη. Γι' αυτό και χρησιμοποιούμε το σχετικό ειδικό σύμβολο ολοκλήρωσης  $\oint$  αντί για το  $\int$ .

Ας θεωρήσουμε τώρα την παράγωγο  $\Omega'(z)$  του μιγαδικού δυναμικού ροής  $\Omega(z)$  και το αντίστοιχο μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στην ίδια καμπύλη  $C$ . Από τη σχέση (4.1.10) (εδώ πολύ πρακτικά θεωρώντας ότι  $dz = dx + i dy$ ) και λόγω της σχέσεως (4.5.1), δηλαδή  $\Omega'(z) = V_x - iV_y$ , προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \oint_C \Omega'(z) dz &= \oint_C (V_x - iV_y)(dx + i dy) \\ &= \oint_C [(V_x dx + V_y dy) + i(-V_y dx + V_x dy)] \\ &= \oint_C (V_x dx + V_y dy) + i \oint_C (-V_y dx + V_x dy). \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Αλλά το πρώτο ολοκλήρωμα στην τελευταία πιο πάνω γραμμή, το πραγματικό μέρος του μιγαδικού ολοκληρώματος  $\oint_C \Omega'(z) dz$  δεν είναι τίποτε άλλο παρά η κυκλοφορία  $\Gamma$  της ροής του ιδεατού ρευστού πάνω στην καμπύλη  $C$  με ορισμό της τον (4.5.2). Θαυμάσια! Άρα προφανώς έχουμε

$$\Gamma = \operatorname{Re} \oint_C \Omega'(z) dz. \quad (4.5.4)$$

Ας σημειώσουμε όμως ότι σε κάθε περιοχή  $R$  του πεδίου ροής με τη μιγαδική συνάρτηση  $\Omega'(z)$  αναλυτική και στο εσωτερικό της  $D$  αλλά και στο σύνορό της  $C$  με βάση το θεώρημα των Cauchy–Goursat το πιο πάνω ολοκλήρωμα  $\oint_C \Omega'(z) dz$  μηδενίζεται. Άρα και η κυκλοφορία  $\Gamma$  (που είναι το πραγματικό μέρος του) μηδενίζεται και αυτή. Αυτό δεν ισχύει βέβαια, όταν η περιοχή  $R$  περιέχει σημεία με τη συνάρτηση  $\Omega'(z)$  να μην είναι αναλυτική, όπως συμβαίνει στο πιο κάτω παράδειγμα.



**Δ4.5.2. Εφαρμογή σε δίνη**

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση μόνιμης διδιάστατης αστρόβιλης ροής ιδεατού ρευστού όπου

$$\Omega(z) = \frac{A}{2\pi i} \ln(z - z_0), \quad \text{οπότε} \quad \Omega'(z) = \frac{A}{2\pi i(z - z_0)} \tag{4.5.5}$$

με το  $A$  πραγματική σταθερά και επίσης  $z_0 = x_0 + iy_0$  ένα συγκεκριμένο σημείο του πεδίου ροής. Φυσικά στο σημείο αυτό  $z_0$  η παράγωγος  $\Omega'(z)$  δεν είναι αναλυτική και παρουσιάζει **πόλο πρώτης τάξεως**. Όμως σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του μιγαδικού επιπέδου  $z$  είναι προφανώς αναλυτική. Μια τέτοια συνάρτηση (με μεμονωμένους **πόλους**) τη λέμε **μερόμορφη συνάρτηση**. Και τώρα ας υπολογίσουμε την κυκλοφορία  $\Gamma$  στη ροή αυτή πάνω σε μια περιφέρεια  $C_0$  με κέντρο το σημείο  $z_0$ .

Με βάση τον τύπο (4.1.27) προφανώς θα έχουμε

$$\oint_{C_0} \Omega'(z) dz = \frac{A}{2\pi i} \oint_{C_0} \frac{1}{z - z_0} dz = \frac{A}{2\pi i} 2\pi i = A. \tag{4.5.6}$$

Και λόγω του τύπου (4.5.4) και της υποθέσεώς μας ότι το  $A$  είναι πραγματική σταθερά συνάγουμε αμέσως ότι  $\Gamma = A$ . Δηλαδή η σταθερά  $A$  είναι η κυκλοφορία πάνω στην περιφέρεια  $C_0$  που θεωρούμε. Λόγω όμως του θεωρήματος των Cauchy-Goursat στη γενίκευσή του (4.2.10) και της αναλυτικότητας της  $\Omega'(z)$  σε όλο το μιγαδικό επίπεδο (με εξαίρεση το σημείο  $z_0$ ) ίδια ακριβώς είναι η κυκλοφορία και σε κάθε τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  με το σημείο  $z_0$  στο εσωτερικό της. Από την άλλη πλευρά πάλι λόγω του θεωρήματος των Cauchy-Goursat η κυκλοφορία  $\Gamma$  σε κάθε ανάλογη καμπύλη  $C^*$  που δεν έχει όμως το σημείο  $z_0$  στο εσωτερικό της αλλά στο εξωτερικό της θα είναι μηδέν:  $\Gamma = 0$ . Τέλος, εάν η καμπύλη  $C$  περνάει από το ίδιο το σημείο  $z_0$ , το σχετικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα και επομένως και η ίδια η κυκλοφορία  $\Gamma$  δε μπορούν να ορισθούν.

Το παρόν πεδίο ροής αφορά σε δίνη στο σημείο  $z_0$  με κυκλοφορία  $\Gamma = A$ : τύποι (3.6.13). Αντίστοιχο είναι και το πεδίο ροής με το  $A = iQ$  φανταστική σταθερά. Τότε βέβαια  $\Gamma = 0$  σε κάθε περίπτωση. Το πεδίο αυτό με  $A = iQ$  αφορά σε πηγή (καλύτερα σημειακή πηγή): τύποι (3.6.12).

**Δ4.5.3. Δύναμη και ροπή από τη ροή πάνω σε στερεό εμπόδιο**

Εδώ θεωρούμε τη μόνιμη διδιάστατη αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού, όπως και προηγουμένως, που παρεμποδίζεται από ένα σταθερό στερεό εμπόδιο (π.χ. μια πλάκα). Υποθέτουμε ότι στη ροή αυτή γνωρίζουμε το μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z)$ . Τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε με μιγαδικές ολοκληρώσεις τη συνολική δύναμη  $F = X + iY$  καθώς και τη συνολική ροπή  $M$  (ως προς την αρχή των αξόνων  $z = 0$ ) που ασκεί το ρευστό πάνω στο εμπόδιο ανά μονάδα πάχους του εμποδίου: κάθετα στη ροή. Οι σχετικοί τύποι είναι τα θεωρήματα του Blasius και είναι οι ακόλουθοι:

$$\bar{F} = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C \Omega'^2(z) dz \quad \text{και} \quad M = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C z \Omega'^2(z) dz \tag{4.5.7}$$

με  $C$  το σύνορο του εμποδίου και  $\rho$  την πυκνότητα του ρευστού. Το μόνο καθήκον του Πολιτικού Μηχανικού είναι ο υπολογισμός των πιο πάνω ολοκληρωμάτων: είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά.

**Δ4.5.4. Εφαρμογή του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy**

Θεωρώντας κλειστή περιοχή  $R$  με σύνορο  $C$  και με τη συνάρτηση  $\Omega'(z)$  αναλυτική και στο εσωτερικό της  $D$  και στο σύνορό της  $C$  μπορούμε ασφαλώς να εφαρμόσουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy (4.3.1) εδώ με αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  τη συνάρτηση  $\Omega'(z)$ . Έτσι θα έχουμε

$$\Omega'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Omega'(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{4.5.8}$$

με την προϋπόθεση βέβαια ότι γνωρίζουμε τις τιμές  $\Omega'(\zeta)$  της συναρτήσεως  $\Omega'(z)$  στο σύνορο  $C$  της περιοχής  $R$ . Αλλά να μην ξεχνάμε το θεμελιώδη τύπο (4.5.1), δηλαδή ότι  $\Omega'(z) = V_x - iV_y$ . Δηλαδή με απλά λόγια, αν γνωρίζουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού στο σύνορο  $C$

του πεδίου ροής  $R$ , τότε μπορούμε να τις υπολογίσουμε με βάση τον πιο πάνω τύπο (4.5.8) και σε κάθε εσωτερικό σημείο  $z$  του πεδίου ροής. Αρκεί βέβαια η συνάρτηση  $\Omega'(z)$  να είναι αναλυτική σε ολόκληρο το πεδίο ροής  $R$ , δηλαδή να μην υπάρχουν πηγές, δίνες, δίπολα, εμπόδια στη ροή και οτιδήποτε άλλο καταστρέφει την αναλυτικότητα της συναρτήσεως  $\Omega'(z)$ .

#### Δ4.5.5. Εφαρμογή των αρχών μεγίστου και ελαχίστου

Για το μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z)$  και φυσικά και για την παράγωγό του  $\Omega'(z)$  που μας ενδιαφέρει περισσότερο, αφού  $\Omega'(z) = V_x - iV_y$ , ισχύουν βέβαια οι αρχές του μεγίστου μέτρου και του ελάχιστου μέτρου της προηγούμενης Ενότητας Δ4.4. Δηλαδή, αν οι συναρτήσεις αυτές είναι αναλυτικές σε μια κλειστή περιοχή  $R$  (και στο σύνορό της  $C$ ), τότε οι απόλυτες τιμές τους  $|\Omega(z)|$  και  $|\Omega'(z)|$  παίρνουν μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στο σύνορο  $C$  και όχι στο εσωτερικό  $D$  της περιοχής  $R$ . Όμως για την ελάχιστη τιμή απαιτείται επιπλέον και η μη ύπαρξη ριζών της συναρτήσεως  $\Omega(z)$  ή της συναρτήσεως  $\Omega'(z)$  αντίστοιχα στην ανοικτή περιοχή  $D$ . Από της απόψεως του Πολιτικού Μηχανικού δε μας λένε και πολλά πράγματα αυτά τα συμπεράσματα για την απόλυτη τιμή  $|\Omega(z)|$  της συναρτήσεως  $\Omega(z)$ , επειδή αυτή δεν έχει άμεση φυσική σημασία. Όμως, επειδή

$$\Omega'(z) = V_x - iV_y, \quad \text{θα έχουμε} \quad |\Omega'(z)| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \quad (4.5.9)$$

το μέτρο της μιγαδικής ταχύτητας  $V_x - iV_y$ . Επομένως το μέτρο  $V$  της ταχύτητας του ρευστού με τη συνάρτηση  $\Omega'(z)$  αναλυτική (πρακτικά χωρίς πηγές, δίνες, δίπολα, εμπόδια, κλπ.) παίρνει και μέγιστη και ελάχιστη τιμή πάνω στο σύνορο  $C$  της περιοχής  $R$  και όχι στο εσωτερικό της  $D$ . Ωραία!

Και παρακάτω εφαρμόζουμε τις αρχές μεγίστου και ελαχίστου για αρμονικές συναρτήσεις, οι οποίες έχουν αναφερθεί στην ίδια Ενότητα Δ4.4. Έτσι θεωρούμε τις δύο συνιστώσες  $V_x$  και  $V_y$  της ταχύτητας του ρευστού. Όμως, αφού ισχύει  $\Omega'(z) = V_x - iV_y$ , θα είναι κι οι δυο τους αρμονικές συναρτήσεις, κάτι που προκύπτει και πιο άμεσα (χωρίς την ανάμειξη του μιγαδικού δυναμικού ροής) από τις εξισώσεις συνεχείας και αστρόβιλου της ροής. Με αρμονικές λοιπόν και τις δύο συναρτήσεις  $V_x$  και  $V_y$  σε κάθε σημείο  $(x, y)$  του πεδίου ροής (αναγκαία υπόθεση: καθόλου πηγές, δίνες, δίπολα και εμπόδια στο πεδίο ροής!) αυτές θα παίρνουν και τις μέγιστες και τις ελάχιστες τιμές τους (κανονικές τιμές, όχι βέβαια απόλυτες τιμές αντίθετα με προηγουμένως) πάνω στο σύνορο  $C$  της περιοχής  $R$  και όχι στο εσωτερικό  $D$  της ίδιας περιοχής. Είναι πολύ χρήσιμο και το συμπέρασμα αυτό σαν μια ακόμη εφαρμογή των γνώσεων που αποκτήθηκαν στο παρόν Κεφάλαιο Δ4.

► **Παρατήρηση Δ4.2:** Στην Ενότητα αυτή Δ4.5 αναφερθήκαμε μόνο σε εφαρμογές της μιγαδικής ολοκλήρωσης και των αρχών μεγίστου και ελαχίστου στη Ρευστομηχανική με χρήση του μιγαδικού δυναμικού ροής  $\Omega(z)$ . Εντούτοις προφανώς ανάλογες εφαρμογές ισχύουν και στην Επίπεδη Ελαστικότητα με βάση τα δύο μιγαδικά δυναμικά  $\varphi(z)$  και  $\psi(z)$  των Kolosov-Muskhelishvili και τις παραγώγους τους  $\Phi(z) = \varphi'(z)$  και  $\Psi(z) = \psi'(z)$ . Τα δυναμικά αυτά τα μελετήσαμε ήδη στην Ενότητα Δ3.7 του προηγούμενου Κεφαλαίου Δ3. (Ανάλογα ισχύουν και για το μιγαδικό δυναμικό του Westergaard  $Z(z)$  σε προβλήματα ρωγμών στη Θραυστομηχανική: Παράγραφος Δ3.7.3.)

Για παράδειγμα, από τον τύπο (3.7.3):  $\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z)$  με τη χρήση των αρχών μεγίστου και ελαχίστου για αρμονικές συναρτήσεις (εδώ του αθροίσματος  $\sigma_x + \sigma_y$  των ορθών τάσεων  $\sigma_x$  και  $\sigma_y$ ), συνάγουμε ότι το άθροισμα  $\sigma_x + \sigma_y$  παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του πάνω στο σύνορο  $C$  ενός επίπεδου ελαστικού μέσου  $R$ . Φυσικά αυτό ισχύει, μόνο εφόσον η περιοχή  $R$  του ελαστικού μέσου έχει σύνορο μόνο μία απλή κλειστή καμπύλη  $C$ , δηλαδή είναι πεπερασμένη και δεν έχει καθόλου οπές, ρωγμές, εγκλείσματα και γεωμετρικές ασυνέχειες γενικότερα, οι οποίες συμπεριλαμβάνουν και τις καλούμενες dislocations. Επίσης το μιγαδικό δυναμικό  $\Phi(z)$  πρέπει να είναι αναλυτική συνάρτηση σε ολόκληρη την περιοχή  $R$  του ελαστικού μέσου. Δηλαδή δεν πρέπει να ασκούνται ούτε συγκεντρωμένες δυνάμεις ούτε ροπές στο εσωτερικό  $D$  του ελαστικού μέσου.

Δε θα προχωρήσουμε σε άλλες εφαρμογές της θεωρίας αυτού του κεφαλαίου στην Επίπεδη Ελαστικότητα, αν και υπάρχει πληθώρα τέτοιων εφαρμογών διαθέσιμη στη σχετική βιβλιογραφία.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 25

## ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR ΚΑΙ LAURENT

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο παρόν Κεφάλαιο Δ5 θα προχωρήσουμε στις μιγαδικές δυναμοσειρές. Αυτές γενικεύουν τις πραγματικές δυναμοσειρές. Μετά από μια μικρή εισαγωγή θα γενικεύσουμε τη γνωστή μας **σειρά Taylor** από τις παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις  $f(x)$  στις αναλυτικές μιγαδικές συναρτήσεις  $f(z)$ . (Ειδική περίπτωση της σειράς Taylor είναι πάλι η **σειρά Maclaurin**.) Μετά θα αναφερθούμε σε μια μη τετριμμένη γενίκευσή της που είναι η **σειρά Laurent**. Αυτή περιέχει όχι μόνο μη αρνητικές δυνάμεις  $(z - z_0)^n$  (με το  $n$  μη αρνητικό ακέραιο αριθμό), αλλ' επίσης κι αρνητικές δυνάμεις (με το  $n$  αρνητικό ακέραιο αριθμό). Στη συνέχεια θα κάνουμε μια απλή εφαρμογή των μιγαδικών σειρών Taylor στη Ρευστομηχανική χρησιμοποιώντας το μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z)$ . Τέλος θα αναφέρουμε πρόχειρα και μια δυνατότητα που μας παρέχουν οι μιγαδικές δυναμοσειρές για την προσεγγιστική επίλυση προβλημάτων της Ρευστομηχανικής (ανάλογα και της Ελαστικότητας). Αυτή βασίζεται στη χρήση  $N$  συγκεκριμένων σημείων μιγαδικής παρεμβολής στο σύνορο μιας περιοχής.

### Δ5.1. ΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Έχουμε ήδη μελετήσει στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι τις πραγματικές σειρές (άπειρες σειρές, αθροίσματα με άπειρους όρους). Οι σειρές αυτές γενικεύονται και στη Μιγαδική Ανάλυση, όπου τώρα βέβαια έχουμε μιγαδικές σειρές. Από αυτές θα ασχοληθούμε με τις δυναμοσειρές της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (5.1.1)$$

με κέντρο το σημείο  $z = z_0$  στο μιγαδικό επίπεδο και συντελεστές  $a_n$  γενικά μιγαδικούς. Δηλώνουμε με  $S_N(z)$  τα μερικά αθροίσματα με τους  $N$  πρώτους όρους της πιο πάνω δυναμοσειράς (με άπειρους όρους), δηλαδή

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n (z - z_0)^n. \quad (5.1.2)$$

Εργαζόμαστε σε πλήρη αναλογία με όσα ξέρουμε για τις πραγματικές δυναμοσειρές. Λέμε ότι η ακολουθία των μερικών αυτών αθροισμάτων  $S_N(z)$  **συγκλίνει** σε μια συνάρτηση  $S(z)$  (σε όσα σημεία  $z$  του μιγαδικού επιπέδου συγκλίνει), εφόσον για κάθε θετικό αριθμό  $\varepsilon$  οσοδήποτε μικρό ισχύει

$$|S_N(z) - S(z)| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } N \text{ τέτοιο ώστε } N > N_0(\varepsilon, z). \quad (5.1.3)$$

Το  $N_0(\varepsilon, z)$  είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός ο οποίος εξαρτάται τόσο από το θετικό αριθμό  $\varepsilon$  όσο και από το σημείο  $z$ . Στην περίπτωση αυτή έχουμε **σύγκλιση** της παραπάνω δυναμοσειράς  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$  (αλλιώς θα είχαμε **απόκλιση**) και γράφουμε

$$S(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N(z) \quad \text{ή καλύτερα} \quad S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (5.1.4)$$

σύμφωνα με τον ορισμό (5.1.2) των μερικών αθροισμάτων  $S_N(z)$  της δυναμοσειράς μας. Για τα σημεία  $z$  που ισχύει η σχέση (5.1.3) η δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  συγκλίνει στη συνάρτηση  $S(z)$ .

Θεωρούμε και την ειδική αλλά και ενδιαφέρουσα περίπτωση που ο αριθμός  $N_0(\varepsilon, z)$  στο τέλος της σχέσεως (5.1.3) δεν εξαρτάται καθόλου από το σημείο  $z$  του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή έχουμε  $N_0 = N_0(\varepsilon)$  μόνο και όχι  $N_0 = N_0(\varepsilon, z)$ . Τότε λέμε ότι έχουμε **ομοιόμορφη σύγκλιση** της δυναμοσειράς  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$  γενικεύοντας την ομοιόμορφη σύγκλιση από τις πραγματικές στις μιγαδικές δυναμοσειρές. Ανάλογα γενικεύονται από τις πραγματικές στις μιγαδικές δυναμοσειρές η **απόλυτη σύγκλιση** και αρκετές άλλες έννοιες, μέθοδοι αποδείξεων και θεωρήματα.

## Δ5.2. ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR

### Δ5.2.1. Πραγματικές σειρές Taylor

Προχωράμε τώρα στις **σειρές Taylor**. Πρόκειται για δυναμοσειρές που μας είναι ήδη κι αυτές γνωστές από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι. Για παράδειγμα, γνωρίζουμε τη σειρά Taylor

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots \quad \text{με} \quad -\infty < x < \infty \quad (5.2.1)$$

της εκθετικής συναρτήσεως στο σημείο  $x = 0$  καθώς και πολλές ακόμη απλές σειρές Taylor: για το  $\cos x$ , το  $\sin x$ , κλπ. Ειδικά στο σημείο  $x = 0$  μια **σειρά Taylor** καλείται συνήθως **σειρά Maclaurin**. Έχουμε συναντήσει πολλές σειρές Taylor για πραγματικές συναρτήσεις  $f(x)$  με τη γενική μορφή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} (x - x_0)^3 + \dots \quad (5.2.2)$$

Υποτίθεται βέβαια ότι υπάρχουν όλες οι παράγωγοι  $f^{(n)}(x_0)$  της συναρτήσεως  $f(x)$  στη σειρά Taylor.

Μια πραγματική σειρά Taylor (και μια πραγματική δυναμοσειρά γενικότερα) συγκλίνει σε ένα πραγματικό διάστημα  $(x_0 - R, x_0 + R)$ . Ο μη αρνητικός αριθμός  $R$  καλείται **ακτίνα σύγκλισης** της πραγματικής δυναμοσειράς. Για παράδειγμα, στην πιο πάνω σειρά Taylor (καλύτερα σειρά Maclaurin) της εκθετικής συναρτήσεως  $e^x$  η ακτίνα σύγκλισης είναι  $R = \infty$ . Δηλαδή η σειρά Taylor της συναρτήσεως  $e^x$  συγκλίνει για κάθε πεπερασμένο  $x$ . Φυσικά αυτό ( $R = \infty$ ) δεν ισχύει πάντοτε.

### Δ5.2.2. Μιγαδικές σειρές Taylor

Οι σειρές Taylor γενικεύονται από τις πραγματικές παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f(x)$  και στις αναλυτικές μιγαδικές συναρτήσεις  $f(z)$ . Έχουν μάλιστα και ακριβώς την ίδια μορφή (5.2.2), τώρα όμως με  $z$  αντί για  $x$ , επειδή βρισκόμαστε στο μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy$ . Έτσι έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2} (z - z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{6} (z - z_0)^3 + \dots \quad (5.2.3)$$

Φυσικά στην περίπτωση που το σημείο  $z_0$  είναι το ειδικό σημείο  $z_0 = 0$ : εδώ η αρχή των αξόνων  $O$  στο μιγαδικό επίπεδο μιλάμε συνήθως για μια **σειρά Maclaurin**. Σημειώνουμε επίσης πως τούτη η σειρά Taylor είναι απλά μια μιγαδική δυναμοσειρά της μορφής (5.1.1), αλλ' εδώ με  $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ .

Η παραπάνω πραγματική σειρά Taylor-Maclaurin (5.2.1) της εκθετικής συναρτήσεως  $f(x)$  έχει την ακριβώς αντίστοιχη μιγαδική σειρά Taylor-Maclaurin: απλά με  $z$  αντί για  $x$ . Το ίδιο και όλες οι άλλες γνωστές μας σειρές Taylor (ή Maclaurin για  $z_0 = 0$ ). Επειδή οι κανόνες παραγωγίσεως για παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις και για αναλυτικές μιγαδικές συναρτήσεις είναι ακριβώς οι ίδιοι, και οι σειρές Taylor που προκύπτουν είναι ακριβώς οι ίδιες. Αναφέρουμε τώρα απλά τις σειρές Taylor (εδώ με  $z_0 = 0$ : σειρές Maclaurin) τριών αναλυτικών μιγαδικών συναρτήσεων:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (5.2.4)$$

και επίσης τις αντίστοιχες και εξίσου χρήσιμες σειρές Taylor (καλύτερα Maclaurin) με  $iz$  αντί για  $z$ :

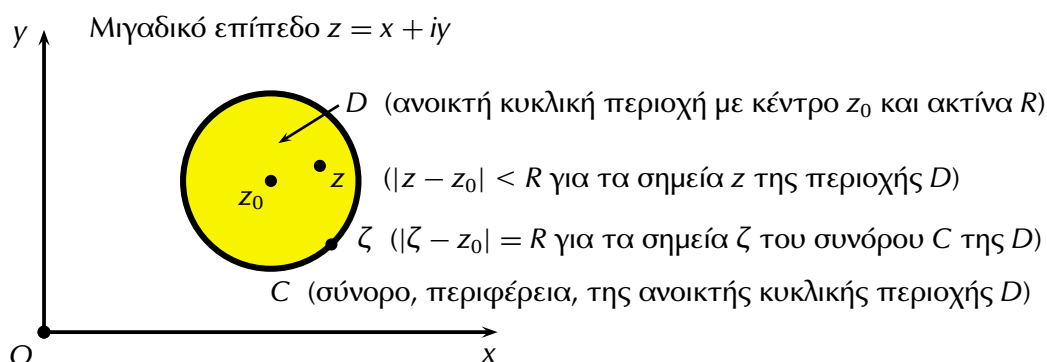
$$e^{iz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (5.2.5)$$

Και οι έξι αυτές σειρές Maclaurin συγκλίνουν για  $|z| < \infty$ , δηλαδή για κάθε πεπερασμένη τιμή του  $z$ .

### Δ5.2.3. Κύκλος συγκλίσεως σειράς Taylor

Είναι λοιπόν ολόιδιες οι σειρές Taylor των παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων και των αντίστοιχών τους αναλυτικών μιγαδικών συναρτήσεων που είναι κι αυτές παραγωγίσιμες στην ανοικτή περιοχή  $D$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$  (με  $z = x + iy$ ) όπου είναι αναλυτικές. Απλά στις μιγαδικές σειρές Taylor έχουμε συνήθως τη μιγαδική μεταβλητή  $z$  αντί για την πραγματική μεταβλητή  $x$ . Κι όμως ο συνηθισμένος τρόπος εργασίας για τον προσδιορισμό μιας μιγαδικής σειράς Taylor είναι εντελώς διαφορετικός από τον τρόπο εργασίας για τον προσδιορισμό της αντίστοιχης πραγματικής σειράς Taylor. Είναι διαφορετικός, επειδή βασίζεται στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy (4.3.1) της Ενότητας Δ4.3 χωρίς κάποιο αντίστοιχο τύπο στις πραγματικές συναρτήσεις. Τη σχετική απόδειξη την παραλείπουμε εδώ, αν και δεν είναι και φοβερά δύσκολη και περιοριζόμαστε να αναφέρουμε μόνο το συμπέρασμα: το βασικό θεώρημα για τις μιγαδικές σειρές Taylor:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Μιγαδικές σειρές Taylor):** Θεωρούμε μια αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  σε ανοικτή κυκλική περιοχή  $D$  με κέντρο το σημείο  $z_0$  και ακτίνα  $R$ , δηλαδή στην περιοχή  $|z - z_0| < R$  (Σχήμα Δ5.1). Τότε για κάθε σημείο  $z$  της ανοικτής αυτής περιοχής  $D$  ισχύει η σειρά Taylor (5.2.3).



**Σχήμα Δ5.1:** Ανοικτή κυκλική περιοχή  $D$  συγκλίσεως της σειράς Taylor (5.2.3) της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy$  με κέντρο το σημείο  $z_0$  και ακτίνα  $R$ .

Επομένως το θεώρημα αυτό μας εξασφαλίζει τη σύγκλιση της σειράς Taylor της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  στην ίδια τη συνάρτηση  $f(z)$  μόνο στην ανοικτή κυκλική περιοχή  $D$ , ούτε καν στο σύνορό της: στην περιφέρεια  $|z - z_0| = R$ . Έτσι στις μιγαδικές σειρές Taylor μιλάμε για **κύκλο συγκλίσεως** (ή **κυκλική περιοχή συγκλίσεως**) της σειράς Taylor. Εναλλακτικά μπορούμε να διατηρήσουμε και τον όρο **ακτίνα συγκλίσεως** της μιγαδικής σειράς Taylor (ανάλογα με τις πραγματικές σειρές Taylor). Τώρα όμως εννοούμε την ακτίνα  $R$  του κύκλου συγκλίσεως  $D$ . Στο σημείο αυτό ας σημειώσουμε πως για τις έξι σειρές Taylor-Maclaurin των σχέσεων (5.2.4) και (5.2.5) η ακτίνα συγκλίσεως είναι  $R = \infty$  ή ισοδύναμα συγκλίνουν σ' ολόκληρο το πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο  $z$ .

### Δ5.2.4. Ολοκληρωτικές εκφράσεις των συντελεστών

Για να δούμε όμως και κάτι άλλο. Αναφέραμε ότι στις μιγαδικές σειρές Taylor η μέθοδος αποδείξεως του τύπου (5.2.3) βασίζεται στον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy (4.3.1) της Ενότητας Δ4.3. Η μέθοδος αυτή οδηγεί σε ολοκληρωτική μορφή για τους συντελεστές  $a_n$  της σειράς Taylor: ολοκληρωτική έκφραση των συντελεστών. Αυτοί όμως εξαιτίας των τύπων (4.3.9) για τις παραγώγους

μιας αναλυτικής συναρτήσεως μπορούν να γραφούν και σε μορφή παραγώγων. Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{με } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2.6)$$

και  $C$  το σύνορο (εδώ περιφέρεια) της κυκλικής περιοχής  $D$ . Τονίζουμε με έμφαση πως στη συνηθισμένη απόδειξη για τη μιγαδική σειρά Taylor πρώτα προκύπτει η ολοκληρωτική έκφραση του συντελεστή  $a_n$  (στο μέσον της πιο πάνω σχέσεως). Έπειτα με βάση τους τύπους (4.3.9) (διαίρωντας τους με  $n!$ ) προκύπτει η έκφραση με τις παραγώγους (δεξιά στην πιο πάνω σχέση), που μας θυμίζει την πραγματική σειρά Taylor και που γι' αυτό την προτιμήσαμε στην αρχική σχέση (5.2.3). Τέλος η χρήση των ολοκληρωτικών τύπων στις σχέσεις (5.2.6) για τους συντελεστές  $a_n$  της σειράς Taylor καθιστά σαφές ότι απλά οι συνοριακές τιμές  $f(\zeta)$  (στην περιφέρεια  $C$ ) της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  είναι επαρκείς για τον πλήρη καθορισμό της σχετικής σειράς Taylor στην κυκλική περιοχή  $D$ . Έτσι υπολογίζεται η αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  στην περιοχή αυτή  $D$ . Πρόκειται για μια εναλλακτική δυνατότητα αυτής που προσέφερε ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy (4.3.1). Έτσι κι αλλιώς από αυτόν τον τύπο προέκυψε η σειρά Taylor της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ .

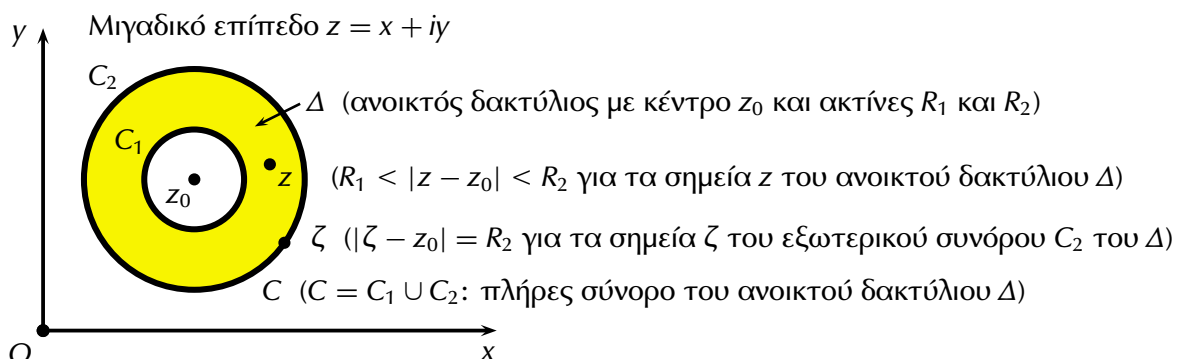
Σημειώνουμε τέλος ότι στις σειρές Taylor για την παράγωγο και το αόριστο ολοκλήρωμα της συναρτήσεως  $f(z)$  (όπου συγκλίνουν) μπορούμε να παραγωγίσουμε και να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο το δεξιό μέλος της σειράς Taylor (5.2.3) της ίδιας της συναρτήσεως  $f(z)$  αντίστοιχα. Δεν προκαλείται έτσι καμία μεταβολή του κύκλου συγκλίσεως  $D$  (ή της ακτίνας συγκλίσεως  $R$ ). Προχωράμε τώρα σε μια πάρα πολύ σημαντική γενίκευση των σειρών Taylor: στις σειρές Laurent.

### Δ5.3. ΣΕΙΡΕΣ LAURENT

#### Δ5.3.1. Γενικά για τις σειρές Laurent

Οι **σειρές Laurent** αποτελούν μια ενδιαφέρουσα γενίκευση των μιγαδικών σειρών Taylor και αντίθετα με τις σειρές Taylor δεν έχουμε συναντήσει ανάλογες τους σειρές στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά Ι. Δηλαδή δεν αποτελούν γενίκευση κάποιων ήδη γνωστών μας πραγματικών σειρών.

Και τί είδους ακριβώς είναι αυτές οι σειρές Laurent; Να! Είναι όπως οι σειρές Taylor, αλλά με την ύπαρξη και μιας ή/και περισσότερων ή/και άπειρων αρνητικών δυνάμεων στον εκθέτη  $n$  των παραγόντων  $(z - z_0)^n$  στη σειρά (5.2.3). Επιπλέον δε σχετίζονται διόλου με τις παραγώγους της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ . Τέλος αναφέρονται σε ανοικτό δακτύλιο (ή ανοικτή δακτυλιοειδή περιοχή)  $\Delta$  με τη συνάρτηση  $f(z)$  που αναπτύσσεται σε σειρά Laurent να είναι αναλυτική στην περιοχή  $\Delta$  και όχι σε κυκλική περιοχή  $D$ , όπως συνέβαινε στις σειρές Taylor. Ένας τέτοιος ανοικτός δακτύλιος  $\Delta$  φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα Δ5.2:



**Σχήμα Δ5.2:** Ανοικτός δακτύλιος  $\Delta$  συγκλίσεως της σειράς Laurent (5.3.2) της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy$  με κέντρο το σημείο  $z_0$  και ακτίνες  $R_1$  (της εσωτερικής περιφέρειας  $C_1$  του  $\Delta$ ) και  $R_2$  (της εξωτερικής περιφέρειας  $C_2$  του  $\Delta$ ).

Ας γίνουμε πιο συγκεκριμένοι ξεχωρίζοντας εύκολα τις σειρές Laurent από τις σειρές Taylor. Στις σειρές Taylor με τη μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  αναλυτική στην ανοικτή κυκλική περιοχή  $D$ , όπως ήδη γνωρίζουμε από τις σχέσεις (5.2.3) και (5.2.6), έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{με} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \text{και} \quad z \in D. \quad (5.3.1)$$

Εδώ προτιμήσαμε τις ολοκληρωτικές εκφράσεις στη σχέση (5.2.6) για τους συντελεστές  $a_n$  στη δυναμοσειρά αυτή: τη σειρά Taylor (5.2.3). Γενικότερα τώρα στις σειρές Laurent με τη μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  αναλυτική στον ανοικτό δακτύλιο  $\Delta$  έχουμε

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \quad \text{με} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \text{και} \quad z \in \Delta. \quad (5.3.2)$$

Τώρα δεν υπάρχει τύπος με παραγώγους για τους συντελεστές  $c_n$ : εδώ της σειράς Laurent. Τονίζουμε με έμφαση ότι το  $n$  στις σειρές Laurent παίρνει και αρνητικές τιμές: γενικά  $-\infty < n < \infty$ . Παρατηρούμε επίσης ότι οι τύποι για τους συντελεστές  $c_n$  της σειράς Laurent (5.3.2) ταιριάζουν απόλυτα με τους αντίστοιχους τύπους της σειράς Taylor (5.3.1). Μόνο που εδώ το  $n$  παίρνει και αρνητικές τιμές και δεν περιορίζεται σε μη αρνητικές τιμές, όπως συμβαίνει στις σειρές Taylor.

Σημειώνουμε τέλος ότι η καμπύλη μιγαδικής ολοκλήρωσης  $C$  στους συντελεστές  $c_n$  της σειράς Laurent (5.3.2) μπορεί να είναι (Σχήμα Δ5.2) είτε (α) η εσωτερική περιφέρεια  $C_1$  του δακτυλίου  $\Delta$  (με ακτίνα  $R_1$ ) είτε (β) η εξωτερική περιφέρεια  $C_2$  του ίδιου δακτυλίου  $\Delta$  (με ακτίνα  $R_2$ ) είτε (γ) οποιαδήποτε τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  που κείται όμως ολόκληρη μέσα στο δακτύλιο  $\Delta$  και περιβάλλει μάλιστα το κέντρο του  $z_0$ . Αυτές οι δυνατότητες αλλαγής της καμπύλης μιγαδικής ολοκλήρωσης  $C$  ισχύουν εξαιτίας της γενικεύσεως (4.2.10) του θεωρήματος των Cauchy-Goursat στην Ενότητα Δ4.2, αφού η μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  είναι αναλυτική.

Συνοψίζουμε όλα τα παραπάνω σε ένα θεώρημα για τις σειρές Laurent. Τη σχετική απόδειξη την παραλείπουμε εδώ (όπως κάναμε και στις σειρές Taylor), αν και δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη, και περιοριζόμαστε να αναφέρουμε μόνο το συμπέρασμα: το βασικό θεώρημα για τις σειρές Laurent:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Σειρές Laurent):** Θεωρούμε μια αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  σε ανοικτό δακτύλιο (ή ανοικτή δακτυλιοειδή περιοχή)  $\Delta$  με κέντρο το σημείο  $z_0$  και ακτίνες  $R_1$  (της εσωτερικής περιφέρειας  $C_1$  του δακτυλίου  $\Delta$ ) και  $R_2$  (της εξωτερικής περιφέρειας  $C_2$  του ίδιου δακτυλίου  $\Delta$ ), δηλαδή την περιοχή  $R_1 < |z - z_0| < R_2$  (Σχήμα Δ5.2). Τότε για κάθε σημείο  $z$  της ανοικτής αυτής περιοχής (του δακτυλίου)  $\Delta$  ισχύει η σειρά Laurent (5.3.2).

Ας παρατηρήσουμε στο σημείο αυτό ότι τη σειρά Laurent (5.3.2) μπορούμε να τη γράψουμε και στην απόλυτα ισοδύναμη μορφή της

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad \text{με} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \text{και} \quad z \in \Delta. \quad (5.3.3)$$

Στη μορφή αυτή ξεχωρίσαμε σε ιδιαίτερη σειρά (στη δεύτερη σειρά δεξιά της  $f(z)$ ) τους όρους που αντιστοιχούν στις αρνητικές τιμές του  $n$ : με συντελεστές  $c_{-n}$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ). Η δεύτερη αυτή σειρά στη σχέση (5.3.3) που όλοι οι όροι της απειρίζονται για  $z = z_0$  (στο κέντρο του δακτυλίου) καλείται **κύριο μέρος** της σειράς Laurent (5.3.2). Εάν η δεύτερη αυτή σειρά (αυτή με τα  $c_{-n}$ ), το κύριο μέρος της σειράς Laurent έλειπε, ε τότε τί ωραία, η σειρά Laurent θα είχε μετατραπεί στην πιο απλή και γνωστή μας σειρά Taylor. Κι αυτό πραγματικά συμβαίνει, εφόσον η συνάρτηση  $f(z)$  είναι αναλυτική σε ολόκληρη την κυκλική περιοχή  $D_2$  η οποία περιβάλλεται από την εξωτερική περιφέρεια  $C_2$  και όχι μονάχα στο δακτύλιο  $\Delta$ . Πραγματικά με την  $f(z)$  αναλυτική στην κυκλική περιοχή  $D_2$  οι τύποι για τους συντελεστές  $c_{-n}$  (με  $n = 1, 2, \dots$ ) δίνουν (με  $-n$  αντί για  $n$ )

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (\zeta - z_0)^{n-1} f(\zeta) d\zeta = 0 \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3.4)$$

Το μηδέν προέκυψε δεξιά:  $c_{-n} = 0$  απλά λόγω του θεωρήματος των Cauchy-Goursat (4.2.1) σε συνδυασμό με την αναλυτικότητα που υποθέσαμε της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$  σε ολόκληρη την κυκλική περιοχή  $D_2$ . Έτσι στην πολύ ειδική αυτή περίπτωση η σειρά Laurent έγινε σειρά Taylor.

### Δ5.3.2. Παραδείγματα σειρών Laurent

Ας αναφέρουμε τέλος δύο απλά παραδείγματα σειρών Laurent που σχετίζονται με τη σειρά Taylor της εκθετικής συναρτήσεως  $e^z$ : σχέσεις (5.2.4), πρώτη σειρά Taylor. Την επαναλαμβάνουμε

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (5.3.5)$$

▼ **Παράδειγμα Δ5.1:** Το πρώτο παράδειγμα αφορά στη σειρά Laurent της συναρτήσεως  $e^z/z^4$ . Αυτή η συνάρτηση αντίθετα με την αρχική συνάρτηση  $e^z$  δεν είναι πια αναλυτική σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο  $z$ : το σημείο  $z = 0$  είναι σημείο μη αναλυτικότητας της συναρτήσεως  $e^z/z^4$ . Άρα γύρω από αυτό το σημείο  $z = 0$  έχουμε τώρα σειρά Laurent και όχι πια σειρά Taylor. Αυτή η σειρά Laurent προκύπτει όμως απλά διαιρώντας τη σειρά Taylor (5.3.5) της συναρτήσεως  $e^z$  δια  $z^4$  χωρίς καθόλου τη χρήση των ολοκληρωτικών τύπων δεξιά στη σχέση (5.3.2) για τους συντελεστές  $c_n$  της σειράς Laurent. Το αποτέλεσμα αυτής της απλής διαιρέσεως δια  $z^4$  είναι η σειρά Laurent

$$\frac{e^z}{z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n!} = \sum_{k=-4}^{\infty} \frac{z^k}{(k+4)!} = \left( \frac{1}{z^4} + \frac{1}{1!z^3} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z} \right) + \left( \frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{6!} + \frac{z^3}{7!} + \dots \right) \quad (5.3.6)$$

με την αλλαγή δείκτη  $k = n - 4$ , οπότε  $n = k + 4$ . Οι τέσσερις πρώτοι όροι (αυτοί μέσα στις πρώτες παρενθέσεις στο δεξιό μέλος) είναι οι όροι που απειρίζονται για  $z = 0$  και αποτελούν το κύριο μέρος αυτής της σειράς Laurent (5.3.6). Όλοι οι επόμενοι όροι (αυτοί μέσα στις δεύτερες παρενθέσεις στο δεξιό μέλος) δεν απειρίζονται για  $z = 0$ . ▲

▼ **Παράδειγμα Δ5.2:** Το δεύτερο παράδειγμα σειράς Laurent, που κι αυτό βασίζεται στη σειρά Taylor (5.3.5), προκύπτει θέτοντας  $1/z$  στη θέση του  $z$  σ' αυτήν τη σειρά Taylor. Έτσι παίρνουμε

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} + \frac{1}{120z^5} + \frac{1}{720z^6} + \dots \quad (5.3.7)$$

Πρόκειται φυσικά για σειρά Laurent, επειδή υπάρχουν αρνητικές δυνάμεις του  $z$ : οι  $z^{-1}$ ,  $z^{-2}$ , κλπ. Όλοι οι όροι αυτής της σειράς Laurent εκτός από τον πρώτο έχουν τη μεταβλητή  $z$  υψωμένη σε αρνητική δύναμη. Άρα το κύριο μέρος της σειράς Laurent (5.3.7) είναι ολόκληρη αυτή η σειρά εκτός από τον πρώτο όρο της: το 1 (με το  $z$  υψωμένο στον όρο αυτό στη μηδενική δύναμη:  $z^0 = 1$ ). ▲

### Δ5.3.3. Ανώμαλα σημεία, πόλοι και ουσιώδη ανώμαλα σημεία

Θεωρούμε μια μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  που δεν είναι αναλυτική (ή ούτε καν ορίζεται) σε ένα σημείο  $z_0$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$ , ενώ σε κάθε γειτονιά του  $z_0$  (ανοικτή κυκλική περιοχή με κέντρο το  $z_0$ ) υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο όπου η  $f(z)$  είναι αναλυτική. Τότε λέμε πως το σημείο  $z_0$  είναι **ανώμαλο σημείο** της μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$ . Εάν επιπλέον υπάρχει μια γειτονιά του σημείου  $z_0$  με την  $f(z)$  να είναι αναλυτική σε όλα τα σημεία  $z$  της γειτονιάς αυτής εκτός από το ίδιο το κέντρο της  $z_0$ , τότε λέμε ότι το σημείο  $z_0$  είναι **μεμονωμένο ανώμαλο σημείο** της  $f(z)$ .

Υποθέτουμε τώρα ότι το σημείο  $z_0$  είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της συναρτήσεως  $f(z)$ . Τότε η  $f(z)$  θα έχει σειρά Laurent (5.3.3) στο  $z_0$  και θα συγκλίνει σε μια γειτονιά του  $0 < |z - z_0| < R$ , αλλ' όχι και στο ίδιο το  $z_0$ . Αυτήν τη σειρά Laurent (5.3.3) τη γράφουμε πιο αναλυτικά στη μορφή

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \dots \quad (5.3.8)$$

Αν αυτή η σειρά Laurent έχει πεπερασμένο πλήθος αρνητικών δυνάμεων του  $z - z_0$  κι ο απόλυτα μεγαλύτερος αρνητικός εκθέτης είναι ο  $m$ , δηλαδή ο πρώτος όρος από αριστερά της σειράς (5.3.8)



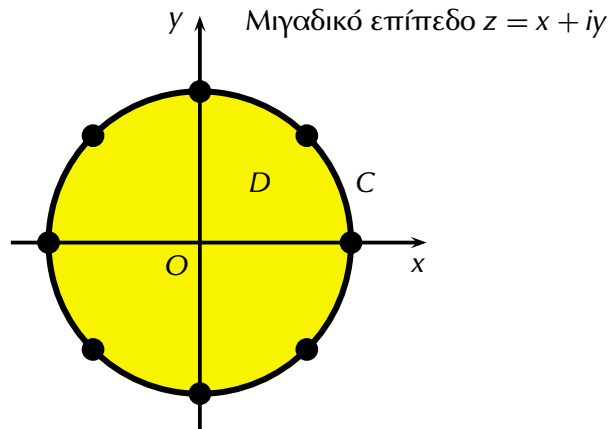
είναι ο  $c_{-m}/(z - z_0)^m$ , τότε λέμε ότι η μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  έχει **πόλο τάξεως  $m$**  στο σημείο  $z_0$ . Για  $m = 1$  μιλάμε για **πόλο πρώτης τάξεως** ή **απλό πόλο**. Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $e^z/z^4$  με την πιο πάνω σειρά Laurent (5.3.6) στο σημείο  $z_0 = 0$  έχει εκεί πόλο τετάρτης τάξεως:  $m = 4$ .

Αν αντίθετα η σειρά Laurent (5.3.8) έχει στο σημείο  $z_0$  άπειρο πλήθος αρνητικών δυνάμεων του  $z - z_0$ , τότε λέμε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση  $f(z)$  έχει στο σημείο  $z_0$  **ουσιώδη ανωμαλία** ή ότι το σημείο  $z_0$  είναι **ουσιώδες ανώμαλο σημείο** της  $f(z)$ . Για παράδειγμα, η συνάρτηση  $e^{1/z}$  με την πιο πάνω σειρά Laurent (5.3.7) στο σημείο  $z_0 = 0$  έχει εκεί ουσιώδη ανωμαλία και όχι απλά έναν πόλο.

## Δ5.4. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

### Δ5.4.1. Εφαρμογή της σειράς Taylor

Θεωρούμε και εδώ τη διδιάστατη μόνιμη αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού. Ας υποθέσουμε ότι διαθέτουμε τις τιμές τις μιγαδικής ταχύτητας  $V_x - iV_y$  του ρευστού στην περιφέρεια  $C$  ακτίνας  $R$  με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O = (0, 0)$ . Η περιφέρεια αυτή περικλείει την αντίστοιχη ανοικτή κυκλική περιοχή  $D$ . Γνωρίζουμε ήδη από την Ενότητα Δ3.6, σχέση (3.6.5) ότι  $\Omega'(z) = V_x - iV_y$ . Επομένως με γνωστές τις τιμές της μιγαδικής ταχύτητας  $V_x - iV_y$  του ρευστού στην περιφέρεια  $C$  είναι γνωστές και οι τιμές  $\Omega'(\zeta)$  της παραγώγου  $\Omega'(z)$  του μιγαδικού δυναμικού ροής πάνω στην ίδια περιφέρεια  $C$ . (Τα σημεία της περιφέρειας  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο δηλώνονται εδώ με  $\zeta$ , έτσι ώστε να διακρίνονται από τα σημεία  $z$  της ανοικτής κυκλικής περιοχής  $D$  που αυτή περικλείει.)



**Σχήμα Δ5.3:** Ανοικτή κυκλική περιοχή  $D$  μόνιμης και αστρόβιλης ροής ιδεατού ρευστού και σημεία της περιφέρειάς της  $C$  όπου χρησιμοποιείται η μιγαδική ταχύτητα ροής  $\Omega'(\zeta) = V_x - iV_y$  για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της με πεπερασμένο άθροισμα μέσα στην περιοχή  $D$ .

Στην Παράγραφο Δ4.5.4 είδαμε ότι αν η συνάρτηση  $\Omega'(z)$  είναι αναλυτική στην περιφέρεια  $C$  και στην κυκλική περιοχή  $D$ , τότε μπορούμε να την προσδιορίσουμε στην κυκλική περιοχή  $D$  με τη χρήση του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy. Έτσι έχουμε τον τύπο (4.5.8) για τη συνάρτηση  $\Omega'(z)$ , δηλαδή και για τη μιγαδική ταχύτητα του ρευστού στην περιοχή  $D$ , αφού  $\Omega'(z) = V_x - iV_y$ .

Μια εναλλακτική (αλλά ουσιαστικά ισοδύναμη) δυνατότητα μας παρέχεται εδώ με τη χρήση της σειράς Taylor για την ίδια συνάρτηση  $\Omega'(z)$ . Με βάση τις γνώσεις που ήδη αποκτήσαμε στην προπροηγούμενη Ενότητα Δ5.2 για τις μιγαδικές σειρές Taylor, απλά έχουμε

$$\Omega'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{με} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\Omega'(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \text{και} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4.1)$$

Είναι ίσως πιο ωραία από απόψεως εμφανίσεως και μόνο να υπολογίζεται η μιγαδική ταχύτητα  $\Omega'(z) = V_x - iV_y$  με βάση τη σειρά Taylor (5.4.1), ουσιαστικά με δυνάμεις του  $z$ , παρά με βάση τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy (4.5.8), δηλαδή με επικαμπύλιο μιγαδικό ολοκλήρωμα πάνω στη  $C$ .

**Δ5.4.2. Προσέγγιση με δυναμοσειρά με πεπερασμένους όρους**

Στην παράγραφο αυτή αναφέρουμε πολύ σύντομα τη βασική ιδέα μιας μεθόδου προσεγγιστικού (όχι ακριβούς) υπολογισμού της μιγαδικής ταχύτητας  $\Omega'(z) = V_x - iV_y$  του ιδεατού ρευστού μέσα στην ίδια κυκλική περιοχή  $D$  κέντρου  $z_0 = 0$  και ακτίνας  $R$ . Καταρχήν πρακτικά διαθέτουμε (ας πούμε από πειραματικές μετρήσεις) τις δύο συνιστώσες  $V_x$  και  $V_y$  της ταχύτητας του ρευστού (άρα και τη μιγαδική του ταχύτητα  $\Omega'(\zeta) = V_x - iV_y$ ) σε έναν πεπερασμένο αριθμό σημείων  $N$  του συνόρου  $C$  της περιοχής  $D$ , που εδώ το σύνορο αυτό είναι περιφέρεια.

Στο πιο πάνω Σχήμα Δ5.3 φαίνονται  $N = 8$  τέτοια σημεία  $\zeta_k$  με πολικές γωνίες  $\theta_k = 2\pi(k-1)/N$  (με  $k = 1, 2, \dots, N$ ). Άρα τα σημεία αυτά είναι τα σημεία

$$\zeta_k = Re^{i\theta_k} = Re^{2\pi i(k-1)/N} \quad \text{με } k = 1, 2, \dots, N \quad \text{και } N = 8 \quad (5.4.2)$$

του μιγαδικού επιπέδου. Στα  $N$  αυτά σημεία  $\zeta_k$  υποθέτουμε γνωστές (έστω από πειραματικές μετρήσεις) τις τιμές  $\Omega'_k = V_{xk} - iV_{yk}$  της μιγαδικής ταχύτητας του ρευστού  $\Omega'(z) = V_x - iV_y$ . Στην παρούσα προσεγγιστική μέθοδο θεωρούμε μέσα στην ανοικτή κυκλική περιοχή  $D$  την ακόλουθη προσεγγιστική έκφραση  $\Omega'_N(z)$  (με  $N$  όρους) της μιγαδικής ταχύτητας  $\Omega'(z)$  του ρευστού

$$\Omega'(z) \approx \Omega'_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^n \quad (5.4.3)$$

(στο παραπάνω Σχήμα Δ.5.3 με  $N = 8$ ). Πρόκειται για ένα πεπερασμένο άθροισμα (άθροισμα με πεπερασμένο αριθμό όρων) σαν να είχαμε τη σχετική δυναμοσειρά (αυτή με άπειρους όρους) (5.1.1) (εδώ με  $z_0 = 0$ ) και να την είχαμε προσεγγίσει με τους πρώτους  $N$  όρους της. Εδώ όμως είναι εντελώς διαφορετική δυναμοσειρά, δεν είναι αποκοπή της σειράς Taylor στον  $N - 1$  όρο της. Γι' αυτό και δηλώσαμε τους άγνωστους συντελεστές με διαφορετικό σύμβολο (το  $b_n$ ) και όχι με  $a_n$ .

Και τώρα τί κάνουμε; Τώρα απλά ζητάμε να προσδιορίσουμε τους  $N$  άγνωστους συντελεστές  $b_n$  της πιο πάνω προσεγγίσεως (5.4.3). Για το σκοπό αυτό εφαρμόζουμε την πιο πάνω προσέγγιση (5.4.3) στα  $N$  σημεία  $\zeta_k$  της περιφέρειας  $C$  όπου γνωρίζουμε από τις μετρήσεις μας τις τιμές  $\Omega'_k = V_{xk} - iV_{yk}$  της μιγαδικής ταχύτητας του ρευστού. Έτσι παίρνουμε τις ακόλουθες  $N$  εξισώσεις (μία για κάθε σημείο  $\zeta_k$ ):

$$\Omega'_k = \sum_{n=0}^{N-1} b_n \zeta_k^n \quad \text{με } k = 1, 2, \dots, N. \quad (5.4.4)$$

Όμως τα σημεία  $\zeta_k$  της περιφέρειας  $C$  μας είναι γνωστά από την αρχή. Εδώ μάλιστα τα υποθέσαμε ομοιόμορφα κατανομημένα πάνω στην περιφέρεια  $C$  και να δίνονται από τις σχέσεις (5.4.2). Ωραία ως εδώ! Εντούτοις οι  $N$  συντελεστές  $b_n$  στις εξισώσεις (5.4.4) είναι άγνωστοι. Επομένως οι εξισώσεις αυτές (5.4.4) αποτελούν ένα μιγαδικό σύστημα  $N$  γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, το οποίο μπορεί πάρα πολύ εύκολα να επιλυθεί και να μας δώσει τις τιμές των μιγαδικών αυτών συντελεστών  $b_n$ . Ισοδύναμα το σύστημα αυτό μπορεί εύκολα να αναχθεί και σε ένα σύστημα  $2N$  πραγματικών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με αγνώστους τα  $N$  πραγματικά μέρη  $\text{Re } b_n$  και τα  $N$  φανταστικά μέρη  $\text{Im } b_n$  των ίδιων  $N$  άγνωστων μιγαδικών συντελεστών  $b_n$ . Εντούτοις αυτό δεν είναι και ιδιαίτερα έξυπνο εκτός και αν το απαιτεί (περιορισμός σε πραγματικές γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις) η εντολή ή η υπορουτίνα του υπολογιστή που χρησιμοποιούμε.

Τελειώνοντας την παράγραφο αυτή, επαναλαμβάνουμε ότι πρόκειται για μια καθαρά προσεγγιστική μέθοδο, στην οποία μάλιστα παραλείψαμε και την ανάλυση σφάλματος. Όμως η μέθοδος αυτή είναι συμβατή με την πραγματικότητα, όπου οι πειραματικές μετρήσεις είναι διαθέσιμες μόνο σε πεπερασμένο αριθμό σημείων, π.χ. στα  $N = 8$  σημεία του παραπάνω Σχήματος Δ5.3. Επιπλέον από μαθηματικής απόψεως μας απαλλάσσει από το καθήκον της μιγαδικής ολοκλήρωσης που είναι αναγκαία στη μέθοδο της σειράς Taylor, όπως είναι σαφές από τις σχέσεις (5.4.1). Η πιο πάνω μέθοδος που χρησιμοποιεί σημεία παρεμβολής  $\zeta_k$  πάνω στην περιφέρεια  $C$  και παραλλαγές της είναι μια πολύ γνωστή και συνάμα χρήσιμη μέθοδος στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ6

## ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ

### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο παρόν Κεφάλαιο Δ6 θα ορίσουμε την έννοια του **ολοκληρωτικού υπολοίπου (residue)** μιας αναλυτικής μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$  σε ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της  $z_0$ . Αυτό το **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** είναι ο συντελεστής  $b \equiv c_{-1}$  του όρου  $(z - z_0)^{-1}$  της σειράς Laurent της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  σ' αυτό το ανώμαλο σημείο της  $z_0$ . Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τη σχετική **μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων** για τον υπολογισμό μιγαδικών επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων πάνω σε τμηματικά λείες απλές κλειστές καμπύλες  $C$ . Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε και μια μάλλον ενδιαφέρουσα εφαρμογή στη Ρευστομηχανική. Ακολούθως θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια μέθοδο, των ολοκληρωτικών υπολοίπων, για τον υπολογισμό ενός πραγματικού ολοκληρώματος τριγωνομετρικής συναρτήσεως στο πραγματικό διάστημα  $[0, 2\pi]$ . Τέλος θα δείξουμε τη χρησιμότητα της μεθόδου των ολοκληρωτικών υπολοίπων στην αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace με τη χρήση του **ολοκληρώματος Bromwich**. Θα παρουσιάσουμε και μια σχετική εφαρμογή της σε πρόβλημα ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού: στο συντονισμό.

### Δ6.1. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΥΠΟΛΟΙΠΟΥ

#### Δ6.1.1. Ορισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου

Θεωρούμε μια ανοικτή περιοχή  $D$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z$  και μια μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  που είναι σχεδόν παντού αναλυτική στην περιοχή  $D$ . Δεν είναι αναλυτική μόνο σε  $n$  ορισμένα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της  $z_k$  στην περιοχή  $D$ . Θεωρούμε ένα από τα σημεία αυτά: το  $z_0$ . Εκεί η μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  έχει σειρά Laurent της μορφής (5.3.2) και αναλυτικότερα (5.3.8). (Τις σειρές Laurent τις είδαμε στην Ενότητα Δ5.3 του προηγούμενου Κεφαλαίου Δ5.) Επαναλαμβάνουμε τη σειρά Laurent στην αναλυτική μορφή της (5.3.8): χωρίς τη χρήση του συμβόλου  $\sum$  της σειράς:

$$f(z) = \dots + \frac{c_{-3}}{(z - z_0)^3} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + c_3(z - z_0)^3 + \dots \quad (6.1.1)$$

Τα πράγματα είναι πάρα πολύ απλά ... Ορίζουμε σαν **ολοκληρωτικό υπόλοιπο (residue)**  $b$  της αναλυτικής μιγαδικής συναρτήσεως  $f(z)$  στο μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της  $z_0$  το συντελεστή  $c_{-1}$  του όρου  $(z - z_0)^{-1}$  της πιο πάνω σειράς Laurent στο σημείο αυτό  $z_0$ . Πολύ συχνά χρησιμοποιούμε και το σχετικό σύμβολο  $\text{Res}$ , το οποίο είναι προφανώς σύντμηση της λέξεως *residue*, γράφοντας

$$b = \underset{z=z_0}{\text{Res}} f(z) \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad b = \text{Res}[f(z), z = z_0]. \quad (6.1.2)$$

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιούμε μόνο τον πρώτο πιο πάνω συμβολισμό: το  $\text{Res}_{z=z_0} f(z)$ .

Ανάλογα στα  $n$  μεμονωμένα ανώμαλα σημεία  $z_k$  της συναρτήσεώς μας  $f(z)$  στην περιοχή  $D$  θα έχουμε τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα  $b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_n$  με  $b_k = \text{Res}_{z=z_k} f(z)$  (με  $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Σαν παραδείγματα θεωρούμε τις δύο σειρές Laurent (5.3.6) και (5.3.7) της Παραγράφου Δ5.3.2:

$$\frac{e^z}{z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-4}}{n!} = \sum_{k=-4}^{\infty} \frac{z^k}{(k+4)!} = \left( \frac{1}{z^4} + \frac{1}{1!z^3} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z} \right) + \left( \frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \frac{z^2}{6!} + \frac{z^3}{7!} + \dots \right), \quad (6.1.3)$$

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{24z^4} + \frac{1}{120z^5} + \frac{1}{720z^6} + \dots \quad (6.1.4)$$

για τις δύο συναρτήσεις μας  $e^z/z^4$  και  $e^{1/z}$  αντίστοιχα στο μεμονωμένο ανώμαλο σημείο τους  $z = 0$ . Τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα (residues) είναι προφανώς οι συντελεστές του  $1/z$ , δηλαδή

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^z}{z^4} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \quad \text{και} \quad \operatorname{Res}_{z=0} e^{1/z} = 1, \quad (6.1.5)$$

όπως πολύ εύκολα συνάγουμε από τις δύο παραπάνω σειρές Laurent (6.1.3) και (6.1.4) αντίστοιχα.

### Δ6.1.2. Υπολογισμός του ολοκληρωτικού υπολοίπου

Στα δύο παραπάνω παραδείγματα υπολογίσαμε δύο ολοκληρωτικά υπόλοιπα (residues) απλά με βάση τις σχετικές σειρές Laurent. Σε περιπτώσεις **ουσιωδών ανώμαλων σημείων** της συναρτήσεως  $f(z)$  αυτό πράγματι κάνουμε: χρησιμοποιούμε τις σχετικές σειρές Laurent. Αντίθετα σε περιπτώσεις **πόλων** υπάρχει υπολογιστικά πιο εύκολη διαδικασία που την περιγράφουμε πιο κάτω.

Ξεκινάμε με την αναλυτική μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  να έχει πόλο πρώτης τάξεως (απλό πόλο: πόλο με  $m = 1$ ) στο σημείο  $z_k$  και θέλουμε να υπολογίσουμε το σχετικό ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $b_k = \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$ . Αφού όμως υποθέσαμε το ανώμαλο σημείο  $z_k$  ότι είναι απλός πόλος (πόλος πρώτης τάξεως), η αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  θα έχει την εξής σειρά Laurent στο ανώμαλο σημείο  $z_k$ :

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_k)^n \quad \text{με} \quad c_{-1} \neq 0. \quad (6.1.6)$$

Ωραία! Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $b_k$  που θέλουμε να βρούμε είναι ασφαλώς ο συντελεστής  $c_{-1}$  σ' αυτήν εδώ τη σειρά Laurent. Και τώρα απλά την πολλαπλασιάζουμε επί  $z - z_k$  και παίρνουμε

$$g(z) := (z - z_k)f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_k)^{n+1}. \quad (6.1.7)$$

Τώρα δεν απομένει παρά να θέσουμε  $z = z_k$  στη σχέση αυτή. Τότε προφανώς όλοι οι όροι στο δεξιό μέλος μηδενίζονται εκτός από τον πρώτο όρο  $c_{-1} = b_k$ : το ολοκληρωτικό υπόλοιπο. Άρα

$$c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = g(z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} [(z - z_k)f(z)]. \quad (6.1.8)$$

Και φυσικά η βοηθητική αυτή συνάρτηση  $g(z) := (z - z_k)f(z)$  είναι αναλυτική στο σημείο  $z_k$ . Αυτό συμβαίνει, γιατί, επειδή η συνάρτηση  $f(z)$  έχει εκεί απλό πόλο, η σειρά Laurent (6.1.6) μετά τον πολλαπλασιασμό της επί  $z - z_k$  στη σχέση (6.1.7) μετατράπηκε απλά στη σειρά Taylor (6.1.7) της βοηθητικής συναρτήσεως  $g(z) := (z - z_k)f(z)$  χωρίς καμία αρνητική δύναμη του  $z - z_k$ . Βέβαια τελικά για τον υπολογισμό του  $g(z_k)$  γενικά χρειάζεται η οριακή διαδικασία δεξιά στη σχέση (6.1.8).

Σαν μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση εξετάζουμε την περίπτωση όπου η συνάρτηση  $f(z)$  είναι πηλίκο δύο αναλυτικών συναρτήσεων (π.χ. δύο πολυωνύμων)  $P(z)$  και  $Q(z)$ . Το σημείο  $z_k$  είναι απλός πόλος της  $f(z)$ . Εκεί  $P(z_k) \neq 0$  και το  $z_k$  είναι απλή ρίζα της συναρτήσεως  $Q(z)$ , δηλαδή  $Q(z_k) = 0$  και  $Q'(z_k) \neq 0$ . (Αν ήταν και  $Q'(z_k) = 0$ , θα είχαμε ρίζα πολλαπλότητας μεγαλύτερης του ένα.) Άρα έχουμε έναν απλό πόλο (με  $m = 1$ ) της συναρτήσεως  $f(z) = P(z)/Q(z)$  στο ανώμαλο σημείο της  $z = z_k$ . Είμαστε λοιπόν έτοιμοι να εφαρμόσουμε τον τύπο (6.1.8) αντί να δημιουργήσουμε ολόκληρη τη σειρά Laurent της  $f(z)$ . Αυτό γενικά δεν είναι εύκολη δουλειά και το αποφεύγουμε, όταν μπορούμε, κυρίως όταν ζητάμε να βρούμε ολοκληρωτικά υπόλοιπα σε πόλους, όπως εδώ. (Δε μπορούμε όμως να το αποφύγουμε για ολοκληρωτικά υπόλοιπα σε ουσιώδη ανώμαλα σημεία.)

Εδώ λοιπόν με  $f(z) = P(z)/Q(z)$  και με βάση τη σχέση (6.1.7) έχουμε

$$g(z) := (z - z_k)f(z) = (z - z_k) \frac{P(z)}{Q(z)} = P(z) \frac{z - z_k}{Q(z) - Q(z_k)}, \quad (6.1.9)$$

αφού είπαμε  $Q(z_k) = 0$  στον απλό αυτό πόλο  $z = z_k$ . Τώρα παίρνουμε το όριο  $z \rightarrow z_k$  για να βρούμε την τιμή  $g(z_k)$  της βοηθητικής συναρτήσεως  $g(z)$  στον απλό πόλο  $z = z_k$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ . Αυτή η τιμή  $g(z_k)$  είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $c_{-1} = \text{Res}_{z=z_k} f(z)$  που ζητάμε να βρούμε με βάση τον τύπο (6.1.8). Αλλά βέβαια με βάση τον ορισμό της παραγώγου  $Q'(z)$  ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow z_k} \frac{Q(z) - Q(z_k)}{z - z_k} = Q'(z_k) \quad \text{εδώ με } Q'(z_k) \neq 0, \quad (6.1.10)$$

οπότε με βάση τις σχέσεις (6.1.8), (6.1.9) και (6.1.10) για έναν απλό πόλο της  $f(z)$  στο σημείο  $z = z_k$

$$c_{-1} = \text{Res}_{z=z_k} f(z) = \text{Res}_{z=z_k} \frac{P(z)}{Q(z)} = g(z_k) = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}. \quad (6.1.11)$$

Τώρα ας δούμε και την περίπτωση πόλου  $z = z_k$  τάξεως  $m$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ . Τότε η σειρά Laurent (6.1.1) της συναρτήσεως  $f(z)$  στον πόλο αυτό  $z_k$  τάξεως  $m$  είναι της μορφής

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_k)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_k)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-2}}{(z - z_k)^2} + \frac{c_{-1}}{z - z_k} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_k)^n \quad \text{με } c_{-m} \neq 0 \quad (6.1.12)$$

Κι εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε το συντελεστή  $c_{-1}$ : το ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $\text{Res}_{z=z_k} f(z)$ . Ανάλογα με ό,τι κάναμε για πόλο πρώτης τάξεως (απλό πόλο: με  $m = 1$ ), πολλαπλασιάζουμε τη σχέση αυτή επί  $(z - z_k)^m$ . Έτσι από σειρά Laurent οδηγούμαστε σε σειρά Taylor χωρίς καθόλου αρνητικές δυνάμεις του  $z - z_k$ . Να 'τη αυτή η σειρά Taylor με  $g(z) := (z - z_k)^m f(z)$  ανάλογα με πριν:

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z - z_k) + \dots + c_{-2}(z - z_k)^{m-2} + c_{-1}(z - z_k)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_k)^{m+n}. \quad (6.1.13)$$

Επαναλαμβάνουμε ότι ζητάμε να προσδιορίσουμε μόνο το συντελεστή  $c_{-1}$ . Αλλ' από τις σειρές Taylor, σχέσεις (5.2.6) για τους συντελεστές τους  $a_n$ , για  $n = m - 1$  συνάγουμε ότι εδώ για το συντελεστή  $c_{-1}$  του όρου  $(z - z_k)^{m-1}$ , το ζητούμενο ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $\text{Res}_{z=z_k} f(z)$ , θα έχουμε

$$c_{-1} = \text{Res}_{z=z_k} f(z) = \frac{g^{(m-1)}(z_k)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_k)^m f(z)] \right\} \quad \text{με } g(z) := (z - z_k)^m f(z) \quad (6.1.14)$$

και με  $g^{(m-1)}(z)$  να δηλώνει την  $m - 1$  παράγωγο της  $g(z)$ . Ειδικά για  $m = 1$  (πόλο πρώτης τάξεως ή απλό πόλο) ο πιο πάνω τύπος (6.1.14) μεταπίπτει αμέσως στον τύπο (6.1.8) που είχαμε βρει αρχικά. Γενικά για τη χρήση του τύπου (6.1.14) μετά τον υπολογισμό της παραγώγου  $g^{(m-1)}(z)$  απαιτείται οριακή διαδικασία:  $z \rightarrow z_k$  για την τιμή της  $g^{(m-1)}(z_k)$  που εμφανίζεται στον τύπο αυτό.

▼ **Παράδειγμα Δ6.1:** Να υπολογισθούν τα δύο ολοκληρωτικά υπόλοιπα της ρητής συναρτήσεως

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 1} \quad (6.1.15)$$

**Λύση:** Προφανώς η ρητή αυτή συνάρτηση  $f(z)$  έχει δύο απλούς πόλους (πόλους πρώτης τάξεως) συγκεκριμένα τις δύο ρίζες του παρονομαστή της  $Q(z) = z^2 + 3z + 1$  που είναι τα σημεία

$$Q(z) = z^2 + 3z + 1 = 0 \implies z_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{και} \quad z_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad (6.1.16)$$

όπως πολύ εύκολα διαπιστώνεται. Γράφουμε τώρα τη συνάρτηση  $f(z)$  στην ισοδύναμη μορφή της

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 1} = \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} \quad (6.1.17)$$

και ετοιμαζόμαστε να εφαρμόσουμε τον τύπο (6.1.8) για τον υπολογισμό των σχετικών ολοκληρωτικών υπολοίπων  $\text{Res}_{z=z_1} f(z)$  και  $\text{Res}_{z=z_2} f(z)$ . Δεν είναι δα και καμιά ιδιαίτερα δύσκολη εργασία!

Πρώτα για  $z = z_1$  έχουμε

$$g(z) = (z - z_1)f(z) = (z - z_1) \frac{1}{(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{z - z_2}, \quad (6.1.18)$$

οπότε

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = g(z_1) = \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{2}{(-3 + \sqrt{5}) - (-3 - \sqrt{5})} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (6.1.19)$$

Με ακριβώς ανάλογη εργασία προκύπτει ότι  $b_2 = \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = -1/\sqrt{5}$  στο δεύτερο απλό πόλο  $z_2$ .

Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (6.1.11), εδώ με  $f(z) = P(z)/Q(z)$  από τη σχέση ορισμού (6.1.15), όπου  $P(z) = 1$  και  $Q(z) = z^2 + 3z + 1$ , οπότε  $Q'(z) = 2z + 3$ . Επομένως

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{P(z_1)}{Q'(z_1)} = \frac{1}{2z_1 + 3} = \frac{1}{(-3 + \sqrt{5}) + 3} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad (6.1.20)$$

όπως και πριν. Και εντελώς ανάλογα για το ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $b_2 = \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = -1/\sqrt{5}$ . ▲

## Δ6.2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Στα ολοκληρωτικά υπόλοιπα βασίζεται η **μέθοδος των ολοκληρωτικών υπολοίπων**. Με αυτή μπορούμε να υπολογίζουμε πρώτα-πρώτα μιγαδικά επικαμπύλια ολοκληρώματα της μορφής

$$I = \oint_C f(z) dz \quad (6.2.1)$$

πάνω σε μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z$  (φυσικά με  $z = x + iy$ ).

Θεωρούμε εδώ τη σειρά Laurent της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  στο μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της  $z = z_0$  που έχει τη μορφή (6.1.1) ή πολύ πιο συνοπτικά τη μορφή (5.3.2) με δακτύλιο συγκλίσεως  $\Delta$  (με  $0 < |z - z_0| < R$  με  $R$  την ακτίνα συγκλίσεως). Την επαναλαμβάνουμε κι εδώ:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \text{με} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \text{και} \quad z \in \Delta. \quad (6.2.2)$$

Μέσα στο δακτύλιο συγκλίσεως  $\Delta$  αυτής της σειράς Laurent θεωρούμε την τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  πάνω στην οποία έχουν υπολογισθεί οι συντελεστές  $c_n$  της σειράς Laurent στο δεξιό μέλος της σχέσεως (6.2.2). Αυτή η καμπύλη κείται ολόκληρη μέσα στο δακτύλιο συγκλίσεως  $\Delta$  της σειράς Laurent (6.2.2) κι επιπλέον περιβάλλει το σημείο  $z_0$ , το οποίο είναι βέβαια ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$ . Προφανώς μέσα σ' αυτόν το δακτύλιο συγκλίσεως  $\Delta$  η αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$  δεν έχει κανένα άλλο ανώμαλο σημείο εκτός από το  $z_0$ .

Για να δούμε τώρα τί συμβαίνει στον τύπο για τους συντελεστές  $c_n$  δεξιά στη σχέση (6.2.2), όταν  $n = -1$ . Σ' αυτήν την ειδική περίπτωση  $n + 1 = 0$ , οπότε με  $n = -1$  και  $n + 1 = 0$  θα έχουμε

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta \quad \text{και} \quad \text{ισοδύναμα} \quad \oint_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z), \quad (6.2.3)$$

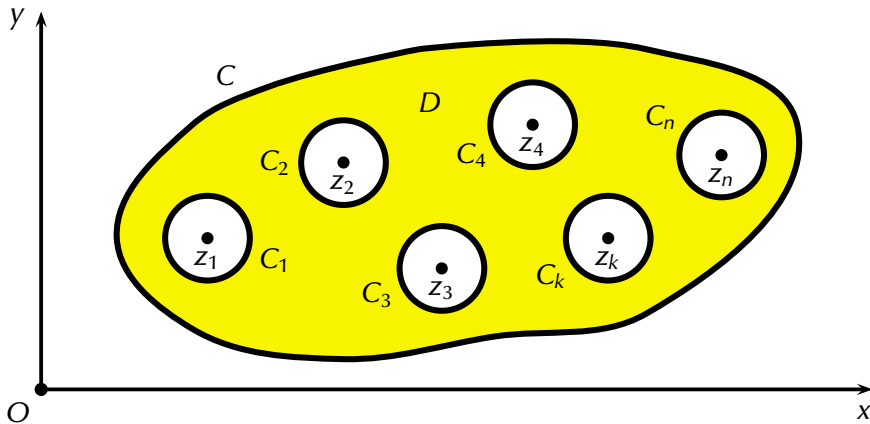
αφού  $c_{-1}$  είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  στο μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της  $z_0$ . Χρησιμοποιήσαμε μάλιστα δεξιά σαν μεταβλητή ολοκληρώσεως το σύμβολο  $z$  αντί για το σύμβολο  $\zeta$  ελπίζουμε χωρίς κανέναν κίνδυνο συγχύσεως. Συνεπώς ισχύει το

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ:** Θεωρούμε το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\oint_C f(z) dz$  μιας αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  πάνω σε μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$ . Την καμπύλη αυτή  $C$  την υποθέτουμε ότι περιβάλλει ένα μεμονωμένο ανώμαλο σημείο  $z_0$  της  $f(z)$  κι επιπλέον κείται ολόκληρη μέσα στο δακτύλιο συγκλίσεως  $\Delta$  (με  $0 < |z - z_0| < R$ ) της σειράς Laurent της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  στο ανώμαλο σημείο  $z_0$ . Τότε ισχύει η σχέση (6.2.3), δηλαδή το ολοκλήρωμα  $\oint_C f(z) dz$  είναι ίσο με  $2\pi i$  επί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$  της συναρτήσεως  $f(z)$  στο σημείο  $z_0$ .

► **Παρατήρηση Δ6.1:** Η πιο πάνω απόδειξη του σημαντικού αυτού θεωρήματος βασίστηκε στον τύπο για το συντελεστή  $c_{-1} = \text{Res}_{z=z_0} f(z)$  της σειράς Laurent (6.2.2). Το συμπέρασμα του θεωρήματος, δηλαδή η σχέση (6.2.3), είναι όμως απόλυτα συμβατό και με τον ακόλουθο μαθηματικά μη αυστηρό συλλογισμό: Παίρνουμε τη σειρά Laurent στο αριστερό μέλος της σχέσεως (6.2.2) και την ολοκληρώνουμε όρο προς όρο πάνω σε μια περιφέρεια  $C$  μέσα στο δακτύλιο συγκλίσεως  $\Delta$  της σειράς Laurent (6.2.2). Δεν ξεχνάμε όμως και τις τόσο σημαντικές σχέσεις (4.1.26). Τότε όλα τα ολοκληρώματα των όρων της σειράς Laurent πάνω στην περιφέρεια  $C$  μηδενίζονται εκτός από εκείνο που αντιστοιχεί σε  $m = -1$  (με συντελεστή  $c_{-1}$ ) και μας δίνει αποτέλεσμα  $2\pi i$ . Άρα τελικά και με το σκεπτικό αυτό είναι λογικό να ισχύει ο τύπος (6.2.3) και όχι μόνο για περιφέρεια  $C$ , αλλά και για κάθε άλλη καμπύλη  $C$ , όπως την καθορίσαμε στις υποθέσεις του αμέσως πιο πάνω θεωρήματος λόγω της ισχύος της γενικεύσεως (4.2.10) του θεωρήματος των Cauchy-Goursat. Το μόνο σημείο που πάσχει αυτός ο πολύ ενδιαφέρων τρόπος σκέψεως είναι ότι θα πρέπει επιπλέον να αποδείξουμε ότι έχουμε το δικαίωμα για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας σειράς Laurent να την ολοκληρώνουμε όρο προς όρο. Αλλ' αυτό δεν το έχουμε αποδείξει. Άρα προτιμάμε την πιο πάνω απόδειξη με βάση τον τύπο για το συντελεστή  $c_{-1}$ , την ισχύ του οποίου την έχουμε ήδη υποθέσει.

Το πιο πάνω θεώρημα για την περίπτωση ενός μόνο ανώμαλου σημείου  $z_0$  γενικεύεται ως εξής:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων)** Θεωρούμε το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\oint_C f(z) dz$  μιας αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  πάνω σε μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$ . Αυτήν την υποθέτουμε τώρα ότι περιβάλλει ένα πεπερασμένο πλήθος  $n$  μεμονωμένων ανώμαλων σημείων (είτε πόλων είτε και ουσιωδών ανώμαλων σημείων)  $z_k$  (με  $k = 1, 2, \dots, n$ ) της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  χωρίς κανένα τους να κείται πάνω στην καμπύλη  $C$  (Σχήμα Δ6.1).



**Σχήμα Δ6.1:** Μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  στο μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy$ . Αυτή αποτελεί το σύνορο μιας ανοικτής περιοχής  $D$  με την αναλυτική μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  να έχει μέσα στην ανοικτή περιοχή  $D$  συνολικά  $n$  μεμονωμένα ανώμαλα σημεία  $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_n$ . Τα σημεία αυτά είναι κέντρα κυκλικών περιοχών με περιφέρειες  $C_1, C_2, \dots, C_k, \dots, C_n$  αντίστοιχα.

Τη συνάρτηση  $f(z)$  την υποθέτουμε αναλυτική τόσο πάνω στην καμπύλη  $C$  όσο και στο εσωτερικό της  $D$  με την εξαίρεση βέβαια των ανώμαλων σημείων της  $z_k$  που προαναφέραμε. Υπ' αυτές τις συνθήκες η σχέση (6.2.3) για το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\oint_C f(z) dz$  γενικεύεται ως εξής:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}_{z=z_k} f(z). \tag{6.2.4}$$

Δηλαδή τώρα έχουμε δεξιά το άθροισμα των  $n$  ολοκληρωτικών υπολοίπων  $\text{Res}_{z=z_k} f(z)$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  στα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της  $z_k$  στο εσωτερικό της καμπύλης  $C$ .

**Απόδειξη:** Προχωράμε στην απόδειξη αυτού του θεωρήματος. Θεωρούμε την τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  που προαναφέραμε καθώς και όλα τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία  $z_k$

(με  $k = 1, 2, \dots, n$ ) της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  στην ανοικτή περιοχή  $D$  που περικλείεται από την καμπύλη  $C$  (Σχήμα Δ6.1 στην προηγούμενη σελίδα). Γύρω από καθένα από τα  $n$  αυτά σημεία  $z_k$  θεωρούμε επίσης μια περιφέρεια  $C_k$  με κέντρο το σημείο  $z_k$ . Όλες οι περιφέρειες  $C_k$  υποτίθενται πως είναι αρκετά μικρές, ώστε να μην έχουν κοινά σημεία (δηλαδή να μην τέμνονται ή έστω εφάπτονται) μεταξύ τους καθώς και με την εξωτερική καμπύλη  $C$  (και πάλι Σχήμα Δ6.1).

Υπό αυτές τις συνθήκες εργαζόμαστε με βάση το θεώρημα των Cauchy-Goursat σε γενικευμένη μορφή του (παραπέρα γενίκευση της μορφής του (4.2.10)) για τη σκιασμένη περιοχή στο Σχήμα Δ6.1. Θεωρούμε επίσης σαν φορά διαγραφής τόσο της κλειστής εξωτερικής καμπύλης  $C$  όσο και όλων των περιφερειών  $C_k$  την ανθρωπολογιακή φορά, δηλαδή αυτήν που είναι αντίθετη στην κίνηση των δεικτών του ρολογιού. Σύμφωνα με αυτά το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\oint_C f(z) dz$  πάνω στην κλειστή εξωτερική καμπύλη  $C$  που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι προφανώς ίσο με το άθροισμα των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων  $\oint_{C_k} f(z) dz$  πάνω στις περιφέρειες  $C_k$ . Υπενθυμίζουμε πως αυτές οι  $n$  περιφέρειες  $C_k$  έχουν κέντρα τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία  $z_k$  (είτε πόλους είτε ουσιώδη ανώμαλα σημεία) της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  στην περιοχή  $D$  που περικλείει η τμηματικά λεία απλή κλειστή εξωτερική καμπύλη  $C$ . Επομένως ισχύει η σχέση

$$\oint_C f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{C_k} f(z) dz. \quad (6.2.5)$$

Αλλά με βάση τη δεξιά σχέση (6.2.3), που την εφαρμόζουμε εδώ χωριστά για καθεμιά περιφέρεια  $C_k$  (με  $k = 1, 2, \dots, n$ ) με κέντρο το μεμονωμένο ανώμαλο σημείο  $z_k$  της  $f(z)$ , θα έχουμε επίσης

$$\oint_{C_k} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z). \quad (6.2.6)$$

Άρα, αντικαθιστώντας τώρα αυτές τις  $n$  τιμές των ολοκληρωμάτων  $\oint_{C_k} f(z) dz$  στη σχέση (6.2.5), παίρνουμε τον τύπο (6.2.4) στο προς απόδειξη βασικό θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων.  $\square$

▼ **Παράδειγμα Δ6.2:** Να υπολογισθεί το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I(a, b) = \oint_{E(a, b)} \frac{dz}{z^2 + 3z + 1} \quad (6.2.7)$$

πάνω στις τρεις ελλείψεις  $E(a, b)$  με κέντρο το σημείο  $O = (0, 0)$ , ημιάξονα  $a$  (κατά τον άξονα  $Ox$ ) ίσο με  $(\alpha) a = 1/4$ ,  $(\beta) a = 1$  και  $(\gamma) a = 3$  και ημιάξονα  $b$  (κατά τον άξονα  $Oy$ ) ίσο με  $b = 1$  συνεχώς.

**Λύση:** Για την ολοκληρωτέα αναλυτική συνάρτηση  $f(z) = 1/(z^2 + 3z + 1)$  γνωρίζουμε ήδη τις δύο ρίζες  $z_1$  και  $z_2$  του παρονομαστή της από τις σχέσεις (6.1.16). Αυτές έχουν τις τιμές

$$z_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \approx -0.381966 \quad \text{και} \quad z_2 = -\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx -2.61803 \quad (6.2.8)$$

και είναι απλοί πόλοι της συναρτήσεώς μας  $f(z)$ . Έχουμε επίσης υπολογίσει στη σχέση (6.1.19) και στην επόμενη γραμμή και τα αντίστοιχα δύο ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Τα υπενθυμίζουμε και εδώ

$$b_1 = \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{και} \quad b_2 = \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (6.2.9)$$

Είμαστε λοιπόν έτοιμοι να εφαρμόσουμε το παραπάνω θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων για το ολοκλήρωμα  $I(a, b)$  πάνω στην έλλειψη  $E(a, b)$  στις περιπτώσεις που μας ζητείται η τιμή του.

(α) Για  $a = 1/4 = 0.25$  και  $b = 1$  παρατηρούμε αμέσως πως και οι δύο πόλοι  $z_1 \approx -0.381966$  και  $z_2 \approx -2.61803$  της αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z) = 1/(z^2 + 3z + 1)$  κείνται έξω από την έλλειψη  $E(1/4, 1)$ . Άρα δεν υπάρχει κανένας πόλος στο εσωτερικό της ελλείψεως  $E(1/4, 1)$ . Επομένως  $I(1/4, 1) = 0$  σύμφωνα με τον τύπο (6.2.4) ή σύμφωνα με το θεώρημα των Cauchy-Goursat (4.2.1).

(β) Για  $a = 1$  και  $b = 1$  παρατηρούμε ευθύς τώρα που μεγάλωσε ο ημιάξονας  $a$  της ελλείψεως πως ο πρώτος πόλος  $z_1 \approx -0.381966$  βρίσκεται μέσα στην έλλειψη  $E(1, 1)$ . Αντίθετα ο δεύτερος



πόλος  $z_2 \approx -2.61803$  συνεχίζει να κείται έξω από την ίδια έλλειψη. Επομένως υπάρχει μόνο ένας πόλος στο εσωτερικό της ελλείψεως  $E(1, 1)$  και με βάση τον τύπο (6.2.4) (εδώ με  $n = 1$ ) προκύπτει

$$I(1, 1) = \oint_{E(1,1)} \frac{dz}{z^2 + 3z + 1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\pi i}{\sqrt{5}} \approx 2.80993i. \quad (6.2.10)$$

Το μιγαδικό ολοκλήρωμα  $I(a, b)$  δεν έχει πια μηδενική τιμή! Έχει μη μηδενική, αλλά φανταστική τιμή.

(γ) Τέλος για  $a = 3$  και  $b = 1$  παρατηρούμε πως τώρα που μεγάλωσε κι άλλο ο ημιάξονας  $a$  της ελλείψεως και οι δύο πόλοι  $z_1 \approx -0.381966$  και  $z_2 \approx -2.61803$  της συναρτήσεως  $f(z)$  βρίσκονται πλέον μέσα στην έλλειψη  $E(3, 1)$ . Κατά συνέπεια υπάρχουν τώρα δύο πόλοι στο εσωτερικό της ελλείψεως  $E(3, 1)$  και με βάση τον τύπο (6.2.4) (τώρα με  $n = 2$ : υπάρχουν δύο πόλοι!) προκύπτει

$$I(3, 1) = \oint_{E(3,1)} \frac{dz}{z^2 + 3z + 1} = 2\pi i \left[ \operatorname{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname{Res}_{z=z_2} f(z) \right] = 2\pi i \left( \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0. \quad (6.2.11)$$

Το μιγαδικό ολοκλήρωμα  $I(a, b)$  ξαναγύρισε στη μηδενική τιμή του, κάτι λίγο απρόσμενο βέβαια! ▲

### Δ6.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ

#### Δ6.3.1. Κυκλοφορία και παροχή σε ροή ιδεατού ρευστού

Στην Παράγραφο Δ4.5.1 στη σχέση (4.5.2) είδαμε τον ορισμό της **κυκλοφορίας**  $\Gamma$  ρευστού πάνω σε μια τμηματικά λεία απλή και συνήθως κλειστή καμπύλη  $C$ . Στην ίδια παράγραφο παρακάτω στη σχέση (4.5.4) μπορέσαμε να εκφράσουμε την κυκλοφορία  $\Gamma$  ιδεατού ρευστού με τη χρήση ενός μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος. Συνοψίζουμε τις δύο αυτές σχέσεις (4.5.2) και (4.5.4):

$$\Gamma := \oint_C (V_x dx + V_y dy) = \operatorname{Re} \oint_C \Omega'(z) dz \quad \text{με} \quad \Omega'(z) = V_x - iV_y \quad (6.3.1)$$

την παράγωγο του μιγαδικού δυναμικού ροής  $\Omega(z)$ . Αυτή μας δίνει τη **μιγαδική ταχύτητα**  $V_x - iV_y$  του ιδεατού ρευστού, όπως ήδη γνωρίζουμε από την Ενότητα Δ3.6, σχέση (3.6.5).

Σημειώνουμε επίσης ότι σε μια διδιάστατη, μόνιμη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού, όπως είναι αυτή που εξετάζουμε σ' όλο αυτό το Μέρος Δ για τις Μιγαδικές Συναρτήσεις, αυτή η παράγωγος  $\Omega'(z)$  είναι βέβαια μια αναλυτική συνάρτηση. Εξαιρέσεις στην αναλυτικότητα αυτή αποτελούν ορισμένα σημεία, όπως **πηγές**: σχέσεις (3.6.12), **δίνες**: σχέσεις (3.6.13), **δίπολα**: σχέσεις (3.6.14), όπου η αναλυτική συνάρτηση  $\Omega'(z)$  παρουσιάζει πόλους, και γενικότερα **εμπόδια** στη ροή, όπως ένας κύλινδρος: σχέσεις (3.6.15), μια πεπερασμένη πλάκα κάθετα στη ροή: σχέσεις (3.6.16), κλπ.

Στην ενότητα αυτή θεωρούμε σκόπιμο να αναφερθούμε και σε μια ακόμη έννοια πέρα από την **κυκλοφορία**  $\Gamma$  που σχετίζεται με το ίδιο μιγαδικό ολοκλήρωμα  $\oint_C \Omega'(z) dz$ . Αυτή είναι η έννοια της **παροχής**  $Q$  του ρευστού, δηλαδή της ποσότητας του ρευστού που διασχίζει ανά μονάδα χρόνου την καμπύλη  $C$ . Υποθέτοντας από εδώ και πέρα την καμπύλη  $C$  όχι μόνο τμηματικά λεία απλή καμπύλη, αλλ' επιπλέον οριστικά και κλειστή καμπύλη, αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις:

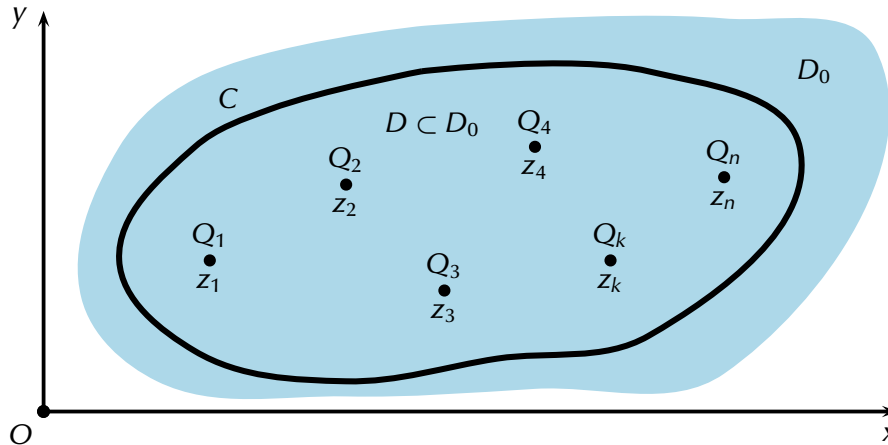
$$Q = \oint_C (-V_y dx + V_x dy) = \operatorname{Im} \oint_C \Omega'(z) dz \quad \text{με} \quad \Omega'(z) = V_x - iV_y \quad (6.3.2)$$

ξανά. Δηλαδή θα πρέπει να υπολογισθεί το επικαμπύλιο μιγαδικό ολοκλήρωμα  $\oint_C \Omega'(z) dz$  σε μια διδιάστατη, μόνιμη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού. Τότε αυτό δίνει με το πραγματικό του μέρος ( $\operatorname{Re}$ ) την **κυκλοφορία**  $\Gamma$  του ρευστού πάνω στην τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  (εννοείται κατά τη θετική φορά). Επίσης με το φανταστικό του μέρος ( $\operatorname{Im}$ ) δίνει και την **παροχή**  $Q$  του ρευστού διά μέσου αυτής της καμπύλης  $C$  (εννοείται προς τα έξω). Θαυμάσια!

Παρατηρούμε επίσης ότι το πραγματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αριστερά στην παραπάνω σχέση (6.3.2) είναι ίσο με το φανταστικό μέρος του μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος δεξιά στην ίδια σχέση. Αυτό ισχύει με βάση τη σχέση (4.5.3) στην Παράγραφο Δ4.5.1 παίρνοντας εκεί τα φανταστικά μέρη αριστερά (στην πρώτη γραμμή) και δεξιά (στην τρίτη γραμμή).

### Δ6.3.2. Παροχή σε πεδίο ροής με πηγές και απαγωγές

Θεωρούμε τώρα τη μόνιμη διδιάστατη αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού μέσα σε μια περιοχή  $D_0$  η οποία περιλαμβάνει στο εσωτερικό της μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$ . Αυτή η καμπύλη  $C$  αποτελεί το σύνορο μιας περιοχής  $D$  (την περικλείει) προφανώς με  $D \subset D_0$  (Σχήμα Δ6.2).



**Σχήμα Δ6.2:** Μόνιμη, διδιάστατη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού σε μια περιοχή  $D_0$  η οποία περιλαμβάνει μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$ . Αυτή αποτελεί το σύνορο περιοχής  $D$  με  $D \subset D_0$ , δηλαδή η  $D$  περιλαμβάνεται στη  $D_0$ . Στη ροή αυτή υπάρχουν πηγές στα ακόλουθα  $n$  σημεία:  $z_1$ : με παροχή  $Q_1$ ,  $z_2$ : με παροχή  $Q_2$ , ...,  $z_k$ : με παροχή  $Q_k$ , ... και  $z_n$ : με παροχή  $Q_n$ .

Σε τούτη τη ροή ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν και **πηγές** στα ακόλουθα  $n$  σημεία της ανοικτής περιοχής  $D$ :  $z_1$ : με παροχή  $Q_1$ ,  $z_2$ : με παροχή  $Q_2$ , ...,  $z_k$ : με παροχή  $Q_k$ , ... και  $z_n$ : με παροχή  $Q_n$ . Οι παροχές  $Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots, Q_n$  είναι βέβαια πραγματικές ποσότητες και μάλιστα θετικές, αφού πρόκειται για πηγές. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και γι' **αρνητικές πηγές** ή **καταβόθρες** ή **απαγωγές**, μόνο που σε κάθε αρνητική πηγή στο σημείο  $z_j$  η σχετική παροχή  $Q_j$  είναι κι αυτή αρνητική. (Μπορεί μερικές πηγές να είναι θετικές: συνηθισμένες πηγές, ενώ άλλες αρνητικές: απαγωγές.)

Γνωρίζουμε όμως από την Παράγραφο Δ3.6.2, δεύτερη σχέση (3.6.12) ότι σε πηγή παροχής  $Q_k$  στο σημείο  $z_k$  η παράγωγος  $\Omega'(z)$  του μιγαδικού δυναμικού ροής  $\Omega(z)$  παρουσιάζει απλό πόλο (εκεί σε άπειρο μέσον) με ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $Q_k/(2\pi)$ . Επομένως γενικά η παράγωγος αυτή  $\Omega'(z)$  θα έχει σε μια γειτονιά του σημείου  $z_k$  της πηγής (είτε θετικής είτε αρνητικής) την έκφραση

$$\Omega'(z) = \frac{Q_k}{2\pi(z - z_k)} + \Omega'_k(z) \quad (6.3.3)$$

με  $\Omega_k(z)$  μια αναλυτική συνάρτηση ακόμη και στο ίδιο το σημείο  $z_k$  της πηγής. Άρα με βάση το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, δηλαδή με βάση τη σχέση (6.2.4), εδώ για την παράγωγο  $\Omega'(z)$  του μιγαδικού δυναμικού ροής  $\Omega(z)$ , για το μιγαδικό ολοκλήρωμα  $\oint_C \Omega'(z) dz$  θα ισχύει η σχέση

$$\oint_C \Omega'(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} \Omega'(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{2\pi} = \frac{2\pi i}{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_k = i \sum_{k=1}^n Q_k. \quad (6.3.4)$$

Με βάση τώρα τη σχέση (6.3.2) η παροχή  $Q$  του ρευστού διά μέσου της καμπύλης  $C$  (και προς τα έξω εννοείται) θα είναι ίση με το φανταστικό μέρος ( $\operatorname{Im}$ ) αυτού του μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος  $\oint_C \Omega'(z) dz$ . Επομένως από τη σχέση (6.3.4) τελικά προκύπτει ότι

$$Q = \operatorname{Im} \oint_C \Omega'(z) dz = \sum_{k=1}^n Q_k. \quad (6.3.5)$$

Αυτό είναι ένα απόλυτα αναμενόμενο αποτέλεσμα σε μόνιμη διδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού (που έχει και σταθερή πυκνότητα  $\rho$ ). Με απλά λόγια η σχέση (6.3.5) λέει πως όση ποσότητα ρευστού

εισέρχεται στο πεδίο ροής από τις πηγές  $z_k$  με παροχές  $Q_k$  (με  $k = 1, 2, \dots, n$ ) τόση ακριβώς ποσότητα ρευστού εξέρχεται από την τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  που τις περιβάλλει. (Υπενθυμίζεται ότι αυτό ισχύει και για αρνητικές πηγές: καταβόθρες, απαγωγές, αλλά σ' αυτές προφανώς με αρνητικές τις παροχές  $Q_k$ , καθώς και για κάθε συνδυασμό πηγών και απαγωγών.)

Σημειώνουμε ότι απόλυτα ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και στην περίπτωση δινών (αντί πηγών), εκεί όμως για την κυκλοφορία  $\Gamma$  του ρευστού αντί για την παροχή του  $Q$ . Επίσης με χρήση του τύπου (6.3.1) (με το πραγματικό μέρος  $\text{Re}$ ) αντί του τύπου (6.3.2) (με το φανταστικό μέρος  $\text{Im}$ ).

Τέλος τα πιο πάνω αποτελέσματα μπορούν να γενικευθούν και στην Ελαστικότητα με  $n$  συγκεντρωμένες δυνάμεις  $F_k = X_k + iY_k$  να εφαρμόζονται στα σημεία  $z_k$  ενός επίπεδου ελαστικού μέσου. Μπορεί έτσι να αποδειχθεί (αρκετά πιο δύσκολα βέβαια!) ότι η συνολική δύναμη  $F = X + iY$  η οποία ασκείται από το ελαστικό μέσον διά μέσου μιας τμηματικά λείας απλής κλειστής καμπύλης  $C$  που περιβάλλει τα σημεία  $z_k$  προς τα έξω είναι ίση με το άθροισμα των  $n$  συγκεντρωμένων δυνάμεων  $F_k = X_k + iY_k$  που προαναφέρθηκαν κι εφαρμόζονται στα σημεία  $z_k$  στο εσωτερικό της καμπύλης  $C$ .

#### Δ6.4. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Στην προπροηγούμενη Ενότητα Δ6.2 είδαμε πως η μέθοδος των ολοκληρωτικών υπολοίπων μπορεί να εφαρμοσθεί στον υπολογισμό μιγαδικών επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων της μορφής  $\oint_C f(z) dz$  πάνω σε μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη  $C$  του μιγαδικού επιπέδου  $z = x + iy$ . Είναι όμως δυνατόν να εφαρμοσθεί και στον υπολογισμό μερικών ειδικών κατηγοριών πραγματικών ορισμένων ολοκληρωμάτων. Σε τούτη την Ενότητα Δ6.4 θα επιδείξουμε αυτήν εδώ τη δυνατότητα στον υπολογισμό πραγματικών τριγωνομετρικών ορισμένων ολοκληρωμάτων της εξής μορφής:

$$I_\theta = \int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \tag{6.4.1}$$

με τη συνάρτηση  $F$  ρητή συνάρτηση (πηλίκο πολυωνύμων) των  $\cos \theta$  και  $\sin \theta$ . Σημειώνουμε βέβαια ότι στην ίδια κατηγορία συναρτήσεων ανήκουν και λίγο πολυπλοκότερες συναρτήσεις με  $\cos n\theta$  και  $\sin n\theta$  (με το  $n$  θετικό ακέραιο αριθμό), αφού  $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ ,  $\sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$ , κλπ.

Η ιδέα για τον υπολογισμό πραγματικών ορισμένων ολοκληρωμάτων της μορφής (6.4.1) είναι η μετατροπή τους σε μιγαδικά επικαμπύλια ολοκληρώματα πάνω στη μοναδιαία περιφέρεια  $C_0$  με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O = (0, 0)$ . Με  $\theta$  τη σχετική πολική γωνία (με  $0 \leq \theta < 2\pi$ ) θέτουμε

$$z = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \text{οπότε} \quad z^{-1} = e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \quad \text{και} \quad dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \tag{6.4.2}$$

με την ισχύ και των τύπων του Euler (1.1.4):  $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ . Εδώ εργαζόμαστε σύμφωνα με τον τρόπο εργασίας στην Παράγραφο Δ4.1.2, τώρα όμως μεταβαίνοντας από την πραγματική μεταβλητή  $\theta$  (την πολική γωνία στη μοναδιαία περιφέρεια  $C_0$ ) στη μιγαδική μεταβλητή  $z$  πάνω στην ίδια περιφέρεια  $C_0$ . Τώρα, προσθαφαιρώντας τις δύο πρώτες σχέσεις (6.4.2), παίρνουμε

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z} \quad \text{και} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}. \tag{6.4.3}$$

Κάνουμε αυτές τις αντικαταστάσεις για το  $\cos \theta$  και το  $\sin \theta$  καθώς και την αλλαγή μεταβλητής από  $\theta$  (στο πραγματικό διάστημα  $[0, 2\pi]$ ) σε  $z$  (στη μοναδιαία περιφέρεια  $C_0$ ). Έτσι το πραγματικό ορισμένο ολοκλήρωμα (6.4.1) παίρνει τη μορφή του εξής μιγαδικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος:

$$I_\theta = \oint_{C_0} \frac{f(z)}{iz} dz = -i \oint_{C_0} \frac{f(z)}{z} dz, \tag{6.4.4}$$

αφού  $dz = iz d\theta$ , οπότε  $d\theta = dz/(iz)$ . Φυσικά στο ολοκλήρωμα αυτό  $f(z)$  είναι η ρητή συνάρτηση του  $z$  η οποία προκύπτει από την αρχική συνάρτηση  $F(\cos \theta, \sin \theta)$  με τις δύο αλλαγές (6.4.3) από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις  $\cos \theta$  και  $\sin \theta$  στη μιγαδική μεταβλητή  $z$ . Και τώρα το μιγαδικό

ολοκλήρωμα (6.4.4) μπορεί γενικά να υπολογισθεί με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων που εκθέσαμε ήδη στην Ενότητα Δ6.2. Θα επιδείξουμε αυτήν τη διαδικασία σε ένα παράδειγμα:

▼ **Παράδειγμα Δ6.3:** Να υπολογισθεί το τριγωνομετρικό πραγματικό ορισμένο ολοκλήρωμα

$$I_\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + 2 \cos \theta}. \quad (6.4.5)$$

**Λύση:** Φυσικά, επειδή  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ , ισχύει ότι  $3 + 2 \cos \theta > 0$ . (Άρα το ολοκλήρωμα αυτό  $I_\theta$  υπάρχει!) Εδώ προφανώς θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων, όπως την εκθέσαμε πιο πάνω για τέτοιας μορφής πραγματικά ολοκληρώματα  $I_\theta$ . Συγκεκριμένα θέτουμε

$$z = e^{i\theta}, \text{ οπότε } \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} \text{ και } dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta \text{ ή } d\theta = \frac{dz}{iz}. \quad (6.4.6)$$

Με τον τρόπο αυτό το ολοκλήρωμά μας  $I_\theta$  παίρνει τη μορφή ενός μιγαδικού ολοκληρώματος:

$$I_\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + 2 \cos \theta} = \oint_{C_0} \frac{1}{3 + 2 \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} = -i \oint_{C_0} \frac{dz}{(3 + z + z^{-1})z} = -i \oint_{C_0} \frac{dz}{z^2 + 3z + 1}. \quad (6.4.7)$$

Πρόκειται για μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στη μοναδιαία περιφέρεια  $C_0$  με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O = (0, 0)$ . Αυτό όμως ακριβώς το ολοκλήρωμα το έχουμε ήδη υπολογίσει με την παρούσα μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων στη σχέση (6.2.10) σαν  $I(1, 1)$ . Έτσι έχουμε

$$I_\theta = -iI(1, 1) = -i \frac{2\pi i}{\sqrt{5}} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \approx 2.80993, \text{ αφού } i^2 = -1, \quad (6.4.8)$$

για το αρχικό πραγματικό τριγωνομετρικό ορισμένο ολοκλήρωμά μας  $I_\theta$  ως προς τη μεταβλητή  $\theta$ . ▲

## Δ6.5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ LAPLACE

### Δ6.5.1. Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace με το ολοκλήρωμα Bromwich

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μέθοδος των ολοκληρωτικών υπολοίπων στην αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace. Όπως γνωρίζουμε ήδη από το Κεφάλαιο Α10 του Μέρους Α των διδακτικών αυτών βιβλίων που αφορά στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ, ο **μετασχηματισμός Laplace**  $U(s)$  μιας συναρτήσεως  $u(t)$  ορίζεται με βάση το ολοκλήρωμα

$$U(s) := \mathcal{L}\{u(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt, \quad (6.5.1)$$

εφόσον βέβαια αυτό το **γενικευμένο** (ή **καταχρηστικό**) ολοκλήρωμα (με άνω όριο το  $\infty$ ) υπάρχει.

Τώρα, για να επιστρέψουμε από το μετασχηματισμό Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  στην αρχική του συνάρτηση  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έναν αντίστοιχο τύπο, τον εξής:

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} U(s) ds := \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{st} U(s) ds. \quad (6.5.2)$$

Στον τύπο αυτό το  $\gamma$  δηλώνει μια κατάλληλη πραγματική σταθερά και θα επανέλθουμε σ' αυτήν. Σημειώνουμε επίσης πως το ολοκλήρωμα στον ίδιο τύπο (6.5.2) καλείται **ολοκλήρωμα Bromwich**.

Οι δύο αυτοί τύποι (6.5.1) (για τον ευθύ μετασχηματισμό Laplace) και (6.5.2) (για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace) είναι αντίστοιχοι κι ανάλογοι με τους τύπους (18.1.3) και (18.1.5) για το **μετασχηματισμό Fourier**, τους οποίους ήδη αναφέραμε στο Κεφάλαιο Α18 του Μέρους Α.

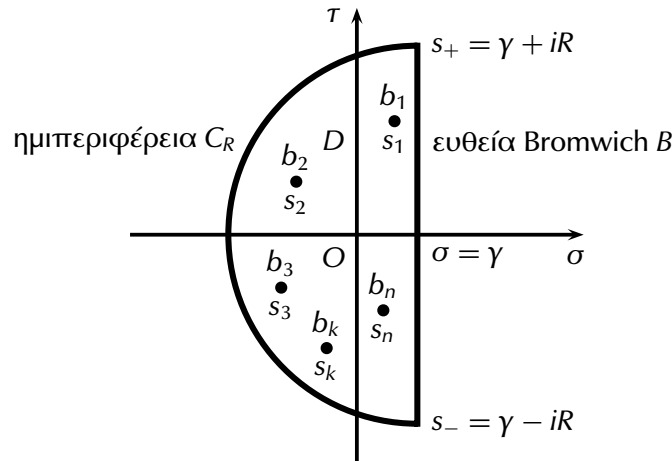
Στο σημείο αυτό πρέπει βέβαια να σημειώσουμε ότι ενώ ο τύπος (6.5.1) είναι ο ορισμός του μετασχηματισμού Laplace, ο επόμενος τύπος (6.5.2) για την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace προφανώς δεν αποτελεί ορισμό. Μπορεί όμως να αποδειχθεί, αν και η απόδειξή του δεν είναι εύκολη και θα την παραλείψουμε. Σημειώνουμε όμως πως η ολοκλήρωση στον τύπο (6.5.2)

γίνεται στο μιγαδικό επίπεδο σε μια ευθεία γραμμή με πραγματικό μέρος  $\gamma$  και με φανταστικό μέρος από  $-\infty$  έως  $\infty$ . Για να είμαστε ακριβέστεροι, το ολοκλήρωμα στον τύπο (6.5.2) είναι ένα γενικευμένο (ή καταχρηστικό) ολοκλήρωμα που ορίζεται όπως δηλώνεται δεξιά στον τύπο αυτό. Για να είμαστε ακόμη πιο ακριβείς, πρόκειται για ένα **ολοκλήρωμα κύριας πηγής**, γιατί στο όριο δεξιά έχουμε  $-iR$  και  $+iR$  (την ίδια ποσότητα  $R$ ) κι όχι δύο όρια με  $-iR_1$  και  $+iR_2$ . (Πρακτικά όμως αυτό είναι μια λεπτομέρεια!) Γενικά ο τύπος αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace (6.5.2) ισχύει στις πρακτικές εφαρμογές του Πολιτικού Μηχανικού. Εξάιρεση αποτελεί η περίπτωση που παρουσιάζονται γενικευμένες συναρτήσεις ιδιομορφίας, όπως είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac  $\delta(t)$  και οι παράγωγοί της. Τότε (και σε άλλες μη συνηθισμένες περιπτώσεις) ο τύπος (6.5.2) δεν ισχύει.

**Δ6.5.2. Εφαρμογή της μεθόδου των ολοκληρωτικών υπολοίπων στο ολοκλήρωμα Bromwich**

Ίσως ο αναγνώστης και η αναγνώστρια Πολιτικός Μηχανικός έχουν ήδη διερωτηθεί τί δουλειά έχει αυτή η Ενότητα Δ6.5 για την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace μέσα στο Κεφάλαιο Δ6 που είναι όλο αφιερωμένο στα ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Η απάντηση είναι απλή: το ολοκλήρωμα Bromwich στον τύπο (6.5.2) αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace υπολογίζεται συνήθως (όχι πάντα) με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων αυτού εδώ του κεφαλαίου και ειδικότερα της Ενότητας Δ6.2. Κι ας γίνουμε τώρα πιο συγκεκριμένοι σ’ αυτήν την ενδιαφέρουσα δυνατότητα.

Θεωρούμε λοιπόν την **ευθεία Bromwich**  $B$  που ξεκινάει από το σημείο  $s_- = \gamma - iR$  και φθάνει μέχρι το σημείο  $s_+ = \gamma + iR$  στο μιγαδικό επίπεδο  $s = \sigma + it$  που αντιστοιχεί στο **ολοκλήρωμα Bromwich** (6.5.2). (Εδώ χρησιμοποιούμε τα σύμβολα  $s, \sigma$  και  $t$  αντί για τα σύμβολα  $z, x$  και  $y$  αντίστοιχα.) Αυτή η ευθεία  $B$  είναι παράλληλη στον άξονα  $t$  και φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα Δ6.3.



**Σχήμα Δ6.3:** Η ευθεία Bromwich  $B$ , η ημιπεριφέρεια  $C_R$ , η περιοχή  $D$  που περικλείεται και οι  $n$  πόλοι  $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots, z_n$  του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος Bromwich (6.5.2) αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace:  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$ .

Τη θέση  $\sigma = \gamma$  της ευθείας Bromwich  $B$  (δηλαδή το πού αυτή τέμνει τον άξονα  $O\sigma$ ) την καθορίζουμε με τέτοιο τρόπο, ώστε η ευθεία αυτή  $B$  να έχει όλους τους πόλους  $s_1, s_2, \dots, s_n$  του μετασχηματισμού Laplace  $U(s) = \mathcal{L}^{-1}\{u(t)\}$  στα αριστερά της. Τώρα θεωρούμε και την ημιπεριφέρεια  $C_R$  με ακτίνα  $R$  στα αριστερά της ευθείας Bromwich  $B$ , ακριβώς όπως φαίνεται στο πιο πάνω Σχήμα Δ6.3. Με τον τρόπο αυτό για κατάλληλα μεγάλη τιμή του  $R$  όλοι οι πόλοι  $s_1, s_2, \dots, s_n$  του μετασχηματισμού Laplace  $U(s)$  θα κείνται στο εσωτερικό  $D$  της περιοχής που περιβάλλεται από την τμηματικά λεία (με δύο γωνιακά σημεία: τα σημεία  $s_-$  και  $s_+$ ) απλή κλειστή καμπύλη  $C = B \cup C_R$  του Σχήματος Δ6.3. Αφού μάλιστα η εκθετική συνάρτηση  $e^{st}$  προφανώς δεν έχει καθόλου πόλους, με βάση το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων και το σχετικό τύπο (6.2.4) θα έχουμε

$$\oint_C e^{st} U(s) ds = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} [e^{st} U(s)]. \tag{6.5.3}$$

Υποθέτουμε τώρα ότι ο μετασχηματισμός Laplace  $U(s)$  είναι το πηλίκο δύο πολυωνύμων  $p(s)$  (βαθμού  $M$ ) και  $q(s)$  (βαθμού  $N$ ):  $U(s) = p(s)/q(s)$ . Υποθέτουμε επίσης ότι  $N > M$ , δηλαδή ότι ο βαθμός  $N$  του πολυωνύμου  $q(s)$  στον παρονομαστή της συναρτήσεως  $U(s) = p(s)/q(s)$  είναι μεγαλύτερος από το βαθμό  $M$  του πολυωνύμου  $p(s)$  στον αριθμητή της ίδιας συναρτήσεως  $U(s)$ . (Πρόκειται για τη συνηθισμένη περίπτωση.) Τότε μπορεί να αποδειχθεί με οριακή διαδικασία ότι

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{st} U(s) ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{st} \frac{p(s)}{q(s)} ds = 0. \quad (6.5.4)$$

Επειδή όμως  $C = B \cup C_R$  (με  $B$  την ευθεία Bromwich: από το σημείο  $\gamma - iR$  μέχρι το σημείο  $\gamma + iR$ ),

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C e^{st} U(s) ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} e^{st} U(s) ds + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{st} U(s) ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} e^{st} U(s) ds, \quad (6.5.5)$$

αφού το πιο πάνω ολοκλήρωμα (6.5.4) ισούται με μηδέν. Άρα ο τύπος (6.5.2) αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace παίρνει στην παρούσα περίπτωση την εξής τελική μορφή για  $R \rightarrow \infty$ :

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma - iR}^{\gamma + iR} e^{st} U(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C e^{st} U(s) ds = \sum_{k=1}^n \text{Res}_{s=s_k} [e^{st} U(s)]. \quad (6.5.6)$$

Εδώ χρησιμοποιήθηκε και ο τύπος (6.5.3) με τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της συναρτήσεως  $e^{st} U(s)$ .

Σκιαγραφήσαμε λοιπόν την απόδειξη του ακόλουθου ιδιαίτερα σημαντικού θεωρήματος:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Θεώρημα αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace):** Θεωρούμε ένα ρητό μετασχηματισμό Laplace της μορφής  $U(s) = p(s)/q(s)$  με το βαθμό  $N$  του πολυωνύμου  $q(s)$  του παρονομαστή μεγαλύτερο από το βαθμό  $M$  του πολυωνύμου  $p(s)$  του αριθμητή, δηλαδή  $N > M$ . Τότε ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  (με  $t > 0$ ) δίνεται από τον τύπο

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \sum_{k=1}^n \text{Res}_{s=s_k} [e^{st} U(s)] \quad (6.5.7)$$

με  $s_1, s_2, \dots, s_n$  ( $n \leq N$ ) τις  $n$  διακριτές (διαφορετικές) ρίζες του πολυωνύμου  $q(s)$  του παρονομαστή.

► **Παρατήρηση Δ6.2:** Σημειώνεται ότι το θεώρημα αυτό γενικεύεται και σε άλλες περιπτώσεις. Και γενικότερα το ολοκλήρωμα Bromwich (6.5.2) αποτελεί πάρα πολύ ισχυρό τρόπο αναλυτικής (αλλά και αριθμητικής με αριθμητική ολοκλήρωση) αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace.

Ας προχωρήσουμε τώρα σε δύο παραδείγματα και σε μία εφαρμογή του Πολιτικού Μηχανικού:

▼ **Παράδειγμα Δ6.4:** Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως

$$U(s) = \frac{1}{s+a} \quad \text{με το } a \text{ σταθερά.} \quad (6.5.8)$$

**Λύση:** Πρόκειται για ένα εξαιρετικά απλό παράδειγμα, όπου  $p(s) = 1$  και  $q(s) = s + a$  με το βαθμό του  $q(s)$  (το 1) μεγαλύτερο από το βαθμό του  $p(s)$  (το 0). Εδώ πέρα υπάρχει μόνο ένας πόλος ( $n = 1$ ) της συναρτήσεως  $U(s)$  (βέβαια και της συναρτήσεως  $e^{st} U(s)$ ), ο πόλος  $s_1 = -a$ , αφού  $s + a = 0$ , και μάλιστα πρόκειται για απλό πόλο (πόλο πρώτης τάξεως:  $m = 1$ ). Επομένως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (6.1.11) για τον υπολογισμό του σχετικού ολοκληρωτικού υπολοίπου  $b_1$ . Επειδή μάλιστα  $q'(s) = (s + a)' = 1$ , προκύπτει το ολοκληρωτικό υπόλοιπο

$$b_1 = \text{Res}_{s=-a} [e^{st} U(s)] = \text{Res}_{s=-a} \frac{e^{st}}{s+a} = \frac{e^{st}}{(s+a)'} \Big|_{s=-a} = \frac{e^{st}}{1} \Big|_{s=-a} = \frac{e^{-at}}{1} = e^{-at}. \quad (6.5.9)$$

Πολύ ωραία! Και τώρα με βάση τον τύπο (6.5.6) έχουμε απλά (εδώ με  $n = 1$ )

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+a}\right\} = \sum_{k=1}^1 b_k = b_1 = e^{-at}. \quad (6.5.10)$$

Ήταν πραγματικά ένα ιδιαίτερα απλό παράδειγμα με γνωστό αποτέλεσμα:  $\mathcal{L}^{-1}\{1/(s+a)\} = e^{-at}$ . ▲

▼ **Παράδειγμα Δ6.5:** Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της συναρτήσεως

$$U(s) = \frac{s^3}{s^4 - \beta^4} \quad \text{με το } \beta \text{ σταθερά.} \quad (6.5.11)$$

**Λύση:** Πρόκειται για ένα κάπως δυσκολότερο παράδειγμα που σχετίζεται με έναν αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  που απαντάται στις **καμπτικές ιδιοταλαντώσεις** συνήθους δοκού. Εδώ στη συνάρτηση  $U(s)$  αριθμητής είναι το πολυώνυμο  $p(s) = s^3$  και παρονομαστής (μεγαλύτερου βαθμού από τον αριθμητή:  $N = M+1$ ) το πολυώνυμο  $q(s) = s^4 - \beta^4 = (s^2 - \beta^2)(s^2 + \beta^2)$  με ρίζες  $s_{1,2} = \pm\beta$  και  $s_{3,4} = \pm i\beta$ . Είναι λοιπόν απλές οι τέσσερις ρίζες ( $N = 4$ ) του παρονομαστή  $q(s)$ , άρα απλοί (πρώτης τάξεως) και οι πόλοι της συναρτήσεως  $e^{st} U(s)$  που παρουσιάζεται στον τύπο (6.5.7). Αυτής της συναρτήσεως  $e^{st} U(s)$  θα υπολογίσουμε τα τέσσερα ολοκληρωτικά υπόλοιπα  $b_1, b_2, b_3$  και  $b_4$  στους τέσσερις απλούς πόλους της  $s_1 = \beta, s_2 = -\beta, s_3 = i\beta$  και  $s_4 = -i\beta$ .

Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι τον τύπο (6.1.11) για τον υπολογισμό των ολοκληρωτικών υπολοίπων, μια που έχουμε εδώ απλούς πόλους. Σημειώνουμε επίσης ότι  $Q'(s) = (s^4 - \beta^4)' = 4s^3$ . Με τον τρόπο αυτό ο τύπος (6.5.7) (εδώ με  $x$  αντί για  $t$  σαν αρχική μεταβλητή) για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace  $u(t)$  δίνει

$$\begin{aligned} u(x) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} &= \sum_{k=1}^4 \operatorname{Res}_{s=s_k} [e^{sx} U(s)] = \sum_{k=1}^4 \frac{e^{s_k x} s_k^3}{4s_k^3} = \sum_{k=1}^4 \frac{e^{s_k x}}{4} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 e^{s_k x} \\ &= \frac{1}{4} (e^{s_1 x} + e^{s_2 x} + e^{s_3 x} + e^{s_4 x}) = \frac{1}{4} (e^{\beta x} + e^{-\beta x} + e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}), \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{e^{\beta x} + e^{-\beta x}}{2} + \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} \right) = \frac{1}{2} (\cosh \beta x + \cos \beta x). \end{aligned} \quad (6.5.12)$$

Κύλησαν ομαλά οι υπολογισμοί αυτοί και πήραμε το αποτέλεσμα που πραγματικά περιμέναμε από το Μέρος Α των διδακτικών βιβλίων, Κεφάλαιο Α10 για το μετασχηματισμό Laplace, Πίνακας Α10.2 στο τέλος του κεφαλαίου αυτού, μετασχηματισμός Laplace 28 στον πίνακα αυτό. Και ίσως να φαινόταν πολύ δύσκολος αυτός ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace. (Εδώ όμως χρησιμοποιήσαμε το  $x$  αντί για το  $t$ , ώστε να δηλώσουμε καλύτερα θέση  $x$  σε δοκό, όχι χρόνο  $t$ .) ▲

▼ **Εφαρμογή Δ6.1 (Συντονισμός):** Εδώ θεωρούμε ένα μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα, όπως είναι (α) ένα συνηθισμένο **σύστημα μάζας-ελατηρίου**, (β) ένας **υδατόπυργος** ή (γ) ένα **μονώροφο ιδεατό κτίριο διατμήσεως** και στις τρεις περιπτώσεις χωρίς απόσβεση και με κυκλική συχνότητα  $\omega_0$ . Στο σύστημα αυτό επιβάλλεται εξωτερική φόρτιση  $p(t) = p_0 \sin \omega_0 t$  με εύρος  $p_0$  και με την ίδια ακριβώς κυκλική συχνότητα  $\omega_0$ . Η ειδική αυτή φόρτιση  $p(t) = p_0 \sin \omega_0 t$  προκαλεί **συντονισμό** στο μηχανικό σύστημα που εξετάζουμε. Η σχετική συνήθης διαφορική εξίσωση έχει τη γνωστή από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II μορφή (διαφορική εξίσωση (1.1.3) στο Κεφάλαιο Α1 του Μέρους Α)

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p^*(t) \equiv \frac{p(t)}{m}, \quad \text{οπότε εδώ} \quad \ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p_0}{m} \sin \omega_0 t \quad (6.5.13)$$

με  $m$  τη μάζα στο μηχανικό σύστημα και άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση  $u(t)$  της μάζας  $m$  ως προς τη θέση ισορροπίας της. Οι σχετικές αρχικές συνθήκες θεωρούνται ότι είναι μηδενικές:  $u(0) = 0$  και  $\dot{u}(0) = 0$ . Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και με τη χρήση του θεωρήματος της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace και του σχετικού τύπου (6.5.7) ζητείται η άγνωστη μετατόπιση  $u(t)$  της μάζας  $m$  του μηχανικού συστήματος.

**Λύση:** Πρόκειται για μια πιο ενδιαφέρουσα εφαρμογή του θεωρήματος της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace. Αυτό συμβαίνει όχι μόνο λόγω της σημασίας του φαινομένου του συντονισμού για τον Πολιτικό Μηχανικό, αλλά και για άλλον ένα σημαντικό λόγο. Συγκεκριμένα, όπως θα δούμε, οι πόλοι της συναρτήσεως  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  που θα χρειασθεί να αντιστρέψουμε εδώ είναι δευτέρας τάξεως και όχι πρώτης τάξεως (όχι απλοί πόλοι!) αντίθετα με προηγουμένως.

Ξεκινάμε λοιπόν μετασχηματίζοντας κατά Laplace την πιο πάνω συνήθη διαφορική εξίσωση μη λησμονώντας βέβαια και το ότι οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές:  $u(0) = 0$  και  $\dot{u}(0) = 0$ . Θέτουμε  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ , οπότε  $\mathcal{L}\{\ddot{u}(t)\} = s^2 U(s)$  για μηδενικές αρχικές συνθήκες. Έτσι προκύπτει με το μετασχηματισμό Laplace της διαφορικής εξισώσεως (6.5.13) (δεξιά για την παρούσα φόρτιση)

$$s^2 U(s) + \omega_0^2 U(s) = \frac{p_0}{m} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \text{αφού} \quad \mathcal{L}\{\sin \omega_0 t\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}. \quad (6.5.14)$$

Λύνοντας τώρα την πρωτοβάθμια αυτή αλγεβρική εξίσωση ως προς  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ , βρίσκουμε

$$U(s) = \frac{p_0}{m} \frac{\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2} = \frac{p_0}{m} \frac{\omega_0}{[(s - i\omega_0)(s + i\omega_0)]^2} = \frac{p_0}{m} \frac{\omega_0}{(s - i\omega_0)^2 (s + i\omega_0)^2}. \quad (6.5.15)$$

Στο σημείο αυτό είναι προφανές ότι ο γνωστός τώρα μετασχηματισμός Laplace  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  είναι ρητή συνάρτηση. Σαν αριθμητή  $p(s)$  έχει πολυώνυμο μηδενικού βαθμού (σταθερά,  $M = 0$ ) και σαν παρονομαστή  $q(s)$  έχει πολυώνυμο τετάρτου βαθμού ( $N = 4$ ), αλλά με δύο μόνο ρίζες ( $n = 2$ ): τις διπλές ρίζες (ρίζες πολλαπλότητας 2)  $s_1 = i\omega_0$  και  $s_2 = -i\omega_0$ . Συνεπώς στον τύπο (6.5.7) αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace για ρητές συναρτήσεις με  $N > M$  με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε μονάχα  $n = 2$  ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Ένα, το  $b_1$ , για την πρώτη διπλή ρίζα, την  $s_1 = i\omega_0$ , και ένα δεύτερο, το  $b_2$ , για τη δεύτερη διπλή ρίζα, την  $s_2 = -i\omega_0$ .

Για τον υπολογισμό του προς το παρόν άγνωστου ολοκληρωτικού υπολοίπου  $b_1$  (για τη ρίζα  $s_1 = i\omega_0$ ) σε αντίθεση με τα δύο προηγούμενα παραδείγματα δεν έχουμε πια τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε τον απλό τύπο (6.1.11). Αυτό συμβαίνει, επειδή ο τύπος αυτός ισχύει μόνο για απλές ρίζες του παρονομαστή, εδώ του  $q(s) = m(s^2 + \omega_0^2)^2$ . Άρα είμαστε υποχρεωμένοι, με κάποια δυσανεμία ίσως, αλλά πάντως υποχρεωμένοι, να χρησιμοποιήσουμε τον λίγο πιο δύσκολο (και σαφώς γενικότερο) τύπο (6.1.14), εδώ με  $m = 2$ . Αυτό ισχύει, απλά επειδή η συνάρτηση  $e^{st} U(s)$ , της οποίας ζητάμε να βρούμε εδώ τα δύο ολοκληρωτικά υπόλοιπα, έχει πόλους δευτέρας τάξεως.

Σύμφωνα με την Παράγραφο Δ6.1.2 ορίζουμε για τον πόλο  $s_1 = i\omega_0$  (με  $m = 2$ ) τη συνάρτηση

$$g(s) = (s - i\omega_0)^2 e^{st} U(s) = (s - i\omega_0)^2 e^{st} \frac{p_0}{m} \frac{\omega_0}{(s - i\omega_0)^2 (s + i\omega_0)^2} = e^{st} \frac{p_0}{m} \frac{\omega_0}{(s + i\omega_0)^2} \quad (6.5.16)$$

έχοντας βέβαια λάβει υπόψη μας και τη σχέση (6.5.15) για το μετασχηματισμό Laplace  $U(s)$  στο παρόν πρόβλημα συντονισμού. Και τώρα ο τύπος (6.1.14) αριστερά για το σχετικό ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $b_1 = c_{-1}$  παίρνει στην περίπτωση μας με  $m = 2$  (πόλος δευτέρας τάξεως) τη μορφή

$$b_1 = c_{-1} = \operatorname{Res}_{s=s_1} [e^{st} U(s)] = \frac{g'(s_1)}{1!} = g'(s_1) = g'(i\omega_0), \quad (6.5.17)$$

αφού, είπαμε,  $m = 2$  (το σημείο  $s_1 = i\omega_0$  είναι πόλος δευτέρας τάξεως) άρα  $m - 1 = 2 - 1 = 1$ .

Παραγωγίζουμε λοιπόν μια φορά τη συνάρτηση  $g(s)$  της σχέσεως (6.5.16) και παίρνουμε

$$g'(s) = \frac{p_0 \omega_0}{m} \left[ \frac{te^{st}}{(s + i\omega_0)^2} - \frac{2e^{st}}{(s + i\omega_0)^3} \right]. \quad (6.5.18)$$

Στην παράγωγο αυτή  $g'(s)$  θέτουμε απλά  $s = s_1 = i\omega_0$  (για τον πρώτο πόλο) κι αμέσως προκύπτει το ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $b_1$ . Ανάλογα ισχύουν και για το ολοκληρωτικό υπόλοιπο  $b_2$ . Τελικά

$$b_1 = \frac{p_0 \omega_0}{m} \left[ \frac{te^{i\omega_0 t}}{(2i\omega_0)^2} - \frac{2e^{i\omega_0 t}}{(2i\omega_0)^3} \right] \quad \text{και} \quad b_2 = \bar{b}_1 = \frac{p_0 \omega_0}{m} \left[ \frac{te^{-i\omega_0 t}}{(-2i\omega_0)^2} - \frac{2e^{-i\omega_0 t}}{(-2i\omega_0)^3} \right]. \quad (6.5.19)$$

Τέλος σύμφωνα με τον τύπο (6.5.7) της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace για ρητές συναρτήσεις (όπως εδώ) η μετατόπιση  $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$  στο παρόν πρόβλημα συντονισμού θα είναι

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\} = \sum_{k=1}^2 \operatorname{Res}_{s=s_k} [e^{st} U(s)] = b_1 + b_2 = \frac{p_0}{2m\omega_0^2} (-\omega_0 t \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t). \quad (6.5.20)$$

Εδώ πήραμε υπόψη και τους γνωστούς μας τύπους του Euler, ώστε να έχουμε το τελικό αποτέλεσμα σε τριγωνομετρική (και όχι μιγαδική) μορφή. Το φαινόμενο του συντονισμού είναι εμφανές από τον παράγοντα  $-\omega_0 t$  που είναι ανάλογος του χρόνου  $t$  και πολλαπλασιάζει τον όρο  $\cos \omega_0 t$ . ▲



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ7

## ΣΥΜΜΟΡΦΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

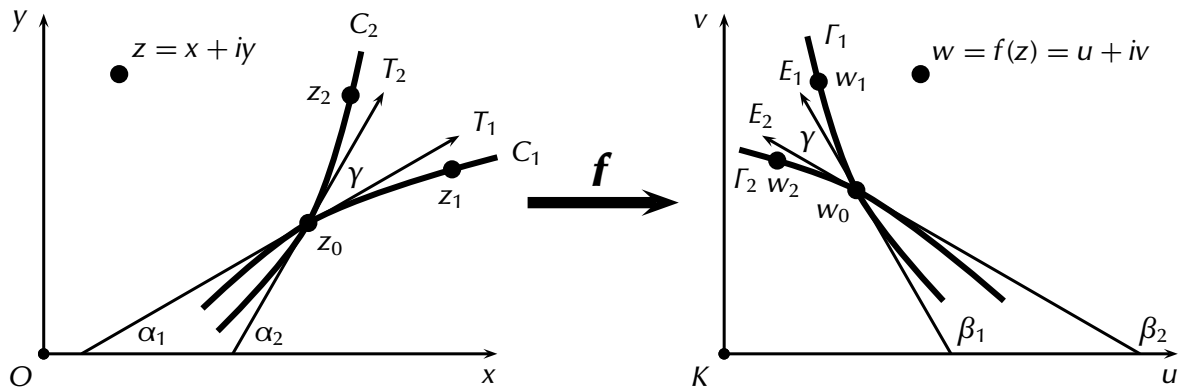
### ΠΕΡΙΛΗΨΗ ΤΟΥ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Στο παρόν Κεφάλαιο Δ7 θα ορίσουμε πρώτα-πρώτα την έννοια της **σύμμορφης απεικόνισης**. Πρόκειται για απεικόνιση από ένα αρχικό μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy$  σ' ένα νέο μιγαδικό επίπεδο  $w = u + iv$  με τη χρήση μιας αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  με  $f'(z) \neq 0$  και προφανώς  $w = f(z)$ . Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η σύμμορφη απεικόνιση διατηρεί από το επίπεδο  $z = x + iy$  στο επίπεδο  $w = u + iv$  τη γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες δύο λείων καμπύλων σε σημείο τομής τους  $z_0$  τόσο κατά μέτρο όσο και κατά φορά. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι μια αρμονική συνάρτηση (που επαληθεύει την εξίσωση του Laplace) σε μια περιοχή  $D$  του αρχικού μιγαδικού επιπέδου  $z = x + iy$  παραμένει αρμονική και στην αντίστοιχη περιοχή  $D^*$  του νέου μιγαδικού επιπέδου  $w = u + iv$ , δηλαδή μετά τη σύμμορφη απεικόνιση  $w = f(z)$ . Η σύμμορφη απεικόνιση διατηρεί επίσης και ορισμένες απλές συνοριακές συνθήκες (όχι όμως και κάθε συνοριακή συνθήκη!). Με τον τρόπο αυτό η σύμμορφη απεικόνιση είναι πρακτικά χρήσιμη με το μετασχηματισμό περιοχών με «δύσκολα» σύνορα σε πιο απλές περιοχές: κυρίως σε ημιεπίπεδα και κύκλους. Εκεί μπορεί να γίνει η επίλυση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών και στη συνέχεια να γίνει η επιστροφή στην αρχική περιοχή  $D$  του αληθινού ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού. Αυτήν τη χρήσιμη δυνατότητα τη δείχνουμε σε δύο προβλήματα της Ρευστομηχανικής ιδεατού ρευστού με βάση το μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z)$ .

### Δ7.1. Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΜΜΟΡΦΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΣ

Στις Μιγαδικές Συναρτήσεις ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η **σύμμορφη απεικόνιση**. Αυτή παρουσιάζεται στο Σχήμα Δ7.1 στο πάνω μέρος της επόμενης σελίδας. Στη σύμμορφη απεικόνιση έχουμε ένα αρχικό μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy$  και μια αναλυτική (άρα παραγωγίσιμη) συνάρτηση  $f(z)$  που ορίζεται σε μια περιοχή  $D$  του επιπέδου αυτού. Η συνάρτηση αυτή  $f(z)$  μας επιτρέπει να αντιστοιχίζουμε σε κάθε σημείο  $z = x + iy$  της περιοχής  $D$  ένα άλλο σημείο  $w = u + iv$  σε ένα δεύτερο μιγαδικό επίπεδο  $D^*$  φυσικά χρησιμοποιώντας τη σχέση  $w = f(z)$ . Υποθέτουμε ακόμη ότι η παράγωγος  $f'(z)$  της συναρτήσεως  $f(z)$  είναι διάφορη του μηδενός:  $f'(z) \neq 0$  σε κάθε σημείο της περιοχής  $D$ . Αποδεικνύεται ότι αυτό εξασφαλίζει το να είναι η σύμμορφη απεικόνιση αμφιμονοσήμαντη ανάμεσα στα δύο επίπεδα  $z = x + iy$  και  $w = u + iv$ . Αν τώρα σε κάποιο ειδικό σημείο  $z_p$  ισχύει  $f'(z_p) = 0$ , τότε λέμε ότι το σημείο  $z_p$  είναι **κρίσιμο σημείο** της σύμμορφης απεικόνισης.

Επαναλαμβάνουμε ότι είναι ενδιαφέρουσα η σύμμορφη απεικόνιση, όπως την ορίσαμε με τόσο απλό τρόπο πιο πάνω. Και πρώτα-πρώτα είναι ενδιαφέρουσα, επειδή διατηρεί τη γωνία  $\gamma$  μεταξύ των εφαπτομένων δύο καμπύλων  $C_1$  και  $C_2$  σε σημείο τομής τους  $z_0$  στο επίπεδο  $z = x + iy$ , όταν μετακινηθούμε στο νέο μιγαδικό επίπεδο  $w = u + iv$ . Εκεί βέβαια η γωνία  $\gamma$  αφορά στις καμπύλες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  που είναι οι εικόνες των  $C_1$  και  $C_2$  αντίστοιχα. Αυτή η θεμελιώδης ιδιότητα χρειάζεται βέβαια απόδειξη. Η απόδειξη αυτή ακολουθεί με βάση και το αντίστοιχο Σχήμα Δ7.1 που ήδη αναφέραμε.



**Σχήμα Δ7.1:** Σύμμορφη απεικόνιση με τη χρήση αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  (με  $f'(z) \neq 0$ ) από το αρχικό μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy$  στο νέο μιγαδικό επίπεδο  $w = f(z) = u + iv$ .

Θεωρούμε λοιπόν δύο λείες καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  στο αρχικό μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy$  που τέμνονται στο κοινό σημείο τους  $z_0$  (Σχήμα Δ7.1). Τις αντίστοιχες εφαπτόμενες τους στο σημείο  $z_0$  που υπάρχουν, επειδή υποθέτουμε τις δύο καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  λείες, τις δηλώνουμε με  $T_1$  και  $T_2$  αντίστοιχα. Αυτές σχηματίζουν γωνίες  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$  αντίστοιχα με τον άξονα  $Ox$ , άρα μεταξύ τους γωνία  $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$ . Τώρα με τη σύμμορφη απεικόνιση  $w = f(z)$  (με την υπόθεση ότι  $f'(z) \neq 0$ ) πηγαίνουμε από το μιγαδικό επίπεδο  $z = x + iy$  στο νέο μιγαδικό επίπεδο  $w = u + iv$ . Σε κάθε σημείο  $z = x + iy$  του αρχικού επιπέδου αντιστοιχεί ένα σημείο  $w = f(z) = u + iv$  του νέου επιπέδου.

Τώρα στις δύο λείες καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  αντιστοιχούν οι νέες καμπύλες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  αντίστοιχα που τέμνονται προφανώς στο νέο σημείο  $w_0 = f(z_0)$  που είναι το κοινό τους σημείο. Τις εφαπτόμενες τους στο σημείο  $w_0 = f(z_0)$  (που εύκολα αποδεικνύεται ότι υπάρχουν κι αυτές) τις δηλώνουμε με  $E_1$  και  $E_2$  αντίστοιχα (Σχήμα Δ7.1). Αυτές σχηματίζουν γωνίες  $\beta_1$  και  $\beta_2$  αντίστοιχα με τον άξονα  $Ou$  του μιγαδικού επιπέδου  $w = u + iv$  (Σχήμα Δ7.1). Θα αποδείξουμε τώρα πως η διαφορά  $\gamma$  των δύο γωνιών  $\alpha_2$  και  $\alpha_1$  στο αρχικό επίπεδο  $z = x + iy$  δε μεταβάλλεται, όταν μετακινηθούμε στο νέο επίπεδο  $w = u + iv$ . Συγκεκριμένα

$$\beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 = \gamma. \quad (7.1.1)$$

Δηλαδή η γωνία  $\gamma$  των εφαπτομένων στο σημείο τομής δύο λείων καμπύλων παραμένει η ίδια μετά τη σύμμορφη απεικόνιση. Για το λόγο αυτό (εξαιτίας της διατηρήσεως των γωνιών και μάλιστα τόσο κατά μέγεθος όσο και κατά φορά) η απεικόνιση ονομάστηκε σύμμορφη. Άλλη ιστορία που ένα σχήμα (π.χ. ένα τετράγωνο) αλλάζει εντελώς όψη με μια σύμμορφη απεικόνιση  $f(z)$ . Διατηρούνται όμως οι ορθές γωνίες του στις κορυφές του. Μην περιμένουμε τη διατήρηση ολόκληρου σχήματος!

Τώρα παίρνουμε δύο σημεία  $z_1$  και  $z_2$  (διαφορετικά όμως από το σημείο  $z_0$ ) πάνω στις δύο καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  αντίστοιχα στο αρχικό επίπεδο  $z = x + iy$ . Θεωρούμε και τα αντίστοιχά τους σημεία  $w_1 = f(z_1)$  και  $w_2 = f(z_2)$  πάνω στις αντίστοιχες καμπύλες  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  του επιπέδου  $w = u + iv$ . Γράφουμε τους δύο μιγαδικούς αριθμούς  $z_1 - z_0$  και  $w_1 - w_0$  στις πολικές τους μορφές

$$z_1 - z_0 = r_1 e^{i\theta_1} \quad \text{και} \quad w_1 - w_0 = \rho_1 e^{i\varphi_1}. \quad \text{Τότε} \quad \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} = \frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} = \frac{\rho_1}{r_1} e^{i(\varphi_1 - \theta_1)}, \quad (7.1.2)$$

όπως γνωρίζουμε καλά από τη σχέση (1.5.13) της Παραγράφου Δ1.5.3 για τη διαίρεση μιγαδικών αριθμών σε πολική μορφή. Και τώρα για  $z_1 \rightarrow z_0$  θα έχουμε  $\theta_1 \rightarrow \alpha_1$  και  $\varphi_1 \rightarrow \beta_1$ . Επίσης το κλάσμα  $(f(z_1) - f(z_0))/(z_1 - z_0)$  θα τείνει στην παράγωγο  $f'(z_0)$  που σίγουρα υπάρχει με αναλυτική την  $f(z)$ . Άρα στο όριο  $z_1 \rightarrow z_0$  και παίρνοντας τα ορίσματα στη δεξιά σχέση (7.1.2), έχουμε τελικά

$$\delta := \arg f'(z_0) = \beta_1 - \alpha_1 \quad \text{και} \quad \text{ανάλογα} \quad \delta := \arg f'(z_0) = \beta_2 - \alpha_2 \quad \text{με} \quad f'(z_0) \neq 0. \quad (7.1.3)$$

Συγκρίνοντας τώρα τις δύο σχέσεις (7.1.3), καταλήγουμε στην προς απόδειξη σχέση (7.1.1), αφού

$$\delta := \arg f'(z_0) = \beta_1 - \alpha_1 = \beta_2 - \alpha_2, \quad \text{οπότε} \quad \beta_2 - \beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (7.1.4)$$

Διατηρείται λοιπόν η γωνία  $\gamma = \alpha_2 - \alpha_1$  μεταξύ των εφαπτομένων των δύο καμπύλων  $C_1$  και  $C_2$  αντίστοιχα (Σχήμα Δ7.1) μετά τη σύμμορφη απεικόνιση  $w = f(z)$  (με  $f'(z) \neq 0$ ). Και επίσης, επειδή  $\beta_1 = \alpha_1 + \delta$ , η καμπύλη  $C_1$  στρέφεται στο σημείο της  $z_0$  κατά γωνία  $\delta := \arg f'(z_0)$  με τη σύμμορφη απεικόνιση. Ασφαλώς τα ίδια ισχύουν και για τη δεύτερη καμπύλη  $C_2$  φυσικά στο ίδιο σημείο  $z_0$ .

## Δ7.2. ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΗΣ ΣΥΜΜΟΡΦΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΣ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE

### Δ7.2.1. Διατήρηση της αρμονικότητας αρμονικής συναρτήσεως μετά από σύμμορφη απεικόνιση

Η σύμμορφη απεικόνιση είναι πάρα πολύ χρήσιμη σε πρακτικά προβλήματα, επειδή διατηρεί την αρμονικότητα μιας ήδη αρμονικής συναρτήσεως μετά τη σύμμορφη απεικόνιση που γίνεται για το μετασχηματισμό της αρχικής περιοχής  $D$  σε μια πιο απλή περιοχή  $D^*$ . Συγκεκριμένα θεωρούμε τη σύμμορφη απεικόνιση με βάση αναλυτική (άρα παραγωγίσιμη) συνάρτηση  $f(z)$  στην περιοχή  $D$

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad \text{Τότε} \quad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \quad (7.2.1)$$

σύμφωνα με τις σχέσεις (3.3.5) του Κεφαλαίου Δ3. Υπενθυμίζουμε τις δύο συνθήκες (ή εξισώσεις) των Cauchy–Riemann (3.3.6)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (7.2.2)$$

Αυτές είναι έτσι κι αλλιώς προφανείς από την παράγωγο  $f'(z)$  στις σχέσεις (7.2.1). Υπενθυμίζουμε επίσης πως τόσο το πραγματικό μέρος  $u = u(x, y)$  όσο και το φανταστικό μέρος  $v = v(x, y)$  μιας αναλυτικής συναρτήσεως  $f(z)$  είναι και τα δυο τους αρμονικές συναρτήσεις. Αυτό ισχύει σύμφωνα με τις σχέσεις (3.3.9) και (3.3.12) αντίστοιχα πάλι του Κεφαλαίου Δ3. Τις επαναλαμβάνουμε κι εδώ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad (7.2.3)$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει ν' αποδείξουμε σ' αυτήν την παράγραφο είναι το σημαντικό θεώρημα:

■ **ΘΕΩΡΗΜΑ (Διατήρηση της αρμονικότητας αρμονικής συναρτήσεως μετά από σύμμορφη απεικόνιση):** Θεωρούμε αρμονική συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  σε μια ανοικτή περιοχή  $D$  του επιπέδου  $Oxy$  και αναλυτική συνάρτηση  $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  με  $f'(z) \neq 0$  στην ίδια περιοχή  $D$ , οπότε η απεικόνιση  $w = f(z)$  είναι αμφιμονοσήμαντη. Υπό τις συνθήκες αυτές η μετασχηματισμένη συνάρτηση  $\Phi^*(u, v) := \Phi(x(u, v), y(u, v))$  είναι κι αυτή αρμονική συνάρτηση στη μετασχηματισμένη περιοχή  $D^*$ : η σύμμορφη απεικόνιση  $w = f(z)$  διατηρεί την αρμονικότητα της συναρτήσεως  $\Phi(x, y)$ .

**Απόδειξη:** Η απόδειξη μπορεί να γίνει με δύο εντελώς διαφορετικούς τρόπους. Ο πρώτος είναι ο τεχνικά εύκολος τρόπος της χρήσεως της αναλυτικότητας της συνθέσεως δύο αναλυτικών συναρτήσεων σε συνδυασμό με την αρμονικότητα του πραγματικού μέρους και του φανταστικού μέρους μιας αναλυτικής συναρτήσεως. Αυτός όμως δεν είναι πολύ εύκολα κατανοητός. Ο δεύτερος είναι ο τεχνικά δύσκολος, επειδή χρειάζεται επίπονες μερικές παραγωγίσεις με χρήση του κανόνα της αλυσίδας (ή κανόνα της αλληλουχίας των παραγώγων). Εντούτοις δεν παρουσιάζει καμία απολύτως δυσκολία στην κατανόησή του. Γι' αυτό και τον προτιμήσαμε στην παρούσα απόδειξη.

Γνωρίζουμε ήδη (είναι υπόθεση στο θεώρημα) ότι η συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  είναι αρμονική. Δηλαδή

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{με} \quad \Phi = \Phi(x, y). \quad (7.2.4)$$

Άρα πρέπει να υπολογίσουμε αυτές τις μερικές παραγώγους με τις αλλαγές μεταβλητών  $x = x(u, v)$  και  $y = y(u, v)$ . Έτσι θα φθάσουμε στη μετασχηματισμένη συνάρτηση  $\Phi^*(u, v) := \Phi(x(u, v), y(u, v))$ .

Αρχίζουμε: με χρήση του κανόνα της αλυσίδας στις παραγώγους διαπιστώνουμε αμέσως ότι

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{αφού} \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \quad \text{και} \quad \Phi^*(u, v) := \Phi(x(u, v), y(u, v)), \quad (7.2.5)$$

όπως ήδη αναφέρθηκε στο θεώρημα. Και τώρα μια ακόμη μερική παραγωγήιση ξανά ως προς  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] \\ &= \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + \left[ \left( \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right], \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Εδώ υποθέσαμε τις δύο μικτές παραγώγους της  $\Phi^*(u, v)$  ως προς  $u$  και  $v$  συνεχείς, άρα και ίσες:  $\partial^2 \Phi^*/(\partial v \partial u) = \partial^2 \Phi^*/(\partial u \partial v)$ . Με εντελώς ανάλογες παραγωγίσεις προκύπτει ο αντίστοιχος τύπος

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial u^2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial v^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi^*}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \quad (7.2.7)$$

Προσθέτουμε αυτούς τους δύο τύπους (7.2.6) και (7.2.7) και με τις σχέσεις (7.2.2) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \left( \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial v^2} \right) \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &\quad + 2 \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Phi^*}{\partial u} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \Phi^*}{\partial v} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Στο σημείο αυτό δεν ξεχνάμε όμως ότι οι συναρτήσεις  $u = u(x, y)$  και  $v = v(x, y)$  είναι αρμονικές, σχέσεις (7.2.3), και επίσης ότι ισχύουν οι δύο συνθήκες των Cauchy-Riemann (7.2.2), οπότε

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \left( -\frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (7.2.9)$$

Με τον τρόπο αυτό διαπιστώνουμε ότι τελικά ισχύει ο ιδιαίτερα σημαντικός και χρήσιμος τύπος

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial v^2} \right) = |f'(z)|^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial v^2} \right), \quad (7.2.10)$$

επειδή ισχύει και η δεξιά σχέση (7.2.1): αυτή για την παράγωγο  $f'(z)$  με  $f'(z) = (\partial u/\partial x) + i(\partial v/\partial x)$ .

Επομένως, εάν  $|f'(z)| \neq 0$ , όπως ήδη έχουμε υποθέσει στην εκφώνηση του θεωρήματος, και η συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  είναι αρμονική, το αριστερό μέλος μηδενίζεται. Άρα και η συνάρτηση  $\Phi^*(u, v)$  στο δεξιό μέλος είναι αρμονική. (Φυσικά ισχύει και το αντίστροφο!) Κατά συνέπεια με τη χρήση συμμόρφου απεικονίσεως  $f(z)$  με την  $f(z)$  προφανώς μια αναλυτική συνάρτηση και με  $|f'(z)| \neq 0$  η αρμονικότητα μιας συναρτήσεως  $\Phi(x, y)$  στην αρχική περιοχή  $D$  (στο επίπεδο  $Oxy$ ) συνεχίζει να ισχύει και στη μετασχηματισμένη περιοχή  $D^*$  (στο επίπεδο  $Kuv$ ). Και είναι πολύ χρήσιμο αυτό!  $\square$

### Δ7.2.2. Διατήρηση δύο συνοριακών συνθηκών Dirichlet και Neumann

Με τη σύμμορφη απεικόνιση  $w = f(z)$  με  $f'(z) \neq 0$  μια συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  στο επίπεδο  $Oxy$  ( $z = x + iy$ ) μετασχηματίζεται σε νέα συνάρτηση  $\Phi^*(u, v)$  στο νέο επίπεδο  $Kuv$  ( $w = u + iv$ ). Δηλαδή

$$\Phi(x, y) = \Phi(x(u, v), y(u, v)) \equiv \Phi^*(u, v) \quad \text{ή} \quad \Phi^*(u, v) = \Phi^*(u(x, y), v(x, y)) \equiv \Phi(x, y). \quad (7.2.11)$$

Άρα, εάν σε τμήμα  $\hat{C}$  του συνόρου  $C$  περιοχής  $D$  του επιπέδου  $Oxy$  η συνάρτηση  $\Phi(x, y)$  παίρνει σταθερή τιμή  $c$ ,  $\Phi(x, y) = c$ , τότε η μετασχηματισμένη συνάρτηση  $\Phi^*(u, v)$  θα παίρνει ακριβώς την ίδια τιμή  $c$ ,  $\Phi^*(u, v) = c$ , στο αντίστοιχο μετασχηματισμένο τμήμα  $\hat{\Gamma}$  του συνόρου  $\Gamma$  της αντίστοιχης περιοχής  $D^*$  του επιπέδου  $Kuv$ . Αυτό είναι προφανές από τις σχέσεις (7.2.11). Το ίδιο ισχύει και για ολόκληρα τα σύνορα  $C$  και  $\Gamma$ . Επιπλέον αναφέρουμε χωρίς απόδειξη ότι εάν η παράγωγος κατά την κάθετο στο σύνορο  $C$  της περιοχής  $D$  είναι μηδέν (μόνο μηδέν, όχι άλλη σταθερά!),  $d\Phi/dn_C = 0$ , τότε το ίδιο θα ισχύει και στο αντίστοιχο σύνορο  $\Gamma$  της περιοχής  $D^*$ , δηλαδή και εκεί  $d\Phi^*/dn_\Gamma = 0$ .

**Δ7.3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΥΜΜΟΡΦΗΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΣ ΣΤΗ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ**

Είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα η σύμμορφη απεικόνιση στη Ρευστομηχανική και συγκεκριμένα στη μόνιμη (σταθερή), διδιάστατη (επίπεδη) και αστρόβιλη ροή ιδεατού (ομογενούς, ασυμπίεστου και μη συνεκτικού, δηλαδή χωρίς ιξώδες) ρευστού. Εκεί χρησιμοποιείται το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y) \quad \text{με } z = x + iy \quad \text{και} \quad \Omega^*(w) = \Phi^*(u, v) + i\Psi^*(u, v) \quad \text{με } w = u + iv \quad (7.3.1)$$

μετά μια αμφιμονοσήμαντη σύμμορφη απεικόνιση  $f(z)$  με  $f'(z) \neq 0$ , δηλαδή με

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad \text{Αντιστρέφοντας, } z = g(w) = x(u, v) + iy(u, v) \quad (7.3.2)$$

με  $g(w) = f^{-1}(w)$  την αντίστροφη συνάρτηση της  $f(z)$ . Αυτή η αντίστροφη συνάρτηση μας φέρνει πίσω από το μιγαδικό επίπεδο  $Kuv$  (με  $w = u + iv$ ) στο αρχικό μιγαδικό επίπεδο  $Oxy$  (με  $z = x + iy$ ).

Σημειώνουμε βέβαια ότι τόσο το δυναμικό ταχύτητας  $\Phi(x, y)$  όσο και η συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση)  $\Psi(x, y)$  στο πιο πάνω μιγαδικό δυναμικό ροής  $\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$  είναι αρμονικές συναρτήσεις. Όπως μάλιστα αποδείξαμε στην προηγούμενη Ενότητα Δ7.2, οι μετασχηματισμένες συναρτήσεις  $\Phi^*(u, v)$  και  $\Psi^*(u, v)$  (στο νέο επίπεδο  $Kuv$ ) είναι και αυτές αρμονικές συναρτήσεις.

Επομένως, για να λύσουμε ένα πρόβλημα μόνιμης, διδιάστατης και αστρόβιλης ροής ιδεατού ρευστού σε μια περιοχή  $D$  του επιπέδου  $Oxy$  (με  $z = x + iy$ ), μπορούμε να το μετασχηματίσουμε με κατάλληλη σύμμορφη απεικόνιση  $w = f(z) = u + iv$  σε πολύ απλούστερη περιοχή  $D^*$ . Συνήθως αυτή είναι το ημιεπίπεδο  $Kuv$  με  $v \geq 0$  (Σχήμα Δ7.2). Μετά πρέπει να λύσουμε εκεί το αντίστοιχο πρόβλημα ροής κι έπειτα να επιστρέψουμε στο αρχικό επίπεδο  $Oxy$ . Εκεί είναι η πραγματική ροή!

Ας δούμε τώρα τι γίνεται στην απλή ροή μετά τη σύμμορφη απεικόνισή της στο ημιεπίπεδο  $Kuv$  με  $v \geq 0$  και  $w = u + iv$ . Εκεί θεωρούμε τη ροή ομοιόμορφη και παράλληλη στον οριζόντιο άξονα  $Ku$  με σταθερή ταχύτητα  $V_0$  σε κάθε σημείο  $w$ . Το σχετικό μιγαδικό δυναμικό ροής μας είναι γνωστό από τη σχέση (3.6.11) της Παραγράφου Δ3.6.2 του Κεφαλαίου Δ3. Με τον εδώ συμβολισμό έχουμε

$$\Omega^*(w) = \Phi^*(u, v) + i\Psi^*(u, v) = V_0 w, \quad \text{οπότε} \quad \Omega^{*'}(w) = V_x - iV_y = V_0. \quad (7.3.3)$$

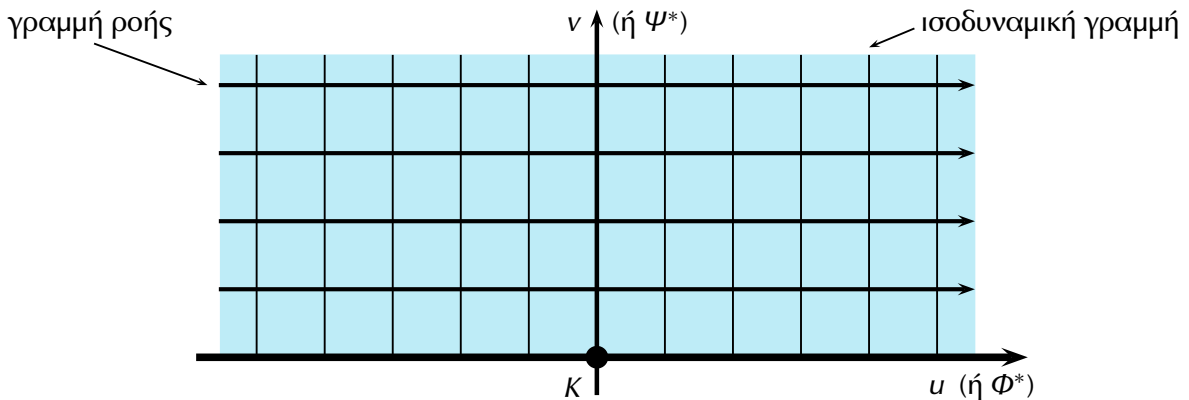
Άρα

$$\Phi^*(u, v) = V_0 u \quad \text{και} \quad \Psi^*(u, v) = V_0 v. \quad (7.3.4)$$

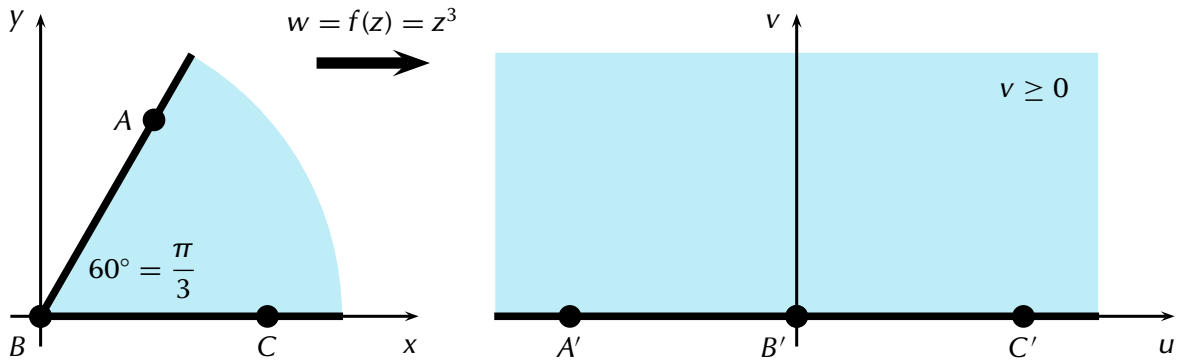
Και μάλιστα για  $V_0 = 1$

$$\Omega^*(w) = \Phi^*(u, v) + i\Psi^*(u, v) = w, \quad \text{οπότε} \quad \Phi^*(u, v) = u \quad \text{και} \quad \Psi^*(u, v) = v. \quad (7.3.5)$$

Τόσο απλά, πάρα πολύ απλά είναι τα πράγματα στο ημιεπίπεδο  $Kuv$  με  $v \geq 0$ . Οι ισοδυναμικές γραμμές είναι παράλληλες με τον άξονα  $Kv$ : είναι οι κατακόρυφες γραμμές  $u = C_\Phi$  (με το  $C_\Phi$  μια σταθερά). Επίσης οι γραμμές ροής (ή ροϊκές γραμμές) είναι παράλληλες με τον άξονα  $Ku$ : είναι οι οριζόντιες γραμμές  $v = C_\Psi$  (με το  $C_\Psi$  μια σταθερά). Τέλος το μιγαδικό δυναμικό ροής για  $V_0 = 1$  (δηλαδή με προσέγγιση σταθεράς  $V_0$ ) είναι  $\Omega^*(w) = w$ , κάτι το απίστευτα απλό και όμως αληθινό.



**Σχήμα Δ7.2:** Ομοιόμορφη ροή στο ημιεπίπεδο  $v \geq 0$  του επιπέδου  $Kuv$  (με  $w = u + iv$ ).



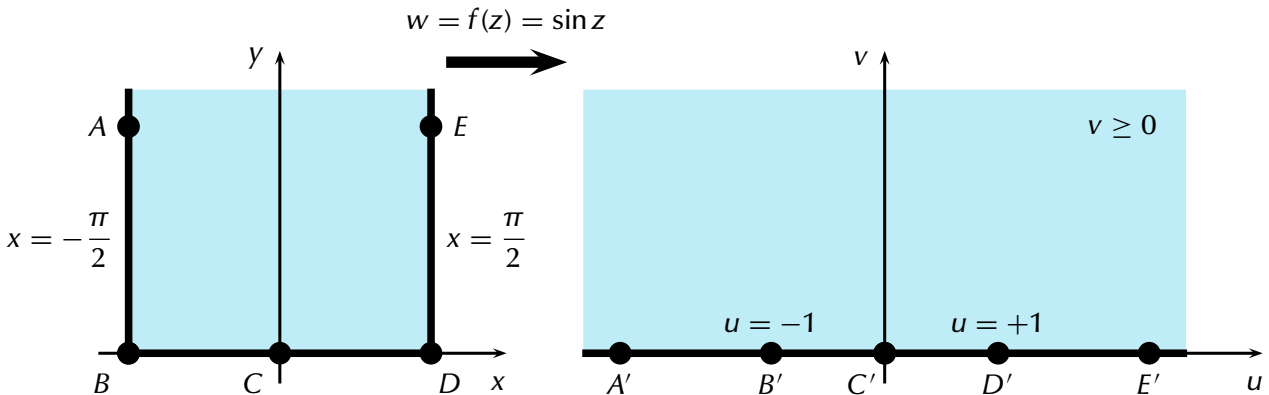
**Σχήμα Δ7.3:** Σύμμορφη απεικόνιση  $w = f(z) = z^3$  της γωνίας  $0 \leq \theta \leq \pi/3$  στο ημιεπίπεδο  $v \geq 0$ .

Στο πιο πάνω Σχήμα Δ7.3 δείχνουμε τη σύμμορφη απεικόνιση της γωνίας  $0 \leq \theta \leq \pi/3$  (στο αρχικό επίπεδο  $Bxy$ ) στο ημιεπίπεδο  $v \geq 0$  (στο νέο επίπεδο  $B'uv$ ). Αυτή γίνεται με τη συνάρτηση

$$f(z) = z^3 = (x + iy)^3, \text{ οπότε } u = u(x, y) = x^3 - 3xy^2 \text{ και } v = v(x, y) = 3x^2y - y^3. \quad (7.3.6)$$

Με βάση αυτές τις σχέσεις στο ίδιο Σχήμα Δ7.3 δείχνουμε και τις απεικονίσεις τριών σημείων  $A, B$  και  $C$  στο αρχικό επίπεδο  $Bxy$  στα τρία νέα σημεία  $A', B'$  και  $C'$  αντίστοιχα στο νέο επίπεδο  $B'uv$ . Είναι περίπου σαν η πλευρά  $\theta = \pi/3$  της γωνίας να στράφηκε αριστερά και να «έπεσε» πάνω στον αριστερό ημιάξονα  $u < 0$  του νέου επιπέδου  $B'uv$ . Έτσι η γωνία μετασχηματίστηκε σε ημιεπίπεδο.

Προχωράμε και σε ένα δεύτερο (και λίγο πιο δύσκολο) παράδειγμα σύμμορφης απεικονίσεως:



**Σχήμα Δ7.4:** Σύμμορφη απεικόνιση  $w = f(z) = \sin z$  της ημιλωρίδας  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$  και  $y \geq 0$  στο ημιεπίπεδο  $v \geq 0$ .

Τώρα στο Σχήμα Δ7.4 δείχνουμε τη σύμμορφη απεικόνιση της ημιλωρίδας  $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$  (στο αρχικό επίπεδο  $Cxy$ ) στο ημιεπίπεδο  $v \geq 0$  (στο νέο επίπεδο  $C'uv$ ). Αυτή γίνεται με τη συνάρτηση

$$f(z) = \sin z = \sin(x + iy), \text{ οπότε } u = u(x, y) = \sin x \cosh y \text{ και } v = v(x, y) = \cos x \sinh y \quad (7.3.7)$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.4.3) της Παραγράφου Δ2.4.2 του Κεφαλαίου Δ2. Με βάση αυτές τις σχέσεις στο ίδιο Σχήμα Δ7.4 δείχνουμε και τις απεικονίσεις πέντε σημείων  $A, B, C, D$  και  $E$  στο αρχικό επίπεδο  $Cxy$  στα πέντε νέα σημεία  $A', B', C', D'$  και  $E'$  αντίστοιχα στο νέο επίπεδο  $C'uv$ . Πρακτικά είναι περίπου (όχι βέβαια ακριβώς!) σαν η αριστερή πλευρά  $x = -\pi/2$  της ημιλωρίδας να στράφηκε αριστερά κατά  $\pi/2$  και να «έπεσε» πάνω στον άξονα  $u$  του νέου επιπέδου  $C'uv$  από  $u = -\infty$  μέχρι  $u = -1$ . Ανάλογα και για τη δεξιά πλευρά  $x = \pi/2$  της ημιλωρίδας μόνο που αυτή είναι σαν να στράφηκε δεξιά κατά  $\pi/2$ . Έτσι η ημιλωρίδα μετασχηματίστηκε σε ημιεπίπεδο.

Υπάρχουν και εκατοντάδες ακόμη παραδείγματα σύμμορφων απεικονίσεων πολύ χρήσιμων στη Ρευστομηχανική, στην Ελαστικότητα, κλπ. Στη Ρευστομηχανική το σημαντικό είναι να θυμόμαστε από τη σχέση (7.3.3) ότι

$$\Omega^*(w) = V_0 w, \text{ οπότε } \Omega(z) = V_0 f(z), \text{ αφού } w = f(z). \quad (7.3.8)$$

**ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

Τα παρακάτω βιβλία (στα Ελληνικά) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για παραπέρα μελέτη από τον ενδιαφερόμενο φοιτητή και την ενδιαφερόμενη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό ως προς τις Μιγαδικές Συναρτήσεις:

1. Bak, J., Newman, D. J. (2004), *Μιγαδική Ανάλυση*. Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα. Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτοτύπου: Bak, J., Newman, D. J. (1997), *Complex Analysis*. Springer-Verlag, New York.
2. Churchill, R. V., Brown, J. W. (2005), *Μιγαδικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές*, 2η Ελληνική Έκδοση. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο. Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτοτύπου: Churchill, R. V., Brown, J. W. (1990), *Complex Variables and Applications*, 5th Edition. McGraw-Hill, New York.
3. Δανίκας, Ν. (1996), *Ένα Εισαγωγικό Μάθημα στις Μιγαδικές Συναρτήσεις*, 2η Έκδοση. University Studio Press, Θεσσαλονίκη.
4. Κραββαρίτης, Δ. Χ. (2006), *Εφαρμοσμένη Μιγαδική Ανάλυση*. Συμεών, Αθήνα.
5. Κρόκου, Ι. Π. (2001), *Μιγαδικές Συναρτήσεις*, 3η Έκδοση. Εκδόσεις Αρνός, Αθήνα.
6. Κυδωνιεύς, Α. Δ. (1984), *Μιγαδικές Συναρτήσεις*, 2η Έκδοση. University Studio Press, Θεσσαλονίκη.
7. Marsden, J. E., Hoffman, M. J. (1994), *Βασική Μιγαδική Ανάλυση*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα. Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτοτύπου: Marsden, J. E., Hoffman, M. J. (1990), *Basic Complex Analysis*. Freeman, New York.
8. Νεγρεπόντη, Σ. Α. (1993), *Θεωρία Μιγαδικών Συναρτήσεων μιας Μεταβλητής*. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα.
9. Οικονομίδη, Ν. Π., Κωνσταντιλάκη-Σαββοπούλου, Χ. (1984), *Στοιχεία Μιγαδικών Συναρτήσεων*, Τόμοι Ι και ΙΙ. Θεσσαλονίκη.
10. Παντελίδη, Γ., Κραββαρίτη, Δ., Νασόπουλου, Β. (1993), *Μιγαδικές Συναρτήσεις*. Εκδόσεις Ζήτη, Αθήνα, Θεσσαλονίκη.
11. Sokolnikoff, I. S., Redheffer, R. M. (2001), *Μαθηματικά για Φυσικούς και Μηχανικούς*. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π. Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτοτύπου: Sokolnikoff, I. S., Redheffer, R. M. (1966), *Mathematics of Physics and Modern Engineering*, 2η Έκδοση. McGraw-Hill, New York (Κεφάλαιο 8: Μιγαδικές Μεταβλητές).
12. Spiegel, M. R. (1980), *Μιγαδικές Μεταβλητές*. ΕΣΠΙ, Αθήνα. Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτοτύπου: Spiegel, M. R. (1974), *Complex Variables with an Introduction to Conformal Mapping and Its Applications*. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill, New York.
13. Χαϊνή, Ι. Θ. (2005), *Επίλεκτα Θέματα Μιγαδικής Ανάλυσης*. Fountas, Αθήνα.
14. Χαϊνή, Ι. Θ. (2005), *Σύμμορφη Απεικόνιση*. Fountas, Αθήνα.
15. Χαϊνή, Ι. Θ. (2005), *Εφαρμογές της Μιγαδικής Ανάλυσης στη Θεωρία Πεδίων*. Fountas, Αθήνα.
16. Χατζηκωνσταντίνου, Π. Μ. (2008), *Μαθηματικές Μέθοδοι για Μηχανικούς και Επιστήμονες: Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις, Σειρές Fourier και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών, Μιγαδικές Συναρτήσεις*, Μέρος 3: Μιγαδικές Συναρτήσεις. Εκδόσεις Συμμετρία, Πάτρα, Αθήνα (υπό εκτύπωση).

Τα πιο πάνω βιβλία είναι όλα στην Ελληνική γλώσσα. Υπάρχουν επίσης και δεκάδες ξενόγλωσσα βιβλία για τις Μιγαδικές Συναρτήσεις. Αναφέρθηκαν ήδη τέσσερα από αυτά που έχουν μεταφραστεί από τα Αγγλικά στα Ελληνικά. Τέσσερα ακόμη από τα βιβλία αυτά στα Αγγλικά είναι τα ακόλουθα:

1. Ablowitz, M. J., Fokas, A. S. (2003), *Complex Variables: Introduction and Applications*, 2nd Edition. Cambridge University Press, Cambridge.
2. Henrici, P. (1988, 1991, 1993), *Applied and Computational Complex Analysis*, Vol. 1 (1988), Vol. 2 (1991) and Vol. 3 (1993). Wiley, New York.
3. Mathews, J. H., Howell, R. W. (2006), *Complex Analysis for Mathematics and Engineering*, 5th Edition. Jones and Bartlett, Sudbury, Massachusetts.
4. Shaw, W. T. (2006), *Complex Analysis with Mathematica*. Cambridge University Press, Cambridge.

Μεγάλο ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό παρουσιάζουν και τα βιβλία που αφορούν στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς. Υπάρχουν μερικά τέτοια βιβλία στην Αγγλική γλώσσα και όλα περιλαμβάνουν σε σημαντικό μέρος (κατά τη γνώμη του γράφοντα σε πιο σημαντικό από ό,τι ταιριάζει) την ύλη που αφορά στις Μιγαδικές Συναρτήσεις μερικές φορές και με εφαρμογές από τη Ρευστομηχανική. Τέτοιο βιβλίο είναι το βιβλίο των Sokolnikoff και Redheffer, που ήδη αναφέραμε πιο πάνω. Τέσσερα ακόμη από τα βιβλία αυτά (μάλιστα με τον ίδιο ακριβώς τίτλο!) είναι τα εξής:

1. Greenberg, M. D. (1998), *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd Edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey (Part V: *Complex Variable Theory*: Chapters 21–24).
2. Jeffrey, A. (2002), *Advanced Engineering Mathematics*. Harcourt/Academic Press, Burlington, Massachusetts (Part Six: *Complex Analysis*: Chapters 13–17).
3. Kreyszig, E. (2005), *Advanced Engineering Mathematics*, 9th Edition. Wiley, New York (Part D: *Complex Analysis*: Chapters 13–18).
4. Wylie, C. R., Barrett, L. C. (1985), *Advanced Engineering Mathematics*, 5th Edition. McGraw-Hill, New York (Chapters 15–18).

Τέλος ο Πολιτικός Μηχανικός μπορεί να βρει εφαρμογές των μιγαδικών συναρτήσεων σε βιβλία Ρευστομηχανικής (για την επίλυση διδιάστατων προβλημάτων μόνιμης αστρόβιλης ροής για ιδεατού ρευστού με χρήση του μιγαδικού δυναμικού ροής) και Ελαστικότητας (για τον προσδιορισμό των τάσεων σε επίπεδο ελαστικό μέσο με χρήση των μιγαδικών δυναμικών των Kolosov–Muskhelishvili). Παραδείγματος χάρη, μπορεί να συμβουλευθεί τα ακόλουθα βιβλία:

1. Milne–Thomson, L. M. (1996), *Theoretical Hydrodynamics*, 5th Edition. Dover, New York (Chapters V–XV για εφαρμογή των μιγαδικών συναρτήσεων στη Ρευστομηχανική ιδεατού ρευστού).
2. Muskhelishvili, N. I. (1977), *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, 1st Springer Edition. Springer, Berlin. (Μετάφραση του Ρωσικού πρωτοτύπου. Πρώτη Αγγλική Έκδοση: Noordhoff, Groningen, The Netherlands, 1953. Όλο το βιβλίο αναφέρεται στην εφαρμογή των μιγαδικών συναρτήσεων στο επίπεδο ελαστικό πρόβλημα για ισότροπο μέσον.)
3. Sadd, M. H. (2005), *Elasticity: Theory, Applications and Numerics*. Elsevier, Amsterdam (Chapter 10: *Complex Variable Methods* για το ελαστικό πρόβλημα για ισότροπο μέσον, Section 11.5 για ανισότροπο μέσον, Section 12.8 για θερμοελαστικό μέσον. Εφαρμογές στη Θραυστομηχανική: Sections 10.8 και 10.9 για ισότροπο μέσον και Section 11.6 για ανισότροπο μέσον).
4. Timoshenko, S. P., Goodier, J. N. (1970), *Theory of Elasticity*, 3rd Edition. McGraw-Hill, New York (Chapter 6: *Two-dimensional Problems in Curvilinear Coordinates* για εφαρμογή των μιγαδικών συναρτήσεων στο επίπεδο ελαστικό πρόβλημα για ισότροπο μέσον).
5. Τσαγγάρης, Σ. (1995), *Μηχανική των Ρευστών*. Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα (Κεφάλαιο 11: *Αστρόβιλη Ροή Ασυμπύεστου Ρευστού*).



Σημειώνεται ότι ειδικά για τη Ρευστομηχανική ιδεατού ρευστού η εφαρμογή των μιγαδικών συναρτήσεων (με το μιγαδικό δυναμικό ροής) αναφέρεται και σε πολλά γενικά βιβλία για τις μιγαδικές συναρτήσεις σαν εφαρμογή τους, δηλαδή και σε πολλά από τα γενικά βιβλία που αναφέρθηκαν.

Τέλος οι μιγαδικές συναρτήσεις έχουν μικρή εφαρμογή και στις Πλάκες. Ο ενδιαφερόμενος και η ενδιαφερόμενη Πολιτικός Μηχανικός μπορεί να βρει σχετικές αναφορές στο κλασικό σύγγραμμα:

1. Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S. (1959), *Theory of Plates and Shells*, 2nd Edition. McGraw-Hill, New York (Section 79 για ισότροπες και Section 89 για ανισότροπες πλάκες).

Βέβαια πολύ καλύτερος και πιο χρήσιμος για τον Πολιτικό Μηχανικό είναι ένας κατάλληλος συνδυασμός των γνώσεων που προσφέρουν στις Μιγαδικές Συναρτήσεις: (α) τα κατά βάση μαθηματικά βιβλία, (β) τα βιβλία Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Μηχανικούς ή ακόμη και για φοιτητές Θετικών Επιστημών και (γ) τα βιβλία που αφορούν στην ίδια την επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού: για τις μιγαδικές συναρτήσεις κυρίως στη Ρευστομηχανική και στην Ελαστικότητα.













