

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΞΑΣΚΗΣΗΣ Νο 3

ΑΣΚΗΣΗ 1 (Ορίζουσα Wronski): Να υπολογισθεί η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων:

(i) $y_1(x) = x, y_2(x) = 4x - 1$ Απ. 1

(ii) $y_1(x) = 3x^2, y_2(x) = x, y_3(x) = 2x - 2x^2$ Απ. 0

(iii) $y_1(x) = \cos(2x), y_2(x) = \sin x, y_3(x) = 1$ Απ. $8x$

(iv) $y_1(x) = x, y_2(x) = e^x$ Απ. $e^x(x-1)$

(v) $y_1(x) = e^x, y_2(x) = e^{-2x}, y_3(x) = e^{-4x}$ Απ. $-30e^{-5x}$

ΑΣΚΗΣΗ 2 (Γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις ομογενών διαφορικών εξισώσεων): (α) Να δειχθεί ότι το εκάστοτε σύνολο συναρτήσεων S , αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της αντιστοίχης διαφορικής εξίσωσης

(i) $S = \{e^{-6x}, e^{-4x}\}, y''(x) + 10y'(x) + 24y(x) = 0$

(ii) $S = \{\cos(2x), \sin(2x)\}, y''(x) + 4y(x) = 0$

(iii) $S = \{e^{-x}, e^{3x}, xe^{3x}\}, y'''(x) - 5y''(x) + 3y'(x) + 9y(x) = 0$

(iv) $S = \{e^{-x} \cos(2x), e^{-x} \sin(2x), e^{2x} \cos(5x), e^{2x} \sin(5x)\},$
 $y^{(4)}(x) - 2y'''(x) + 26y''(x) + 38y'(x) + 145y(x) = 0$

(β) Να βρεθούν οι τιμές των α, β και γ , έτσι ώστε οι συναρτήσεις $\{e^{-x}, e^x, e^{-2x}\}$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$y'''(x) + \alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y(x) = 0$$

(Απ. $\alpha = 2, \beta = -1, \gamma = -2$)

ΑΣΚΗΣΗ 3 (Ομογενείς, γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, με σταθερούς συντελεστές): Με χρήση της μεθόδου εκθετικής αντικατάστασης, να βρεθεί η γενική λύση των κάτωθι διαφορικών εξισώσεων:

(i) $2y''(x) - 5y'(x) + 3y(x) = 0$ Απ. $y(x) = c_1 e^{3x/2} + c_2 e^x$

(ii) $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = 0$ Απ. $y(x) = e^{-x} [c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)]$

(iii) $y''(x) - 8y'(x) + 16y(x) = 0$ Απ. $y(x) = e^{4x} (c_1 + c_2 x)$

(iv) $y'''(x) + y''(x) - 16y'(x) + 20y(x) = 0$ Απ. $y(x) = c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}$

(v) $y^{(4)}(x) - 9y''(x) = 0$ Απ. $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 + c_3 x + c_4 e^{3x}$

(vi) $y^{(4)}(x) - 16y(x) = 0$ Απ. $y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} + c_3 \cos(2x) + c_4 \sin(2x)$

(vii) $y^{(4)}(x) + 32y''(x) + 256y(x) = 0$ Απ. $y(x) = (c_1 + c_2 x) \cos(4x) + (c_3 + c_4 x) \sin(4x)$

(viii) $y^{(5)}(x) + 25y'''(x) = 0$ Απ. $y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \sin(5x) + c_5 \cos(5x)$