1ο ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

<u>ΑΣΚΗΣΗ 1:</u> Έστω ότι η ταχύτητα u ενός αντικειμένου, συνδέεται με την επιτάχυνσή του α και την καλυπτόμενη απόσταση x μέσω της σχέσης

$$u^4 = 5\alpha^2 x^m . \tag{1.1}$$

Να βρεθεί η τιμή του εκθέτη m, έτσι ώστε η (1.1) να είναι διαστατικά συνεπής.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 2:</u> Η εξίσωση Euler-Bernoulli

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right) = q , \tag{2.1}$$

περιγράφει τη σχέση μεταξύ του βέλους κάμψης w(x) μιας ράβδου και του κατανεμημένου φορτίου q που εφαρμόζεται σ' αυτή. Να βρεθούν οι διαστάσεις του συντελεστή δυσκαμψίας EI, αν $[x] = L$, προκειμένου η (2.1) να είναι διαστατικά συνεπής.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3:</u> Θεωρούμε τη χρονοανεξάρτητη, ασυμπίεστη ροή γύρω από μια επίπεδη πλάκα μήκους ℓ που περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 , \tag{3.1}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{3.2}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \tag{3.3}$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$u = v = 0 \text{, όταν } y = 0 \qquad (3.5)$$

$$u \to U_\infty ,\ v \to 0 \text{ όταν } x \to \infty , \qquad (3.5)$$

όπου $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ οι συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού κατά την οριζόντια x και κατακόρυφη y διεύθυνση, αντίστοιχα, P η πίεση, ρ η πυκνότητα, μ το ιξώδες του ρευστού και U_∞ η ταχύτητα ελευθέρου ρεύματος.

(α) Να δειχθεί ότι η ποσότητα ρU_∞^2 έχει διαστάσεις πίεσης.

(β) Να αδιαστατοποιηθούν οι εξισώσεις (3.1)-(3.5), εισάγοντας τις αδιάστατες ποσότητες

$$u^* = \frac{u}{U_\infty},\ v^* = \frac{v}{U_\infty},\ P^* = \frac{P}{\rho U_\infty^2},\ x^* = \frac{x}{L},\ y^* = \frac{y}{L} .$$

(γ) Στο νέο αδιάστατο πρόβλημα θα πρέπει να υπάρχει μόνο μία παράμετρος, ο αριθμός Reynolds $Re = \frac{\rho U_\infty L}{\mu}$. Να δειχθεί ότι αυτή η παράμετρος είναι πράγματι αδιάστατη.

(δ) Μπορείτε να φανταστείτε πως επιλέξαμε την ποσότητα ρU_∞^2 ως χαρακτηριστική πίεση;

ΑΣΚΗΣΗ 4: Θεωρούμε το χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα ταλάντωσης μιας κυκλικής πλάκας ακτίνας α, υπό την επήρεια ομοιόμορφου ακτινικού φορτίου q με διαστάσεις MT^{-2} , που περιγράφεται από την εξίσωση

$$D\nabla^4 w - q\nabla^2 w - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\,, \qquad (4.1)$$

όπου $w = w(r, \theta, t)$ το βέλος κάμψης της πλάκας, ρ η επιφανειακή πυκνότητα της πλάκας με διαστάσεις ML^{-2} και D ο συντελεστής δυσκαμψίας της πλάκας με διαστάσεις ML^2T^{-2}.

(α) Να αδιαστατοποιηθεί η (4.1), χρησιμοποιώντας τις αδιάστατες ποσότητες

$$\widehat{w} = \frac{w}{\alpha}\,,\ \hat{r} = \frac{r}{\alpha}\,,\ \hat{t} = \frac{t}{T}\,,$$

όπου T ένας χαρακτηριστικός χρόνος που επιλέγεται έτσι ώστε ο συντελεστής του $\dfrac{\partial^2 \widehat{w}}{\partial \hat{t}^2}$ στη νέα εξίσωση να είναι 1.

(β) Ποια είναι η ακριβής σχέση εκ της οποίας προσδιορίζεται ο T;

(γ) Ποια είναι η μοναδική παράμετρος που υπεισέρχεται πλέον στη νέα εξίσωση; Είναι όντως αδιάστατη;

(<u>ΥΠΟΔΕΙΞΗ</u>: Δεδομένου ότι $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ δείξτε ότι $\nabla^2 = \dfrac{1}{\alpha^2}\widehat{\nabla}^2$)

ΑΣΚΗΣΗ 5: Υπό κάποιες συνθήκες, η ροή Q ενός ρευστού μέσω μιας μικρής τριγωνικής πορώδους διατομής πλάγιου μήκους b και μήκους βάσης ℓ, εξαρτάται εκτός από το b και από το ιξώδες μ του ρευστού και από τη μεταβολή της πίεσης ανά μονάδα μήκους $\Delta P/\ell$. Με τη βοήθεια του θεωρήματος π του Buckingham, να βρεθεί μια σχέση που να συνδέει τη ροή Q, με τις ποσότητες $\Delta P/\ell$, μ και b. Πώς μεταβάλλεται το Q αν διπλασιασθεί το b; Δίνεται ότι η ροή Q έχει διαστάσεις όγκου/χρόνο και ότι $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6: Ο αδιάστατος αριθμός Stokes, St, που συναντάται σε προβλήματα σωματιδιακής δυναμικής ρευστών, εξαρτάται από την επιτάχυνση της βαρύτητας g, το ιξώδες μ, την πυκνότητα ρ, την ταχύτητα των σωματιδίων U και τη διάμετρο των σωματιδίων D.

(α) Με τη βοήθεια του θεωρήματος π του Buckingham, να βρεθεί μια σχέση για τον αριθμό Stokes.

(β) Τι μορφή λαμβάνει αυτή η σχέση, αν γνωρίζουμε ότι ο αριθμός Stokes είναι ανάλογος του ιξώδους μ, αντιστρόφως ανάλογος της επιτάχυνσης της βαρύτητας g και το γινόμενο των αντίστοιχων συντελεστών αναλογίας είναι 1;