

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ
για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

Τεύχος 2

ΣΥΝΤΟΜΟ ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΤΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Ο Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης γεννήθηκε στην Καλλιθέα Αττικής το 1950. Τελείωσε το Γυμνάσιο (1965) και το Λύκειο (1968) στον Πειραιά. Είναι διπλωματούχος Μηχανολόγος-Ηλεκτρολόγος Μηχανικός (1973) του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου (Ε.Μ.Π.) και Διδάκτωρ Μηχανικός (1976) πάλι του Ε.Μ.Π. Η διπλωματική εργασία του (1973) και η διδακτορική διατριβή του (1976) αναφέρονται στην Ελαστικότητα και στη Θραυστομηχανική.

Από το 1970 σαν σπουδαστής ήταν ανεπίσημος συνεργάτης του Εργαστηρίου Αντοχής Υλικών του Ε.Μ.Π. Το 1976 υπήρξε ερευνητής στο ίδιο εργαστήριο. Από το 1976 μέχρι το 1980 ήταν Επιμελητής στις Έδρες Μηχανικής Α και Β του Ε.Μ.Π. Από το 1980 μέχρι το 1982 ήταν Έκτακτος Καθηγητής και από το 1982 μέχρι σήμερα είναι Καθηγητής της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών. Από το 1982 σαν Καθηγητής εργάζεται στο Γενικό Τμήμα στον Τομέα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής.

Στο Ε.Μ.Π. συμμετέσχε στα εργαστήρια Πειραματικής Αντοχής Υλικών και έκανε φροντιστήρια μαθημάτων Μηχανικής. Επίσης δίδαξε ένα εξάμηνο το μάθημα Αντοχή Υλικών. Στην Πολυτεχνική Σχολή του Πανεπιστημίου Πατρών δίδαξε μαθήματα Μαθηματικών, Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Πιθανοθεωρίας-Στατιστικής σε διάφορα τμήματα. Κατά τα τελευταία έτη διδάσκει αποκλειστικά στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών τα μαθήματα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III και εκτελεί τα σχετικά εργαστήρια στο Υπολογιστικό Κέντρο του Τμήματος. Διδάσκει επίσης το μεταπτυχιακό μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά πάλι στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών.

Το ερευνητικό έργο του αναφέρεται στη Μηχανική, τη Θραυστομηχανική, τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, τη Μιγαδική Ανάλυση, τις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, την Αριθμητική Ανάλυση (Αριθμητική Ολοκλήρωση και επίλυση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων) και τους Συμβολικούς Υπολογισμούς στη Μηχανική. Είναι συγγραφέας και συσυγγραφέας πολλών επιστημονικών εργασιών που έχουν δημοσιευθεί στην Αγγλική γλώσσα σε πολλά διεθνή περιοδικά των πιο πάνω επιστημονικών περιοχών (και μία εργασία στη Θεωρία Προσεγγίσεως) σε διάφορες χώρες. Σαν μεγαλύτερη ερευνητική συμβολή του θεωρεί την αναγωγή προβλημάτων ρωγμών σε ιδιόμορφες και υπεριδιόμορφες ολοκληρωτικές εξισώσεις και την επίλυσή τους με χρήση της μεθόδου της αριθμητικής ολοκλήρωσεως.

Πέρα από τις επιστημονικές εργασίες του έχει κρίνει πολλές εργασίες άλλων συγγραφέων για διεθνή επιστημονικά περιοδικά της Μηχανικής, της Θραυστομηχανικής, των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και της Αριθμητικής Αναλύσεως. Υπήρξε κριτής για τα περιοδικά κριτικών *Applied Mechanics Reviews* και *Mathematical Reviews* και μέλος της Εκδοτικής Επιτροπής του περιοδικού *International Journal of Solids and Structures*.

Κατά τα τελευταία έτη καταβάλλει συστηματική προσπάθεια για την αναβάθμιση των μαθημάτων Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III που διδάσκει στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών: στην αίθουσα διδασκαλίας, στο εργαστήριο, μέσω συχνών εξετάσεων προόδου και εργαστηρίου και μέσω των διδακτικών αυτών βιβλίων Εφαρμοσμένων Μαθηματικών II και III που απευθύνονται αποκλειστικά σε Πολιτικούς Μηχανικούς και όχι γενικά σε Μηχανικούς. Στην προσπάθειά του αυτή έχει τύχει πολύτιμης βοήθειας και συμπαράστασεως κάθε μορφής από πολλούς συναδέλφους του καθώς και της ενεργής συμμετοχής των φοιτητών και φοιτητριών του Πολιτικών Μηχανικών και είναι ευγνώμων σε όλους και όλες γι' αυτά.

Τέλος στα Πανεπιστημιακά θέματα η θέση του ήταν και είναι υπέρ του Πανεπιστημίου στην κλασική του μορφή, όπως την έχει ζήσει και τη ζει και ο ίδιος επί πολλά χρόνια. Επομένως είναι εναντίον κάθε επιχειρηματικής ή οικονομικής διεισδύσεως τρίτων στον Πανεπιστημιακό χώρο. Είναι επίσης θερμός υποστηρικτής της ελεύθερης έρευνας στα Πανεπιστήμια με την έννοια ότι τα ερευνητικά αποτελέσματα πρέπει να είναι απόλυτα προσιτά σε κάθε μέρος του κόσμου χωρίς περιορισμούς μέσω της δημοσιεύσεώς τους είτε σε βιβλία είτε σε περιοδικά είτε στο διαδίκτυο. Τούτο έχει πράξει και ο ίδιος χωρίς καμία εξαίρεση.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ
για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

Τεύχος 2

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΝΟΤΕΒΟΥΚΣ ΙΙΙ
για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ

Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης

*Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής,
Γενικό Τμήμα Πολυτεχνικής Σχολής Πανεπιστημίου Πατρών*

Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης (συγγραφέας, Γενικό Τμήμα, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών)
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ, Τεύχος 2:
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΝΟΤΕΒΟΥΚΣ ΙΙΙ για ΠΟΛΙΤΙΚΟΥΣ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ
1η Έκδοση: Φεβρουάριος 2008

Copyright © 2008 GOTSIS Εκδόσεις

ISBN 978-960-98187-7-3 (Αυτό το τεύχος. Παράκληση για χρήση του ISBN για παραγγελίες.)

ISBN SET 978-960-98187-5-9 (Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς SET)

ΑΠΟΚΛΕΙΣΤΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ, ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟΝ ΕΚΔΟΤΗ

Βιβλιοπωλείο «Γνώση», Οδός Αράτου 41, 262.21 ΠΑΤΡΑ

Τηλέφωνο: (+30) 2610 226453, Fax: (+30) 2610 226690,

E-mail: gnosis@otenet.gr

- Όλα τα δικαιώματα διατηρούνται από τις **GOTSIS Εκδόσεις**. Η πνευματική ιδιοκτησία αποκτάται χωρίς καμία διατύπωση και χωρίς την ανάγκη ρήτρας απαγορευτικής των προσβολών της. Σημειώνεται η ισχύς του Νόμου 2121/1993, όπως έχει τροποποιηθεί και ισχύει, και της διεθνούς συμβάσεως της Βέρνης για την πνευματική ιδιοκτησία, η οποία έχει κυρωθεί με το Νόμο 100/1975.
- Απαγορεύεται απολύτως η αναδημοσίευση ή η αναπαραγωγή αυτού του βιβλίου (ολική ή μερική είτε στην παρούσα μορφή του είτε σε παραφρασμένη ή διασκευασμένη μορφή του) ή η διανομή του με οποιοδήποτε τρόπο (αντιγραφή, φωτοτυπία, εκτύπωση, μικροφίλμ, σάρωση ή/και αποθήκευση σε αρχείο ή αρχεία υπολογιστή, διαθεσιμότητα σε ιστοσελίδα ή σε βάσεις δεδομένων, διανομή μέσω του διαδικτύου, ηχογράφηση ή γενικά με οποιοδήποτε μηχανικό ή ηλεκτρονικό ή άλλο τρόπο είτε ήδη διαθέσιμο σήμερα είτε που θα υπάρξει στο μέλλον) χωρίς τη ρητή γραπτή άδεια των **GOTSIS Εκδόσεις**. Επίσης ανάλογα απαγορεύεται και η ολική ή μερική μετάφραση του παρόντος βιβλίου και γενικότερα η κάθε μορφής εκμετάλλευσή του στο σύνολό του ή σε μέρος του.
- Εντούτοις χορηγείται από τώρα η άδεια συνηθισμένου απλού δανεισμού για μελέτη του βιβλίου αυτού από αναγνώστες και αναγνώστριες Πανεπιστημιακών και μη βιβλιοθηκών.

ΕΚΤΥΠΩΣΗ-ΒΙΒΛΙΟΔΕΣΙΑ

«Ταχύτυπο», Ταυκεκτυπώσεις - Γραβάνης Ε.Π.Ε., Πάροδος Διοδώρου 160, Βελβίτσι, 264.43 ΠΑΤΡΑ
Τηλέφωνα: (+30) 2610 461780 έως (+30) 2610 461790, E-mail: info@tachytypo.gr

ΦΩΤΟΓΡΑΦΙΑ ΕΞΩΦΥΛΛΟΥ

Η κεντρική είσοδος και ένα πολύ μικρό τμήμα του κτιρίου του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Πατρών στην Πανεπιστημιούπολη στο Ρίο Πατρών

ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑ ΜΕ ΤΟ ΣΥΓΓΡΑΦΕΑ

Νικόλαος Ι. Ιωακειμίδης

Τομέας Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Μηχανικής

Γενικό Τμήμα, Πολυτεχνική Σχολή, Πανεπιστήμιο Πατρών

Πανεπιστημιούπολη Πατρών, 265.04 ΡΙΟ, ΠΑΤΡΑ

Τηλέφωνα: (+30) 2610 432257, (+30) 2610 997378,

E-mail: n.ioakimidis@upatras.gr, <http://www.des.upatras.gr/amm/ioakimidis/ioakimidis.htm>

ΑΠΟΠΟΙΗΣΗ ΕΥΘΥΝΗΣ

Τόσο ο συγγραφέας όσο και ο εκδότης κατέβαλαν κάθε δυνατή προσπάθεια, ώστε το παρόν βιβλίο ακόμη και στην παρούσα 1η Έκδοσή του να μην περιέχει οποιασδήποτε μορφής λάθη. Εντούτοις είναι προφανές ότι αυτό δεν είναι απόλυτα δυνατόν να συμβεί. Επομένως δεν μπορούν να αναλάβουν καμιάς μορφής ευθύνη για οποιαδήποτε άμεση ή έμμεση ζημιά που θα μπορούσε να προκύψει στο χρήστη και στη χρήστρια αυτού του βιβλίου από λάθη που έχουν παρεισφύσει. Παράκληση για την ενημέρωσή τους για κάθε λάθος, ώστε αυτό να διορθωθεί στην επόμενη έκδοση.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| • ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ | v-vi |
| • ΠΡΟΛΟΓΟΣ | vii-viii |
| • ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ | ix-x |
| • ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ | 1-38 |
| B1. Γενικές Ασκήσεις (Ασκήσεις B1 έως B6) | 1 |
| B1.1. Εξίσωση του Laplace και διαρμονική εξίσωση (Ασκήσεις B1 έως B5) | 1 |
| B1.2. Εξίσωση του Κύματος (Ασκήση B6) | 2 |
| B2. Ασκήσεις Μεταδόσεως Θερμότητας (Ασκήσεις B7 έως B11) | 3 |
| B2.1. Μετάδοση θερμότητας σε τοίχο (Ασκήσεις B7 έως B9) | 3 |
| B2.2. Μετάδοση θερμότητας στο έδαφος (Ασκήση B10) | 3 |
| B2.3. Διδιάστατη μετάδοση θερμότητας (Ασκήση B11) | 4 |
| B3. Ασκήσεις Περιβαλλοντικής Μηχανικής (Ασκήσεις B12 έως B41) | 4 |
| B3.1. Μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα (Ασκήσεις B12 έως B27) | 4 |
| B3.2. Μεταφορά ρύπου στο έδαφος (Ασκήσεις B28 έως B39) | 9 |
| B3.3. Ατμοσφαιρική ρύπανση (Ασκήσεις B40 έως B41) | 13 |
| B4. Ασκήσεις Ρευστομηχανικής (Ασκήσεις B42 έως B50) | 13 |
| B4.1. Διδιάστατη ροή (Ασκήσεις B42 έως B45) | 13 |
| B4.2. Τριδιάστατη ροή (Ασκήσεις B46 έως B50) | 15 |
| B5. Ασκήσεις Εδαφομηχανικής (Ασκήσεις B51 έως B62) | 16 |
| B5.1. Διήθηση (Ασκήσεις B51 έως B56) | 16 |
| B5.2. Στερεοποίηση (Ασκήσεις B57 έως B62) | 18 |
| B6. Ασκήσεις Μηχανικής των Υλικών (Ασκήσεις B63 έως B69) | 20 |
| B6.1. Επίπεδη ελαστικότητα: τασική συνάρτηση του Airy (Ασκήσεις B63 έως B67) .. | 20 |
| B6.2. Ελαστικότητα: στρέψη (Ασκήσεις B68 έως B69) | 22 |
| B7. Ασκήσεις Πλακών (Ασκήσεις B70 έως B75) | 23 |
| B7.1. Γενικές ασκήσεις πλακών (Ασκήσεις B70 έως B71) | 23 |
| B7.2. Ορθογωνικές πλάκες (Ασκήσεις B72 έως B75) | 23 |
| B8. Ασκήσεις Δυναμικής των Κατασκευών (Ασκήσεις B76 έως B120) | 25 |
| B8.1. Εγκάρσιες ταλαντώσεις καλωδίων (Ασκήση B76) | 25 |
| B8.2. Αξονικές ταλαντώσεις ράβδων (Ασκήσεις B77 έως B86) | 25 |
| B8.3. Καμπτικές ταλαντώσεις δοκών (Ασκήσεις B87 έως B107) | 28 |
| B8.4. Καμπτικές ταλαντώσεις δοκών επί ελαστικής βάσεως (Ασκήσεις B108 έως B114) 34 | |
| B8.5. Καμπτικές ταλαντώσεις δοκών Timoshenko (Ασκήσεις B115 έως B118) | 36 |
| B8.6. Ταλαντώσεις πλακών (Ασκήσεις B119 έως B120) | 38 |
| • ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΙΣΩΣΕΩΝ | 39-50 |
| Γ1. Γενική Άσκηση (Ασκήση Γ1) | 39 |
| Γ2. Άσκηση Περιβαλλοντικής Μηχανικής (Ασκήση Γ2) | 39 |
| Γ3. Ασκήσεις Δυναμικής και Ταλαντώσεων (Ασκήσεις Γ3 έως Γ16) | 40 |
| Γ4. Ασκήσεις Μηχανικής των Υλικών (Ασκήσεις Γ17 έως Γ28) | 43 |
| Γ5. Ασκήσεις Δυναμικής των Κατασκευών (Ασκήσεις Γ29 έως Γ31) | 47 |
| Γ6. Ασκήσεις Ιξοελαστικότητας (Ασκήσεις Γ32 έως Γ40) | 47 |

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------|----------------|
| • ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ | 51-62 |
| Δ1. Ασκήσεις Ρευστομηχανικής (Ασκήσεις Δ1 έως Δ35) | 51 |
| Δ2. Ασκήσεις Μηχανικής των Υλικών (Ασκήσεις Δ36 έως Δ40) | 60 |
| Δ3. Ασκήσεις Ταλαντώσεων (Ασκήσεις Δ41 έως Δ42) | 62 |
| • ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ III: | |
| ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΑ ΕΒΔΟΜΑΔΑ | 63-136 |
| Ομάδα EMIII-A (Ασκήσεις EMIII-A1 έως EMIII-A6) | 63 |
| Ομάδα EMIII-B (Ασκήσεις EMIII-B1 έως EMIII-B7) | 66 |
| Ομάδα EMIII-C (Ασκήσεις EMIII-C1 έως EMIII-C9) | 70 |
| Ομάδα EMIII-D (Ασκήσεις EMIII-D1 έως EMIII-D8) | 75 |
| Ομάδα EMIII-E (Ασκήσεις EMIII-E1 έως EMIII-E3) | 79 |
| Ομάδα EMIII-F (Ασκήσεις EMIII-F1 έως EMIII-F25) | 80 |
| Ομάδα EMIII-G (Ασκήσεις EMIII-G1 έως EMIII-G4) | 90 |
| Ομάδα EMIII-H (Ασκήσεις EMIII-H1 έως EMIII-H12) | 94 |
| Ομάδα EMIII-I (Ασκήσεις EMIII-I1 έως EMIII-I2) | 102 |
| Ομάδα EMIII-J (Ασκήσεις EMIII-J1 έως EMIII-J13) | 103 |
| Ομάδα EMIII-K (Ασκήσεις EMIII-K1 έως EMIII-K10) | 112 |
| Ομάδα EMIII-L (Ασκήσεις EMIII-L1 έως EMIII-L11) | 118 |
| Ομάδα EMIII-M (Ασκήσεις EMIII-M1 έως EMIII-M28) | 125 |
| • ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ III: | |
| ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΜΕ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ ΣΕ NOTEBOOKS | 137-222 |
| Ασκήσεις του Notebook EMIII-MA (Ασκήσεις EMIII-MA1 έως EMIII-MA6) | 138 |
| Notebook EMIII-MA (Λύσεις των Ασκήσεων EMIII-MA1 έως EMIII-MA6) | 140 |
| Ασκήσεις του Notebook EMIII-MB (Ασκήσεις EMIII-MB1 έως EMIII-MB6) | 146 |
| Notebook EMIII-MB (Λύσεις των Ασκήσεων EMIII-MB1 έως EMIII-MB6) | 148 |
| Ασκήσεις του Notebook EMIII-MC (Ασκήσεις EMIII-MC1 έως EMIII-MC3) | 155 |
| Notebook EMIII-MC (Λύσεις των Ασκήσεων EMIII-MC1 έως EMIII-MC3) | 156 |
| Ασκήσεις του Notebook EMIII-MD (Ασκήσεις EMIII-MD1 έως EMIII-MD9) | 161 |
| Notebook EMIII-MD (Λύσεις των Ασκήσεων EMIII-MD1 έως EMIII-MD9) | 163 |
| Ασκήσεις του Notebook EMIII-ME (Ασκήσεις EMIII-ME1 έως EMIII-ME7) | 171 |
| Notebook EMIII-ME (Λύσεις των Ασκήσεων EMIII-ME1 έως EMIII-ME7) | 173 |
| Ασκήσεις του Notebook EMIII-MF (Ασκήσεις EMIII-MF1 έως EMIII-MF6) | 181 |
| Notebook EMIII-MF (Λύσεις των Ασκήσεων EMIII-MF1 έως EMIII-MF6) | 183 |
| Ασκήσεις του Notebook EMIII-MG (Ασκήσεις EMIII-MG1 έως EMIII-MG6) | 191 |
| Notebook EMIII-MG (Λύσεις των Ασκήσεων EMIII-MG1 έως EMIII-MG6) | 193 |
| Ασκήσεις του Notebook EMIII-MH (Ασκήσεις EMIII-MH1 έως EMIII-MH7) | 201 |
| Notebook EMIII-MH (Λύσεις των Ασκήσεων EMIII-MH1 έως EMIII-MH7) | 203 |
| Ασκήσεις του Notebook EMIII-MI (Ασκήσεις EMIII-MI1 έως EMIII-MI6) | 211 |
| Notebook EMIII-MI (Λύσεις των Ασκήσεων EMIII-MI1 έως EMIII-MI6) | 213 |
| • ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ NOTEBOOKS ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ | 223-248 |
| Εφαρμοσμένο Notebook EN-EMIII-AIRY: Τασική Συνάρτηση του Airy | 224 |
| Εφαρμοσμένο Notebook EN-EMIII-PLATES: Συνήθεις Πλάκες | 239 |
| • ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ANIMATIONS ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ | 249-261 |
| Notebook Animations-BeamVibrations: Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Αμφιέριστης Δοκού | 251 |
| Notebook Animations-RectangularPlateVibrations: Ιδιοταλαντώσεις Ορθογωνικής Πλάκας | 254 |

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν Τεύχος 2 του συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς** με τίτλο **Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks III για Πολιτικούς Μηχανικούς** έρχεται σαν συνέχεια του Τεύχους 1 του ίδιου συγγράμματος, που αφορά κυρίως στη θεωρία των Εφαρμοσμένων Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους (το Μέρος Β), των Εφαρμοσμένων Ολοκληρωτικών Εξισώσεων (το Μέρος Γ) και των Εφαρμοσμένων Μιγαδικών Συναρτήσεων (το Μέρος Δ) και στις τρεις περιπτώσεις για Πολιτικούς Μηχανικούς. Πέρα από τη σχετική θεωρία το Τεύχος 1 που προαναφέρθηκε περιλαμβάνει και μεγάλο αριθμό εφαρμογών στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Έχοντας λοιπόν μελετήσει το Τεύχος 1 ο φοιτητής και η φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός θα έχουν αποκτήσει τις θεωρητικές γνώσεις που αναπτύσσονται σ' αυτό. Θα έχουν όμως επιπλέον κατανοήσει και τις σχετικές εφαρμογές στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

Σύμφωνα και με τον τίτλο του το παρόν Τεύχος 2 περιλαμβάνει **Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks III για Πολιτικούς Μηχανικούς** και αποτελείται από πέντε μέρη: δύο μέρη για Εφαρμοσμένες Ασκήσεις III και τρία μέρη για Εφαρμοσμένα Notebooks III όλα για Πολιτικούς Μηχανικούς.

1. Το πρώτο μέρος του παρόντος Τεύχους 2 περιλαμβάνει ένα μεγάλο αριθμό άλυτων εφαρμοσμένων ασκήσεων στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Αυτές είναι σκόπιμο να λυθούν σε όσο γίνεται μεγαλύτερο βαθμό με το χέρι (χωρίς τη χρήση του υπολογιστή!) ή και με τη χρήση του υπολογιστή αποκλειστικά όμως για τη στοιχειοθεσία των λύσεων με το χέρι. Οι σχετικές γνώσεις έχουν ήδη αποκτηθεί από το Τεύχος 1. Οι παρούσες εφαρμοσμένες ασκήσεις (202 συνολικά) είναι ταξινομημένες σε τρεις μεγάλες κατηγορίες που αφορούν: (α) στις Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους (στο Μέρος Β: 120 εφαρμοσμένες ασκήσεις), (β) στις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις (στο Μέρος Γ: 40 εφαρμοσμένες ασκήσεις) και (γ) στις Μιγαδικές Συναρτήσεις (στο Μέρος Δ: 42 εφαρμοσμένες ασκήσεις). Μέσα σε καθεμιά από τις τρεις αυτές μεγάλες κατηγορίες οι εφαρμοσμένες ασκήσεις ταξινομούνται με βάση τις περιοχές της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού στις οποίες αναφέρονται. Με τον τρόπο αυτό ο φοιτητής/η φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός μπορεί να θελήσει να επιλύσει εκείνες από τις εφαρμοσμένες ασκήσεις που δίνονται και που ταιριάζουν με τα θέματα που τον/την ενδιαφέρουν. Σε κάθε άσκηση αναφέρονται επιπλέον και τα κεφάλαια του Τεύχους 1 που είναι σχετικά με τη λύση της καθώς και οι περιοχές της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού όπου ανήκει η άσκηση αυτή. Σημειώνεται τέλος ότι κάθε άσκηση υποδιαιρείται σε ερωτήματα και κάθε ερώτημα έχει τη δική του βαρύτητα, η οποία αναφέρεται και αυτή μέσα στην άσκηση.
2. Το δεύτερο μέρος του παρόντος Τεύχους 2 περιλαμβάνει κι αυτό άλυτες ασκήσεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς που είναι ταξινομημένες σε δεκατριές ομάδες: Ομάδα Α έως και Ομάδα Μ. Οι ασκήσεις αυτές είναι σκόπιμο να λύνονται κατά τη διάρκεια των αντίστοιχων δεκατριών εβδομάδων του διδακτικού εξαμήνου. Το χαρακτηριστικό αυτών των ομάδων ασκήσεων είναι ότι συνδυάζουν την άμεση επίλυσή τους σε χαρτί με την επίλυσή τους με χρήση του υπολογιστή κι εδώ της Mathematica. Στις ασκήσεις αυτές, μερικές φορές και στα ερωτήματά τους υπάρχουν οι ενδείξεις [X] για χειρόγραφη επίλυση, [Y] για επίλυση με τη χρήση του υπολογιστή, δηλαδή εδώ της Mathematica, και [X και Y] για επίλυση και με το χέρι και με τον υπολογιστή. Έτσι ο φοιτητής/η φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός κατανοεί τη χρησιμότητα του υπολογιστή σαν μια εναλλακτική δυνατότητα επίλυσεως. Σε δύσκολα μάλιστα προβλήματα της επιστήμης του σαν τη μοναδική πρακτική δυνατότητα επίλυσεως. Σημειώνεται επίσης ότι αρκετές από τις ασκήσεις και αρκετά από τα ερωτήματα με τον υπολογιστή περιλαμβάνουν και σαφείς υποδείξεις για τη λύση τους με τη Mathematica.

3. Το τρίτο μέρος του παρόντος Τεύχους 2 περιλαμβάνει εννέα ομάδες εφαρμοσμένων ασκήσεων το χαρακτηριστικό των οποίων είναι ότι είναι έτσι γραμμένες, ώστε να ζητείται η λύση των ερωτημάτων τους με τη Mathematica. Οι απαντήσεις σε όλα τα ερωτήματα όλων των ασκήσεων κάθε ομάδας περιλαμβάνονται σε σχετικό notebook που ακολουθεί την ομάδα ασκήσεων. Έχουμε έτσι εννέα ομάδες ασκήσεων και παράλληλα εννέα notebooks της Mathematica που ακολουθούν την κάθε ομάδα με πάνω από 750 εντολές της Mathematica συνολικά.
4. Το τέταρτο μέρος του παρόντος Τεύχους 2 περιλαμβάνει δύο εφαρμοσμένα notebooks της Mathematica. Συγκεκριμένα το πρώτο από αυτά αναφέρεται στην τασική συνάρτηση του Airy και το δεύτερο στις συνήθεις πλάκες. Πρόκειται για δύο notebooks ιδιαίτερου ενδιαφέροντος του Πολιτικού Μηχανικού που επιχειρούν να δώσουν σαφείς εικόνες για τα περιεχόμενά τους παράλληλα βέβαια με την επίδειξη των σχετικών υπολογιστικών δυνατοτήτων της Mathematica. Παραπέρα χαρακτηριστικό αυτών των δύο notebooks είναι η επιμελημένη προετοιμασία τους, έτσι ώστε να καταστεί σαφές πως η Mathematica έχει τη δυνατότητα να επιτρέπει τη δημιουργία με αυτή notebooks που να μοιάζουν σχεδόν απόλυτα με επιστημονικές εργασίες.
5. Τέλος το πέμπτο μέρος του παρόντος Τεύχους 2 περιλαμβάνει δύο εφαρμοσμένα notebooks της Mathematica που αναφέρονται σε animations: σε κινούμενα σχήματα. Συγκεκριμένα το πρώτο από αυτά αναφέρεται σε καμπτικές ιδιοταλαντώσεις αμφιέριστης δοκού, ενώ το δεύτερο σε ιδιοταλαντώσεις ορθογωνικής πλάκας. Και τα notebooks αυτά προετοιμάστηκαν με αρκετή προσοχή και επιμέλεια, ώστε να δίνουν όλες τις αναγκαίες λεπτομέρειες στα θέματα που πραγματεύονται, να εξηγούν λεπτομερώς πώς μπορούν να προετοιμασθούν οι σχετικές animations και τέλος να δίνουν σειρά διαδοχικών σχημάτων για τις animations αυτές. Εντούτοις εύλογα οι αληθινές animations δε μπορούν να παρουσιασθούν σε χαρτί, αλλά μόνο στην οθόνη του υπολογιστή. Αυτό είναι βέβαια πολύ εύκολο και εντυπωσιακό με βάση τα notebooks αυτά.

Σημειώνεται τέλος ότι για τη χρήση της Mathematica στις εφαρμοσμένες ασκήσεις και στα εφαρμοσμένα notebooks αυτού του Τεύχους 2 του συγγράμματος **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III για Πολιτικούς Μηχανικούς** είναι ασφαλώς προαπαιτούμενες οι βασικές γνώσεις για τη Mathematica.

Επαναλαμβάνεται ότι ο όρος «η Mathematica» που χρησιμοποιείται εδώ αντί για τον πολύ ευρύτερα διαδεδομένο όρο «το Mathematica» για το ίδιο πρόγραμμα συμβολικών υπολογισμών φαίνεται να οφείλεται στο Στέφανο Τραχανά, που τον εισήγαγε στο βιβλίο του για τη Mathematica το 2001.

Όπως και στα κύρια μέρη αυτών των διδακτικών συγγραμμάτων **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II και III για Πολιτικούς Μηχανικούς**, έτσι κι εδώ έχουν συμπεριληφθεί τόσο στις ασκήσεις όσο και στα notebooks της Mathematica πολλές εφαρμογές από την Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού: Δυναμική, Ταλαντώσεις, Δυναμική των Κατασκευών, Μηχανική των Υλικών (Δοκοί, Λυγισμός, Ελαστικότητα, Ισοελαστικότητα), Πλάκες, Ρευστομηχανική, Εδαφομηχανική και Περιβαλλοντική Μηχανική.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα πρώτα-πρώτα να ευχαριστήσω τους φοιτητές και τις φοιτήτριές μου Πολιτικούς Μηχανικούς για το ενδιαφέρον τους στα μαθήματα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω ξανά τις **GOTSIS Εκδόσεις** στην Πάτρα και ιδιαίτερα τον υπεύθυνό τους κ. Άγγελο Γκότση για το ενδιαφέρον τους στο παρόν βιβλίο και την τόσο επιμελημένη προετοιμασία και εκτύπωσή του. Τούτο αποτελεί ιδιαίτερα αξιόπαινη πρωτοβουλία των **GOTSIS Εκδόσεις** και μάλιστα ουσιαστικά χωρίς σημαντικό οικονομικό όφελος απλά λόγω του εξειδικευμένου χαρακτήρα αυτών των διδακτικών βιβλίων που απευθύνονται μόνο σε Πολιτικούς Μηχανικούς.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να σημειώσω πως με μεγάλη χαρά μου θα δεχθώ κάθε υπόδειξη για τη βελτίωση και αυτού του βιβλίου είτε με τη διόρθωση λαθών που έχουν παρεισφύσει είτε και με ουσιαστικότερες υποδείξεις ως προς την επιλογή και την ταξινόμηση των ασκήσεων και των notebooks που έχουν περιληφθεί εδώ. Θα είμαι πραγματικά ευγνώμων για κάθε τέτοια υπόδειξη!

Πάτρα, Φεβρουάριος 2008

Νικόλαος Ι. Ιωακείμιδης

e-mail: n.ioakimidis@upatras.gr

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

Το περιεχόμενο αυτού του Τεύχους 2 των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς** αφορά σε **Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks III για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Το περιεχόμενο αυτό είναι απόλυτα κλασικό (τόσο στις εφαρμοσμένες ασκήσεις όσο και στα εφαρμοσμένα notebooks της *Mathematica* που περιλαμβάνονται εδώ) και βασίζεται στη σχετική πάρα πολύ εκτενή μαθηματική και τεχνική βιβλιογραφία για τις **Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους**, τις **Ολοκληρωτικές Εξισώσεις** και τις **Μιγαδικές Συναρτήσεις**. Τα ίδια ακριβώς ισχύουν και στα άλλα τέσσερα διδακτικά βιβλία της παρούσας σειράς πέντε βιβλίων **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς**. Η συμβολή του γράφοντα περιορίζεται απλά στον τρόπο παρουσίaseως της τόσο κλασικής αυτής ύλης, εδώ μέσω εφαρμοσμένων ασκήσεων καθώς και εφαρμοσμένων notebooks της *Mathematica*. Η παρουσίαση αυτή δίνει πολύ μεγάλη έμφαση στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ

Ένα μεγάλο μέρος των περιεχομένων αυτού του Τεύχους 2 των **Εφαρμοσμένων Μαθηματικών III για Πολιτικούς Μηχανικούς**, που αφορά σε **Εφαρμοσμένες Ασκήσεις και Notebooks III για Πολιτικούς Μηχανικούς**, κάνει χρήση του μαθηματικού προγράμματος *Mathematica*. Το πρόγραμμα αυτό έχει ευρύτατες ικανότητες τόσο για συμβολικούς και αριθμητικούς υπολογισμούς όσο και για γραφικές παραστάσεις. Εδώ χρησιμοποιήθηκε η έκδοση (version) 4.1 της *Mathematica*, η οποία είναι διαθέσιμη στο γράφοντα. Σημειώνεται ότι ένα αρκετά μεγάλο μέρος αυτού του τεύχους αποτελείται από notebooks της *Mathematica*. Υπάρχουν επιπλέον και εκφωνήσεις πολλών εφαρμοσμένων ασκήσεων που πάλι βασίζονται στη χρήση της *Mathematica* ιδίως ως προς τις υποδείξεις για την επίλυσή τους. Από εκπαιδευτικής απόψεως ο χρήστης κι η χρήστρια της *Mathematica* Πολιτικός Μηχανικός πρέπει να παίρνουν τα ίδια ακριβώς αποτελέσματα για τις ίδιες εντολές, εφόσον βέβαια χρησιμοποιούν την έκδοση (version) 4.1 της *Mathematica*. Για άλλες εκδόσεις της *Mathematica* προφανώς θα υπάρχουν κάποιες μικροδιαφορές, όχι όμως ιδιαίτερα σημαντικές για τον Πολιτικό Μηχανικό.

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΟΡΘΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ

Η *Mathematica* είναι ένα εξαιρετικά αξιόπιστο μαθηματικό πρόγραμμα συμβολικών και αριθμητικών υπολογισμών επιπλέον και με εκπληκτικές δυνατότητες στις γραφικές παραστάσεις. Εντούτοις κάθε σύνθετο πρόγραμμα, όπως είναι και η *Mathematica*, είναι πιθανό να περιέχει έναν πολύ μικρό αριθμό λαθών. Κατά συνέπεια, ενώ τα αποτελέσματα των υπολογισμών με τη *Mathematica* στα notebooks της *Mathematica* που περιλαμβάνονται σ' αυτό το τεύχος είναι σωστά στη συντριπτική πλειονότητά τους, εντούτοις σε εξαιρετικά σπάνιες περιπτώσεις μπορεί να είναι εσφαλμένα. Επομένως είναι καλό ο Πολιτικός Μηχανικός να επαληθεύει τα αποτελέσματα της *Mathematica*. Αυτό μπορεί να γίνεται είτε (α) με άμεση επαλήθευση, για παράδειγμα αντικαθιστώντας τη λύση μιας διαφορικής εξίσωσης στη διαφορική εξίσωση που καταλήγει έτσι σε ταυτότητα είτε (β) κάνοντας τους υπολογισμούς και με δεύτερο, διαφορετικό τρόπο και βρίσκοντας το ίδιο (ή απόλυτα ισοδύναμο) αποτέλεσμα, για παράδειγμα λύνοντας μια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές (i) με τον κλασικό τρόπο και (ii) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και συγκρίνοντας τα δύο αποτελέσματα.

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΕΜΠΟΡΙΚΟ ΣΗΜΑ MATHEMATICA

Η λέξη *Mathematica* αποτελεί κατατεθειμένο εμπορικό σήμα (registered trademark, σήμα κατατεθέν) της εταιρείας Wolfram Research, Inc., 100 Trade Center Drive, Champaign, IL 61820-7237, Η.Π.Α. Δικτυακός τόπος: <http://www.wolfram.com>. Η χρήση της λέξεως *Mathematica* εδώ γίνεται με πλήρη αναγνώριση του εμπορικού αυτού σήματος της εταιρείας Wolfram Research, Inc.

• ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΣΤΟΙΧΕΙΟΘΕΣΙΑ

Με την εξαίρεση των notebooks της *Mathematica* η βασική γραμματοσειρά στα παρόντα διδακτικά βιβλία είναι η Optima, μια γραμματοσειρά κυρίως νεοκλασικού τύπου. Η Optima σχεδιάστηκε από το διάσημο σχεδιαστή γραμματοσειρών Hermann Zapf μεταξύ των ετών 1952 και 1955 και διατέθηκε εμπορικά αρχικά από την εταιρεία Linotype το 1958. Η Ελληνική παραλλαγή της, η MgOptima, που χρησιμοποιείται εδώ, διατίθεται από την εταιρεία Magenta στην Αθήνα σε CD-ROM Ελληνικών γραμματοσειρών. Και η Ελληνική παραλλαγή της Optima, η Optima Greek, σχεδιάστηκε αρχικά από τον ίδιο το Zapf και κυκλοφόρησε πρώτα επίσης από τη Linotype το 1971.¹ Το κείμενο και οι μαθηματικοί τύποι στοιχειοθετήθηκαν με τα γνωστά προγράμματα στοιχειοθεσίας Y&Y TEX και ΕTEX στην Ελληνική παραλλαγή τους. Τα προγράμματα αυτά είναι ισχυρότατα ιδίως για τη στοιχειοθεσία μαθηματικού κειμένου και υποστηρίζουν γραμματοσειρές PostScript. Τα τελικά αρχεία είναι σε μορφές DVI (Device Independent) και PDF (Portable Document Format). Φυσικά, όπως συμβαίνει συνήθως, στην τελική εκτύπωση χρησιμοποιήθηκε η μορφή PDF. Αυτή είναι και η πιο εύχρηστη και γενικά χρησιμοποιούμενη στις εκτυπώσεις.

¹Όλες αυτές οι πληροφορίες για τη γραμματοσειρά Optima προέρχονται από το τόσο ενδιαφέρον βιβλίο του Bringhurst, R. (2001), *Στοιχεία της Τυπογραφικής Τέχνης* (Ελληνική μετάφραση του Αγγλικού πρωτότυπου: *The Elements of Typographic Style*, 2η Έκδοση. Hartley & Marks, 1996). Εταιρεία Ελληνικών Τυπογραφικών Στοιχείων και Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, σ. 292.

Ενδιαφέροντα σχόλια για την Optima αναφέρονται επίσης και στο βιβλίο των Grosvenor, J., Morrison, K. and Pim, A. (1992), *The PostScript Font Handbook: A Directory of Type 1 Fonts* (αναθεωρημένη έκδοση). Addison-Wesley, Wokingham, England, σ. 308. Μεταξύ αυτών των σχολίων αναφέρεται ότι η Optima είναι ίσως η πιο πρωτότυπη σχεδίαση (γραμματοσειράς εννοείται) του Hermann Zapf. Επίσης η εμφάνισή της το 1958 προκάλεσε «θόρυβο» στον κόσμο της τυπογραφίας. Έχει αρκετά παχείς και σαφείς χαρακτήρες και θεωρείται κατάλληλη όχι μόνο για τίτλους, αλλά και για συνεχές κείμενο, όπως συμβαίνει εδώ.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

B1. ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

B1.1. Εξίσωση του Laplace και διαρμονική εξίσωση¹

ΑΣΚΗΣΗ B1 (Κεφάλαια B1, B2, B5, Διδιάστατη Εξίσωση του Laplace, Πρόβλημα Dirichlet): Θεωρούμε ορθογωνική περιοχή $R = [0, a] \times [0, b]$ (με $a > 0$ και $b > 0$) στο επίπεδο Oxy . Για την άγνωστη συνάρτηση $u = u(x, y)$ στην περιοχή αυτή R ισχύει η διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Διαθέτουμε επίσης συνοριακές συνθήκες Dirichlet στο σύνορο C της ορθογωνικής περιοχής R . Συγκεκριμένα μηδενίζονται οι συνοριακές τιμές της συναρτήσεως $u(x, y)$ στις τρεις πλευρές $x = 0$, $x = a$ και $y = b$ του συνόρου C της ορθογωνικής περιοχής D (πρόκειται για ομογενείς συνοριακές συνθήκες). Αντίθετα δε μηδενίζονται στην τέταρτη πλευρά $y = 0$. Στην πλευρά αυτή $y = 0$ διαθέτουμε για την άγνωστη συνάρτηση $u(x, y)$ τη συνοριακή συνθήκη $u(x, 0) = f(x)$ με $f(x)$ κατάλληλη γνωστή συνάρτηση στο διάστημα $0 \leq x \leq a$. Επομένως έχουμε τελικά ένα αρκετά απλό πρόβλημα Dirichlet στην ορθογωνική περιοχή R . Ζητούνται: (α:1) Με τη χρήση διακρίνουσας Δ η εύρεση του τύπου της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace. (β:1) Επτά συνολικά χαρακτηρισμοί της. (γ:1) Έξι τουλάχιστον φυσικές ποσότητες (όχι επιστημονικές περιοχές!) σε προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού που επαληθεύουν συνήθως τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace καθώς και οι μονάδες καθεμιάς από τις ποσότητες αυτές. (δ:1) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της εξισώσεως του Laplace στο πρόβλημα Dirichlet που ήδη καθορίστηκε σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές x και y . Να γίνει επίσης λεπτομερής έλεγχος για το αν η σχετική σταθερά διαχωρισμού λ πρέπει να είναι (i) θετική, (ii) μηδέν ή (iii) αρνητική υπό τις παρούσες συνοριακές συνθήκες. (ε:2) Από τις εξισώσεις αυτές η εύρεση των ιδιοσυναρτήσεων $X_n(x)$, $Y_n(y)$ και $u_n(x, y)$ παίρνοντας υπόψη και τις τρεις ομογενείς συνοριακές συνθήκες και υποχρεωτικά με χρήση υπερβολικών συναρτήσεων αντί για την εκθετική συνάρτηση. (στ:2) Η πλήρης λύση $u(x, y)$ του παρόντος προβλήματος Dirichlet σε μορφή κατάλληλης σειράς.

ΑΣΚΗΣΗ B2 (Κεφάλαιο B3, Διδιάστατη Εξίσωση του Laplace): Για την τόσο κλασική διδιάστατη εξίσωση του Laplace ζητούνται: (α:2) Σε ποια ακριβώς προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού απαντάται με λεπτομερή αναφορά τόσο των ονομάτων όσο και των ειδικών συμβόλων των σχετικών συναρτήσεων $u(x, y)$. (β:3) Υποχρεωτικά με τις αλλαγές μεταβλητών

$$z = x + iy \quad \text{και} \quad \bar{z} = x - iy \quad \text{με} \quad i = \sqrt{-1}$$

τη φανταστική μονάδα να μετατραπεί σε απλούστερη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς. (γ:2) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα να προσδιορισθεί η γενική λύση της τελικά στη μορφή $u = u(x, y)$ με τις αρχικές μεταβλητές x και y . (δ:1) Υπό ποιες προϋποθέσεις η λύση αυτή $u(x, y)$ είναι πραγματική συνάρτηση, όπως συνήθως απαιτείται στην πράξη του Πολιτικού Μηχανικού;

¹ Σε όλες τις ασκήσεις και σε κάθε ερώτημα, π.χ. στο ερώτημα (ε:2), ο αριθμός μετά την άνω και κάτω τελεία, εδώ το 2, δείχνει τη βαρύτητα του ερωτήματος, εδώ του πέμπτου ερωτήματος, του ερωτήματος (ε:2), μέσα στην άσκηση.

ΑΣΚΗΣΗ Β3 (Κεφάλαιο Β9, Εξίσωση του Laplace, Πολικές Συντεταγμένες): Εδώ θεωρούμε τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace $\nabla^2 u = 0$ σε πολικές συντεταγμένες r και θ . Έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

φυσικά με $u = u(r, \theta)$. Ζητούνται: (α:1) Ο έλεγχος της ορθότητάς της αποκλειστικά από απόψεως διαστάσεων. (β:1) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της εξισώσεως αυτής του Laplace (σε πολικές συντεταγμένες r και θ) σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. (γ:1) Η εύρεση της αποδεκτής λύσεως της συνήθους διαφορικής εξισώσεως ως προς την πολική γωνία θ . (δ:1) Το ίδιο και ως προς την πολική ακτίνα r , αλλά με τρόπο συμβατό με το προηγούμενο ερώτημα εκεί για την πολική γωνία θ . (ε:1) Η γενική λύση $u(r, \theta)$ της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace σε πολικές συντεταγμένες r και θ . (στ:1) Η αντίστοιχη λύση σε συνηθισμένη κυκλική περιοχή $r \leq a$ με a την ακτίνα του κύκλου.

ΑΣΚΗΣΗ Β4 (Κεφάλαιο Β9, Εξίσωση του Laplace, Κυλινδρικές Συντεταγμένες): Θεωρούμε γνωστό τον τελεστή του Laplace (τη Laplacian, Λαπλασιανή) σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

Ζητούνται: (α:1) Απλά να αναφερθεί η εξίσωση του Laplace με άγνωστη συνάρτηση τη $u = u(r, \theta, z)$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z) . (β:1) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών

$$u(r, \theta, z) = U(r, \theta)Z(z)$$

η εύρεση των δύο σχετικών διαφορικών εξισώσεων και (γ:1) η λύση της διαφορικής εξισώσεως που προέκυψε ως προς $Z(z)$ με υπερβολικές συναρτήσεις. (δ:2) Ο παραπέρα χωρισμός των μεταβλητών

$$U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

και ο προσδιορισμός των δύο σχετικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων. (ε:2) Η προσεκτική επίλυση της διαφορικής εξισώσεως ως προς $\Theta(\theta)$ με πλήρωση και της αναγκαίας γεωμετρικής συνθήκης. (στ:1) Η τελική μορφή της διαφορικής εξισώσεως ως προς $R(r)$ (χωρίς την επίλυσή της).

ΑΣΚΗΣΗ Β5 (Κεφάλαιο Β5, Διδιάστατη Εξίσωση του Laplace, Διδιάστατη Διαρμονική Εξίσωση): Ζητείται να γίνει απλά έλεγχος και αναφορά του συμπεράσματος για το εάν ή όχι είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών: (α:2) Στη διδιάστατη εξίσωση του Laplace σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) καθώς και (β:3) σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) και επίσης (γ:3) στη διδιάστατη διαρμονική εξίσωση, εκεί μόνο σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) .

B1.2. Εξίσωση του κύματος

ΑΣΚΗΣΗ Β6 (Κεφάλαιο Β5, Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος): Για τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος στο πεπερασμένο διάστημα $0 \leq x \leq L$ και για θετικές χρονικές στιγμές ($t \geq 0$) με συνοριακές και αρχικές συνθήκες τις τέσσερις συνθήκες

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

με τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ γνωστές ζητούνται: (α:1) Ο διαχωρισμός της σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. (β:2) Με διάκριση τριών περιπτώσεων η λύση της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως μαζί με τις συνοριακές συνθήκες και (γ:1) η πλήρης επαλήθευσή της. (δ:1) Η λύση και της χρονικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως. (ε:1) Οι σχετικές ιδιοσυναρτήσεις $u_n(x, t)$. (στ:3) Με πλήρωση και των αρχικών συνθηκών η εύρεση της λύσεως του αρχικού προβλήματος συνοριακών και αρχικών τιμών και (ζ:1) η επαλήθευσή της μόνο ως προς τη διαφορική εξίσωση.

B2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΔΟΣΕΩΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

B2.1. Μετάδοση θερμότητας σε τοίχο

ΑΣΚΗΣΗ B7 (Κεφάλαια B1, B2, B5, Μετάδοση Θερμότητας σε Τοίχο): Θεωρούμε τοίχο (ή πλευρικά τέλεια μονωμένη ράβδος) μήκους L (με $0 \leq x \leq L$): μονοδιάστατο πρόβλημα. Για τη θερμοκρασία $\theta = \theta(x, t)$ των σημείων του τοίχου προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

με το a γνωστή θετική σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Κατευθείαν από τη διαφορική αυτή εξίσωση οι μονάδες της σταθεράς a . (β:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (γ:1) Σε ποια άλλα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού απαντάται η ίδια εξίσωση; (δ:1) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών να αναχθεί σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. (ε:3) Με συνοριακές συνθήκες πλήρους μονώσεως στο άκρο $x = 0$ και μηδενικής θερμοκρασίας στο άκρο $x = L$ να βρεθούν οι σχετικές ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$ και στη συνέχεια (στ:1) με τη χρήση τους καθώς και με τη λύση της χρονικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης να βρεθεί η λύση $\theta(x, t)$ της αρχικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (χωρίς να ληφθεί υπόψη κάποια αρχική συνθήκη: μόνο οι συνοριακές συνθήκες).

ΑΣΚΗΣΗ B8 (Κεφάλαιο B5, Μετάδοση Θερμότητας σε Τοίχο): Θεωρούμε τη μονοδιάστατη μετάδοση θερμότητας σε τοίχο πάχους L (κάθετα στον τοίχο με $0 \leq x \leq L$) με την αριστερή πλευρά του $x = 0$ σε μηδενική θερμοκρασία και τη δεξιά πλευρά του $x = L$ απόλυτα μονωμένη θερμικά. Με την υπόθεση υπάρξεως και κατανεμημένης πηγής θερμότητας στον τοίχο προκύπτει για τη θερμοκρασία $\theta = \theta(x, t)$ η μη ομογενής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} - p(x, t)$$

με το a γνωστή θετική σταθερά και τη συνάρτηση $p(x, t)$ επίσης γνωστή. Ζητούνται: (α:3) Για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση, τη γνωστή εξίσωση της διαχύσεως, οι σχετικές ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$ (με $n = 1, 2, \dots$) στο παρόν πρόβλημα. (β:3) Υποθέτοντας γνωστή την ορθογωνιότητά τους (με νόρμες $L/2$) και με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (χωρίς όμως τις λύσεις τους!) για τις άγνωστες χρονικές συναρτήσεις $q_n(t)$ με τη χρήση και κατάλληλων γνωστών συναρτήσεων $P_n(t)$ στα δεξιά μέλη τους. (γ:2) Τέλος με γνωστή αρχική συνθήκη τη

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x)$$

η εύρεση και των αρχικών τιμών $q_n(0)$.

ΑΣΚΗΣΗ B9 (Κεφάλαιο B5, Μετάδοση Θερμότητας σε Τοίχο): Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t} - p(x, t) \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \quad u = u(x, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad u(L, t) = 0.$$

Ζητούνται: (α:1) Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα αναφέρεται; (β:3) Οι σχετικές ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$ (με $n = 1, 2, \dots, n$), όταν $p(x, t) \equiv 0$. (γ:6) Τώρα με $p(x, t) \neq 0$ και τις ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$ και τις νόρμες τους N_n γνωστές απλά η αναγωγή του προβλήματος σε ένα σύστημα άπειρων συνήθων διαφορικών εξισώσεων (χωρίς όμως την επίλυσή τους).

B2.2. Μετάδοση θερμότητας στο έδαφος

ΑΣΚΗΣΗ B10 (Κεφάλαιο B10, Μετάδοση Θερμότητας στο Έδαφος): Θεωρούμε τη μετάδοση θερμότητας στο έδαφος (με $z \geq 0$ για το βάθος και $t \geq 0$ για το χρόνο). Η σχετική διαφορική

εξίσωση με μερικές παραγώγους για τη θερμοκρασία $\theta = \theta(x, t)$ του εδάφους είναι η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως και έχει τη μορφή

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{με } z > 0, \quad t > 0$$

και το a γνωστή σταθερά. Ισχύουν επίσης οι δύο συνθήκες

$$\theta(z, 0) = \theta_0 \quad (\text{αρχική συνθήκη}) \quad \text{και} \quad \frac{\partial \theta}{\partial z}(0, t) = \beta \theta(0, t) \quad (\text{συνοριακή συνθήκη})$$

με τα θ_0 και β γνωστές σταθερές. Ζητούνται: (α:4) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο t να αναχθεί η διαφορική αυτή εξίσωση με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (β:4) Να βρεθεί η λύση $\Theta(z, s)$ της συνήθους διαφορικής εξισώσεως που προέκυψε με τη λύση αυτή να πληροί² βέβαια και τις δύο πιο πάνω συνθήκες.

B2.3. Διδιάστατη μετάδοση θερμότητας

ΑΣΚΗΣΗ B11 (Κεφάλαια B1, B5, Διδιάστατη Μετάδοση Θερμότητας): Θεωρούμε το πρόβλημα της μεταδόσεως θερμότητας σε ημιάπειρη λωρίδα $R = [0, \infty) \times [0, H]$ στο επίπεδο Oxy υπό σταθερή θερμοκρασία $u(x, y)$: ανεξάρτητη από το χρόνο t . Οι δύο ημιάπειρες πλευρές της ημιλωρίδας $y = 0$ και $y = H$ θεωρούνται σε μηδενική θερμοκρασία, ενώ η τρίτη πλευρά της $x = 0$ είναι σε γνωστή θερμοκρασία $u(0, y) = g(y)$ με $0 \leq y \leq H$. Ζητούνται: (α:1) Να αναφερθεί η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και να βρεθεί ο τύπος της. (β:1) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών να αναχθεί το πρόβλημα σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. (γ:1) Να υπολογισθούν οι ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος που πληρούν τις δύο μηδενικές (ομογενείς) συνοριακές συνθήκες και (δ:1) Να γίνει επαλήθευσή τους ως προς τις συνθήκες αυτές μόνο. (ε:1) Να βρεθεί η λύση της διαφορικής εξισώσεως που ισχύει και που πληροί επιπλέον και τις δύο μηδενικές συνοριακές συνθήκες. (στ:1) Να βρεθεί τέλος και η τελική λύση του προβλήματος, η οποία πληροί και τη μη μηδενική συνοριακή συνθήκη $u(0, y) = g(y)$ που είχε απομείνει. (ζ:1) Γιατί το παρόν πρόβλημα χαρακτηρίζεται σαν πρόβλημα Dirichlet; Πότε θα μιλούσαμε στη Μετάδοση Θερμότητας για πρόβλημα Neumann; (η:1) Να σχεδιασθούν πρόχειρα οι ισόθερμες (ή ισοθερμοκρασιακές) γραμμές καθώς και οι γραμμές ροής θερμότητας. Τι δίκτυο γραμμών σχηματίζουν αυτές;

B3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

B3.1. Μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα

ΑΣΚΗΣΗ B12 (Κεφάλαια B1, B4, B5, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική και στη ροή νερού (με ρύπους A_k) κατά μήκος υδατορρεύματος θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad \text{με } c = c(x, t)$$

για τη συγκέντρωση συγκεκριμένου ρύπου A_1 στο νερό με x τη θέση και t το χρόνο. Ζητούνται: (α:1) Πώς καλούνται ένας-ένας οι όροι στη διαφορική αυτή εξίσωση; (β:1) Να βρεθεί ο τύπος της ίδιας διαφορικής εξισώσεως. (γ:1) Να αναφερθούν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (δ:1) Απλά να ελεγχθεί αν ή όχι είναι διαχωρίσιμη, δηλαδή αν ή όχι είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. (ε:3) Με την αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών

$$\xi = x - Vt \quad \text{και} \quad \tau = t$$

²Η λέξη (το ρήμα) **πληροί** με **οι**: βλέπε το λήμμα **πληρώ** στο καθιερωμένο *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας* του Καθηγητή της Γλωσσολογίας στο Πανεπιστήμιο Αθηνών Γεωργίου Δ. Μπαμπινιώτη, Β' Έκδοση, Β' Ανατύπωση. Κέντρο Λεξικολογίας, Αθήνα, 2005, σ. 1427.

να αναχθεί σε μια απλούστερη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. (στ:1) Ποιος όρος (με λέξεις, όχι με σύμβολα) δεν είναι πια παρών; Τώρα με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης (να υπάρχει και το $i = \sqrt{-1}$ στον εκθέτη) να προσδιορισθούν (ζ:2) μια μερική λύση της και (η:2) η γενική λύση της. (θ:1) Να επαληθευθεί η γενική αυτή λύση. (ι:1) Από ποια ολοκληρωτική εξίσωση μπορεί να προσδιορισθεί η αυθαίρετη συνάρτηση στη γενική λύση με γνωστή την αρχική συνθήκη $c(x, 0) = c_0(x)$ για τη συγκέντρωση του ρύπου A_1 στο νερό του υδατορρέυματος; (ια:2) Τέλος ζητείται η λύση της πιο πάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης με τις ήδη διαθέσιμες γνώσεις από τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II. (Δεν είναι δα και τόσο δύσκολη η λύση αυτή!)

ΑΣΚΗΣΗ B13 (Κεφάλαια B1, B4, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική θεωρούμε τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με μεταγωγή. Το νερό στο υδατόρρευμα ρέει με σταθερή ταχύτητα V . Για απλότητα έχει υποτεθεί ότι δεν υφίσταται μοριακή διάχυση του ρύπου ούτε άλλος τρόπος μεταφοράς του εκτός από τη μεταγωγή. Υπάρχει όμως και αποδόμηση (καταστροφή) του ρύπου πρώτης τάξεως με σταθερά του ρυθμού αποδομής k . Ως προς τη συγκέντρωση $c = c(x, t)$ του ρύπου στο υδατόρρευμα (με x τη θέση κατά μήκος του υδατορρέυματος και t το χρόνο) προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = -kc.$$

Ζητούνται: (α:1) Έξι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (β:2) Η γραφή της σε νέα μορφή με τη χρήση των αλλαγών ανεξάρτητων μεταβλητών

$$\xi = x - Vt \quad \text{και} \quad \tau = t.$$

(γ:1) Η φυσική ερμηνεία της αλλαγής μεταβλητής $\xi = x - Vt$. (δ:2) Υποχρεωτικά με βάση το ερώτημα (β) η εύρεση της γενικής λύσεως $c = c(x, t)$ της αρχικής διαφορικής εξίσωσης. (ε:1) Η επαλήθευση της ίδιας γενικής λύσεως. (στ:1) Είναι αισθητή στη λύση αυτή η αποδόμηση του ρύπου με την πάροδο του χρόνου t ; Τι μονάδες έχει η σταθερά του ρυθμού αποδομής k ;

ΑΣΚΗΣΗ B14 (Κεφάλαια B1, B2, B11, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Εξετάζουμε τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με το νερό να ρέει με σταθερή ταχύτητα V ($V > 0$). Η συγκέντρωση του ρύπου $c = c(x, t)$ με x τη θέση ($-\infty < x < \infty$) και t το χρόνο ($t \geq 0$) είναι η άγνωστη συνάρτηση. Ο ρύπος μεταφέρεται τόσο (i) με μεταγωγή (λόγω της ταχύτητας V του νερού στο υδατόρρευμα) όσο και (ii) με μοριακή διάχυση με σταθερά μοριακής διαχύσεως D ($D > 0$). Την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ η συγκέντρωση του ρύπου είναι $c(x, 0) = g(x)$ με τη $g(x)$ κατάλληλη γνωστή συνάρτηση. Ζητούνται: (α:1) Η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που ισχύει στο συγκεκριμένο πρόβλημα και οι ειδικές περιπτώσεις της (i) για απλή μεταγωγή του ρύπου και (ii) για απλή μοριακή διάχυση του ρύπου. (β:1) Η εύρεση του τύπου της διαφορικής εξίσωσης της μεταγωγής-διαχύσεως, στην οποία αναφερόμαστε εδώ. (γ:1) Επτά χαρακτηρισμοί της ίδιας διαφορικής εξίσωσης. (δ:1) Χωρίς καμία, απολύτως καμία αλλαγή μεταβλητής και υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier (ως προς t ή ως προς x και γιατί;) η αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (ε:1) Ποιες ακριβώς υποθέσεις έχουν γίνει για $x \rightarrow \pm\infty$; (στ:2) Η εύρεση της λύσεως $C(\omega, t)$ της συνήθους διαφορικής εξίσωσης χωρίς να λησμονηθεί η αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$. (ζ:1) Η εύρεση της συγκεντρώσεως $c(x, t)$ του ρύπου (σε κατά το δυνατόν απλοποιημένη μορφή) απλά με τη χρήση του γενικού ολοκληρωτικού τύπου για την αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier.

ΑΣΚΗΣΗ B15 (Κεφάλαια B4, B11, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:1) Να ελεγχθεί αν είναι δυνατή ή όχι η εύρεση της γενικής λύσεως της εξίσωσης της μεταγωγής-διαχύσεως με γενική (όχι απλά εκθετική) κατάλληλα παραγωγίσιμη δοκιμαστική συνάρτηση της μορφής $\varphi(x + \mu t)$. (β:2) Η εύρεση της ίδιας γενικής λύσεως με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης τελικά (γ:2) σε ολοκληρωτική

μορφή. (δ:1) Μοιάζει το παρόν τελικό αποτέλεσμα με το αντίστοιχο της προηγούμενης ασκήσεως; (ε:2) Λαμβάνοντας υπόψη και τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier $G(\omega)$ μιας συναρτήσεως $g(x)$, εδώ της αρχικής μας συνθήκης $c(x, 0) = g(x)$, πώς ακριβώς θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε τη γενική λύση που βρήκαμε στην παρούσα άσκηση στη μερική λύση (ή ειδική λύση) που είχαμε βρει στην προηγούμενη άσκηση παίρνοντας και τώρα υπόψη την αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$; Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να πετύχουμε τη σύμπτωση των αποτελεσμάτων με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier και με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως.

ΑΣΚΗΣΗ B16 (Κεφάλαια B1, B2, B5, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική):

Θεωρούμε το ενδιαφέρον πρόβλημα της μονοδιάστατης μεταγωγής-διαχύσεως ρύπου σε υδατόρρευμα με άγνωστη συνάρτηση τη συγκέντρωση $c(x, t)$ του ρύπου (με x τη θέση κατά μήκος του υδατορρέυματος και t το χρόνο). Η ταχύτητα του νερού (του ύδατος) στο υδατόρρευμα είναι V και θεωρείται σταθερή. Ο συντελεστής μοριακής διαχύσεως είναι D . (Οι σταθερές V και D θεωρούνται γνωστές.) Ζητούνται: (α:1) Να γραφεί (κατευθείαν!) η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. (β:1) Να δοθούν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (γ:2) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών να αναχθεί (κατευθείαν!) σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (με άγνωστες συναρτήσεις τις $X(x)$ και $T(t)$), η δεύτερη με μία μόνο παράμετρο: τη $-\lambda$ (καμία άλλη!). (δ:2) Να βρεθεί η γενική λύση $T(t)$ της χρονικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως. (ε:2) Τέλος να βρεθεί και η γενική λύση $X(x)$ της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως. (Αρκετά ώς εδώ!)

ΑΣΚΗΣΗ B17 (Κεφάλαια B1, B2, B4, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική):

Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική θεωρούμε τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με μεταγωγή και διάχυση (καλύτερος όρος μοριακή διάχυση). Υφίσταται επίσης και αποδόμηση του ρύπου πρώτης τάξεως. Προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc$$

με άγνωστη συνάρτηση τη συγκέντρωση $c = c(x, t)$ του ρύπου στο νερό του υδατορρέυματος. Οι ποσότητες V , D και k είναι γνωστές σταθερές. Ζητούνται: (α:1) Ποιος ακριβώς όρος αφορά: (i) στη μεταγωγή, (ii) στη διάχυση και (iii) την αποδόμηση του ρύπου; (β:3) Με κατάλληλη αλλαγή των ανεξάρτητων μεταβλητών (συγκεκριμένα με κίνηση του παρατηρητή μαζί με το νερό στο υδατόρρευμα) η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους σε απλούστερη εξίσωση τώρα χωρίς τον όρο της μεταγωγής του ρύπου. (γ:3) Στη συνέχεια κάνουμε κατάλληλη αλλαγή της άγνωστης συναρτήσεως (της εξαρτημένης μεταβλητής) από $\hat{c}(x, t) \equiv c(x, t)$ σε $c^*(x, t)$ συγκεκριμένα με

$$\hat{c}(x, t) = c^*(x, t)e^{-kt}.$$

Δηλαδή βγάζουμε έξω από την άγνωστη συνάρτηση τον παράγοντα e^{-kt} , ο οποίος έχει σχέση με την αποδόμηση του ρύπου, ζητείται κι η παραπέρα απλοποίηση της διαφορικής εξισώσεως του παρόντος φαινομένου με εξάλειψη και του όρου της αποδομήσεως του ρύπου. (δ:1) Τέλος να αναφερθούν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της τελικής μας και τόσο γνωστής διαφορικής εξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΗ B18 (Κεφάλαιο B1, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική θεωρούμε το πρόβλημα της διαχύσεως ρύπου με γνωστό το συντελεστή διαχύσεως (σωστότερα μοριακής διαχύσεως) D . Σε ένα τέτοιο συγκεκριμένο πρόβλημα σε υδατόρρευμα προκύπτει η συνάρτηση

$$c(x, t) = c_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right)$$

(με τα c_0 και D γνωστές σταθερές) για τη συγκέντρωση $c(x, t)$ του ρύπου με x τη θέση κατά μήκος του υδατορρέυματος (εδώ $x \geq 0$) και t το χρόνο (εδώ $t \geq 0$). Με δεδομένο τον τύπο αυτό για τη συγκέντρωση $c(x, t)$ του ρύπου ζητούνται: (α:5) Η επαλήθευση ότι πραγματικά ισχύει η εξίσωση της διαχύσεως. (β:1) Ο προσδιορισμός της αρχικής συνθήκης $c(x, 0)$. (γ:1) Ο προσδιορισμός της

συνοριακής συνθήκης $c(0, t)$. (δ:1) Η εξήγηση (χωρίς όμως μαθηματική απόδειξη!) εάν ή όχι η λύση αυτή $c(x, t)$ είναι επίσης εφαρμόσιμη και σε συνδυασμένη μεταφορά του ρύπου στο υδατόρρευμα ταυτόχρονα με μοριακή διάχυσή του και με μεταγωγή του (με σταθερή την ταχύτητα V του νερού στο υδατόρρευμα). Πώς γράφεται τότε η λύση αυτή;

ΑΣΚΗΣΗ B19 (Κεφάλαια B1, B4, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Εξετάζουμε το πρόβλημα της μεταφοράς ρύπου σε υδατόρρευμα τόσο με μεταγωγή: ταχύτητα του νερού V , όσο και με διάχυση: συντελεστής μοριακής διαχύσεως D . Άγνωστη είναι η συγκέντρωση $c(x, t)$ του ρύπου στο υδατόρρευμα. Ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και η ονομασία της. (β:1) Ποια είναι η άγνωστη συνάρτηση και ποιες οι δύο ανεξάρτητες μεταβλητές της; Σε ποια διαστήματα θεωρούνται συχνά ότι μεταβάλλονται οι ανεξάρτητες μεταβλητές στο υδατόρρευμα που εξετάζουμε; (γ:1) Ο τύπος της διαφορικής εξίσωσης με τον υπολογισμό της σχετικής διακρίνουσας Δ . (δ:2) Η επίλυση της σχετικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους υποχρεωτικά με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης (αν είναι δυνατόν και με το $i = \sqrt{-1}$ στον εκθέτη, εδώ είναι καλύτερα έτσι!) χωρίς τη χρήση τετραγωνικής ρίζας. (ε:1) Η επαλήθευση της λύσεως αυτής $c(x, t)$ μέχρι το σημείο αυτό. (στ:2) Τελικά η έκφραση της γενικής λύσεως $c(x, t)$ υπό τη μορφή κατάλληλου ολοκληρωτικού τύπου.

ΑΣΚΗΣΗ B20 (Κεφάλαια B1, B2, B5, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική εξετάζεται το πρόβλημα της μεταφοράς ρύπου σε άπειρο υδατόρρευμα τόσο με μεταγωγή: με ταχύτητα του νερού V , όσο και με διάχυση: με συντελεστή μοριακής διαχύσεως D . Άγνωστη είναι η συγκέντρωση $c(x, t)$ του ρύπου στο υδατόρρευμα. Ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους καθώς και η ονομασία της. (β:1) Οι ειδικές περιπτώσεις της: (i) μόνο για μεταγωγή και (ii) μόνο για διάχυση του ρύπου. (γ:1) Επανερχόμαστε στην αρχική διαφορική εξίσωση, όπου υπάρχει τόσο μεταγωγή όσο και διάχυση του ρύπου. Ποιος είναι ο τύπος της με τον υπολογισμό της σχετικής διακρίνουσας Δ ; (δ:1) Η αναγωγή αυτής (της αρχικής) διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους υποχρεωτικά με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και η επίλυση (ε:1) και της μιας (στ:1) και της άλλης (γενικές λύσεις χωρίς καμία συνθήκη). (ζ:1) Τελικά η έκφραση της γενικής λύσεως $c(x, t)$ υπό τη μορφή κατάλληλου ολοκληρωτικού τύπου βέβαια χωρίς συνοριακές συνθήκες. (η:1) Ποια είναι η άγνωστη συνάρτηση στον ολοκληρωτικό αυτό τύπο και ποια φυσική συνάρτηση θα χρειαζότανε να ξέρουμε από μετρήσεις για το μαθηματικό προσδιορισμό της;

ΑΣΚΗΣΗ B21 (Κεφάλαια B2, B11, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Θεωρούμε τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με την ισχύ της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad \text{με} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad c = c(x, t)$$

τη συγκέντρωση του ρύπου και τις σταθερές D , V και k γνωστές. Ισχύει επίσης η αρχική συνθήκη

$$c(x, 0) = b(x) \quad \text{με} \quad -\infty < x < \infty.$$

Οι συνοριακές συνθήκες για $x \rightarrow \pm\infty$ θεωρούνται μηδενικές. Ζητούνται: (α:1) Οι περιβαλλοντικές (όχι οι μαθηματικές) ονομασίες και των τεσσάρων όρων της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης. (β:1) Πότε ακριβώς θα μπορούσε η σταθερά k να πάρει αρνητική τιμή, δηλαδή η $-k$ θετική; (γ:2) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier να αναχθεί η πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση και (δ:2) να βρεθεί η λύση της $C(\omega, t) = \mathcal{F}\{c(x, t)\}$ που να πληροί βέβαια και την πιο πάνω αρχική συνθήκη. (ε:2) Με αντιστροφή κατά Fourier και τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$g(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ e^{-(D\omega^2 + iV\omega + k)t} \right\}$$

να θεωρείται γνωστός να βρεθεί η λύση $c(x, t)$ του πιο πάνω προβλήματος αρχικής τιμής.

ΑΣΚΗΣΗ B22 (Κεφάλαιο B10, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Θεωρούμε και εδώ τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με την ισχύ της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad \text{με } x > 0, \quad t > 0, \quad c = c(x, t)$$

τη συγκέντρωση του ρύπου και τις σταθερές V και k γνωστές. Ισχύουν επίσης οι δύο συνθήκες

$$c(x, 0) = 0 \quad \text{για } x \geq 0 \quad (\text{χρονική αρχική συνθήκη})$$

και επίσης

$$c(0, t) = c_0 \quad \text{για } t > 0 \quad (\text{χωρική αρχική συνθήκη}).$$

Ζητούνται: (α:1) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace εδώ ως προς το χρόνο t να αναχθεί η πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση και (β:1) να βρεθεί η λύση της $C(x, s) = \mathcal{L}\{c(x, t)\}$ που να πληροί και τις πιο πάνω συνθήκες. (γ:2) Με αντιστροφή κατά Laplace και με χρήση και της βηματικής συναρτήσεως του Heaviside να βρεθεί η λύση $c(x, t) = \mathcal{L}^{-1}\{C(x, s)\}$ του αρχικού προβλήματος μεταφοράς ρύπου. (δ:1) Η ίδια λύση να γραφεί και σε μορφή με δύο χωριστούς τύπους, τώρα χωρίς τη χρήση της συναρτήσεως του Heaviside. (ε:1) Να εξηγηθεί με φυσικό τρόπο η λύση του προηγούμενου ερωτήματος. Τι συμβαίνει και γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ B23 (Κεφάλαια B1, B2, B5, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με x τη θέση: $x \geq 0$ και t το χρόνο: $t \geq 0$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad \text{με } c = c(x, t), \quad x \geq 0, \quad t \geq 0$$

και τα D , V και k τρεις σταθερές. Ζητούνται: (α:1) Τι ακριβώς δηλώνουν ένας-ένας οι όροι της και οι σταθερές σ' αυτούς στο σχετικό φυσικό πρόβλημα; (β:2) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με χρονική εξίσωση την

$$\dot{T}(t) + \lambda T(t) = 0.$$

(γ:1) Η γενική λύση της χρονικής διαφορικής εξίσωσης. (δ:4) Με αλλαγή άγνωστης συναρτήσεως

$$c(x, t) = e^{-kt} c^*(x, t)$$

η νέα και απλοποιημένη μορφή της διαφορικής εξίσωσης που προκύπτει έτσι.

ΑΣΚΗΣΗ B24 (Κεφάλαιο B10, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση θεωρώντας γνωστές και τις τρεις συνθήκες (για $t = 0$ και $x = 0$)

$$c(x, 0) = c_0(x), \quad c(0, t) = f(t), \quad \frac{\partial c}{\partial x}(0, t) = g(t)$$

με τις τρεις συναρτήσεις $c_0(x)$, $f(t)$ και $g(t)$ γνωστές. Ζητούνται: Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο t (όχι ως προς τη θέση x) (α:5) η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (β:2) Οι δύο αρχικές συνθήκες (για $x = 0$) που τη συνοδεύουν. (γ:1) Με ποιες μεθόδους μπορεί να λυθεί το σχετικό πρόβλημα;

ΑΣΚΗΣΗ B25 (Κεφάλαια B1, B2, B4, B5, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Στη μονοδιάστατη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc$$

με $c = c(x, t)$, x τη θέση και t το χρόνο. Ζητούνται: (α:1) Οι ονομασίες των τριών σταθερών στη διαφορική αυτή εξίσωση. (β:1) Οι ονομασίες και των τεσσάρων όρων της. (γ:1) Η ονομασία και μια συνηθισμένη μονάδα της άγνωστης συναρτήσεως $c(x, t)$. (δ:1) Η εύρεση του τύπου της διαφορικής εξίσωσης, εάν βέβαια υπάρχει. (ε:2) Έλεγχος εάν ή όχι είναι διαχωρίσιμη σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και (στ:1) αναγραφή τους σε συνηθισμένη μορφή. (ζ:2) Εύρεση λύσεως $c_L(x, t)$

(με παράμετρο λ) με χρήση της μεθόδου της εκθετικής αντικαταστάσεως με φανταστικές σταθερές $i\lambda$ και $i\mu$ στην αρχική εκθετική μορφή. (η:1) Η παραπέρα εύρεση της γενικότερης λύσεως (σε ολοκληρωτική μορφή)

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda x - (D\lambda^2 + iV\lambda + k)t} d\lambda.$$

ΑΣΚΗΣΗ B26 (Κεφάλαια B1, B2, B4, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad \text{με} \quad c = c(x, t).$$

Ζητούνται: (α:1) Οι ονομασίες των τεσσάρων όρων της. (β:1) Η λεπτομερής εύρεση του τύπου της. (γ:1) Οι χαρακτηρισμοί της. (δ:3) Η λύση της με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως κι από αυτήν (ε:3) η γενική λύση της σε ολοκληρωτική μορφή με (στ:1) πλήρη επαλήθευσή της.

ΑΣΚΗΣΗ B27 (Κεφάλαιο B5, Περιβαλλοντική Μηχανική: Περιβαλλοντική Υδραυλική): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Εδώ ζητούνται επίσης: (α:3) Ο έλεγχος εάν ή όχι είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. Οι σχετικές (β:1) χρονική και (γ:1) χωρική συνήθειες διαφορικές εξισώσεις με επίλυση (δ:1) και της πρώτης και (ε:4) και της δεύτερης με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως χωρίς συνθήκες, γενικά, και με τη χρήση κατάλληλης παραμέτρου λ .

B3.2. Μεταφορά ρύπου στο έδαφος

ΑΣΚΗΣΗ B28 (Κεφάλαιο B11, Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος): Θεωρούμε τη μονοδιάστατη μεταφορά ρύπου στο έδαφος (κατά τη διεύθυνση x με $-\infty < x < \infty$) αποκλειστικά με διάχυσή του στο νερό μέσα στο έδαφος. Προκύπτει έτσι η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως ως προς τη συγκέντρωση $c(x, t)$ του ρύπου (με x τη θέση και t το χρόνο) με γνωστό συντελεστή διαχύσεως D . Σαν αρχική συνθήκη (για $t = 0$) έχουμε τη συνθήκη

$$c(x, 0) = M^* \delta(x)$$

με M^* γνωστή ανηγμένη μάζα και $\delta(x)$ τη συνάρτηση δέλτα του Dirac. Ζητούνται: (α:3) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier η αναγωγή της εξισώσεως της διαχύσεως που προαναφέρθηκε και της αρχικής συνθήκης της σε συνήθη διαφορική εξίσωση και αρχική συνθήκη. (β:2) Η επίλυση της συνήθους διαφορικής εξισώσεως μαζί με την αρχική συνθήκη της. (γ:3) Η λύση $c(x, t)$ της αρχικής διαφορικής εξισώσεως παίρνοντας υπόψη και τον τύπο

$$\mathcal{F} \left\{ \exp \left(-\frac{x^2}{b^2} \right) \right\} = \sqrt{\pi} b \exp \left(-\frac{b^2 \omega^2}{4} \right) \quad \text{με} \quad b > 0.$$

ΑΣΚΗΣΗ B29 (Κεφάλαια B1, B2, B11, Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος): Σε μονοδιάστατη μεταφορά ρύπου στο έδαφος με μεταγωγή, διάχυση και διασπορά του ρύπου, αλλά και ταυτόχρονη αποδόμησή του πρώτης τάξεως, προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = E_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - kc \quad \text{με} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{και} \quad 0 < t < \infty.$$

με $c(x, t)$ τη συγκέντρωση του ρύπου. Στην εξίσωση αυτή οι σταθερές R , E_x , V_x και k είναι γνωστές θετικές σταθερές. Πιο συγκεκριμένα: R είναι ο **συντελεστής καθυστέρησης** (ή **παράγοντας καθυστέρησης**), E_x ο ενιαίος **συντελεστής διαμήκους διαχύσεως και διασποράς**, V_x η **διαμήκης ταχύτητα** του νερού που ρέει διά μέσου των πόρων του εδάφους και που μεταφέρει το ρύπο και k η **σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως πρώτης τάξεως**, την οποία έχουμε υποθέσει εδώ (όχι δευτέρας ή άλλης τάξεως) για την αποδόμηση του ρύπου. Ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της διαφορικής εξισώσεως. (β:1) Η εξήγηση για το ποιοι ακριβώς όροι εκφράζουν: (i) τη μεταγωγή, (ii) τη διάχυση και τη διασπορά (πρόκειται για εντελώς διαφορετικά φαινόμενα

από φυσικής απόψεως, αλλά και πολύ συγγενή από μαθηματικής απόψεως στη μοντελοποίησή τους!) και (iii) την αποδόμηση του ρύπου. (γ:2) Υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (δ:1) Υπό ποιες συννοριακές συνθήκες στο άπειρο (για $x = \pm\infty$) ισχύει η αναγωγή αυτή; (ε:1) Η γενική λύση της συνήθους αυτής διαφορικής εξίσωσης. (στ:1) Η μερική (ή ειδική) λύση της ίδιας εξίσωσης με αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$. (ζ:1) Η αντίστοιχη μερική λύση $c(x, t)$ σε ολοκληρωτική μορφή (με ολοκλήρωμα) απλά με χρήση του γενικού τύπου του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier.

ΑΣΚΗΣΗ B30 (Κεφάλαια B4, B10, B11, Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση με την ίδια διαφορική εξίσωση και την ίδια αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$. Ζητούνται επίσης: (α:3) Η εύρεση της ίδιας ακριβώς γενικής (χωρίς την αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$) λύσεως (όπως αρχικά και με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier), εδώ όμως με την κάπως πιο απλή μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης συμπεριλαμβάνοντας εξαρχής και τη φανταστική μονάδα $i = \sqrt{-1}$ σ' αυτήν και με τη χρονική σταθερά να δηλώνεται (καλύτερα) με το σύμβολο ω αντί με το σύμβολο λ ή το μ . (β:3) Ένας τρίτος τρόπος τώρα: υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace η αναγωγή της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (γ:2) Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης με σαφή δήλωση σ' αυτήν της μεταβλητής s του μετασχηματισμού Laplace οπουδήποτε και αν παρουσιάζεται η μεταβλητή αυτή.

ΑΣΚΗΣΗ B31 (Κεφάλαια B1, B10, Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος): Στη μονοδιάστατη υπόγεια μεταφορά ρύπου με τη ροή ύδατος παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = -V \frac{\partial c}{\partial x} + D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - kc \quad \text{με } c = c(x, t), \quad x > 0 \quad \text{και} \quad t > 0.$$

Η άγνωστη συνάρτηση $c(x, t)$ παριστάνει τη συγκέντρωση του ρύπου. Οι ποσότητες R, V, D και k είναι γνωστές θετικές σταθερές. Ισχύουν κι οι εξής τρεις συνθήκες: μία αρχική και δύο συννοριακές:

$$c(x, 0) = 0 \quad \text{με } x \geq 0, \quad c(0, t) = c_0 \quad \text{με } c_0 \text{ θετική σταθερά και } t > 0, \quad c(\infty, t) = 0 \quad \text{με } t \geq 0.$$

Ζητούνται: (α:1) Ο υπολογισμός του τύπου της διαφορικής αυτής εξίσωσης με τη χρήση κατάλληλης διακρίνουσας. (β:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (γ:2) Με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο t η αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (δ:2) Η γενική λύση αυτής της συνήθους διαφορικής εξίσωσης με ρητή γραφή της μεταβλητής s οπουδήποτε αυτή παρουσιάζεται. (ε:2) Η αντίστοιχη μερική λύση που λαμβάνει υπόψη και τις δύο συννοριακές συνθήκες. (Δε ζητείται να γίνει και η αντιστροφή κατά Laplace της λύσεως αυτής!)

ΑΣΚΗΣΗ B32 (Κεφάλαια B1, B5, Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:1) Στην εξίσωση αυτή μεταφοράς ρύπου τι ακριβώς παριστάνει ο κάθε όρος χωριστά; (β:3) Με τις νέες ανεξάρτητες μεταβλητές

$$\xi = x - \frac{V}{R} t \quad \text{και} \quad \tau = t$$

να βρεθεί ποια κάπως απλοποιημένη μορφή παίρνει η ίδια διαφορική εξίσωση. (γ:3) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών να αναχθεί η απλοποιημένη αυτή μορφή σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. (δ:1) Να βρεθεί η αποδεκτή από φυσικής απόψεως (με επεξήγηση!) λύση της χρονικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ B33 (Κεφάλαιο B11, Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος): Για την εξίσωση της προπροηγούμενης ασκήσεως, αλλ' εδώ με $R = 1, V = 0$ και τώρα $-\infty < x < \infty$, ενώ πάλι $t > 0$, ζητούνται: (α:2) Η αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier, (β:2) Η γενική λύση αυτής της συνήθους διαφορικής εξίσωσης και

(γ:2) Η μερική λύση που πληροί τη γενικότερη αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$. (δ:2) Με τη χρήση και του τύπου

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-D\omega^2 t}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$$

η λύση $c(x, t)$ του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής με τη μορφή ολοκληρωτικού τύπου.

ΑΣΚΗΣΗ B34 (Κεφάλαια B2, B5, Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος, Πλάκες): Στην Περιβαλλοντική Μηχανική κατά τη μονοδιάστατη μεταφορά ρύπου A στο έδαφος με μεταγωγή-διάχυση παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = -V \frac{\partial c}{\partial x} + D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad \text{με } c = c(x, t)$$

τη συγκέντρωση του ρύπου και R , V και D κατάλληλες θετικές σταθερές. Ζητούνται: (α:4) Ο έλεγχος αν ή όχι η εξίσωση αυτή είναι διαχωρίσιμη, δηλαδή αν ή όχι είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί σ' αυτήν η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. (β:4) Το ίδιο ερώτημα για τη στατική εξίσωση της συνήθους πλάκας χωρίς καθόλου κάθετη φόρτιση: φόρτιση μόνο από ροπές στο σύνορό της.

ΑΣΚΗΣΗ B35 (Κεφάλαιο B5, Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος): Συνεχίζουμε το πρώτο ερώτημα της προηγούμενης ασκήσεως. Θεωρούμε τώρα στο δεξιό μέλος και επιπλέον όρο $+r(x, t)$ ρυθμού παραγωγής (ή αποδομήσεως) του ρύπου A . Αυτόν τον όρο τον υποθέτουμε εδώ γνωστή συνάρτηση και μάλιστα με γνωστό ανάπτυγμα

$$r(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) X_n(x)$$

στις ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$ του προβλήματός μας. Αυτές περιλαμβάνουν και τις συνοριακές συνθήκες στα άκρα του μονοδιάστατου πεδίου υδατικής ροής που έχουμε και υποτίθενται εδώ γνωστές συναρτήσεις ορθογώνιες μεταξύ τους. Ζητούνται: (α:2) Η μετατροπή της μη ομογενούς εξίσωσης που περιγράφηκε σε κατάλληλη σειρά με τη μέθοδο του αναπτύγματος στις γνωστές ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$. (β:3) Η απαλοιφή των χωρικών (ως προς τη θέση) παραγώγων στη σειρά αυτή. (γ:3) Από την τελευταία σειρά οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τον προσδιορισμό των άγνωστων χρονικών συναρτήσεων $q_n(t)$ της λύσεως $c(x, t)$ που ζητάμε να βρούμε. (Όλες οι σειρές εδώ θεωρούνται ότι συγκλίνουν.)

ΑΣΚΗΣΗ B36 (Κεφάλαια B1, B2, B11, Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος): Σε ένα πρόβλημα μονοδιάστατης μεταφοράς ρύπου στο έδαφος με $-\infty < x < \infty$ και $t \geq 0$ παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} - kc$$

με $c = c(x, t)$ τη συγκέντρωση του ρύπου και R , D , V και k τέσσερις γνωστές σταθερές. Η αρχική συνθήκη είναι $c(x, 0) = c_0(x)$ με τη $c_0(x)$ μια γνωστή συνάρτηση. Ζητούνται: (α:1) Οι ονομασίες των τεσσάρων όρων της εξίσωσης αυτής. (β:1) Η εύρεση του τύπου της και οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (γ:1) Η απλοποίησή της με αλλαγή άγνωστης συναρτήσεως της μορφής

$$c(x, t) = c^*(x, t)e^{-kt/R}.$$

(δ:1) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier η αναγωγή της αρχικής διαφορικής εξίσωσης (όχι της απλοποιημένης διαφορικής εξίσωσης) σε συνήθη διαφορική εξίσωση και (ε:1) η λύση της τελευταίας που να πληροί και την αρχική συνθήκη. (στ:2) Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$G(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-(D\omega^2 + iV\omega + k)t/R}\right\}$$

γνωστό η τελική λύση $c(x, t)$ του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής. (ζ:1) Η ίδια λύση κατευθείαν με τη χρήση του τύπου αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier. (η:1) Η μερική λύση (ή ειδική λύση) $c_m(x, t)$ για

$$c_0(x) = m\delta(x - x_0)$$

με τα m και x_0 γνωστές σταθερές και $(\theta:1)$ η λεπτομερής φυσική ερμηνεία της.

ΑΣΚΗΣΗ B37 (Κεφάλαιο B10, Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος):

Ζητούνται: $(\alpha:1)$ Με γνωστό ότι

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\} = \frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}} \quad \text{ο μετασχηματισμός Laplace} \quad \mathcal{L}\left\{\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right\}.$$

$(\beta:1)$ Πρόχειρες γραφικές παραστάσεις (στο ίδιο σχήμα) των συναρτήσεων $\operatorname{erf}(x)$ και $\operatorname{erfc}(x)$ και οι τιμές τους για $x = 0$ και $x \rightarrow \infty$. Συνεχίζουμε τώρα την προηγούμενη άσκηση, τώρα όμως με $V = 0$, $k = 0$, $x \geq 0$ και $t \geq 0$, δηλαδή μόνο με τα R και D μη μηδενικά. Εδώ θεωρούμε το πρόβλημα

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad c(x, 0) = c_1, \quad c(0, t) = c_2$$

με τα c_1 και c_2 σταθερές, $x \geq 0$ και $t \geq 0$. Τώρα ζητούνται: $(\gamma:2)$ Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο t η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση. $(\delta:1)$ Η γενική λύση της τελευταίας, $(\epsilon:1)$ η αντίστοιχη από φυσικής απόψεως αποδεκτή λύση και $(\sigma:1)$ η λύση που πληροί και τη συνοριακή συνθήκη $c(0, t) = c_2$. $(\zeta:2)$ Αντιστρέφοντας κατά Laplace, η λύση $c(x, t)$ του πιο πάνω προβλήματος. $(\eta:1)$ Τέλος η εύρεση των τιμών της $c(x, 0)$, $c(0, t)$, $c(x, \infty)$ και $c(\infty, t)$.

ΑΣΚΗΣΗ B38 (Κεφάλαια B1, B5, Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος):

Σε ένα πρόβλημα μονοδιάστατης μεταφοράς ρύπου στο έδαφος με $0 \leq x \leq L$ και $t \geq 0$ παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$R \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x}$$

με $c = c(x, t)$ τη συγκέντρωση του ρύπου και R , D και V γνωστές σταθερές. Η αρχική συνθήκη είναι

$$c(x, 0) = c_0(x) \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L$$

και με τη $c_0(x)$ γνωστή συνάρτηση. Ζητούνται: $(\alpha:1)$ Η εύρεση του τύπου κι όλοι οι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. Για τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$c(0, t) = C_0 \quad \text{και} \quad c(L, t) = C_L$$

(με τις δύο ποσότητες C_0 και C_L γνωστές σταθερές) η αναγωγή του σχετικού προβλήματος σε ένα πρόβλημα με ομογενείς συνοριακές συνθήκες με $(\beta:3)$ πλήρη εύρεση της σχετικής βοηθητικής συναρτήσεως και $(\gamma:2)$ επαλήθευσή της ως προς τις συνοριακές συνθήκες. $(\delta:2)$ Η επιβεβαίωση ότι πραγματικά ισχύει αμετάβλητη η παραπάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και για τη νέα άγνωστη συνάρτηση $c_t(x, t)$. $(\epsilon:2)$ Η εύρεση της τροποποιημένης τώρα αρχικής συνθήκης του προβλήματος (με ομογενείς συνοριακές συνθήκες) για τη νέα άγνωστη συνάρτηση $c_t(x, t)$.

ΑΣΚΗΣΗ B39 (Κεφάλαια B4, B11, Περιβαλλοντική Μηχανική: Μεταφορά Ρύπου στο Έδαφος):

Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση για την ίδια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, τώρα όμως με $-\infty < x < \infty$ και πάλι $t \geq 0$. Ζητούνται: $(\alpha:1)$ Η επίλυσή της με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως με φανταστικές σταθερές $i\lambda$ και $i\mu$ στον εκθέτη και χωρίς τετραγωνικές ρίζες. $(\beta:1)$ Η επαλήθευση της λύσεως και $(\gamma:1)$ η γενίκευσή της σε ολοκληρωτικό τύπο. Τώρα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier $(\delta:1)$ η αναγωγή της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση και $(\epsilon:2)$ η λύση της που να πληροί και την αρχική συνθήκη $c(x, 0) = c_0(x)$ με $-\infty < x < \infty$. $(\sigma:1)$ Με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier

$$G(x, t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-(D\omega^2 + iV\omega)t/R}\right\}$$

γνωστό η τελική λύση $c(x, t)$ του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής. (ζ:1) Η ίδια λύση κατευθείαν με τη χρήση του τύπου αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier. (η:1) Η μερική λύση (ή ειδική λύση) $c_m(x, t)$ για

$$c_0(x) = m\delta(x - x_0)$$

με τα m και x_0 γνωστές σταθερές. (θ:1) Τέλος η λεπτομερής φυσική ερμηνεία της.

B3.3. Ατμοσφαιρική ρύπανση

ΑΣΚΗΣΗ B40 (Κεφάλαιο B11, Περιβαλλοντική Μηχανική: Ατμοσφαιρική Ρύπανση): Στην Περιβαλλοντική Μηχανική θεωρούμε το πρόβλημα της διασποράς ρύπου στην ατμόσφαιρα από σημειακό ρυπαντή στη θέση $(0, 0)$. Στη μόνιμη κατάσταση ισχύει η διαφορική εξίσωση

$$V \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad \text{με} \quad -\infty < x < \infty \quad \text{και} \quad -\infty < y < \infty,$$

η άγνωστη συνάρτηση τη συγκέντρωση $c = c(x, y)$ του ρύπου στην ατμόσφαιρα (x είναι ο οριζόντιος άξονας και y ο κατακόρυφος) και V και D γνωστές σταθερές. Με τη συνθήκη

$$c(0, y) = m\delta(y)$$

(με το m σταθερά και δ τη συνάρτηση δέλτα του Dirac) να ισχύει ζητούνται: (α:2) Με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier ως προς y η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (β:1) Η εύρεση της γενικής και (γ:1) της μερικής λύσεως της συνήθους διαφορικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στην πιο πάνω συνθήκη $c(0, y) = m\delta(y)$. (δ:4) Με τη χρήση του γνωστού μετασχηματισμού Fourier

$$\mathcal{F}\left\{e^{-a^2 y^2}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} e^{-\omega^2/(4a^2)}$$

η εύρεση της λύσεως $c(x, y)$ του παρόντος προβλήματος (μαζί με τη συνθήκη $c(0, y) = m\delta(y)$) στο πεδίο των αρχικών μεταβλητών (x, y) (φυσικά με αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier από ω σε y).

ΑΣΚΗΣΗ B41 (Κεφάλαιο B10, Περιβαλλοντική Μηχανική: Ατμοσφαιρική Ρύπανση): Για τη διαφορική εξίσωση της προηγούμενης ασκήσεως, τώρα όμως στην περιοχή $x \geq 0$ και $y \geq 0$ και με νέες συνθήκες τις

$$c(0, y) = c_0 \quad \text{και} \quad c(x, 0) = \frac{c_0}{2}$$

(με το c_0 γνωστή σταθερά) Ζητούνται: (α:1) Η αναγωγή της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace ως προς τη μεταβλητή x . (β:2) Η λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης που προέκυψε χωρίς όμως απειρισμούς για $y \rightarrow \infty$. (γ:5) Με τη χρήση του τύπου

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{x}}\right)\right\} = \frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$$

και με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace η λύση $c(x, y)$ του παρόντος προβλήματος μεταφοράς.

B4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

B4.1. Διδιάστατη ροή

ΑΣΚΗΣΗ B42 (Κεφάλαια B3, B9, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή): Σε πρόβλημα μόνιμης (σταθερής), διδιάστατης (επίπεδης) και αστρόβιλης ροής ιδεατού ρευστού το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ επαληθεύει τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Σε περίπτωση κυκλικής συμμετρίας (ή συμμετρίας γύρω από τον άξονα Oz) έχουμε απλά $\Phi(x, y) = \varphi(r)$ με r την πολική ακτίνα και (προφανώς) με ανεξαρτησία από την πολική γωνία θ . Ζητούνται: (α:1) Η εξίσωση του Laplace σε

Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) για το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$. (β:7) Με τη δέουσα προσοχή η λεπτομερής αναγωγή της (χωρίς έτοιμους τύπους!) σε συνήθη διαφορική εξίσωση (με αλλαγή μεταβλητών: δηλαδή από (x, y) σε r , το r αρκεί εδώ λόγω της συμμετρίας!) τώρα όμως με άγνωστη συνάρτηση τη $\varphi(r)$.

ΑΣΚΗΣΗ B43 (Κεφάλαια B1, B5, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή): Σε μόνιμη (σταθερή) διδιάστατη (επίπεδη) ροή συμπιεστού ρευστού, αλλά χωρίς συνεκτικότητα (ιξώδες) παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{με} \quad \Phi = \Phi(x, y) \quad \text{και} \quad 0 < M < 1 \quad \text{τον αριθμό Mach της ροής.}$$

Ζητούνται: (α:1) Η εύρεση του τύπου της (επαναλαμβάνεται για $0 < M < 1$: για υποηχητική ροή). (β:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (γ:3) Η μετατροπή της σε απλούστερη εξίσωση με την αλλαγή μεταβλητών

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{1 - M^2}}, \quad \eta = y$$

και υποχρεωτικά χρήση του κανόνα της αλυσίδας. (δ:3) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (χωρίς απόπειρα επιλύσεώς τους).

ΑΣΚΗΣΗ B44 (Κεφάλαιο B9, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή): Θεωρούμε τη διδιάστατη (επίπεδη) μόνιμη (σταθερή) αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού στο επίπεδο Oxy που παρεμποδίζεται από σταθερό στερεό κυκλικό κύλινδρο ακτίνας a με κέντρο την αρχή των αξόνων $O = (0, 0)$. Υπενθυμίζεται η λύση της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace $\nabla^2 u = 0$ σε πολικές συντεταγμένες (r, θ)

$$u(r, \theta) = (C_0 + D_0 \ln r)A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

με τα A_n, B_n, C_n και D_n σταθερές. Η ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο είναι V_0 (με $V_0 > 0$) και παράλληλη στον άξονα Oy (προς τα πάνω). Ζητούνται: (α:1) Να αποδειχθεί ότι η ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής) $\Psi(r, \theta)$ στο άπειρο (για $r \rightarrow \infty$) έχει τη μορφή

$$\Psi(r, \theta)|_{r \rightarrow \infty} = -V_0 r \cos \theta.$$

(β:2) Να υπολογισθεί πλήρως η ροϊκή συνάρτηση $\Psi(r, \theta)$: σε όλο το πεδίο ροής. (γ:2) Με βάση τους τύπους

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad \text{και} \quad v_\theta = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

να υπολογισθούν οι συνιστώσες v_r και v_θ της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού σε πολικές συντεταγμένες. (δ:1) Πόση είναι η απόλυτα μέγιστη ταχύτητα του ρευστού στην περιφέρεια $r = a$ της κυκλικής τομής του κυλίνδρου και πού παρουσιάζεται; (ε:2) Ποια είναι τα **σημεία ανακοπής** της ροής;

ΑΣΚΗΣΗ B45 (Κεφάλαια B1, B3, Ρευστομηχανική: Διδιάστατη Ροή): Θεωρούμε εδώ τη μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού στις δύο διαστάσεις (x, y) . Με u και v τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) ζητούνται: (α:1) Απλά να αναφερθεί η εξίσωση της συνεχείας. (β:1) Να υπολογισθεί διανυσματικά ο στροβιλισμός της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού και με βάση αυτόν (γ:1) να αναφερθεί η βαθμωτή (μη διανυσματική) εξίσωση για το αστρόβιλο της ροής αυτής. Με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, y)$ να αποδειχθεί (δ:1) η αυτόματη πλήρωση της εξισώσεως του αστρόβιλου της ροής και (ε:1) ότι το δυναμικό αυτό $\Phi(x, y)$ πληροί τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Με τη χρήση της ροϊκής συναρτήσεως (ή συναρτήσεως ροής) $\Psi(x, y)$ να αποδειχθεί (στ:1) η αυτόματη πλήρωση της εξισώσεως της συνεχείας και (ζ:1) ότι η ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής) $\Psi(x, y)$ πληροί και αυτή τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace. (η:1) Λοιπόν τι πετυχαίνουμε με τη χρήση της συναρτήσεως $\Phi(x, y)$ ή της συναρτήσεως $\Psi(x, y)$ στο παρόν αρχικό σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους; (θ:1) Ποιοι χαρακτηρισμοί μπορούν να δοθούν γι' αυτό; (ι:1) Ποιες είναι οι ιδιότητες του ιδεατού ρευστού που

υποθέσαμε εδώ; Τις έχει το νερό (το βασικό ρευστό του Πολιτικού Μηχανικού τόσο στην Υδραυλική όσο και στην Υδρομηχανική) προσεγγιστικά τουλάχιστον ή όχι ή έχει μόνο τη μία;

B4.2. Τριδιάστατη ροή

ΑΣΚΗΣΗ B46 (Κεφάλαια B3, B5, Ρευστομηχανική: Τριδιάστατη Ροή): Στη Ρευστομηχανική εξετάζουμε την τριδιάστατη μόνιμη αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού. Ζητούνται: (α:1) Πότε ένα ρευστό καλείται ιδεατό; (β:1) Στην πιο πάνω ροή με γνωστό το δυναμικό ταχύτητας $\Phi = \Phi(x, y, z)$ από ποιον τύπο της Διανυσματικής Αναλύσεως προσδιορίζεται η ταχύτητα $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y, z)$ του ρευστού; (γ:1) Από τον τύπο αυτό πώς υπολογίζονται αναλυτικότερα οι τρεις συνιστώσες

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z) \quad \text{και} \quad w = w(x, y, z)$$

της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού; (δ:1) Να ελεγχθεί ότι με χρήση του δυναμικού ταχύτητας Φ πράγματι προκύπτει αστρόβιλη ροή: ο στροβιλισμός είναι ίσος με μηδέν. (ε:1) Ποια είναι η εξίσωση της συνεχείας στο παρόν πρόβλημα και ποια μορφή παίρνει αυτή, εάν χρησιμοποιηθεί το δυναμικό ταχύτητας Φ ; Στην τελευταία εξίσωση να εφαρμοσθεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών

$$\Phi(x, y, z) = X(x)F(y, z)$$

με αναγωγή της σε δύο διαφορικές εξισώσεις: (στ:1) τη μία συνήθη ως προς $X(x)$ (χωρίς τις μεταβλητές y και z) και (ζ:2) την άλλη με μερικές παραγώγους ως προς $F(y, z)$ (χωρίς τη μεταβλητή x).

ΑΣΚΗΣΗ B47 (Κεφάλαια B1, B4, Ρευστομηχανική: Τριδιάστατη Ροή): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Εδώ ζητούνται για τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \rho^2 F = 0 \quad \text{με} \quad F = F(y, z)$$

και το ρ γνωστή σταθερά: (α:1) Η εύρεση του τύπου της. (β:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (γ:1) Απόπειρα επιλύσεώς της με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξισώσεως με βάση συνάρτηση της μορφής $\varphi(y + \mu z)$ και τελικά (δ:1) Η εξήγηση αν η μέθοδος αυτή είναι εφαρμόσιμη ή όχι. (ε:2) Η εύρεση μιας μερικής λύσεώς της $F_\lambda(y, z)$, τώρα όμως με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (αλλά χωρίς κανένα $i = \sqrt{-1}$ στον εκθέτη!) και στη συνέχεια (στ:2) της γενικής λύσεώς της $F(y, z)$.

ΑΣΚΗΣΗ B48 (Κεφάλαια B1, B3, Ρευστομηχανική: Τριδιάστατη Ροή): Στη Ρευστομηχανική θεωρούμε τη μόνιμη (σταθερή) τριδιάστατη αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού. Δηλώνοντας με u, v και w τις τρεις συνιστώσες της διανυσματικής ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού (κατά τους άξονες Ox, Oy και Oz αντίστοιχα), ζητούνται: (α:1) Ο υπολογισμός του στροβιλισμού (σχεδόν ισοδύναμα της περιστροφής) της ταχύτητας \mathbf{V} μέσω των συνιστωσών της u, v και w . (β:1) Για αστρόβιλη ροή, που την υποθέτουμε εδώ, οι σχετικές τρεις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. (γ:2) Με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας $\Phi = \Phi(x, y, z)$ η απόδειξη πληρώσεως και των τριών αυτών διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή η εξασφάλιση του ότι η ροή είναι αστρόβιλη (εξασφάλιση του αστρόβιλου της ροής). (δ:1) Απομένει η εξίσωση της συνεχείας. Ποια είναι αυτή και ποια μορφή παίρνει τώρα με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας Φ στο πρόβλημα που εξετάζουμε; (ε:1) Να δοθούν επτά χαρακτηρισμοί για την τελική εξίσωση αυτή. (στ:1) Τι πετύχαμε τελικά από μαθηματικής απόψεως στο παρόν πρόβλημα με την εισαγωγή του δυναμικού ταχύτητας Φ και με ποιο ακριβώς κόστος; (ζ:1) Θα ήταν χρήσιμο το δυναμικό αυτό Φ και σε μη αστρόβιλη ροή; Γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ B49 (Κεφάλαιο B3, Ρευστομηχανική: Τριδιάστατη Ροή): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση με τις ίδιες υποθέσεις για τη ροή. Εδώ θεωρούμε το δυναμικό ταχύτητας

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{με} \quad x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \quad \text{ή} \quad \Phi(x, y, z) = \frac{1}{\rho} \quad \text{με} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$$

σε Καρτεσιανές συντεταγμένες x, y και z . Ζητούνται: (α:2) Να υπολογισθούν και οι τρεις συνιστώσες u, v και w της ταχύτητας \mathbf{V} του ιδεατού ρευστού. (β:3) Για τις συνιστώσες αυτές (εδώ, όχι γενικά) να επαληθευθούν και οι τρεις εξισώσεις που δηλώνουν το αστρόβιλο της ροής. (γ:3) Να επαληθευθεί άμεσα ότι πραγματικά το πιο πάνω συγκεκριμένο δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y, z)$ είναι, όπως πρέπει, αρμονική συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΗ B50 (Κεφάλαια B3, B5, Ρευστομηχανική: Τριδιάστατη Ροή): Θεωρούμε τη μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού στις τρεις διαστάσεις (x, y, z) . Με u, v, w τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) ζητούνται: (α:1) Να αναφερθεί η εξίσωση της συνεχείας. (β:1) Να υπολογισθεί ο στροβιλισμός της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού και με βάση αυτόν (γ:1) να αναφερθούν οι τρεις βαθμωτές (μη διανυσματικές) εξισώσεις για το αστρόβιλο της ροής αυτής. Με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, y, z)$ να αποδειχθούν (δ:1) η αυτόματη πλήρωση των εξισώσεων του αστρόβιλου της ροής και (ε:1) ότι το δυναμικό αυτό $\Phi(x, y, z)$ πληροί την τριδιάστατη εξίσωση του Laplace. (στ:2) Για την εξίσωση αυτή να αποδειχθεί ότι είναι διαχωρίσιμη εδώ με

$$\Phi(x, y, z) = F(x, y)Z(z)$$

και με σταθερά διαχωρισμού λ_1 . (ζ:2) Στη συνέχεια με

$$F(x, y) = X(x)Y(y)$$

να αποδειχθεί ότι είναι εφικτός και δεύτερος χωρισμός των μεταβλητών (τώρα των x και y) με σταθερά διαχωρισμού λ_2 . (η:1) Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, να γραφούν και οι τρεις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις τρεις άγνωστες συναρτήσεις $X(x), Y(y)$ και $Z(z)$ χωριστά.

B5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΔΑΦΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

B5.1. Διήθηση

ΑΣΚΗΣΗ B51 (Κεφάλαια B1, B4, Εδαφομηχανική: Διήθηση): Στην Εδαφομηχανική θεωρούμε τη διδιάστατη διήθηση του νερού μέσα σε ανισότροπο (όχι ισότροπο) έδαφος. Για το υδραυλικό φορτίο (ή διαφορά πιεζομετρικής στάθμης) $h = h(x, z)$ προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \text{με} \quad h = h(x, y), \quad k_x > 0, \quad k_y > 0,$$

x τη θέση στο οριζόντιο επίπεδο και z το βάθος μέσα στο έδαφος. Τα σύμβολα k_x και k_z δηλώνουν τους συντελεστές διαπερατότητας του εδάφους κατά τις διευθύνσεις x και z αντίστοιχα, που είναι θετικοί αριθμοί: $k_x, k_z > 0$. Ζητούνται: (α:1) Η εύρεση του τύπου της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (β:2) Η γενική λύση της με τη χρήση δοκιμαστικής συναρτήσεως της μορφής $\varphi(x + \mu z)$ και της σχετικής χαρακτηριστικής εξίσωσης. Πότε ακριβώς η λύση αυτή είναι πραγματική; (γ:1) Η επαλήθευση της γενικής αυτής λύσεως. (δ:2) Με την απλή αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής

$$\xi = x \sqrt{\frac{k_z}{k_x}}$$

ποια μορφή παίρνει η πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους; (ε:1) Τι εξίσωση προέκυψε και τι εξίσωση ισχύει για ισότροπο έδαφος, όπου $k_x = k_z = k$ (με $k > 0$); (στ:1) Τι πετύχαμε επομένως με την πιο πάνω αλλαγή ανεξάρτητης μεταβλητής (από x σε ξ) ιδίως από μαθηματικής απόψεως;

ΑΣΚΗΣΗ B52 (Κεφάλαια B1, B4, Εδαφομηχανική: Διήθηση): Στο ενδιαφέρον φαινόμενο της διηθήσεως (seepage) στην Εδαφομηχανική (Soil Mechanics) μέσα σε ένα ανισότροπο (ως προς τη διήθηση) έδαφος προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad \text{με} \quad h = h(x, y), \quad k_x > 0, \quad k_y > 0$$

με x τη θέση στον οριζόντιο άξονα και y στον κατακόρυφο. Άγνωστη συνάρτηση είναι το υδραυλικό φορτίο $h(x, y)$. Οι σταθερές k_x και k_y είναι οι συντελεστές διαπερατότητας του εδάφους. Ζητούνται: (α:2) Με την αλλαγή μεταβλητής

$$\xi = x \sqrt{\frac{k_y}{k_x}}$$

η απλοποίηση της πιο πάνω εξίσωσης της διηθήσεως. (β:2) Με τις αλλαγές μεταβλητής

$$z = \xi + iy \quad \text{και} \quad \bar{z} = \xi - iy \quad \text{με} \quad i = \sqrt{-1}$$

τη φανταστική μονάδα η παραπέρα απλοποίηση της εξίσωσης του ερωτήματος (α). (γ:1) Η πιο γενική δυνατή λύση της εξίσωσης του ερωτήματος (β) και μετά (δ:1) η επιστροφή στις αρχικές μεταβλητές x και y . (ε:2) Η άμεση εύρεση της ίδιας γενικής λύσεως κατευθείαν από την αρχική εξίσωση της διηθήσεως και ο έλεγχος συμφωνίας των αποτελεσμάτων.

ΑΣΚΗΣΗ B53 (Κεφάλαια B2, B5, Εδαφομηχανική: Διήθηση): Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

με άγνωστη συνάρτηση την $h = h(x, z)$ και με τα k_x και k_z γνωστές θετικές σταθερές. Ζητούνται: (α:1) Υποχρεωτικά με τη χρήση του συμβόλου $\tau = \sqrt{k_z/k_x}$ και της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών απευθείας στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (όχι με μετασχηματισμό της στην εξίσωση του Laplace!) η αναγωγή της σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με άγνωστες συναρτήσεις τις $X(x)$ και $Z(z)$. (β:2) Τώρα σε μια ορθογωνική περιοχή $D = [0, a] \times [0, b]$ και με συνοριακές συνθήκες στην περίμετρό της C

$$h(x, 0) = 0, \quad h(x, b) = 0, \quad h(0, z) = 0, \quad h(a, z) = f(z)$$

και με τη συνάρτηση $f(z)$ γνωστή ποιες είναι οι ιδιοσυναρτήσεις $Z_n(z)$ στο παρόν πρόβλημα συνοριακών τιμών; (γ:2) Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$ με πλήρωση και της τρίτης συνοριακής συνθήκης; (δ:2) Ποια είναι η πλήρης λύση του παρόντος προβλήματος συνοριακών τιμών λαμβάνοντας τώρα υπόψη και την τέταρτη συνοριακή συνθήκη $h(a, z) = f(z)$; (ε:1) Ανεξάρτητα από το πιο πάνω κάπως τεχνητό πρόβλημα συνοριακών τιμών σε ποιο ακριβώς πραγματικά ενδιαφέρον πρόβλημα της Εδαφομηχανικής παρουσιάζεται η παραπάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους; Πώς καλούνται οι δύο θετικές σταθερές k_x και k_z ; Σε ποια ακριβώς περίπτωση ισχύει η ισότητα $k_x = k_z$; Πώς καλείται η άγνωστη συνάρτηση $h(x, z)$;

ΑΣΚΗΣΗ B54 (Κεφάλαια B1, B2, B4, Εδαφομηχανική: Διήθηση): Εξετάζουμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

με άγνωστη συνάρτηση την $h = h(x, z)$ και με τα k_x και k_z γνωστές θετικές σταθερές. Ζητούνται: (α:1) Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού στην Εδαφομηχανική παρουσιάζεται; Υπό ποια φυσική συνθήκη μεταπίπτει στην εξίσωση του Laplace; (β:1) Πώς καλείται η άγνωστη συνάρτηση $h = h(x, z)$; Πώς καλούνται οι δύο σταθερές k_x και k_z ; (γ:1) Η εύρεση του τύπου της με τη χρήση διακρίνουσας Δ . (δ:1) Οι πολύ λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (ε:3) Υποχρεωτικά με την αλλαγή μεταβλητών $\xi = x$ και $\zeta = \beta z$ και τη χρήση του συμβόλου $\beta = \sqrt{k_x/k_z}$ καθώς και του κανόνα της αλυσίδας (της αλληλουχίας των παραγώγων) η αναγωγή της σε απλούστερη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. (στ:1) Η απευθείας αναφορά της γενικής λύσεως της απλούστερης αυτής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους και από αυτήν η εύρεση της λύσεως της αρχικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους.

ΑΣΚΗΣΗ B55 (Κεφάλαια B2, B4, Εδαφομηχανική: Διήθηση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση και ξανά με τη χρήση, εφόσον είναι σκόπιμο, και του βοηθητικού συμβόλου $\beta = \sqrt{k_x/k_z}$,

το οποίο ήδη ορίστηκε. Ζητούνται επίσης: (α:2) Η εύρεση της γενικής λύσεως της αρχικής διαφορικής εξίσωσης υποχρεωτικά με τη μέθοδο της χαρακτηριστικής εξίσωσης, η οποία βασίζεται στη χρήση μιας κατάλληλης συναρτήσεως φ . (β:1) Η επαλήθευση της λύσεως. (γ:2) Η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης και με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (δ:1) με αναφορά στο τέλος και κάποιου σχετικού ολοκληρωτικού τύπου. (ε:1) Ποια από τις δύο αυτές μεθόδους θα συνιστούσατε στο παρόν πρόβλημα Εδαφομηχανικής; (στ:1) Αναφέρατε τέλος ένα παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς όπου είναι υποχρεωτική η χρήση της άλλης μέθoδου με την έννοια ότι η μέθοδος που συστήσατε στο προηγούμενο ερώτημα απλά δεν είναι πια εφαρμόσιμη. (Αν είναι δυνατόν, με τροποποίηση της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης.)

ΑΣΚΗΣΗ B56 (Κεφάλαια B1, B2, B4, Εδαφομηχανική: Διήθηση): Στο ενδιαφέρον φαινόμενο της διήθησεως στην Εδαφομηχανική παρουσιάζεται στη διδιάστατη περίπτωση και για ανισότροπο έδαφος η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad \text{με} \quad h = h(x, z),$$

x τη θέση οριζόντια και z κατακόρυφα. Ζητούνται: (α:1) Τι παριστάνουν (πώς καλούνται) οι σταθερές k_x και k_z ; (β:1) Δύο ονομασίες της άγνωστης συνάρτησης $h = h(x, z)$. (γ:1) Να βρεθεί ο τύπος της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (δ:1) Απλά να αναφερθούν κι οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (ε:3) Χωρίς αλλαγή μεταβλητής να βρεθεί η γενική λύση της υποθέτοντας αρχικά λύση της μορφής

$$h(x, z) = \varphi(x + \mu z)$$

και (στ:1) να επαληθευθεί η γενική αυτή λύση. (ζ:1) Υπό ποιο μαθηματικό περιορισμό έχουμε αποδεκτή από φυσικής απόψεως λύση $h(x, z)$; (η:1) Ένα απλό παράδειγμα τέτοιας αποδεκτής λύσεως.

B5.2. Στερεοποίηση

ΑΣΚΗΣΗ B57 (Κεφάλαια B2, B5, Εδαφομηχανική: Στερεοποίηση): Στη θεωρία της μονοδιάστατης στερεοποίησης (consolidation) του Karl Terzaghi (1923)³ προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{με} \quad u = u(z, t), \quad c_v > 0 \quad \text{γνωστή σταθερά,}$$

z το βάθος μέσα στο έδαφος και t το χρόνο ($t \geq 0$). Ζητούνται: (α:1) Σε ποια άλλα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζεται ουσιαστικά η ίδια διαφορική εξίσωση; (β:1) Πώς καλείται εδώ ο συντελεστής c_v και ποιες είναι οι μονάδες του με εύρεσή τους από την ίδια την πιο πάνω διαφορική εξίσωση; Θεωρούμε τώρα στρώμα (ή στρώση, layer) εδάφους όπου λαμβάνει χώρα το φαινόμενο της στερεοποίησης με $0 \leq z \leq 2d$, με μηδενικές συνοριακές συνθήκες: $u(0, t) = u(2d, t) = 0$ και με γνωστή αρχική συνθήκη $u(z, 0) = u_0(z)$. Στο πρόβλημα αυτό ζητούνται: (γ:1) Να εφαρμοσθεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση. (δ:1) Στη συνέχεια να προσδιορισθούν οι ιδιοσυναρτήσεις $Z_n(z)$ (χωρίς αυθαίρετες σταθερές) και (ε:1) οι αντίστοιχες συναρτήσεις $T_n(t)$ (αυτές με αυθαίρετες σταθερές C_n). (στ:1) Ποια είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης μαζί με τις συνοριακές συνθήκες, αλλά χωρίς την αρχική συνθήκη, και (ζ:1) με την αρχική συνθήκη να έχει ληφθεί επίσης υπόψη και οι συντελεστές να έχουν προσδιορισθεί; (η:1) Σε ποιο ακριβώς (διαφορετικό) πρόβλημα η ίδια ουσιαστικά διαφορική εξίσωση καταλήγει σε συνημιτονική (όχι ημιτονική) σειρά Fourier και γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ B58 (Κεφάλαια B2, B5, Εδαφομηχανική: Στερεοποίηση): Στην Εδαφομηχανική μελετάμε το ενδιαφέρον φαινόμενο της στερεοποίησης (με την απομάκρυνση του νερού) κατά τον

³Βλέπε: Terzaghi, K. (1943), *Theoretical Soil Mechanics*. John Wiley and Sons, Inc., New York, London, Ενότητα 99, σ. 271.

κατακόρυφο άξονα z , όπου σύμφωνα με τη γνωστή θεωρία στερεοποίησης του Karl Terzaghi (1923) ισχύει η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, εδώ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Άγνωστη συνάρτηση είναι η πρόσθετη υδροστατική πίεση $u = u(z, t)$ του νερού των πόρων. Ο συντελεστής στερεοποίησης είναι γνωστός, σταθερός και ίσος με c_v . Ζητούνται: (α:1) Από τη διαφορική αυτή εξίσωση η μονάδα του συντελεστή στερεοποίησης. (β:1) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. (γ:1) Με προσοχή τώρα η εύρεση της γενικής λύσεως της χρονικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως. Ποιος φυσικός λόγος έχει απαιτήσει την προσοχή μας; (δ:1) Στη συνέχεια η γενική λύση και της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως. (ε:1) Θεωρούμε τώρα αργιλώδες στρώμα του εδάφους, συγκεκριμένα στρώμα κορεσμένης αργίλου, πάχους H με $0 \leq z \leq H$ με μηδενικές συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = u(H, t) = 0$$

στα δύο επίπεδα συνόρα του. Οι συνοριακές αυτές συνθήκες υποδηλώνουν άπειρη διαπερατότητα των δύο γειτονικών στρωμάτων του εδάφους (για $z < 0$ και για $z > H$) από εντελώς διαπερατή άμμο. Υπό τις συνθήκες αυτές ποιες είναι οι σχετικές ιδιοσυναρτήσεις $Z_n(z)$; (στ:1) Και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις $u_n(z, t)$ της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους; (ζ:1) Για τις ίδιες ιδιοσυναρτήσεις $u_n(z, t)$ να γίνει επαλήθευση ως προς τη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως, αλλά και τις δύο συνοριακές συνθήκες. (η:1) Τέλος, υποθέτοντας γνωστή και την αρχική συνθήκη $u(z, 0) = u_0(z)$, ζητείται ο προσδιορισμός της πλήρους λύσεως του παρόντος προβλήματος στερεοποίησης.

ΑΣΚΗΣΗ B59 (Κεφάλαια B1, B2, B4, Εδαφομηχανική: Στερεοποίηση): Στο ενδιαφέρον φαινόμενο της στερεοποίησης στην Εδαφομηχανική παρουσιάζεται στη μονοδιάστατη περίπτωση σύμφωνα με τη θεωρία του Karl Terzaghi (1923), που έχει αποκληθεί και «πατέρας» της Εδαφομηχανικής, η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \text{με} \quad u = u(z, t),$$

z το βάθος και t το χρόνο. Ζητούνται: (α:1) Σε ποια δύο διαφορετικά προβλήματα παρουσιάζεται ουσιαστικά η ίδια διαφορική εξίσωση; (β:1) Πώς καλούνται η άγνωστη συνάρτηση $u = u(z, t)$ και η σταθερά c_v ; (γ:1) Από την ίδια τη διαφορική εξίσωση να προσδιορισθεί κατάλληλη μονάδα της σταθεράς c_v . (δ:1) Να βρεθεί ο τύπος της διαφορικής εξισώσεως. (ε:1) Απλά να αναφερθούν οι χαρακτηρισμοί της. (στ:1) Να επαληθευθεί στην ίδια εξίσωση η αρχή της υπερθέσεως (ή επαλληλίας) δύο λύσεων. (ζ:1) Να εξηγηθεί εάν ή όχι μπορεί να γίνει δεκτή λύση της μορφής

$$u(z, t) = \varphi(z + \mu t).$$

(η:1) Να βρεθεί μερική μιγαδική λύση της με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασεως (με μιγαδικές σταθερές $i\lambda$ και $i\mu$). (θ:1) Να επαληθευθεί η λύση αυτή. (ι:1) Να γενικευθεί η ίδια λύση σε ολοκληρωτικό τύπο που να αποτελεί και αυτός λύση της διαφορικής εξισώσεως της στερεοποίησης.

ΑΣΚΗΣΗ B60 (Κεφάλαιο B5, Εδαφομηχανική: Στερεοποίηση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση για τη στερεοποίηση εδάφους. Ζητούνται επίσης: Σε ένα στρώμα (ή μια στρώση) εδάφους πάχους h ισχύουν οι δύο συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = u(h, t) = 0 \quad \text{και} \quad u(z, 0) = u_i \quad \text{με} \quad t \geq 0, \quad 0 \leq z \leq h$$

και την ποσότητα u_i γνωστή σταθερά. Ζητούνται: Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών ο προσδιορισμός (α:2) των χωρικών ιδιοσυναρτήσεων $Z_n(z)$, (β:2) των χρονικών ιδιοσυναρτήσεων

$T_n(t)$ και (γ:2) της ίδιας της λύσεως $u(z, t)$ σε μορφή σειράς χωρίς όμως την πλήρωση της αρχικής συνθήκης $u(z, 0) = u_i$. (δ:2) Ο προσδιορισμός όλων των σταθερών της σειράς αυτής στην απλούστερη δυνατή μορφή τους (με αναλυτικό υπολογισμό των σχετικών ολοκληρωμάτων), έτσι ώστε να πληρούται και η αρχική συνθήκη, με κατάλληλη διάκριση περιπτώσεων, εφόσον απαιτείται κάτι τέτοιο. (ε:2) Υπάρχουν συντελεστές της σειράς που να μηδενίζονται και, εάν ναι, ποιοι είναι;

ΑΣΚΗΣΗ B61 (Κεφάλαιο B10, Εδαφομηχανική: Στερεοποίηση): Στη στερεοποίηση εδάφους θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους του Karl Terzaghi (1923)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c_v} \frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{με} \quad u = u(z, t), \quad z \geq 0, \quad t \geq 0, \quad u(0, t) = u_0 \quad \text{και} \quad u(z, 0) = 0.$$

Ζητούνται: (α:3) Με μετασχηματισμό Laplace ως προς το χρόνο t η αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (β:2) Η λύση της τελευταίας χωρίς απειρισμό της, όταν $z \rightarrow \infty$. Με γνωστό ότι

$$\mathcal{L} \left\{ \operatorname{erfc} \left(\frac{b}{2\sqrt{t}} \right) \right\} = \frac{1}{s} e^{-b\sqrt{s}}$$

(γ:3) η λύση του παραπάνω προβλήματος και (δ:2) η επαλήθευσή της ως προς τις δύο συνθήκες.

ΑΣΚΗΣΗ B62 (Κεφάλαια B1, B2, B9, Εδαφομηχανική: Στερεοποίηση): Θεωρούμε ξανά το ενδιαφέρον φαινόμενο της στερεοποίησης (consolidation) του εδάφους υποθέτοντας τη ροή του νερού (του ύδατος) μόνο ακτινικά. Γίνεται επίσης δεκτή η θεωρία του Karl Terzaghi (1923). Στο παρόν πρόβλημα ισχύει η εξής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της στερεοποίησης:⁴

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Άγνωστη συνάρτηση $u = u(r, t)$ είναι η πίεση του ύδατος πόρων και c_v ο συντελεστής στερεοποίησης (με $c_v > 0$). Ζητούνται: (α:1) Η ονομασία της και έξι χαρακτηρισμοί της διαφορικής εξισώσεως. (β:2) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της εξισώσεως αυτής σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. (γ:2) Η επίλυση της χρονικής διαφορικής εξισώσεως: γενική λύση. (δ:3) Όμοια και της χωρικής διαφορικής εξισώσεως: πάλι γενική λύση.

B6. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

B6.1. Επίπεδη ελαστικότητα: τασική συνάρτηση του Airy

ΑΣΚΗΣΗ B63 (Κεφάλαια B1, B2, B3, B4, B5, Μηχανική των Υλικών: Επίπεδη Ελαστικότητα: Τασική Συνάρτηση του Airy): Ζητούνται: (α:1) Να προσδιορισθεί ο διαρμονικός τελεστής στο επίπεδο Oxy με βάση τον αντίστοιχο τελεστή του Laplace. (β:1) Σε ποια προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζονται διαφορικές εξισώσεις που περιέχουν το διαρμονικό τελεστή και ποιες είναι αυτές; (γ:1) Να αναφερθούν οι πλήρεις χαρακτηρισμοί της διαφορικής εξισώσεως που πληροί η τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$. (δ:1) Να ελεγχθεί εάν ή όχι η εξίσωση αυτή είναι διαχωρίσιμη, δηλαδή εάν μπορεί να εφαρμοσθεί σ' αυτήν η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. (ε:2) Ποια (η γενικότερη δυνατή!) μερική λύση $A_p(x, y)$ της ίδιας εξισώσεως μπορεί να βρεθεί με βάση τη μορφή $\varphi(x + \mu y)$; (στ:1) Με τις δύο αλλαγές ανεξάρτητων μεταβλητών

$$z = x + iy \quad \text{και} \quad \zeta = x - iy \quad \text{με} \quad i = \sqrt{-1}$$

η τασική συνάρτηση του Airy καταλήγει στο τέλος να επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^4 A^*}{\partial z^2 \partial \zeta^2} = 0 \quad \text{με} \quad A^* = A^*(z, \zeta) \equiv A(x, y).$$

⁴Karl Terzaghi (1943), *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley and Sons, New York, London, Εδάφιο 106, σ. 291, εξίσωση [4].

Ζητείται η γενική λύση της $A^*(z, \zeta)$. (ζ :1) Υπό ποιες ακριβώς προϋποθέσεις η λύση αυτή είναι πραγματική; Για ποιον ακριβώς λόγο ο Πολιτικός Μηχανικός τη θέλει να είναι οπωσδήποτε πραγματική;

ΑΣΚΗΣΗ B64 (Κεφάλαιο B3, Μηχανική των Υλικών: Επίπεδη Ελαστικότητα: Τασική Συνάρτηση του Airy): Ζητούνται: (α :1) Απλά να γραφεί το σύστημα των τριών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους για το επίπεδο ελαστικό πρόβλημα στη Μηχανική των Υλικών (χωρίς καθολικές δυνάμεις, όπως είναι το βάρος). Πώς καλούνται οι εξισώσεις του; (β :1) Πώς μπορεί το σύστημα αυτό να αναχθεί σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με τη χρήση της τασικής συναρτήσεως του Airy $A(x, y)$; (γ :1) Να γίνει λεπτομερής έλεγχος της ορθότητας της αναγωγής αυτής. (δ :1) Δίνεται η συνάρτηση στο επίπεδο

$$A(x, y) = Bx^4 + Cx^2y^2 + Dy^4.$$

Ποια σχέση δίνει τη σταθερά C συναρτήσει των σταθερών B και D , ώστε η συνάρτηση αυτή να είναι αποδεκτή τασική συνάρτηση του Airy; Γι' αυτήν την τιμή της σταθεράς C (ϵ :1) να υπολογισθούν οι τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} και να επαληθευθούν (στ:1) οι δύο πρώτες εξισώσεις και (ζ :1) η τρίτη εξίσωση του αρχικού συστήματος διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. (η :1) Ποιο πλεονέκτημα και ποια μειονεκτήματα παρουσιάζει η χρήση της τασικής συναρτήσεως του Airy $A(x, y)$;

ΑΣΚΗΣΗ B65 (Κεφάλαια B1, B3, Μηχανική των Υλικών: Επίπεδη Ελαστικότητα: Τασική Συνάρτηση του Airy): Στη Μηχανική των Υλικών θεωρούμε το επίπεδο στατικό πρόβλημα (στο επίπεδο Oxy) για ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό χωρίς δυνάμεις μάζας. Ζητούνται: (α :1) Οι σχετικές εξισώσεις ισορροπίας για τις τρεις τάσεις (τις συνιστώσες του τανυστή των τάσεων) σ_x , σ_y και τ_{xy} (χωρίς απόδειξη). (β :1) Η εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού των παραμορφώσεων εκφρασμένη όμως στην τελική της μορφή πάλι συναρτήσει των τάσεων (ξανά χωρίς απόδειξη). (γ :1) Με υπολογισμό της σχετικής διακρίνουσας ο τύπος της εξισώσεως του προηγούμενου ερωτήματος. (δ :1) Με τη χρήση της τασικής συναρτήσεως (ή τασεοσυναρτήσεως) $A(x, y)$ του Airy ποιοι τύποι δίνουν τις τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} ; (χωρίς απόδειξη). (ϵ :1) Με τη χρήση της ίδιας συναρτήσεως του Airy να αποδειχθεί ότι πληρούνται αυτόματα και οι δύο εξισώσεις ισορροπίας. (στ:1) Ποια μορφή παίρνει η εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού χρησιμοποιώντας την ίδια τασική συνάρτηση $A(x, y)$; (ζ :1) Να δοθούν έξι χαρακτηρισμοί για την εξίσωση του προηγούμενου ερωτήματος. (η :1) Πώς καλείται η εξίσωση αυτή; Ο σχετικός διαφορικός τελεστής; Πού αλλού στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζεται ακριβώς ο ίδιος διαφορικός τελεστής;

ΑΣΚΗΣΗ B66 (Κεφάλαιο B3, Μηχανική των Υλικών: Επίπεδη Ελαστικότητα: Τασική Συνάρτηση του Airy): Εδώ συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α :2) Η συνθήκη (ή οι συνθήκες) υπό την οποία (ή τις οποίες) το τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο της μορφής

$$A_0(x, y) = \sum_{k=0}^4 c_k x^{4-k} y^k$$

(με τα c_k σταθερούς πραγματικούς συντελεστές) είναι καταρχήν κατάλληλο για να χρησιμοποιηθεί σαν τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$. (β :1) Επομένως ποια είναι η έκφραση $A(x, y)$ της συναρτήσεως αυτής $A_0(x, y)$ μετά την απαλοιφή του συντελεστή c_2 ; (γ :1) Με τη χρήση του αποτελέσματος του προηγούμενου ερωτήματος να υπολογισθούν οι τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} , οι οποίες προκύπτουν από την τασική συνάρτηση $A(x, y)$ που βρέθηκε. (δ :1) Να επαληθευθεί η πλήρωση των δύο εξισώσεων ισορροπίας από τις τάσεις αυτές. (ϵ :1) Ανάλογα και για την εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού πάλι όμως με τη βοήθεια των τάσεων. (στ:1) Τελικά, συνοψίζοντας, τι ακριβώς πετυχαίνουμε από μαθηματικής απόψεως με τη χρήση της τασικής συναρτήσεως του Airy $A(x, y)$ ως προς τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που ισχύουν; (ζ :1) Και με ποιο διπλό κόστος;

ΑΣΚΗΣΗ B67 (Κεφάλαια B3, B4, Μηχανική των Υλικών: Τριδιάστατη Ελαστικότητα, Διδιάστατη Ελαστικότητα: Τασική Συνάρτηση του Airy): (α :2) Στην Τριδιάστατη Ελαστικότητα παίρνοντας υπόψη την ισορροπία κατά τον άξονα Ox , με την υπόθεση απουσίας καθολικών δυνάμεων

(όπως το βάρος) και με τη χρήση κατάλληλου σχήματος να αποδειχθεί πρόχειρα η πρώτη εξίσωση ισορροπίας

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0.$$

(β:1) Απλά να αναφερθούν κι οι άλλες δύο εξισώσεις ισορροπίας λαμβάνοντας υπόψη ότι $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, κλπ. (γ:1) Με βάση τα παραπάνω ποιες μορφές παίρνουν οι εξισώσεις ισορροπίας στη Διδιάστατη Ελαστικότητα; (δ:1) Με χρήση της τασικής συναρτήσεως του Airy $A(x, y)$ να αποδειχθεί ότι επαληθεύονται οι εξισώσεις αυτές. (ε:1) Απλά να αναφερθεί η τελική και πάρα πολύ απλή μορφή της εξίσωσης (συνθήκης) του συμβιβαστού των παραμορφώσεων γραμμής με τη χρήση των τάσεων σ_x και σ_y . (στ:3) Σ' αυτήν την τελευταία εξίσωση να γίνουν οι αλλαγές μεταβλητών $z = x + iy$ και $\bar{z} = x - iy$ και από την εξίσωση που προκύπτει (ζ:1) να βρεθεί και η γενική μιγαδική λύση της.

B6.2. Ελαστικότητα: Στρέψη

ΑΣΚΗΣΗ B68 (Κεφάλαια B1, B2, Μηχανική των Υλικών: Ελαστικότητα: Στρέψη): Στη Μηχανική των Υλικών μελετάμε το πρόβλημα της στρέψεως συνήθους ράβδου μέτρου διατμήσεως G και γωνίας στρέψεως (ή στροφής) ανά μονάδα μήκους θ με διατομή S στο επίπεδο Oxy . Στο πρόβλημα αυτό η τασική συνάρτηση (ή τασεοσυνάρτηση) του Prandtl $\varphi(x, y)$ επαληθεύει κατάλληλη διδιάστατη εξίσωση του Poisson. Ζητούνται: (α:1) Ποια είναι η εξίσωση αυτή του Poisson; (β:3) Για την εξίσωση του Poisson στη στρέψη ή (αν δεν είναι γνωστή) γενικά για την εξίσωση του Poisson να επαληθευθεί ότι το άθροισμα $\varphi_s(x, y)$ μιας λύσεως $\varphi_h(x, y)$ της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης και μιας λύσεως $\varphi_p(x, y)$ της μη ομογενούς εξίσωσης του Poisson αποτελεί λύση της ίδιας μη ομογενούς εξίσωσης του Poisson. (Να γίνει ρητή αναφορά στην ιδιότητα των παραγώγων που πρέπει να χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη!) (γ:3) Ειδικά για την εξίσωση του Poisson στο πιο πάνω πρόβλημα στρέψεως συνήθους ράβδου να βρεθεί και επαληθευθεί μια μερική λύση της $\varphi_p(y)$ με ανεξάρτητη μεταβλητή μόνο το y . (δ:1) Από την ίδια διαφορική εξίσωση να υπολογισθεί η συνήθης μονάδα της τασικής συναρτήσεως του Prandtl.

ΑΣΚΗΣΗ B69 (Κεφάλαια B1, B2, Μηχανική των Υλικών: Ελαστικότητα: Στρέψη): Για τη διδιάστατη εξίσωση του Poisson ζητούνται: (α:1) Ποια είναι η γενική μορφή της καθώς και η ειδική μορφή της στο πρόβλημα της στρέψεως συνήθους ράβδου μέτρου διατμήσεως G και γωνίας στρέψεως (ή στροφής) ανά μονάδα μήκους θ ; (β:1) Ο τύπος της με υπολογισμό της σχετικής διακρίνουσας Δ . (γ:1) Οι πλήρεις χαρακτηρισμοί της. (δ:2) Σε κατάλληλη τριγωνική περιοχή για ισόπλευρο τρίγωνο ύψους a δίνεται η συνάρτηση

$$\varphi(x, y) = -G\theta \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1}{2a} (x^3 - 3xy^2) - \frac{2}{27} a^2 \right].$$

Να ελεγχθεί ότι πρόκειται πραγματικά για τασική συνάρτηση του Prandtl σε πρόβλημα στρέψεως ράβδου ισόπλευρης τριγωνικής διατομής μόνο ως προς την επαλήθευση της σχετικής εξίσωσης του Poisson (όχι και της συνοριακής συνθήκης!). (ε:2) Να υπολογισθούν οι δύο διατμητικές τάσεις

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{και} \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

που είναι και οι μόνες μη μηδενικές τάσεις στο παρόν πρόβλημα στρέψεως. (στ:1) Να επαληθευθεί η εξίσωση ισορροπίας

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0.$$

Αυτή είναι και η μόνη εξίσωση ισορροπίας που δεν πληρούται εκ ταυτότητας στο ίδιο πρόβλημα στρέψεως.

B7. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΛΑΚΩΝ

B7.1. Γενικές ασκήσεις πλακών

ΑΣΚΗΣΗ B70 (Κεφάλαια B1, B2, B5, B7, Πλάκες): Θεωρούμε μια συνήθη πλάκα σταθερού πάχους h από ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό με πυκνότητα ρ , μέτρο ελαστικότητας E και λόγο του Poisson ν . Ζητούνται: (α:1) Η δυσκαμψία D της πλάκας. (β:1) Απλά να αναφερθεί η διαφορική εξίσωση της πλάκας στο στατικό πρόβλημα ως προς το βέλος κάμψεως της $w(x, y)$ υπό κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x, y)$. (γ:1) Οι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (δ:2) Η διερεύνηση εάν η ρ ή η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση είναι διαχωρίσιμη, δηλαδή εάν ή όχι μπορεί να εφαρμοσθεί σ' αυτήν η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. (ε:2) Η εύρεση μιας μόνο μερικής (ή ειδικής) λύσεως της στην ειδική περίπτωση της σταθερής φορτίσεως

$$p(x, y) = p_0.$$

(στ:1) Σε περίπτωση δυναμικής φορτίσεως $p(x, y, t)$ της πλάκας, οπότε και το βέλος κάμψεως της γίνεται και αυτό δυναμικό: $w(x, y, t)$, να γίνει μετάβαση από τη γενική στατική εξίσωση της πλάκας στην αντίστοιχη δυναμική εξίσωση.

ΑΣΚΗΣΗ B71 (Κεφάλαια B2, B5, Πλάκες): Θεωρούμε συνήθη πλάκα δυσκαμψίας D στο επίπεδο Oxy . Ζητούνται: (α:1) Η γραφή του αρμονικού τελεστή καθώς και του διαρμονικού τελεστή στις διδιάστατες μορφές τους στο επίπεδο Oxy ρητά, δηλαδή με μερικές παραγώγους ως προς x και y (όχι με τελεστές!). (β:1) Για το διαρμονικό τελεστή να αναφερθεί σε ποια δύο σημαντικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζεται σε σχετικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και ποιες είναι οι εξισώσεις αυτές. (γ:1) Ειδικά στο πρόβλημα της συνήθους πλάκας πώς ακριβώς μπορεί να υπολογισθεί η δυσκαμψία της D ; Επιπλέον να υπολογισθεί και η συνήθης μονάδα της δυσκαμψίας D που προκύπτει από τον υπολογισμό αυτό. (δ:1) Η ίδια ακριβώς μονάδα να υπολογισθεί και από τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους της συνήθους πλάκας. (ε:4) Να ελεγχθεί λεπτομερώς κατά πόσον η ομογενής εξίσωση της συνήθους πλάκας (επαναλαμβάνεται: ομογενής, χωρίς το δεξιό της μέλος) είναι διαχωρίσιμη, δηλαδή μπορεί να εφαρμοσθεί σ' αυτήν η κλασική μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών ή των χωριζόμενων μεταβλητών.

B7.2. Ορθογωνικές πλάκες

ΑΣΚΗΣΗ B72 (Κεφάλαια B2, B5, B7, Ορθογωνικές Πλάκες, Μέθοδος του Navier): Θεωρούμε μια συνήθη ορθογωνική πλάκα $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ δυσκαμψίας D στο επίπεδο Oxy με απλή στήριξη (έδραση) σε ολόκληρο το σύνορό της $C \equiv \partial\Pi$. Για την πλάκα αυτή ζητούνται: (α:1) Ο τύπος υπολογισμού της δυσκαμψίας της D κι η σχετική συνήθης μονάδα. (β:2) Για τη διαρμονική εξίσωση στο επίπεδο Oxy να ελεγχθεί αν ή όχι είναι διαχωρίσιμη, δηλαδή αν ή όχι μπορεί να επιλυθεί με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. (γ:4) Στην πιο πάνω πλάκα Π θεωρούμε ότι εφαρμόζεται σταθερή κάθετη κατανεμημένη φόρτιση p_0 . Για υπολογιστική διευκόλυνσή μας υποθέτουμε εδώ τη σχετική διπλή ημιτονική σειρά Fourier γνωστή, συγκεκριμένα

$$p_0 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{με συντελεστές} \quad a_{mn} = \frac{16p_0}{\pi^2 mn} \quad \text{με} \quad m, n = 1, 3, 5 \dots$$

Ζητείται ο έλεγχος εάν η συνάρτηση

$$w(x, y) = \frac{16p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \quad \text{πάλι με} \quad m, n = 1, 3, 5 \dots$$

αποτελεί ή δεν αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους για το βέλος κάμψεως (την κάθετη μετατόπιση, τη βύθιση) της πλάκας. (δ:1) Τέλος να ελεγχθεί εάν η ίδια συνάρτηση $w(x, y)$ επαληθεύει τη μία (την ευκολότερη!) από τις δύο συνοριακές συνθήκες που πρέπει να ισχύουν σ' ολόκληρο το σύνορο C της παρούσας ορθογωνικής πλάκας Π (όχι μόνο στις κορυφές της!). Πρόκειται για τη μέθοδο του Navier επιλύσεως προβλημάτων ορθογωνικών πλακών.

ΑΣΚΗΣΗ B73 (Κεφάλαια B1, B2, B5, B7, Ορθογωνικές Πλάκες, Μέθοδος του Navier): Θεωρούμε το στατικό πρόβλημα (χωρίς το χρόνο t) ορθογωνικής πλάκας $P = [0, a] \times [0, b]$ με απλή στήριξη (έδραση, όχι πάκτωση) σε όλη την περίμετρό της και υπό κάθετη φόρτιση $p(x, y)$. Ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση και οι χαρακτηρισμοί της. (β:1) Ο τύπος υπολογισμού και η εύρεση κατάλληλης μονάδας για τη δυσκαμψία D της πλάκας. (γ:1) Για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση έλεγχος εάν ή όχι είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών. (δ:2) Εύρεση του βέλους κάμψεως (της βύθισης) της πλάκας για την ειδική φόρτιση

$$p_{mn}(x, y) = p_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{με } m = 1, 2, 3, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

και το p_0 σταθερά. (ε:2) Με γνωστό τον τύπο για την ημιτονική σειρά Fourier μιας γνωστής συναρτήσεως $f(x)$ στο διάστημα $[0, a]$ εύρεση του αντίστοιχου τύπου για τη φόρτιση $p(x, y)$ της πλάκας $P = [0, a] \times [0, b]$ και με βάση τον τύπο αυτό (στ:3) εύρεση του βέλους κάμψεως $w(x, y)$ της πλάκας υπό αυθαίρετη (οποιαδήποτε) φόρτιση $p(x, y)$ (λύση του Navier προς τη Γαλλική Ακαδημία, 1820).

ΑΣΚΗΣΗ B74 (Κεφάλαια B5, B7, Ορθογωνικές Πλάκες: Μέθοδος του Lévy): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση, η οποία αφορά σε μια συνήθη πλάκα. Θεωρούμε τώρα μια ορθογωνική πλάκα $\Pi = [0, a] \times [0, b]$ με απλή στήριξη της στην περίμετρό της C . Ζητούνται επίσης: (α:2) Για την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση (δηλαδή για τη διαρμονική εξίσωση) να επιχειρηθεί η εύρεση λύσεως για το βέλος κάμψεως $w(x, y)$ της πλάκας στη μορφή

$$w_n(x, y) = X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{με } n = 1, 2, 3, \dots$$

Ποια συνήθης διαφορική εξίσωση προκύπτει για την άγνωστη συνάρτηση $X_n(x)$; (β:2) Ποια είναι η γενική λύση αυτής της συνήθους διαφορικής εξίσωσης σε εκθετική μορφή, αλλά και (γ:2) σε υπερβολική μορφή. (δ:1) Τελικά να γραφεί η σχετική λύση $w(x, y)$ για το πρόβλημα της ορθογωνικής πλάκας σε μορφή σειράς ως προς n . Για λόγους απλότητας να αγνοηθούν οι πλήρεις συνοριακές συνθήκες στην περίμετρο C της πλάκας, ειδικότερα στις πλευρές της $x = 0$ και $x = a$, όπου αυτές δεν πληρούνται αυτόματα από τη λύση $w_n(x, y)$ που επιλέχθηκε, ενώ αντίθετα πληρούνται αυτόματα στις πλευρές $y = 0$ και $y = b$ της πλάκας. Η μέθοδος αυτή επιλύσεως προβλημάτων ορθογωνικών πλακών είναι η κλασική στη Θεωρία των Πλακών μέθοδος του Lévy (1899). Στη συνέχεια η μέθοδος του Lévy εφαρμόστηκε σε αρκετά προβλήματα ορθογωνικών πλακών από τον Estanave (1900). Τα ιστορικά αυτά στοιχεία αναφέρονται από τους Timoshenko and Woinowski-Krieger (1959) στο κλασικό για τον Πολιτικό Μηχανικό σύγγραμμά τους *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, Tokyo, New York, σ. 113. (ε:1) Σε τι ακριβώς θα πλεονεκτούσε η μέθοδος του Lévy έναντι της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών, αν γινόταν η υπόθεση (ίσως εσφαλμένα!) ότι η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών είναι επίσης εφαρμόσιμη στο παρόν πρόβλημα της ορθογωνικής πλάκας;

ΑΣΚΗΣΗ B75 (Κεφάλαιο B7, Ορθογωνικές Πλάκες: Μέθοδος του Lévy): Θεωρούμε συνήθη ορθογωνική πλάκα $P = [0, a] \times [0, b]$ στο επίπεδο Oxy δυσκαμψίας D , με απλή στήριξη στο σύνορό της και υπό ομοιόμορφη (σταθερή) κατανεμημένη κάθετη φόρτιση p_0 . Ζητούνται: (α:3) Να βρεθεί μια μερική λύση $w_p(x)$ (με μεταβλητή μόνο το x) της σχετικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους για το βέλος κάμψεως (τη βύθιση) της πλάκας $w(x, y)$ που να πληροί όμως και τις συνοριακές συνθήκες (πάλι ως προς x μόνο, όχι κι ως προς y). Για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

(χωρίς δεξιό μέλος) να υποτεθεί τώρα λύση της μορφής

$$w_h(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Με βάση τη λύση αυτή $w_h(x, y)$ (β:1) να επαληθευθούν όλες οι συνοριακές συνθήκες ως προς x : για $x = 0$ και $x = a$. Τέλος να προσδιορισθούν (γ:2) οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις άγνωστες συναρτήσεις $Y_n(y)$ κι οι γενικές λύσεις τους (δ:1) σε εκθετική μορφή και (ε:1) σε υπερβολική μορφή.

B8. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

B8.1. Εγκάρσιες ταλαντώσεις καλωδίων

ΑΣΚΗΣΗ B76 (Κεφάλαια B1, B2, B5, Δυναμική των Κατασκευών: Καλώδια): Θεωρούμε καλώδιο μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) που προσεγγίζεται από χορδή σε ελεύθερη ταλάντωση. Η ταχύτητα του κύματος στο καλώδιο είναι c . Ζητούνται: (α:1) Να γραφεί η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ως προς την κάθετη (ή εγκάρσια) μετατόπιση $u(x, t)$ των σημείων του καλωδίου και να ελεγχθεί ότι είναι σωστή από απόψεως μονάδων. (β:1) Να προσδιορισθεί ο τύπος της. Θεωρούμε τώρα συνοριακές συνθήκες τις εξής δύο συνθήκες:

$$u(0, t) = U_0 \quad \text{και} \quad u(L, t) = U_L,$$

με τις γνωστές σταθερές U_0 και U_L αρκετά μικρές, ώστε να ισχύει η διαφορική εξίσωση του καλωδίου. Δηλαδή έχουμε σταθερές στηρίξεις του καλωδίου στα σημεία U_0 και U_L (κατά την κάθετη στο καλώδιο διεύθυνση) στην αρχή του $x = 0$ και στο τέλος του $x = L$ αντίστοιχα. Θεωρούμε επίσης αρχικές συνθήκες τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{με} \quad f(0) = U_0 \quad \text{και} \quad f(L) = U_L \quad \text{και} \quad \dot{u}(x, 0) = g(x) \quad \text{με} \quad \dot{u}(x, t) := \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}.$$

(Ε μην κοπεί και το καλώδιο! Ας προσέχουμε και λίγο, έτσι ώστε οι αρχικές συνθήκες στο καλώδιο να είναι συμβατές με τις δύο συνοριακές συνθήκες του!) (γ:6) Υπό τις πιο πάνω συνοριακές και αρχικές συνθήκες ζητείται να λυθεί πλήρως το σχετικό πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών.

B8.2. Αξονικές ταλαντώσεις ράβδων

ΑΣΚΗΣΗ B77 (Κεφάλαια B1, B6, Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι): Θεωρούμε το πρόβλημα των αξονικών (ή διαμήκων) ελεύθερων και χωρίς απόσβεση ταλαντώσεων συνήθους ράβδου μήκους L με $0 \leq x \leq L$ για τη θέση x και $t \geq 0$ για το χρόνο t . Το πρόβλημα αυτό διέπεται από τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση) με άγνωστη συνάρτηση την αξονική (ή διαμήκη) μετατόπιση $u = u(x, t)$ των σημείων της ράβδου. Η ταχύτητα του κύματος (κατ' απόλυτο τιμή) δηλώνεται με το σύμβολο c . Η ράβδος αυτή θεωρείται ελεύθερη (χωρίς στηρίξεις) και στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$ στο παρόν δυναμικό (όχι στατικό) πρόβλημα. Οι αρχικές αξονικές μετατοπίσεις των σημείων της ράβδου είναι $u(x, 0) = u_0(x)$ με $0 \leq x \leq L$ και με τη συνάρτηση $u_0(x)$ κατάλληλη γνωστή συνάρτηση. Οι αντίστοιχες αρχικές ταχύτητες είναι μηδενικές, δηλαδή $(\partial u / \partial t)(x, 0) = 0$. Ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση. (β:1) Επτά χαρακτηρισμοί της. Ειδικά για τον τύπο της να γίνει κι ο υπολογισμός της σχετικής διακρίνουσας. (γ:2) Η λεπτομερής απόδειξη ότι υπό τις παρούσες συνοριακές συνθήκες (δηλαδή με ελεύθερα τα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της ράβδου) η πρώτη χωρική (ως προς τη θέση x) μερική παράγωγος της άγνωστης συναρτήσεως $u = u(x, t)$ είναι συνεχώς μηδενική στα δύο αυτά άκρα. (δ:2) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις: (i) ως προς τη θέση x και (ii) ως προς το χρόνο t με την υποχρεωτική χρήση (και στις δύο) και της κυκλικής συχνότητας ω των ελεύθερων αξονικών ταλαντώσεων που εξετάζουμε. (ε:2) Οι λύσεις $X_n(x)$ και $T_n(t)$ (με $n = 0, 1, 2, \dots$) των δύο αυτών συνήθων διαφορικών

εξισώσεων λαμβάνοντας φυσικά υπόψη και τις συνοριακές συνθήκες στα δύο ελεύθερα άκρα της ράβδου. Τι φυσικό νόημα έχει η «συχνότητα» ω_0 (με $n = 0$); Τι ακριβώς εκφράζει;

ΑΣΚΗΣΗ B78 (Κεφάλαια B1, B6, Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:2) Η πλήρης τελική λύση $u(x, t)$ του παρόντος προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών. (β:2) Η επαλήθευση της λύσεως $u(x, t)$ του προηγούμενου ερωτήματος ως προς τις δύο συνοριακές συνθήκες μόνο. (γ:2) Η επαλήθευση της ίδιας λύσεως ως προς τις δύο αρχικές συνθήκες μόνο. (δ:2) Η επαλήθευση της ίδιας λύσεως ως προς την ίδια τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση).

ΑΣΚΗΣΗ B79 (Κεφάλαια B2, B10, Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι): Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις. Ζητούνται επίσης: (α:1) Ο τύπος που δίνει την ταχύτητα c του παρόντος ελαστικού κύματος (κατ' απόλυτο τιμή) με τη βοήθεια φυσικών σταθερών της συνήθους ράβδου (χωρίς απόδειξη). Να γίνει και ο σχετικός έλεγχος μονάδων. (β:3) Υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο t (με $t \geq 0$) η αναγωγή του παρόντος προβλήματος ελεύθερων αξονικών (ή διαμήκων) ταλαντώσεων ράβδου σε συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς τη θέση x κατά μήκος της ράβδου. (γ:3) Η γενική λύση της ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης που αντιστοιχεί στη μη ομογενή συνήθη διαφορική εξίσωση του προηγούμενου ερωτήματος με σαφή δήλωση της παραμέτρου s του μετασχηματισμού Laplace παντού όπου αυτή παρουσιάζεται. (δ:1) Χωρίς την εκτέλεση υπολογισμών με ποιες ακριβώς δύο μεθόδους θα μπορούσε να βρεθεί και μία μερική λύση (ή ειδική λύση) της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης υπό τις αρχικές συνθήκες που δόθηκαν;

ΑΣΚΗΣΗ B80 (Κεφάλαια B1, B2, B6, Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι): Θεωρούμε εδώ το πρόβλημα των αξονικών (ή διαμήκων) εξαναγκασμένων και χωρίς απόσβεση ταλαντώσεων συνήθους ράβδου γραμμικής πυκνότητας ρA , δυστένειας EA και μήκους L με $0 \leq x \leq L$ για τη θέση x και $t \geq 0$ για το χρόνο t . Η ράβδος θεωρείται ότι είναι στερεωμένη (εδώ πακτωμένη) και στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$. Στο πρόβλημα αυτό άγνωστη συνάρτηση είναι η αξονική (ή διαμήκης) μετατόπιση $u = u(x, t)$ των σημείων της ράβδου. Οι αρχικές αξονικές μετατοπίσεις των σημείων της ράβδου είναι $u(x, 0) = g(x)$ με $0 \leq x \leq L$ και με τη συνάρτηση $g(x)$ γνωστή συνάρτηση. Οι αντίστοιχες αρχικές ταχύτητες θεωρούνται μηδενικές, δηλαδή $(\partial u / \partial t)(x, 0) = 0$. Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς έχει την εξής μορφή:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

με $f(x, t)$ την κατανεμημένη αξονική φόρτιση της ράβδου, η οποία θεωρείται γνωστή. Ζητούνται: (α:1) Με τη χρήση διακρίνουσας Δ ο προσδιορισμός του τύπου της εξίσωσης αυτής και επτά χαρακτηρισμοί της. (β:5) Με την κατευθείαν χρήση των σχετικών ιδιομορφών ταλαντώσεως

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L},$$

που θεωρούνται γνωστές, η αναγωγή του όλου προβλήματος σε άπειρες ασύζευκτες συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με άγνωστες συναρτήσεις τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$. (γ:2) Ο λεπτομερής καθορισμός των αρχικών συνθηκών $q_n(0)$ και $\dot{q}_n(0)$ γι' αυτές τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. (Εντούτοις δε ζητείται η επίλυσή τους!)

ΑΣΚΗΣΗ B81 (Κεφάλαια B1, B2, B6, Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι): Θεωρούμε συνήθη ράβδο γραμμικής πυκνότητας ρA και δυστένειας EA (όχι δυσκαμψίας: η δυσκαμψία αφορά μόνο σε φαινόμενα κάμψεως) με διαφορική εξίσωση την ακόλουθη:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

με $u = u(x, t)$ την αξονική (ή διαμήκη) μετατόπιση των σημείων της ράβδου και $f(x, t)$ την καταμεμημένη αξονική φόρτιση κατά μήκος της. Ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (β:1) Πού ακριβώς απαντάται μια τέτοια ράβδος στις θεμελιώσεις ελαφρών κατασκευών; (γ:1) Για τις συνοριακές συνθήκες έχουμε είτε (i) στηριγμένο (σχεδόν ισοδύναμα πακτωμένο) άκρο $x = a$ με συνοριακή συνθήκη την $u(a, t) = 0$ είτε (ii) ελεύθερο άκρο με συνοριακή συνθήκη την $(\partial u / \partial x)(a, t) = 0$. Με βάση τη Μηχανική των Υλικών να αποδειχθεί λεπτομερώς η τελευταία αυτή συνοριακή συνθήκη. (δ:1) Σε περίπτωση ιδιοταλαντώσεων και γενικότερα ελεύθερων ταλαντώσεων της ράβδου να γίνει χωρισμός των μεταβλητών στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, τώρα όμως με $f(x, t) \equiv 0$, και να προσδιορισθούν οι δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (χωρική και χρονική) που προκύπτουν. (ε:4) Στις ιδιοταλαντώσεις αυτές της ράβδου να αποδειχθεί η ορθογωνιότητα του συστήματος των ιδιομορφών (ιδιομορφών αξονικών ταλαντώσεων) $X_m(x)$ με βάση τη σχετική συνήθη διαφορική εξίσωση ανάλογα με την αντίστοιχη απόδειξη στο αρκετά δυσκολότερο πρόβλημα των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού.

ΑΣΚΗΣΗ B82 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Αναφερόμαστε τώρα γενικότερα στις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις (με $f(x, t) \neq 0$). Θεωρώντας γνωστές τις ιδιομορφές των αξονικών (ή διαμήκων) ταλαντώσεων $X_n(x)$, που αποτελούν, όπως αποδείχθηκε, σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων, ζητούνται: (α:5) Η λεπτομερής αναγωγή του προβλήματος των εξαναγκασμένων αυτών ταλαντώσεων σε σύστημα άπειρων συνήθων διαφορικών εξισώσεων με τη μέθοδο του **αναπύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις** (εδώ **σε ιδιομορφές**). (β:1) Η αναφορά (όχι αναγκαστικά η εύρεση) της γενικής ολοκληρωτικής λύσεως των συνήθων αυτών διαφορικών εξισώσεων. (γ:1) Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις και οι λύσεις τους στην ειδική περίπτωση των ελεύθερων ταλαντώσεων. (δ:1) Οι λύσεις στην επίσης ειδική περίπτωση μηδενικών αρχικών συνθηκών.

ΑΣΚΗΣΗ B83 (Κεφάλαια B3, B11, Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι): Θεωρούμε τις ελεύθερες αξονικές (ή διαμήκεις) ταλαντώσεις προσεγγιστικά άπειρης ράβδου (με $-\infty < x < \infty$ και $0 < t < \infty$) δυστένειας EA και γραμμικής πυκνότητας ρA . Οι συνοριακές συνθήκες για $x \rightarrow \pm\infty$ θεωρούνται πλήρως μηδενικές. Οι αρχικές συνθήκες (για $t = 0$) είναι οι εξής:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \dot{u}(x, 0) := \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

με τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ γνωστές. Ζητούνται: (α:1) Απλά να γραφεί η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με την εισαγωγή και κατάλληλου συμβόλου c . (β:1) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση, (γ:2) η γενική λύση της και (δ:2) η μερική λύση της που να πληροί και τις δύο αρχικές συνθήκες. (ε:2) Τέλος με τη χρήση του τύπου αντιστροφής του μετασχηματισμού Fourier η λύση $u(x, t)$ του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών.

ΑΣΚΗΣΗ B84 (Κεφάλαια B1, B3, Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι): Στις αξονικές (ή ισοδύναμα διαμήκεις) ταλαντώσεις ράβδου παρουσιάζεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{με} \quad u = u(x, t),$$

x τη θέση και t το χρόνο. Ζητούνται: (α:1) Τι παριστάνουν (πώς καλούνται) τα σταθερά γινόμενα EA και ρA ; (β:1) Η γνωστή συνάρτηση $f(x, t)$ και η άγνωστη συνάρτηση $u = u(x, t)$; (γ:1) Για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση να αποδειχθεί (επαληθευθεί) η αρχή της υπερθέσεως (επαλληλίας) λύσεων για δύο λύσεις. (δ:1) Ποια βασική ιδιότητα των παραγώγων χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη (επαλήθευση) αυτή; (ε:2) Για την αρχική μη ομογενή διαφορική εξίσωση να αποδειχθεί ότι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς συν μια μερική λύση της μη ομογενούς μας δίνουν τη γενική λύση της μη ομογενούς. (στ:1) Σε ποιον ακριβώς κλασικό γραμμικό φορέα του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζεται η πιο πάνω μη ομογενής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

και για ποιο φυσικό λόγο είναι μη ομογενής; (ζ:1) Απλά να γραφεί η αντίστοιχη εξίσωση στις στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου φυσικά με τις αντίστοιχες σταθερές σ' αυτήν.

ΑΣΚΗΣΗ B85 (Κεφάλαια B1, B2, B3, B5, Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι): Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0, \quad u = u(x, t),$$

x τη θέση και t το χρόνο. Ζητούνται: (α:1) Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα της Δυναμικής των Κατασκευών παρουσιάζεται; (β:1) Τι παριστάνουν (πώς καλούνται) τα σταθερά γινόμενα EA και ρA ; (γ:1) Να βρεθεί ο τύπος της διαφορικής αυτής εξισώσεως με μερικές παραγώγους. (δ:1) Και τώρα απλά να αναφερθούν κι οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (ε:4) Με συνοριακές συνθήκες τις

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \varepsilon_0 \quad \text{και} \quad u(L, t) = u_L$$

με τις ποσότητες ε_0 και u_L γνωστές σταθερές και με διατήρηση των συμβόλων EA και ρA να αναχθεί το σχετικό πρόβλημα σε πρόβλημα ομογενών συνοριακών συνθηκών για μια νέα άγνωστη συνάρτηση: τη $u_t(x, t)$. (στ:2) Πώς μετασχηματίζονται (αν μετασχηματίζονται) οι δύο αρχικές συνθήκες

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

για τη νέα άγνωστη συνάρτηση $u_t(x, t)$ με τις δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ γνωστές συναρτήσεις;

ΑΣΚΗΣΗ B86 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι): Θεωρούμε τις αξονικές (ή διαμήκεις) ταλαντώσεις συνήθους ράβδου μήκους L (με $0 \leq x \leq L$). Ζητούνται: (α:1) Απλά να γραφεί η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με τη χρήση των δύο σχετικών σταθερών της ράβδου. (β:1) Τώρα με τη χρήση κατάλληλης βοηθητικής σταθεράς c και με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (στη βασική της μορφή) να αναχθεί η εξίσωση αυτή σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις με τη χρονική εξίσωση να βασίζεται στην ιδιοσυχνότητα ω των ταλαντώσεων της ράβδου. (γ:1) Να βρεθεί η γενική λύση της χρονικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως. (δ:1) Με την υπόθεση από την αρχή κατάλληλης χρονικής συναρτήσεως $T(t)$ να βρεθεί πιο γρήγορα ή ίδια χωρική συνήθους διαφορική εξίσωση. (ε:1) Να βρεθεί η γενική λύση της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως και από αυτήν (στ:1) οι ιδιοσυχνότητες ω_n της ειδικής ράβδου με ελεύθερο το αριστερό άκρο της $x = 0$ και με στηριγμένο το δεξιό $x = L$ και (ζ:1) οι ιδιομορφές $X_n(x)$ της ίδιας ράβδου. (η:1) Χωρίς απόδειξη ποια βασική ιδιότητα επαληθεύουν (έχουν) οι ιδιομορφές αυτές (τόσο με λέξεις όσο και με ακριβή μαθηματικό τύπο); (θ:1) Ποιες είναι οι σχετικές ιδιοσυναρτήσεις $u_n(x, t)$ για την αξονική (ή διαμήκη) μετατόπιση της ειδικής ράβδου που εξετάζουμε εδώ; (ι:1) Επίσης οι συναρτήσεις $\varepsilon_n(x, t)$ για τις αντίστοιχες αξονικές παραμορφώσεις της ίδιας ράβδου και $\sigma_n(x, t)$ για τις αντίστοιχες αξονικές τάσεις της ίδιας ράβδου;

B8.3. Καμπτικές ταλαντώσεις δοκών

ΑΣΚΗΣΗ B87 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε συνήθη δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$), δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA με κύλιση αριστερά και πάκτωση δεξιά σε ιδιοταλαντώσεις. Ζητούνται: (α:1) Κατευθείαν η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και οι χαρακτηρισμοί της. (β:1) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Έπειτα η γενική λύση της χωρικής εξισώσεως πρώτα (γ:1) σε εκθετική μορφή και στη συνέχεια (δ:1) σε τριγωνομετρική-υπερβολική μορφή. (ε:5) Η εύρεση της εξισώσεως ιδιοσυχνοτήτων. (στ:1) Τέλος με μια λύση της z_n γνωστή αριθμητικά ποια είναι η σχετική ιδιοσυχνότητα ω_n ;

ΑΣΚΗΣΗ B88 (Κεφάλαια B3, B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε το πρόβλημα συνήθους προβόλου μήκους L , σταθερής δυσκαμψίας EI και επίσης σταθερής γραμμικής

πυκνότητας ρA ελεύθερου στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και πακτωμένου στο δεξιό άκρο του $x = L$ σε ιδιοταλαντώσεις με x τη θέση (με $0 \leq x \leq L$) και t το χρόνο (με $t \geq 0$). Ζητούνται: (α:1) Η στοιχειώδης (χωρίς πολλές λεπτομέρειες) εύρεση της σχετικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους ως προς το βέλος κάμψεως $v = v(x, t)$ της δοκού με βάση την αντίστοιχη εξίσωση του στατικού προβλήματος. (β:1) Υποχρεωτικά με τη χρήση του χωρισμού των μεταβλητών

$$v(x, t) = X(x) \cos(\omega t + \varphi)$$

με τα ω (κυκλική συχνότητα) και φ (γωνία φάσεως) σταθερές, να αναχθεί η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη συνάρτηση $X(x)$. Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί, αν είναι αυτό σκόπιμο, και το νέο σύμβολο

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}.$$

(γ:1) Να βρεθεί η γενική λύση $X_g(x)$ της συνήθους αυτής διαφορικής εξίσωσης υποχρεωτικά με τη χρήση υπερβολικών συναρτήσεων αντί για την εκθετική συνάρτηση καθώς και (δ:1) η αντίστοιχη λύση $v_g(x, t)$ της αρχικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους. (ε:1) Να γραφούν οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα του προβόλου τόσο με χρήση των συνηθισμένων τεχνικών μεγεθών όσο και (στ:1) με χρήση της ίδιας της συναρτήσεως $X(x)$. (ζ:2) Να επαληθευθεί η λύση $v_g(x, t)$ (χωρίς συνοριακές συνθήκες) βέβαια μόνο ως προς την αρχική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους.

ΑΣΚΗΣΗ B89 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:3) Η εξίσωση για τον προσδιορισμό της σταθεράς β λαμβάνοντας υπόψη και τις συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα $x = 0$ (ελεύθερο) και $x = L$ (πακτωμένο) του προβόλου. (β:2) Υποθέτοντας ότι οι σχετικές λύσεις β_n είναι γνωστές, ποιες είναι οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες ω_n ; (γ:1) Για μέτρια μεγάλες τιμές του n (έστω για $n \geq 4$), όχι για τις πρώτες (τις μικρότερες) ιδιοσυχνότητες ω_1, ω_2 και ω_3 , να εξηγηθεί γιατί η σχετική εξίσωση παίρνει την προσεγγιστική μορφή

$$\cos \beta L = 0.$$

(δ:1) Με βάση την προσεγγιστική αυτή εξίσωση ποιος τελικός κλειστός τύπος δίνει (ασφαλώς προσεγγιστικά κι αυτός!) τις ιδιοσυχνότητες ω_n (για $n \geq 4$); (ε:1) Να υπολογισθούν οι μονάδες των ιδιοσυχνοτήτων ω_n που προκύπτουν από αυτόν τον τελικό τύπο. Είναι σωστές;

ΑΣΚΗΣΗ B90 (Κεφάλαιο B10, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε συνήθη δοκό μήκους L , γραμμικής πυκνότητας ρA και δυσκαμψίας EI σε ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις με άγνωστη συνάρτηση το βέλος κάμψεως $v = v(x, t)$ της δοκού με x τη θέση και t το χρόνο. Οι δύο αρχικές συνθήκες είναι:

$$v(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

με τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ γνωστές. Ζητούνται: (α:1) Ο έλεγχος από απόψεως διαστάσεων της σχετικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους. (β:1) Είναι δυνατή από φυσικής απόψεως ελεύθερη καμπτική ταλάντωση δοκού; Γιατί; (γ:2) Η αναγωγή της ίδιας εξίσωσης (μαζί με τις αρχικές συνθήκες) σε συνήθη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο t ($t \geq 0$). (δ:2) Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς συνήθους διαφορικής εξίσωσης με τη γραφή του συμβόλου s παντού όπου παρουσιάζεται. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το βοηθητικό σύμβολο

$$\gamma(s) = \sqrt[4]{\frac{\rho A s^2}{EI}}.$$

(Πάντως δε ζητείται ο σχετικός αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace!) (ε:2) Ποιες είναι οι δύο βασικές υπολογιστικές δυσκολίες (με λεπτομέρειες) που αντιμετωπίζει ο Πολιτικός Μηχανικός στην επίλυση αυτού του προβλήματος δοκού με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace;

ΑΣΚΗΣΗ B91 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Στη Δυναμική των Κατασκευών θεωρούμε συνήθη αμφιέριστη δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$), γραμμική πυκνότητα ρA και δυσκαμψία EI σε εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις υπό κάθετη κατανομημένη φόρτιση $p(x, t)$. Ζητούνται: (α:1) Η εύρεση της σχετικής δυναμικής διαφορικής εξίσωσης από την αντίστοιχη στατική. (β:1) Η επαλήθευση της πληρώσεως των συνοριακών συνθηκών από τις ιδιοσυναρτήσεις, εδώ τις ιδιομορφές καμπτικών ιδιοταλαντώσεων και απλούστερα ιδιομορφές

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots,$$

οι οποίες θεωρούνται γνωστές. (γ:6) Με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις, εδώ σε ιδιομορφές, και τη χρήση κατάλληλης ημιτονικής σειράς Fourier η αναγωγή της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγωγούς σε σύστημα άπειρων, *αλλ' ασύζευκτων*, συνήθων διαφορικών εξισώσεων. (Να μη ληφθούν υπόψη οι αρχικές συνθήκες!)

ΑΣΚΗΣΗ B92 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Μελετάμε συνήθη πρόβολο μήκους L , γραμμικής πυκνότητας ρA και δυσκαμψίας EI σε ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα σε ελεύθερες ταλαντώσεις. Αυτός ο πρόβολος είναι στηριγμένος στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και ελεύθερος στο δεξιό $x = L$. Ζητούνται: (α:1) Η εφαρμογή της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών και η εύρεση των δύο σχετικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων με τη χρήση (όπου είναι δυνατόν) και της βοηθητικής σταθεράς β με

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}.$$

(Το σύμβολο ω δηλώνει την κυκλική συχνότητα των ταλαντώσεων.) (β:1) Να εξηγηθεί λεπτομερώς η επιλογή της σταθεράς διαχωρισμού λ σαν θετικής ή αρνητικής με δύο εντελώς διαφορετικούς τρόπους. (γ:1) Υποχρεωτικά με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως να βρεθεί η γενική λύση της χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης τελικά με χρήση μόνο τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων. (δ:2) Χωρίς τη χρήση ορίζουσας τετάρτης τάξεως (μόνο δευτέρας τάξεως ή και καθόλου ορίζουσας) να βρεθεί η **χαρακτηριστική εξίσωση** ή **εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων** ω_n , εδώ όμως ως προς τη σταθερά β , δηλαδή για τις ιδιοτιμές β_n και όχι τις ιδιοσυχνότητες ω_n . (ε:1) Από αυτήν να υπολογισθούν προσεγγιστικά οι ιδιοτιμές β_n (για $n \geq 5$, περίπου 5) και στη συνέχεια (στ:1) οι αντίστοιχες ιδιοτιμές ω_n . (ζ:1) Να βρεθεί ποια είναι η ορίζουσα τετάρτης τάξεως (χωρίς όμως τον κάπως κουραστικό υπολογισμό της) για τον προσδιορισμό των ίδιων ιδιοτιμών β_n .

ΑΣΚΗΣΗ B93 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Θεωρούμε τον ίδιο πρόβολο, αλλά τώρα με «αναχαίτιση» (ας μας επιτραπεί τούτη η λέξη!) της κάμψεώς του (του βέλους κάμψεώς του) στο δεξιό άκρο του $x = L$ (μόνο εκεί!) μέσω συνήθους ελατηρίου σταθεράς k_R . Από τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες η μόνη που αλλάζει είναι η συνθήκη

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L, t) = 0.$$

Αυτή παίρνει τώρα τη δυσκολότερη μορφή

$$EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L, t) = k_R v(L, t).$$

Ζητούνται: (α:1) Η λεπτομερής τεχνική εξήγηση της πιο πάνω τροποποιημένης συνοριακής συνθήκης. (β:4) Ο λεπτομερής υπολογιστικός έλεγχος εάν ή όχι συνεχίζει να ισχύει η ορθογωνιότητα (ή ορθογωνικότητα) των ιδιομορφών ταλαντώσεως. (γ:3) Ο έλεγχος της ισχύος του πιθανού τύπου

$$\omega_n^2 = \frac{EI \int_0^L X_n''^2(x) dx + k_R X_n^2(L)}{\rho A \int_0^L X_n^2(x) dx}$$

για το καλούμενο **πηλίκο του Rayleigh**. Αυτό παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον στη Δυναμική των Κατασκευών για τον προσεγγιστικό υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων ω_n με τη χρήση του.

ΑΣΚΗΣΗ B94 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε την καμπτική καταπόνηση δοκού σταθερών τεχνικών χαρακτηριστικών EI (δυσκαμψίας) και ρA (γραμμικής πυκνότητας) υπό κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, t)$: εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. Στη δοκό αυτή υποθέτουμε ότι υπάρχει απόσβεση των ταλαντώσεων. Αυτήν την απόσβεση εδώ την εξειδικεύουμε (την προσεγγίζουμε) με όρο $\alpha \rho A (\partial v / \partial t)$ (με το α σταθερά). Ο όρος αυτός λαμβάνεται υπόψη παράλληλα (αθροιστικά, με συν!) με την αδρανειακή δύναμη $\rho A (\partial^2 v / \partial t^2)$. (Δηλαδή και οι δύο όροι με το ίδιο πρόσημο!) Ζητούνται: (α:6) Με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις (εδώ σε ιδιομορφές $X_n(x)$ που υποτίθενται ότι είναι ορθογώνιες μεταξύ τους υπό ιδανικές συνθήκες αποσβέσεως και ήδη γνωστές: να μην υπολογισθούν εδώ!) ο προσδιορισμός των χρονικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τις κύριες (ή κανονικές) συντεταγμένες $q_n(t)$ στο παρόν πρόβλημα εξαναγκασμένων καμπτικών ταλαντώσεων με απόσβεση σε δοκό. (β:2) Στο τέλος θέτουμε $\alpha = \alpha_m = 2\xi_m \omega_m$ για κάθε διαφορετικό τρόπο ταλαντώσεως m με ξ_m τον αντίστοιχο λόγο αποσβέσεως. Στο σημείο αυτό υποτίθεται ότι το α μπορεί να εξαρτάται από την τάξη m του τρόπου ταλαντώσεως. Υπό τις συνθήκες αυτές ζητείται να υπολογισθούν επίσης και οι γενικές λύσεις $q_m(t)$ των πιο πάνω χρονικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων.

ΑΣΚΗΣΗ B95 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις συνήθους αμφίπακτης δοκού δυσκαμψίας EI , γραμμικής πυκνότητας ρA και μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) με το χωρισμό των μεταβλητών

$$v(x, t) = X(x) \sin(\omega t - \alpha)$$

για το βέλος κάμψεως της δοκού ζητούνται: (α:1) Η σχετική συνήθης διαφορική εξίσωση για τις ιδιομορφές $X_n(x)$. (β:1) Η λύση της αρχικά σε εκθετική μορφή και (γ:1) Η μετατροπή της λύσεως σε υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή. (δ:1) Οι συνοριακές συνθήκες που ισχύουν και τέλος (ε:4) Η λεπτομερής εύρεση της χαρακτηριστικής εξίσωσης για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών β_n με

$$\beta_n = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}$$

με ω_n τις ιδιοσυχνότητες της αμφίπακτης δοκού.

ΑΣΚΗΣΗ B96 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί, Σεισμική Φόρτιση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Για τη μη ομογενή διαφορική εξίσωση

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\rho A \ddot{u}_g(t)$$

με $\ddot{u}_g(t)$ την επιτάχυνση των στηρίξεων της δοκού (που μπορεί να οφείλεται σε σεισμό) και τις ιδιομορφές της $X_n(x)$ θεωρούμενες γνωστές συναρτήσεις από την προηγούμενη άσκηση ζητούνται: (α:6) Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$ στις παρούσες εξαναγκασμένες ταλαντώσεις. (β:2) Απλά η γραφή των λύσεών τους υπό μηδενικές αρχικές συνθήκες.

ΑΣΚΗΣΗ B97 (Κεφάλαιο B10, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Στη Δυναμική των Κατασκευών θεωρούμε τις ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA υπό σταθερή αξονική φόρτιση N (θετική, όταν είναι εφελκυστική). Προκύπτει η εξής ομογενής διαφορική εξίσωση:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad \text{με} \quad v = v(x, t)$$

το βέλος κάμψεως της δοκού. Ζητούνται: (α:2) Η απόδειξη της με βάση την αντίστοιχη εξίσωση χωρίς αξονική φόρτιση: με $N = 0$. (β:4) Απλά η αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο t με αρχικές συνθήκες

$$v(x, 0) = v_1 x + v_2 \quad (\text{με τα } v_{1,2} \text{ γνωστές σταθερές}) \quad \text{και} \quad \dot{v}(x, 0) = 0$$

(με την τελεία να δηλώνει χρονική μερική παράγωγο). (γ:2) Η εύρεση μιας μερικής λύσεως (ή ειδικής λύσεως) $\check{V}_p(x) := V_p(x, s)$ τούτης της συνήθους διαφορικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ B98 (Κεφάλαιο B11, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Με τη χρήση μετασχηματισμού Fourier ως προς τη θέση x (όχι ως προς το χρόνο t) ζητούνται: (α:4) Η αναγωγή της ίδιας εξίσωσης σε συνήθη διαφορική εξίσωση και (β:4) η γενική λύση της τελευταίας με τη χρήση του βοηθητικού συμβόλου

$$b(\omega) = \sqrt{\frac{EI\omega^4 + N\omega^2}{\rho A}}$$

και της μεταβλητής ω οπουδήποτε αυτή παρουσιάζεται.

ΑΣΚΗΣΗ B99 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε τις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις συνήθους προβόλου μήκους L (με $0 \leq x \leq L$), δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA . Ο πρόβολος είναι πακτωμένος στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και ελεύθερος στο δεξιό $x = L$. Ζητούνται: Με το χωρισμό των μεταβλητών της σχετικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (α:1) η συνήθης διαφορική εξίσωση για τη χωρική συνάρτηση $X(x)$ με τη χρήση και κατάλληλης βοηθητικής σταθεράς β , (β:1) η γενική λύση της σε εκθετική και τελικά σε υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή και (γ:1) η επαλήθευσή της τελευταίας μορφής. Η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων ή εξίσωση συχνοτήτων (με άγνωστο το βL) (δ:1) χωρίς καθόλου τη χρήση ορίζουσας και (ε:1) με τη χρήση ορίζουσας δευτέρας τάξεως. (στ:1) Απλά η εύρεση της σχετικής ορίζουσας τετάρτης τάξεως χωρίς όμως τον υπολογισμό της. (ζ:1) Οι προσεγγίσεις των ιδιοσυχνοτήτων ω_n για $n = 4, 5, \dots$ και (η:1) οι σχετικές ιδιομορφές $X_n(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ B100 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Να επαναληφθεί πλήρως η προηγούμενη άσκηση, τώρα όμως για συνήθη αμφίπακτη δοκό αντί για συνήθη πρόβολο.

ΑΣΚΗΣΗ B101 (Κεφάλαια B5, B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε τις καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους αμφιέρειστης δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$), δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA υπό την επίδραση και σταθερού αξονικού φορτίου N . Η κάθετη φόρτιση της δοκού είναι $p(x, t)$. Η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους για το βέλος κάμψεως $v = v(x, t)$ της δοκού έχει τη μορφή

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(x, t).$$

Ζητούνται πρώτα για την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση: με $p(x, t) \equiv 0$: (α:1) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών να αναχθεί σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. (β:1) Με χρήση της κυκλικής συχνότητας ω να βρεθεί η γενική λύση $T(t)$ της χρονικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης. (γ:1) Να επαληθευθεί ότι οι ιδιομορφές $X_n(x)$ των καμπτικών ταλαντώσεων έχουν την απλή μορφή

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{με } n = 1, 2, \dots$$

(δ:1) Να υπολογισθούν οι ιδιοσυχνότητες ω_n των ταλαντώσεων της δοκού. Προχωράμε τώρα στην αρχική μη ομογενή εξίσωση: με $p(x, t) \neq 0$. Ζητείται: (ε:4) Με τη μέθοδο του αναπτύγματος στις ιδιομορφές $X_n(x)$ και τη χρήση και κατάλληλων γενικευμένων φορτίσεων $P_n(t)$ να προσδιορισθούν οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$ της δοκού (χωρίς επίλυσή τους).

ΑΣΚΗΣΗ B102 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) με μεταβλητές κατά μήκος της τη δυσκαμψία $EI(x)$ και τη γραμμική πυκνότητα $\rho A(x)$. Το άκρο $x = 0$ (όπως και το άλλο άκρο $x = L$) της δοκού μπορεί να είναι πακτωμένο, αρθρωμένο ή ελεύθερο. Σε καμπτικές ιδιοταλαντώσεις της δοκού προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

για το βέλος κάμψεως $v = v(x, t)$. Η ροπή κάμψεως (ή καμπτική ροπή) $M(x, t)$ και η τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) $Q(x, t)$ δίνονται από τους τύπους

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}$$

και

$$Q(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right].$$

αντίστοιχα. Ζητούνται: (α:1) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η συνήθης διαφορική εξίσωση για τις ιδιομορφές $X_n(x)$ (χωρίς παραγωγή του γινομένου). (β:7) Οι αποδείξεις των τύπων ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας)

$$\int_0^L \rho A(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0,$$

$$\int_0^L EI(x) X_m''(x) X_n''(x) dx = 0$$

με $m, n = 1, 2, \dots$ και $m \neq n$.

ΑΣΚΗΣΗ B103 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε τις ιδιοταλαντώσεις συνήθους δοκού μήκους L , δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA . Ζητούνται: (α:2) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών να αναχθεί σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, αλλά υποχρεωτικά με χρήση μόνο της κυκλικής συχνότητας ω στη χρονική συνήθη διαφορική εξίσωση. (β:1) Εύρεση της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως και με δεύτερο τρόπο με κατάλληλη από την αρχή επιλογή της χρονικής συναρτήσεως. (γ:1) Εύρεση της γενικής λύσεως της χρονικής διαφορικής εξισώσεως με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως και (δ:2) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (ε:2) και (στ:2) Ανάλογα δύο ερωτήματα και για τη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση, τώρα όμως και αντίθετα με πριν στη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace μόνο μέχρι τον προσδιορισμό του μετασχηματισμού Laplace $X_L(s)$ της άγνωστης συναρτήσεως, δηλαδή χωρίς την αντιστροφή του. Επίσης στη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως τελικά η λύση να δοθεί στη συνηθισμένη της υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή.

ΑΣΚΗΣΗ B104 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: Για ελεύθερη δοκό (χωρίς καμία στήριξη στα άκρα της) η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων με άγνωστη ποσότητα τη βL (α:2) με τη χρήση ορίζουσας δευτέρας τάξεως και επίσης (β:2) χωρίς καθόλου τη χρήση ορίζουσας. (γ:1) Με τις ποσότητες β_n γνωστές η εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων ω_n . (δ:1) Σχόλιο για την ύπαρξη ή τη μη ύπαρξη μηδενικής ιδιοσυχνότητας $\omega_0 = 0$ με επεξηγήσεις. (ε:2) Προσεγγίσεις των ιδιοσυχνοτήτων ω_n για κάπως μεγάλες τιμές του n , έστω για $n \geq 4$. (στ:1) Εύρεση των ιδιομορφών και (ζ:1) Απλή αναφορά (χωρίς απόδειξη) δύο σχετικών συνηθισμένων ορθογωνιότητας (ή ορθογωνικότητας) για $m \neq n$.

ΑΣΚΗΣΗ B105 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε τις ιδιοταλαντώσεις συνήθους δοκού μήκους L , δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA . Εδώ ζητούνται: (α:1) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών να αναχθεί η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, αλλά υποχρεωτικά με τη χρήση μόνο της κυκλικής συχνότητας ω στη χρονική συνήθη διαφορική εξίσωση. (β:1) Εύρεση της γενικής λύσεως της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως τελικά στη συνηθισμένη της υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή. (γ:4) Για πρόβολο με πάκτωση στο αριστερό άκρο του $x = 0$ η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων με άγνωστη ποσότητα τη βL με χρήση ορίζουσας δευτέρας τάξεως. (δ:1) Με τις ποσότητες β_n γνωστές εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων ω_n . (ε:3) Προσεγγίσεις των ιδιοσυχνοτήτων ω_n του προβόλου για κάπως μεγάλες τιμές του n : για $n \geq 4$.

ΑΣΚΗΣΗ B106 (Κεφάλαιο B5, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Στη Δυναμική των Κατασκευών θεωρούμε τις ελεύθερες ταλαντώσεις μιας συνήθους δοκού μήκους L , δυσκαμψίας EI και

γραμμικής πυκνότητας ρA με συνήθη πάκτωση στο αριστερό άκρο της $x = 0$, αλλά με μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$v(L, t) = v_L \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = \theta_L$$

στο δεξιό άκρο της $x = L$ με το βέλος κάμψεως v_L και τη στροφή θ_L στο άκρο αυτό $x = L$ γνωστές σταθερές. Άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως $v(x, t)$ της δοκού με x τη θέση ($0 \leq x \leq L$) και t το χρόνο ($t \geq 0$). Οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος (βέλος κάμψεως και ταχύτητα) είναι

$$v(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

αντίστοιχα με τις δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ γνωστές. Εδώ ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση και όλοι οι χαρακτηρισμοί της. (β:7) Η λεπτομερής αναγωγή του σχετικού μη ομογενούς προβλήματος συνοριακών τιμών σε ομογενές με νέα άγνωστη συνάρτηση τη $v_h(x, t)$ χωρίς όμως την επίλυση του. (γ:2) Οι αρχικές συνθήκες για το τελικό ομογενές πρόβλημα συνοριακών τιμών.

ΑΣΚΗΣΗ B107 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί, Εξαναγκασμένες Ταλαντώσεις): Θεωρούμε τις εξαναγκασμένες ταλαντώσεις μιας συνήθους αμφιέριστης δοκού μήκους L , δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA . Αρχικά η δοκός είναι σε ηρεμία και χωρίς καμία απολύτως φόρτιση: με μηδενικές αρχικές συνθήκες. Όμως τη χρονική στιγμή $t = 0$ εφαρμόζεται ξαφνικά ομοιόμορφη (σταθερή) φόρτιση $p(x, t) = p_0$ σε όλο το μήκος της: $0 \leq x \leq L$. Ζητούνται: (α:1) Κατευθείαν (χωρίς υπολογισμούς) οι ιδιομορφές $X_n(x)$ της αμφιέριστης δοκού. (Οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες ω_n θεωρούνται γνωστές.) (β:1) Η εύρεση των γενικευμένων μαζών της ίδιας δοκού και (γ:2) των γενικευμένων φορτίσεων της στο παρόν πρόβλημα. (δ:2) Με γνωστή τη σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους καθώς και την αντίστοιχη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση και με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιομορφές η εύρεση των ασύζευκτων συνήθων διαφορικών εξισώσεων για τις κύριες (ή κανονικές) συντεταγμένες $q_n(t)$. (ε:2) Οι λύσεις τους για την παρούσα ειδική φόρτιση $p(x, t) = p_0$ της αμφιέριστης δοκού και τέλος (στ:2) ο τελικός τύπος για το βέλος κάμψεως $v(x, t)$ της ίδιας δοκού στο παρόν πρόβλημα.

B8.4. Καμπτικές ταλαντώσεις δοκών επί ελαστικής βάσεως

ΑΣΚΗΣΗ B108 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Θεμελιώσεις: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Θεωρούμε τις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα ελεύθερες ταλαντώσεις συνήθους δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$), δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA επί ελαστικής βάσεως (εδώ του εδάφους, π.χ. πεδילוδοκού) με ολική σταθερά εδάφους-δοκού k . Για το βέλος κάμψεως της δοκού $v = v(x, t)$ (με x τη θέση και t το χρόνο) προκύπτει η εξής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + kv = 0 \quad \text{με} \quad v = v(x, t), \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{και} \quad t \geq 0.$$

Ζητούνται: Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις: (α:2) μία χρονική υποχρεωτικά της μορφής

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0$$

και (β:2) μία χωρική υποχρεωτικά της μορφής

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0$$

με την υπόθεση ότι

$$k < \rho A \omega^2$$

και με κατάλληλο ορισμό της σταθεράς β . Με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης η επίλυση (γ:1) της χρονικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως: γενική λύση σε τριγωνομετρική μορφή και

(δ:1) της χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης: γενική λύση σε υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή με (ε:2) την επαλήθευση της λύσεως αυτής $X(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ B109 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Θεμελιώσεις: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση, τώρα όμως για πρόβολο (με $0 \leq x \leq L$) με πάκτωση δεξιά: για $x = L$. Ζητούνται επίσης: (α:5) Η εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων με άγνωστο την ποσότητα $z = \beta L$ (και όχι το ω). (β:3) Τέλος με τις λύσεις της z_n γνωστές ποιες είναι οι αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες ω_n του προβόλου;

ΑΣΚΗΣΗ B110 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Θεμελιώσεις: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Συνεχίζουμε την προπροηγούμενη άσκηση, τώρα όμως για εξαναγκασμένες ταλαντώσεις, δηλαδή με κάθετη κατανεμημένη φόρτιση της δοκού $p(x, t)$ δεξιά στη διαφορική εξίσωση. Με τις σχετικές ιδιομορφές $X_n(x)$ να υποτίθενται γνωστές και μάλιστα ότι αποτελούν σύστημα ορθογωνίων συναρτήσεων με

$$\int_0^L X_n^2(x) dx = N_n$$

(οι ποσότητες N_n θεωρούνται γνωστές) και χωρίς τη χρήση κι άλλων βοηθητικών συμβόλων πέρα από το β (εδώ με τιμές β_n) ζητούνται: (α:8) Με τη μέθοδο του αναπτύγματος σε ιδιοσυναρτήσεις, εδώ στις ιδιομορφές $X_n(x)$, οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τις κύριες συντεταγμένες $q_n(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ B111 (Κεφάλαια B1, B6, Δυναμική των Κατασκευών: Θεμελιώσεις: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Θεωρούμε το πρόβλημα των ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού γραμμικής πυκνότητας ρA και δυσκαμψίας EI επί ελαστικής βάσεως (π.χ. μια πεδילוδοκό που στηρίζεται πάνω στο έδαφος). Σε μια τέτοια δοκό η ελαστική βάση ασκεί κάθετη φόρτιση πάνω στη δοκό ίση με

$$p_f(x, t) = -kv(x, t)$$

με το k να δηλώνει τη σχετική συνολική σταθερά εδάφους-δοκού. Άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως $v(x, t)$ της δοκού. Ζητούνται: (α:1) Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (β:1) Με τη χρήση του ειδικού χωρισμού των μεταβλητών

$$v(x, t) = X(x) \cos(\omega t - \alpha)$$

(με τα ω και α σταθερές) η αναγωγή της διαφορικής αυτής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση υποχρεωτικά με τη χρήση και της βοηθητικής σταθεράς β με

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2 - k}{EI}} \quad \text{με την υπόθεση ότι } k < \rho A \omega^2.$$

(γ:1) Να εξηγηθεί για ποιο φυσικό λόγο είναι δικαιολογημένος αυτός ο ειδικός χωρισμός των μεταβλητών στις παρούσες ιδιοταλαντώσεις. (δ:1) Να υπολογισθεί η γενική λύση της συνήθους αυτής διαφορικής εξίσωσης τελικά υποχρεωτικά σε υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή. (ε:2) Υποθέτοντας τη δοκό ελεύθερη και στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$, να βρεθεί η **χαρακτηριστική εξίσωση** ή **εξίσωση των ιδιοσυχνοτήτων** ω_n , εδώ όμως ως προς τη βοηθητική σταθερά β , δηλαδή αρχικά για τις ιδιοτιμές β_n και όχι τις ιδιοσυχνότητες ω_n . (στ:1) Από αυτήν να υπολογισθούν προσεγγιστικά οι ιδιοτιμές β_n (για $n \geq 5$, περίπου 5) και στη συνέχεια (ζ:1) Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές ω_n .

ΑΣΚΗΣΗ B112 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών, Θεμελιώσεις: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Θεωρούμε τις ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις (και ιδιοταλαντώσεις) δοκού επί ελαστικής βάσεως, ελαστικού υποστρώματος (ίσως απλά πεδילוδοκού) μήκους L , γραμμικής πυκνότητας ρA και σταθερής δυσκαμψίας EI . Προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + kv + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

με $v = v(x, t)$ το βέλος κάμψεως της δοκού (που σχηματίζει την ελαστική γραμμή της) και k γνωστή σταθερά του συστήματος εδάφους-δοκού επί ελαστικής βάσεως. Ζητούνται: (α:2) Οι συνήθεις μονάδες των επτά μεγεθών: $E, I, EI, \rho, A, \rho A$ και k . (β:2) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (με άγνωστες συναρτήσεις τις $X(x)$: χωρική συνάρτηση, και $T(t)$: χρονική συνάρτηση), η δεύτερη με μία μόνο παράμετρο: τη $-\omega^2$ (καμία άλλη!). (γ:2) Να βρεθεί η γενική λύση $T(t)$ της χρονικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης. (δ:2) Ανάλογα και η γενική λύση $X(x)$ της χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης με τη χρήση και του συμβόλου

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2 - k}{EI}}.$$

· **ΑΣΚΗΣΗ B113 (Κεφάλαια B6, B10, Δυναμική των Κατασκευών, Θεμελιώσεις: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως):** Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:1) Η επεξήγηση γιατί εκεί στο ερώτημα (β) προτιμήθηκε η σταθερά διαχωρισμού $-\omega^2$ αντί απλά λ . (β:1) Οι συνοριακές συνθήκες στα άκρα $x = 0$ και $x = L$ της δοκού επί ελαστικής βάσεως για αμφιέρειστη δοκό. (γ:1) Έχει ή όχι φυσικό νόημα η ελεύθερη και στα δύο άκρα δοκός επί ελαστικής βάσεως; Γιατί; (δ:1) Αν ναι, ποιες είναι οι σχετικές συνοριακές συνθήκες; (ε:4) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace (φυσικά με $t \geq 0$) η αναγωγή της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (1) στην προηγούμενη άσκηση σε συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς τη θέση x κατά μήκος της δοκού. Σαν αρχικές συνθήκες (τη χρονική στιγμή $t = 0$) να ληφθούν οι δύο συνθήκες

$$v(x, 0) = f(x) \quad \text{και} \quad \dot{v}(x, 0) := \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

με τις δύο αυτές συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ γνωστές.

ΑΣΚΗΣΗ B114 (Κεφάλαιο B11, Δυναμική των Κατασκευών, Θεμελιώσεις: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως) Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις, αλλ' ειδικά σε τούτη 'δώ την άσκηση υποθέτουμε (προσεγγιστικά βέβαια) τη δοκό επί ελαστικής βάσεως απειρομήκη (απείρου μήκους: με $-\infty < x < \infty$). Εδώ ζητείται η χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier με

$$\mathcal{F}\{v(x, t)\} = V(\omega, t).$$

Δυστυχώς εδώ το σύμβολο ω σαν μεταβλητή του μετασχηματισμού Fourier ως προς τη θέση x δεν έχει καμία απολύτως σχέση με κυκλική συχνότητα! Τι να κάνουμε; Εναλλακτικά θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί το σύμβολο ξ αντί για το σύμβολο ω ! Ζητούνται: (α:4) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier και με την υποχρεωτική χρήση και του βοηθητικού συμβόλου

$$b(\omega) = \sqrt{\frac{EI\omega^4 + k}{\rho A}}$$

η αναγωγή της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (1) στην προπροηγούμενη άσκηση σε συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς το χρόνο t . (β:2) Λεπτομερές σχόλιο για όλες τις υποθέσεις που πρέπει να έχουν γίνει στο άπειρο: για $x \rightarrow \pm\infty$. (γ:2) Η εύρεση της γενικής λύσεως $V(\omega, t)$ της συνήθους διαφορικής εξίσωσης με τη ρητή εμφάνιση της μεταβλητής ω του μετασχηματισμού Fourier οπουδήποτε (προσοχή παρακαλώ σε τούτη τη λέξη!) αυτή εμφανίζεται.

B8.5. Καμπτικές ταλαντώσεις δοκών Timoshenko

ΑΣΚΗΣΗ B115 (Κεφάλαια B1, B6, B10, B11, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί Timoshenko): Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (ή ισοδύναμα μερική διαφορική εξίσωση)

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - F \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + H \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0 \quad \text{με} \quad v = v(x, t) \quad \text{και} \quad \text{με} \quad EI, \rho A, F, H > 0.$$

Η εξίσωση αυτή απαντάται στο πρόβλημα καμπτικών ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων καμπτικών ταλαντώσεων δοκού σύμφωνα με τη θεωρία του Timoshenko. Αυτή είναι σίγουρα πιο ακριβής από τη θεωρία των Euler-Bernoulli, επειδή λαμβάνει υπόψη την παραμόρφωση από διάτμηση και την αδράνεια περιστροφής. Στην πιο πάνω εξίσωση $v = v(x, t)$ είναι το βέλος κάμψης της δοκού (με x τη θέση και t το χρόνο) και όλοι οι συντελεστές είναι γνωστές σταθερές: EI η δυσκαμψία, ρA η γραμμική πυκνότητα και F και H δύο πιο πολύπλοκες θετικές σταθερές. Εδώ ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξίσωσης. (β:7) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier ως προς το χρόνο t η λεπτομερής αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση (χωρίς επίλυσή της!). Τέλος ζητείται (γ:8) η ίδια εργασία με το ερώτημα (β), αλλά τώρα με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace με γνωστές τις αρχικές συνθήκες (χωρίς επίλυσή της!).

ΑΣΚΗΣΗ B116 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί Timoshenko): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Εδώ ζητούνται: (α:2) Ο έλεγχος εάν η διαφορική αυτή εξίσωση είναι διαχωρίσιμη ή όχι, δηλαδή εάν μπορεί ή όχι να αναχθεί με χωρισμό των μεταβλητών της (ως προς x και t) σε δύο χωριστές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Υποθέτουμε τώρα λύση της μορφής

$$v(x, t) = X(x) \cos(\omega t + \alpha)$$

με τα ω και α σταθερές, που θεωρούνται γνωστές. (β:2) Ποια είναι η συνήθης διαφορική εξίσωση ως προς $X(x)$ στην πιο κανονική της (απλοποιημένη) μορφή; Κάνουμε τώρα την υπόθεση ότι

$$\omega^2 < \frac{\rho A}{H}.$$

Δηλαδή δεχόμαστε ότι δεν έχουμε και πάρα πολύ υψηλές κυκλικές συχνότητες ω καμπτικών ιδιοταλαντώσεων και ελεύθερων καμπτικών ταλαντώσεων. Με την υπόθεση αυτή ζητούνται: (γ:2) η γενική λύση $X(x)$ της συνήθους διαφορικής εξίσωσης με τη χρήση σ' αυτήν κατάλληλων βοηθητικών συμβόλων μ_1 και μ_2 (που να την απλοποιούν όσο περισσότερο γίνεται) τόσο σε εκθετική μορφή όσο και (δ:2) σε ισοδύναμή της υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή, που γενικά προτιμάται.

ΑΣΚΗΣΗ B117 (Κεφάλαιο B6, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί Timoshenko): Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις. Εδώ υποθέτουμε τη δοκό που μελετάμε σύμφωνα με τη θεωρία του Timoshenko πως είναι αμφιέριστη και έχει μήκος L : $0 \leq x \leq L$. Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση δεχόμαστε ότι οι πιθανές ιδιομορφές ταλαντώσεων της $X(x)$ είναι της μορφής

$$X(x) = A \cosh \mu_1 x + B \sinh \mu_1 x + C \cos \mu_2 x + D \sin \mu_2 x$$

με $\mu_{1,2}$ δύο γνωστές θετικές σταθερές: $\mu_{1,2} > 0$. Εδώ ζητούνται: (α:2) Οι αληθινές ιδιομορφές $X_n(x)$ που σέβονται όλες τις συνοριακές συνθήκες. (β:3) Με τη χρήση τους η αλγεβρική εξίσωση για τις αντίστοιχες ιδιοσυχνότητες ω_n . (γ:3) Με την εκ των υστέρων εύλογη (πού να το ξέραμε από πριν;) υπόθεση ότι

$$v(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \cos(\omega_n t + \alpha)$$

η εύρεση της ίδιας αλγεβρικής εξίσωσης για τις ιδιοσυχνότητες ω_n της αμφιέριστης δοκού.

ΑΣΚΗΣΗ B118 (Κεφάλαιο B5, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί Timoshenko): Συνεχίζουμε τις τρεις προηγούμενες ασκήσεις. Θεωρούμε κι εδώ την αμφιέριστη δοκό μήκους L της προηγούμενης ασκήσεως, αλλά με τροποποιημένη τη συνοριακή συνθήκη $v(L, t) = 0$, που τώρα υποτίθεται μη ομογενής: $v(L, t) = h$ με το h γνωστή μη μηδενική σταθερά. Έχουμε ελεύθερες ταλαντώσεις με αρχικές συνθήκες

$$v(x, 0) = f(x) \quad (\text{με } f(0) = 0 \text{ και } f(L) = h) \quad \text{και} \quad \dot{v}(x, 0) := \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

με τις δύο συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ γνωστές. (α:6) Εδώ ζητείται απλά η αναγωγή αυτού του μη ομογενούς προβλήματος σε ομογενές, δηλαδή σε πρόβλημα όπου η νέα βοηθητική άγνωστη

συνάρτηση $w(x, t)$ θα έχει και τις τέσσερις συνοριακές συνθήκες της ομογενείας, οπότε και $w(L, t) = 0$. (β:2) Θα αλλάξουν ή όχι και οι αρχικές συνθήκες και πώς θα γίνουν;

B8.6. Ταλαντώσεις πλακών

ΑΣΚΗΣΗ B119 (Κεφάλαια B4, B5, Δυναμική των Κατασκευών: Πλάκες): Στο επίπεδο πλάκας δίνεται η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\nabla^4 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \text{με} \quad w = w(x, y, t)$$

το δυναμικό βέλος κάμψεως της πλάκας και τις σταθερές να έχουν ορισθεί στην προηγούμενη άσκηση. Η πλάκα φορτίζεται μόνο με ροπές στο σύνορό της. Ζητούνται: (α:2) Με το χωρισμό των μεταβλητών

$$w(x, y, t) = W(x, y) \cos(\omega t - \alpha)$$

(τριγωνομετρική αντικατάσταση) να βρεθεί η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση τη χωρική συνάρτηση $W(x, y)$. (β:2) Να διερευνηθεί σε όσο βαθμό χρειάζεται, εάν ή όχι η δεύτερη διαφορική αυτή εξίσωση (ως προς $W(x, y)$) είναι διαχωρίσιμη. (γ:2) Για την ίδια εξίσωση (ως προς $W(x, y)$) να διερευνηθεί επίσης εάν ή όχι είναι δυνατή η χρήση της μεθόδου επιλύσεως που βασίζεται σε συνάρτηση-λύση της μορφής

$$W_0(x, y) = \varphi(x + \mu y)$$

και στη σχετική χαρακτηριστική εξίσωση. (δ:2) Για την ίδια εξίσωση (επαναλαμβάνεται ως προς $W(x, y)$) να διερευνηθεί τέλος εάν ή όχι είναι δυνατή η χρήση της μεθόδου της εκθετικής αντικατάστασης. Εάν είναι, να προσδιορισθεί και μία μερική λύση της.

ΑΣΚΗΣΗ B120 (Κεφάλαια B2, B9, Δυναμική των Κατασκευών: Πλάκες): Θεωρούμε τις ιδιοταλαντώσεις συνήθους κυκλικής πλάκας δυσκαμψίας D και επιφανειακής πυκνότητας ρh . Εδώ ζητούνται: (α:1) Η εύρεση της διαφορικής εξισώσεως για το βέλος κάμψεως $w(x, y, t)$ της πλάκας με βάση την αντίστοιχη εξίσωση για το στατικό πρόβλημα. (β:1) Τώρα στις ιδιοταλαντώσεις της κυκλικής πλάκας με την απευθείας χρήση κατάλληλης χρονικής συναρτήσεως $T(t)$ η εύρεση της χωρικής διαφορικής εξισώσεως ως προς το χωρικό παράγοντα $W(x, y)$ των ιδιοταλαντώσεων της πλάκας με χρήση βοηθητικής σταθεράς β . Στο σημείο αυτό θεωρούμε γνωστά ότι

$$\nabla^4 - \beta^4 = (\nabla^2 + \beta^2)(\nabla^2 - \beta^2)$$

και επίσης ότι

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . (γ:2) Για την εξίσωση

$$(\nabla^2 - \beta^2)W(r, \theta) = 0$$

με χωρισμό των μεταβλητών να βρεθούν οι σχετικές δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ως προς r και ως προς θ) και (δ:2) για τη δεύτερη από αυτές (ως προς θ) να βρεθεί η αποδεκτή από φυσικής απόψεως γενική λύση της. Τελικά για το χωρικό μέρος $W(r, \theta)$ του βέλους κάμψεως $w(r, \theta, t)$ της παρούσας κυκλικής πλάκας προκύπτουν συναρτήσεις της μορφής

$$W_n(r, \theta) = [A_n J_n(\beta r) + C_n I_n(\beta r)] \sin n\theta + [E_n J_n(\beta r) + G_n I_n(\beta r)] \cos n\theta \quad \text{με} \quad n = 1, 2, \dots$$

(ε:1) Για ποιο λόγο είναι αυτές τόσο απλές, δηλαδή δεν περιέχουν τις συναρτήσεις Bessel δεύτερου είδους $Y_n(\beta r)$ (συνήθης συνάρτηση Bessel) και $K_n(\beta r)$ (τροποποιημένη συνάρτηση Bessel), που δυστυχώς απειρίζονται για $r \rightarrow 0$; (στ:1) Τι θα συνέβαινε αντίθετα σε δακτυλιοειδή πλάκα; (ζ:2) Πάλι για κυκλική πλάκα με πάκτωση ή απλή στήριξη σε όλη την περιφέρειά της $r = a$ ποια αρκετά απλούστερη μορφή $W_n^*(r, \theta)$ παίρνουν οι πιο πάνω συναρτήσεις $W_n(r, \theta)$ καθ' οδόν (μετά και άλλο πολύ μακρύ δρόμο ...) προς τις ιδιομορφές ταλαντώσεως $W_{mn}(r, \theta)$ της κυκλικής πλάκας;

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Γ1. ΓΕΝΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ Γ1 (Κεφάλαιο Γ2, Διαχωρίσιμοι Πυρήνες, Αριθμητική Ολοκλήρωση): Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) + \int_{-1}^1 K(x,t)y(t) dt = f(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

με τις συναρτήσεις $K(x,t)$ και $f(x)$ γνωστές, ενώ τη συνάρτηση $y(x)$ άγνωστη. Ζητούνται: (α:1) Πέντε χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής αυτής εξίσωσης. (β:3) Ειδικά στο ερώτημα αυτό με $K(x,t) = xt$ και $f(x) = x$ η λύση της με τη μέθοδο του διαχωρίσιμου πυρήνα. (Κανένας σχετικός τύπος δε θεωρείται γνωστός!) (γ:1) Για γενικές συναρτήσεις $K(x,t)$ και $f(x)$ η αναγωγή της ολοκληρωτικής εξίσωσης σε σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων με τη μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss (ή Gauss-Legendre). Οι n κόμβοι να δηλωθούν με t_{in} και τα αντίστοιχα βάρη με A_{in} (με $i = 1, 2, \dots, n$). (δ:1) Ο επαναληπτικός τύπος για την επίλυση του γραμμικού αυτού συστήματος με κατάλληλη επαναληπτική μέθοδο. (ε:1) Μετά την επίλυση (εννοείται όχι αληθινή επίλυση!) του γραμμικού συστήματος ο τύπος φυσικής παρεμβολής του Nyström για την προσεγγιστική λύση $y_n(x)$. (στ:1) Για ποιους δύο διαφορετικούς λόγους υπερτερεί η φυσική από την πολυωνυμική παρεμβολή στο παρόν πρόβλημα;

Γ2. ΑΣΚΗΣΗ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ Γ2 (Κεφάλαιο Γ2, Περιβαλλοντική Μηχανική): Στην αποδόμηση ρύπου Α πρώτης τάξεως στην Περιβαλλοντική Μηχανική προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση

$$c(t) = c_0 - k \int_0^t c(\tau) d\tau$$

με τα c_0 και k γνωστές θετικές σταθερές. Ζητούνται: (α:1) Η αναγωγή της σε ισοδύναμο πρόβλημα αρχικής τιμής, η λύση της με επίλυση του προβλήματος αρχικής τιμής κι η επαλήθευση της λύσεως αυτής της παραπάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης. (β:1) Η κατευθείαν επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (γ:1) Με τη χρήση της γνωστής μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων και με αρχική προσέγγιση τη σταθερή συνάρτηση

$$c_0(t) = c_0$$

η εύρεση των επόμενων προσεγγίσεων $c_1(t)$ και $c_2(t)$. (δ:1) Η θεωρητική εξήγηση εάν ή όχι συγκλίνει εδώ η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων. (ε:3) Στη συνέχεια η πολύ λεπτομερής μαθηματική απόδειξη με τη μέθοδο της επαγωγής (επαγωγική απόδειξη) ότι η n -τάξεως προσέγγιση της λύσεως $c(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$c_n(t) = c_0 \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{k^m t^m}{m!}.$$

(στ:1) Από τον τύπο αυτό για $n \rightarrow \infty$ να υπολογισθεί η λύση $c_\infty(t)$ της παραπάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης σε κλειστή μορφή (με επεξηγήσεις) και υποχρεωτικά χωρίς τη χρήση δυναμοσειράς.

Γ3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ Γ3 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Δυναμική): Εδώ μελετάμε την εξής ολοκληρωτική εξίσωση:

$$u(t) - \omega_0^2 \int_0^t (t - \tau) u(\tau) d\tau = \frac{1}{m} \int_0^t (t - \tau) p(\tau) d\tau + u_0 + v_0 t$$

(εδώ με μείον: $-\omega_0^2$). Ζητούνται: (α:1) Να αναφερθούν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (β:1) Να αναχθεί σε συνήθη διαφορική εξίσωση με αρχικές συνθήκες. (γ:1) Να αναφερθεί σε ποιο ακριβώς πρόβλημα μηχανικής απαντάται (με λεπτομέρειες). (δ:1) Να αναφερθεί ποια πλεονεκτήματα παρουσιάζουν οι ολοκληρωτικές εξισώσεις έναντι των αντίστοιχων διαφορικών εξισώσεων. (ε:2) Να βρεθεί η λύση της ολοκληρωτικής εξισώσεως μέσω της πιο πάνω αναγωγής της σε διαφορική εξίσωση με κάποια (δεν καθορίζεται!) κατάλληλη μέθοδο επιλύσεως της τελευταίας. (στ:2) Να βρεθεί η ίδια λύση απευθείας από την ολοκληρωτική εξίσωση με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

ΑΣΚΗΣΗ Γ4 (Κεφάλαιο Γ2, Δυναμική): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση, αλλά τώρα χωρίς τη φόρτιση $p(t)$: με $p(t) = 0$. Ζητούνται: (α:1) Ο επαναληπτικός (αναδρομικός) τύπος για την εφαρμογή της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων στην ολοκληρωτική εξίσωση. Στη συνέχεια με αρχική προσέγγιση τη μηδενική συνάρτηση:

$$u_0(t) = 0,$$

οι δύο επόμενες προσεγγίσεις (β:1) $u_1(t)$ και (γ:2) $u_2(t)$. Από την τελευταία εκτιμήσεις (όχι αληθινές ευρέσεις, χωρίς πράξεις!) (δ:1) της $u_3(t)$ και (ε:1) της $u_\infty(t)$ τόσο σε μορφή δυναμοσειράς όσο και (στ:1) με κλειστό τύπο (δηλαδή χωρίς τη δυναμοσειρά). (ζ:1) Συγκρίνει ή όχι εδώ η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων και για ποιο λόγο;

ΑΣΚΗΣΗ Γ5 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Ταλαντώσεις): Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση:

$$u(t) + 2\xi\omega_0 \int_0^t u(\tau) d\tau + \omega_0^2 \int_0^t (t - \tau) u(\tau) d\tau = u_0 + v_0 t + 2\xi\omega_0 u_0 t.$$

Οι ποσότητες ξ (εδώ με $0 < \xi < 1$), ω_0 (με $\omega_0 > 0$), u_0 και v_0 είναι γνωστές σταθερές. Η συνάρτηση $u(t)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση με t το χρόνο. Ζητούνται: (α:1) Έξι χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής αυτής εξισώσεως. (β:1) Η αναγωγή της σε ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση με αρχική συνθήκη. (γ:1) Η παραπέρα αναγωγή της σε διαφορική εξίσωση με δύο αρχικές συνθήκες. (δ:2) Η γενική λύση (χωρίς μετασχηματισμό Laplace!) της ισοδύναμης διαφορικής εξισώσεως υποχρεωτικά με τη χρήση πραγματικής εκθετικής συναρτήσεως και επίσης πραγματικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Στη λύση αυτή να χρησιμοποιηθεί και το βοηθητικό σύμβολο

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad \text{με} \quad 0 < \xi < 1.$$

(ε:3) Η μερική λύση (ή ειδική λύση) της ίδιας διαφορικής εξισώσεως που αντιστοιχεί στις σχετικές αρχικές συνθήκες. (Φυσικά η λύση αυτή είναι ισοδύναμη με τη λύση της αρχικής ολοκληρωτικής εξισώσεως!)

ΑΣΚΗΣΗ Γ6 (Κεφάλαιο Γ2, Ταλαντώσεις): Για την ολοκληρωτική εξίσωση της προηγούμενης ασκήσεως εδώ ζητούνται επίσης: (α:2) Η εύρεση του μετασχηματισμού Laplace

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$ κατευθείαν από την ολοκληρωτική εξίσωση. (β:2) Ο ίδιος μετασχηματισμός Laplace $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$, τώρα όμως από την ισοδύναμη διαφορική εξίσωση μαζί με τις αρχικές συνθήκες: το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών. (Τα αποτελέσματα πρέπει να συμφωνούν!) (γ:3) Με τη χρήση και των γνωστών τύπων

$$\mathcal{L}\{e^{bt} \cos at\} = \frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}, \quad \mathcal{L}\{e^{bt} \sin at\} = \frac{a}{(s - b)^2 + a^2} \quad \text{με} \quad s > b$$

η εύρεση της λύσεως

$$u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$$

της ολοκληρωτικής εξίσωσης που εξετάζουμε. (δ:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί του προβλήματος των ταλαντώσεων που μελετάμε από της απόψεως του Πολιτικού Μηχανικού.

ΑΣΚΗΣΗ Γ7 (Κεφάλαιο Γ2, Ταλαντώσεις): Για την ίδια ολοκληρωτική εξίσωση της προηγούμενης ασκήσεως ζητούνται επίσης: (α:1) Ο επαναληπτικός τύπος για την προσεγγιστική επίλυση της με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. (β:1) Θεωρητικά συγκλίνει ή αποκλίνει η μέθοδος αυτή και γιατί; (γ:1) Με αρχική (μηδενικής τάξεως) προσέγγιση τη μηδενική συνάρτηση

$$u_0(t) = 0$$

η εύρεση της πρώτης προσεγγίσεως $u_1(t)$. (δ:2) Στη συνέχεια η εύρεση και της δεύτερης προσεγγίσεως $u_2(t)$ σε τελική μορφή τριτοβάθμιου πολυωνύμου

$$p(t) = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$$

με πλήρη προσδιορισμό των συντελεστών A, B, C και D . (ε:1) Είναι σωστή η προσέγγιση αυτή $u_2(t)$ ως προς τις δύο αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = v_0,$$

δηλαδή τις επαληθεύει; (στ:2) Ως προς την αρχική επιτάχυνση $a(0)$;

ΑΣΚΗΣΗ Γ8 (Κεφάλαιο Γ2, Ταλαντώσεις): Δίνεται η ολοκληρωτική εξίσωση

$$\omega_0 u(t) = \int_0^t \sin[\omega_0(t - \tau)] p(\tau) d\tau$$

με $t \geq 0$, με τη συνάρτηση $u(t)$ γνωστή και μάλιστα τέτοια ώστε

$$u(0) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = 0$$

και τη συνάρτηση $p(t)$ άγνωστη. Το ω_0 είναι γνωστή θετική σταθερά. Ζητείται να επαληθευθεί η λύση

$$p(t) = \ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t)$$

της ολοκληρωτικής αυτής εξίσωσης με δύο διαφορετικούς τρόπους: (α:2) με τη χρήση μετασχηματισμών Laplace και (β:6) χωρίς τη χρήση μετασχηματισμών Laplace: εντελώς άμεση επαλήθευση με αντικατάσταση της λύσεως στην ολοκληρωτική εξίσωση.

ΑΣΚΗΣΗ Γ9 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Ταλαντώσεις): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Εδώ ζητούνται επίσης: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της πιο πάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης. (β:1) Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζεται; (γ:1) Πώς καλείται ένα τέτοιο πρόβλημα; Και το αντίθετό του; (δ:3) Η επίλυση της ολοκληρωτικής αυτής εξίσωσης με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (ε:2) Είναι εφαρμόσιμες στην ολοκληρωτική αυτή εξίσωση (i) η μέθοδος της αναγωγής της σε διαφορική εξίσωση (φυσικά και τις σχετικές κατάλληλες αρχικές συνθήκες) με παραγωγίσεις; (ii) η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων; και τέλος (iii) η μέθοδος της αριθμητικής ολοκληρώσεως με βάση τον κανόνα του Gauss; Γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ Γ10 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Ταλαντώσεις): Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$u(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau \quad \text{με} \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad \omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}, \quad 0 \leq \xi < 1.$$

(Οι ποσότητες m και ω_0 είναι κι αυτές θετικές σταθερές.) Με γνωστή συνάρτηση τη $u(t)$ και άγνωστη συνάρτηση την $p(t)$ ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής

αυτής εξίσωσης. (β:5) Η λύση της με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Υπόδειξη: Δίνεται ο τύπος

$$\mathcal{L}\left\{e^{-\xi\omega_0 t} \sin \omega_D t\right\} = \frac{\omega_D}{(s + \xi\omega_0)^2 + \omega_D^2}.$$

(γ:2) Λεπτομερείς επεξηγήσεις για το εάν ή όχι και γιατί είναι ή δεν είναι εφαρμόσιμες οι άλλες τέσσερις γνωστές μέθοδοι επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων μία προς μία.

ΑΣΚΗΣΗ Γ11 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Ταλαντώσεις): Σαν συνέχεια της προηγούμενης ασκήσεως δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \frac{p(t)}{m}, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad \text{με } m > 0, \omega_0 > 0 \text{ και } 0 \leq \xi < 1.$$

Η συνάρτηση $u(t)$ είναι άγνωστη, ενώ η συνάρτηση $p(t)$ είναι γνωστή. Ζητούνται: (α:1) Η μετατροπή του σε ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση και (β:1) σε ολοκληρωτική εξίσωση με την ίδια άγνωστη συνάρτηση $u(t)$. (γ:2) Η επαλήθευση της ολοκληρωτικής εξίσωσης με αναγωγή της στο παραπάνω πρόβλημα αρχικών τιμών. (δ:2) Από την ολοκληρωτική (όχι τη διαφορική!) εξίσωση η εύρεση του μετασχηματισμού Laplace $U(s)$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (ε:2) Η αντιστροφή του (με τη χρήση και του τύπου της προηγούμενης ασκήσεως) και η εύρεση της λύσεως $u(t)$. Τι λίγο-πολύ προφανές παρατηρείται;

ΑΣΚΗΣΗ Γ12 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Ταλαντώσεις): Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0$$

με άγνωστη συνάρτηση τη $u(t)$ και τις ποσότητες ξ (με $0 < \xi < 1$), ω_0 (με $\omega_0 > 0$), u_0 και v_0 γνωστές σταθερές. Ζητούνται: (α:2) Χωρίς καμία αλλαγή της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$ και με διαδοχικές ολοκληρώσεις να μετατραπεί το πρόβλημα αυτό σε ισοδύναμη ολοκληρωτική εξίσωση. (β:1) Να δοθούν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος. (γ:1) Ποια ή ποιες μέθοδοι είναι εφαρμόσιμες για την επίλυση της και γιατί; Επίσης ποια ή ποιες μέθοδοι δεν είναι εφαρμόσιμες και γιατί; Δίνεται η ολοκληρωτική εξίσωση

$$u(t) + 2\xi\omega_0 \int_0^t u(\tau) d\tau + \omega_0^2 \int_0^t (t - \tau)u(\tau) d\tau = u_0 + (v_0 + 2\xi\omega_0 u_0)t.$$

Ζητούνται (δ:2) Η λεπτομερής αναγωγή της σε ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών τιμών. (ε:2) Η λύση της (σε πραγματική εκθετική-τριγωνομετρική μορφή) με επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών του προηγούμενου ερωτήματος με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως.

ΑΣΚΗΣΗ Γ13 (Κεφάλαιο Γ2, Ταλαντώσεις): Συνέχεια της προηγούμενης ασκήσεως. Για την αμέσως πιο πάνω ολοκληρωτική εξίσωση ζητούνται: (α:4) Η κατευθείαν εύρεση του μετασχηματισμού Laplace

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$$

της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (β:4) Η επαλήθευση του ίδιου μετασχηματισμού Laplace $U(s)$, τώρα όμως με την εύρεσή του μέσω του ισοδύναμου προβλήματος αρχικών τιμών, το οποίο ήδη προσδιορίστηκε στο ερώτημα (δ) της προηγούμενης ασκήσεως.

ΑΣΚΗΣΗ Γ14 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Ταλαντώσεις): Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p \quad \text{με } p = \frac{p_0}{m} = \text{σταθερά}, \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = v(0) = 0.$$

Ζητούνται: (α:1) Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα αναφέρεται; (με λεπτομέρειες!) (β:2) Η αναγωγή του σε ολοκληρωτική εξίσωση ως προς

$$a(t) = \ddot{u}(t)$$

με προσοχή στις σταθερές. (γ:1) Οι χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής αυτής εξίσωσης. (δ:1) Στη συνέχεια η εύρεση του μετασχηματισμού Laplace $A(s) = \mathcal{L}\{a(t)\}$ και με αντιστροφή (ε:1) της $a(t)$

και έπειτα με ολοκληρώσεις των (στ:1) $v(t) = \dot{u}(t)$ και (ζ:1) $u(t)$. (η:2) Τέλος η πλήρης επαλήθευση της λύσεως του πιο πάνω προβλήματος αρχικών τιμών.

ΑΣΚΗΣΗ Γ15 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Ταλαντώσεις): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Για το ίδιο πρόβλημα αρχικών τιμών ζητούνται επίσης: (α:2) Η αναγωγή του σε ολοκληρωτική εξίσωση χωρίς όμως αλλαγή άγνωστης συναρτήσεως (δηλαδή ως προς $u(t)$) και με προσοχή στις σταθερές. (β:2) Από αυτήν την ολοκληρωτική εξίσωση η εύρεση του μετασχηματισμού Laplace $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ χωρίς την αντιστροφή του. (γ:1) Ποιες γνωστές μέθοδοι είναι κατάλληλες για την επίλυση της ολοκληρωτικής αυτής εξισώσεως; (δ:1) Για την ίδια εξίσωση και με αρχική υπόθεση για τη λύση της $u_0(t)$ τη μηδενική συνάρτηση ο επαναληπτικός (αναδρομικός) τύπος στη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων και (ε:1) σχόλιο για το αν εδώ παρουσιάζεται σ' αυτόν σύγκλιση ή όχι και γιατί. Από τον τελευταίο τύπο οι δύο επόμενες προσεγγίσεις της λύσεως (στ:1) $u_1(t)$ και (ζ:2) $u_2(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ Γ16 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Ταλαντώσεις): Στις ελεύθερες ταλαντώσεις ενός μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα προκύπτει το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0$$

με $u(t)$ τη μετατόπιση του υλικού σημείου και ξ , ω_0 , u_0 και v_0 γνωστές σταθερές και $0 < \xi < 1$: ασθενής ή υποκρίσιμη απόσβεση. Ζητούνται: (α:1) Πού ακριβώς παρουσιάζεται το πρόβλημα αυτό; (β:4) Με τη χρήση της επιταχύνσεως $a(t)$ αντί για τη θέση $u(t)$, δηλαδή με

$$a(t) = \ddot{u}(t),$$

η αναγωγή του σε ισοδύναμη ολοκληρωτική εξίσωση και (γ:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (δ:1) Ο επαναληπτικός (αναδρομικός) τύπος για την προσέγγιση $a_n(t)$ κατά την επίλυση της ολοκληρωτικής αυτής εξισώσεως με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων και (ε:1) λεπτομερές σχόλιο για την πιθανή σύγκλισή της. (στ:1) Ξεκινώντας τώρα από τη μηδενική προσέγγιση

$$a_0(t) = 0,$$

η πρώτη προσέγγιση $a_1(t)$ και (ε:1) η απόδειξη ότι $a_1(0) = a(0)$. (ζ:3) Τέλος η επίλυση της ίδιας ολοκληρωτικής εξισώσεως με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace με εύρεση της συναρτήσεως $A(s) = \mathcal{L}\{a(t)\}$, αλλά χωρίς την αντιστροφή της.

Γ4. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ Γ17 (Κεφάλαιο Γ1, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί, Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Σε δοκό θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$EIv''''(x) + kv(x) = p(x)$$

με άγνωστη συνάρτηση τη $v(x)$, γνωστή την $p(x)$ και τις ποσότητες EI και k επίσης γνωστές και θετικές. Ισχύουν επίσης και οι αρχικές συνθήκες

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = \theta_0, \quad v''(0) = \frac{M_0}{EI}, \quad v'''(0) = \frac{Q_0}{EI}$$

με τις τέσσερις ποσότητες στα δεξιά μέλη γνωστές. Ζητούνται: (α:1) Σε πιο ακριβώς πρόβλημα δοκού απαντάται η διαφορική αυτή εξίσωση; Ποια φυσική υπόθεση έχει γίνει και σε ποιον οφείλεται αυτή; Μερικές φορές πώς καλείται μια τέτοια δοκός; (β:5) Η αναγωγή του προβλήματος αυτού αρχικών τιμών σε ολοκληρωτική εξίσωση χωρίς την αλλαγή της άγνωστης συναρτήσεως $v(x)$ και χωρίς την παρουσία διαδοχικών (διπλών) ολοκληρωμάτων. (Οι τελικοί τύποι για τις σχετικές παραγοντικές ολοκληρώσεις θεωρούνται γνωστοί.) (γ:2) Σε συνήθη δοκό (με $k = 0$) υποθέτουμε γνωστές τις τέσσερις αρχικές συνθήκες v_0 , θ_0 , M_0 και Q_0 στο αριστερό άκρο της $x = 0$. Με βάση

το προηγούμενο ερώτημα ζητείται η έκφραση του βέλους κάμψεως $v(x)$ κατά μήκος της δοκού (της ελαστικής γραμμής της) για αυθαίρετη κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$ πάνω στη δοκό.

ΑΣΚΗΣΗ Γ18 (Κεφάλαιο Γ2, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Εδώ θεωρούμε μια συνήθη δοκό δυσκαμψίας EI με γνωστές τις αρχικές συνθήκες:

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = \theta_0, \quad v''(0) = \frac{M_0}{EI} \quad \text{και} \quad v'''(0) = \frac{Q_0}{EI}$$

στο αριστερό άκρο της $x = 0$. Με γνωστή την ελαστική γραμμή της (το βέλος κάμψεώς της) $v(x)$ και άγνωστη την κατανεμημένη κάθετη φόρτισή της $p(x)$ (πρόκειται για ένα αντιστρόφο πρόβλημα!) προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση

$$v(x) = v_0 + \theta_0 x + \frac{M_0}{2EI} x^2 + \frac{Q_0}{6EI} x^3 + \frac{1}{6EI} \int_0^x (x - \xi)^3 p(\xi) d\xi.$$

Ζητείται η λύση της $p(x)$: (α:4) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (β:4) Με άλλη μέθοδο.

ΑΣΚΗΣΗ Γ19 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Εδώ θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$EIv(x) + \frac{k}{6} \int_0^x (x - \xi)^3 v(\xi) d\xi = f(x) \quad \text{με} \quad 0 \leq x \leq L$$

και με

$$f(x) = \frac{1}{6} \int_0^x (x - \xi)^3 p(\xi) d\xi + Q_0 \frac{x^3}{6} + M_0 \frac{x^2}{2} + EI(\theta_0 x + v_0)$$

Άγνωστη συνάρτηση είναι η $v(x)$, ενώ η συνάρτηση $p(x)$ είναι γνωστή. Επίσης γνωστές είναι οι οκτώ σταθερές $E, I, k, L, Q_0, M_0, \theta_0$ και v_0 . Ζητούνται: (α:1) Να δοθούν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής αυτής εξισώσεως. (β:3) Να γίνει αναγωγή της σε ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών τιμών χωρίς βέβαια να λησμονηθούν οι αρχικές συνθήκες (για $x = 0$). (γ:3) Να γίνει επαλήθευση του προβλήματος αρχικών τιμών που βρέθηκε με αναγωγή του στην πιο πάνω ολοκληρωτική εξίσωση: αντίστροφη εργασία. (δ:1) Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα της Μηχανικής των Υλικών αντιστοιχεί η πιο πάνω ολοκληρωτική εξίσωση; (ε:1) Ποια σχετική υπόθεση έχει γίνει; Από ποιον και πότε; (στ:1) Από τι ακριβώς εξαρτάται η σταθερά k ; (Από δύο παράγοντες, όχι μονάχα έναν, όπως θα νόμιζε κανείς στην αρχή.)

ΑΣΚΗΣΗ Γ20 (Κεφάλαιο Γ2, Μηχανική των Υλικών, Δοκοί): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:3) Να προσδιορισθεί ο μετασχηματισμός Laplace

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$$

της άγνωστης συναρτήσεως $v(x)$ (χωρίς την αντιστροφή του!) κατευθείαν από την ολοκληρωτική εξίσωση. (β:3) Να επαληθευθεί ο ίδιος μετασχηματισμός Laplace με εύρεσή του τώρα από το ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών τιμών. (γ:1) Με χρήση της συναρτήσεως $f(x)$ να γραφεί ο επαναληπτικός τύπος για την εύρεση της n -στής προσεγγίσεως $v_n(x)$ της λύσεως $v(x)$ από την προηγούμενη προσέγγισή της $v_{n-1}(x)$ με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. (δ:1) Συγκρίνει ή όχι εδώ η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων και γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ Γ21 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Γ3, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Σε ένα πρόβλημα δοκού με κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x)$ προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_0^x (x - \xi) p(\xi) d\xi = \frac{1}{2(c + 1)} x^2 p(x).$$

Σε τούτη την εξίσωση η σταθερά c είναι γνωστή. Άγνωστη συνάρτηση είναι η $p(x)$. Ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (β:2) Στο μετασχηματισμό Laplace η απόδειξη των τύπων

$$\mathcal{L}\{xp(x)\} = -P'(s) \quad \text{και} \quad \mathcal{L}\{x^2 p(x)\} = P''(s) \quad \text{με} \quad P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\}.$$

(γ:1) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και χωρίς παραγωγίσεις η αναγωγή της πιο πάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης σε συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς $P(s) = \mathcal{L}\{p(x)\}$. (δ:2) Η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης που προέκυψε, που είναι εξίσωση Euler (ή Cauchy–Euler), ως προς $P(s)$ και (ε:1) Η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace $P(s)$ και η εύρεση της λύσεως $p(x) = \mathcal{L}^{-1}\{P(s)\}$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης. (στ:1) Η επαλήθευση πως η γενική λύση $p(x)$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης για $c = 2$ είναι η ακόλουθη:

$$p(x) = Bx$$

με το B μια αυθαίρετη σταθερά.

ΑΣΚΗΣΗ Γ22 (Κεφάλαιο Γ2, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$v(x) = v_0 + \theta_0 x + \frac{M_0}{2EI} x^2 + \frac{Q_0}{6EI} x^3 + \frac{1}{6EI} \int_0^x (x - \xi)^3 p(\xi) d\xi$$

με $v_0 = v(0)$, $\theta_0 = v'(0)$, $M_0 = Elv''(0)$ και $Q_0 = Elv'''(0)$ και άγνωστη συνάρτηση την $p(x)$. Ζητείται η λύση της $p(x)$ (α:5) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και (β:5) με κάποια άλλη μέθοδο.

ΑΣΚΗΣΗ Γ23 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Το πρόβλημα της συνήθους δοκού μήκους L (με $0 \leq x \leq L$) και δυσκαμψίας El που στηρίζεται σε ελαστική βάση (σε θεμέλιο, συνήθως στο έδαφος) εδώ με φόρτιση μόνο στα άκρα της δοκού $x = 0$ και $x = L$ (φόρτιση $p(x) = 0$) ανάγεται στη γνωστή συνήθη διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως

$$Elv''''(x) + kv(x) = 0.$$

Στην εξίσωση αυτή $v(x)$ είναι το βέλος κάμψεως της δοκού και k γνωστή σταθερά που εξαρτάται από τις ιδιότητες της βάσεως (του θεμελίου) και το πλάτος της δοκού. Θεωρούνται επίσης γνωστές οι αρχικές συνθήκες στο αριστερό μόνο άκρο της δοκού $x = 0$: (i) Βέλος κάμψεως v_0 , (ii) Κλίση (ή στροφή) θ_0 , (iii) Ροπή κάμψεως (ή καμπτική ροπή) M_0 και (iv) τέμνουσα δύναμη (ή διατμητική δύναμη) Q_0 . Ζητούνται: (α:1) Το σχετικό πρόβλημα αρχικών τιμών: διαφορική εξίσωση και αρχικές συνθήκες. (β:3) Με κατάλληλες ολοκληρώσεις η ισοδύναμη ολοκληρωτική εξίσωση. (γ:1) Έξι χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής αυτής εξίσωσης. (δ:1) Ποιες είναι οι κυριότερες πέντε μέθοδοι επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων και ποιες ακριβώς από αυτές είναι άμεσα εφαρμόσιμες στην παρούσα ολοκληρωτική εξίσωση; (ε:1) Σε τι πλεονεκτεί η ολοκληρωτική εξίσωση που προέκυψε σχετικά με την αρχική συνήθη διαφορική εξίσωση; (στ:1) Τι γνωρίζετε για τη βέβαιη (ή μη βέβαιη) σύγκλιση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων σε ολοκληρωτικές εξισώσεις (i) τύπου Fredholm και (ii) τύπου Volterra;

ΑΣΚΗΣΗ Γ24 (Κεφάλαιο Γ2, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Εδώ δίνεται η ολοκληρωτική εξίσωση

$$Elv(x) + \frac{k}{6} \int_0^x (x - \xi)^3 v(\xi) d\xi = El(v_0 + \theta_0 x) + M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6}$$

με τις ποσότητες El , k , v_0 , θ_0 , M_0 και Q_0 γνωστές σταθερές και τη συνάρτηση $v(x)$ άγνωστη (με $0 \leq x \leq L$). Θέλουμε να τη λύσουμε με τη μέθοδο της αναγωγής της σε συνήθη διαφορική εξίσωση. Ζητούνται: (α:2) Η σχετική συνήθης διαφορική εξίσωση μαζί με τις αρχικές συνθήκες: πρόβλημα αρχικών τιμών. (β:1) Υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου της εκθετικής αντικαταστάσεως $e^{\mu x}$ και του βοηθητικού συμβόλου (τέταρτης ρίζας)

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

η εύρεση της σχετικής χαρακτηριστικής εξίσωσης $p_4(\mu) = 0$ και των τεσσάρων ριζών της μ_k (όπου $k = 1, 2, 3, 4$) με γραφή των ριζών μ_k (γ:1) τόσο σε πολική μορφή όσο και (δ:1) σε Καρτεσιανή μορφή. (ε:1) Η γενική λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (με αυθαίρετες σταθερές, χωρίς τις γνωστές αρχικές συνθήκες) σε μορφή (στ:1) καθαρά εκθετική και (ζ:1) πραγματική με τη χρήση μόνο της πραγματικής εκθετικής συναρτήσεως και πραγματικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

ΑΣΚΗΣΗ Γ25 (Κεφάλαιο Γ2, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί επί Ελαστικής Βάσεως): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:3) Υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace η εύρεση του μετασχηματισμού Laplace $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$ της άγνωστης συναρτήσεως $v(x)$ της ολοκληρωτικής εξισώσεως της προηγούμενης ασκήσεως με βάση την ίδια την ολοκληρωτική εξίσωση. (Δε ζητείται να γίνει αντιστροφή αυτού του μετασχηματισμού Laplace $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$.) Τώρα υποχρεωτικά με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων και με αρχική προσέγγιση τη μηδενική συνάρτηση: (β:1) Ποιος είναι ο σχετικός επαναληπτικός (αναδρομικός) τύπος για τις παρούσες διαδοχικές προσεγγίσεις; (γ:1) Η πρώτη προσέγγιση $v_1(x)$; (δ:1) Η δεύτερη προσέγγιση $v_2(x)$; (χωρίς όμως τον υπολογισμό του σχετικού ολοκληρώματος!) (ε:1) Ποιες από τις αρχικές συνθήκες στο σημείο $x = 0$ επαληθεύονται από τις δύο προσεγγίσεις $v_1(x)$ και $v_2(x)$; (στ:1) Θεωρητικά συγκλίνει ή όχι η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων στο παρόν πρόβλημα επίλυσεως της συγκεκριμένης ολοκληρωτικής εξισώσεως; Γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ Γ26 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Μηχανική των Υλικών: Λυγισμός): Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$EIv(x) + P \int_0^x (x - \xi)v(\xi) d\xi = \frac{Q_0}{6}x^3 + \frac{M_0}{2}x^2$$

με άγνωστη συνάρτηση τη $v = v(x)$ (βέλος κάμψεως). Οι ποσότητες EI , P , Q_0 και M_0 είναι γνωστές σταθερές. Η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση παρουσιάζεται σε πρόβλημα λυγισμού συνήθους ράβδου (υπό θλιπτικό φορτίο P) μήκους L (με $0 \leq x \leq L$), κυκλικής διατομής και δυσκαμψίας EI πακτωμένης στο κάτω άκρο της $x = 0$. Ζητούνται: (α:1) Έξι χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής αυτής εξισώσεως. (β:1) Η αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση με (γ:1) λεπτομερή εύρεση και των σχετικών αρχικών συνθηκών. (δ:2) Η επαλήθευση της διαφορικής εξισώσεως και των αρχικών συνθηκών με αναγωγή τους στην αρχική ολοκληρωτική εξίσωση. (ε:3) Η επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών (διαφορική εξίσωση και αρχικές συνθήκες) υποχρεωτικά χωρίς τη χρήση μετασχηματισμού Laplace.

ΑΣΚΗΣΗ Γ27 (Κεφάλαιο Γ2, Μηχανική των Υλικών: Λυγισμός): Για την ολοκληρωτική εξίσωση της προηγούμενης ασκήσεως ζητούνται επίσης: (α:1) Ο μετασχηματισμός της κατά Laplace. (β:2) Ο ίδιος ο μετασχηματισμός Laplace $V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$ της λύσεως της $v(x)$ (χωρίς όμως την αντιστροφή του). (γ:1) Ο επαναληπτικός τύπος για την εφαρμογή της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων λυμένος ως προς $v_n(x)$. Με αρχική προσέγγιση τη μηδενική συνάρτηση $v_0(x) = 0$ η εύρεση (δ:1) της πρώτης προσεγγίσεως $v_1(x)$ καθώς και (ε:1) της δεύτερης $v_2(x)$, χωρίς όμως τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. (στ:1) Για την πρώτη προσέγγιση $v_1(x)$ η διερεύνηση της ισχύος των τεσσάρων αρχικών συνθηκών στο σημείο πακτώσεως της ράβδου $x = 0$ για το ισοδύναμο πρόβλημα αρχικών τιμών. (ζ:1) Γιατί συγκλίνει εδώ η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων;

ΑΣΚΗΣΗ Γ28 (Κεφάλαια Γ2, Γ3, Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε εδώ την ολοκληρωτική εξίσωση

$$v(x) = \int_0^L G(x, \xi)p(\xi) d\xi.$$

Ζητούνται: (α:1) Σε ποιο ακριβώς πρόβλημα συνήθους δοκού μήκους L και δυσκαμψίας EI αναφέρεται; (β:1) Τι χαρακτηρισμό δίνουμε για το πρόβλημα αυτό; (γ:1) Δύο ονομασίες του πυρήνα $G(x, \xi)$ της ολοκληρωτικής εξισώσεως και (δ:1) τι εκφράζει από φυσικής απόψεως ο ίδιος πυρήνας; (ε:1) Ποια βασική ιδιότητα έχει και από ποια αρχή προκύπτει αυτή; (στ:1) Σχόλιο (με επεξηγήσεις) για το αν ο πυρήνας $G(x, \xi)$ και οι δύο πρώτες μερικές παράγωγοί του ως προς x είναι συνεχείς συναρτήσεις. (ζ:1) Απλά η γραφή της γενικής μορφής κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως (για το διάστημα $[0, L]$) και (η:1) με τη χρήση του η αναγωγή της πιο πάνω ολοκληρωτικής εξισώσεως σε σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων. Και τώρα υποθέτοντας τη λύση $p(x)$ της ολοκληρωτικής εξισώσεως ήδη γνωστή, από ποιους ακριβώς ολοκληρωτικούς τύπους μπορούν να υπολογισθούν οι σχετικές ποσότητες (θ:1) $M(x)$ και (ι:1) $Q(x)$ ή ισοδύναμα $V(x)$ με τη χρήση κατάλληλων μερικών παραγώγων του πυρήνα $G(x, \xi)$ που θεωρούνται ήδη υπολογισμένες-γνωστές;

Γ5. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ Γ29 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε τις ιδιοταλαντώσεις συνήθους δοκού. Προκύπτει η χωρική συνήθης διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως

$$X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0$$

με το β κατάλληλη γνωστή θετική σταθερά. Ζητείται: (α:4) Με κατευθείαν ολοκληρώσεις η αναγωγή της σε ολοκληρωτική εξίσωση με τη χρήση μόνο απλών ολοκληρωμάτων και χωρίς καθόλου τον προσδιορισμό των σταθερών σ' αυτή. Τώρα δίνεται η ολοκληρωτική εξίσωση

$$X(x) - \frac{\beta^4}{6} \int_0^x (x - \xi)^3 X(\xi) d\xi = C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

με τις ποσότητες C_1, C_2, C_3 και C_4 γνωστές σταθερές. Ζητούνται: (β:4) Η αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση μαζί με τις αναγκαίες αρχικές συνθήκες. Παραπέρα η γενική λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (γ:1) σε εκθετική μορφή και (δ:1) τελικά σε υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή.

ΑΣΚΗΣΗ Γ30 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Εδώ συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής εξισώσεως που δόθηκε. (β:1) Ο πυρήνας της. (γ:4) Με κατευθείαν χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace με

$$X_L(s) = \mathcal{L}\{X(x)\}$$

η αναγωγή της ολοκληρωτικής εξισώσεως σε γραμμική αλγεβρική εξίσωση με επίλυση της τελευταίας εξισώσεως, αλλά χωρίς αντιστροφή κατά Laplace της λύσεως $X_L(s)$ που βρέθηκε. (δ:4) Η ίδια μέθοδος να εφαρμοσθεί και στη διαφορική εξίσωση της προηγούμενης ασκήσεως (πάλι χωρίς την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace). Τι παρατηρείται;

ΑΣΚΗΣΗ Γ31 (Κεφάλαιο Γ2, Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις. Εδώ αναφερόμαστε ειδικότερα στην ολοκληρωτική εξίσωση που δόθηκε στην προπροηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:1) Η αναφορά όλων των γνωστών κατάλληλων μεθόδων για την επίλυσή της. (β:1) Είναι ή όχι εφαρμόσιμη η μέθοδος της αριθμητικής ολοκληρώσεως με βάση τον κανόνα του Gauss και γιατί; (γ:1) Να δοθεί ο επαναληπτικός (ή αναδρομικός) τύπος για την επίλυσή της με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων. (δ:2) Ξεκινώντας από την τετριμμένη μηδενική προσέγγιση, να υπολογισθεί η πρώτη προσέγγιση και (ε:2) στη συνέχεια και η δεύτερη προσέγγιση χωρίς όμως τον υπολογισμό του ολοκληρώματος σ' αυτή. (στ:1) Συγκρίνει ή όχι εδώ η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων και (ζ:2) γιατί ακριβώς;

Γ6. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΞΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

ΑΣΚΗΣΗ Γ32 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Γ3, Ιξοελαστικότητα): Σε μονοαξονική καταπόνηση γραμμικά ιξοελαστικού υλικού αποδεικνύεται ότι ισχύει η ολοκληρωτική εξίσωση

$$\varepsilon(t) = J(0) \sigma(t) + \int_0^t j(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau$$

(όπου J είναι η συνήθης χρονική παράγωγος της συναρτήσεως J) με $\varepsilon(t)$ την παραμόρφωση, $\sigma(t)$ την τάση και $J(t)$ την ενδοτικότητα σε ερπυσμό, που θεωρείται γνωστή. Εδώ υποθέτουμε την παραμόρφωση $\varepsilon(t)$ ίση με $\varepsilon_0 t$ (με το ε_0 σταθερά). Θεωρούμε επίσης ένα ιξοελαστικό υλικό Kelvin (ή Voigt) με

$$J(t) = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{q_0}, \quad \text{όπου} \quad \lambda = \frac{q_0}{q_1}$$

(δύο γνωστές σταθερές: q_0 και q_1 σε ένα υλικό Kelvin ή Voigt). Υπό όλες αυτές τις συνθήκες ζητούνται: (α:1) Πώς μπορεί να προσδιορισθεί πειραματικά η συνάρτηση $J(t)$; Τι εξοπλισμός χρειάζεται; (β:1) Τι φαινόμενο θα είχαμε στο παρόν πρόβλημα, εάν ήταν

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0;$$

(γ:1) Έξι χαρακτηρισμοί της πιο πάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης. (δ:3) Η επίλυσή της υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (ε:2) Η επαλήθευση της λύσεως αυτής.

ΑΣΚΗΣΗ Γ33 (Κεφάλαια Γ2, Γ3, Ισοελαστικότητα): Σε μονοαξονική καταπόνηση γραμμικά ισοελαστικού υλικού ισχύει η εξίσωση

$$\varepsilon(t) = J(t) \sigma(0) + \int_0^t J(t-\tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad (1)$$

καθώς και η εξίσωση

$$\varepsilon(t) = J(0) \sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Σημειώνεται ότι η μία εξίσωση προκύπτει από την άλλη με παραγοντική ολοκλήρωση. Και στις δύο η τελεία ($\dot{\sigma}$ ή \dot{J}) δηλώνει χρονική παράγωγο. Οι συναρτήσεις $\varepsilon(t)$ και $\sigma(t)$ είναι η παραμόρφωση και η τάση αντίστοιχα στο παρόν μονοαξονικό πρόβλημα και φυσικά εδώ είναι χρονικά μεταβλητές. Η συνάρτηση $J(t)$ είναι η ενδοτικότητα σε ερπυσμό και θεωρείται γνωστή για συγκεκριμένο ισοελαστικό υλικό. Υπάρχει επίσης και το αντίστοιχο μέτρο χαλαρώσεως $Y(t)$. Μεταξύ των μετασχηματισμών Laplace τους $J_L(s) = \mathcal{L}\{J(t)\}$ και $Y_L(s) = \mathcal{L}\{Y(t)\}$ ισχύει ο τύπος

$$J_L(s) Y_L(s) = \frac{1}{s^2} \quad (3)$$

που θεωρείται γνωστός. Με βάση το μέτρο χαλαρώσεως $Y(t)$ ισχύει η εξίσωση

$$\sigma(t) = Y(t) \varepsilon(0) + \int_0^t Y(t-\tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Ζητούνται: (α:1) Πώς προσδιορίζονται πειραματικά οι συναρτήσεις $J(t)$ και $Y(t)$; (β:4) Με γνωστή συνάρτηση τη συνάρτηση $\varepsilon(t)$ και άγνωστη τη $\sigma(t)$ να λυθούν και οι δύο εξισώσεις (1) και (2) υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, αλλά χωρίς το τελικό βήμα της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace $\sigma_L(s)$. Συμφωνούν τα αποτελέσματα; (γ:1) Με χρήση της εξίσωσης (4) να υπολογισθεί ο ίδιος μετασχηματισμός Laplace $\sigma_L(s)$. (δ:1) Με γνωστές ασφαλώς τις συναρτήσεις $J(t)$ και $Y(t)$ ποια είναι η λύση των εξισώσεων (1) και (2) ως προς $\sigma(t)$ και (ε:1) της εξίσωσης (4) ως προς $\varepsilon(t)$;

ΑΣΚΗΣΗ Γ34 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Γ3, Ισοελαστικότητα): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Τώρα θεωρούμε σταθερή και γνωστή την παραμόρφωση

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0$$

και άγνωστη την αντίστοιχη τάση $\sigma(t)$ σε ισοελαστικό υλικό Maxwell με

$$J(t) = \frac{p+t}{q}$$

και τις σταθερές p και q γνωστές. Ζητούνται επίσης: (α:1) Έξι χαρακτηρισμοί της εξίσωσης (2), που είναι εδώ ολοκληρωτική εξίσωση. (β:1) Επίλυση της ίδιας εξίσωσης με αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (γ:1) Με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace και στη συνέχεια (δ:1) επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε. (ε:2) Με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων (ξεκινώντας από τη μηδενική συνάρτηση) τάξεως μέχρι και $n = 3$. (στ:2) Η λεπτομερής σύγκριση των αποτελεσμάτων των μεθόδων του μετασχηματισμού Laplace και των διαδοχικών προσεγγίσεων.

ΑΣΚΗΣΗ Γ35 (Κεφάλαια Γ1, Γ2, Γ3, Ιξοελαστικότητα): Κι εδώ στη Γραμμική Ιξοελαστικότητα (Linear Viscoelasticity) σε πρόβλημα μονοαξονικής καταπονήσεως δοκιμίου (εφελκυσμός ή/και θλίψη) προκύπτει η ακόλουθη ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\varepsilon(t) = J(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau.$$

Στην εξίσωση αυτή t είναι ο χρόνος (με $t \geq 0$), $\varepsilon(t)$ η παραμόρφωση του δοκιμίου, $\sigma(t)$ η σχετική τάση και $J(t)$ η γνωστή ενδοτικότητα σε ερπυσμό (creep compliance) του ιξοελαστικού υλικού (π.χ. ασφαλικού σκυροδέματος ή ασφαλτοσκυροδέματος, asphalt concrete). (Το σύμβολο $\dot{J}(t-\tau)$ δηλώνει την παράγωγο $\dot{J}(t)$ της ενδοτικότητας σε ερπυσμό $J(t)$ τη χρονική στιγμή $t-\tau$.) Υποθέτουμε γνωστή την παραμόρφωση $\varepsilon(t)$ και άγνωστη την τάση $\sigma(t)$. Ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής αυτής εξισώσεως. (β:7) Η γενική λύση της $\sigma(t)$ (με ολοκληρωτικό τύπο) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. Στη λύση αυτή η συνάρτηση $Y(t)$ που ορίζεται από τον τύπο

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 J_L(s)} \right\}$$

με

$$J_L(s) = \mathcal{L}\{J(t)\}$$

θεωρείται γνωστή συνάρτηση σαν η αντίστροφη κατά Laplace συνάρτηση της συναρτήσεως

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 J_L(s)}.$$

ΑΣΚΗΣΗ Γ36 (Κεφάλαια Γ2, Γ3, Ιξοελαστικότητα): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση, εδώ όμως για ένα συγκεκριμένο ιξοελαστικό υλικό: υλικό Maxwell με

$$J(t) = \frac{\rho_1 + t}{q_1}$$

με τα ρ_1 και q_1 γνωστές σταθερές. Θεωρούμε επίσης σταθερή παραμόρφωση

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0,$$

οπότε έχουμε χαλάρωση (relaxation). Ζητούνται: (α:3) Η λύση $\sigma(t)$ της ολοκληρωτικής εξισώσεως της προηγούμενης ασκήσεως υπό τις παρούσες ειδικές συνθήκες με αναγωγή της σε μια συνήθη διαφορική εξίσωση. (β:3) Ανάλογα με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων με

$$\sigma_0(t) = 0.$$

(Οι τρεις πρώτες προσεγγίσεις, $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ και $\sigma_3(t)$, αρκούν!) (γ:2) Τέλος να γίνει μια κατευθείαν εικασία για το όριο $\sigma_\infty(t)$ και επεξήγησή της.

ΑΣΚΗΣΗ Γ37 (Κεφάλαια Γ2, Γ3, Ιξοελαστικότητα): Δίνεται η ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση

$$\sigma(t) = \varepsilon(0)Y(t) + \int_0^t Y(t-\tau)\dot{\varepsilon}(\tau) d\tau$$

με $t \geq 0$ το χρόνο. Οι συναρτήσεις $\sigma(t)$ και $Y(t)$ είναι γνωστές, ενώ η συνάρτηση $\varepsilon(t)$ άγνωστη. Ζητούνται: (α:2) Η λεπτομερής απόδειξη της ισοδυναμίας της με την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\sigma(t) = Y(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{Y}(t-\tau)\varepsilon(\tau) d\tau$$

με το σύμβολο $\dot{Y}(t-\tau)$ να δηλώνει την παράγωγο $\dot{Y}(t)$ τη χρονική στιγμή $t-\tau$. (β:1) Σε ποιο πρόβλημα της Μηχανικής των Υλικών παρουσιάζεται η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση, όταν

$$\sigma(t) = \sigma_0;$$

(γ:4) Για $\sigma(t) = \sigma_0$ πάλι και

$$Y(t) = \frac{q}{p} e^{-t/p}$$

(υλικό Maxwell) με τις ποσότητες σ_0 , q και p σταθερές η επίλυσή της με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (δ:1) Να βρεθεί τέλος η ενδοτικότητα σε ερπυσμό $J(t)$ για το υλικό που εξετάζουμε.

ΑΣΚΗΣΗ Γ38 (Κεφάλαια Γ2, Γ3, Ιξοελαστικότητα): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητείται επίσης η χρησιμοποίηση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων για την επίλυση της πιο πάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης για το ίδιο υλικό Maxwell και πάλι με

$$\sigma(t) = \sigma_0.$$

Συγκεκριμένα: (α:1) Ποιος είναι ο σχετικός επαναληπτικός τύπος; (β:1) Ποιες είναι η μηδενική, η πρώτη και (γ:3) η δεύτερη προσέγγιση; (δ:2) Για υλικό Maxwell η ενδοτικότητα σε ερπυσμό $J(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$J(t) = \frac{p+t}{q}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη και τη σειρά Maclaurin της εκθετικής συναρτήσεως, ζητείται να ελεγχθεί κατά πόσο συμφωνεί η δεύτερη πιο πάνω προσέγγιση με τη συνάρτηση $J(t)$. (ε:1) Αν συνεχίζαμε, θα συνέκλινε η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων στη λύση $\varepsilon(t)$ που ζητάμε ή όχι και γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ Γ39 (Κεφάλαια Γ2, Γ3, Ιξοελαστικότητα): Σε μονοαξονική καταπόνηση γραμμικά ιξοελαστικού υλικού προκύπτει η ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση (με την τελεία να δηλώνει συνεχώς χρονική παράγωγο)

$$\varepsilon(t) = \sigma(0)J(t) + \int_0^t J(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau \quad \text{με } t \geq 0.$$

Η συνάρτηση $\varepsilon(t)$ δηλώνει την εδώ γνωστή παραμόρφωση κι η συνάρτηση $\sigma(t)$ την εδώ άγνωστη τάση. Τέλος η συνάρτηση $J(t)$ δηλώνει την ενδοτικότητα σε ερπυσμό του ιξοελαστικού υλικού. Ζητούνται: (α:2) Η απόδειξη της ισοδυναμίας της με την ολοκληρωτική εξίσωση (με προσοχή στα πρόσημα!)

$$\varepsilon(t) = J(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau \quad \text{με } \dot{J}(t-\tau) := \left. \frac{dJ(t^*)}{dt^*} \right|_{t^*=t-\tau}$$

και (β:1) οι χαρακτηρισμοί της τελευταίας. Με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace και ειδικότερα των συμβόλων

$$E(s) := \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\}, \quad \Sigma(s) := \mathcal{L}\{\sigma(t)\} \quad \text{και} \quad J_L(s) := \mathcal{L}\{J(t)\}$$

ζητούνται: (γ:2) Η απόδειξη ότι

$$\Sigma(s) = sY_L(s)E(s) \quad \text{με} \quad Y_L(s) := \frac{1}{s^2J_L(s)}.$$

(δ:3) Με χρήση και της συναρτήσεως

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_L(s)\}$$

η λύση $\sigma(t)$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

ΑΣΚΗΣΗ Γ40 (Κεφάλαια Γ2, Γ3, Ιξοελαστικότητα): Στην ιξοελαστικότητα με $\varepsilon(t)$ την παραμόρφωση, $\sigma(t)$ την τάση και $J(t)$ την ενδοτικότητα σε ερπυσμό προκύπτει η ολοκληρωτική εξίσωση

$$\varepsilon(t) = J(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{J}(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau \quad \text{με } t \geq 0$$

και με $\dot{J}(t-\tau)$ την παράγωγο $\dot{J}(t)$ τη στιγμή $t-\tau$. Για υλικό Kelvin (ή Voigt) ή στερεό Kelvin (ή Voigt) η ενδοτικότητα σε ερπυσμό $J(t)$ έχει την ακόλουθη μορφή:

$$J(t) = \frac{1}{q_0} (1 - e^{-q_0 t/q_1})$$

με τα q_0 και q_1 δύο γνωστές θετικές σταθερές. Τώρα για

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0$$

(φαινόμενο χαλαρώσεως) ζητούνται: (α:5) Με κατάλληλη μέθοδο η λύση $\sigma(t)$ της πιο πάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης για υλικό Kelvin (ή Voigt). (β:2) Η φυσική ερμηνεία της μαθηματικής ιδιομορφίας στο αποτέλεσμα αυτό. (γ:1) Τέλος το μέτρο χαλαρώσεως $Y(t)$ για το ίδιο υλικό Kelvin (ή Voigt).

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Δ1. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ Δ1 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Στη Ρευστομηχανική θεωρούμε εδώ τη μόνιμη, επίπεδη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού μέσα στη γωνία $0 \leq \theta \leq \pi/3$ (με θ την πολική γωνία). Το σχετικό δυναμικό ταχύτητας (ή συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας) $\Phi(x, y)$ δίνεται από τον τύπο

$$\Phi(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

με (x, y) τις Καρτεσιανές συντεταγμένες. Ζητούνται: (α:1) Ο φυσικός ορισμός του ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική. (β:1) Η επαλήθευση ότι το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ είναι αρμονική συνάρτηση. (γ:1) Οι δύο συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού. (δ:1) Μέσω των συνιστωσών αυτών V_x και V_y η επαλήθευση της ισχύος της εξισώσεως της συνεχείας. (ε:1) Ανάλογα και για την εξίσωση του αστρόβιλου (ελλείψεως στροβιλισμού) της ροής. (στ:2) Ο προσδιορισμός της συναρτήσεως ροής (ή ροϊκής συναρτήσεως) $\Psi(x, y)$. (ζ:1) Ο προσδιορισμός του μιγαδικού δυναμικού ροής $\Omega(z)$.

ΑΣΚΗΣΗ Δ2 (Κεφάλαια Δ3, Δ4, Ρευστομηχανική): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:1) Ο προσδιορισμός της μιγαδικής ταχύτητας στο πεδίο ροής και (β:1) από αυτήν ο προσδιορισμός του σημείου ανακοπής, αν υπάρχει (ή των σημείων ανακοπής, αν υπάρχουν), δηλαδή του σημείου (ή των σημείων) μηδενικής ταχύτητας κατευθείαν με τη χρήση της μιγαδικής μεταβλητής $z = x + iy$. (γ:1) Από τη μιγαδική ταχύτητα ο προσδιορισμός και πάλι των συνιστωσών της ταχύτητας V_x και V_y . (δ:2) Η μαθηματική επαλήθευση στο παρόν πρόβλημα (όχι γενικά) ότι οι ισοδυναμικές γραμμές και οι γραμμές ροής τέμνονται ορθογώνια, δηλαδή αποτελούν ένα σύστημα ορθογωνίων τροχιών. (ε:1) Η πρόχειρη σχεδίαση του πεδίου ροής: οι γραμμές ροής συνεχείς (και με βέλη!), ενώ οι ισοδυναμικές γραμμές διακεκομμένες (και χωρίς βέλη!) ή με διαφορετικά χρώματα μέσα στη γωνία $0 \leq \theta \leq \pi/3$ που εξετάζουμε. (στ:1) Να βρεθεί σε ποια ακριβώς σταθερή τιμή της συναρτήσεως ροής $\Psi(x, y)$ αντιστοιχεί το συνολικό σύνορο (δύο ημιευθείες) στο παρόν πεδίο ροής. (ζ:1) Να εξηγηθεί μαθηματικά γιατί ακριβώς η κυκλοφορία Γ και η παροχή Q του ρευστού σε μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη C μέσα στο πεδίο ροής είναι και οι δύο μηδενικές. Για την παροχή Q να δοθεί και φυσική εξήγηση.

ΑΣΚΗΣΗ Δ3 (Κεφάλαια Δ2, Δ3, Ρευστομηχανική): Στη Ρευστομηχανική θεωρούμε τη μόνιμη (σταθερή), επίπεδη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού, τώρα όμως σε ολόκληρο το επίπεδο.



Η ροή αυτή παρεμποδίζεται από ευθύγραμμο στερεό και σταθερό (δηλαδή ακίνητο) πολύ λεπτό εμπόδιο στο διάστημα $[-1, 1]$ του πραγματικού άξονα Ox σαν ένα είδος «σχισμής» στη ροή, όπως φαίνεται στο πιο πάνω σχήμα. Η ροή που εξετάζουμε έχει κυκλοφορία Γ γύρω από το ευθύγραμμο αυτό εμπόδιο $[-1, 1]$. Το σχετικό μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ δίνεται από τον τύπο

$$\Omega(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \cosh^{-1} z \quad \text{με } z = x + iy \quad \text{και } z \notin [-1, 1].$$

Ζητούνται: (α:1) Η απόδειξη του τύπου που δίνει τη συνάρτηση $\cosh^{-1} z$ με τη βοήθεια της λογαριθμικής συναρτήσεως $\ln z$ (με πρόσημο συν στη ρίζα!). Ποια είναι επομένως η έκφραση του μιγαδικού δυναμικού ροής $\Omega(z)$ με τη βοήθεια της λογαριθμικής συναρτήσεως; (β:1) Υποχρεωτικά με τη λογαριθμική έκφραση του μιγαδικού δυναμικού ροής να υπολογισθεί η μιγαδική ταχύτητα στην παρούσα ροή. (γ:1) Στη συνέχεια να υπολογισθεί η μιγαδική ποσότητα $V_x + iV_y$ με τη χρήση Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) . Γενικά είναι ή όχι αναλυτική συνάρτηση μέσα στο πεδίο ροής; (δ:1) Να υπολογισθούν οι συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας του ρευστού στον πραγματικό άξονα x (προφανώς με $y = 0$), αλλ' έξω από το εμπόδιο, δηλαδή με $|x| > 1$. (ε:1) Το ίδιο ερώτημα, τώρα όμως πάνω στις δύο πλευρές του εμποδίου, δηλαδή με $|x| < 1$ και $y = \pm 0$. (στ:1) Να διερευνηθεί μαθηματικά σε ποια ακριβώς σημεία απειρίζεται η ταχύτητα του ρευστού. (ζ:1) Ποιο (ή ποια) είναι τα σημεία ανακοπής (βέβαια αν υπάρχουν!), δηλαδή τα σημεία μηδενικής ταχύτητας του ρευστού; (η:1) Ποια είναι η συνοριακή συνθήκη πάνω στο ευθύγραμμο εμπόδιο που βρίσκεται στο διάστημα $[-1, 1]$; Επαληθεύεται ή όχι η συνθήκη αυτή; Γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ Δ4 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Σε μόνιμη (σταθερή), διδιάστατη (επίπεδη) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική θεωρούμε γνωστό το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln z + V_0 z \quad \text{με } z = x + iy = re^{i\theta}$$

(σε Καρτεσιανές και σε πολικές συντεταγμένες αντίστοιχα). Οι ποσότητες Γ_0 και V_0 θεωρούνται δύο γνωστές πραγματικές σταθερές. Ζητούνται: (α:1) Από φυσικής απόψεως σε ποιο συγκεκριμένο πρόβλημα της Ρευστομηχανικής αναφέρεται το πιο πάνω μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ και ο κάθε όρος του χωριστά; (β:1) Να υπολογισθούν το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$ και η συνάρτηση ροής $\Psi(r, \theta)$ υποχρεωτικά σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . (γ:2) Να ελεγχθεί η ισχύς των δύο συνθηκών των Cauchy–Riemann σε πολικές συντεταγμένες. (δ:1) Από την πρώτη συνθήκη των Cauchy–Riemann (σε γενική μορφή, όχι στο παρόν πεδίο ροής) να υπολογισθεί η μικτή παράγωγος $\partial^2 \Psi(r, \theta) / (\partial r \partial \theta)$ με τη βοήθεια του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$. (ε:1) Από τη δεύτερη συνθήκη των Cauchy–Riemann να υπολογισθεί ανάλογα και η μικτή παράγωγος $\partial^2 \Psi(r, \theta) / (\partial \theta \partial r)$. (στ:2) Υποχρεωτικά με βάση τα δύο προηγούμενα ερωτήματα να αποδειχθεί ότι το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$ είναι γενικά (όχι μόνο στο παρόν πεδίο ροής) αρμονική συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΗ Δ5 (Κεφάλαια Δ3, Δ4, Δ6, Ρευστομηχανική): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση πάλι σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . Ζητούνται επίσης: (α:1) Για το συγκεκριμένο μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ η αντίστοιχη μιγαδική ταχύτητα. (β:1) Υποχρεωτικά με βάση το προηγούμενο ερώτημα οι συνιστώσες της ταχύτητας $V_x(r, \theta)$ (κατά τον άξονα x) και $V_y(r, \theta)$ (κατά τον άξονα y). (γ:1) Να αναφερθεί το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$ που αντιστοιχεί στο μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$. (δ:1) Η επαλήθευση (σε πολικές συντεταγμένες) ότι το συγκεκριμένο αυτό δυναμικό ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$ είναι αρμονική συνάρτηση. (ε:1) Ο γενικός ορισμός της κυκλοφορίας Γ ιδεατού ρευστού πάνω σε απλή κλειστή καμπύλη C με τη βοήθεια των συνιστωσών της ταχύτητας V_x και V_y και σχετικού πραγματικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) . (στ:1) Απόδειξη του γενικού τύπου για τον υπολογισμό της ίδιας κυκλοφορίας Γ με την άμεση χρήση της μιγαδικής ταχύτητας. Για το συγκεκριμένο μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ της προηγούμενης ασκήσεως ο υπολογισμός της κυκλοφορίας Γ του ρευστού πάνω σε περιφέρεια ακτίνας a με κέντρο το σημείο $z = 0$: (ζ:1) τόσο με άμεση ολοκλήρωση όσο και (η:1) με χρήση του

θεωρήματος του Cauchy και της σχετικής μεθόδου των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Τι σημαντικό (αληθινά σημαντικό!) παρατηρείται;

ΑΣΚΗΣΗ Δ6 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Εξετάζουμε τη μόνιμη (σταθερή), επίπεδη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού παράλληλα στον άξονα x με ταχύτητα V_0 (θετική, προς τα δεξιά). Η ροή αυτή παρεμποδίζεται από κάθετο σ' αυτήν ευθύγραμμο λεπτό και στερεό (αμετακίνητο) εμπόδιο στο διάστημα $[-a, a]$ του φανταστικού άξονα y , δηλαδή από το σημείο $z_1 = -ia$ μέχρι το σημείο $z_2 = ia$ του φανταστικού άξονα y με το a θετική σταθερά. Το σχετικό μιγαδικό δυναμικό ροής έχει τη μορφή

$$\Omega(z) = V_0 \sqrt{z^2 + a^2}.$$

Στην άσκηση αυτή εργαζόμαστε σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) . Ζητούνται: (α:1) Η μιγαδική ταχύτητα του ρευστού. (β:1) Η ίδια ταχύτητα ειδικά πάνω στο φανταστικό άξονα y , δηλαδή με $x = 0^\pm$. (γ:1) Οι δύο συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας του ρευστού πάνω στο φανταστικό άξονα y έξω από το εμπόδιο, δηλαδή με $|y| > a$. (δ:1) Ανάλογο ερώτημα πάνω στο εμπόδιο, δηλαδή με $|y| < a$ στη θετική, στη δεξιά πλευρά του εμποδίου, δηλαδή με $x = 0^+$, (ε:1) και στην αρνητική, στην αριστερή πλευρά του εμποδίου (δηλαδή με $x = 0^-$). (στ:2) Πληρούται η βασική συνοριακή συνθήκη της Ρευστομηχανικής στις δύο πλευρές του σταθερού ευθύγραμμου εμποδίου; (ζ:1) Ποια ακριβώς είναι (αν υπάρχουν) τα σημεία ανακοπής της παρούσας ροής, δηλαδή τα σημεία μηδενισμού της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού;

ΑΣΚΗΣΗ Δ7 (Κεφάλαια Δ3, Δ5, Δ7, Ρευστομηχανική): Ομοιόμορφη (με ταχύτητα V_0), μόνιμη, επίπεδη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού σε κανάλι με $y \geq 0$ παρεμποδίζεται από κύλινδρο ακτίνας a στον πυθμένα του καναλιού με κέντρο το σημείο $z_0 = ia$. Το μιγαδικό δυναμικό ροής είναι

$$\Omega(z) = w = \pi a V_0 \coth \frac{\pi a}{z} \quad \text{με} \quad z = x + iy.$$

Η συνάρτηση $w = u + iv$ δηλώνει τη σχετική σύμμορφη απεικόνιση του πεδίου ροής στο ημιεπίπεδο $v \geq 0$. Ζητούνται: (α:2) Η αντιστροφή της σύμμορφης απεικονίσεως $w = w(z)$, δηλαδή η συνάρτηση $z = z(w)$ στο τέλος υποχρεωτικά με χρήση της λογαριθμικής συναρτήσεως. (Ο σχετικός τύπος δε θεωρείται γνωστός.) (β:1) Η εύρεση της μιγαδικής ταχύτητας της ροής συναρτήσει της μιγαδικής μεταβλητής z . (γ:1) Η εύρεση της σειράς Taylor της μιγαδικής συναρτήσεως $\sinh \zeta$ με όρους μέχρι ζ^5 και από αυτήν (δ:1) της σειράς Laurent της συναρτήσεως $\sinh(\pi a/z)$. (ε:2) Τέλος η απόδειξη του ομοιόμορφου της ροής για $z \rightarrow \infty$ και (στ:1) για κάθε z , εάν $a \rightarrow 0$.

ΑΣΚΗΣΗ Δ8 (Κεφάλαια Δ3, Δ7, Ρευστομηχανική): Θεωρούμε το ογδομόριο $0 \leq \theta \leq \pi/4$ (περιοχή D) και σ' αυτό τη μόνιμη, επίπεδη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού. Ζητούνται: (α:2) Η σύμμορφη απεικόνιση $w = w(z)$ της πιο πάνω περιοχής (με $z = x + iy$ και $w = u + iv$) στο ημιεπίπεδο $v \geq 0$. (β:1) Πού ακριβώς απεικονίζονται οι δύο συνοριακές ημιευθείες $\theta = 0$ και (γ:1) $\theta = \pi/4$; (δ:1) Σε ποιο σημείο δεν είναι σύμμορφη η απεικόνιση αυτή; Γιατί ακριβώς; (ε:1) Η μιγαδική ταχύτητα ροής στην αρχική περιοχή ροής D . Οι δύο συνιστώσες (στ:1) V_x και (ζ:1) V_y της ταχύτητας του ιδεατού ρευστού.

ΑΣΚΗΣΗ Δ9 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:1) Ο υπολογισμός (με διανυσματική ορίζουσα) του στροβιλισμού (της περιστροφής) $\text{curl } \mathbf{F}$ με

$$\mathbf{F} = (F_x(x, y), F_y(x, y), 0) = F_x(x, y)\mathbf{i} + F_y(x, y)\mathbf{j}.$$

(β:1) Ο έλεγχος της ισχύος του αστρόβιλου της ροής και (γ:1) της εξισώσεως της συνεχείας. (δ:1) Ποια είναι (χωρίς υπολογισμούς) η συζυγής αρμονική συνάρτηση $U = U(x, y)$ της ταχύτητας $V_x = V_x(x, y)$; (Προσοχή στο πρόσημο!) (ε:1) Έλεγχος του αποτελέσματος μέσω των συνθηκών των Cauchy-Riemann. (στ:3) Εύρεση της ταχύτητας V_y , εάν είναι γνωστή μόνο η ταχύτητα V_x , υποχρεωτικά με τη χρήση των εξισώσεων της συνεχείας και του αστρόβιλου της ροής.

ΑΣΚΗΣΗ Δ10 (Κεφάλαιο Δ2, Ρευστομηχανική): Σε μόνιμη επίπεδη αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού το μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ υποτίθεται ότι έχει τη μορφή

$$\Omega(z) = A \cos z$$

με το A γνωστή πραγματική (όχι μιγαδική!) σταθερά. Ζητούνται: (α:2) Η εξαρχής εύρεση των τύπων υπολογισμού των δύο συναρτήσεων $\cos(x + iy)$ και $\sin(x + iy)$ (πραγματικό μέρος συν i επί φανταστικό μέρος της κάθε συναρτήσεως). (β:2) Το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και η συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$ στην πιο πάνω ροή. (γ:2) Για τις δύο αυτές συναρτήσεις ο έλεγχος της ισχύος των συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy–Riemann. (δ:2) Ο έλεγχος της αρμονικότητάς τους.

ΑΣΚΗΣΗ Δ11 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:2) Με γνωστή (για μια στιγμή μόνο!) μόνο τη συνάρτηση $\Phi(x, y)$ να υπολογισθεί η συζυγής της αρμονική συνάρτηση $\Psi^*(x, y)$. (β:2) Οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας V_x και V_y του ρευστού κατευθείαν από το μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$. (γ:2) Εναλλακτικά και από τις συναρτήσεις $\Phi(x, y)$ και $\Psi(x, y)$. (δ:2) Γιατί οι δύο συναρτήσεις V_x και V_y είναι αρμονικές; (χωρίς να γίνουν όλες οι πράξεις ρουτίνας για την επαλήθευση της αρμονικότητάς τους).

ΑΣΚΗΣΗ Δ12 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Συνεχίζουμε τις δύο προηγούμενες ασκήσεις. Ζητούνται επίσης: (α:2) Η επαλήθευση της εξισώσεως της συνεχείας καθώς και (β:2) του αστρόβιλου στην παρούσα ροή. (γ:2) Με γνωστό το μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ πάνω σε μια τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη C ο τύπος υπολογισμού του στη φραγμένη περιοχή D με σύνορο την καμπύλη C . (δ:2) Ανάλογα με γνωστές τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας V_x και V_y πάνω στην ίδια καμπύλη C για τις ίδιες συνιστώσες V_x και V_y στην περιοχή D .

ΑΣΚΗΣΗ Δ13 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Ζητούνται: (α:1) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$\Phi(x, y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$$

είναι αρμονική. (β:3) Να προσδιορισθεί η συζυγής της αρμονική συνάρτηση $\Psi(x, y)$. (γ:1) Σε επίπεδη, μόνιμη, αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού στο ογδομήριο $0 \leq \theta \leq \pi/4$ το μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ δίνεται από τον τύπο

$$\Omega(z) = z^4 \quad \text{με} \quad z = x + iy.$$

Ποιες είναι οι εκφράσεις του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και της συναρτήσεως ροής (ή ροϊκής συναρτήσεως) $\Psi(x, y)$ στη ροή αυτή; Υπόδειξη: Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο προφανής τύπος

$$(x + iy)^4 = (x + iy)^2(x + iy)^2.$$

(δ:1) Με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας να προσδιορισθούν οι δύο συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας του ρευστού. (ε:1) Ανάλογα με τη χρήση της συναρτήσεως ροής (ή ροϊκής συναρτήσεως). (στ:1) Τέλος κατευθείαν με τη χρήση του μιγαδικού δυναμικού ροής.

ΑΣΚΗΣΗ Δ14 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση ροής ρευστού. Ζητούνται επίσης: (α:1) Οι επαληθεύσεις της εξισώσεως της συνεχείας και της εξισώσεως του αστρόβιλου της ροής. (β:1) Το δυναμικό ταχύτητας, αλλά τώρα σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) με το τροποποιημένο σύμβολο $\Phi^*(r, \theta)$. (γ:1) Εντελώς ανάλογα για τη συνάρτηση ροής $\Psi^*(r, \theta)$. (δ:1) Η επαλήθευση των σχετικών συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy–Riemann σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . (ε:1) Στη συνέχεια ο υπολογισμός των συνιστωσών της ταχύτητας V_r και V_θ του ρευστού (κατά την πολική ακτίνα r και την κάθετη σ' αυτή διεύθυνση θ αντίστοιχα) σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) από τη συνάρτηση ροής $\Psi^*(r, \theta)$ με τη χρήση των τύπων

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} \quad \text{και} \quad V_\theta = - \frac{\partial \Psi^*}{\partial r}.$$

(στ:1) Η γραφή των αντίστοιχων τύπων με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας $\Phi^*(r, \theta)$ με εξήγηση όμως και του πώς προέκυψαν. (ζ:1) Η επαλήθευση των συνοριακών συνθηκών στο σύνορο (στις δύο ημιευθείες) $\theta = 0$ και $\theta = \pi/4$ του πεδίου ροής στο ογδομήριο $0 \leq \theta \leq \pi/4$ που εξετάζουμε. (η:1) Η απόλυτος τιμή $V(\theta)$ της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού στο ίδιο σύνορο: στις δύο ημιευθείες $\theta = 0$ και $\theta = \pi/4$ (δύο υπολογισμοί: ένας για $\theta = 0$ και ένας για $\theta = \pi/4$).

ΑΣΚΗΣΗ Δ15 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Θεωρούμε τη διδιάστατη (επίπεδη), μόνιμη (σταθερή) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού σε άπειρο μέσον κατά μήκος του άξονα x με γνωστή πραγματική ταχύτητα V_0 που παρεμποδίζεται από στερεό ακίνητο κύλινδρο ακτίνας a με κέντρο την αρχή των αξόνων O . Το σχετικό μιγαδικό δυναμικό ροής είναι το ακόλουθο:

$$\Omega(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right).$$

Ζητούνται: (α:1) Οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού $V_x(r, \theta)$ και $V_y(r, \theta)$ (κατά τους άξονες x και y αντίστοιχα) σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . (β:1) Οι τιμές τους όταν $x \rightarrow \pm\infty$. Τι ροή θα είχαμε, αν δεν υπήρχε ο κύλινδρος; (γ:1) Η συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση) $\Psi^*(r, \theta)$ και αυτή σε πολικές συντεταγμένες και στη συνέχεια από αυτή (δ:1) ο προσδιορισμός των δύο συνιστωσών V_r και V_θ της ταχύτητας του ρευστού (κατά την πολική ακτίνα r και την κάθετη s' αυτή διεύθυνση θ αντίστοιχα) σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) με τη χρήση των τύπων

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi^*}{\partial \theta} \quad \text{και} \quad V_\theta = - \frac{\partial \Psi^*}{\partial r}.$$

(ε:1) Η επαλήθευση της συνοριακής συνθήκης που πρέπει να ισχύει στο σύνορο $r = a$ του κυλίνδρου. (στ:1) Τα σημεία ανακοπής της ροής, δηλαδή τα σημεία όπου η ταχύτητα \mathbf{V} του ρευστού μηδενίζεται. (ζ:1) Τα σημεία στο σύνορο $r = a$ του κυλίνδρου όπου η ταχύτητα του ρευστού παίρνει τη μέγιστη απόλυτη τιμή της. (η:1) Ποια είναι η τιμή αυτή; Από φυσικής απόψεως είναι λογική η ίδια τιμή;

ΑΣΚΗΣΗ Δ16 (Κεφάλαια Δ2, Δ3, Ρευστομηχανική): Σε διδιάστατη, μόνιμη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού το μιγαδικό δυναμικό ροής είναι

$$\Omega = \cosh^{-1} z$$

(με $\Omega = \Omega(z)$). Ζητείται: (α:8) Η έκφραση αυτού του μιγαδικού δυναμικού Ω υποχρεωτικά με τη χρήση της λογαριθμικής συναρτήσεως \ln : φυσικός λογάριθμος και του ίδιου ακριβώς συμβόλου Ω . (Ο σχετικός τύπος δε θεωρείται γνωστός. Δηλαδή ζητείται να αποδειχθεί.)

ΑΣΚΗΣΗ Δ17 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Σε διδιάστατη (επίπεδη), μόνιμη (σταθερή) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού το μιγαδικό δυναμικό ροής είναι

$$\Omega(z) = iz^3.$$

Ζητούνται: (α:1) Το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και (β:1) Η συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$. (γ:1) Οι επαλήθευσεις των συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy–Riemann. (δ:1) Η απόδειξη ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι αρμονικές. (ε:1) Οι συνιστώσες της ταχύτητας V_x και V_y του ρευστού. (στ:1) Η παράγωγος $\Omega'(z)$. (ζ:1) Η μιγαδική ταχύτητα $V(z)$ και από αυτήν (η:1) οι ίδιες συνιστώσες V_x και V_y .

ΑΣΚΗΣΗ Δ18 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Για τη συνάρτηση

$$\Phi(x, y) = -3x^2y + y^3$$

Ζητούνται: (α:1) Η απόδειξη πως είναι αρμονική συνάρτηση. (β:6) Η εύρεση της συζυγούς της αρμονικής συναρτήσεως $\Psi(x, y)$ χωρίς τη χρήση μιγαδικής συναρτήσεως. (γ:1) Ποια είναι η συζυγής αρμονική συνάρτηση της $\Psi(x, y)$;

ΑΣΚΗΣΗ Δ19 (Κεφάλαια Δ3, Δ5, Δ6, Ρευστομηχανική): Σε διδιάστατη, μόνιμη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού θεωρούμε το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = -iV_0\sqrt{z^2 - a^2} \quad \text{με} \quad z = x + iy.$$

Αυτό αφορά σε μόνιμη, αστρόβιλη ροή κατά τη διεύθυνση του άξονα Oy (προς τη θετική κατεύθυνση) με ταχύτητα V_0 στο άπειρο που παρεμποδίζεται από ευθύγραμμο στερεό σταθερό εμπόδιο $[-a, a]$ πάνω στον πραγματικό άξονα Ox . Ζητούνται: (α:1) Η παράγωγος $\Omega'(z)$. (β:1) Οι συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας του ρευστού μόνο κατά μήκος του άξονα Ox και μάλιστα για $x > a$. (γ:1) Ανάλογο ερώτημα για $x < -a$. (δ:1) Ανάλογο ερώτημα για $-a < x < a$. (ε:1) Ποια είναι η συνοριακή συνθήκη πάνω στο εμπόδιο $[-a, a]$ (και στις δύο πλευρές του); Πληρούται αυτή ή όχι; (στ:1) Να υπολογισθεί η ταχύτητα \mathbf{V} του ρευστού για $y \rightarrow \mp\infty$. (ζ:1) Ποια είναι τα σημεία ανακοπής της ροής, δηλαδή τα σημεία με μηδενική ταχύτητα του ρευστού; Σε ποια σημεία απειρίζεται η ταχύτητα του ρευστού; (η:1) Σε ποια σημεία παρουσιάζει πόλους η συνάρτηση $\Omega'(z)$; Τι τάξεως είναι οι πόλοι αυτοί; Ποια είναι τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα;

ΑΣΚΗΣΗ Δ20 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Θεωρούμε την επίπεδη, μόνιμη, αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού γύρω από κύλινδρο με κέντρο το σημείο $O = (0, 0)$ ακτίνας a με σχετικό μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = ik \ln \frac{z}{a}$$

με το k μια πραγματική σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Το δυναμικό ταχύτητας (τελικά χωρίς καθόλου τετραγωνική ρίζα!) και η συνάρτηση ροής σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) . (β:1) Ο έλεγχος της πληρώσεως των συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy-Riemann. (γ:1) Οι συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού. (δ:1) Ο έλεγχος ισχύος της εξισώσεως της συνεχείας και επίσης (ε:1) του αστρόβιλου της ροής. (στ:1) Το δυναμικό ταχύτητας και η συνάρτηση ροής, τώρα όμως σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . (ζ:2) Ο έλεγχος πληρώσεως των συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy-Riemann, τώρα όμως σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) .

ΑΣΚΗΣΗ Δ21 (Κεφάλαια Δ2, Δ4, Ρευστομηχανική): Για τη λογαριθμική συνάρτηση $\ln z$ (ισοδύναμα $\log z$) ζητούνται: (α:2) Να αποδειχθεί λεπτομερώς ότι

$$\ln \frac{z_1}{z_2} = \ln z_1 - \ln z_2 \quad \text{με} \quad z_{1,2} \neq 0.$$

(β:2) Να βρεθεί τύπος που να δίνει τη συνάρτηση $\sinh^{-1} z$ με τη βοήθεια της συναρτήσεως $\ln z$. (γ:1) Για την κυκλοφορία Γ ρευστού να αποδειχθεί ότι

$$\Gamma = \operatorname{Re} \oint_C \Omega'(z) dz$$

με $\Omega(z)$ το μιγαδικό δυναμικό ροής. (δ:2) Με τον τύπο αυτό να βρεθεί με άμεση επικαμπύλια ολοκλήρωση η κυκλοφορία κατά μήκος της περιφέρειας C_R ακτίνας R (με $R > a$) στο πρόβλημα της προηγούμενης ασκήσεως. (ε:1) Το ίδιο με τη χρήση ολοκληρωτικού υπολοίπου.

ΑΣΚΗΣΗ Δ22 (Κεφάλαια Δ2, Δ3, Ρευστομηχανική): Σε διδιάστατη (επίπεδη), μόνιμη (σταθερή) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού το μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ δίνεται από τον τύπο

$$\Omega(z) = \sinh z \quad \text{με} \quad z = x + iy.$$

Ζητούνται: (α:1) Με τη χρήση των ορισμών του υπερβολικού ημιτόνου και της εκθετικής συναρτήσεως η απόδειξη του τύπου

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y.$$

(β:1) Η ανάλογη απόδειξη του τύπου

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y.$$

(γ:1) Το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και επίσης η συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση) $\Psi(x, y)$. (δ:1) Η επαλήθευση των συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy–Riemann. (ε:1) Ο προσδιορισμός των συνιστωσών $V_x(x, y)$ και $V_y(x, y)$ της ταχύτητας του ρευστού από το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και από τη συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$. (στ:1) Οι ίδιες συνιστώσες κατευθείαν από το μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$. (ζ:1) Η απόδειξη της αρμονικότητας και των δύο συναρτήσεων $\Phi(x, y)$ και $\Psi(x, y)$. (η:1) Η εξήγηση χωρίς πράξεις, δηλαδή χωρίς άμεση επαλήθευση, κάπως πιο θεωρητικά, εάν οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού $V_x(x, y)$ και $V_y(x, y)$ είναι κι αυτές αρμονικές συναρτήσεις ή όχι.

ΑΣΚΗΣΗ Δ23 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Συνεχίζουμε εδώ την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:1) Οι επαληθεύσεις της εξισώσεως της συνεχείας καθώς και της εξισώσεως του αστρόβιλου της ροής. (β:1) Οι εξισώσεις των ισοδυναμικών γραμμών καθώς και των γραμμών ροής. (γ:2) Για τη συνάρτηση

$$\Phi(x, y) = \sinh x \cos y$$

η κατευθείαν (δηλαδή χωρίς τη χρήση προηγούμενων αποτελεσμάτων) εύρεση της συζυγούς της αρμονικής συναρτήσεως $\Psi(x, y)$. (δ:2) Για τη συνάρτηση $\Psi(x, y)$ που προέκυψε (μαζί με τη σταθερά, εάν υπάρχει σταθερά) η ανάλογη κατευθείαν (με πράξεις και χωρίς τη χρήση προηγούμενων αποτελεσμάτων) εύρεση της συζυγούς της αρμονικής συναρτήσεως $\Phi^*(x, y)$. Τι παρατηρείται; (ε:2) Γενικά μιλώντας, να αποδειχθεί ότι αν η αρμονική συνάρτηση $v(x, y)$ είναι συζυγής αρμονική συνάρτηση της επίσης αρμονικής συναρτήσεως $u(x, y)$, τότε η αρμονική συνάρτηση $-u(x, y)$ είναι συζυγής αρμονική συνάρτηση της αρμονικής συναρτήσεως $v(x, y)$. Παρουσιάζεται λοιπόν αυτό το μείον: $-u(x, y)$. Τι να κάνουμε;

ΑΣΚΗΣΗ Δ24 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Θεωρούμε τη ροή με μιγαδικό δυναμικό

$$\Omega(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z,$$

η οποία οφείλεται σε πηγή παροχής Q (ή καταβόθρα απαγωγής $-Q$, αν $Q < 0$) στο σημείο $z = 0$. Ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της ροής αυτής. Σε πολικές συντεταγμένες (β:1) το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$ και (γ:1) η συνάρτηση ροής $\Psi(r, \theta)$. (δ:1) Η μετατροπή τους σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. Ξανά σε πολικές συντεταγμένες (ε:2) η επαλήθευση των συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy–Riemann και (στ:2) οι συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού $V_{r,\theta}(r, \theta)$. Τέλος σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (ζ:1) η μιγαδική ταχύτητα του ρευστού από το δυναμικό $\Omega(z)$ και (η:1) οι συνιστώσες της $V_{x,y}(x, y)$.

ΑΣΚΗΣΗ Δ25 (Κεφάλαια Δ2, Δ3, Δ4, Ρευστομηχανική): Σε πεδίο ροής σε άπειρο μέσον δίνεται το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = \coth^{-1} z.$$

Ζητούνται: (α:2) Με εκτέλεση πρώτα των υπολογισμών για τη συνάρτηση $\coth^{-1} z$ στο δεξιό μέλος η έκφρασή του με τη χρήση της λογαριθμικής συναρτήσεως \ln . (β:2) Με το μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega_Q(z)$ για πηγή στο σημείο z_0 (θετικής ή αρνητικής) παροχής Q γνωστό συγκεκριμένα

$$\Omega_Q(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

η διερεύνηση εάν ή όχι το πιο πάνω πεδίο ροής (σε άπειρο μέσον) με $\Omega(z) = \coth^{-1} z$ αποτελεί υπέρθεση (επαλληλία) δύο πολύ απλών πεδίων ροής και ποιων ακριβώς. (γ:1) Ο υπολογισμός της μιγαδικής ταχύτητας στο ίδιο πιο πάνω πεδίο ροής με $\Omega(z) = \coth^{-1} z$. (δ:1) Γενικά τώρα (όχι ειδικά για το πιο πάνω πεδίο ροής) με γνωστές τις συνιστώσες της ταχύτητας V_x και V_y του ρευστού σε τμηματικά λεία απλή κλειστή καμπύλη C ο υπολογισμός του μιγαδικού ολοκληρώματος

$$I_\Omega = \oint_C \Omega'(z) dz$$

με τη χρήση δύο πραγματικών ολοκληρωμάτων. (ε:1) Με γνωστό τον ορισμό της κυκλοφορίας Γ στην καμπύλη C με πραγματικό ολοκλήρωμα ο τύπος για τον υπολογισμό της με τη χρήση του ολοκληρώματος I_{Ω} . (στ:2) Χωρίς μαθηματική αυστηρότητα η εύρεση του αντίστοιχου τύπου για την παροχή Q πάλι με πραγματικό ολοκλήρωμα και στη συνέχεια (ζ:1) με τη χρήση του ίδιου ολοκληρώματος I_{Ω} .

ΑΣΚΗΣΗ Δ26 (Κεφάλαια Δ2, Δ3, Ρευστομηχανική): Δίνεται το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = \sin z.$$

Ζητούνται: (α:1) Οι λεπτομερείς βασικοί-γενικοί χαρακτηρισμοί της ροής στην οποία αναφέρεται. (β:1) Η σχετική μιγαδική ταχύτητα. (γ:1) Με βάση τον ορισμό της μιγαδικής συναρτήσεως $\cos z$, χωρίς τη χρήση του τύπου για το $\cos(\alpha + \beta)$, ο υπολογισμός του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της. (δ:1) Οι συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας του ρευστού. Επαληθεύσεις των εξισώσεων (ε:1) της συνεχείας και (στ:1) του αστρόβιλου της ροής. (ζ:1) Για την παράγωγο $\Omega'(z)$ ο έλεγχος ισχύος των σχετικών συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy-Riemann. (η:1) Με την ταχύτητα V_x γνωστή η εύρεση της V_y με βάση τις συνθήκες (ή εξισώσεις) των Cauchy-Riemann. (θ:1) Χωρίς άλλους υπολογισμούς ποια είναι η συζυγής αρμονική συνάρτηση της V_x ; (ι:1) Της V_y ; (Προσοχή στα πρόσημα!)

ΑΣΚΗΣΗ Δ27 (Κεφάλαια Δ3, Δ4, Δ6, Ρευστομηχανική): Σε πεδίο ροής διπόλου με το δίπολο στο σημείο $z = z_0$ παρουσιάζεται το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = \frac{A}{z - z_0}$$

με το A γνωστή γενικά μιγαδική σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Πού είναι αναλυτική η μιγαδική αυτή συνάρτηση $\Omega(z)$, πού όχι και γιατί; (β:1) Παρουσιάζει ή όχι πόλους, εάν ναι, πού και τι τάξεως; (γ:1) Ποιο είναι το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο; (δ:1) Να υπολογισθεί η μιγαδική ταχύτητα στη ροή αυτή του διπόλου. (ε:3) Με τη χρήση τελικά πραγματικής ολοκλήρωσεως (χωρίς τη χρήση γνωστών αποτελεσμάτων, η ολοκλήρωση από την αρχή και όχι γενικά!) να υπολογισθεί (χωρίς πολλές μαθηματικές αυστηρότητες στον υπολογισμό) το μιγαδικό ολοκλήρωμα για την παράγωγο $\Omega'(z)$

$$I = \oint_C \Omega'(z) dz$$

με C την περιφέρεια με κέντρο το σημείο z_0 και ακτίνα R . (στ:1) Το ίδιο ολοκλήρωμα να βρεθεί κατευθείαν με χρήση της μεθόδου των ολοκληρωτικών υπολοίπων. (ζ:1) Μπορεί να εφαρμοσθεί το θεώρημα των Cauchy-Goursat για το ίδιο ολοκλήρωμα και γιατί; (η:1) Πόση είναι η κυκλοφορία Γ και πόση η παροχή Q του ρευστού δια μέσου της περιφέρειας C προς τα έξω;

ΑΣΚΗΣΗ Δ28 (Κεφάλαιο Δ4, Ρευστομηχανική): Θεωρούμε ροή σε πεπερασμένη ανοικτή περιοχή D που έχει σύνορο απλή κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη C . Στη ροή αυτή δεν υπάρχουν πηγές, δίνες, δίπολα και κανενός είδους εμπόδιο πέρα από το σύνορο C . Ζητούνται: (α:2) Με πειραματικά γνωστές τις συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού V_x και V_y στην καμπύλη C , πώς ακριβώς μπορούν αυτές να υπολογισθούν στην περιοχή D ; (β:2) Με γνωστές τις τιμές $\Omega(\zeta)$ του μιγαδικού δυναμικού ροής $\Omega(z)$ στην καμπύλη C , πώς ακριβώς μπορούν να υπολογισθούν οι ίδιες συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας του ρευστού χωρίς παραγωγή πάνω στην καμπύλη C ; Από μαθηματικής απόψεως ποιες είναι οι τιμές (γ:1) της κυκλοφορίας, (δ:1) της παροχής, (ε:1) της δύναμης και (στ:1) της ροπής στην καμπύλη C από την πιο πάνω ροή βέβαια συνεχώς με γνωστούς τύπους και με μαθηματικές επεξηγήσεις. Με πειραματικά γνωστές τις συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού V_x και V_y στην καμπύλη C , ακριβώς όπως και στο ερώτημα (α), τι συμπεράσματα προκύπτουν με βάση τις αρχές μεγίστου και ελαχίστου στην παρούσα ροή (ζ:1) γι' αυτές τις ίδιες και (η:1) για το μέγιστο του μέτρου V της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού; (με επεξηγήσεις βέβαια!)

ΑΣΚΗΣΗ Δ29 (Κεφάλαια Δ2, Δ3, Ρευστομηχανική): (α:2) Με βάση τον ορισμό της μιγαδικής συναρτήσεως $\cos z$ (με $z = x + iy$) να υπολογισθούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της. Σε διδιάστατη, μόνιμη και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού η συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$ δίνεται από τον τύπο

$$\Psi(x, y) = -\sin x \sinh y.$$

Ζητούνται: (β:2) Με βάση τις συνθήκες (ή εξισώσεις) των Cauchy–Riemann να υπολογισθεί το αντίστοιχο δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$. (γ:2) Οι δύο συνιστώσες $V_{x,y}$ της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού. Να επαληθευθεί η ισχύς των εξισώσεων (δ:1) της συνεχείας και (ε:1) του αστρόβιλου της ροής.

ΑΣΚΗΣΗ Δ30 (Κεφάλαιο Δ3, Ρευστομηχανική): Ομοιόμορφη ροή ιδεατού ρευστού παρεμποδίζεται από σταθερό στερεό κυκλικό κύλινδρο με κέντρο το σημείο $z_0 = 0$ και ακτίνα a . Θεωρώντας πως υπάρχει και κυκλοφορία Γ γύρω από τον κύλινδρο προκύπτει το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = V_0 \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + i\kappa \ln \frac{z}{a}$$

με V_0 μια κατάλληλη ταχύτητα και κ μια γνωστή σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Η παράγωγος $\Omega'(z)$. (β:1) Η μιγαδική ταχύτητα $V_x - iV_y$ και οι συνιστώσες της $V_x(x, y)$ και $V_y(x, y)$. (γ:1) Η ταχύτητα για $z \rightarrow \infty$. Οι αποδείξεις με τη χρήση της $\Omega'(z)$ (χωρίς όμως την εκτέλεση των πράξεων!) ότι πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις (δ:1) της συνεχείας και (ε:1) του αστρόβιλου της ροής. Τα σημεία ανακοπής (μηδενικής ταχύτητας: $V_x = V_y = 0$), όταν (στ:1) $\kappa < 2aV_0$ και (ζ:1) $\kappa = 2aV_0$ και τέλος (η:1) η απόδειξη (μόνο στις πιο πάνω περιπτώσεις!) ότι τα σημεία ανακοπής κείνται πάνω στην περιφέρεια της διατομής του κυλίνδρου.

ΑΣΚΗΣΗ Δ31 (Κεφάλαιο Δ4, Ρευστομηχανική): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση με γνωστά τα αποτελέσματά της. Πρώτα-πρώτα ζητούνται μερικά βοηθητικά αποτελέσματα. (α:6) Συγκεκριμένα σε περιφέρεια C_R με κέντρο $z = 0$ κι ακτίνα R ζητείται να υπολογισθούν με λεπτομερείς πράξεις και ένα-ένα τα ακόλουθα τρία μιγαδικά ολοκληρώματα:

$$\oint_{C_R} dz, \quad \oint_{C_R} \frac{1}{z} dz \quad \text{και} \quad \oint_{C_R} \frac{1}{z^2} dz.$$

(β:2) Στη συνέχεια απλά να αναφερθεί (χωρίς καθόλου πράξεις, απέξω!) πόσο κάνει το μιγαδικό ολοκλήρωμα

$$\oint_{C_R} \frac{1}{z^k} dz \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Θεωρούμε τώρα γνωστούς τους τύπους στη ροή ιδεατού ρευστού

$$\Gamma = \oint_C (V_x dx + V_y dy) \quad \text{και} \quad \bar{F} = X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_C \Omega'(z) dz : \quad \text{πρώτο θεώρημα του Blasius (1910)}$$

(με ρ την πυκνότητα του ρευστού) για την κυκλοφορία Γ και τη δύναμη F πάνω σε εμπόδιο με σύνορο C . Εδώ ζητούνται: (γ:1) Η εύρεση τύπου για την κυκλοφορία Γ με βάση την παράγωγο $\Omega'(z)$. (δ:2) Ο υπολογισμός της κυκλοφορίας Γ γύρω από τον κύλινδρο. (ε:4) Η απόδειξη ότι η δύναμη $F = X + iY$ που ασκείται από το ιδεατό ρευστό πάνω στον κύλινδρο με τη ροή του έχει

$$X = 0 \quad \text{και} \quad Y = 2\pi\kappa V_0.$$

(στ:1) Σχόλιο για την κυριότερη (και ουσιαστική!) διαφορά σε περίπτωση πραγματικού ρευστού.

ΑΣΚΗΣΗ Δ32 (Κεφάλαια Δ2, Δ3, Δ4, Ρευστομηχανική): (α:2) Για τη μιγαδική συνάρτηση $\coth^{-1} z$ ζητείται η έκφρασή της με τη βοήθεια της μιγαδικής λογαριθμικής συναρτήσεως $\ln z$. Σε διδιάστατη μόνιμη αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού δίνεται το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = A \coth^{-1} \frac{z}{a}$$

με τα A και a θετικές σταθερές. Ζητούνται: (β:3) Με χρήση και του προηγούμενου ερωτήματος η μιγαδική ταχύτητα του ρευστού $V_x - iV_y$. Με χρήση κατάλληλου θεωρήματος το ολοκλήρωμα

$\oint_C \Omega'(z) dz$ πάνω σε απλή κλειστή καμπύλη C (κατά τη θετική φορά) που περιβάλλει (γ:1) το σημείο $z = a$, αλλ' όχι και το σημείο $z = -a$, (δ:1) το σημείο $z = -a$, αλλ' όχι και το σημείο $z = a$, και (ε:1) μαζί και τα δύο σημεία $z = \pm a$.

ΑΣΚΗΣΗ Δ33 (Κεφάλαια Δ3, Δ4, Ρευστομηχανική): Σε διδιάστατη (επίπεδη), μόνιμη (σταθερή) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού που οφείλεται σε δίνη στην αρχή των αξόνων $z = 0$ δίνεται το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = -ik \ln z$$

με το k πραγματική σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Οι συνιστώσες $V_{x,y}$ της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού. (β:2) Χωρίς άμεσους υπολογισμούς η θεωρητική εξήγηση από μαθηματικής σκοπιάς για ποιο λόγο πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις της συνεχείας και του αστρόβιλου της ροής. Θεωρούμε τώρα περιφέρεια C με κέντρο το σημείο $z = 0$ κι ακτίνα R . (γ:1) Ποιες είναι οι εκφράσεις του z και του διαφορικού dz επάνω στην περιφέρεια αυτή C με χρήση της ακτίνας R και της πολικής γωνίας θ ; Με χρήση του προηγούμενου ερωτήματος ο υπολογισμός (δ:2) της κυκλοφορίας του ρευστού

$$\Gamma = \operatorname{Re} \oint_C \Omega'(z) dz$$

πάνω στην περιφέρεια C και (ε:2) της παροχής

$$Q = \operatorname{Im} \oint_C \Omega'(z) dz$$

του ρευστού διά μέσου της περιφέρειας C και προς τα έξω.

ΑΣΚΗΣΗ Δ34 (Κεφάλαια Δ3, Δ4, Ρευστομηχανική): Εδώ θεωρούμε το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = \frac{A}{z}$$

με το A γνωστή πραγματική σταθερά. Ζητούνται: (α:1) Η μιγαδική ταχύτητα του ρευστού σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) και οι συνιστώσες της (β:1) $V_x(r, \theta)$ και (γ:1) $V_y(r, \theta)$. Παραπέρα (δ:1) το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$ και (ε:1) η ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής) $\Psi(r, \theta)$ με (στ:1) επαλήθευση των σχετικών συνθηκών των Cauchy–Riemann. (ζ:3) Με επικαμπύλια ολοκλήρωση (όχι με χρήση θεωρήματος!) ο υπολογισμός της κυκλοφορίας Γ και της παροχής Q του ρευστού σε περιφέρεια C ακτίνας R με κέντρο το σημείο $z = 0$ και (η:1) η φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

ΑΣΚΗΣΗ Δ35 (Κεφάλαια Δ3, Δ4, Δ6, Ρευστομηχανική): Μελετάμε το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = m \ln(z^2 - a^2) \quad \text{με} \quad z = x + iy$$

και με τα a και m γνωστές θετικές πραγματικές σταθερές. Αυτό αφορά στο ημιεπίπεδο $x \geq 0$ με πηγή στο σημείο $z = a$. Ζητούνται: (α:1) Η μιγαδική ταχύτητα του ρευστού. (β:1) Οι δύο διαφορικές εξισώσεις που συνδέουν τις συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας \mathbf{V} μαθηματικά και (γ:1) τι παριστάνουν φυσικά; (δ:2) Η απόδειξη πληρώσεως της συνοριακής συνθήκης για $x = 0$. (ε:1) Η ταχύτητα $V_y(0, y)$. (στ:1) Το σημείο ανακοπής της ροής. (ζ:1) Ο πόλος και το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συναρτήσεως $\Omega'(z)$ μέσα στο πεδίο ροής: για $x > 0$. Με χρήση θεωρήματος ο υπολογισμός (η:1) της κυκλοφορίας Γ και (θ:1) της παροχής Q του ρευστού γύρω από την πηγή.

Δ2. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ Δ36 (Κεφάλαια Δ2, Δ3, Μηχανική των Υλικών: Ελαστικότητα): Στην Επίπεδη Ελαστικότητα οι τρεις τάσεις (καλύτερα συνιστώσες του τανυστή των τάσεων) σ_x , σ_y και τ_{xy} μπορούν να προκύψουν με τη βοήθεια των δύο μιγαδικών δυναμικών $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$ των Kolosov–Muskhelishvili (1909) από τους δύο τύπους

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z),$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)].$$

Σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο ελαστικό πρόβλημα τα δύο μιγαδικά δυναμικά $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$ δίνονται από τους απλούς τύπους

$$\Phi(z) = \sin z \quad \text{και} \quad \Psi(z) = 0.$$

Ζητούνται: (α:1) Η θεωρητική εξήγηση γιατί με τους τύπους αυτούς το άθροισμα των ορθών τάσεων $s = \sigma_x + \sigma_y$ προκύπτει πάντοτε ότι είναι αρμονική συνάρτηση. (β:2) Να αποδειχθούν οι δύο τύποι

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

(γ:1) Να επαληθευθεί ότι πραγματικά το άθροισμα $s = \sigma_x + \sigma_y$ είναι κι εδώ αρμονική συνάρτηση. (δ:2) Απευθείας, χωρίς τη χρήση των πιο πάνω τύπων, να υπολογισθεί η συζυγής αρμονική συνάρτηση t της συναρτήσεως s . Να δοθούν οι εξισώσεις (ε:1) των ισοσταθμικών καμπύλων, εδώ καμπύλων σταθερού αθροίσματος $s = \sigma_x + \sigma_y$, και (στ:1) των ορθογωνίων τροχιών τους.

ΑΣΚΗΣΗ Δ37 (Κεφάλαιο Δ3, Μηχανική των Υλικών: Ελαστικότητα): Συνεχίζουμε κι εδώ την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: οι εκφράσεις των τάσεων (α:2) σ_x , (β:2) σ_y και (γ:2) τ_{xy} . (δ:1) Ποιες τρεις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους επαληθεύουν αυτές και ποια έχει ήδη επαληθευθεί στην προηγούμενη άσκηση; Ποιες είναι οι άλλες δύο; (χωρίς τις επαληθεύσεις τους!) (ε:1) Επομένως σε τι ακριβώς μας βοηθάνε μαθηματικά τα δύο μιγαδικά δυναμικά $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$ των Kolosov–Muskhelishvili (1909);

ΑΣΚΗΣΗ Δ38 (Κεφάλαια Δ2, Δ3, Μηχανική των Υλικών: Ελαστικότητα): Στη Μηχανική των Υλικών στο επίπεδο πρόβλημα της Γραμμικής Ελαστικότητας οι τάσεις (συνιστώσες του τανυστή των τάσεων) σ_x , σ_y και τ_{xy} μπορούν να προσδιορισθούν με χρήση δύο μιγαδικών δυναμικών $\Phi(z)$ και $\Psi(z)$, των μιγαδικών δυναμικών των Kolosov–Muskhelishvili (1909) ως εξής:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \Phi(z),$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z} \Phi'(z) + \Psi(z)].$$

Σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο ελαστικό πρόβλημα ισχύει ότι

$$\Phi(z) = \sinh z \quad \text{και} \quad \Psi(z) = 0.$$

Ζητούνται: (α:2) Να αποδειχθεί ότι

$$\sinh(x + iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$$

(Ο γενικότερος τύπος για το $\sinh(z_1 + z_2)$ δε θεωρείται γνωστός!) (β:1) Να υπολογισθεί το άθροισμα $s = \sigma_x + \sigma_y$ των δύο ορθών τάσεων και (γ:1) να ελεγχθεί ότι αυτό είναι αρμονική συνάρτηση. (δ:1) Σε ποια φυσική απαίτηση ανταποκρίνεται η αρμονικότητα αυτή; Στη συνέχεια ποια είναι η συζυγής αρμονική συνάρτηση $t = t(x, y)$ του αθροίσματος $s = \sigma_x + \sigma_y$ με δύο διαφορετικούς τρόπους: (ε:1) άμεσα και (στ:2) με υπολογισμούς με βάση απλές γνωστές διαφορικές εξισώσεις.

ΑΣΚΗΣΗ Δ39 (Κεφάλαια Δ2, Δ3, Μηχανική των Υλικών: Ελαστικότητα): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α:1) Να αποδειχθεί ότι

$$\cosh(x + iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y.$$

(β:2) Να υπολογισθεί η μιγαδική ποσότητα $\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}$ και στη συνέχεια κατάλληλα οι τάσεις (γ:1) σ_x , (δ:1) σ_y και (ε:1) τ_{xy} . (στ:2) Τέλος να ελεγχθεί η ισχύς της πρώτης εξισώσεως ισορροπίας στο παρόν πρόβλημα Μηχανικής των Υλικών.

ΑΣΚΗΣΗ Δ40 (Κεφάλαιο Δ3, Μηχανική των Υλικών: Θραυστομηχανική): Εξειδικεύουμε τα δύο μιγαδικά δυναμικά των Kolosov–Muskhelishvili (1909) στην περίπτωση ρωγμής κατά μήκος

του άξονα Ox . Εξετάζουμε εδώ την ημιάπειρη ρωγμή $-\infty < x < 0$ σε άπειρο επίπεδο ελαστικό μέσον και μάλιστα με συνθήκες συμμετρίας ως προς τον άξονα Ox : τρόπος καταπόνησεως I. Τότε οι τρεις τάσεις (ή συνιστώσες του τανυστή των τάσεων) δίνονται με τη βοήθεια του μιγαδικού δυναμικού $Z(z)$ του Westergaard με βάση τους τρεις τύπους

$$\sigma_x = \operatorname{Re} Z(z) - y \operatorname{Im} Z'(z), \quad \sigma_y = \operatorname{Re} Z(z) + y \operatorname{Im} Z'(z), \quad \tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z'(z).$$

Στην ειδική περίπτωση της ημιάπειρης ρωγμής που προαναφέρθηκε και για φόρτιση του δοκιμίου με τάση σ κατά τη διεύθυνση του άξονα Oy το μιγαδικό δυναμικό του Westergaard $Z(z)$ παίρνει τη μορφή

$$Z(z) = \sigma \sqrt{\frac{a}{2z}}.$$

Ζητούνται: Σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) οι τρεις συνιστώσες του τανυστή των τάσεων (α:1) σ_x , (β:1) σ_y και (γ:1) τ_{xy} . (δ:1) Σε ποιο ακριβώς διάστημα μεταβάλλεται η πολική γωνία θ και γιατί; (ε:1) Να αποδειχθεί ότι οι τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} μηδενίζονται και οι τρεις τους πάνω στις δύο πλευρές της ρωγμής. (στ:1) Ο συντελεστής εντάσεως τάσεων K στο άκρο $z = 0$ της ρωγμής δίνεται εδώ (δηλαδή στον τρόπο καταπόνησεως I) από τον εξής τύπο:

$$K = \lim_{z \rightarrow 0} \sqrt{2\pi z} Z(z).$$

Άρα ποια είναι η τιμή του; (ζ:1) Ποιος τύπος δίνει την τάση σ_y πάνω στον άξονα Ox για $x > 0$; Τι παρατηρείται; (η:1) Από το άκρο $x = 0$ της ρωγμής και μέχρι ποια θέση $x = x_0$ (με $x_0 > 0$) η τάση σ_y ξεπερνάει μια κρίσιμη τάση διαρροής σ_y του υλικού του ρηγματωμένου δοκιμίου;

Δ3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΗ Δ41 (Κεφάλαιο Δ6, Ταλαντώσεις): Πρώτα-πρώτα για τη μιγαδική συνάρτηση

$$U(z) = \frac{\rho}{z(z^2 + \omega_0^2)}$$

με τα ρ και ω_0 σταθερές ζητούνται: (α:1) Οι πόλοι της και οι τάξεις τους. (β:2) Τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα. (γ:1) Ανάλογα τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα της μιγαδικής συναρτήσεως $e^{zt} U(z)$ με το t σταθερά. (δ:1) Κατευθείαν το ολοκλήρωμα Bromwich για την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$. (ε:5) Σε πρόβλημα εξαναγκασμένων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση ο μετασχηματισμός Laplace της λύσεώς του προκύπτει σαν $U(s)$ με $U(z)$ την πιο πάνω συνάρτηση (όμως με s αντί για z). Υποχρεωτικά με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων ζητείται η λύση $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$. Τι παρατηρείται;

ΑΣΚΗΣΗ Δ42 (Κεφάλαιο Δ6, Ταλαντώσεις): Εδώ έχουμε τη μερόμορφη μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2\xi\omega_0 z + \omega_0^2} \quad \text{με } z = x + iy, \quad \omega_0 > 0 \quad \text{και} \quad 0 < \xi < 1.$$

Ζητούνται: (α:1) Οι πόλοι της και (β:3) τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα. Προχωράμε τώρα στο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega_0 \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad \text{με } u(0) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{u}(0) = v_0 \quad \text{και με } 0 < \xi < 1.$$

Αυτό το πρόβλημα αφορά στις ελεύθερες ταλαντώσεις με ασθενή απόσβεση μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα ή στο αντίστοιχο πρόβλημα μονώροφου ιδεατού κτιρίου διατμήσεως. Στο πρόβλημα αυτό ζητούνται: (γ:1) Ο μετασχηματισμός Laplace $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ της άγνωστης συναρτήσεως $u(t)$. (δ:5) Με χρήση των ερωτημάτων (α) και (β) και με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων η λύση $u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U(s)\}$ του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙΙ: ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΕΠΙΛΥΣΗ ΑΝΑ ΕΒΔΟΜΑΔΑ

ΟΜΑΔΑ ΕΜΙΙΙ-Α

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Α1 ([X ή Y]: *Ύλη του Μαθήματος, Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους*): (α) Ποια είναι τα τρία μέρη των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς στο Β' Έτος Σπουδών; **Υπόδειξη:** (i) Οι Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, (ii) Οι Ολοκληρωτικές Εξισώσεις και (iii) Οι Μιγαδικές Συναρτήσεις. (β) Ποιο από τα μέρη αυτά θεωρείτε εσείς το πιο ενδιαφέρον για τον Πολιτικό Μηχανικό; (γ) Σε ποιες άλλες περιοχές της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού έχουν τα θέματα αυτά άμεση εφαρμογή; (δ) Σε ποια δύο κυρίως από τα άλλα μαθήματα του Β' έτους σπουδών θα μπορούσε να θεωρηθεί κάπως χρήσιμο το μάθημα των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙΙ; **Υπόδειξη:** (i) Στη Μηχανική των Υλικών και (ii) Στη Ρευστομηχανική. (ε) Ποιες είναι συνήθως οι ανεξάρτητες μεταβλητές που έχει ο Πολιτικός Μηχανικός στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που συναντάει; (στ) Να αναφερθούν οι ανεξάρτητες μεταβλητές για δοκούς και πλάκες υπό στατική ή δυναμική φόρτιση. (ζ) Επίσης για διδιάστατη και τριδιάστατη ροή μόνιμη (σταθερή) ή μη μόνιμη.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Α2 ([X ή Y]: *Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Χαρακτηρισμοί*): Για καθεμία από τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους: (α) Διδιάστατη εξίσωση του Laplace, (β) Τριδιάστατη εξίσωση του Laplace, (γ) Διδιάστατη εξίσωση του Poisson, (δ) Μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος, (ε) Διδιάστατη εξίσωση του κύματος, (στ) Τριδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως και (ζ) Διαρμονική εξίσωση ζητούνται: (α) Να ορισθούν με τα συνηθισμένα σύμβολα: άγνωστη συνάρτηση u , ανεξάρτητες μεταβλητές οι x, y, z, t (εννοείται όσες από αυτές χρειάζονται) στη *Mathematica* με τις ονομασίες `pde1` για την πρώτη, `pde2` για τη δεύτερη, κλπ. (β) Να δοθούν (στη *Mathematica* σε λίστες `list1`, `list2`, κλπ.) οι πλήρεις (γενικά έξι) χαρακτηρισμοί τους: ο καθένας τους μέσα σε εισαγωγικά στην αντίστοιχη λίστα. Γιατί σε εισαγωγικά;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Α3 ([X ή Y] *Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Τύποι*): (α) Υπό ποιες προϋποθέσεις μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους μπορεί να χαρακτηριστεί (i) υπερβολικού τύπου (ή υπερβολική), (ii) παραβολικού τύπου (ή παραβολική) και (iii) ελλειπτικού τύπου (ή ελλειπτική); (β) Πώς (και γιατί; δηλαδή με υπολογισμό της σχετικής διακρίνουσας Δ) χαρακτηρίζονται σχετικά με τον τύπο τους, μόνο εάν αυτό είναι δυνατόν, (i) η διδιάστατη εξίσωση του Laplace, (ii) η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος, (iii) η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (της θερμοκρασίας στη Μετάδοση Θερμότητας) και (iv) η διδιάστατη διαρμονική εξίσωση;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Α4 ([X ή Y] *Μικτές Μερικές Παράγωγοι*): Θεωρούμε τη συνάρτηση των τριών μεταβλητών

$$u(x, y, z) = A \cos(x^2 y^3 z^4) \cosh(ax^2 + by^3 + cz^4)$$

με τα a, b και c σταθερές. Ζητούνται: (α) Η δήλωσή της στη *Mathematica*. (β) Ο υπολογισμός της μικτής μερικής παραγώγου της δευτέρας τάξεως u_{xy} με απλοποίηση του αποτελέσματος.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$u_{xy} = D[u[x, y, z], x, y] // \text{Simplify}$$

Επίσης της αντίστοιχης παραγωγού u_{yx} με την αντίστροφη σειρά μερικών παραγωγίσεων. Τέλος να ελεγχθεί η ισότητα των μικτών μερικών παραγώγων. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$u_{xy} == u_{yx}$$

(γ) Να γίνει απόλυτα ανάλογη εργασία για τις μικτές μερικές παραγώγους ως προς y και z τώρα.

(δ) Να υπολογισθούν οι μικτές μερικές παράγωγοι έκτης τάξεως

$$\frac{\partial^6 u(x, y, z)}{\partial z^3 \partial y^2 \partial x} \quad \text{και επίσης} \quad \frac{\partial^6 u(x, y, z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^3}$$

Υπόδειξη: Για την πρώτη να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$u_{x1y2z3} = D[u[x, y, z], \{x, 1\}, \{y, 2\}, \{z, 3\}] // \text{Simplify}$$

και ανάλογα για τη δεύτερη. Μετά τον υπολογισμό τους, επειδή προκύπτουν εκτενή, πολύπλοκα αποτελέσματα, να μπει (εκ των υστέρων) το σύμβολο ; στο τέλος, ώστε να μη φαίνονται τα αποτελέσματα αυτά. Να γίνει και επαλήθευση της ισότητας των μικτών αυτών μερικών παραγώγων.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Α5 (IX και Y) Αρμονικός Τελεστής, Διαφορική Εξίσωση του Laplace): Η εξίσωση του Laplace είναι ιδιαίτερα κλασική στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και οι λύσεις της καλούνται αρμονικές συναρτήσεις. Εδώ περιοριζόμαστε στις δύο διαστάσεις (x, y) , όπου έχουμε

$$\Delta u(x, y) \equiv \nabla^2 u(x, y) := \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0.$$

Ζητούνται: (α) [Y] Να ορισθεί ο τελεστής L ($L := \Delta \equiv \nabla^2$) του αριστερού μέρους της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης σαν συνάρτηση (που καθορίζει τις σχετικές παραγωγίσεις) στη *Mathematica*. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$L[u_] := D[u, \{x, 2\}] + D[u, \{y, 2\}]$$

(β) [Y] Με τη χρήση του τελεστή αυτού L να διαπιστωθεί (σε μια γραμμή) ότι οι συναρτήσεις

$$u_1(x, y) = 2x + 5y, \quad u_2(x, y) = ax + by$$

είναι αρμονικές. Στην επόμενη γραμμή εντολών να ελεγχθούν ανάλογα οι συναρτήσεις

$$u_3(x, y) = x^2 + y^2, \quad u_4(x, y) = x^2 - y^2.$$

Είναι κι αυτές αρμονικές ή όχι; (γ) [X] Να ελεγχθούν τα υπολογιστικά αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος με την εκτέλεση των σχετικών υπολογισμών και με το χέρι. Υπάρχει συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων του ερωτήματος (β) και του παρόντος ως προς την αρμονικότητα ή τη μη αρμονικότητα των συναρτήσεων $u_{1,2,3,4}(x, y)$; (δ) [X και Y] Ανάλογα να ελεγχθεί με άμεσο τρόπο εάν ή όχι οι ακόλουθες συναρτήσεις $u_k(x, y)$ ($k = 5, 6, \dots, 13$) επαληθεύουν την εξίσωση του Laplace που προαναφέρθηκε, δηλαδή εάν είναι ή όχι αρμονικές συναρτήσεις:

$$\begin{array}{lll} u_5(x, y) = \cos x \cosh y, & u_6(x, y) = \cos x \sinh y, & u_7(x, y) = \sin x \cosh y, \\ u_8(x, y) = \sin x \sinh y, & u_9(x, y) = \cos x \sin 3y, & u_{10}(x, y) = \cos x \cosh 3y, \\ u_{11}(x, y) = \cos x \sinh 3y, & u_{12}(x, y) = \sin x \cosh 3y, & u_{13}(x, y) = \sin x \sinh 3y. \end{array}$$

(στ) [Y] Να γίνει απόλυτα ανάλογη εργασία για τις παρακάτω λίγο πιο πολύπλοκες συναρτήσεις, όπου ίσως ο μη ιδιαίτερα επιμελής Πολιτικός Μηχανικός θα προτιμούσε να εκτελέσει τις πράξεις

μάλλον ο υπολογιστής «μηχανικά» παρά ο ίδιος «με το χέρι». Είναι επομένως ευτυχής που η ένδειξη [X] απουσιάζει στο παρόν ερώτημα:

$$u_{14}(x, y) = x^{12} - 66y^2x^{10} + 495y^4x^8 - 924y^6x^6 + 495y^8x^4 - 66y^{10}x^2 + y^{12},$$

$$u_{15}(x, y) = 12yx^{11} - 220y^3x^9 + 792y^5x^7 - 792y^7x^5 + 220y^9x^3 - 12y^{11}x,$$

$$u_{16}(x, y) = e^x[\cosh 2y \sin 2x(x \cos y - y \sin y) - \sinh 2y \cos 2x(y \cos y + x \sin y)],$$

$$u_{17}(x, y) = e^x[\cosh 2y \sin 2x(y \cos y + x \sin y) + \sinh 2y \cos 2x(x \cos y - y \sin y)].$$

Στην πράξη βέβαια απαντώνται και πολύ πιο πολύπλοκες παραστάσεις. Επομένως εύλογα εικάζεται ότι η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή ενδείκνυται πλήρως για τον Πολιτικό Μηχανικό. Έτσι δε θα απασχολείται αυτός με υπολογισμούς «ρουτίνας» (εν προκειμένω με τετριμμένες παραγωγίσεις), αλλά μάλλον με τα ίδια τα σημαντικά προβλήματα της επιστήμης του! Είναι ορθή αυτή η παρατήρηση ή όχι; (Ποιο είναι το σχόλιό σας;) **Υπόδειξη:** Είναι δυνατή η χρήση και της εντολής `Map` για την ταυτόχρονη εφαρμογή του τελεστή L σε περισσότερες από μία συναρτήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Α6 ([X ή/και Y] Πλάκες): Δίνεται ισότροπη, γραμμικά ελαστική, λεπτή πλάκα P πάχους $h = 3 \times 10^{-2}$ m. Το υλικό της έχει μέτρο ελαστικότητας $E = 2 \times 10^6$ N/m² και λόγο του Poisson $\nu = 1/3$. Η στατική φόρτιση είναι $p(x, y)$. Ζητούνται: (α) [X ή Y] Πόση είναι η δυσκαμψία D της πλάκας P , που δίνεται από τον τύπο

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

(με υποχρεωτική εκτέλεση των σχετικών πράξεων μαζί με τις μονάδες!) (**Υπόδειξη:** [Y] Προσοχή! Τα σύμβολα D και E έχουν ειδικές σημασίες στη *Mathematica* και επομένως είναι ακατάλληλα για τη δυσκαμψία D και το μέτρο ελαστικότητας E . Πρέπει να αλλάξουν λίγο, π.χ. σε $D0$ και $E0$.) Τι μονάδες έχει η δυσκαμψία D σε πλάκες; (β) [X ή Y] Στο πρόβλημα μιας ορθογωνικής πλάκας P διαστάσεων a επί b ($0 \leq x \leq a$ και $0 \leq y \leq b$) υπό καταναμενημένη κάθετη φόρτιση $p(x, y)$ της μορφής

$$p(x, y) = p_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

(με το p_0 μια σταθερά) και με «απλή» στήριξη στο σύνορό της C (δηλαδή χωρίς βέλος κάμψεως και ροπή κάμψεως) ζητείται ο έλεγχος ότι το βέλος κάμψεως (κάθετη μετατόπιση) $w = w(x, y)$ δίνεται από τον εξής εξαιρετικά απλό (για ορθογωνικές πλάκες) τύπο:

$$w(x, y) = \frac{p_0(ab)^4}{\pi^4 D(a^2 + b^2)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

(με D τη δυσκαμψία της πλάκας) όσον αφορά στη γνωστή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς που διέπει τα στατικά προβλήματα σε πλάκες

$$\Delta^2 w \equiv \nabla^4 w := \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D}$$

με Δ^2 το διαρμονικό τελεστή. (γ) [X ή Y] Επ' ευκαιρία πόσο είναι το βέλος κάμψεως w στο σύνορο C της πλάκας; (δ) [X ή Y] Στη συνέχεια ποια είναι η μέγιστη τιμή w_{\max} του βέλους κάμψεως και πού (προφανώς) παρουσιάζεται αυτή; (Αν είναι δυνατόν, χωρίς παραγωγίσεις για την εύρεση του μεγίστου αυτού!) (ε) [X ή Y] Παραπέρα, αν διπλασιασθεί το πάχος h της πλάκας, τι θα συμβεί με το μέγιστο βέλος κάμψεως w_{\max} ; Ανάλογο ερώτημα αν διπλασιασθούν οι διαστάσεις a και b της πλάκας με αμετάβλητο όμως το πάχος της h . (στ) [Y] Τελικά ζητείται και η τριδιάστατη σχεδίαση (με τη χρήση της εντολής `Plot3D` της *Mathematica*) του σχήματος που παίρνει η παραμορφωμένη πλάκα με τις μετατοπίσεις της προς τα κάτω: $-w$, και σε ανηγμένη, αδιάστατη βέβαια μορφή, όχι φυσικά με σύμβολα στο σχέδιο (αυτό είναι αδύνατο!), δηλαδή με τις πιο πάνω αριθμητικές τιμές των h , E και ν και επιπλέον $p_0 = 10^4$ N/m², $a = 1$ m και $b = 2$ m) υπό την πιο πάνω φόρτιση $p(x, y)$.

ΟΜΑΔΑ EMIII-B

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-B1 ([X ή Y] Εξίσωση του Laplace): Η εξίσωση του Laplace (με λύσεις τις αρμονικές συναρτήσεις) είναι μια κλασική και σχετικά απλή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και απαντάται πολύ συχνά στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Εδώ ζητείται απλά να αναφερθεί πού κυρίως απαντάται στις δύο διαστάσεις (x, y) ή/και στις τρεις διαστάσεις (x, y, z) : (α) στην Κλασική Μηχανική, (β) στη Μετάδοση Θερμότητας, (γ) Στη Ρευστομηχανική, (δ) Στην Εδαφομηχανική, (ε) Στη Μηχανική των Υλικών (ή Αντοχή των Υλικών) στη διδιάστατη και στην τριδιάστατη Ελαστικότητα και (στ) στη Μηχανική των Υλικών, αλλά τώρα στη στρέψη. (στ) Ποιοι είναι οι χαρακτηρισμοί της;

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-B2 ([X και Y] Αρμονικός Τελεστής, Διαφορική Εξίσωση του Laplace): (α) [Y] Με τη χρήση του τελεστή του Laplace (της Laplacian, Λαπλασιανής) $L \equiv \Delta \equiv \nabla^2$ ζητείται η γενική λύση $u = u(x, y)$ της εξισώσεως του Laplace $Lu = 0$ στις δύο διαστάσεις. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή DSolve. (β) [X και Y] Στη συνέχεια ζητείται (τόσο με το χέρι [X] όσο και με τον υπολογιστή [Y]) η επαλήθευση ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x + iy)$ ή της μορφής $g(x - iy)$ (με το i να δηλώνει τη φανταστική μονάδα: $i := \sqrt{-1}$) καθώς και το άθροισμα των συναρτήσεων αυτών είναι λύση της εξισώσεως του Laplace. (γ) [X ή Y] Πού «πάσχει» η όλη διαδικασία στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού και ποια είναι η σχετική «θεραπεία»; **Υπόδειξη:** Πάσχει στο ότι μπορεί έτσι να προκύψει μιγαδική έκφραση για μια πραγματική ποσότητα, όπως, π.χ., για τη θερμοκρασία $\theta(x, y)$, τη συνάρτηση του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και τη ροϊκή συνάρτηση $\Psi(x, y)$ στη Ρευστομηχανική ή το άθροισμα των ορθών τάσεων $s = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2$ (με $\sigma_{1,2}$ τις κύριες τάσεις) στην Επίπεδη Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών. Αυτές είναι αρμονικές συναρτήσεις, αλλά πρέπει να είναι ταυτόχρονα και πραγματικές συναρτήσεις. Για να αποφευχθεί αυτό (δηλαδή για να έχουμε στ' αλήθεια πραγματική λύση), οι συναρτήσεις f και g πρέπει να είναι συζυγείς μιγαδικές συναρτήσεις στο άθροισμα $f(x + iy) + g(x - iy)$, δηλαδή να ισχύει $g = \bar{f}$.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-B3 ([X και Y] Ρευστομηχανική): Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{με} \quad \Phi = \Phi(x, y) \quad \text{και} \quad M > 0.$$

Η εξίσωση αυτή παρουσιάζεται στη Ρευστομηχανική σε διδιάστατη ροή με κάποιο μικρό εμπόδιο σ' αυτή. Ζητούνται: (α) Ο τύπος της με διάκριση τριών περιπτώσεων ως προς τη σταθερά M (τον αριθμό Mach), που είναι θετικός αριθμός: $M > 0$, και στη συνέχεια όλοι οι χαρακτηρισμοί της. (β) Η γενική λύση της και στις τρεις αυτές περιπτώσεις με τη βοήθεια δύο αυθαίρετων παραγωγίσιμων συναρτήσεων. (γ) Οι επαληθεύσεις των λύσεων αυτών.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-B4 ([X και Y] Μετάδοση Θερμότητας): Εδώ θεωρούμε το πρόβλημα της μονοδιάστατης θερμοκρασιακής κατανομής $T(z, t)$ μέσα στο έδαφος (που υποτίθεται προσεγγιστικά ομογενές) κατά τον άξονα Oz (με $0 \leq z < \infty$) στην ειδική περίπτωση όπου $\forall z \geq 0 \quad T(z, 0) = T_0$ (με το σύμβολο T_0 θετική σταθερά), ενώ, στη συνέχεια, λόγω απότομης χαλαζόπτωσης ή χιονόπτωσης η θερμοκρασία του εδάφους μειώνεται ακριβώς στο μηδέν ($\forall t > 0 \quad T(0, t) = 0$). Για το συγκεκριμένο αυτό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών, που διέπεται από την κλασική μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως (εν προκειμένω της Μεταδόσεως Θερμότητας)

$$\frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t},$$

ζητείται να ελεγχθεί (να επαληθευθεί) ότι η λύση του δίνεται από τον εξής απλό τύπο:

$$T(z, t) = T_0 \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2a\sqrt{t}} \right)$$

με a^2 τη συνολική θερμική σταθερά του εδάφους στη σχετική διαφορική εξίσωση. **Υπόδειξη:** Για τον ορισμό της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως, της μονοδιάστατης εξισώσεως της διαχύσεως, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{pde} = \text{D}[T[z, t], \{z, 2\}] == (1/a^2) \text{D}[T[z, t], t]$$

Επίσης για την πιο πάνω πιθανή λύση $T(z, t)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{Ts}[z_, t_] = \text{T0 Erf}[z/(2 a \text{Sqrt}[t])]$$

Για την επαλήθευση (verification) της διαφορικής εξισώσεως έχουμε τη δυνατότητα να χρησιμοποιήσουμε την εντολή

$$\text{ver1} = \text{pde} /. T \rightarrow \text{Ts}$$

Για την επαλήθευση της συνοριακής συνθήκης την εντολή

$$\text{ver2} = \text{Ts}[0, t]$$

Πώς καλείται η συνάρτηση $\text{erf}(z)$ (που δηλώνεται με $\text{Erf}[z]$ στη *Mathematica*); **Υπόδειξη:** Καλείται συνάρτηση σφάλματος (στα Αγγλικά error function). Ποια είναι η γραφική παράστασή της στο διάστημα $[0, 3]$; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{Plot}[\text{Erf}[z], \{z, 0, 3\}]$$

Οι τιμές της για $z = 0$, για $z = 3$ και για $z \rightarrow \infty$; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\{\text{Erf}[0], \text{Erf}[3], \text{Erf}[\text{Infinity}]\} // \text{N}$$

(Το σύμβολο άπειρο, ∞ , δηλώνεται όχι μόνο με *Infinity*, αλλά πιο καλά με *Esc inf Esc* στη *Mathematica*.) Στη συνέχεια να γίνει και το σχετικό σχήμα (με τη χρήση της εντολής *Plot*) για την ανηγμένη (αδιάστατη) ποσότητα T/T_0 για $0 \leq z \leq 6$ (σε m) με $a = 1$ (σε $\text{m}/\sqrt{\text{sec}}$) και $t = 2, 8, 32$ (σε sec, τρεις καμπύλες: P1, P2 και P3). Οι τρεις αυτές καμπύλες να δοθούν και σε ενιαίο σχήμα. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{Show}[P1, P2, P3]$$

Τι παρατηρείται από το τελικό αυτό σχήμα; Μειώνεται πραγματικά δραστικά η θερμοκρασία $T(z, t)$ μέσα στο έδαφος με την πάροδο του χρόνου t ; Ποια είναι η φυσική εξήγηση του φαινομένου αυτού;

ΥΠΟΔΕΙΞΗ ΓΙΑ ΤΗ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΠΑΚΕΤΟΥ *VectorAnalysis*

Στις παρακάτω ασκήσεις της παρούσας ομάδας ασκήσεων γίνεται αναφορά και χρήση του αρμονικού τελεστή (της Λαπλασιανής) $\Delta \equiv \nabla^2$ καθώς και του διαρμονικού τελεστή $\Delta^2 \equiv \nabla^4$. Οι διαφορικοί αυτοί τελεστές μπορούν να εισαχθούν άμεσα από το χρήστη της *Mathematica* βάσει των σχετικών ορισμών τους μέσω των κατάλληλων παραγωγίσεων. Εναλλακτικά όμως μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το πακέτο *Calculus'VectorAnalysis'*. Αυτό «φορτώνεται» μέσω της μιας ή της άλλης από τις δύο απόλυτα ισοδύναμες παρακάτω εντολές

$$\text{Needs}["\text{Calculus'VectorAnalysis}"] \text{ ή απλούστερα } \ll \text{Calculus'VectorAnalysis'}$$

(Υπόδειξη: Προσοχή στη βαρεία. Είναι πάνω αριστερά στο πληκτρολόγιο!) Μόλις «φορτωθεί» το πακέτο *VectorAnalysis*, ο χρήστης της *Mathematica* μπορεί να χρησιμοποιήσει τις σχετικές εντολές, π.χ. *Laplacian* (για τον τελεστή του Laplace, τον αρμονικό τελεστή) και *Biharmonic* (για το διαρμονικό τελεστή) ακολουθώντας τις σχετικές οδηγίες. Η σημαντικότερη από αυτές είναι ο καθορισμός των συντεταγμένων (συνήθως Καρτεσιανές, κυλινδρικές ή σφαιρικές). Παραδείγματος χάρη, για μια συνάρτηση $A(x, y)$ μπορούμε να πάρουμε τη Λαπλασιανή της (τη *Laplacian*) σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (αφού έχουμε ήδη φορτώσει το πακέτο *VectorAnalysis* σύμφωνα με τα παραπάνω) δίνοντας την ακόλουθη εντολή (όπου περιλάβαμε και την απλοποίηση του αποτελέσματος μέσω

της εντολής Simplify, που γενικά χρειάζεται!):

```
Laplacian[A[x,y], Cartesian[x,y,z]]//Simplify
```

Μπορούμε επίσης να εφαρμόσουμε ανάλογα το διαρμονικό τελεστή $\Delta^2 \equiv \nabla^4$ στην ίδια ακριβώς συνάρτηση δίνοντας την εντολή

```
Biharmonic[A[x,y], Cartesian[x,y,z]]//Simplify
```

Στις τρεις διαστάσεις (x, y, z) έχουμε τις απόλυτα αντίστοιχες εντολές

```
Laplacian[A[x,y,z], Cartesian[x,y,z]]//Simplify
```

```
Biharmonic[A[x,y,z], Cartesian[x,y,z]]//Simplify
```

Εναλλακτικά μπορούμε να καθορίσουμε τη χρήση Καρτεσιανών συντεταγμένων εκ των προτέρων μέσω της εντολής SetCoordinates, π.χ.

```
SetCoordinates[Cartesian[x,y,z]]
```

οπότε γράφουμε απλά

```
Laplacian[A[x,y]]//Simplify ή Laplacian[A[x,y,z]]//Simplify
```

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε και άλλα είδη συντεταγμένων με απόλυτα ανάλογο τρόπο, π.χ.

```
SetCoordinates[Cylindrical[r,θ,z]]//Simplify
```

οπότε μπορούμε να βρούμε μια Λαπλασιανή σε πολικές ή κυλινδρικές συντεταγμένες γράφοντας

```
Laplacian[A[r,θ]]//Simplify ή Laplacian[A[r,θ,z]]//Simplify
```

αντίστοιχα. Για τη χρήση σφαιρικών συντεταγμένων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και πάλι την εντολή SetCoordinates, π.χ. ως εξής:

```
SetCoordinates[Spherical[ρ,θ,φ]]//Simplify
```

και να βρούμε έπειτα μια Λαπλασιανή, π.χ. μέσω της απλής εντολής

```
Laplacian[A[ρ,θ,φ]]//Simplify
```

Εννοείται βέβαια ότι τα πιο πάνω σύμβολα A, x, y, z, r, θ και φ είναι τυχαία και όχι υποχρεωτικά. Οποιαδήποτε σύμβολα θα μπορούσαν να είχαν χρησιμοποιηθεί αντί για τα σύμβολα αυτά!

Τέλος με τη χρήση της Βοήθειας (Help) της Mathematica μπορούμε να μελετήσουμε τις λεπτομερείς οδηγίες χρήσεως του πακέτου VectorAnalysis για τους παραπάνω και άλλους χρήσιμους τελεστές στη Διανυσματική Ανάλυση για τα πιο πάνω αλλά και άλλα συστήματα συντεταγμένων.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Β5 (IX και Y) Αρμονικός Τελεστής (Λαπλασιανή, Τελεστής του Laplace), Διαρμονικός Τελεστής): Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η αμέσως παραπάνω υπόδειξη (πριν από την εκφώνηση της παρούσας ασκήσεως). Για τη Λαπλασιανή: $\Delta \equiv \nabla^2$ και το διαρμονικό τελεστή: $\Delta^2 \equiv \nabla^4$ ζητούνται: (α) Πώς είναι διαθέσιμοι οι τελεστές αυτοί; Να «φορτωθεί» το σχετικό πακέτο της Mathematica, εάν αυτό δεν έχει ήδη γίνει. (β) Ποιες πληροφορίες δίνει η Mathematica (χωρίς τη χρήση της Βοήθειας (Help)) για τους τελεστές αυτούς; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
??Laplacian
```

για τον πρώτο τελεστή (τον τελεστή του Laplace, τον αρμονικό τελεστή) καθώς και η εντολή

```
??Biharmonic
```

για το δεύτερο (το διαρμονικό). Τι σημαίνουν οι ιδιότητες Protected και ReadProtected των τελεστών αυτών στη Mathematica; (γ) Ποιες είναι οι εκφράσεις του αρμονικού τελεστή (της Λαπλασιανής, του τελεστή του Laplace) για μια τυχαία κατάλληλα παραγωγίσιμη συνάρτηση f στις

δύο διαστάσεις τόσο σε Καρτεσιανές όσο και σε πολικές συντεταγμένες; Ανάλογο ερώτημα στις τρεις διαστάσεις σε Καρτεσιανές, σε κυλινδρικές και σε σφαιρικές συντεταγμένες. Μέχρι τι τάξεως παράγωγοι υπεισέρχονται στις εκφράσεις που βρέθηκαν; (δ) Ακριβώς οι ίδιες ερωτήσεις με το ερώτημα (γ), αλλά τώρα για το διαρμονικό τελεστή. (ε) Πού ακριβώς παρουσιάζεται ο αρμονικός τελεστής στη Μετάδοση Θερμότητας; Στη Βαρύτητα; Στη Ρευστομηχανική; Στην Επίπεδη Ελαστικότητα; Στη Στρέψη; (στ) Πού ακριβώς παρουσιάζεται ο διαρμονικός τελεστής στην Επίπεδη Ελαστικότητα; Στη Θεωρία Πλακών;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Β6 ([X και Y]: Μηχανική των Υλικών: Ελαστικότητα, Πολικές Συντεταγμένες, Τάσεις, Αρμονικές και Διαρμονικές Συναρτήσεις): Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα ενός άπειρου (δηλαδή πολύ μεγάλων διαστάσεων) ισότροπου ελαστικού δοκιμίου με κυκλική οπή ακτίνας R με κέντρο την αρχή O των συντεταγμένων. Η φόρτιση του δοκιμίου είναι ομοιόμορφη εφελκυστική κατά τον άξονα Ox στο άπειρο. (Δεν υπάρχει φόρτιση στο σύνορο της κυκλικής οπής.) Οι τάσεις σ_r , σ_θ και $\tau_{r\theta}$ στο δοκίμιο αυτό (εύλογα σε πολικές συντεταγμένες (r, θ)) έχουν τις εξής εκφράσεις:

$$\sigma_r = \frac{\rho}{2} \left[\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \left(1 + \frac{3R^4}{r^4} - \frac{4R^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{\rho}{2} \left[\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \left(1 + \frac{3R^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \right],$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\rho}{2} \left(1 - \frac{3R^4}{r^4} + \frac{2R^2}{r^2}\right) \sin 2\theta.$$

Ζητούνται: (α) Να υπολογισθούν οι εκφράσεις των τάσεων σ_r , σ_θ και $\tau_{r\theta}$ ακριβώς στην περιφέρεια $r = R$ της κυκλικής οπής. Προκύπτει ότι είναι πραγματικά αφόρτιστη η κυκλική οπή; (β) Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή της τάσεως σ_θ πάνω στην ίδια περιφέρεια και πού παρουσιάζεται; (**Υπόδειξη:** Για $\theta = \pm\pi/2$.) (γ) Ποιο είναι επομένως το «κόστος» (πάνω στις τάσεις) της υπάρξεως της κυκλικής οπής; Είναι αμελητέο ή όχι για τον Πολιτικό Μηχανικό; (δ) Τελικά ζητείται να ελεγχθεί εάν ή όχι οι παραπάνω τρεις τάσεις καθώς και το άθροισμα των ορθών τάσεων $s = \sigma_r + \sigma_\theta$ είναι αρμονικές συναρτήσεις. Επίσης εάν είναι ή όχι διαρμονικές συναρτήσεις. Τι παρατηρείται; Είναι εύλογο αυτό σε σύγκριση με τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) ; Γιατί; (**Υπόδειξη:** Μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εντολή (το θ με Esc q Esc στη *Mathematica*!)

SetCoordinates[Cylindrical][r, θ , z]]

στο πακέτο VectorAnalysis. Επίσης, για διευκόλυνση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εντολή Map και για τις απλοποιήσεις η εντολή Simplify.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Β7 ([X και Y] Ρευστομηχανική): Θεωρούμε το κλασικό διδιάστατο πρόβλημα της επίπεδης μόνιμης (σταθερής) ροής ιδεατού ρευστού γύρω από κύλινδρο ακτίνας R . (Έτσι κοντά στον κύλινδρο «εμποδίζεται» κάπως η ροή.) Η ταχύτητα του ρευστού μακριά από τον κύλινδρο είναι κατά τη διεύθυνση του οριζόντιου άξονα (του άξονα Ox) και ίση με V . Θεωρείται επίσης ότι υφίσταται κυκλοφορία Γ της ροής του ρευστού γύρω από τον κύλινδρο. Στο πρόβλημα αυτό η ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής) $\Psi(r, \theta)$ έχει την εξής μάλλον απλή έκφραση σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) με αρχή O το κέντρο της διατομής του κυλίνδρου:

$$\Psi(r, \theta) = V \sin \theta \left(r - \frac{R^2}{r} \right) - K \ln \frac{r}{R}.$$

Ζητούνται: (α) Ο υπολογιστικός έλεγχος ότι η παραπάνω ροϊκή συνάρτηση $\Psi(r, \theta)$ είναι αρμονική. (**Υπόδειξη:** Το Ψ με Esc Y Esc, Λατινικό όχι Ελληνικό Y, στη *Mathematica*.) (β) Είναι και διαρμονική; Γιατί; (θεωρητική απάντηση). (γ) Να επαληθευθεί και υπολογιστικά ότι πράγματι είναι και διαρμονική, αν και προφανώς μόνο η αρμονικότητα έχει ουσιαστική σημασία για μια αρμονική συνάρτηση. (δ) Τι διαστάσεις έχει η κυκλοφορία Γ στη Ρευστομηχανική; Πώς υπολογίζεται συνήθως;

ΟΜΑΔΑ ΕΜΙΙΙ-С

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-С1 ([Y] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Μετάδοση Θερμότητας): Να γίνει απόπειρα επιλύσεως με τη *Mathematica* (εντολή DSolve και πάλι) της κλασικής μονοδιάστατης εξίσωσης της διαχύσεως (π.χ. στη Μετάδοση Θερμότητας) με σκοπό την εύρεση της γενικής της λύσεως. Επιτυγχάνει ή όχι η *Mathematica* στην προσπάθειά της αυτή; Γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-С2 ([X] Τύποι διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους): Ζητείται να βρεθεί ο τύπος: (α) της μονοδιάστατης εξίσωσης του κύματος, (β) της μονοδιάστατης εξίσωσης της διαχύσεως και (γ) της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace με βάση τον υπολογισμό της σχετικής διακρίνουσας Δ . (δ) Το ίδιο ερώτημα (με διάκριση όμως τριών περιπτώσεων) για τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

με $\Phi = \Phi(x, y)$ και με το M μη αρνητική σταθερά ($M \geq 0$). Πού απαντάται η εξίσωση αυτή; Πώς καλείται η σταθερά (η παράμετρος) M ; Ζητείται επίσης και η γενική λύση της τελευταίας αυτής εξίσωσης με τη βοήθεια δύο αυθαίρετων παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Στο τέλος ζητείται και η επαλήθευση της γενικής λύσεως που βρέθηκε.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-С3 ([X] Αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών): Με την αλλαγή ανεξάρτητων μεταβλητών $\xi = x - Vt$ και $\tau = t$ ζητούνται: (α) Ποια μορφή παίρνει η απλή εξίσωση της μεταγωγής ρύπου σε υδατόρρευμα με το νερό να κινείται με σταθερή ταχύτητα V ; (β) Το ίδιο ερώτημα, αν υπάρχει επιπλέον και μοριακή διάχυση με συντελεστή μοριακής διαχύσεως D .

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-С4 ([X] Εξίσωση του Laplace): Η γνωστή μας εξίσωση του Laplace (με λύσεις τις αρμονικές συναρτήσεις) είναι μια κλασική και σχετικά απλή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους και απαντάται πολύ συχνά στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Εδώ ζητείται να βρεθεί η γενική λύση της διδιάστατης εξίσωσης του Laplace: (α) Με τη βοήθεια αλλαγής ανεξάρτητων μεταβλητών ανάλογης εκείνης που εφαρμόζεται στη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος στη μέθοδο του d'Alembert. (β) Με κατάλληλη προσαρμογή της λύσεως του d'Alembert για τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος. (γ) Με τη βοήθεια πιθανής λύσεως της μορφής $\varphi(x + \mu y)$ και της σχετικής δευτεροβάθμιας χαρακτηριστικής εξίσωσης $p_2(\mu) = 0$. (δ) Τέλος με τη χρήση εκθετικής αντικαταστάσεως της μορφής $\exp(\lambda x + \mu y)$ τελικά σε μορφή ολοκληρωτικού τύπου στο διάστημα $(-\infty, \infty)$.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-С5 ([X και Y] Πλάκες): Να ελεγχθεί εάν (ή όχι) κάθε συνάρτηση της μορφής

$$w_a(x, y) = (x - iy)f(x + iy) + g(x + iy)$$

(με $i = \sqrt{-1}$ τη φανταστική μονάδα και $f(z)$ και $g(z)$ κατάλληλα παραγωγίσιμες αυθαίρετες συναρτήσεις μιας μεταβλητής) επαληθεύει το ομογενές μέρος (δηλαδή με μηδενική κάθετη φόρτιση $p(x, y)$) της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους της ισότροπης ελαστικής πλάκας

$$\Delta^2 w(x, y) \equiv \nabla^4 w(x, y) = \frac{p(x, y)}{D}$$

(με D τη δυσκαμψία της πλάκας). Το ίδιο ερώτημα για τη συνάρτηση

$$w_b(x, y) = (x + iy)f(x - iy) + g(x - iy).$$

Πού πάσχει η όλη διαδικασία και τι «θεραπεία» υπάρχει; (Ποια είναι η αντίστοιχη *πραγματική* γενική λύση;) Παραπέρα ποιες τρεις στοιχειώδεις ανάλογες συναρτήσεις $w_k(x, y)$ ($k = 1, 2, 3$) μπορούν να

χρησιμοποιηθούν σαν πραγματική (γιατί άραγε πραγματική;) γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης της πλάκας για σταθερή κάθετη φόρτιση $\rho(x, y) = \rho_0$; Τελικά τι θα καθορίσει τις συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα πλάκας υπό σταθερή κάθετη φόρτιση ρ_0 ; Ποιο είναι επομένως το «δύσκολο» μέρος της όλης διαδικασίας;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-C6 ([X] Εξίσωση του Laplace, Πρόβλημα Dirichlet): Στην επίπεδη ορθογωνική περιοχή $D = [0, a] \times [0, b]$ (με $a > 0$ και $b > 0$) ζητούνται: (α) Η επίλυση του προβλήματος Dirichlet με ομογενείς (μηδενικές) συνοριακές συνθήκες στις τρεις πλευρές $x = a, y = 0, y = b$ και μη ομογενή της μορφής $u(0, y) = g(y)$ στην τέταρτη πλευρά $x = 0$ (με $0 \leq y \leq b$ και τη συνάρτηση $g(y)$ γνωστή στο διάστημα αυτό). (β) Η επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος Dirichlet για την ημιλωρίδα D^* που προκύπτει από την ορθογωνική περιοχή D όταν $a \rightarrow \infty$ φυσικά με φραγμένη την άγνωστη συνάρτηση $u = u(x, y)$ για $x \rightarrow \infty$.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-C7 ([X και Y] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Μέθοδος του d'Alembert, Εξίσωση του Poisson, Μηχανική των Υλικών: Στρέψη): Στο πρόβλημα της στρέψεως ευθύγραμμης, ομογενούς, γραμμικά ελαστικής ράβδου μήκους L ($0 \leq z \leq L$) και σταθερής διατομής S (στο επίπεδο Oxy) στη Μηχανική των Υλικών απαντάται η εξίσωση του Poisson

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = F(x, y), \quad F(x, y) = -2G\theta \quad (\text{σταθερά}), \quad (x, y) \in S$$

(με $\Delta \equiv \nabla^2$ το γνωστό αρμονικό τελεστή), G το μέτρο διατμήσεως του ελαστικού υλικού και θ τη (σταθερή) γωνία στρέψεως ανά μονάδα μήκους. Η συνάρτηση $\varphi(x, y)$ καλείται **τασική συνάρτηση** (όπως υποδείχθηκε από τον Prandtl το 1903), γιατί από αυτήν προκύπτουν εύκολα και οι δύο τάσεις (διατμητικές βέβαια) στο παρόν πρόβλημα μέσω των απλών τύπων

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x}, \quad (x, y) \in S.$$

Εδώ ζητούνται: (α) Η γενική λύση της πιο πάνω εξίσωσης του Poisson (ασφαλώς για πραγματική τασική συνάρτηση $\varphi(x, y)$) υποχρεωτικά με κατάλληλη (και εξαρχής τροποποιημένη) χρήση της μεθόδου του d'Alembert για την εξίσωση της χορδής. (Ποια είναι η αντιστοιχία των σταθερών;) (β) Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε την παραπάνω εξίσωση του Poisson σε εξίσωση του Laplace ακριβώς για το ίδιο πρόβλημα; (γ) Σαν εφαρμογή να γίνουν ο υπολογισμός των διατμητικών τάσεων και ο έλεγχος της ισχύος της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης καθώς και των εξισώσεων ισορροπίας στο παρόν πρόβλημα στρέψεως στην ειδική περίπτωση όπου

$$\varphi(x, y) = -\frac{G\theta}{2} \left[(x^2 + y^2) - \frac{1}{a}(x^3 - 3xy^2) + b \right], \quad (x, y) \in S,$$

με τα a και b σταθερές (με τι φυσικές διαστάσεις;). (δ) Τι (πάρα πολύ σημαντικό για τον Πολιτικό Μηχανικό) παραλείψαμε να αναφέρουμε (εδώ εκ προθέσεως) στα πιο πάνω ερωτήματα;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-C8 ([X] Εδαφομηχανική): Στο πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο της **στερεοποίησης (consolidation)** στην Εδαφομηχανική υπό την ισχύ της κλασικής θεωρίας του Karl Terzaghi, του «πατέρα» της Εδαφομηχανικής, για τη μονοδιάστατη περίπτωση (κατά τη διεύθυνση του βάθους z μέσα στο έδαφος) προκύπτει η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι ο χρόνος t (με $t > 0$) και το βάθος z μέσα στο έδαφος (με $z > 0$). Η άγνωστη συνάρτηση $u = u(z, t)$ είναι η **πρόσθετη υδροστατική πίεση πόρων (excess pore water pressure)** ή **υπερπίεση πόρων**. Το σύμβολο c_v δηλώνει το **συντελεστή στερεοποίησης (coefficient of consolidation)**, που θεωρείται γνωστή θετική σταθερά. Εξετάζουμε ένα **στρώμα** (ή μια **στρώση**)

(layer) του εδάφους ύψους ίσου με $2d$ (κατά τη διεύθυνση του άξονα Oz). Στα όριά του $z = 0$ και $z = 2d$ ($0 \leq z \leq 2d$) έχουμε τις δύο συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = u(2d, t) = 0.$$

Την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ ισχύει η αρχική συνθήκη

$$u(z, 0) = u_i$$

φυσικά με $0 \leq z \leq 2d$ και με το u_i γνωστή θετική σταθερά. Ζητούνται: (α) Η ονομασία της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους. (β) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (γ) Η πλήρης επίλυση του προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών που ορίστηκε πιο πάνω υποχρεωτικά με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, δηλαδή θέτοντας αρχικά

$$u(z, t) = Z(z)T(t).$$

Να μην παραλειφθεί και η διάκριση περιπτώσεων για τη **σταθερά διαχωρισμού** λ (με λεπτομέρειες): (i) θετική, (ii) μηδέν και (iii) αρνητική. (δ) Η επαλήθευση της λύσεως $u(z, t)$ που βρέθηκε και ως προς τη διαφορική εξίσωση και ως προς τις τρεις συνθήκες: δύο συνοριακές και μία αρχική.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-C9 ([X και Y] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Μέθοδος Χωρισμού των Μεταβλητών, Ιδιοτιμές, Ιδιοσυναρτήσεις, Εξίσωση Διαχύσεως, Μετάδοση Θερμότητας): Με τη χρήση της *Mathematica* ζητείται να μελετηθεί το μονοδιάστατο πρόβλημα της Μεταδόσεως Θερμότητας, που υπακούει στη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Στη διαφορική αυτή εξίσωση με μερικές παραγώγους το σύμβολο x δηλώνει τη θέση (εν προκειμένω $0 \leq x \leq L$), το σύμβολο t το χρόνο (στην περίπτωση μας $0 \leq t < \infty$) και το σύμβολο $u = u(x, t)$ την άγνωστη συνάρτηση (στο συγκεκριμένο πρόβλημα τη θερμοκρασία είτε σε βαθμούς Κελσίου είτε σε βαθμούς Kelvin). Η σταθερά c^2 (προφανώς θετική) έχει να κάνει με τις μηχανικές και θερμικές ιδιότητες του υλικού.

Πέρα από τη διαφορική εξίσωση πρέπει να ισχύουν επίσης και οι κατάλληλες συνοριακές και αρχικές συνθήκες. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρούμε ότι ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (2)$$

καθώς και η αρχική συνθήκη:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in [0, L], \quad (3)$$

όπου $f(x)$ δηλώνει γνωστή, τμηματικά συνεχή συνάρτηση στο διάστημα $[0, L]$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η συνάρτηση $f(x)$ θεωρείται ότι έχει τη μορφή

$$f(x) = \left(\frac{x}{L}\right)^3 \left(1 - \frac{x}{L}\right) \sin \frac{\pi x}{2L} \quad (4)$$

ουσιαστικά με τη χρήση της αδιάστατης μεταβλητής $\xi = x/L$. Οι εξισώσεις (1), (2), (3) και (4) αποτελούν το συγκεκριμένο πρόβλημα συνοριακών και αρχικών τιμών στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που θέλουμε να επιλύσουμε με τη βοήθεια της *Mathematica*. Ζητούνται:

(α) Υποχρεωτικά μέσα στο notebook της *Mathematica* να απαντηθούν (σε μορφή κειμένου με Alt 7) τα εξής υποερωτήματα: Η παραπάνω διαφορική εξίσωση (της διαχύσεως) με μερικές παραγώγους είναι γραμμική ή μη γραμμική; Ποιες είναι οι ανεξάρτητες και ποια η εξαρτημένη μεταβλητή;

Τι τάξεως είναι; Έχει νόημα ο χαρακτηρισμός της σαν ελλειπτικής, παραβολικής ή υπερβολικής; Εάν ναι, τι είναι από τα τρία; Είναι ομογενής ή μη ομογενής; Υπάρχει γενική λύση (με τη βοήθεια αυθαίρετων συναρτήσεων), όπως ισχύει στην εξίσωση της χορδής, την εξίσωση του Laplace και τη διαρμονική εξίσωση; Γιατί άραγε; Πώς τροποποιούνται οι συνοριακές συνθήκες (2) σε περίπτωση τέλει μονώσεως αντί για μηδενική θερμοκρασία στα άκρα αυτά; Σε περίπτωση μονώσεως στο αριστερό άκρο και σταθερής θερμοκρασίας u_0 στο δεξιό άκρο;

(β) Να αναφερθούν δύο φυσικά προβλήματα στη μια διάσταση βέβαια που να σχετίζονται με τη Μετάδοση Θερμότητας και όπου να ισχύει το πιο πάνω πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών. Να δοθούν πλήρεις φυσικές λεπτομέρειες. Προς στιγμή μεταφερόμενοι στη Μηχανική των Υλικών στο επίπεδο πρόβλημα, ποια είναι η αντιστοιχία με τα δύο προβλήματα που προαναφέρθηκαν;

(γ) Ποια είναι η (γενικευμένη) μορφή της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης στις δύο διαστάσεις; Στις τρεις διαστάσεις; Υπάρχουν άραγε πηγές θερμότητας; Εάν υπήρχαν, πώς θα άλλαζε η διαφορική μας εξίσωση; Θα συνέχιζε να ήταν ομογενής;

(δ) Στο στατικό πρόβλημα ποια απλούστατη μορφή παίρνει η πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους; Ποια είναι η γενική λύση της; (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή DSolve της *Mathematica*.) Μπορεί να γίνει δεκτή (στο στατικό πρόβλημα) η παραπάνω ειδική συνάρτηση $f(x)$;

(ε) Προχωράμε τώρα στο παρόν δυναμικό πρόβλημα, ακριβώς όπως παρουσιάστηκε μαθηματικά πιο πάνω, και στη λύση του με τη χρήση της *Mathematica*. Καταρχήν ζητείται η γραφή της διαφορικής εξίσωσης (1) στη «γλώσσα» της *Mathematica*. Στη συνέχεια ζητείται η ανάλυση της άγνωστης συναρτήσεως $u = u(x, t)$ σε γινόμενο μιας συναρτήσεως του x , της $F(x)$, επί μια συνάρτηση του t , τη $G(t)$, δηλαδή

$$u(x, t) = F(x)G(t) \quad (5)$$

(χωρισμός των μεταβλητών). Ποια μορφή παίρνει τώρα η διαφορική εξίσωση (1) μετά τη διαίρεση και των δύο μελών της με $c^2 u(x, t)$; Έχουν πραγματικά χωρισθεί οι μεταβλητές;

(στ) Θεωρώντας και τα δύο κλάσματα στη διαφορική μας εξίσωση ίσα με την ίδια σταθερά λ (γιατί σταθερά;) που την υποθέτουμε αρνητική και τη συμβολίζουμε με $-\rho^2$, μπορούμε εύκολα να βρούμε τις γενικές λύσεις και των δύο *συνήθων* διαφορικών εξισώσεων που προέκυψαν. Ποιες είναι οι λύσεις αυτές; (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί και πάλι η εντολή DSolve της *Mathematica*.)

(ζ) Από ποια από τις δύο αυτές λύσεις προκύπτει με φυσικό τρόπο ότι η σταθερά λ πρέπει σίγουρα να είναι αρνητική; Τι θα συνέβαινε, εάν ήταν θετική; Ποια φυσική αρχή θα παραβιαζόταν;

(η) Επανερχόμαστε στη γενική λύση που βρήκαμε για την άγνωστη συνάρτηση $F(x)$. Είναι εύλογο να πάρουμε υπόψη και τις χωρικές (συνοριακές) συνθήκες (2). Πώς γράφονται οι εξισώσεις αυτές στη *Mathematica*; Ποια είναι η καταρχήν λύση του σχετικού γραμμικού συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων με τη χρήση της εντολής Solve; Είναι χρήσιμη η λύση αυτή; Εάν όχι, γιατί; Ποιο είναι το μητρώο των συντελεστών των άγνωστων ποσοτήτων $C_{1,2}$ στις συνοριακές (αλγεβρικές) εξισώσεις μας (για $x = 0$ και για $x = L$); (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές Coefficient και Table.) Τι ξέρουμε για τις λύσεις ενός ομογενούς συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων; Πότε έχουμε μη τετριμμένη λύση; Με τον προσδιορισμό της ορίζουσας (**Υπόδειξη:** με τη χρήση της εντολής Det) των συντελεστών, δηλαδή της ορίζουσας του μητρώου που προαναφέρθηκε και ήδη υπολογίσθηκε, να αποδειχθεί ότι οι αποδεκτές τιμές της σταθεράς ρ για μη τετριμμένες (δηλαδή για μη μηδενικές) λύσεις είναι απλά οι λύσεις της στοιχειώδους υπερβατικής εξίσωσης

$$\sin L\rho = 0. \quad (6)$$

(θ) Μπορεί άμεσα (με την εντολή Solve) να υπολογίσει η *Mathematica* τις λύσεις (τις τιμές του ρ) που ζητάμε στην εξίσωση (6); Τι ισχυρίζεται; Άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή

`solp = Solve[L p == n Pi, p]`

(με το σύμβολο `solp` να έχει υιοθετηθεί αυθαίρετα) για την εύρεση των κατάλληλων τιμών της σταθεράς p , που καλούνται και **ιδιοτιμές** ή **χαρακτηριστικές τιμές** στο πρόβλημά μας. Αρκούμε προφανώς, στις θετικές ιδιοτιμές. Γιατί μπορούμε να αγνοήσουμε τις αρνητικές ιδιοτιμές; Τι συμβαίνει ειδικά με την τιμή $p = 0$;

(i) Έχουμε τώρα τη δυνατότητα να αντικαταστήσουμε τις τιμές του p (την έκφραση `solp`) στις συνοριακές εξισώσεις μας διαπιστώνοντας ότι πρέπει να έχουμε $C_1 = 0$, δηλαδή να μην έχουμε συνημιτονικό όρο στη χωρική συνάρτηση $F(x)$. Προτιμάμε επίσης τη χρήση του συμβολισμού B_n για την σταθερά C_2 (του ημιτονικού όρου) που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή p_n . Ποια είναι επομένως η τελική έκφραση $F_n(x)$ της χωρικής συναρτήσεως $F(x)$ που αντιστοιχεί στην n -στή ιδιοτιμή p_n ;

(ια) Πολλαπλασιάζουμε τώρα την χωρική λύση $F_n(x)$ επί τη χρονική λύση $G_n(t)$, την τελευταία αφού αγνοήσουμε τη σχετική σταθερά. Γιατί δε χρειαζόμαστε τη σταθερά αυτή; Έχουμε επομένως τελικά την εξής **ιδιοσυνάρτηση** (ή **χαρακτηριστική συνάρτηση**):

$$u_n(x, t) = F_n(x)G_n(t), \quad (7)$$

που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή p_n . Ποια είναι η πλήρης έκφραση της $u_n(x, t)$; Ικανοποιείται η διαφορική μας εξίσωση (1); Οι συνοριακές συνθήκες (2); Τι απομένει;

(ιβ) Προφανώς απομένει η πλήρωση και της αρχικής μας συνθήκης (3) με τη χρήση και της εξισώσεως (4) για τη γνωστή αρχική θερμοκρασιακή κατανομή $f(x)$. (Γιατί η αρχική συνθήκη είναι μόνο μία, ενώ οι συνοριακές συνθήκες είναι δύο;) Προς το σκοπό αυτό παίρνουμε την αρχική μας άγνωστη συνάρτηση $u(x, t)$ υπό τη μορφή

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad (8)$$

ή μάλλον προσεγγιστικά με N όρους στο άθροισμα αντί για άπειρους όρους. Δηλαδή εν προκειμένω επιλέγουμε $N = 8$ εν γνώσει μας ότι κάνουμε προσέγγιση με χρήση της συναρτήσεως

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{n=1}^8 u_n(x, t). \quad (9)$$

Είναι και η συνάρτηση αυτή λύση της αρχικής διαφορικής εξισώσεως (1); Γιατί; Ποια είναι η αναλυτικότερη έκφραση της ίδιας συναρτήσεως; (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `Sum`.) Ποια είναι η αρχική (για $t = 0$) έκφραση της ίδιας συναρτήσεως;

(ιγ) Ασφαλώς οι άγνωστοι συντελεστές B_n στις συναρτήσεις $u_n(x, t)$ θα υπολογισθούν σαν συντελεστές Fourier σε ημιτονική σειρά Fourier (όπως πράγματι είναι η σειρά (8) και το άθροισμα (9) προσεγγιστικά) από τους γνωστούς τύπους (για το διάστημα $[0, L]$ φυσικά). Να υπολογισθούν οι αριθμητικές τιμές των συντελεστών αυτών (με $n = 1, 2, \dots, 8$) για $L = 1$. (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές `Integrate`, `Table` και `N`.)

(ιδ) Τελικά, υποθέτοντας ότι $L = 1$ και $c = 0.2$, ποια είναι η έκφραση της συναρτήσεως $\tilde{u}(x, t)$ (με αριθμητικούς συντελεστές πέρα από τις μεταβλητές x και t);

(ιε) Έχουν ίσως νόημα και οι σχετικές γραφικές παραστάσεις. Καταρχήν ζητείται η σχεδίαση σε ένα μόνο σχήμα (με χρήση της εντολής `Plot`) της θερμοκρασιακής κατανομής στην υποτιθέμενη ράβδο μας για $t = 0, 1, 2, 3, 4$ με τη χρήση της προσεγγίσεως $\tilde{u}(x, t)$ του προηγούμενου ερωτήματος. Τι παρατηρείται; Πού τείνει η θερμοκρασία σε όλα τα σημεία της ράβδου καθώς περνάει ο χρόνος; Γιατί; (και μαθηματικά και φυσικά). Πώς μετακινείται το μέγιστο της θερμοκρασίας; Γιατί;

(ιστ) Στο σχήμα του προηγούμενου ερωτήματος ζητείται επιπλέον η προσθήκη του τίτλου «TEMPERATURE OF THE BAR» και των ενδείξεων «Position» και «Temperature» στους δύο άξονες. (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι επιλογές `PlotLabel` και `AxesLabel` της εντολής `Plot` αντίστοιχα.)

(ιζ) Στη συνέχεια ζητείται και η τριδιάστατη παράσταση της θερμοκρασιακής κατανομής στη ράβδο για $0 \leq x \leq 1$ βέβαια και $0 \leq t \leq 4$. (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Plot3D.) Ο τίτλος κι οι ενδείξεις στους άξονες να παραμείνουν όπως και στο προηγούμενο ερώτημα με την προφανή προσθήκη και της ενδείξεως «Time» στον τρίτο άξονα που εισαγάγαμε στο παρόν ερώτημα. Το ίδιο ακριβώς σχήμα ζητείται να γίνει και από το «σημείο παρατηρήσεως» $(0, -6, 2.5)$. (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η επιλογή ViewPoint της εντολής Plot.) Ποια συμπεράσματα εξάγονται και πάλι από το παρόν ερώτημα για την πορεία της θερμοκρασιακής κατανομής στη ράβδο συναρτήσει του χρόνου; Τι θα γίνει, αν αυξηθεί η σταθερά c στη βασική διαφορική μας εξίσωση (1); Από ενεργειακής απόψεως πώς εξηγείται το όλο φαινόμενο; Τι θα συνέβαινε, αν η ράβδος ήταν θερμικά μονωμένη στα άκρα της; Ποια εικάζεται ότι θα ήταν η τελική θερμοκρασιακή κατανομή (για $t \rightarrow \infty$);

(ιη) Τέλος ποιες είναι οι πληροφορίες για την εντολή Plot που παίρνουμε με την εντολή ?Plot; Ποιες είναι οι επιλογές της εντολής Plot; (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Options[Plot].)

ΟΜΑΔΑ ΕΜΙΙΙ-D

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-D1 ([Y] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Γενικά): Να μελετηθεί η εντολή DSolve της Mathematica κυρίως όσον αφορά στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Στη συνέχεια να βρεθούν οι γενικές λύσεις (σε όσο βαθμό είναι αυτό δυνατόν) και να επαληθευθούν τα αποτελέσματα στις εξής διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους:

$$2 \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = z - 1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + \frac{2}{xy}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2} + \frac{\partial y}{\partial x_3} = 0, \quad (4)$$

$$x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} = e^{x_1 x_2}, \quad (5)$$

$$2 \frac{\partial y}{\partial x_1} + 3 \frac{\partial y}{\partial x_2} = x_1 x_2 e^y. \quad (6)$$

Ζητούνται επίσης: (α) Τι παριστάνει το σύμβολο C[1] στις λύσεις των πιο πάνω διαφορικών εξισώσεων; (β) Ποια είναι η υπερβατική συνάρτηση που παρουσιάζεται στη λύση της εξισώσεως (5); Τι μπορείτε να μάθετε γι' αυτήν; (γ) Τι παρατήρηση κάνει η Mathematica για τη λύση της εξισώσεως (6); Ισχύει η λύση αυτή; Πού πιθανώς πάσχει;

Τελικά τι γνώμη έχετε για τις ικανότητες της Mathematica να λύνει διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους αναλυτικά; Πού πάσχει η όλη διαδικασία όσον αφορά σε πρακτικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού, αφού βέβαια αυτά διαμορφωθούν προηγουμένως κατάλληλα και προκύψουν οι σχετικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-D2 ([X και Y] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Δυναμική): Ποια είναι η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος ή εξίσωση της χορδής (με το συνηθισμένο συμβολισμό); Τι παριστάνουν οι ανεξάρτητες μεταβλητές x και t και τί η εξαρτημένη μεταβλητή u ; Με τη χρήση της Mathematica (εντολή DSolve) να βρεθεί η «γενική» λύση (χωρίς αρχικές και συνοριακές συνθήκες) της εξισώσεως της χορδής και να εξηγηθεί ο σχετικός συμβολισμός. Να γίνει επίσης επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε. Τέλος σε ποια ειδικά προβλήματα δυναμικής φορτίσεως της συνήθους δοκού απαντάται η ίδια διαφορική εξίσωση: της χορδής; Αντίθετα τι συμβαίνει στη συνήθη περίπτωση της εγκάρσιας (καμπτικής) φορτίσεως της συνήθους δοκού;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-D3 ([X και Y] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Κλασική Μηχανική, Μετάδοση Θερμότητας, Ρευστομηχανική, Μηχανική των Υλικών: Επίπεδο Ελαστικό Πρόβλημα, Στρέψη): Ανάλογη άσκηση για τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Ποια είναι αυτή και σε ποια προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού απαντάται; (Να αναφερθούν έξι τουλάχιστον παραδείγματα.) Με τη χρήση του πακέτου Calculus'VectorAnalysis' της Mathematica και ειδικότερα της εντολής Laplacian (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες και στο επίπεδο xy) να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης του Laplace (με τη χρήση της εντολής DSolve). Στη συνέχεια να επαληθευθεί το αποτέλεσμα (η λύση) (α) με σύγκριση με τη γνωστή αναλυτική λύση και (β) με τη Mathematica και πάλι (δηλαδή με την εντολή Laplacian να εφαρμόζεται στη λύση).

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-D4: ([X και Y] Αρμονικές Συναρτήσεις, Εξίσωση του Laplace): Να ελεγχθεί εάν ή όχι κάθε συνάρτηση της μορφής

$$u(x, y) = f(x + iy) + g(x - iy)$$

(με $i = \sqrt{-1}$ τη φανταστική μονάδα και $f(z)$ και $g(z)$ δύο κατάλληλα παραγωγίσιμες αυθαίρετες συναρτήσεις μιας μεταβλητής) επαληθεύει την εξίσωση του Laplace

$$\Delta u(x, y) \equiv \nabla^2 u(x, y) = 0$$

στις δύο διαστάσεις (x, y) . Πώς μπορούμε να έχουμε πραγματικές λύσεις $u(x, y)$, δηλαδή αρμονικές συναρτήσεις, από την παραπάνω γενική λύση; Γιατί συνήθως περιοριζόμαστε σε πραγματικές λύσεις; Τέλος να ελεγχθεί εάν μπορεί να βρεθεί η παραπάνω γενική λύση $u(x, y)$ της εξίσωσης του Laplace με τη χρήση της εντολής DSolve στη Mathematica.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-D5 ([X]: Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (partial differential equation) της συνήθους δοκού (beam) μήκους L υπό δυναμική καταπόνηση $p(x, t)$

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < L,$$

με $v = v(x, t)$ το βέλος κάμψης και χωρίς κάθετη κατανεμημένη φόρτιση: $p(x, t) \equiv 0$ (ιδιοταλαντώσεις και ελεύθερες ταλαντώσεις). Η δυσκαμψία EI και η γραμμική πυκνότητα ρA της δοκού θεωρούνται σταθερές. Ζητούνται: (α) Να ερμηνευθεί η διαφορική αυτή εξίσωση με βάση την αντίστοιχη εξίσωση υπό στατικές συνθήκες. (β) Να εφαρμοσθεί η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών στην ίδια διαφορική εξίσωση μέχρι του σημείου του προσδιορισμού δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων (μιας χωρικής και μιας χρονικής) και των γενικών λύσεών τους. (γ) Να βρεθεί η γενική λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-D6 ([X και Y]: Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (partial differential equation) beam pde της συνήθους δοκού (beam) μήκους L

$$EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t), \quad t > 0, \quad 0 < x < L,$$

με $v = v(x, t)$ το βέλος κάμψης και με φόρτιση την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, t)$. Τόσο η δυσκαμψία EI όσο και η γραμμική πυκνότητα ρA της δοκού θεωρούνται σταθερές. Ζητούνται: (α) Να ορισθεί στη Mathematica η εξίσωση αυτή beam pde. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{beam pde} = EI \text{ D}[u[x, t], \{x, 4\}] + \rho A \text{ D}[u[x, t], \{t, 2\}] == p[x, t]$$

(το ρ με Esc r Esc, τα EI και ρA με ενιαία σύμβολα EI και ρA αντίστοιχα, όχι με γινόμενα). (β) Να δοθούν (στη Mathematica σε λίστα beam pde list) όλοι οι χαρακτηρισμοί της εξίσωσης αυτής (ο καθένας τους μέσα σε εισαγωγικά στη λίστα αυτή. Γιατί σε εισαγωγικά;). (γ) Ποια είναι η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση beam pde h; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{beamPdeh} = \text{beamPde} /. \rho[x, t] \rightarrow 0$$

(δ) Να γίνει χωρισμός μεταβλητών: x (θέση) και t (χρόνος). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$u[x_, t_] = X[x] T[t]$$

και στη συνέχεια η εντολή

$$\text{beamPdeh}$$

Τι δηλώνει η τελευταία αυτή εντολή; Στη συνέχεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{eq1} = \text{Apart}[\text{beamPdeh}[[1]]/(X[x] T[t])] == 0$$

για να χωρισθούν οι δύο μεταβλητές x και t σε διαφορετικά κλάσματα. Καλός είναι και ορισμός του βοηθητικού συμβόλου b μέσω του τύπου

$$b = \sqrt[4]{\frac{EI}{\rho A}}.$$

Υπόδειξη: Στη *Mathematica* αρκεί να χρησιμοποιηθεί κατευθείαν η εξής εντολή (με τα EI και ρA ενιαία σύμβολα, όχι γινόμενα):

$$\text{eq2} = (\text{eq1}[[1]] /. EI \rightarrow \rho A b^4) / \rho A == 0 // \text{Simplify}$$

Ακόμα πιο καθαρά φαίνεται ο χωρισμός των μεταβλητών με την εντολή

$$\text{eq3} = \text{eq2}[[1, 1]] == -\text{eq2}[[1, 2]] == \lambda$$

που δίνει τη σχετική τελική ισότητα δύο κλασμάτων με ίσες τιμές λ .

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-D7 ($[X$ και $Y]$ Δυναμική των Κατασκευών: Συνεχή Συστήματα: Δοκοί: Αξονικές (Διαμήκεις) Ιδιοταλαντώσεις, Στρεπτικές Ιδιοταλαντώσεις, Καμπικές Ιδιοταλαντώσεις, Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος: Εξίσωση της Χορδής): Θεωρούμε την τόσο κλασική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση (displacement) $u = u(x, t)$, x τη θέση, t το χρόνο και c θετική πραγματική σταθερά. Ζητούνται: (α) Πόσες και ποιες είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές; Η εξαρτημένη μεταβλητή; (β) Τι τάξεως είναι η διαφορική αυτή εξίσωση; Είναι γραμμική ή όχι; Ομογενής ή όχι; Υπερβολική, παραβολική ή ελλειπτική; Γιατί; (γ) Πού απαντάται σε προβλήματα ταλαντώσεων χορδών; Σε τι ακριβώς διαφέρει μια χορδή από μια δοκό; (δ) Πού απαντάται σε προβλήματα ιδιοταλαντώσεων δοκών στη Δυναμική των Κατασκευών; **Υπόδειξη:** Τόσο σε αξονικές (διαμήκεις) όσο και σε στρεπτικές ιδιοταλαντώσεις. Σε ποιο έτος σπουδών διδάσκεται το μάθημα Δυναμική των Κατασκευών; (ε) Ποια είναι η ερμηνεία της σταθεράς c (από ποια μεγέθη εξαρτάται) και στις τρεις αυτές περιπτώσεις; (στ) Γιατί μιλάμε για ιδιοταλαντώσεις και όχι απλά για ταλαντώσεις όσον αφορά στη συγκεκριμένη διαφορική εξίσωση; (ζ) Να γραφεί η παραπάνω διαφορική εξίσωση στη *Mathematica* με τη χρήση του συμβόλου pde , που μπορεί να σημαίνει partial differential equation. (η) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση pde . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή DSolve ως εξής:

$$\text{displacement} = \text{DSolve}[\text{pde}, u[x,t], \{x,t\}]$$

Πού υπάρχει λίστα στην παραπάνω εντολή; Γιατί υπάρχει; Υπήρχε (στην ίδια θέση) και στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ; (θ) Για τη λύση που βρέθηκε πρόκειται για γενική ή για μερική (ειδική) λύση; Έχει αυθαίρετες σταθερές C_k ή αυθαίρετες συναρτήσεις $C_k(y)$; Πόσες είναι αυτές; Γιατί; Γιατί έχουμε αυθαίρετες συναρτήσεις και όχι απλά αυθαίρετες σταθερές; Ποια καλή ιδιότητα πρέπει να έχουν (μάλлон υποτίθεται ότι έχουν) οι αυθαίρετες συναρτήσεις $C_k(y)$; (ι) Η λύση που βρέθηκε να δηλωθεί σαν συνάρτηση $u_s(x, t)$ στη *Mathematica*. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`us[x_,t_] = displacement[[1,1,2]]`

(Χρειάζονται και οι δύο τελείες, τα επεξηγηματικά, πριν το ίσον; Γιατί δε μπήκαν στην πιο πάνω εντολή;) Τι ακριβώς δηλώνεται με τον προσδιορισμό `[[1,1,2]]` στη λίστα `displacement` (με λεπτομέρειες); Θα μπορούσε να είχε χρησιμοποιηθεί και η Ελληνική λέξη μετατοπιση αντί για την Αγγλική λέξη `displacement`; Γιατί; Και ο τόνος στο ο: μετατόπιση; Γιατί; (ια) Ο Πολιτικός Μηχανικός αναλαμβάνει τεχνικά έργα, πρέπει να είναι υπεύθυνος και ασφαλώς να ελέγχει τα αποτελέσματά του. Εδώ ζητείται να επαληθευθεί η λύση $u_s(x, t)$ που βρέθηκε. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`ver = pde/.u -> us//Simplify`

(το σύμβολο `ver` προφανώς επιλέχθηκε από τη λέξη `verification`, επαλήθευση) και να εξηγηθεί πλήρως η εντολή αυτή. Τι αποτέλεσμα προκύπτει; Χρειάζεται πραγματικά και η απλοποίηση με την εντολή `Simplify`; (ιβ) Παραπέρα η γενική λύση που βρέθηκε μάλλον είναι σωστή, αλλά δεν παύει να είναι γενική. Ποια επιπλέον στοιχεία χρειάζεται να έχει στη διάθεσή του ο Πολιτικός Μηχανικός, ώστε να βρει τη μερική (ειδική) λύση της ίδιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους `pde` σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα ιδιοταλαντούμενης (αξονικά ή στρεπτικά) δοκού; (ιγ) Τι θα άλλαζε στην περίπτωση καμπτικών ιδιοταλαντώσεων της δοκού, δηλαδή πώς μπορεί να γραφεί η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους `pdeb` (το `b` προέρχεται από την λέξη `bending`, κάμψη). (ιδ) Στην περίπτωση ταλαντώσεων της δοκού υπό την επίδραση και εξωτερικών φορτίσεων στις αξονικές ή στις στρεπτικές ή στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις; (ιε) Αρκετά συχνά ο Πολιτικός Μηχανικός συναντάει την εξίσωση του Laplace στα προβλήματά του. Πώς ακριβώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η γενική λύση $u_s(x, t)$ που βρέθηκε και επαληθεύθηκε πιο πάνω στην περίπτωση της εξίσωσης του Laplace κατευθείαν, δηλαδή χωρίς νέους υπολογισμούς; (ιστ) Πού πάσχει η διαδικασία αυτή και ποια είναι η σχετική (και ιδιαίτερα ευχερής) «θεραπεία»;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-DB8: (*X και Y Διαρμονική Εξίσωση, Διαρμονικές Συναρτήσεις, Τασική Συνάρτηση του Airy*): (α) Να ελεγχθεί εάν ή όχι κάθε συνάρτηση της μορφής

$$A(x, y) = (x - iy)\varphi(x + iy) + (x + iy)\varphi(x - iy) + \chi(x + iy) + \chi(x - iy)$$

(με $i = \sqrt{-1}$ τη φανταστική μονάδα και $\varphi(z)$ και $\chi(z)$ δύο επαρκώς παραγωγίσιμες πραγματικές αυθαίρετες, γενικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) επαληθεύει τη διαρμονική εξίσωση

$$\Delta^2 A(x, y) \equiv \nabla^4 A(x, y) = 0$$

στις δύο διαστάσεις (x, y) και επομένως είναι κατάλληλη σαν τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$ στην Επίπεδη Ελαστικότητα για το στατικό πρόβλημα. Η έκφραση αυτή της λύσεως της διαρμονικής εξίσωσης οφείλεται στον E. Goursat, «Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$ » («Επί της εξίσωσης $\Delta\Delta u = 0$ »), *Bulletin de la Société Mathématique de France*, Vol. **26**, σ. 236, 1898, και έχει αποτελέσει τη βάση της χρήσεως της μιγαδικής μεθόδου στη Θεωρία της Επίπεδης Ελαστικότητας αρχικά από τους Koloson και Muskhelishvili στις αρχές του προηγούμενου αιώνα. Και σήμερα η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη και αποτελεσματική στην ανάλυση επίπεδων προβλημάτων στην Ελαστικότητα υπό στατικές συνθήκες. (β) Πόσες αυθαίρετες συναρτήσεις έχει η παραπάνω έκφραση; (γ) Είμαστε πράγματι βέβαιοι ότι έχουμε πραγματικές λύσεις, δηλαδή πραγματικές διαρμονικές συναρτήσεις για την τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$, στην πιο πάνω γενική λύση; Γιατί συνήθως περιοριζόμαστε σε πραγματικές λύσεις; Πώς μπορεί να γραφεί απλούστερα η πιο πάνω γενική έκφραση της τασικής συνάρτησεως $A(x, y)$; (δ) Εάν δεν ενδιαφερόμασταν για πραγματικές λύσεις, ποια απλούστερη έκφραση $A^*(x, y)$ θα είχαμε χρησιμοποιήσει; (ε) Τέλος να ελεγχθεί εάν μπορεί να βρεθεί η γενική μιγαδική λύση της διαρμονικής εξίσωσης $\Delta^2 A^*(x, y) = 0$ στις δύο διαστάσεις με τη χρήση της εντολής `DSolve` στη *Mathematica*.

ΟΜΑΔΑ ΕΜΙΙΙ-Ε

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ε1 (Υ Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Μετάδοση Θερμότητας): Να γίνει απόπειρα επιλύσεως με τη *Mathematica* (εντολή *DSolve* και πάλι) της κλασικής μονοδιάστατης εξισώσεως της διαχύσεως (π.χ. στη Μετάδοση Θερμότητας) με σκοπό την εύρεση της γενικής της λύσεως. Επιτυγχάνει ή όχι η *Mathematica* στην προσπάθειά της αυτή; Γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ε2 (ΙΧ και Υ Επίπεδη Ελαστικότητα, Δοκοί: Αμφιέριστη Δοκός): Στην Επίπεδη Ελαστικότητα (όχι στην Τεχνική Θεωρία της Κάμψεως, όπου εισάγονται ουσιώδεις απλοποιήσεις) θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα της αμφιέριστης λεπτής δοκού (με άρθρωση αριστερά και κύλιση δεξιά ή αντίστροφα) ορθογωνικής διατομής, δυσκαμψίας EI , με λόγο του Poisson του υλικού της ν (Προσοχή, το ν στο λόγο του Poisson μοιάζει, αν και δεν είναι ακριβώς ίδιο, με το ν στις μετατοπίσεις. Να μη γίνεται σύγχυση!), μήκους $2L$ και ύψους $2c$ υπό την επίδραση σταθερού κατανεμημένου θλιπτικού φορτίου q στην πάνω πλευρά της δοκού. Στο πρόβλημα αυτό οι δύο μετατοπίσεις $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ των σημείων της δοκού δίνονται από τους εξής τύπους:⁵

$$u(x, y) = \frac{q}{2EI} \left[\left(L^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) y + x \left(\frac{2}{3} y^3 - \frac{2}{5} c^2 y \right) + \nu x \left(\frac{1}{3} y^3 - c^2 y + \frac{2}{3} c^3 \right) \right], \quad (7)$$

$$v(x, y) = -\frac{q}{2EI} \left[\frac{y^4}{12} - \frac{1}{2} c^2 y^2 + \frac{2}{3} c^3 y + \nu \left((L^2 - x^2) \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{6} - \frac{1}{5} c^2 y^2 \right) \right] \quad (8)$$

$$+ \frac{1}{2} L^2 x^2 - \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{5} c^2 x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} \nu \right) c^2 x^2 \Big] + \delta \quad (9)$$

με το δ σταθερά. Ζητούνται: (α) Να καθορισθούν οι συντεταγμένες (x, y, z) στο πακέτο *Vector-Analysis* (που υποτίθεται ότι έχει ήδη φορτωθεί) σαν Καρτεσιανές. (β) Να ελεγχθεί κατά πόσον οι πιο πάνω εκφράσεις των μετατοπίσεων u και v είναι αρμονικές συναρτήσεις (δηλαδή επαληθεύουν τη διαφορική εξίσωση του Laplace στις δύο διαστάσεις) τόσο με το συνηθισμένο τρόπο όσο και με τη χρήση της εντολής *Map*. (γ) Ανάλογα για το κατά πόσον είναι διαρμονικές συναρτήσεις και πάλι και με τους δύο τρόπους που προαναφέρθηκαν. Τι συμπέρασμα εξάγεται τελικά; (δ) Γιατί είναι χρήσιμη η εντολή *Map*; (ε) Θεωρητικά μιλώντας (χωρίς πια υπολογισμούς), αν οι μετατοπίσεις u και v είναι διαρμονικές συναρτήσεις, πρέπει άραγε και οι συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων (απλούστερα οι παραμορφώσεις) ϵ_x, ϵ_y και $\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx}$ να είναι και αυτές διαρμονικές συναρτήσεις; Γιατί; Και οι συνιστώσες του τανυστή των τάσεων (απλούστερα οι τάσεις) σ_x, σ_y και $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; Γιατί; **Υπόδειξη:** Μάλλον πρέπει (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες μόνο) υπό τις συνηθισμένες συνθήκες και παραδοχές (χωρίς όμως δυνάμεις μάζας, όπως είναι το ίδιο βάρος) στο στατικό πρόβλημα της Επίπεδης Ελαστικότητας.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ε3 (ΙΧ και Υ Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Μέθοδος του d'Alembert, Εξίσωση του Poisson. Μηχανική των Υλικών: Στρέψη): Στο πρόβλημα της στρέψεως μιας ευθύγραμμης, ομογενούς, γραμμικά ελαστικής ράβδου μήκους L (με $0 \leq z \leq L$) και σταθερής διατομής S (στο επίπεδο Oxy) στη Μηχανική των Υλικών απαντάται η γνωστή εξίσωση του Poisson

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = F(x, y) \quad \text{με} \quad F(x, y) = -2G\theta \quad (\text{σταθερά}) \quad \text{και} \quad (x, y) \in S$$

(με $\nabla^2 \equiv \Delta$ το γνωστό τελεστή του Laplace, G το μέτρο διατμήσεως του ελαστικού υλικού και θ τη (σταθερή) γωνία στρέψεως ανά μονάδα μήκους. Η συνάρτηση $\varphi(x, y)$ καλείται **τασιακή συνάρτηση**

⁵Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity* (Θεωρία Ελαστικότητας), 3η έκδοση. McGraw-Hill, New York, Tokyo, 1970, Ενότητα 22 (Bending of a beam by uniform load, Κάμψη δοκού από ομοιόμορφο φορτίο), σσ. 46-50 (1η έκδοση το 1934, Engineering Societies Monographs).

(όπως υποδείχθηκε από τον Prandtl το 1903), γιατί από αυτήν προκύπτουν εύκολα και οι δύο τάσεις (εδώ διατμητικές βέβαια!) στο παρόν πρόβλημα μέσω των απλών τύπων

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \quad \text{με } (x, y) \in S.$$

Εδώ ζητούνται: (α) Η γενική λύση της παραπάνω εξισώσεως του Poisson (ασφαλώς για πραγματική τασική συνάρτηση $\varphi(x, y)$) υποχρεωτικά με κατάλληλη (και εξαρχής τροποποιημένη) χρήση της μεθόδου του d'Alembert για την εξίσωση της χορδής. (Ποια είναι η αντιστοιχία των σταθερών;) (β) Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε την πιο πάνω εξίσωση του Poisson σε εξίσωση του Laplace ακριβώς για το ίδιο πρόβλημα; (γ) Σαν εφαρμογή να γίνουν ο υπολογισμός των διατμητικών τάσεων και ο έλεγχος της ισχύος της παραπάνω διαφορικής εξισώσεως καθώς και των εξισώσεων ισορροπίας στο παρόν πρόβλημα στρέψεως στην ειδική περίπτωση όπου

$$\varphi(x, y) = -\frac{G\theta}{2} \left[(x^2 + y^2) - \frac{1}{a}(x^3 - 3xy^2) + b \right] \quad \text{με } (x, y) \in S$$

και με τα a και b δύο σταθερές (με τι φυσικές διαστάσεις;). (δ) Τι (πολύ σημαντικό για τον Πολιτικό Μηχανικό) παραλείψαμε να αναφέρουμε (εδώ εκ προθέσεως) στα πιο πάνω ερωτήματα;

ΟΜΑΔΑ EMIII-F

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-F1 (*[X και Y] Μηχανική των Υλικών: Τεχνική Θεωρία Κάμψεως, Συνήθεις Δοκοί*): Για ένα συνήθη πρόβλημα με πάκτωση στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και ελεύθερο το δεξιό άκρο του $x = L$ ζητούνται: (α) Οι ιδιοσυχνότητες ταλαντώσεως ω_n . (β) Οι ιδιομορφές ταλαντώσεως $X_n(x)$. (γ) Η επαλήθευση της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών σε τρεις συγκεκριμένες περιπτώσεις (όχι γενικά). (δ) Η απόκριση σε αυθαίρετη εξωτερική φόρτιση $p(x, t)$ με μηδενικές αρχικές συνθήκες.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-F2 (*[X] Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος, Μη Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες*): Ζητείται η επίλυση της μονοδιάστατης εξισώσεως του κύματος (ή εξισώσεως της χορδής), που είναι φυσικά μια ομογενής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, στο διάστημα $0 < x < L$, για $t > 0$ και υπό τις μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = U_1 \quad \text{και} \quad u(L, t) = U_2$$

με τις σταθερές U_1 και U_2 γνωστές. Ισχύουν επίσης και οι αρχικές συνθήκες (για $t = 0$)

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

με τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ αυθαίρετες κατάλληλες γνωστές συναρτήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-F3 (*[X] Μη Ομογενής Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος*): Ζητείται η επίλυση της μη ομογενούς μονοδιάστατης εξισώσεως του κύματος (ή εξισώσεως της χορδής), δηλαδή με επιπλέον όρο $p(x, t)$ στο δεξιό μέλος της, που είναι φυσικά μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, στο διάστημα $0 < x < L$, για $t > 0$ και υπό τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = 0 \quad \text{και} \quad u(L, t) = 0.$$

Ισχύουν επίσης και οι αρχικές συνθήκες (για $t = 0$)

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

με τις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ αυθαίρετες κατάλληλες γνωστές συναρτήσεις. Τι δηλώνει εδώ ο επιπλέον όρος $p(x, t)$; (Δηλαδή ποια είναι η φυσική σημασία του;)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F4 (*[X και Y] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους. Μηχανική των Υλικών: Τεχνική Θεωρία Κάμψεως: Δοκοί*): Εδώ θεωρούμε τις ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις συνήθους δοκού γραμμικής πυκνότητας ρA και δυσκαμψίας EI . Ζητούνται: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση BeamPDE ως προς το βέλος κάμψεως $v(x, t)$ με x τη θέση κατά μήκος της δοκού και t το χρόνο. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{BeamPDE} = EI D[v[x, t], \{x, 4\}] + \rho A D[v[x, t], \{t, 2\}] == 0$$

(β) Ο μετασχηματισμός Laplace LT της εξίσωσης αυτής ως προς το χρόνο t . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{LT} = \text{LaplaceTransform}[\text{BeamPDE}, t, s]$$

(γ) Ο ίδιος μετασχηματισμός Laplace με αντικατάσταση του μετασχηματισμού Laplace του βέλους κάμψεως $v(x, t)$ ως προς το χρόνο t με το σύμβολο $V(x, s)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{LT1} = \text{LT} /. \text{LaplaceTransform}[v[x, t], t, s] \rightarrow V[x, s]$$

(δ) Η δήλωση (αντικατάσταση) subs ότι ο μετασχηματισμός Laplace της τέταρτης χωρικής μερικής παραγώγου του βέλους κάμψεως $v(x, t)$ είναι ίσος με την τέταρτη παράγωγο (ως προς x εννοείται) του μετασχηματισμού Laplace $V(x, s)$ (ως προς το χρόνο t). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{subs} = \text{LaplaceTransform}[D[v[x, t], \{x, 4\}], t, s] \rightarrow D[V[x, s], \{x, 4\}]$$

(ε) Η χρήση αυτής της ιδιότητας subs του μετασχηματισμού Laplace στο μετασχηματισμό Laplace LT1, που ήδη βρέθηκε στο ερώτημα (γ). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{LT2} = \text{LT1} /. \text{subs}$$

Πρόκειται βέβαια για συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς τη θέση x . (στ) Η γενική λύση sol της συνήθους διαφορικής αυτής εξίσωσης. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{sol} = \text{DSolve}[\text{LT2}, V[x, s], x] // \text{Simplify}$$

(ζ) Εναλλακτική δυνατότητα προσφέρει και δεύτερη χρήση του μετασχηματισμού Laplace, τώρα όμως ως προς τη θέση x και με τη νέα μεταβλητή του μετασχηματισμού Laplace να δηλώνεται τώρα με σ (και όχι πια με s). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{LT3} = \text{LaplaceTransform}[\text{LT2}, x, \sigma]$$

Πρόκειται τώρα βέβαια για μια πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση. (η) Τέλος ζητείται η λύση solLT3 της αλγεβρικής αυτής εξίσωσης. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{solLT3} = \text{Solve}[\text{LT3}, \text{LaplaceTransform}[V[x, s], x, \sigma]]$$

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F5 (*[X και Y] Διδιάστατη Εξίσωση του Laplace*): Για τη διδιάστατη εξίσωση του Laplace με άγνωστη συνάρτηση τη u και ανεξάρτητες μεταβλητές τις x και y ζητούνται: (α) Να δηλωθεί αυτή πλήρως με το σύμβολο LaplacePDE. (β) Να δοθούν επτά χαρακτηρισμοί της σε λίστα char1. (γ) Να δηλωθούν οι δύο συναρτήσεις

$$u_1(x, y) = A \cosh ax \cos ay \quad \text{και} \quad u_2(x, y) = B \sinh bx \sin by$$

(με τα A, a, B και b σταθερές) σε λίστα με δύο στοιχεία. (δ) Στη συνέχεια να επαληθευθεί σε λίστα ver επίσης με δύο στοιχεία ότι και οι δύο αυτές συναρτήσεις $u_{1,2}$ επαληθεύουν την πιο πάνω εξίσωση του Laplace. (ε) Ανάλογα ερωτήματα τώρα για το γραμμικό συνδυασμό

$$u_s(x, y) = c_1 u_1(x, y) + c_2 u_2(x, y).$$

(στ) Να φορτωθεί το πακέτο της Mathematica για τη Διανυσματική Ανάλυση. Στη συνέχεια να δηλωθούν σ' αυτό Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) . (ζ) Υποχρεωτικά με τη βοήθεια του πακέτου

αυτού να βρεθεί η διδιάστατη εξίσωση του Laplace, η οποία δηλώνεται τώρα σαν LaplacePDEa. (η) Να ελεγχθεί η σύμπτωση των εξισώσεων του Laplace LaplacePDE και LaplacePDEa.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-F6 ([X και Y] Διδιάστατη Εξίσωση του Poisson, Στρέψη: Τασική Συνάρτηση του Prandtl): Θεωρούμε το πρόβλημα της στρέψεως συνήθους ράβδου με μέτρο διατμήσεως G . Η γωνία στρέψεως ανά μονάδα μήκους (σε rad/m) είναι σταθερή και ίση με θ . Ζητούνται: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση TorsionPDE για την τασική συνάρτηση του Prandtl $\varphi = \varphi(x, y)$ πάνω στη διατομή της ράβδου. (β) Να δοθούν επτά χαρακτηρισμοί της σε λίστα char. (γ) Να δηλωθούν οι συναρτήσεις

$$\varphi_1(x, y) = -G\theta x^2 \quad \text{και} \quad \varphi_2(x, y) = -G\theta y^2$$

σε λίστα με δύο στοιχεία. (δ) Στη συνέχεια να επαληθευθεί σε λίστα verf ότι και οι δύο αυτές συναρτήσεις $\varphi_{1,2}$ επαληθεύουν την πιο πάνω εξίσωση TorsionPDE. (ε) Να δηλωθεί κατάλληλα σαν συνάρτηση το άθροισμα $\varphi_t = \varphi_1 + \varphi_2$ με τη χρήση και της εντολής παραγοντοποίησης στον ορισμό του. (στ) Να γίνει έλεγχος verf για το εάν το άθροισμα αυτό επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση TorsionPDE ή όχι με τη χρήση και της εντολής απλοποίησης. (ζ) Ερώτημα απόλυτα ανάλογο με το (ε) τώρα και για το αντίστοιχο ημίαθροισμα $\varphi_s = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$. (η) Ερώτημα απόλυτα ανάλογο με το (στ) για τη συνάρτηση φ_s , τώρα με τη χρήση του συμβόλου vers για την επαλήθευση.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-F7 ([X και Y] Διδιάστατη Εξίσωση του Poisson, Στρέψη: Τασική Συνάρτηση του Prandtl): Συνεχίζοντας την προηγούμενη άσκηση, ζητούνται επίσης: (α) Η γενική λύση sol1 της διαφορικής εξίσωσης TorsionPDE με χρήση της εντολής DSolve. (β) Η κατάλληλη δήλωση της λύσεως αυτής sol1 σαν συνάρτηση $\varphi_g(x, y)$ και στη συνέχεια η επαλήθευση verf της λύσεως αυτής $\varphi_g(x, y)$. (γ) Με διαφορετικό τρόπο εργασίας ζητείται ο ορισμός συναρτήσεως $\varphi_p(x, y)$ για την πιθανή λύση της αντίστοιχης ομογενούς διαφορικής εξίσωσης της διαφορικής εξίσωσης TorsionPDE. Στο δεξιό μέλος του ορισμού αυτού πρέπει να υπάρχει μία κατάλληλη δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f (ή χ) που να περιέχει όμως και μία άγνωστη παράμετρο μ . (δ) Να κατασκευασθεί κατάλληλη εξίσωση CharEq1 για τον προσδιορισμό της παραμέτρου αυτής μ . (Σημειώνεται ότι η ομογενής διαφορική εξίσωση της εξίσωσης TorsionPDE προκύπτει απλά θέτοντας $G\theta = 0$ στο δεξιό μέλος της.) (ε) Να βρεθούν οι λύσεις sol1 της εξίσωσης CharEq1. (στ) Να επαληθευθεί σε λίστα verf ότι πραγματικά η εξίσωση CharEq1 έχει λύσεις της τις $\mu = \pm i$. (ζ) Μια τρίτη δυνατότητα προσφέρεται από τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης με παραμέτρους s αυτήν τις a και b (ή ισοδύναμα λ και μ). Ζητείται ο ορισμός της σχετικής εκθετικής συναρτήσεως $\varphi_q(x, y)$. (η) Να υπολογισθεί η σχετική εξίσωση CharEq2 που προκύπτει με αντικατάσταση της συναρτήσεως $\varphi_q(x, y)$ στην ομογενή διαφορική εξίσωση που ήδη αναφέραμε. Τέλος να βρεθεί η λύση sol2 της εξίσωσης CharEq2 που να δίνει τη σταθερά b συναρτήσει της σταθεράς a .

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-F8 ([X και Y] Μονοδιάστατη Εξίσωση της Διαχύσεως): Για τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως (diffusion equation) με άγνωστη συνάρτηση τη u , ανεξάρτητες μεταβλητές τις x (θέση) και t (χρόνο) και σταθερά a^2 ζητούνται: (α) Να δηλωθεί αυτή πλήρως με το σύμβολο DiffusionPDE. (β) Να δοθούν επτά χαρακτηρισμοί της σε λίστα char2. (γ) Να δηλωθούν σε λίστα ItAppears τρεις διαφορετικές περιοχές της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού όπου εμφανίζεται (appears) η εξίσωση αυτή. (δ) Να επιχειρηθεί η εύρεση της γενικής λύσεως (general solution) sol της διαφορικής αυτής εξίσωσης DiffusionPDE κατευθείαν με τη χρήση της εντολής DSolve της Mathematica. Στη συνέχεια να δηλωθεί σε σχόλιο comment η επιτυχία: "Πέτυχε" ή η αποτυχία: "Απέτυχε" της εντολής αυτής. (ε) Να δηλωθεί η συνάρτηση (function)

$$u_p(x, t) = A \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

(με τα A και a σταθερές) και στη συνέχεια να επαληθευθεί ότι η συνάρτηση αυτή αποτελεί λύση της εξίσωσης DiffusionPDE. (στ) Να σχεδιασθούν η συνάρτηση σφάλματος (error function) και

η συμπληρωματική της στο διάστημα $[0, 3]$. (ζ) Να δηλωθεί η πιθανή ταυτότητα identity ότι η συνάρτηση σφάλματος και η συμπληρωματική της έχουν πάντοτε σαν άθροισμα το ένα. (η) Να γίνει απόπειρα επαληθεύσεως της ταυτότητας identity σε λίστα (list) ver με τρία στοιχεία: (i) την ίδια την ταυτότητα identity χωρίς απλοποίηση, (ii) την απλοποιημένη μορφή της με την απλή εντολή απλοποίησης και (iii) την αντίστοιχη μορφή της με την εντολή πλήρους απλοποίησης.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F9 (IX και Y) Αστρόβιλο Πεδίο Ροής Ιδεατού Ρευστού: Σε τριδιάστατη μόνιμη (σταθερή) και αστρόβιλη ροή (irrotational flow) ιδεατού ρευστού (ideal fluid) ζητούνται: (α) Η ταχύτητα (velocity) \mathbf{V} του ρευστού μέσω των συνιστωσών της u , v και w σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) . (β) Ο στροβιλισμός (περιστροφή) $\text{curl}\mathbf{V}$ της ταχύτητας \mathbf{V} με χρήση του πακέτου της Διανυσματικής Αναλύσεως της *Mathematica*, το οποίο ίσως έχει ήδη φορτωθεί. (γ) Οι τρεις εξισώσεις IrrotationalPDEs για το αστρόβιλο της παρούσας ροής με τη βοήθεια του αποτελέσματος $\text{curl}\mathbf{V}$ του προηγούμενου ερωτήματος. (δ) Η αντίστοιχη εξίσωση της συνεχείας (continuity equation) ContinuityPDE. (ε) Και οι τέσσερις μαζί διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους pdes του παρόντος προβλήματος σε λίστα χρησιμοποιώντας και την εντολή Flatten. (στ) Με το δυναμικό ταχύτητας (velocity potential) $\Phi = \Phi(x, y, z)$ να υποτίθεται γνωστό στην παρούσα τριδιάστατη αστρόβιλη και μόνιμη ροή ζητούνται οι συνιστώσεως u_s , v_s και w_s της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού. (ζ) Ποια μορφή pdesf παίρνουν οι εξισώσεις pdes του ερωτήματος (ε) γι' αυτές τις συνιστώσες της ταχύτητας u_s , v_s και w_s ; (η) Ποια είναι επομένως η τελική (final) διαφορική εξίσωση FinalPDE στο παρόν πρόβλημα; Τέλος να επιχειρηθεί (αν και αποτυγχάνει!) η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης FinalPDE με τη χρήση της εντολής DSolve.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F10 (IX και Y) Μηχανική των Υλικών: Επίπεδη Ελαστικότητα: Τασική Συνάρτηση του Airy: Στην Επίπεδη Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών χρησιμοποιείται συχνά η τασική συνάρτηση (ή τασεοσυνάρτηση) του Airy $A(x, y)$. Ζητούνται: (α) Οι τύποι που δίνουν τις τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} με γνωστή την τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$ σε λίστα με τρεις τύπους. (β) Η επαλήθευση ver ότι η εναλλαγή της σειράς των μερικών παραγωγίσεων στην παράγωγο που δίνει τη διαμητική τάση τ_{xy} δεν αλλάζει το αποτέλεσμα. (γ) Οι εξισώσεις ισορροπίας EquilibriumEquations στο πρόβλημα της επίπεδης Ελαστικότητας (χωρίς δυνάμεις μάζας) που εξετάζουμε με τα ίδια σύμβολα για τις τάσεις όπως στο ερώτημα (α). (δ) Η εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων CompatibilityEquation, γραμμένη όμως κατευθείαν στην τελική της και απλούστερη δυνατή μορφή με τη χρήση των ορθών τάσεων σ_x και σ_y . (ε) Το πακέτο της *Mathematica* για τη Διανυσματική Ανάλυση (Vector Analysis) έχει ίσως ήδη φορτωθεί. Έχουν επίσης δηλωθεί σ' αυτό Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) . Ζητείται η δήλωση με εξίσωση BiharmonicEquation ότι η τασική συνάρτηση του Airy είναι διαρμονική (biharmonic). (στ) Ζητείται και ο έλεγχος εάν ή όχι οι δύο πιο πάνω εξισώσεις CompatibilityEquation και BiharmonicEquation συμπίπτουν ή όχι. (ζ) Να εισαχθεί η ειδική συνάρτηση

$$A_p(x, y) = \sum_{k=0}^4 a_k x^k y^{4-k}$$

με τα a_k σταθερούς συντελεστές. (η) Υπό ποια ακριβώς συνθήκη BiharmonicCondition μεταξύ των συντελεστών a_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) είναι διαρμονική (δηλαδή καταρχήν κατάλληλη για τασική συνάρτηση του Airy) η ειδική συνάρτηση $A_p(x, y)$ που μόλις ορίστηκε; (Να γίνει και απλοποίηση.)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F11 (IX και Y) Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, Χωρισμός των Μεταβλητών: Εδώ ζητούνται: (α) Να δηλωθεί η τριδιάστατη εξίσωση του Laplace LaplacePDE χωρίς καμία χρήση του πακέτου της Διανυσματικής Αναλύσεως. (β) Η διδιάστατη εξίσωση του κύματος (wave) WavePDE με σχετική σταθερά c^2 . (γ) Η εξίσωση της μεταγωγής (convection ή advection) ConvectionPDE ρύπου σε υδατόρρευμα με συγκέντρωση του ρύπου $c(x, t)$ (x είναι η θέση και t ο χρόνος) με σταθερή ταχύτητα του νερού V . (δ) Η ανάλογη εξίσωση της διαχύσεως (diffusion) DiffusionPDE με σταθερά μοριακής διαχύσεως D_v . Επίσης και της μεταγωγής-διαχύσεως ConvectionDiffusionPDE. (ε) Ο χωρισμός των μεταβλητών x

και t για τη συγκέντρωση του ρύπου $c(x, t)$. (στ) Η νέα διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους SepVarPDE1 που προκύπτει με το χωρισμό αυτό των μεταβλητών x και t από την εξίσωση της μεταγωγής-διαχύσεως ConvectionDiffusionPDE. Στην εξίσωση SepVarPDE1 να γίνει ταυτόχρονα και διαίρεση και των δύο μελών της με $c(x, t)$ και επίσης απλοποίηση του αποτελέσματος. (ζ) Η διπλή εξίσωση SepVarPDE2 που προκύπτει από τη SepVarPDE1 με μεταφορά του δεύτερου κλάσματος της (αυτού που εξαρτάται από τη θέση x), δηλαδή του δεύτερου όρου του αριστερού μέλους της, στο δεξιό μέλος κι επίσης εξίσωση και των δύο κλασμάτων με σταθερά διαχωρισμού λ . (η) Η σχετική χρονική συνήθης διαφορική εξίσωση ode1 και η γενική λύση της sol1.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F12 ([X και Y] Χωρισμός των Μεταβλητών: Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Δοκού): Θεωρούμε τις ελεύθερες (όχι εξαναγκασμένες) καμπτικές ιδιοταλαντώσεις συνήθους δοκού (ordinary beam) με δυσκαμψία EI και γραμμική πυκνότητα ρA . Ζητούνται: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους BeamPDE ως προς το βέλος κάμψεως $v = v(x, t)$ της δοκού. (β) Ο χωρισμός των μεταβλητών

$$v(x, t) = X(x)T(t)$$

καθώς και η διαφορική εξίσωση BeamPDE που προκύπτει μετά το χωρισμό αυτό. (γ) Η ίδια εξίσωση servar1, τώρα όμως σαφέστερα διαιρώντας με $\rho A v(x, t)$ και με απλοποίηση του αποτελέσματος. Στη συνέχεια και η εξίσωση servar2 με πλήρη χωρισμό των μεταβλητών: αριστερά το κλάσμα της θέσεως x και δεξιά το κλάσμα του χρόνου t . (δ) Η σχετική πρώτη συνήθης διαφορική εξίσωση ode1 με τη σταθερά διαχωρισμού λ αρνητική και ίση με $-\omega^2$ καθώς και η γενική λύση (general solution) sol1 της διαφορικής αυτής εξισώσεως. (ε) Επίσης η αντίστοιχη δεύτερη συνήθης διαφορική εξίσωση ode2. (στ) Η αντικατάσταση (substitution)

$$\rho A = \beta^4 \frac{EI}{\omega^2}$$

(με το β νέο σύμβολο) με δήλωσή της σαν subs και η μορφή ode2a που παίρνει η δεύτερη διαφορική εξίσωση ode2 με την αντικατάσταση αυτή subs. (ζ) Η γενική λύση sol2 της διαφορικής εξισώσεως ode2a και στη συνέχεια η αντίστοιχη συνάρτηση $X_s(x)$. (η) Η επαλήθευση της διαφορικής εξισώσεως ode2 από τη λύση $X_s(x)$ που βρέθηκε χωρίς βέβαια να λησμονείται η αντικατάσταση subs καθώς και η απλοποίηση του αποτελέσματος.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F13 ([X και Y] Χωρισμός των Μεταβλητών, Πλάκες): Με τη χρήση του πακέτου της Mathematica για τη Διανυσματική Ανάλυση, το οποίο ίσως έχει ήδη φορτωθεί, ζητούνται για συνήθη πλάκα (ordinary plate) πάχους h και πυκνότητας υλικού ρ από ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό μέτρου ελαστικότητας E_0 και λόγου του Poisson ν στο επίπεδο Oxy και υπό κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y)$: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (partial differential equation) StaticPlatePDE ως προς το βέλος κάμψεως $w(x, y)$ για το στατικό πρόβλημα. (β) Η δυσκαμψία D_0 της πλάκας. (γ) Η αντίστοιχη δυναμική εξίσωση DynamicPlatePDE, η οποία περιέχει βέβαια και το χρόνο t καθώς και αδρανειακό όρο. (δ) Ο χωρισμός των μεταβλητών

$$w_p(x, y, t) = P(x, y) \cos(\omega t + \alpha)$$

(με τα ω και α σταθερές). (ε) Σχόλιο comment με συμβολοσειρά (string) ή απλά σε παράγραφο κειμένου (με Alt 7) με είκοσι περίπου λέξεις για το αν είναι αποδεκτός ή απαράδεκτος ο πιο πάνω χωρισμός των μεταβλητών (χωρικών μεταβλητών (x, y) και χρονικής μεταβλητής t) ή όχι και γιατί. (στ) Η νέα διαφορική εξίσωση DynamicPlatePDE1 θέτοντας τώρα w_p αντί για w και μηδενίζοντας ταυτόχρονα την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y, t)$. (ζ) Η προηγούμενη διαφορική εξίσωση DynamicPlatePDE1 διηρημένη τώρα με $\cos(\omega t + \alpha)$ (και στα δύο μέλη της!) και με απλοποίηση του αποτελέσματος με δήλωσή της σαν DynamicPlatePDE2. (η) Έξι χαρακτηρισμοί char1 της τελευταίας διαφορικής εξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F14 ([X και Y] Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος): Θεωρούμε τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση, wave equation) με άγνωστη συνάρτηση τη u και ανεξάρτητες μεταβλητές τις x (θέση) και t (χρόνο). Η ταχύτητα μεταδόσεως του κύματος είναι c (φυσικά κατ' απόλυτο τιμή). Ζητούνται: (α) Η δήλωση της εξισώσεως αυτής με το σύμβολο WavePDE. (β) Η λύση της WavePDESol κατευθείαν με τη χρήση της εντολής DSolve. (γ) Η σχετική συνάρτηση $u_s(x, t)$. (δ) Η επαλήθευση WavePDEVer της ίδιας λύσεως $u_s(x, t)$. (ε) Η δήλωση συναρτήσεως

$$u_p(x, t) = f(x + \mu t).$$

(στ) Η χαρακτηριστική εξίσωση CharEq που προκύπτει από την εξίσωση WavePDE για τη σταθερά μ με τη χρήση της πιο πάνω συναρτήσεως $u_p(x, t)$. (ζ) Οι λύσεις CharEqSol της χαρακτηριστικής αυτής εξισώσεως. (η) Προκύπτουν τρεις λύσεις, αλλά μόνο οι δύο πρώτες μ_1 και μ_2 έχουν έννοια. Επομένως να γίνει περιορισμός στις δύο πρώτες αυτές λύσεις sols.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F15 ([X και Y] Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος, Μετασχηματισμός Laplace): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α) Λίστα char με επτά χαρακτηρισμούς της μονοδιάστατης εξισώσεως του κύματος WavePDE. (β) Λίστα ItAppears με τις βασικές περιοχές της επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού όπου παρουσιάζεται η ίδια εξίσωση. (γ) Λίστα SolMethods με τις διαφορετικές μεθόδους που με βεβαιότητα είναι εφαρμόσιμες για την επίλυση της ίδιας εξισώσεως WavePDE. (δ) Ο μετασχηματισμός Laplace LT της ίδιας εξισώσεως WavePDE ως προς το χρόνο t με τη σχετική μεταβλητή να δηλώνεται με s . (ε) Η απλούστερη μορφή LT1 του ίδιου μετασχηματισμού LT, τώρα όμως συμβολίζοντας με $U(x, s)$ το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συναρτήσεως $u(x, t)$. (στ) Η ιδιότητα (property) LaplaceProperty (στη Mathematica υπό τη μορφή αντικαταστάσεως) του μετασχηματισμού Laplace της δεύτερης χωρικής (ως προς τη θέση x) μερικής παραγώγου της άγνωστης συναρτήσεως $u(x, t)$ που ισούται με την αντίστοιχη δεύτερη μερική παράγωγο του μετασχηματισμού Laplace της $U(x, s)$. (Φαίνεται πως η Mathematica δε γνωρίζει τη σχετική ιδιότητα στο μετασχηματισμό Laplace!) (ζ) Η συνήθης διαφορική εξίσωση ode που προκύπτει με τη χρήση της ιδιότητας (αντικαταστάσεως) αυτής LaplaceProperty. (η) Η γενική λύση solode της συνήθους διαφορικής εξισώσεως ode με τη χρήση της εντολής DSolve. Να χρησιμοποιηθεί στην εντολή αυτή και η εντολή Expand.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F16 ([X και Y] Μετασχηματισμός Laplace: Μονοδιάστατη Εξίσωση της Διαχύσεως, Μετάδοση Θερμότητας): Θεωρούμε τη θερμοκρασία $\theta = \theta(z, t)$ μέσα στο έδαφος με z το βάθος ($z \geq 0$) και t το χρόνο ($t \geq 0$). Ζητούνται: (α) Η σχετική εξίσωση της διαχύσεως (diffusion) DiffusionPDE για το παρόν πρόβλημα Μεταδόσεως Θερμότητας με a^2 τη σχετική θετική σταθερά. (β) Ο μετασχηματισμός Laplace της LT ως προς τη θέση z με τη σχετική μεταβλητή να δηλώνεται με σ (και όχι με s). (γ) Η απλούστερη μορφή LT1 του ίδιου μετασχηματισμού LT, τώρα όμως συμβολίζοντας με $\Theta(\sigma, t)$ το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συναρτήσεως $\theta(z, t)$. (δ) Η αντικατάσταση subs του μετασχηματισμού Laplace της πρώτης χρονικής μερικής παραγώγου της άγνωστης συναρτήσεως $\theta(z, t)$ από την αντίστοιχη πρώτη μερική παράγωγο του μετασχηματισμού Laplace της $\Theta(\sigma, t)$. (ε) Η συνήθης διαφορική εξίσωση LT2 που προκύπτει με τη χρήση της αντικαταστάσεως αυτής subs. (στ) Η γενική λύση sol της συνήθους διαφορικής εξισώσεως LT2. (ζ) Εναλλακτικά ο μετασχηματισμός Laplace LT3 της συνήθους διαφορικής εξισώσεως LT2, τώρα ως προς το χρόνο t και με τη σχετική μεταβλητή να δηλώνεται με s (όχι πια σ). (η) Απλά η λύση solLT3 της τελικής αλγεβρικής εξισώσεως LT3 ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F17 ([X] Χωρισμός των Μεταβλητών, Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος: Ελεύθερες Αξονικές Ταλαντώσεις Ράβδου): Θεωρούμε το πρόβλημα των αξονικών (ή διαμήκων) ελεύθερων και χωρίς απόσβεση ταλαντώσεων συνήθους ράβδου μήκους L με $0 \leq x \leq L$ για τη θέση x και $t \geq 0$ για το χρόνο t . Το πρόβλημα αυτό διέπεται από τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος

(ή κυματική εξίσωση) με άγνωστη συνάρτηση την αξονική (ή διαμήκη) μετατόπιση $u = u(x, t)$ των σημείων της ράβδου. Η ταχύτητα του κύματος (σε απόλυτο τιμή) δηλώνεται εδώ με το σύμβολο c . Η ράβδος αυτή θεωρείται ελεύθερη (χωρίς στηρίξεις) και στα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$ στο παρόν δυναμικό (όχι στατικό) πρόβλημα. Οι αρχικές αξονικές μετατοπίσεις των σημείων της ράβδου είναι $u(x, 0) = u_0(x)$ με $0 \leq x \leq L$ και με τη συνάρτηση $u_0(x)$ κατάλληλη γνωστή συνάρτηση. Οι αντίστοιχες αρχικές ταχύτητες είναι μηδενικές, δηλαδή $(\partial u / \partial t)(x, 0) = 0$. Ζητούνται: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση. (β) Επτά χαρακτηρισμοί της. Ειδικά για τον τύπο της να γίνει και ο υπολογισμός της σχετικής διακρίνουσας. (γ) Η λεπτομερής απόδειξη ότι υπό τις παρούσες συνοριακές συνθήκες (δηλαδή με ελεύθερα τα δύο άκρα $x = 0$ και $x = L$ της ράβδου) η πρώτη χωρική (ως προς τη θέση x) μερική παράγωγος της άγνωστης συναρτήσεως $u = u(x, t)$ είναι συνεχώς μηδενική στα δύο αυτά άκρα. (δ) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις: (i) ως προς τη θέση x και (ii) ως προς το χρόνο t με την υποχρεωτική χρήση και της κυκλικής συχνότητας ω των ελεύθερων αξονικών ταλαντώσεων που εξετάζουμε. (ε) Οι λύσεις $X_n(x)$ και $T_n(t)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) των δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων παίρνοντας υπόψη και τις συνοριακές συνθήκες στα δύο ελεύθερα άκρα της ράβδου. Τι φυσικό νόημα έχει η «συχνότητα» ω_0 (με $n = 0$); Τι εκφράζει;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F18 ([X] *Χωρισμός των Μεταβλητών, Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος: Ελεύθερες Αξονικές Ταλαντώσεις Ράβδου*): Συνεχίζοντας την προηγούμενη άσκηση, ζητούνται επίσης: (α) Η πλήρης τελική λύση $u(x, t)$ του παρόντος προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών. (β) Τώρα η επαλήθευση της λύσεως $u(x, t)$ του προηγούμενου ερωτήματος ως προς τις δύο συνοριακές συνθήκες μόνο. (γ) Η επαλήθευση της ίδιας λύσεως ως προς τις δύο αρχικές συνθήκες μόνο. (δ) Η επαλήθευση της ίδιας λύσεως ως προς την ίδια τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος (ή κυματική εξίσωση).

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F19 ([X] *Μετασχηματισμός Laplace, Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος: Ελεύθερες Αξονικές Ταλαντώσεις Ράβδου*): Συνεχίζοντας τις δύο προηγούμενες ασκήσεις, ζητούνται επίσης: (α) Ο τύπος που δίνει την ταχύτητα c του παρόντος ελαστικού κύματος (κατ' απόλυτο τιμή) με τη βοήθεια φυσικών σταθερών της συνήθους ράβδου (χωρίς απόδειξη). Να γίνει και ο σχετικός έλεγχος μονάδων. (β) Υποχρεωτικά με χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace ως προς το χρόνο t ($t \geq 0$) η αναγωγή του παρόντος προβλήματος ελεύθερων αξονικών (ή διαμήκων) ταλαντώσεων ράβδου σε συνήθη διαφορική εξίσωση ως προς τη θέση x κατά μήκος της ράβδου. (γ) Η γενική λύση της ομογενούς συνήθους διαφορικής εξισώσεως που αντιστοιχεί στη μη ομογενή συνήθη διαφορική εξίσωση του προηγούμενου ερωτήματος με σαφή δήλωση της παραμέτρου s του μετασχηματισμού Laplace όπου αυτή παρουσιάζεται. (δ) Χωρίς την εκτέλεση υπολογισμών με ποιες ακριβώς δύο μεθόδους θα μπορούσε να βρεθεί και μια μερική λύση (ή ειδική λύση) της μη ομογενούς συνήθους διαφορικής εξισώσεως υπό τις αρχικές συνθήκες που δόθηκαν;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F20 ([X] *Μηχανική των Υλικών: Επίπεδη Ελαστικότητα: Τασική Συνάρτηση του Airy, Εξισώσεις Ισορροπίας και Συμβιβαστού*): Στη Μηχανική των Υλικών θεωρούμε το επίπεδο στατικό πρόβλημα (στο επίπεδο Oxy) για ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό χωρίς δυνάμεις μάζας. Ζητούνται: (α) Οι σχετικές εξισώσεις ισορροπίας για τις τρεις τάσεις (τις συνιστώσες του τανυστή των τάσεων) σ_x , σ_y και τ_{xy} (χωρίς απόδειξη). (β) Η εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού των παραμορφώσεων εκφρασμένη όμως στην τελική της μορφή πάλι συναρτήσει των τάσεων (ξανά χωρίς απόδειξη). (γ) Με υπολογισμό της σχετικής διακρίνουσας ο τύπος της εξισώσεως του προηγούμενου ερωτήματος. (δ) Με τη χρήση της τασικής συναρτήσεως (ή τασεοσυναρτήσεως) $A(x, y)$ του Airy ποιοι τύποι δίνουν τις τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} ; (χωρίς απόδειξη). (ε) Με τη χρήση της ίδιας συναρτήσεως του Airy να αποδειχθεί ότι πληρούνται αυτόματα και οι δύο εξισώσεις ισορροπίας. (στ) Ποια μορφή παίρνει η εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού χρησιμοποιώντας την ίδια τασική συνάρτηση $A(x, y)$; (ζ) Να δοθούν έξι χαρακτηρισμοί για την εξίσωση του

προηγούμενου ερωτήματος. (η) Πώς καλείται η εξίσωση αυτή; Ο σχετικός διαφορικός τελεστής; Πού αλλού στην επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζεται ο ίδιος διαφορικός τελεστής;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F21 (IX και Y) Μηχανική των Υλικών: Επίπεδη Ελαστικότητα: Τασική Συνάρτηση του Airy, Εξισώσεις Ισορροπίας και Συμβιβαστού): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α) Η συνθήκη (ή συνθήκες) υπό την οποία (ή τις οποίες) το τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο

$$A_0(x, y) = \sum_{k=0}^4 c_k x^{4-k} y^k$$

(με τα c_k σταθερούς πραγματικούς συντελεστές) είναι καταρχήν κατάλληλο για να χρησιμοποιηθεί σαν τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$. (β) Επομένως ποια είναι η έκφραση $A(x, y)$ της συναρτήσεως αυτής $A_0(x, y)$ μετά την απαλοιφή του συντελεστή c_2 ; (γ) Με τη χρήση του αποτελέσματος του προηγούμενου ερωτήματος να υπολογισθούν οι τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} , οι οποίες προκύπτουν από την τασική συνάρτηση $A(x, y)$ που βρέθηκε. (δ) Να επαληθευθεί η πλήρωση των δύο εξισώσεων ισορροπίας από τις τάσεις αυτές. (ε) Ανάλογα και για την εξίσωση (ή συνθήκη) συμβιβαστού πάλι όμως με τη βοήθεια των τάσεων. (στ) Τελικά, συνοψίζοντας, τι ακριβώς πετυχαίνουμε από μαθηματικής απόψεως με τη χρήση της τασικής συναρτήσεως του Airy $A(x, y)$ ως προς τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που ισχύουν; (ζ) Και με ποιο διπλό κόστος;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F22 (IX) Αλλαγή Ανεξάρτητων Μεταβλητών, Περιβαλλοντική Υδραυλική: Μεταγωγή και Αποδόμηση Ρύπου σε Υδατόρρευμα): Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική θεωρούμε τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με μεταγωγή. Το νερό στο υδατόρρευμα ρέει με σταθερή ταχύτητα V . Για απλότητα έχει υποτεθεί ότι δεν υφίσταται μοριακή διάχυση του ρύπου ούτε άλλος τρόπος μεταφοράς του εκτός από τη μεταγωγή. Υπάρχει όμως και αποδόμηση πρώτης τάξεως του ρύπου με σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως k . Ως προς τη συγκέντρωση $c = c(x, t)$ του ρύπου στο υδατόρρευμα (με x τη θέση κατά μήκος του υδατορρέυματος και t το χρόνο) προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = -kc.$$

Εδώ ζητούνται: (α) Έξι χαρακτηρισμοί της διαφορικής αυτής εξισώσεως. (β) Η γραφή της σε νέα μορφή με τη χρήση των αλλαγών ανεξάρτητων μεταβλητών

$$\xi = x - Vt \quad \text{και} \quad \tau = t.$$

(γ) Η φυσική ερμηνεία της αλλαγής μεταβλητής $\xi = x - Vt$. (δ) Υποχρεωτικά με βάση το ερώτημα (β) η εύρεση της γενικής λύσεως $c = c(x, t)$ της αρχικής διαφορικής εξισώσεως. (ε) Η επαλήθευση της ίδιας γενικής λύσεως. (στ) Είναι αισθητή στη λύση αυτή η αποδόμηση του ρύπου με την πάροδο του χρόνου t ; Τι μονάδες έχει η σταθερά του ρυθμού αποδομήσεως k ;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F23 (IX) Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Μονοδιάστατη Εξίσωση της Διαχύσεως, Ολοκληρώματα Fourier): Για την εξίσωση της διαχύσεως στη μία διάσταση (μετάδοση θερμότητας κατά μήκος πλευρικά τέλεια μονωμένης λεπτής ράβδου άπειρου μήκους) ζητείται (υποχρεωτικά με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών) η λύση της $\theta(x, t)$ (σε κάθε θέση x της ράβδου με $-\infty < x < \infty$ και για κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$). Η αρχική θερμοκρασία της ράβδου $\theta(x, 0)$ υποτίθεται ότι είναι μια γνωστή συνάρτηση $f(x)$, δηλαδή ισχύει $\theta(x, 0) = f(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F24 (IX και Y) Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους: Μετασχηματισμός Laplace, Παράκτια Μηχανική, Λιμενικά Έργα: Ακτογραμμή, Αναπλήρωση Ακτής, Ισοζύγιο Φερτών Υλών, Προσάμμωση, Εγκάρσιος Βραχίονας, Μώλος): Ευχαριστίες: Ο γράφων ευχαριστεί θερμά τον Πολιτικό Μηχανικό κ. Ανδρέα Λαγγούση (που υπήρξε και φοιτητής του στο Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών του Πανεπιστημίου Πατρών) για την υπόδειξη του παρόντος ενδιαφέροντος θέματος στην Παράκτια Μηχανική και στα Λιμενικά Έργα μαζί με τη θεωρία σχηματισμού

της παρακάτω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους και την αναφορά της λύσεως του όλου προβλήματος. Στο θέμα αυτό βασίσθηκε η άσκηση αυτή, για την οποία ο γράφων φέρει φυσικά ο ίδιος την ευθύνη. Ο ενδιαφερόμενος φοιτητής και η ενδιαφερόμενη φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός για την Παράκτια Μηχανική και τα Λιμενικά Έργα μπορεί να συμβουλευθεί (για ορισμένες βασικές έννοιες) και το ενδιαφέρον βιβλίο της Πολυτεχνικής Σχολής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης: Κουτίτα, Χ. Γ., *Εισαγωγή στην Παράκτια Τεχνική και τα Λιμενικά Έργα*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1996, ιδίως τις σελίδες 177 και 178 του βιβλίου αυτού.

Στην Παράκτια Μηχανική και στα Λιμενικά Έργα θεωρούμε το πρόβλημα της επιδράσεως επί της ακτογραμμής $y = y(x, t)$, που αρχικά (για $t \leq 0$) υποτίθεται ευθύγραμμη ($y(x, 0) = 0$), εγκάρσιου (κάθετου στην ακτογραμμή) εμποδίου (βραχίονα ή μώλου). Ο βραχίονας αυτός τοποθετείται τη χρονική στιγμή $t = 0$ και στη συνέχεια προκαλεί προσάμμωση και μεταβολή της ακτογραμμής $y(x, t)$. Υπό ορισμένες λογικές παραδοχές προκύπτει τελικά η εξής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους για τη μεταβολή της ακτογραμμής $y = y(x, t)$ ανάντη και κατάντη μιας παγίδας φερτών υλών (εδώ του εγκάρσιου βραχίονα). Η εξίσωση αυτή είναι συνάρτηση και της θέσεως x , αλλά και του χρόνου t , καθώς η προσάμμωση εξαιτίας των κυματισμών συντελείται βαθμιαία:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \text{με } y = y(x, t)$$

και με k το συντελεστή διαχύσεως της ακτής. Πρόκειται δηλαδή για τη μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως, που παρουσιάζεται επίσης στη Μετάδοση Θερμότητας και σε άλλα προβλήματα. Για την εύρεση της διαφορικής αυτής εξίσωσης με μερικές παραγώγους ελήφθη υπόψη (μεταξύ άλλων) και η εξίσωση διατηρήσεως της μάζας (το ισοζύγιο φερτών υλών). Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή και σαν εξίσωση των Pelnard–Consideré.

Αυτή η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους συνοδεύεται από τις συνοριακές συνθήκες

$$y(-\infty, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

που δηλώνει ότι δεν υπάρχει επιρροή του εγκάρσιου βραχίονα επί της ακτογραμμής σε άπειρη απόσταση από αυτόν ($x = -\infty$), και

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = \tan \beta, \quad t > 0,$$

όπου β είναι η γωνία προσπτώσεως των κυματισμών στην αρχικά ευθύγραμμη ακτογραμμή ($y = 0$ για $t \leq 0$, πριν από την τοποθέτηση του βραχίονα) και προφανώς με τιμές $0 < \beta < \pi/2$, ώστε να είναι εφικτή η προσάμμωση και η μεταβολή της ακτογραμμής. Η δεύτερη αυτή συνοριακή συνθήκη είναι η συνθήκη αδιαπέρατου συνόρου, εν προκειμένω αδιαπέρατου (από τους κυματισμούς) βραχίονα. Ασφαλώς ισχύει και η προφανής αρχική συνθήκη

$$y(x, 0) = 0, \quad x \leq 0,$$

λόγω της αρχικά ευθύγραμμης ακτογραμμής. Ζητούνται:

(α) [X] Οι πλήρεις χαρακτηρισμοί της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους συμπεριλαμβανομένοντας και το εάν είναι υπερβολικού, παραβολικού ή ελλειπτικού τύπου (με υπολογισμό φυσικά!). Γιατί έχουμε δύο συνοριακές συνθήκες και μία μόνο αρχική συνθήκη;

(β) [X] Η επίλυση του πιο πάνω προβλήματος συνοριακών τιμών και αρχικής τιμής με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, αφού προηγηθεί η αλλαγή μεταβλητής $\xi = -x$ ($x \leq 0$, οπότε $\xi \geq 0$).

(γ) [Y] Η επαλήθευση (στο μέγιστο δυνατό βαθμό) των υπολογισμών του προηγούμενου ερωτήματος με τη χρήση του υπολογιστή. **Υπόδειξη:** Σημειώνεται ότι η ζητούμενη λύση $y(x, t)$ για την ακτογραμμή στο παραπάνω πρόβλημα έχει τη μορφή

$$y(x, t) = 2 \sqrt{\frac{kt}{\pi}} \tan \beta [\exp(-u^2) - u\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(u)], \quad x < 0, \quad t > 0,$$

όπου το σύμβολο u δηλώνει την ποσότητα

$$u = -\frac{x}{2\sqrt{kt}} = \frac{\xi}{2\sqrt{kt}},$$

\exp είναι η γνωστή εκθετική συνάρτηση ($\exp y \equiv e^y$) και erfc η συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος, για την οποία έχουν αναφερθεί ο ορισμός και στοιχειώδεις ιδιότητές στην Παράγραφο B10.4.5 του Κεφαλαίου B10 του Μέρους B.

(δ) [X και Y] Τέλος ζητείται η λεπτομερής επαλήθευση ότι η παραπάνω λύση πραγματικά πληροί την πιο πάνω διαφορική εξίσωση μεταβολής της ακτογραμμής.

(ε) [X] Το ίδιο και για τις τρεις συνθήκες (τις δύο συνοριακές συνθήκες και τη μία αρχική συνθήκη).

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-F25 ([Y] *Τελεστής του Laplace, Διαρμονικός Τελεστής, Κλίση, Περιστροφή, Απόκλιση*): Με χρήση του πακέτου VectorAnalysis της *Mathematica* ζητούνται: (α) Ο καθορισμός Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y, z) προς χρήση στο πακέτο αυτό. (β) Για τις τρεις βαθμωτές συναρτήσεις

$$f(x, y, z) = x^3 e^y \sin z, \quad g(x, y, z) = xy^2 z^3, \quad h(x, y, z) = x^2 + y + z$$

και το αντίστοιχο διάνυσμα

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z) \mathbf{i} + g(x, y, z) \mathbf{j} + h(x, y, z) \mathbf{k}$$

να εφαρμοσθεί ο τελεστής του Laplace (να υπολογισθεί η Λαπλασιανή) κι αντίστοιχα ο διαρμονικός τελεστής πάνω στη συνάρτηση f (σε μία σειρά). (γ) Να βρεθεί η Λαπλασιανή του διανύσματος \mathbf{F} (δηλαδή της σχετικής λίστας τριών συναρτήσεων: f, g και h). (δ) Με όμοιο τρόπο να υπολογισθεί η Λαπλασιανή της Λαπλασιανής του ίδιου διανύσματος \mathbf{F} και να συγκριθεί το αποτέλεσμα με αυτό που προκύπτει με την άμεση εφαρμογή του διαρμονικού τελεστή στο ίδιο διάνυσμα \mathbf{F} . (ε) Να υπολογισθούν η κλίση ή βαθμίδα (grad) της συναρτήσεως f καθώς και ο στροβιλισμός (περιστροφή) της (curl) και η απόκλιση (div) του διανύσματος \mathbf{F} . (στ) Στην περίπτωση γενικών (όχι συγκεκριμένων) κατάλληλα παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\varphi = \varphi(x, y, z)$$

(βαθμωτή) και

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}(x, y, z) = u(x, y, z) \mathbf{i} + v(x, y, z) \mathbf{j} + w(x, y, z) \mathbf{k}$$

(διανυσματική) ζητείται να ελεγχθεί η πιθανή ισχύς των τύπων (με $\Delta \equiv \nabla^2$)

$$\Delta(\Delta\varphi) = \Delta^2\varphi,$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \Delta\varphi,$$

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad} \varphi) = \mathbf{0},$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{G}) = 0,$$

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} \mathbf{G}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{G}) - \Delta\mathbf{G},$$

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{G}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{G} + (\operatorname{grad} \varphi) \cdot \mathbf{G}.$$

Υπόδειξη: Στον τελευταίο όρο της τελευταίας ταυτότητας να χρησιμοποιηθεί η τελεία για το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Τι σας θυμίζει η ταυτότητα αυτή; Τι δηλώνουν τα **παχιά (μαύρα, bold)** στοιχεία στους παραπάνω τύπους;

ΟΜΑΔΑ ΕΜΙΙΙ-G

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-G1 ([X] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Μονοδιάστατη Εξίσωση της Διαχύσεως, Μετασχηματισμός Fourier): Για την εξίσωση της διαχύσεως στη μία διάσταση x στο πρόβλημα μεταδόσεως θερμότητας κατά μήκος πλευρικά τέλεια μονωμένης λεπτής ράβδου άπειρου μήκους με σταθερά c^2 στη σχετική διαφορική εξίσωση ζητείται (υποχρεωτικά με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier ως προς τη θέση x και την αναγωγή της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους σε συνήθη διαφορική εξίσωση) η λύση της $\theta(x, t)$ σε κάθε θέση x της ράβδου με $-\infty < x < \infty$ και για κάθε χρονική στιγμή t με $t \geq 0$. Η αρχική θερμοκρασία της ράβδου $\theta(x, 0)$ υποτίθεται γνωστή συνάρτηση $f(x)$. **Υπόδειξη:** Ο μετασχηματισμός Fourier (ως προς τη θέση x , όχι ως προς το χρόνο t)

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4c^2 t}\right)\right\} = \exp(-c^2 \omega^2 t)$$

θεωρείται γνωστός. Να χρησιμοποιηθεί επίσης και το θεώρημα της συνελίξεως. Καταρχήν θα μπορούσε να γίνει και δεύτερη εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier (ως προς το χρόνο t τώρα), ώστε να προκύψει τελικά μια απλή αλγεβρική εξίσωση; (ούτε καν συνήθης διαφορική εξίσωση!)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-G2 ([X] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους: Μέθοδος του Μετασχηματισμού Fourier. Περιβαλλοντική Υδραυλική: Υδατορρέυματα: Μεταγωγή και Διάχυση Ρύπου): Εδώ θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα του προσδιορισμού της συγκεντρώσεως $c = c(x, t)$ ρύπου σε υδατόρρευμα με τη μεταφορά του ρύπου να γίνεται τόσο με μεταγωγή (λόγω της ταχύτητας V του νερού του υδατορρέυματος) όσο και με μοριακή διάχυση (με συντελεστή μοριακής διαχύσεως D). Τότε προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + V \frac{\partial c}{\partial x} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

με x τη θέση και t το χρόνο ($t \geq 0$). Με το υδατόρρευμα να θεωρείται άπειρου μήκους ($-\infty < x < \infty$) και με γνωστή τη συγκεντρώση $c(x, t)$ του ρύπου την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή με

$$c(x, 0) = g(x)$$

Ζητείται η επίλυση του παραπάνω προβλήματος αρχικών τιμών υποχρεωτικά με μετασχηματισμό Fourier ως προς τη θέση x . Έτσι προσδιορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier $C(\omega, t)$ της άγνωστης συγκεντρώσεως $c(x, t)$ του ρύπου. Για την αντιστροφή καλό είναι να ληφθούν υπόψη και οι τύποι

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-D\omega^2 t}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/(4Dt)}$$

και επίσης

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{e^{-ia\omega} F(\omega)\right\} = f(x - a)$$

με το a σταθερά και $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}$.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-G3 ([Y] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους: Τελεστής του Laplace, Διαρμονικός Τελεστής, Καρτεσιανές, Πολικές, Κυλινδρικές και Σφαιρικές Συντεταγμένες): Εδώ ζητούνται: (α) Οι εκφράσεις του τελεστή του Laplace και του διαρμονικού τελεστή με εφαρμογή τους σε συνάρτηση F σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) . Επίσης και στις δύο διαστάσεις (x, y) . (β) Ανάλογα σε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z) . Επίσης και σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . **(Υπόδειξη:** Αρκεί να τεθεί $z = 0$.) Το ίδιο και για κυκλική συμμετρία στις πολικές συντεταγμένες. **(Υπόδειξη:** Αρκεί να τεθεί επιπλέον και $\theta = 0$.) (γ) Ανάλογα σε σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, φ) για τον τελεστή του Laplace μόνο. Επίσης στην ειδική περίπτωση της σφαιρικής συμμετρίας και για τους δύο τελεστές που προαναφέρθηκαν. **(Υπόδειξη:** Αρκεί να τεθεί $\theta = \varphi = 0$.)

Υπόδειξη: Η άσκηση αυτή μπορεί να λυθεί πολύ εύκολα με τη χρήση της *Mathematica*. Πιο κάτω φαίνονται μερικές από τις **ξεχωριστές** εντολές οι οποίες φάνηκαν χρήσιμες στο γράφοντα και είναι λίγο-πολύ προφανείς. Χρειάζεται όμως και το πακέτο *VectorAnalysis* της Διανυσματικής Αναλύσεως. (Προσοχή στην εντολή κλήσεώς του, που περιλαμβάνει πέρα από τα εισαγωγικά, δύο φορές, και *βαρεία*, *όχι οξεία*, επίσης δύο φορές. (Η βαρεία είναι πάνω αριστερά στο πληκτρολόγιο.)

```
Needs["Calculus`VectorAnalysis"]
```

```
SetCoordinates[Cartesian[x,y,z]]
```

```
Laplacian[F[x,y,z]]
```

```
Laplacian[F[x,y,0]]
```

```
Biharmonic[F[x,y,z]]
```

```
Biharmonic[F[x,y,0]]
```

```
SetCoordinates[Cylindrical[r,θ,z]]
```

```
Laplacian[F[r,θ,z]] // Simplify
```

```
Laplacian[F[r,θ,0]] // Simplify
```

```
Laplacian[F[r,0,0]] // Simplify
```

```
Biharmonic[F[r,θ,z]] // Simplify
```

```
Biharmonic[F[r,θ,0]] // Simplify
```

```
Biharmonic[F[r,0,0]] // Simplify
```

```
SetCoordinates[Spherical[ρ,θ,φ]]
```

```
Laplacian[F[ρ,θ,φ]] // Simplify
```

```
Laplacian[F[ρ,0,0]] // Simplify
```

```
Biharmonic[F[ρ,0,0]] // Simplify
```

Υπόδειξη: Σε περίπτωση εμπλοκής σε χρονοβόρους υπολογισμούς μπορεί να χρησιμοποιείται ο συνδυασμός (το ταυτόχρονο πάτημα) των δύο πλήκτρων *Alt* και *τελεία* (.) για τη διακοπή τους.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Γ4 (*[X και Y] Κυρίως υπολογιστική και καθαρά εκπαιδευτική με λεπτομερείς οδηγίες: Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών, Στρέψη*): Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών αποτελεί κλασική μέθοδο αριθμητικής επίλυσεως διαφορικών εξισώσεων ιδίως σε περιπτώσεις όπου οι αναλυτικές μέθοδοι (έστω και σε μορφή σειρών) αποτυγχάνουν ή είναι εξαιρετικά δύσχρηστες. Στην παρούσα άσκηση γίνεται απόπειρα ήπιας εισαγωγής στη μέθοδο αυτή με εισαγωγικές παρατηρήσεις πάνω στην αριθμητική παραγωγή μέσω πεπερασμένων διαφορών και με επίλυση ενός απλού προβλήματος στρέψεως, ακριβώς του προβλήματος όπου αποτυγχάνει η εντολή *NDSolve* της *Mathematica*. (Γιατί αποτυγχάνει;) Δε μπορούμε επομένως να βασιζόμαστε μόνο σε έτοιμα προγράμματα. Μερικές φορές αποτυγχάνουν και αυτά ή, πολύ συχνότερα, χρειάζονται τροποποιήσεις από το χρήστη τους, εννοείται εφόσον κάτι τέτοιο είναι δυνατόν. Δεν είναι έτσι;

(α) Ας θεωρήσουμε καταρχήν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ της μιας μεταβλητής x που διαθέτει όμως τουλάχιστον ϵ παραγώγους.⁶ Η σχετική σειρά της $f(x+h)$ γύρω από το σημείο x (με τη βοηθητική μεταβλητή h να θεωρείται σχετικά μικρή) μπορεί να προσδιορισθεί με τη χρήση της εντολής *Series* της *Mathematica*, πιο συγκεκριμένα

```
ser1 = Series[f[x+h], {h, 0, 5}]
```

με όρους μέχρι και την πέμπτη παράγωγο. Ποια είναι η ανάλογη σειρά για τη συνάρτηση $f(x-h)$

⁶ Η αριθμητική παραγωγή εξετάζεται λεπτομερώς στο βιβλίο του Μάρκελλου, Β. Β., *Αριθμητικές Μέθοδοι*, 5η έκδοση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 2001, Ενότητα 3.3, σσ. 118-126.

(η μεταβλητή h τώρα με πλην αντί με συν). Ποιες είναι οι μορφές των ίδιων σειρών: ser1 και ser2, αλλά χωρίς τους τελικούς 0-όρους τους; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Normal για την εξάλειψη των όρων αυτών, πιο συγκεκριμένα

$$\{f[x+h] = \text{ser1//Normal}, f[x-h] = \text{ser2//Normal}\}$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την εξής προσέγγιση για την πρώτη παράγωγο $f'(x)$ της συναρτήσεως $f(x)$ στο σημείο x με πεπερασμένη (προς τα εμπρός, δηλαδή με $+h$) διαφορά:

$$\text{Df1}[x_] = (f[x+h] - f[x])/h//\text{Expand}$$

Από τον τύπο που προέκυψε (η ποσότητα h υποτίθεται ότι είναι πολύ μικρή) ποιας δυνάμεως του h είναι ανάλογο το σχετικό σφάλμα στην παρούσα αριθμητική παραγωγή; **Υπόδειξη:** Προφανώς της πρώτης δυνάμεως λόγω του όρου $f''(x)h/2$, γενικότερα ξ αντί για το x , με $x < \xi < x + h$, ώστε να έχουμε το συνολικό σφάλμα. Απόλυτα ανάλογα ερωτήματα για την προσέγγιση της ίδιας παραγωγού $f'(x)$ με προς τα πίσω πεπερασμένη διαφορά (συνάρτηση $\text{Df2}[x_]$). Γενικά μιλώντας, άλλαξε προς το καλύτερο ή προς το χειρότερο η προσέγγιση; Μια ακόμη δυνατότητα προσφέρει η χρήση κεντρικής διαφοράς για την ίδια προσέγγιση, δηλαδή για την προσέγγιση της πρώτης παραγωγού $f'(x)$. Πώς μπορεί να υλοποιηθεί αυτή η δυνατότητα; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{Df3}[x_] = (f[x+h] - f[x-h])/(2 h)//\text{Expand}$$

Βελτιώθηκε ή όχι τώρα το σφάλμα; **Υπόδειξη:** Ναι, τώρα το σφάλμα βελτιώθηκε και είναι ανάλογο της δεύτερης δυνάμεως του h , πιο συγκεκριμένα, τελικά $f'''(\xi)h^2/6$. Τελικά, παραμένοντας στην πρώτη παράγωγο, μπορούμε φυσικά να αποδείξουμε ότι η προσέγγιση με κεντρική διαφορά της πρώτης παραγωγού είναι ο μέσος όρος των δύο αρχικών προσεγγίσεων της ίδιας παραγωγού. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{Df3}[x] = = (1/2)(\text{Df1}[x] + \text{Df2}[x])//\text{Simplify}$$

(β) Μπορούμε να προχωρήσουμε ανάλογα και σε προσεγγίσεις (με πεπερασμένες διαφορές) και ανώτερων παραγωγών. Παραδείγματος χάρη, γνωρίζουμε ασφαλώς ότι η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ της $f(x)$ είναι η πρώτη παράγωγος της πρώτης παραγωγού: της $f'(x)$. Αυτή έχει ήδη προσεγγισθεί αριθμητικά με πεπερασμένες διαφορές. Είναι επομένως εύλογο να υπολογίζουμε τη δεύτερη αυτή παράγωγο στη Mathematica με την εξής συνάρτηση:

$$\text{D2f}[x_] = (\text{Df1}[x] - \text{Df2}[x])/h//\text{Simplify}$$

που λόγω των παραπάνω ορισμών των συναρτήσεων $\text{Df1}[x]$ και $\text{Df2}[x]$ ισοδυναμεί ασφαλώς με τον ορισμό της προσεγγίσεως της δεύτερης παραγωγού $f''(x)$ ως εξής:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

Χρειαζόμαστε επομένως, όπως παρατηρούμε, τρεις «διαδοχικές» τιμές της συναρτήσεως $f(x)$ (έστω στις τρεις θέσεις $x-h$, x και $x+h$), για να προσεγγίσουμε την δεύτερη παράγωγό της με πεπερασμένες διαφορές. Ανάλογο ποιας δυνάμεως του h είναι τώρα το σφάλμα; **Υπόδειξη:** Προφανώς ανάλογο της τέταρτης δυνάμεως, πιο συγκεκριμένα είναι ίσο με $f^{(iv)}(\xi)h^2/12$ με το $\xi \in (x-h, x+h)$, δηλαδή με $x-h < \xi < x+h$.

(γ) Μετά τις εισαγωγικές παρατηρήσεις των προηγούμενων δύο ερωτημάτων μπορούμε να προχωρήσουμε στην αριθμητική επίλυση μιας διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγωγούς με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Επιλέγουμε το κλασικό παράδειγμα της στρέψεως⁷

⁷ Το πρόβλημα της στρέψεως εξετάζεται στο κλασικό βιβλίο των Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, 3η έκδοση, McGraw-Hill, New York, Tokyo, 1970, Κεφάλαιο 10: Torsion (Στρέψη). Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (που συμπεριλαμβάνει και το παρακάτω συγκεκριμένο πρόβλημα στρέψεως) εξετάζεται επίσης λεπτομερώς στο ίδιο βιβλίο: Appendix (Παράρτημα): The Application of Finite-difference Equations in Elasticity (Η Εφαρμογή των Εξισώσεων Πεπερασμένων Διαφορών στην Ελαστικότητα.)

ελαστικής ράβδου τετραγωνικής διατομής R πλευράς a . Εκεί ισχύει η γνωστή εξίσωση του Poisson

$$\Delta\varphi(x, y) = -2G\theta, \quad (x, y) \in R,$$

για την άγνωστη τασική συνάρτηση $\varphi(x, y)$ του Prandtl με $\Delta \equiv \nabla^2$ τη Λαπλασιανή (τον τελεστή του Laplace), G το μέτρο διατμήσεως του ελαστικού υλικού της ράβδου και θ την ανά μονάδα μήκους γωνία στρέψεως της ράβδου. Επειδή όμως ισχύει ότι

$$\Delta\varphi(x, y) \equiv \frac{\partial^2\varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi(x, y)}{\partial y^2},$$

όπως μπορεί εξάλλου να διαπιστωθεί με χρήση της εντολής Laplacian του πακέτου VectorAnalysis της Mathematica (στις δύο διαστάσεις), θεωρούμε την εξής προσέγγιση της Λαπλασιανής με πεπερασμένες διαφορές:

$$\Delta\varphi(x, y) = \frac{\varphi(x+h, y) + \varphi(x-h, y) + \varphi(x, y+h) + \varphi(x, y-h) - 4\varphi(x, y)}{h^2}.$$

Γιατί ισχύει η προσέγγιση αυτή βάσει όσων έχουν εκτεθεί πιο πάνω (στο ερώτημα (β)) για τη δεύτερη παράγωγο, τώρα βέβαια και ως προς x και ως προς y ; Πιο πρακτικά πόσες τιμές της ζητούμενης συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ χρειαζόμαστε (στο σημείο αυτό (x, y) και γύρω από αυτό) για την παραπάνω απλή προσέγγιση της Λαπλασιανής $\Delta\varphi(x, y)$; Πώς μπορούμε να δηλώσουμε τον πιο πάνω προσεγγιστικό τύπο σαν συνάρτηση $\Delta\varphi[x_, y_]$ στη Mathematica;

(δ) Προχωράμε τώρα λίγο-λίγο προς το κύριο, το τελικό μέρος της προσεγγιστικής λύσεως του παρόντος προβλήματος στρέψεως που αντιμετωπίζουμε. Καταρχήν κατασκευάζουμε ένα πλέγμα (mesh) στην τετραγωνική διατομή R της υπό στρεπτική καταπόνηση ράβδου με απόσταση των γραμμών $h = a/4$. Θα χρησιμοποιήσουμε επομένως τις ακόλουθες πέντε υποδιαιρέσεις: $[-0.50, -0.25, 0, 0.25, 0.50]$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εξής δύο εντολές:

$$\{h = a/4, \text{divisions} = \{-0.50, -0.25, 0, 0.25, 0.50\}\}$$

στη Mathematica. Μια πρόχειρη σχεδίαση του πλέγματός μας μπορεί να βασισθεί στην εντολή Plot (μαζί με την επιλογή GridLines), πιο συγκεκριμένα σε κατάλληλες/ουσιαστικές τροποποιήσεις και βελτιώσεις (προς το κομψότερο) της εξής άκομψης εντολής:

```
Plot[0, {x, -0.5, 0.5}, GridLines -> {divisions, divisions},
      AspectRatio -> 2, Background -> RGBColor[1, 1, 0]]
```

Έτσι θα προκύψει ένα πραγματικά καλαίσθητο πλέγμα στην τετραγωνική διατομή μας R .

(ε) Παραπέρα, όπως είναι γνωστό, οι συνοριακές συνθήκες για την τασική συνάρτηση $\varphi(x, y)$ του Prandtl σε κλασικά στατικά προβλήματα στρέψεως ράβδων είναι απλά ο μηδενισμός της σε ολόκληρο το σύνορο C της διατομής R της ράβδου. Ας ξεκινήσουμε από τις κατακόρυφες πλευρές της $x = \pm a/2$. Πώς μπορεί να δηλωθεί ο μηδενισμός αυτός στους κόμβους του πλέγματος που υιοθετήσαμε; **Υπόδειξη:**

```
Table[{{x = j h, y = k h}, φ[j h, k h] = 0}, {k, -2, 2}, {j, -2, 2, 4}]
```

Να εξηγηθεί επίσης λεπτομερώς τι γίνεται με την εντολή αυτή. Στη συνέχεια να κατασκευασθεί και η αντίστοιχη εντολή για τις οριζόντιες πλευρές $y = \pm a/2$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
Table[{{x = j h, y = k h}, φ[j h, k h] = 0}, {k, 2, -2, -4}, {j, -2, 2}]
```

Γιατί ο όρος $\{k, 2, -2, -4\}$ είναι πρώτος και γιατί ακριβώς έχει αυτή τη μορφή; **Υπόδειξη:** Γίνεται μια (ασφαλώς μη αναγκαία υπολογιστικά) απόπειρα «συμμορφώσεως» με τη γεωμετρία της διατομής: πάνω και κάτω πλευρά: η πάνω πλευρά, η πλευρά $y = a/2$, στην πρώτη σειρά του πίνακα, ενώ η κάτω πλευρά, η πλευρά $y = -a/2$, στη δεύτερη σειρά.

(στ) Οι συνοριακές συνθήκες ήδη καθορίστηκαν (στο προηγούμενο ερώτημα), εξίσου σημαντικές όμως είναι κι οι καθαυτό γραμμικές αλγεβρικές (όχι διαφορικές ούτε ολοκληρωτικές) εξισώσεις

όπου θα αναχθεί το πρόβλημά μας με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών που ήδη περιγράψαμε. Με τη συνάρτηση $\Delta\phi[x_, y_]$ να έχει ήδη καθορισθεί στο τέλος του ερωτήματος (γ) η εύρεση των εξισώσεων αυτών, equations, είναι ευκολότατη. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
equations = Table[Δφ[j h, k h] == -2 Gθ, {k, -1, 1}, {j, -1, 1}]
```

(Πειράζει που δεν υπάρχει κενό μεταξύ των G και θ ;) Και ο καθορισμός των αγνώστων, δηλαδή των τιμών της υπό (προσεγγιστικό) προσδιορισμό τασικής συναρτήσεως του Prandtl $\phi(x, y)$ στους εσωτερικούς κόμβους του πλέγματος που σχεδιάστηκε πιο πάνω (στους συνοριακούς κόμβους η τασική συνάρτηση αυτή έχει ήδη μηδενισθεί στο αμέσως προηγούμενο ερώτημα) είναι εξαιρετικά απλός. Πώς μπορεί να επιτευχθεί; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
unknowns = Table[φ[j h, k h], {k, -1, 1}, {j, -1, 1}]
```

Ποιο είναι το «μήκος» των εξισώσεων και των αγνώστων στο πλέγμα μας; (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Length.)

(ζ) Τελικά η εύρεση της προσεγγιστικής λύσεως solution στο παρόν πρόβλημα στρέψεως με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών είναι απλή, π.χ. με χρήση της εντολής Solve. Πώς μπορεί να επιτευχθεί αυτή; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
solution = Solve[equations//Flatten, unknowns//Flatten]
```

(Απαιτείται πραγματικά η χρήση και της εντολής Flatten;) Ποια είναι η αριθμητική έκφραση της λύσεως αυτής; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
solution//N
```

Αν και εν προκειμένω δεν είναι ιδιαίτερα αξιόλογο, μπορεί εντούτοις να παρατηρηθεί ότι η παραπάνω λύση solution περιλαμβάνει και σύμβολα: τα a , G και θ σε αντίθεση με την εντολή NDSolve (που έτσι κι αλλιώς δεν είναι εφαρμόσιμη, όπως ήδη αναφέρθηκε και διαπιστώθηκε, στο συγκεκριμένο πρόβλημα). Το ίδιο ισχύει και στις κλασικές γλώσσες αριθμητικών υπολογισμών: Fortran (σύντμηση του όρου Formula Translation), Basic και C. Ασφαλώς ο προσεκτικός φοιτητής κι η προσεκτική φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός έχουν ήδη επίσης σημειώσει ότι λόγω της συμμετρίας της τετραγωνικής διατομής R και η λύση είναι συμμετρική. Θα αρκούσαν επομένως λιγότερες εξισώσεις (μόλις τρεις) και λιγότεροι (επίσης τρεις) άγνωστοι. Βέβαια αυτό είναι απόλυτα σωστό και συνιστώμενο, όμως στη συγκεκριμένη άσκηση δόθηκε βαρύτητα στη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και αμελήθηκε η συμμετρία του προβλήματος. Αυτή απαιτεί και κάποιον επιπλέον κόπο και σκέψη για την πρακτική υλοποίησή της στο υπολογιστικό περιβάλλον που μας προσφέρει η *Mathematica*.

ΟΜΑΔΑ ΕΜΙΙΙ-Η

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Η1 ($[X$ και $Y]$ Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους: *Εξίσωση του Laplace, Αρμονικές Συναρτήσεις, Συνθήκες των Cauchy-Riemann. Ρευστομηχανική Ιδεατού Ρευστού: Αστροβίλη Ροή, Δυναμικό Ταχύτητας, Ροϊκή Συνάρτηση*): Θεωρούμε τη μόνιμη αστρόβιλη διδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού που οφείλεται σε *σημειακή πηγή* ή *καταβόθρα (απαγωγή)* στην αρχή των συντεταγμένων O . Σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) το σχετικό *δυναμικό ταχύτητας* (ή *συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας*) Φ και η αντίστοιχη *ροϊκή συνάρτηση* (ή *συνάρτηση ροής*) Ψ δίδονται από τους τύπους

$$\Phi = A \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) \quad \text{και} \quad \Psi = A\theta$$

με τις ποσότητες A και r_0 γνωστές σταθερές. Ζητούνται: (α) Να αποδειχθεί υποχρεωτικά με τη χρήση Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) και με αναλυτική εκτέλεση όλων των αναγκαίων υπολογισμών ότι το δυναμικό ταχύτητας Φ και η ροϊκή συνάρτηση Ψ είναι αρμονικές συναρτήσεις.

(β) Να αποδειχθεί ότι οι ίδιες συναρτήσεις Ψ πληρούν τις συνθήκες των Cauchy–Riemann, είναι δηλαδή συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις και πάλι με τη χρήση Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) .

Υπόδειξη: Πρόκειται για πολύ απλή άσκηση. Η εντολή παραγωγίσεως είναι D στη *Mathematica*. Πιο κάτω αναφέρονται οι εντολές που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στη *Mathematica*:

Ορισμός των πολικών συντεταγμένων (r, θ) συναρτήσεων των Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) (το θ εμφανίζεται στη *Mathematica* με Esc μικρό Λατινικό q Esc)

$$\{r = \text{Sqrt}[x^2 + y^2], \theta = \text{ArcTan}[y/x]\}$$

Ορισμός του δυναμικού ταχύτητας Φ και της ροϊκής συναρτήσεως Ψ (Το Φ εμφανίζεται στη *Mathematica* με Esc Κεφαλαίο Λατινικό F Esc, το Ψ με Esc Κεφαλαίο Λατινικό Y Esc.)

$$\{\Phi = A \text{Log}[r/r0], \Psi = A \theta\}$$

Επαλήθευση (verification) με παραγωγίσεις ότι και οι δύο συναρτήσεις Φ και Ψ είναι αρμονικές συναρτήσεις. (Εδώ απαιτείται και απλοποίηση των αποτελεσμάτων με την εντολή *Simplify*.)

$$\text{ver1} = \{D[\Phi, \{x, 2\}] + D[\Phi, \{y, 2\}] == 0, D[\Psi, \{x, 2\}] + D[\Psi, \{y, 2\}] == 0\} // \text{Simplify}$$

Επαλήθευση ότι πληρούνται και οι δύο συνθήκες (ή εξισώσεις) των Cauchy–Riemann. Πρόκειται επομένως για συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις.

$$\text{ver2} = \{D[\Phi, x] == D[\Psi, y], D[\Phi, y] == -D[\Psi, x]\} // \text{Simplify}$$

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Η2 (IX Χωρισμός των Μεταβλητών, Διδιάστατη Εξίσωση του Laplace, Πρόβλημα Dirichlet): Θεωρούμε ορθογωνική περιοχή $R = [0, a] \times [0, b]$ (με $a > 0$ και $b > 0$) στο επίπεδο Oxy . Για την άγνωστη συνάρτηση $u = u(x, y)$ στην περιοχή αυτή R ισχύει η διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Διαθέτουμε επίσης συνοριακές συνθήκες Dirichlet στο σύνορο C της ορθογωνικής περιοχής R . Συγκεκριμένα μηδενίζονται οι συνοριακές τιμές της συναρτήσεως $u(x, y)$ στις τρεις πλευρές $x = 0$, $y = 0$ και $y = b$ του συνόρου C της ορθογωνικής περιοχής D . (Πρόκειται για ομογενείς συνοριακές συνθήκες.) Αντίθετα δε μηδενίζονται στην τέταρτη πλευρά $x = a$. Στην πλευρά αυτή $x = a$ διαθέτουμε για την άγνωστη συνάρτηση $u(x, y)$ τη συνοριακή συνθήκη $u(a, y) = g(y)$ με $g(y)$ κατάλληλη γνωστή συνάρτηση στο διάστημα $0 \leq y \leq b$. Επομένως έχουμε τελικά ένα αρκετά απλό πρόβλημα Dirichlet στην ορθογωνική περιοχή R . Ζητούνται: (α) Η εύρεση του τύπου της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace. (β) Επτά συνολικά χαρακτηρισμοί της. (γ) Έξι τουλάχιστον προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού όπου απαντάται η διδιάστατη εξίσωση του Laplace. (δ) Με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η αναγωγή της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace στο πρόβλημα Dirichlet που ήδη καθορίστηκε σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως προς τις ανεξάρτητες μεταβλητές x και y . Να γίνει επίσης ιδιαίτερα λεπτομερής έλεγχος για το αν η σχετική σταθερά διαχωρισμού λ πρέπει να είναι (i) θετική, (ii) μηδέν ή (iii) αρνητική υπό τις παρούσες συνοριακές συνθήκες. (ε) Από τις εξισώσεις αυτές η εύρεση των ιδιοσυναρτήσεων $X_n(x)$, $Y_n(y)$ και $u_n(x, y)$ παίρνοντας υπόψη και τις τρεις ομογενείς συνοριακές συνθήκες. (στ) Η πλήρης λύση $u(x, y)$ του παρόντος προβλήματος Dirichlet σε μορφή κατάλληλης σειράς.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Η3 (IX και Y) Ρευστομηχανική: Αστρόβιλη Ροή Ιδεατού Ρευστού, Δυναμικό Ταχύτητας): Στη Ρευστομηχανική θεωρούμε τη μόνιμη (σταθερή) τριδιάστατη αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού. Δηλώνουμε με u, v και w τις τρεις συνιστώσες της διανυσματικής ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού (κατά τους άξονες Ox, Oy και Oz αντίστοιχα). Ζητούνται: (α) Ο υπολογισμός του στροβιλισμού (σχεδόν ισοδύναμα της περιστροφής) της ταχύτητας \mathbf{V} μέσω των τριών συνιστωσών της u, v και w . (β) Για αστρόβιλη ροή, που την υποθέτουμε εδώ, οι σχετικές τρεις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. (γ) Με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας $\Phi = \Phi(x, y, z)$ η απόδειξη πληρώσεως και των τριών αυτών διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή η εξασφάλιση του ότι η ροή είναι αστρόβιλη (εξασφάλιση του αστρόβιλου της ροής). (δ) Απομένει η εξίσωση της

συνεχείας. Ποια είναι αυτή και ποια μορφή παίρνει τώρα με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας Φ στο πρόβλημα που εξετάζουμε; (ε) Να δοθούν επτά χαρακτηρισμοί για την τελική αυτή εξίσωση. (στ) Τι πετύχαμε τελικά από μαθηματικής απόψεως στο παρόν πρόβλημα με την εισαγωγή του δυναμικού ταχύτητας Φ και με ποιο ακριβώς κόστος; (ζ) Θα ήταν χρήσιμο το δυναμικό αυτό Φ και σε μη αστρόβιλη ροή; Γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Η4 ([X και Y] Ρευστομηχανική: Αστρόβιλη Ροή Ιδεατού Ρευστού, Δυναμικό Ταχύτητας): Συνεχίζοντας την προηγούμενη άσκηση (με τις ίδιες υποθέσεις για τη ροή), θεωρούμε το δυναμικό ταχύτητας

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{με} \quad x^2 + y^2 + z^2 \neq 0 \quad \text{ή} \quad \Phi(x, y, z) = \frac{1}{\rho} \quad \text{με} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \neq 0$$

σε Καρτεσιανές συντεταγμένες x, y και z . Ζητούνται: (α) Να υπολογισθούν και οι τρεις συνιστώσες u, v και w της ταχύτητας \mathbf{V} του ιδεατού ρευστού. (β) Για τις συνιστώσες αυτές (εδώ, όχι γενικά) να επαληθευθούν και οι τρεις εξισώσεις που δηλώνουν το αστρόβιλο της ροής. (γ) Να επαληθευθεί άμεσα ότι πραγματικά το πιο πάνω δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y, z)$ είναι αρμονική συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Η5 ([X] Μετασχηματισμός Fourier, Περιβαλλοντική Υδραυλική: Φαινόμενα Μεταφοράς: Μεταγωγή και Διάχυση): Εξετάζουμε τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με το νερό να ρέει με σταθερή ταχύτητα V ($V > 0$). Η συγκέντρωση του ρύπου $c = c(x, t)$ με x τη θέση ($-\infty < x < \infty$) και t το χρόνο ($t \geq 0$) είναι άγνωστη συνάρτηση. Ο ρύπος μεταφέρεται τόσο (i) με μεταγωγή (εξαιτίας της ταχύτητας V του νερού στο υδατόρρευμα) όσο και (ii) με μοριακή διάχυση με σταθερά μοριακής διαχύσεως D ($D > 0$). Την αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ η συγκέντρωση του ρύπου είναι

$$c(x, 0) = g(x)$$

με τη $g(x)$ κατάλληλη γνωστή συνάρτηση. Ζητούνται: (α) Η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που ισχύει στο συγκεκριμένο πρόβλημα και οι ειδικές περιπτώσεις της (i) για απλή μεταγωγή του ρύπου και (ii) για απλή μοριακή διάχυση του ρύπου. (β) Η εύρεση του τύπου της διαφορικής εξισώσεως της μεταγωγής-διαχύσεως, στην οποία αναφερόμαστε εδώ. (γ) Επτά χαρακτηρισμοί της ίδιας διαφορικής εξισώσεως. (δ) Χωρίς καμία, απολύτως καμία αλλαγή μεταβλητής και υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Fourier (ως προς t ή ως προς x και γιατί;) η αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση. (ε) Ποιες ακριβώς υποθέσεις έχουν γίνει για $x \rightarrow \pm\infty$; (στ) Η εύρεση της λύσεως $C(\omega, t)$ της συνήθους διαφορικής εξισώσεως χωρίς να λησμονηθεί η αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$. (ζ) Η εύρεση της συγκεντρώσεως $c(x, t)$ του ρύπου (σε κατά το δυνατόν απλοποιημένη μορφή) απλά με τη χρήση του γενικού ολοκληρωτικού τύπου για την αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Η6 ([X] Εκθετική Αντικατάσταση, Περιβαλλοντική Υδραυλική: Φαινόμενα Μεταφοράς: Μεταγωγή και Διάχυση): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Ζητούνται επίσης: (α) Να ελεγχθεί εάν ή όχι είναι δυνατή η εύρεση της γενικής λύσεως της εξισώσεως της μεταγωγής-διαχύσεως με γενική (όχι απλά εκθετική) κατάλληλα παραγωγίσιμη δοκιμαστική συνάρτηση της μορφής $\varphi(x + \mu t)$. (β) Η εύρεση της ίδιας γενικής λύσεως με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως τελικά (γ) σε ολοκληρωτική μορφή. (δ) Μοιάζει το παρόν τελικό αποτέλεσμα με το αντίστοιχο της προηγούμενης ασκήσεως; (ε) Λαμβάνοντας υπόψη και τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier $G(\omega)$ μιας συναρτήσεως $g(x)$ (εδώ της αρχικής μας συνθήκης $c(x, 0) = g(x)$), πώς μπορούμε να μετατρέψουμε τη γενική λύση που βρήκαμε στην παρούσα άσκηση στη μερική λύση που είχαμε βρει στην προηγούμενη άσκηση παίρνοντας και τώρα υπόψη μας την αρχική συνθήκη $c(x, 0) = g(x)$; Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να πετύχουμε τη σύμπτωση των αποτελεσμάτων με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier και με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Η7 ([X ή Y] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Αρμονικές Συναρτήσεις: Μετάδοση Θερμότητας, Κλασική Μηχανική, Ρευστομηχανική, Μηχανική των Υλικών): Ζητούνται: (α) [X και Y] Να ελεγχθεί εάν οι συναρτήσεις

$$\cos x \exp y, \quad \sin x \exp y, \quad x^3 - 3xy^2$$

είναι αρμονικές, δηλαδή εάν επαληθεύουν την εξίσωση του Laplace στο επίπεδο Oxy ή όχι.

(β) [Y] Το ίδιο ερώτημα, τώρα με τη χρήση της εντολής Laplacian του πακέτου VectorAnalysis της Mathematica (στην περιοχή Calculus). **Υπόδειξη:** Δεν πρέπει να λησμονηθεί η δήλωση χρήσεως Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y, z) (ένδειξη Cartesian).

(γ) [X ή Y] Ανάλογο ερώτημα (αποκλειστικά με τη χρήση του ίδιου πακέτου) για τις συναρτήσεις

$$r, \quad \frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r^2}, \quad \ln r, \quad \theta, \quad \ln \theta,$$

και τις κάπως δυσκολότερες συναρτήσεις [Y]

$$\frac{1}{r^2} \cos 2\theta, \quad \frac{1}{r^2} \sin 2\theta, \quad r \ln r \cos \theta - r\theta \sin \theta, \quad r \ln r \sin \theta + r\theta \cos \theta$$

σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) στο επίπεδο. (Το σύμβολο \ln δηλώνει τη συνηθισμένη λογαριθμική συνάρτηση: το φυσικό, όχι το δεκαδικό, λογάριθμο, που παριστάνεται στη Mathematica με Log .) Ποιες είναι οι σχετικές βασικές παρατηρήσεις; **Υπόδειξη:** Δεν πρέπει να ξεχνιέται η πιθανώς αναγκαία απλοποίηση των τελικών τύπων. Σε ποιες περιπτώσεις είναι αυτή απόλυτα αναγκαία;

(δ) [X ή Y] Επίσης ανάλογο ερώτημα, δηλαδή και πάλι η πιθανή επαλήθευση της εξίσωσης Laplace, για τις συναρτήσεις

$$\ln \rho, \quad \frac{1}{\rho}, \quad \frac{1}{\rho^2}$$

αλλά τώρα σε σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, φ) στο χώρο. Ποιες είναι οι σχετικές παρατηρήσεις;

(ε) [Y] Τέλος και πάλι στο επίπεδο (επίσης με το πακέτο VectorAnalysis) να ελεγχθεί η πιθανή αρμονικότητα των συναρτήσεων

$$\frac{\sin 2y}{\cosh 2x + \cos 2y}, \quad \frac{\sinh 2x}{\cosh 2x + \cos 2y}$$

φυσικά και πάλι σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. Απαιτούνται απλοποιήσεις των αποτελεσμάτων με την εντολή Simplify;

(στ) [X ή Y] Τελικά σε ποια πολύ συγκεκριμένα και κλασικά προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού απαντώνται (μεταξύ άλλων) αρμονικές συναρτήσεις; Να αναφερθούν πέντε τέτοια προβλήματα. Σαν συμπέρασμα να αναφερθούν παραδείγματα από τις παραπάνω συγκεκριμένες συναρτήσεις (όσες αποδείχθηκαν αρμονικές εννοείται) που πιθανώς να είναι χρήσιμες σε κάποιο ή σε κάποια από τα προβλήματα αυτά. Ποια θεωρείτε την πιο βασική αρμονική συνάρτηση στο επίπεδο; Στο χώρο;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Η8 ([X ή Y] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Διάδοση Κυμάτων σε Ελαστικά Μέσα, Εξίσωση Helmholtz): Για τη διδιάστατη εξίσωση του κύματος

$$c^2 \nabla^2 u(x, y, t) = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2}$$

που απαντάται π.χ. στη διάδοση κυμάτων σε ελαστικά μέσα,⁸ Ζητούνται:

(α) Να αποδειχθεί ότι για λύσεις της μορφής

$$u(x, y, t) = U(x, y) \exp(-i\omega t)$$

⁸Achenbach, J. D., *Wave Propagation in Elastic Solids* (Διάδοση Κυμάτων σε Ελαστικά Στερεά). North-Holland, Amsterdam, 1975.

(με $i = \sqrt{-1}$ τη φανταστική μονάδα, t το χρόνο και ω σταθερά: την κυκλική συχνότητα) η διαφορική αυτή εξίσωση με μερικές παραγώγους ανάγεται στην απλούστερη εξίσωση του Helmholtz, δηλαδή

$$\nabla^2 U(x, y) + k^2 U(x, y) = 0$$

με το k κατάλληλη πραγματική σταθερά. Ποια είναι η τιμή της;

(β) Ποιας ακόμη απλούστερης διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους αποτελεί γενίκευση η εξίσωση του Helmholtz; (Ανάλογα ισχύουν και στην τριδιάστατη περίπτωση.)

(γ) Τέλος να ελεγχθεί και πάλι η εντολή DSolve της Mathematica όσον αφορά στη δυνατότητά της για την επίλυση της παραπάνω διδιάστατης εξίσωσης του Helmholtz.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Η9 ([X ή Y] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Διαρμονική Εξίσωση, Ελαστικότητα: Επίπεδο Ελαστικό Πρόβλημα, Τασική Συνάρτηση του Airy): Ανάλυση άσκηση για τη διαρμονική εξίσωση

$$\Delta^2 A(x, y) = 0 \quad \text{ισοδύναμα} \quad \nabla^4 A(x, y) = 0$$

στο επίπεδο με τη χρήση της εντολής Biharmonic του πακέτου VectorAnalysis, στην περιοχή Calculus της Mathematica σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. Η Mathematica πετυχαίνει να βρει τη γενική λύση (στο επίπεδο) τόσο της αρμονικής εξίσωσης όσο και της εξίσωσης του Poisson (όπως έχει διαπιστωθεί σε προηγούμενες ομάδες ασκήσεων), αλλά φαίνεται ότι δεν έχει γίνει ακόμη ο κατάλληλος προγραμματισμός της για τη διαρμονική εξίσωση, ίσως γιατί αυτή είναι τετάρτης τάξεως. (Σημειώνεται ότι τη διαρμονική εξίσωση επαληθεύει η τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$. Την επαληθεύουν και οι συνιστώσες των τάσεων και των παραμορφώσεων στο επίπεδο; Γιατί;) Με βάση αυτό το αρνητικό αποτέλεσμα για τη Mathematica ζητείται τώρα απλά να επαληθευθεί η γνωστή γενική πραγματική λύση της διαρμονικής εξίσωσης με τη χρήση της εντολής Biharmonic που προαναφέρθηκε. Έπειτα να ελεγχθεί με κάποιο τρόπο και η γενική λύση

$$A(x, y) = (x^2 + y^2)p(x, y) + q(x, y)$$

της διαρμονικής εξίσωσης με τις συναρτήσεις $p(x, y)$ και $q(x, y)$ πραγματικές και αρμονικές και τις δύο. Η τελευταία λύση έχει το πλεονέκτημα ότι είναι σε απόλυτα πραγματική μορφή, αλλά και το προφανές μειονέκτημα ότι οι συναρτήσεις $p(x, y)$ και $q(x, y)$ πρέπει να είναι αρμονικές συναρτήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Η10 ([X ή Y] Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Ελαστικότητα: Στρέψη: Γενικά): Σε προβλήματα στρέψεως συνήθων ευθύγραμμων ελαστικών ράβδων⁹ θεωρούμε τους τύπους για τις μετατοπίσεις u, v, w

$$u = -\theta zy, \quad v = \theta zx, \quad w = \theta \psi(x, y)$$

με τον άξονα z κατά μήκος της ράβδου σε στρέψη και τους άξονες x και y πάνω στη διατομή της, που θεωρείται σταθερή κατά μήκος της ράβδου. Το σύμβολο θ δηλώνει τη (σταθερή) γωνία στρέψεως ανά μονάδα μήκους (σε rad/m) και $\psi(x, y)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση στρεβλώσεως της διατομής της ράβδου (όχι η τασική συνάρτηση του Prandtl). Οι διατμητικές παραμορφώσεις γ_{xz} και γ_{yz} δίνονται από τους τύπους

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}.$$

⁹Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity* (Θεωρία Ελαστικότητας), 3η έκδοση. McGraw-Hill, New York, Tokyo, 1970, Κεφάλαιο 10: Torsion (Στρέψη).

Επίσης οι διατμητικές τάσεις τ_{xz} και τ_{yz} , που είναι και οι μόνες μη ταυτοτικά μηδενικές συνιστώσες των τάσεων στο παρόν πρόβλημα καθαρής στρέψεως, δίνονται από τους τύπους

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

με G το μέτρο διατμήσεως του ισότροπου και γραμμικά ελαστικού υλικού της ράβδου. Ασφαλώς ισχύουν και οι εξισώσεις ισορροπίας για τις συνιστώσες των τάσεων, δηλαδή

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Πιθανώς με τη χρήση της *Mathematica* στους υπολογισμούς ζητούνται:

(α) Οι εκφράσεις των διατμητικών παραμορφώσεων γ_{xz} και γ_{yz} με τη βοήθεια της συναρτήσεως στρεβλώσεως $\psi(x, y)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές `D` και `Factor`. Το ίδιο και για τις διατμητικές τάσεις τ_{xz} και τ_{yz} .

(β) Να ελεγχθεί η ικανοποίηση των εξισώσεων ισορροπίας. Ποιες από αυτές ισχύουν εκ ταυτότητος στο παρόν πρόβλημα; Στη συνέχεια να βρεθεί η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους την οποία πρέπει να επαληθεύει η συνάρτηση στρεβλώσεως $\psi(x, y)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί και η εντολή `Simplify`. Τελικά πρέπει να προκύψει η κλασική διδιάστατη εξίσωση του Laplace. Τι είδους διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (δευτέρας τάξεως) είναι αυτή; Υπερβολική, παραβολική ή ελλειπτική; Γιατί;

(γ) Εναλλακτική δυνατότητα για την αντιμετώπιση προβλημάτων (καθαρής) στρέψεως, όπως το παρόν, προσφέρει η τασική συνάρτηση του Prandtl $\varphi(x, y)$ με τις συνιστώσες των διατμητικών τάσεων να δίνονται τώρα από τους τύπους

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Ποιες προφανείς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους συνδέουν την συνάρτηση στρεβλώσεως με την τασική συνάρτηση; (**Υπόδειξη:** Δε χρειάζεται να γίνουν υπολογισμοί!) Παραπέρα να αποδειχθεί ότι επαληθεύονται και οι τρεις εξισώσεις ισορροπίας. Με τη χρήση της τασικής συναρτήσεως $\varphi(x, y)$ αποδεικνύεται τελικά ότι το όλο πρόβλημα της στρέψεως ανάγεται στην επίλυση της ακόλουθης διαφορικής εξισώσεως:

$$\Delta \varphi = -2G\theta \quad \text{ισοδύναμα} \quad \nabla^2 \varphi = -2G\theta \quad \text{για κάθε } (x, y) \in D,$$

που είναι βέβαια μια εξίσωση Poisson. Η εξίσωση αυτή ισχύει σε ολόκληρη τη διατομή D της ράβδου. Στο σύνορο $C \equiv \partial D$ της διατομής αποδεικνύεται ότι η τασική συνάρτηση $\varphi(x, y)$ παίρνει σταθερή τιμή, που μπορεί κάλλιστα να θεωρηθεί ίση με το μηδέν, δηλαδή

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \text{για κάθε } (x, y) \in C \equiv \partial D.$$

Γιατί εν προκειμένω είναι δυνατόν η σταθερά να θεωρηθεί ίση με το μηδέν;

(δ) Η συνάρτηση στρεβλώσεως $\psi(x, y)$ ήταν αρμονική (η Λαπλασιανή της ήταν μηδέν), ενώ η τασική συνάρτηση $\varphi(x, y)$, παρά τα πλεονεκτήματά της (απλούστεροι τύποι για τις διατμητικές τάσεις και μηδενική τιμή στο σύνορο C της διατομής) δεν είναι. Το μειονέκτημα αυτό της τασικής συναρτήσεως μπορεί να εξαλειφθεί εν μέρει με τον ακόλουθο τρόπο γραφής της

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) - \frac{G\theta}{2} (x^2 + y^2).$$

Ζητείται να αποδειχθεί ότι η νέα αυτή «τασική» συνάρτηση $\varphi_1(x, y)$ είναι πραγματικά αρμονική συνάρτηση. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `D` για τις απαιτούμενες μερικές παραγωγίσεις (ή η εντολή `Laplacian` του πακέτου `VectorAnalysis`) και στη συνέχεια η εντολή `Simplify`.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Η11 (IX ή Y) Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Τριδιάστατη Ελαστικότητα, Μηχανική των Υλικών, Εξισώσεις Ισορροπίας, Τασικές Συναρτήσεις του Maxwell): Εδώ θεωρούμε τις τρεις κλασικές εξισώσεις ισορροπίας (equilibrium equations) στην τριδιάστατη, ισότροπη και γραμμική Ελαστικότητα χωρίς δυνάμεις μάζας:¹⁰

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\tag{11}$$

με σ_x , σ_y και σ_z τις ορθές τάσεις και τ_{xy} , τ_{yz} και τ_{zx} τις διατμητικές τάσεις σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) . Ζητούνται:

(α) Να γραφούν οι εξισώσεις αυτές με τη σύνταξη της *Mathematica* σαν `eqe1`, `eqe2` και `eqe3` αντίστοιχα και να δηλωθούν όλες μαζί σαν μια λίστα με τρία στοιχεία. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί και η εντολή

$$\text{eqs} = \{\text{eqe1}, \text{eqe2}, \text{eqe3}\}$$

Κατά τη γραφή αυτή να γίνεται ρητή δήλωση του γεγονότος ότι οι τάσεις είναι συναρτήσεις των Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y, z) .

(β) Ποιες είναι οι ανεξάρτητες και ποιες οι εξαρτημένες μεταβλητές στις εξισώσεις αυτές;

(γ) Προφανώς είναι θεμελιώδους σημασίας στην τριδιάστατη Ελαστικότητα (επομένως και στη Μηχανική των Υλικών) η πλήρωση και των τριών συνθηκών ισορροπίας `eqs`. Προφανώς αυτές αποτελούν σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων με έξι άγνωστες συναρτήσεις: τις τάσεις (ή συνιστώσες του ταυυστή των τάσεων σ). Αφού τούτο έχει καταστεί δυνατόν, ο Πολιτικός Μηχανικός μπορεί να εστιάσει την παραπέρα προσοχή του στις εξισώσεις συμβιβαστού με όρους τάσεων (εξισώσεις των Beltrami–Michell) χωρίς να αμελεί βέβαια και τις υφιστάμενες συνοριακές συνθήκες. Περιοριζόμαστε στην παρούσα άσκηση απλά στην «αυτόματη» πλήρωση των εξισώσεων ισορροπίας `eqs`. Θα αναφέρουμε και θα επαληθεύσουμε τη μέθοδο των τασικών συναρτήσεων που πρότεινε ο J. C. Maxwell το 1862. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή (που δεν είναι βέβαια η μοναδική μέθοδος: άλλες γνωστές τασικές συναρτήσεις είναι εκείνες του G. Morera, 1892) οι τάσεις (οι συνιστώσες του ταυυστή των τάσεων) μπορούν να καθορισθούν από τους τύπους¹¹

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}$$

για τις ορθές τάσεις και τους τύπους

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial x}$$

για τις διατμητικές τάσεις μέσω τριών νέων άγνωστων συναρτήσεων: των τασικών συναρτήσεων του Maxwell $\varphi_{1,2,3} = \varphi_{1,2,3}(x, y, z)$. Πώς μπορούν να δηλωθούν οι πιο πάνω εκφράσεις των

¹⁰Μαστρογιάννη, Ε. Ν., *Μηχανική των Υλικών*, Τόμος Πρώτος. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999, σ. 41, εξισώσεις (1.28).

¹¹Filonenko–Borodich, M., *Theory of Elasticity (Θεωρία Ελαστικότητας)*. Mir Publishers, Moscow, 1968, Κεφάλαιο IX, Παράγραφος 56, σσ. 259–263.

τάσεων στη *Mathematica*; **Υπόδειξη:** Στις σχετικές δηλώσεις να αναφέρονται ρητά οι Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) τόσο στις τάσεις όσο και στις τασικές συναρτήσεις του Maxwell.

(δ) Τελικά ζητείται να εξακριβωθεί ότι με την εισαγωγή των τασικών συναρτήσεων του Maxwell (που τις υποθέτουμε κατάλληλα παραγωγίσιμες) κι οι τρεις παραπάνω εξισώσεις ισορροπίας εφς πληρούνται πάντοτε. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί απλά η εντολή εφς. Ποια είναι η εξοδος της από τη *Mathematica*; Σύμφωνα με αυτά το συμπέρασμά μας είναι ότι οι εξισώσεις ισορροπίας μπορούν πλέον να θεωρούνται ότι πληρούνται αυτόματα με την έμφαση στη συνέχεια να δίνεται στην πλήρωση και των εξισώσεων συμβιβαστού (εξισώσεων των Beltrami–Michell) καθώς και των συνοριακών συνθηκών. Τώρα όμως οι συνοριακές συνθήκες εκφράζονται συναρτήσει των τασικών συναρτήσεων του Maxwell $\varphi_{1,2,3}$.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Η12 (ΙΧ ή Υ) Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Ρευστομηχανική, Πολικές Συντεταγμένες, Εξίσωση της Συνεχειάς, Ροή γύρω από Κύλινδρο, Ροϊκή Συνάρτηση, Συνάρτηση Δυναμικού Ταχύτητας, Εξίσωση του Laplace): Θεωρούμε την εξίσωση της συνεχειάς στη Ρευστομηχανική για ιδεατό ρευστό (που είναι και ασυμπίεστο) στη μόνιμη κατάσταση (στο «στατικό» πρόβλημα) και σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . Τότε η εξίσωση αυτή παίρνει τη μορφή:

$$\frac{1}{r} v_r(r, \theta) + \frac{\partial v_r(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta(r, \theta)}{\partial \theta} = 0$$

με (v_r, v_θ) τις συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού. Ζητούνται:

(α) Να δηλωθεί η πιο πάνω εξίσωση της συνεχειάς σαν Continuity Equation χωρίς να λησμονείται η εξάρτηση των συνιστωσών της ταχύτητας από τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) .

(β) Στο κλασικό πρόβλημα της ροής γύρω από κύλινδρο ακτίνας a με κέντρο O την αρχή των συντεταγμένων (ο κύλινδρος εμποδίζει τη ροή!) οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού (σε πολικές συντεταγμένες και πάλι) έχουν την μορφή

$$v_{r1}(r, \theta) = V_0 \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \cos \theta, \quad v_{\theta 1}(r, \theta) = -V_0 \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right] \sin \theta$$

με V_0 την ταχύτητα του ρευστού στο άπειρο (ουσιαστικά πολύ μακριά από τον κύλινδρο) κατά τον άξονα Ox (δηλαδή με $\theta = 0$). Στο συγκεκριμένο αυτό πρόβλημα ζητείται η επαλήθευση ότι πράγματι ισχύει η εξίσωση της συνεχειάς. **(Υπόδειξη:** Απαιτείται η χρήση και της εντολής Simplify.)

(γ) Για να είναι εξασφαλισμένος ο Πολιτικός Μηχανικός για την ισχύ της εξισώσεως της συνεχειάς, χρησιμοποιεί τη ροϊκή συνάρτηση $\Psi(r, \theta)$ για τον καθορισμό των συνιστωσών της ταχύτητας $v_{r,\theta}(r, \theta)$, που δηλώνονται στο ερώτημα αυτό σαν $v_{r2}(r, \theta)$ και $v_{\theta 2}(r, \theta)$. Τότε ισχύουν οι τύποι

$$v_{r2}(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial \theta}, \quad v_{\theta 2}(r, \theta) = -\frac{\partial \Psi(r, \theta)}{\partial r}.$$

Να επαληθευθεί ότι οι τύποι αυτοί εξασφαλίζουν την πλήρωση της εξισώσεως της συνεχειάς (εννοείται ασφαλώς με κατάλληλα παραγωγίσιμη τη ροϊκή συνάρτηση $\Psi(r, \theta)$).

(δ) Άλλη χρήσιμη συνάρτηση στη Ρευστομηχανική (του ιδεατού ρευστού) είναι η συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$. Στην περίπτωση αυτή οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας (που δηλώνονται στο ερώτημα αυτό σαν $v_{r3}(r, \theta)$ και $v_{\theta 3}(r, \theta)$) ορίζονται μέσω των τύπων

$$v_{r3}(r, \theta) = \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial r}, \quad v_{\theta 3}(r, \theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial \theta}.$$

Ποια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους απαιτείται να πληροί η συνάρτηση δυναμικού ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$, ώστε να ισχύει η εξίσωση της συνεχειάς; Να ελεγχθεί επίσης ότι η διαφορική αυτή εξίσωση δεν είναι άλλη παρά η εξίσωση του Laplace σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Laplacian του πακέτου VectorAnalysis με την επιλογή Cylindrical[r,θ,z].

(ε) Με τη χρήση της εντολής DSolve να λυθεί η διδιάστατη εξίσωση του Laplace σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί εδώ η εντολή Laplacian του πακέτου VectorAnalysis. Να επιχειρηθεί και η ανάλογη επίλυση σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . Είναι και αυτή δυνατή ή όχι;

(στ) Τελικά, συγκρίνοντας τις εκφράσεις των συνιστωσών της ταχύτητας μέσω της συναρτήσεως ροής $\Psi(r, \theta)$ καθώς και μέσω του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$, ποιες διαφορικές εξισώσεις (αφαλώς με πρώτες παραγώγους μόνο) συνδέουν αυτές τις δύο συναρτήσεις στη Ρευστομηχανική;

ΟΜΑΔΑ ΕΜΙΙΙ-Ι

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ι1 ([X και Y] *Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους. Μηχανική των Υλικών: Επίπεδη Ελαστικότητα: Τασική Συνάρτηση του Airy: Τάσεις, Παραμορφώσεις*): Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$A(x, y) = x^2(x^6 - 21x^4y^2 + 35x^2y^4 - 7y^6).$$

Ζητούνται (με απλοποιήσεις των αποτελεσμάτων όσες φορές αυτές βοηθούν): (α) Να ελεγχθεί εάν είναι ή δεν είναι αρμονική συνάρτηση τόσο κατευθείαν όσο και με τη χρήση του πακέτου VectorAnalysis. Αυτό φορτώνεται με την εντολή

Needs["Calculus`VectorAnalysis"]

(**Υπόδειξη:** Η βαρεία είναι πάνω αριστερά στο πληκτρολόγιο.) (β) Ανάλογα και για το αν είναι διαρμονική συνάρτηση. (γ) Σε σχόλιο (με Alt 7) να εξηγηθεί λεπτομερώς εάν είναι κατάλληλη τασική συνάρτηση του Airy σε κάποιο επίπεδο ελαστικό πρόβλημα. (δ) Σε καταφατική περίπτωση να υπολογισθούν οι συνιστώσες των τάσεων $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ και $\tau_{xy}(x, y)$ (χωρίς δείκτες!). (ε) Να ελεγχθεί η ισχύς των δύο εξισώσεων ισορροπίας EquilibriumEquation 1 και EquilibriumEquation2 και να γίνει σχετικό σχόλιο (με Alt 7). (στ) Ανάλογα και για την εξίσωση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων γραμμένη όμως εδώ συναρτήσει των τάσεων StressWrittenCompatibilityEquation και να γίνει σχετικό σχόλιο. (ζ) Τι δηλώνουν από φυσικής απόψεως η ισχύς και η μη ισχύς καθεμιάς από τις τρεις τελευταίες εξισώσεις; (η) Ποια είναι τα πλεονεκτήματα από τη χρήση της τασικής συναρτήσεως του Airy $A(x, y)$; (θ) Από τις τάσεις $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ και $\tau_{xy}(x, y)$ να υπολογισθούν κι οι παραμορφώσεις $\epsilon_x(x, y)$, $\epsilon_y(x, y)$ και $\gamma_{xy}(x, y)$ (συνεχώς με απλοποιήσεις των αποτελεσμάτων). Το μέτρο ελαστικότητας E και ο λόγος του Poisson ν του ελαστικού υλικού θεωρούνται γνωστά. Όμως για το μέτρο ελαστικότητας να χρησιμοποιηθεί το Ελληνικό κεφαλαίο E με Esc E Esc. Γιατί είναι αναγκαίο αυτό; (ι) Να ελεγχθεί η αρχική μορφή της εξισώσεως του συμβιβαστού των παραμορφώσεων DeformationCompatibilityEquation (με τις ίδιες τις παραμορφώσεις). (ια) Να υπολογισθούν οι τάσεις στο σημείο $(1, 2)$ σε λίστα. (ιβ) Ανάλογα και οι παραμορφώσεις στο ίδιο σημείο.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ι2 ([X και Y] *Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους. Ρευστομηχανική: Μόνιμη, Επίπεδη, Αστρόβιλη Ροή Ιδεατού Ρευστού: Δυναμικό Ταχύτητας, Συνάρτηση Ροής, Ταχύτητα*): Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\Phi(x, y) = \cosh x \cos y.$$

Ζητούνται: (α) Να ελεγχθεί εάν είναι αρμονική συνάρτηση τόσο κατευθείαν όσο και με τη χρήση του πακέτου VectorAnalysis. (β) Σε σχόλιο (με Alt 7) να εξηγηθεί λεπτομερώς εάν είναι κατάλληλο δυναμικό ταχύτητας σε κάποια μόνιμη, επίπεδη, αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού. (γ) Σε καταφατική περίπτωση να υπολογισθούν οι συνιστώσες $u_1(x, y)$ και $v_1(x, y)$ της ταχύτητας του ρευστού (το ένα, 1, χωρίς να είναι σε δείκτη). (δ) Να ελεγχθεί η ισχύς της εξισώσεως της συνεχείας

ContinuityEquation καθώς και της εξισώσεως του αστρόβιλου της ροής IrrotationalFlowEquation. (ε) Σε λίστα list1 να υπολογισθούν οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού στο σημείο (1, 2) τόσο χωρίς προσεγγίσεις όσο και αριθμητικά. Θεωρούμε τώρα και τη συνάρτηση

$$\Psi(x, y) = \sinh x \sin y.$$

Ζητούνται: (στ) Να ελεγχθεί εάν είναι αρμονική συνάρτηση τόσο κατευθείαν όσο και με τη χρήση του πακέτου VectorAnalysis. (ζ) Σε σχόλιο (με Alt 7) να εξηγηθεί λεπτομερώς εάν είναι και κατάλληλη συνάρτηση ροής (ροϊκή συνάρτηση) σε κάποια μόνιμη, επίπεδη, αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού. (η) Σε καταφατική περίπτωση να υπολογισθούν οι συνιστώσες $u_2(x, y)$ και $v_2(x, y)$ της ταχύτητας του ρευστού (το δύο, 2, χωρίς να είναι σε δείκτη). (θ) Να ελεγχθεί πάλι η ισχύς της εξισώσεως της συνεχείας ContinuityEquation και της εξισώσεως του αστρόβιλου της ροής IrrotationalFlowEquation. (ι) Σε λίστα list2 να υπολογισθούν οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού στο σημείο (1, 2) τόσο χωρίς προσεγγίσεις όσο και αριθμητικά. (ια) Να συγκριθούν οι λίστες list1 και list2. (ιβ) Σε λίστα ver να επαληθευθεί ότι το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και η συνάρτηση ροής (ροϊκή συνάρτηση) $\Psi(x, y)$ αφορούν ακριβώς στο ίδιο πεδίο ροής για κάθε σημείο (x, y) . (ιγ) Τέλος ζητείται να αναφερθεί εκτενώς γιατί ο Πολιτικός Μηχανικός χρησιμοποιεί πολύ συχνά το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ ή/και τη συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$ σε επίπεδα προβλήματα Ρευστομηχανικής ιδεατού ρευστού. (ιδ) Ποια από τις δύο αυτές συναρτήσεις έχει εφαρμογή και στην τριδιάστατη, μόνιμη, αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού; (ιε) Ποιο ρευστό καλείται ιδεατό στη Ρευστομηχανική; **Υπόδειξη:** Πρόκειται για ασυμπίεστο ρευστό (δηλαδή ρευστό με σταθερή πυκνότητα ρ) και επίσης χωρίς συνεκτικότητα μ (που πολύ συχνά καλείται και ιξώδες): $\mu = 0$.

ΟΜΑΔΑ ΕΜΙΙΙ-Ι

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ι1 ([X] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Εισαγωγικά, Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Volterra και Fredholm, Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Δοκού): Ζητούνται: (α) Ποια είναι η γενική μορφή μιας μη ομογενούς ολοκληρωτικής εξισώσεως Volterra πρώτου είδους; (β) Δευτέρου είδους; (γ) Ανάλογα ερωτήματα για τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm. (δ) Ποια είναι η διαφορά μεταξύ των ολοκληρωτικών εξισώσεων Volterra και Fredholm; (ε) Ποιες βασικές μεθόδους επίλυσεως ορισμένων κατηγοριών ολοκληρωτικών εξισώσεων έχετε υπόψη σας; (χωρίς λεπτομέρειες). (στ) Να προσδιορισθεί η κλασική ολοκληρωτική εξίσωση που διέπει το πρόβλημα των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων συνήθους δοκού με τη μέθοδο του τύπου του Maclaurin. Να βρεθεί επίσης και με τη μέθοδο της ολοκληρώσεως (τέσσερις φορές) της σχετικής διαφορικής εξισώσεως. Ποια ακριβώς μεγέθη υπεισέρχονται σ' αυτή συμπεριλαμβανομένης και της άγνωστης συναρτήσεως; Τι χαρακτηρισμούς μπορείτε να κάνετε για την ίδια ολοκληρωτική εξίσωση;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ι2 ([X] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Κινηματική του Υλικού Σημείου): Εδώ θεωρούμε υλικό σημείο P που κινείται κατά μήκος του x -άξονα με αρχική θέση $x(0) = x_0$. Ζητούνται: (α) Εάν η θέση $x(t)$ του υλικού σημείου P είναι γνωστή συνάρτηση του χρόνου t , από ποια απλή σχέση μπορεί να προσδιορισθεί η ταχύτητα $v(t)$ του ίδιου υλικού σημείου; (β) Αντίστροφα από ποια διαφορική εξίσωση μπορεί να προσδιορισθεί η θέση $x(t)$ του υλικού σημείου P , όταν είναι γνωστή η ταχύτητά του $v(t)$; (γ) Πώς μπορεί η εξίσωση των ερωτημάτων (α) και (β) να μετατραπεί, ώστε να περιέχει ολοκλήρωμα αντί για παράγωγο; (δ) Επομένως από ποιον ολοκληρωτικό τύπο μπορεί να προσδιορισθεί η θέση $x(t)$ του υλικού σημείου P με γνωστή την ταχύτητά του $v(t)$; (ε) Αντίστροφα από ποια ολοκληρωτική εξίσωση μπορεί να προσδιορισθεί η ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου P με γνωστή τη θέση του $x(t)$; (στ) Απολύτως ανάλογα ερωτήματα (με σύντομες απαντήσεις) με την ταχύτητα $v(t)$ αντί για τη θέση $x(t)$ και την επιτάχυνση $a(t)$ αντί για την ταχύτητα $v(t)$. (ζ) Ανάλογα ερωτήματα με τη θέση $x(t)$ και την επιτάχυνση $a(t)$ (χωρίς την ταχύτητα $v(t)$) του υλικού σημείου.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ι3 ([X και Y] Παράγωγος Ολοκληρώματος): Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$I(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t) y(t) dt.$$

Ζητούνται: (α) [X] Να υπολογισθεί (αναλυτικά και με λεπτομέρειες) η πρώτη παράγωγος του $I'(x)$ ως προς τη μεταβλητή x . (β) [Y] Να δηλωθεί τό ίδιο ολοκλήρωμα στη *Mathematica* σαν int. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `Integrate` ως εξής:

`int = Integrate[K[x, t] y[t], {t, g[x], h[x]}`

(γ) [Y] Να υπολογισθεί η ίδια παράγωγος $I'(x)$ (και πάλι ως προς x), όπως έγινε και στο ερώτημα (α) με το χέρι. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `D` ως εξής:

`D[int, x]`

Πρέπει ίσως να προκύψει το εξής αποτέλεσμα της παραγωγίσεως αυτής:

$$y(h(x)) K(x, h(x)) \frac{d}{dx} h(x) - y(g(x)) K(x, g(x)) \frac{d}{dx} g(x) + \int_{g(x)}^{h(x)} y(t) \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) dt.$$

(δ) [X ή Y] Συμφωνούν τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (α) [X] και (γ) [Y]; Ναι ή όχι και γιατί; Εάν όχι, πού ακριβώς υποψιάζεσθε ότι έχει γίνει λάθος στην παραγωγή;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ι4 ([X ή Y] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Γεωμετρία: Εμβαδά): Παρατήρηση: Το παρόν γεωμετρικό πρόβλημα λύθηκε για πρώτη φορά από τον Johannes Bernoulli για $n = 3$.

(α) Να προσδιορισθεί η κατάλληλη ολοκληρωτική εξίσωση `IntegralEquation` για το σχήμα μιας καμπύλης $y = y(x)$ στο επίπεδο Oxy η οποία να περνάει από την αρχή O των Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) και να έχει την εξής ιδιότητα: Το εμβαδόν μεταξύ του άξονα Ox και της καμπύλης $y = y(x)$ από την αρχή της $O = (0, 0)$ μέχρι το τυχαίο σημείο της $P = (x, y(x))$ να είναι ίσο ($\forall x > 0$) με το $1/n$ ($n > 0$) του εμβαδού του αντίστοιχου ορθογωνίου με διαγώνιο το ευθύγραμμο τμήμα OP . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`IntegralEquation = Integrate[y[x], {x, 0, x}] == (1/n)*x*y[x]`

(β) Στη συνέχεια ζητείται η μετατροπή της ολοκληρωτικής εξίσωσης `IntegralEquation` που προέκυψε με παραγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση `DifferentialEquation`. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`DifferentialEquation = D[IntegralEquation, x]//Simplify`

(με ελαφρά απλοποίηση του αποτελέσματος με την εντολή `Simplify`).

(γ) Κατόπιν ζητείται η επίλυση της τελευταίας εξίσωσης (γενική λύση με τη χρήση της εντολής `DSolve`). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`sol = DSolve[DifferentialEquation, y[x], x]`

Ζητείται η γραφή της λύσεως αυτής `sol` και σε μορφή συναρτήσεως $y_g(x)$ με τη χρήση της εντολής

`yg[x_] = sol[[1, 1, 2]]`

(δ) Τελικά ζητείται η σχεδίαση (στην ειδική περίπτωση όπου $n = 3$) της καμπύλης $y = y(x)$ που προέκυψε (με τη σταθερά C_1 στη γενική λύση ίση με 1) στο διάστημα $0 \leq x \leq 1$. Τι είδους καμπύλη είναι αυτή; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`yp[x_] = yg[x] /. {n -> 3, C[1] -> 1}`

και τελικά και η εντολή σχεδίασεως `Plot`

`Plot[yp[x], {x, 0, 1}]`

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ι5 ([X και Y] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Αναγωγή σε Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις): Για καθεμιά από τις εξής δύο απλές ολοκληρωτικές εξισώσεις ie (integral equations):

$$y(x) = 2 + 3 \int_0^x y(t) dt, \quad y(x) = a + b \int_0^x ty(t) dt, \quad t \geq 0$$

(στη δεύτερη με τα a και b σταθερές) Ζητούνται: (α) [X ή Y] Η ταξινόμησή της (τί τύπων, κατηγοριών είναι); (β) [X ή Y] Η άγνωστη συνάρτηση σ' αυτήν. (γ) [X ή Y] Ο πυρήνας της K . (δ) [X και Y] Η λύση της sol με αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση de (differential equation) μέσω παραγωγίσεως (εντολή D), η εύρεση της γενικής λύσεως sol της διαφορικής εξίσωσης (με τη βοήθεια της εντολής DSolve για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων πρώτης και δεύτερας τάξεως) και στη συνέχεια με τη χρήση και της σχετικής αρχικής συνθήκης (initial condition) ic η εύρεση και της τελικής λύσεως solf του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής, που ισοδυναμεί με την αρχική ολοκληρωτική εξίσωση ie και (ε) [X και Y] Η πλήρης επαλήθευση verf της λύσεως solf που βρέθηκε. (**Υπόδειξη:** Κατά την επαλήθευση να χρησιμοποιηθεί, εάν απαιτείται, και η εντολή Simplify.) **Παρατήρηση:** Ακολουθεί λεπτομερής καταγραφή των σχετικών εντολών στη Mathematica για την πρώτη από τις παραπάνω δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις.

• **ΥΠΟΔΕΙΞΗ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ:**

Ορισμός της ολοκληρωτικής εξίσωσης ie

$$ie = y[x] == 2 + 3 \text{ Integrate}[y[t], \{t, 0, x\}]$$

Σχηματισμός της αντίστοιχης διαφορικής εξίσωσης (differential equation) de με παραγωγή ως προς x της ολοκληρωτικής εξίσωσης (integral equation) ie

$$de = D[ie, x]$$

Η γενική λύση sol της διαφορικής εξίσωσης de

$$sol = \text{DSolve}[de, y[x], x]$$

Η αρχική συνθήκη ic για $x = 0$ από την ολοκληρωτική εξίσωση ie

$$ic = ie /. x \rightarrow 0$$

Η τελική λύση solf του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής με τη χρήση τόσο της διαφορικής εξίσωσης de όσο και της αρχικής συνθήκης ic

$$solf = \text{DSolve}[\{de, ic\}, y[x], x]$$

Η λύση αυτή solf τώρα σε μορφή συναρτήσεως $y_s(x)$

$$ys[x_] = \text{solf}[[1, 1, 2]]$$

Επαλήθευση verf της λύσεως $y_s(x)$ που βρέθηκε με αντικατάσταση της λύσεως αυτής του παρόντος προβλήματος αρχικής τιμής στην αρχική ολοκληρωτική εξίσωση ie

$$verf = ie /. y \rightarrow ys$$

Είναι αναγκαία και η απλοποίηση της ποσότητας verf με τη χρήση της εντολής Simplify:

$$ver1 = verf // \text{Simplify}$$

Επομένως κατορθώθηκε η πλήρης επαλήθευση της λύσεως $y_s(x)$ που βρέθηκε.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ι6 ([X και Y] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Συνέλιξη, Μετασχηματισμός Laplace): Για καθεμιά από τις εξής δύο απλές ολοκληρωτικές εξισώσεις ie:

$$g(x) = 2x^3 - \int_0^x (x - y)g(y) dy, \quad x \geq 0, \quad \int_0^t y(\tau) \cos(t - \tau) d\tau = t \sin t, \quad t \geq 0,$$

Ζητούνται: (α) [X ή Y] Η ταξινόμησή της (τί τύπων, κατηγοριών είναι);. (β) [X ή Y] Η άγνωστη συνάρτηση σ' αυτήν. (γ) [X ή Y] Ο πυρήνας της K. (δ) [X και Y] Η λύση της με τη χρήση του θεωρήματος της συνελίξεως και του μετασχηματισμού Laplace και (ε) [X] Η πλήρης επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε. **Παρατήρηση:** Ακολουθεί λεπτομερής καταγραφή των σχετικών εντολών της *Mathematica* για την πρώτη από τις παραπάνω δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις.

• **ΥΠΟΔΕΙΞΗ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ:**

Η ολοκληρωτική εξίσωση ie

$$ie = g[x] == 2 x^3 - \text{Integrate}[(x-y) g[y], \{y, 0, x\}]$$

Ο μετασχηματισμός Laplace (*Laplace transform*) It της ολοκληρωτικής εξίσωσης ie με την εντολή LaplaceTransform

$$It = \text{LaplaceTransform}[ie, x, s]$$

Απλά απλοστευση συμβολισμού για το μετασχηματισμό Laplace G(s) της άγνωστης συναρτήσεως g(x)

$$It1 = It /. \text{LaplaceTransform}[g[x], x, s] \rightarrow G[s]$$

Επίλυση της αλγεβρικής εξίσωσης It1 πρώτου βαθμού που προέκυψε ως προς την άγνωστη συνάρτηση G(s) = $\mathcal{L}\{g(x)\}$

$$sol = \text{Solve}[It1, G[s]]$$

Η ζητούμενη λύση $g_s(x)$ σε μορφή συναρτήσεως με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace που μόλις βρέθηκε με την εντολή InverseLaplaceTransform για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace (*inverse Laplace transform*)

$$gs[x_] = \text{InverseLaplaceTransform}[sol[[1, 1, 2]], s, x]$$

Η επαλήθευση της λύσεως $g_s(x)$ που βρέθηκε μετά από απλοποίηση του αρχικού αποτελέσματος με την εντολή Simplify

$$ver = ie /. g \rightarrow gs // \text{Simplify}$$

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-17 (IX και Y) Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Τεχνική Θεωρία Κάμψεως: Συνήθεις Δοκοί): Θεωρούμε τώρα την πιο δύσκολη ολοκληρωτική εξίσωση ie2

$$y(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \frac{1}{6EI} \int_0^x (x - \xi)^3 p(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq L,$$

με την $y(x)$ γνωστή συνάρτηση, $p(x)$ την άγνωστη συνάρτηση (και τις δύο στο διάστημα $[0, L]$), τα A, B, C, D, E και I γνωστές σταθερές και $[0, L]$ το διάστημα ισχύος της ολοκληρωτικής εξίσωσης ($L > 0$). Ζητούνται: (α) [Y] Να γραφεί η παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση ie2 στη *Mathematica*.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή μη εμφανίσεως μερικών μη σημαντικών μηνυμάτων

$$\{\text{Off}[\text{General}::\text{spell1}], \text{Off}[\text{General}::\text{spell}]\};$$

και στη συνέχεια η εντολή (το ξ εμφανίζεται στην οθόνη με Esc x Esc)

$$ie2 = y[x] == A + B x + C x^2 + D x^3 + \text{Integrate}[(x - \xi)^3 p[\xi], \{ \xi, 0, x \}] / (6 EI)$$

(β) [Y] Να λυθεί η ίδια ολοκληρωτική εξίσωση ie2 μέσω άμεσης παραγωγίσεώς της τέσσερις φορές.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$df1 = D[ie2, \{x, 4\}]$$

ή, καλύτερα, αν και αυτό είναι δευτερεύον, μετά από πολλαπλασιασμό της επί EI, δηλαδή

$$df2 = EI D[ie2[[1]], \{x, 4\}] == EI D[ie2[[2]], \{x, 4\}]$$

(γ) [X] Εντελώς προαιρετικά μπορούν να γίνουν οι ίδιες παραγωγίσεις και με το χέρι για τον έμπειρο στα Μαθηματικά και πολύ υπομονετικό στις παραγωγίσεις φοιτητή/φοιτήτρια. (δ) [Y] Είναι επίσης δυνατόν να χρησιμοποιηθεί και ο μετασχηματισμός Laplace στην ίδια ολοκληρωτική εξίσωση $ie2$ για το μετασχηματισμό της σε αλγεβρική εξίσωση $lie2$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
lie2 = LaplaceTransform[ie2,x,s]
```

Στη συνέχεια η αλγεβρική εξίσωση $lie2$ που προκύπτει μπορεί να λυθεί (εντολή Solve) ως προς τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace της συναρτήσεως $p(x)$ μέσω της εντολής

```
sol2 = Solve[lie2, LaplaceTransform[p[x],x,s]]//Simplify
```

(καλό είναι να χρησιμοποιηθεί και η εντολή Simplify), οπότε και διαπιστώνεται η συμφωνία του αποτελέσματος με εκείνο της μεθόδου της άμεσης παραγωγίσεως $df2$ (τέσσερις φορές) της ολοκληρωτικής εξισώσεως $ie2$. Γίνεται πράγματι αυτή η διαπίστωση; (ε) [Y] Μπορεί επίσης εύκολα να διαπιστωθεί ότι οι σταθερές A, B, C και D σχετίζονται άμεσα με τις αρχικές συνθήκες που ισχύουν στο σημείο $x = 0$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
f = ie2[[2]]
```

και στη συνέχεια οι εντολές αντικαταστάσεως

```
f /. x -> 0
```

```
D[f, x] /. x -> 0
```

```
D[f, {x,2}] /. x -> 0
```

```
D[f, {x,3}] /. x -> 0
```

για τη συνάρτηση f και τις τρεις πρώτες παραγώγους της. Ασφαλώς οι εντολές αυτές μπορούν να συνδυασθούν και σε μία μόνο εντολή με τη χρήση της εντολής Table (η Mathematica έχει φυσικά δυνατότητες προγραμματισμού, όπως και η Maxima, η BASIC, η Fortran, η C και όλες γενικά οι γλώσσες προγραμματισμού) ως εξής:

```
Table[D[f, {x,k}] /. x -> 0, {k,0,3}]
```

(στ) [X ή Y] Σε ποιο ακριβώς πολύ γνωστό πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζεται η παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση $ie2$; (με λεπτομέρειες). Ποιες είναι οι φυσικές σημασίες της γνωστής συναρτήσεως $y(x)$, της άγνωστης συναρτήσεως $p(x)$ και όλων των σταθερών στο παρόν πρόβλημα: A, B, C, D, L, E και I ; Του γινομένου EI ;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ι8 (IY Είδη Ολοκληρωτικών Εξισώσεων) (α) Να ορισθεί εδώ η ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δευτέρου είδους

$$y(x) + \int_a^b K(x,t)y(t) dt = g(x)$$

με τη χρήση του συμβόλου

```
FredholmIntegralEquationOfTheSecondKind
```

Υπόδειξη: Να μη λησμονηθεί το διπλό ίσον στην ολοκληρωτική εξίσωση! **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

```
FredholmIntegralEquationOfTheSecondKind = y[x]+Integrate[K[x,t] y[t], {t,a,b}] == g[x]
```

Ανάλογα να ορισθεί η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

```
HomogeneousFredholmIntegralEquationOfTheSecondKind
```

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί πιθανώς η αντικατάσταση $/g[x] -> 0$ καθώς και η αντίστοιχη εξίσωση πρώτου είδους, αλλά μη ομογενής. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

HomogeneousFredholmIntegralEquationOfTheSecondKind
= FredholmIntegralEquationOfTheSecondKind/.g[x] -> 0

(β) Ανάλογα να ορισθούν και οι αντίστοιχες ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra. (γ) Να αναφερθούν δυο-τρία κλασικά παραδείγματα εμφανίσεως ολοκληρωτικών εξισώσεων πρώτου και δευτέρου είδους τύπου Fredholm (στις συνήθεις δοκούς) και Volterra (στη Δυναμική και τις Ταλαντώσεις).

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Ι9 (Γ) Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις, Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Κινηματική του Υλικού Σημείου, Πεδίο Βαρύτητας: Ελεύθερη Πτώση: Εδώ θεωρούμε την απλή και γνωστή κίνηση ενός υλικού σημείου M μάζας m από αρχική θέση $x(0) = x_0$ και με αρχική ταχύτητα $v(0) = \dot{x}(0) = v_0$ κατά τον κατακόρυφο άξονα Ox (με θετική διεύθυνση προς τα πάνω) υπό την επίδραση του γήινου πεδίου βαρύτητας (με σταθερή επιτάχυνση $-g$). Στο κλασικό αυτό πρόβλημα θεωρείται συνεχώς γνωστή η θέση $x(t)$ του υλικού σημείου M . Διαπιστώνεται ότι η θέση αυτή δίνεται από τον εξής τύπο:

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0$$

με το σύμβολο t να δηλώνει το χρόνο. Ζητούνται: (α) Να γραφεί ο παραπάνω τύπος με τη μορφή συναρτήσεως. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$x[t_] := -(1/2) g t^2 + v_0 t + x_0$$

Για ποιον πρακτικό λόγο θέσαμε την άνω και κάτω τελεία (·) πριν το ίσον; (β) Με βάση τη θέση $x(t)$ να υπολογισθεί η ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου M . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$v[t_] = D[x[t], t]$$

Για ποιον πρακτικό, ωφελμιστικό λόγο παραλείφθηκαν τώρα τα επεξηγηματικά; Τι θα συνέβαινε στην αντίθετη περίπτωση; Με ποιον τρόπο μεταβάλλεται η ταχύτητα $v(t)$ συναρτήσει του χρόνου t στο συγκεκριμένο πρόβλημα κινήσεως; (γ) Ανάλογα ερωτήματα για την επιτάχυνση $a(t)$ του ίδιου υλικού σημείου. (δ) Ποιες είναι επομένως οι αρχικές τιμές της θέσεως $x(t)$, της ταχύτητας $v(t)$ και της επιταχύνσεως $a(t)$, αν και ασφαλώς για την τελευταία δεν έχει ιδιαίτερη σημασία η φράση «αρχική τιμή»; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\{x[0], v[0], a[0]\}$$

(λίστα, κατάλογος με τρία στοιχεία). Είναι λογικά τα αποτελέσματα τα οποία βρέθηκαν; (ε) Ας προχωρήσουμε τώρα και σε τρεις σχετικές (πολύ απλές φυσικά) συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (με ανεξάρτητη μεταβλητή το χρόνο t). Θεωρούμε καταρχήν τη διαφορική εξίσωση $de1$

$$a(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

με γνωστή συνάρτηση την επιτάχυνση $a(t)$ του υλικού σημείου M και άγνωστη συνάρτηση την $y(t)$. Πώς μπορεί να γραφεί αυτή στη *Mathematica*; Στη συνέχεια να επαληθευθεί ότι η διαφορική αυτή εξίσωση έχει μερική (ειδική) λύση την $y(t) = v(t)$, δηλαδή την ταχύτητα του ίδιου υλικού σημείου. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$ver1 = de1/.y -> v$$

(στ) Ανάλογο ερώτημα για τη διαφορική εξίσωση $de2$

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt},$$

που διαφέρει από τη $de1$, γιατί έχει σαν γνωστή συνάρτηση την ταχύτητα $v(t)$ αντί για την επιτάχυνση $a(t)$ του υλικού σημείου M . Να επαληθευθεί ότι η συνάρτηση $y(t) = x(t)$ είναι μερική (ειδική) λύση της διαφορικής αυτής εξισώσεως. (ζ) Τα τελευταία δύο (και προφανώς πιο σημαντικά) ερωτήματα της παρούσας εκπαιδευτικής ασκήσεως αποβλέπουν στην εισαγωγή του φοιτητή και της

φοιτήτριας Πολιτικού Μηχανικού στις ολοκληρωτικές εξισώσεις με ήπιο και φυσικό τρόπο. Καταρχήν μια εξίσωση καλείται ολοκληρωτική, εφόσον ή άγνωστη συνάρτηση $y(t)$ σ' αυτήν εμφανίζεται κάτω από το σύμβολο της ολοκληρώσεως, ενώ στις διαφορικές εξισώσεις (όπως η de1 και η de2 πιο πάνω) εμφανιζόταν κάτω από το σύμβολο της παραγωγίσεως. Σαν μια πρώτη ολοκληρωτική εξίσωση ας θεωρήσουμε την εξής ολοκληρωτική εξίσωση:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0,$$

με γνωστή συνάρτηση την ταχύτητα $v(t)$ του υλικού σημείου M και άγνωστη συνάρτηση $y(t)$ την επιτάχυνση $a(t)$ του ίδιου σημείου. Καταρχήν, μιλώντας από φυσικής απόψεως, είναι εύλογη η ισχύς της ολοκληρωτικής αυτής εξισώσεως; Από ποια ακριβώς αντίστοιχη διαφορική εξίσωση μπορεί να θεωρηθεί ότι προκύπτει; Επαληθεύεται (αυτόματα) και η αρχική συνθήκη $v(0) = v_0$ ή χρειάζεται να ληφθεί υπόψη χωριστά, όπως γίνεται στις διαφορικές εξισώσεις; Πώς μπορεί να γραφεί η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση στη *Mathematica*; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{ie1} = v[t] == v0 + \text{Integrate}[y[\tau], \{\tau, 0, t\}]$$

Σημειώνεται ότι το σύμβολο *ie* επιλέχθηκε, για να μας θυμίζει ότι τώρα έχουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση (integral equation) ανάλογα με τη χρήση (προηγούμενως) του συμβόλου *de* για μια διαφορική εξίσωση (differential equation). (η) Να επαληθευθεί ότι πραγματικά η επιτάχυνση $a(t)$ του υλικού σημείου M (που έχει ήδη υπολογισθεί στην αρχή της ασκήσεως, ερώτημα (γ)) είναι λύση της ολοκληρωτικής εξισώσεως *ie1*. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{ver3} = \text{ie1}/.y->a$$

(θ) Ας θεωρήσουμε και μια δεύτερη απλή ολοκληρωτική εξίσωση, την *ie2*

$$x(t) = x_0 + \int_0^t y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0,$$

με γνωστή συνάρτηση τη συνάρτηση της θέσεως $x(t)$ (όπως αυτή ορίσθηκε παραπάνω) και άγνωστη συνάρτηση τη συνάρτηση $y(t)$. Πώς προκύπτει με φυσικό τρόπο η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση; Με μαθηματικό τρόπο; Από ποια αντίστοιχη διαφορική εξίσωση; Πώς μπορεί να γραφεί με τη σύνταξη της *Mathematica*; Ποια υποψιάζεσθε ότι είναι η λύση της $y(t)$; Γιατί; Είναι πραγματικά σωστή η υποψία σας; Να γίνει δηλαδή η σχετική επαλήθευση ανάλογα με ό,τι έγινε στην ολοκληρωτική εξίσωση *ie1* στο προηγούμενο ερώτημα. (ι) Θα μπορούσε άραγε να υπάρξει και τρίτη συναφής ολοκληρωτική εξίσωση *ie3* (με μία ολοκλήρωση μόνο, όχι με διπλή ολοκλήρωση) που να συνδέει κατευθείαν τη γνωστή θέση $x(t)$ του υλικού σημείου M με την υποτιθεμένη άγνωστη επιτάχυνσή του $a(t)$, που δηλώνεται (ανάλογα με τα προηγούμενα) σαν $y(t)$; **Υπόδειξη:** Απαιτείται η χρήση (μια φορά) παραγοντικής ολοκληρώσεως για την κατασκευή της τρίτης ολοκληρωτικής εξισώσεως (μετατροπή δύο διαδοχικών ολοκληρώσεων σε μια απλή ολοκλήρωση) και πιθανώς η χρήση αυτή να μη θεωρείται τετριμμένη.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-10 ([X και Y] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Τεχνική Θεωρία Κάμψεως: Συνήθεις Δοκοί): Στην κάμψη συνήθων δοκών ζητείται να αναφερθούν οι ολοκληρωτικές εξισώσεις (integral equations) που αφορούν:

(α) [X] Στη γωνία κλίσεως $\theta(x)$ (προσεγγιστικά, για μικρές τιμές της) κατά μήκος συνήθους δοκού B μήκους L και δυσκαμψίας EI , όταν το βέλος κάμψεως $y(x)$ της δοκού (η ελαστική γραμμή της) είναι γνωστό (γνωστή) και, προφανώς, και η αρχική συνθήκη $y(0) = y_0$ στο άκρο $x = 0$ της δοκού είναι γνωστή. **Υπόδειξη:** Πρόκειται για την απλούστατη ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) = y_0 + \int_0^x \theta(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq L.$$

Ποια είναι η άγνωστη συνάρτηση και ποια η γνωστή συνάρτηση στην ολοκληρωτική αυτή εξίσωση; Εάν αντιστρεφόντουσαν οι ρόλοι της άγνωστης και της γνωστής συναρτήσεως, θα είχαμε και πάλι ολοκληρωτική εξίσωση ή απλά ολοκληρωτικό τύπο προς προσδιορισμό του βέλους κάμψεως $y(x)$; Πότε ακριβώς μιλάμε για ολοκληρωτική εξίσωση σε μια ισότητα που περιέχει και ολοκλήρωμα;

(β) [X] Ποια είναι η ανάλογη ολοκληρωτική εξίσωση με γνωστή συνάρτηση την καμπτική ροπή (ροπή κάμψεως) $M(x)$ και με άγνωστη συνάρτηση την τέμνουσα δύναμη (διατμητική δύναμη) $Q(x)$;

(γ) [X] Ανάλογα για την τέμνουσα δύναμη $Q(x)$ και την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$. (Να αγνοηθούν λεπτομέρειες γύρω από τις συμβάσεις για τις θετικές διευθύνσεις-φορές για τις ποσότητες αυτές!)

(δ) [X] Γενικεύοντας, για γνωστή συνάρτηση την $M(x)$ και άγνωστη συνάρτηση την $p(x)$.

(ε) [X] Πώς μπορούμε να απαλλαγούμε από τις δύο (διαδοχικές) ολοκληρώσεις (καταλήγοντας σε μία απλή ολοκλήρωση στην τελευταία ολοκληρωτική εξίσωση) εκτελώντας ολοκλήρωση κατά μέρη (ή κατά παράγοντες); **Υπόδειξη:** Να γίνει πλήρης απόδειξη!

(στ) [Y] Να γραφούν οι ολοκληρωτικές εξισώσεις (integral equations) των ερωτημάτων (α), (β), (γ) και (δ) (στο ερώτημα (δ) μετά την ολοκλήρωση κατά παράγοντες) στη *Mathematica*. **Υπόδειξη:** Για την πρώτη από αυτές να χρησιμοποιηθεί πιθανώς η εντολή

`ie2 = y[x] == y0 + Integrate[θ[ξ], {ξ, 0, x}]`

και ανάλογα για τις άλλες τρεις ολοκληρωτικές εξισώσεις: τις `ie3`, `ie4` και `ie5`.

(ζ) [X και Y] Πώς μπορούμε να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση `ie2` με μία παραγωγήιση; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`sol = D[ie2, x];`

Σε ποιο γνωστό θεώρημα (για την παράγωγο ενός ολοκληρώματος ως προς το μεταβλητό άνω όριο ολοκληρώσεως) βασίστηκε η παραγωγήιση αυτή; Γνωρίζει κι η *Mathematica* το θεώρημα αυτό; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`D[Integrate[f[ξ], {ξ, 0, x}], x]`

(για την τυχαία ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$) βέβαια με την ισχύ και της αντίστοιχης ιδιότητας για αόριστα ολοκληρώματα (αντιπαραγωγούς), όπως επίσης προκύπτει μέσω της εντολής

`D[Integrate[f[x], x], x]`

Ας μη νομισθεί πάντως ότι τα γνωρίζει όλα η *Mathematica*: πολύ λίγα, ελάχιστα γνωρίζει, αλλ' αρκετά εύκολα μπορεί να μάθει και άλλα με προγραμματισμό της από το χρήστη της συνήθως μάλιστα στη γλώσσα της (δεν είναι αναγκαίο να χρησιμοποιηθεί η γλώσσα C), που είναι αρκετά εύκολη. Τελικά έχει προκύψει πράγματι η αναμενόμενη λύση

$$\theta(x) = y'(x)$$

της ολοκληρωτικής εξισώσεως `ie2` του ερωτήματος (α) ή όχι; Ισχύει επίσης και η αρχική συνθήκη $y(0) = y_0$ για $x = 0$; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`ie2 /. x -> 0`

(η) [X ή Y] Εναλλακτικά, μπορεί ασφαλώς να χρησιμοποιηθεί και ο μετασχηματισμός Laplace στην ολοκληρωτική εξίσωση `ie2` που προαναφέρθηκε. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`lie2 = LaplaceTransform[ie2, x, s]`

Στη συνέχεια να λυθεί η απλούστατη πρωτοβάθμια αλγεβρική εξίσωση η οποία προκύπτει ως προς το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συναρτήσεως $\theta(x)$ μέσω της εντολής


```
sol2 = Solve[ie2, LaplaceTransform[θ[x], x, s]] // Simplify
```

και ακολουθώντας της εντολής αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace

```
InverseLaplaceTransform[sol2/.y0 -> y[0], s, x] // Simplify // OutputForm
```

(Πιθανότατα η βοηθητική εντολή OutputForm δε θα χρειασθεί σε σας!) Συμφωνεί το αποτέλεσμα αυτό με την λύση $\theta(x) = y'(x)$ που ήδη βρέθηκε μέσω της παραγωγίσεως; Γιατί;

(θ) [X ή Y] Σε ποια ακριβώς συγκεκριμένα σημεία υπερτερεί η χρήση των ολοκληρωτικών εξισώσεων (integral equations) από εκείνη των διαφορικών εξισώσεων (differential equations) σε περιπτώσεις εννοείται όπου κι οι δύο αυτές δυνατότητες είναι εφικτές παράλληλα. (Δυστυχώς πάρα πολλές φορές δεν είναι!)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-11 ([X και Y] *Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Μετασχηματισμός Laplace, Κινηματική-Δυναμική του Υλικού Σημείου*): Θεωρούμε την κατακόρυφη κίνηση υλικού σημείου M (για $t \geq 0$ και κατά μήκος του άξονα Ox καταρχήν προς τα πάνω) υπό την επίδραση της γήινης βαρύτητας (με επιτάχυνση $-g$, δηλαδή προς τα κάτω) καθώς και αντιστάσεως στην κίνηση (επίσης προς τα κάτω) ανάλογης της ταχύτητας $v(t) = \dot{x}(t)$ με ανηγμένη σταθερά $c > 0$. Προκύπτει τότε η εξής συνήθης διαφορική εξίσωση de της κινήσεως του υλικού αυτού σημείου:

$$\ddot{x}(t) = -g - c\dot{x}(t), \quad t \geq 0.$$

Ζητούνται: (α) Η φυσική εξήγηση της πιο πάνω διαφορικής εξισώσεως de. (β) Η επίλυσή της (με την εντολή DSolve) με αρχικές συνθήκες $x(0) = x_0$ και $v(0) = \dot{x}(0) = v_0 > 0$. (**Υπόδειξη**: Να χρησιμοποιηθεί κι η εντολή FullSimplify.) (γ) Η επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε (διαφορική εξίσωση de και αρχικές συνθήκες). (δ) Η άμεση επαναγραφή της διαφορικής εξισώσεως de σαν ολοκληρωτικής εξισώσεως ie με την αποδοχή τώρα της επιταχύνσεως $a(t) = \ddot{x}(t)$ του υλικού σημείου M σαν άγνωστης συναρτήσεως (αντί για τη θέση $x(t)$). **Υπόδειξη**: Να ληφθεί υπόψη ότι

$$\dot{x}(t) = v(t) = v_0 + \int_0^t a(\tau) d\tau.$$

Πώς προκύπτει η εξίσωση αυτή; (ε) Στη συνέχεια ζητείται η επίλυση της ολοκληρωτικής αυτής εξισώσεως ie υποχρεωτικά με τη χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace με τη χρήση και του συμβόλου $A(s)$ για το μετασχηματισμό Laplace της επιταχύνσεως $a(t)$. (στ) Στη συνέχεια από την επιτάχυνση $a(t)$ ζητείται ο παραπέρα υπολογισμός της ταχύτητας $v(t)$ και της θέσεως $x(t)$ του υλικού σημείου M με κατάλληλες απλές ολοκληρώσεις. (ζ) Τέλος ζητείται και ο έλεγχος ότι η έκφραση της θέσεως $x(t)$ που προέκυψε από την επίλυση της ολοκληρωτικής εξισώσεως ie για την παραπάνω κατακόρυφη κίνηση του υλικού σημείου M συμπίπτει απόλυτα με την ανάλογη έκφραση που προέκυψε από την επίλυση της αρχικής διαφορικής εξισώσεως de. Αυτή η έκφραση αναφέρεται στην ίδια ακριβώς κίνηση μαζί βέβαια με τις αρχικές συνθήκες ως προς τη διαφορική αυτή εξίσωση. Οι αρχικές συνθήκες έχουν ήδη ενσωματωθεί στην ολοκληρωτική εξίσωση ie.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-12 ([X] *Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Αναγωγή σε Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Αρμονικός Ταλαντωτής, Μετασχηματισμός Laplace*): Θεωρούμε την κλασική συνήθη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

του συνήθους αρμονικού ταλαντωτή (με $u(t)$ τη θέση και ω_0 την κυκλική συχνότητα) σε ελεύθερη ταλάντωση χωρίς απόσβεση (μονοβάθμιο μηχανικό σύστημα) με αρχικές συνθήκες

$$u(0) = u_0 \quad \text{και} \quad v(0) = \dot{u}(0) = v_0.$$

Ζητείται η αναγωγή της διαφορικής αυτής εξίσωσης σε ολοκληρωτική εξίσωση Volterra (α) τόσο με την πρώτη και (β) όσο και με την δεύτερη μέθοδο αναγωγής (τελικά χωρίς την εμφάνιση διαδοχικών ολοκληρωμάτων μετά από παραγοντική ολοκλήρωση). (γ) Ποια μέθοδο βρίσκετε εσείς πιο συμφέρουσα; Γιατί; (δ) Είναι εφαρμόσιμη η μέθοδος του μετασχηματισμού Laplace για την επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων που προέκυψαν; (ε) Εάν ναι, να εφαρμοσθεί στην πρώτη ή στη δεύτερη από τις παραπάνω δύο (διαφορετικές) ολοκληρωτικές εξισώσεις.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-113 ([X και Y] *Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Μετασχηματισμός Laplace, Δυναμική και Ταλαντώσεις*): Εξετάζουμε την ευθύγραμμη κίνηση υλικού σημείου M κατά μήκος του άξονα Ox με το υλικό αυτό σημείο συνδεδεμένο μέσω γραμμικά ελαστικού ελατηρίου με την αρχή των αξόνων O και ταυτόχρονα υπό την επίδραση συνημιτονικής εξωτερικής δυνάμεως κυκλικής συχνότητας ω_0 ίσης με εκείνη του μηχανικού συστήματος: υλικό σημείο και ελατήριο. Η διαφορική εξίσωση της κινήσεως του υλικού σημείου που προκύπτει τελικά έχει τη μορφή

$$\ddot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = p \cos \omega_0 t, \quad t \geq 0,$$

με το p σταθερά: ανηγμένο εύρος της αρμονικής φορτίσεως. Δίνεται επίσης η αρχική θέση του υλικού σημείου $u(0) = u_0$, ενώ η αρχική ταχύτητά του $v(0) = \dot{u}(0) = v_0$ θεωρείται μηδενική. Ζητούνται: (α) Η επίλυση αυτού του προβλήματος αρχικών τιμών (εντολή DSolve). (β) Με ολοκλήρωση ως προς το χρόνο t η μετατροπή της πιο πάνω διαφορικής εξίσωσης σε ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση. (γ) Με μια ακόμη ολοκλήρωση ως προς το χρόνο t και πάλι (και μετά παραγοντική ολοκλήρωση), χωρίς να αμελούνται φυσικά οι αρχικές συνθήκες, η απόδειξη της ισχύος της εξής ολοκληρωτικής εξίσωσης τύπου Volterra και μάλιστα συνελκτικού τύπου για το πρόβλημά μας:

$$u(t) - u_0 + \omega_0^2 \int_0^t (t - \tau) u(\tau) d\tau = \frac{p(1 - \cos \omega_0 t)}{\omega_0^2}, \quad t \geq 0.$$

(δ) Η επίλυση της παραπάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace. (ε) Η διαπίστωση ότι τόσο η διαφορική εξίσωση (μαζί με τις αρχικές συνθήκες) όσο και η ολοκληρωτική εξίσωση (με τις αρχικές συνθήκες να έχουν ληφθεί υπόψη) οδηγούν στην ίδια λύση για τη θέση $u(t)$ του υλικού σημείου M . (στ) Τι συνάγεται από τη λύση αυτή, δηλαδή ποιο ειδικό (και γενικά τόσο απευκταίο) φαινόμενο παρουσιάζεται κατά την κίνηση του υλικού σημείου; Γιατί;

ΟΜΑΔΑ ΕΜΙΙΙ-Κ

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Κ1 ([X και Y] *Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Νόμος της Ψύξεως του Νεύτωνα, Αναγωγή σε Συνήθη Διαφορική Εξίσωση, Μετασχηματισμός Laplace, Διαδοχικές Προσεγγίσεις*): Για την ολοκληρωτική εξίσωση (integral equation) που παρουσιάζεται στο πρόβλημα του καθορισμού της θερμοκρασίας $u = u(t)$ υλικού σημείου αρχικής θερμοκρασίας $u(0) = u_0$ μέσα σε περιβάλλον σταθερής θερμοκρασίας u_1 ($u_1 \neq u_0$) και με σταθερά μεταδόσεως της θερμότητας (ρυθμό ψύξεως) στο νόμο της ψύξεως του Νεύτωνα ίση με k ($k > 0$) ζητούνται: (α) Οι χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής αυτής εξίσωσης. (β) Η αναγωγή της σε συνήθη διαφορική εξίσωση με παραγωγή και η επίλυση της τελευταίας μαζί με τη σχετική αρχική συνθήκη. (γ) Η επαλήθευση του αποτελέσματος με αντικατάσταση στη διαφορική εξίσωση και στην αρχική συνθήκη, αλλά και στην αρχική ολοκληρωτική εξίσωση. (δ) Η επίλυση της ίδιας ολοκληρωτικής εξίσωσης με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, εάν βέβαια αυτή είναι εφαρμόσιμη. (ε) Η σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο πιο πάνω μεθόδων. (στ) Η επίλυση της ίδιας ακριβώς ολοκληρωτικής εξίσωσης με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων ξεκινώντας από τη μηδενική αρχική προσέγγιση $u_0(t) = 0$ και φθάνοντας μέχρι και την εικοστή προσέγγιση $u_{20}(t)$. (ζ) Η σύγκριση του αποτελέσματος της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων με την ακριβή λύση των προηγούμενων δύο μεθόδων, αφού πρώτα χρησιμοποιηθεί κατάλληλα και σειρά Maclaurin στην ακριβή λύση. (η) Ποια από τις τρεις πιο πάνω μεθόδους επιλύσεως της παρούσας συγκεκριμένης ολοκληρωτικής εξίσωσης θεωρείται ότι είναι υπολογιστικά απλούστερη; (θ) Πότε υπερέχει η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Κ2 ([X και Y] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Συνέλιξη, Μετασχηματισμός Laplace):

Για την απλή ολοκληρωτική εξίσωση

$$4t - 3 \int_0^t \sin(t - \tau) y(\tau) d\tau = y(t)$$

Ζητούνται: (α) Οι χαρακτηρισμοί της, δηλαδή τι τύπων και τι είδους είναι. (β) Η άγνωστη συνάρτηση σ' αυτήν. (γ) Ο πυρήνας της $K(t, \tau)$. (δ) Η λύση της με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace και του θεωρήματος της συνέλιξης και (ε) Τέλος η πλήρης επαλήθευση της λύσεως που βρέθηκε.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Κ3 ([X και Y] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Συνέλιξη, Μετασχηματισμός Laplace, Συναρτήσεις Bessel): Για την απλή ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_0^x J_0(x - s) \varphi(s) ds = \sin x$$

με το σύμβολο $J_0(s)$ να δηλώνει τη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξεως Ζητούνται: (α) Οι χαρακτηρισμοί της, δηλαδή τί τύπων/ειδών είναι. (β) Η άγνωστη συνάρτηση σ' αυτήν. (γ) Ο πυρήνας της $K(x, s)$. (δ) Η λύση της με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace και του θεωρήματος της συνέλιξης και (ε) Τέλος το συμπέρασμα ότι ισχύει ο σχετικός τύπος

$$\int_0^x J_0(x - s) J_0(s) ds = \sin x,$$

ο οποίος προφανώς είναι ένας ενδιαφέρων και μη αναμενόμενος τύπος.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Κ4 ([Y] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Διαδοχικές Προσεγγίσεις): Για καθεμία ξεχωριστά από τις εξής δύο απλές ολοκληρωτικές εξισώσεις:

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^1 x s^2 \varphi(s) ds \quad \text{και} \quad \varphi(x) = 1 + 2 \int_0^1 x^2 s^7 \varphi(s) ds, \quad 0 < x < 1,$$

Ζητούνται: (α) Οι χαρακτηρισμοί της, δηλαδή τι τύπων/ειδών είναι. (β) Η άγνωστη συνάρτηση σ' αυτήν. (γ) Ο πυρήνας της $K(x, s)$. (δ) Η λύση της tb υποχρεωτικά με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων με $n = 16$ προσεγγίσεις/επαναλήψεις (με την πιθανή χρήση και της εντολής Table) με τα αποτελέσματα να παρουσιάζονται τόσο με ρητούς όσο και με δεκαδικούς αριθμούς (με τη χρήση και της εντολής N) και με τετριμμένη αρχική προσέγγιση τη μηδενική συνάρτηση $\varphi_0(x) = 0$. (ε) Υπάρχει ικανοποιητική σύγκλιση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων; Σε τι βαθμού καμπύλη; Γιατί; (στ) Ζητείται επίσης η σχεδίαση όλων των προσεγγίσεων $\varphi_n(x)$ ($n = 0, 1, \dots, 16$) της λύσεως $\varphi(x)$ στο ίδιο σχήμα φυσικά. Τι παρατηρείται; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές Table, Evaluate και Plot, δηλαδή πιο συγκεκριμένα η σύνθετη εντολή

Plot[Evaluate[Table[φ[n,x], {n,0,16}], {x,0,1}]

Είναι εμφανής η σύγκλιση της μεθόδου και στο σχήμα που προέκυψε; (ζ) Αντί για τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων ποιες άλλες δύο μέθοδοι επιλύσεως ολοκληρωτικών εξισώσεων θα μπορούσαν ασφαλώς να είχαν εναλλακτικά χρησιμοποιηθεί (είτε η μία είτε η άλλη);

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Κ5 ([Y] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Διαδοχικές Προσεγγίσεις): Για την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\varphi(x) = x + \int_0^x (x + s) \varphi(s) ds$$

Ζητούνται: (α) Οι χαρακτηρισμοί της, δηλαδή τι τύπων/ειδών είναι. (β) Η άγνωστη συνάρτηση σ' αυτήν. (γ) Ο πυρήνας της $K(x, s)$. (δ) Η λύση της υποχρεωτικά με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων με οκτώ προσεγγίσεις/επαναλήψεις, με τα αποτελέσματα $\varphi_n(x) \approx \varphi(x)$ να παρουσιάζονται τόσο με ρητούς όσο και με δεκαδικούς αριθμούς και με προφανή αρχική προσέγγιση της λύσεως $\varphi(x)$ τη μηδενική συνάρτηση $\varphi_0(x) = 0$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές

Table και TableForm (για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων σε μορφή πίνακα) και N για την αριθμητική παρουσίαση των αποτελεσμάτων. (ε) Υπάρχει ικανοποιητική σύγκλιση της μεθόδου των διαδοχικών προσεγγίσεων; (στ) Στη συνέχεια ζητείται η σχεδίαση των οκτώ αυτών πρώτων προσεγγίσεων $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots, 8$) της λύσεως $\varphi(x)$ (στο ίδιο σχήμα και για $0 \leq x \leq 1$). (ζ) Να ορισθεί η υπεργεωμετρική συνάρτηση του Kummer

$$y_1(x) = {}_1F_1\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, x^2\right).$$

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$y1[x_] = \text{Hypergeometric1F1}[5/4, 3/2, x^2]$$

(η) Για τη συνάρτηση $y_2(x) = xy_1(x)$ ποιες είναι οι τιμές της στα σημεία $x = 0$ και $x = 1$; (Να γίνει και η σχετική γραφική παράσταση της συναρτήσεως $y_2(x)$ στο διάστημα $[0, 1]$.) (θ) Για την ίδια συνάρτηση $y_2(x)$ να υπολογισθεί η σειρά Maclaurin (εντολή Series) με όρους μέχρι και 15ης τάξεως (x^{15}) και να συγκριθεί το αποτέλεσμα με την προσεγγιστική λύση $\varphi_8(x)$ της παραπάνω ολοκληρωτικής εξίσωσης. Τι παρατηρείται; (ι) Να γίνει και απευθείας έλεγχος του συμπεράσματος με τον άμεσο υπολογισμό της σειράς Maclaurin της διαφοράς $y_2(x) - \varphi_8(x)$ (πάλι με όρους μέχρι και x^{15}).

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Κ6 ([X] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Χορδές, Καλώδια, Δοκοί, Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Δοκών): Ζητούνται:

- (α) Πώς ορίζεται η συνάρτηση επιρροής $G(x, \xi)$ σε χορδή ή σε δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$);
- (β) Να υπολογισθεί η αναλυτική έκφρασή της σε περίπτωση χορδής προσεγγιστικά και καλώδιου. (Γιατί προσεγγιστικά;)
- (γ) Ποιος είναι ο σχετικός ολοκληρωτικός τύπος για τον υπολογισμό της εγκάρσιας μετατόπισης $v(x)$ σε χορδή ή δοκό από την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x)$;
- (δ) Πότε ακριβώς μιλάμε για ολοκληρωτική εξίσωση αντί για ολοκληρωτικό τύπο;
- (ε) Να γίνουν οι χαρακτηρισμοί της σχετικής ολοκληρωτικής εξίσωσης (για χορδή ή δοκό).
- (στ) Σε καμπτικές ιδιοταλαντώσεις δοκού σταθερής γραμμικής πυκνότητας ρA και με την υπόθεση ότι για την εγκάρσια μετατόπιση των σημείων της $v(x, t)$ ισχύει ο χωρισμός μεταβλητών

$$v(x, t) = V(x) \cos \omega t$$

(με x τη θέση, t το χρόνο και ω την κυκλική συχνότητα των ιδιοταλαντώσεων), ποια ολοκληρωτική εξίσωση προκύπτει για την ιδιομορφή των ταλαντώσεων $V(x)$ με τη συνάρτηση επιρροής $G(x, \xi)$ γνωστή και υποτιθέμενη ότι ισχύει; Ποιοι είναι οι χαρακτηρισμοί για την ολοκληρωτική αυτή εξίσωση; Σε τι ακριβώς είναι αυτή χρήσιμη για τον Πολιτικό Μηχανικό στη Δυναμική των Κατασκευών;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Κ7 ([X] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Πλάκες): Στην άσκηση αυτή, η οποία αναφέρεται στις πλάκες, τον πιο γνωστό επιφανειακό φορέα του Πολιτικού Μηχανικού, ζητούνται:

- (α) Ποιος τύπος (με διπλό ολοκλήρωμα) συνδέει το βέλος κάμψεως (ή βύθιση) $w(x, y)$ σε απλά εδραζόμενη και υπό συνθήκες κάμψεως πλάκα P (γνωστής δυσκαμψίας D και χωρίς συγκεντρωμένα φορτία ή ροπές) με την κατανεμημένη κάθετη φόρτιση $p(x, y)$ στην ίδια πλάκα με $(x, y) \in P$; (βέβαια χωρίς συγκεκριμένη έκφραση για τον πυρήνα $K(x, y, \xi, \eta)$ στο ολοκλήρωμα).
- (β) Πώς ορίζεται η σχετική συνάρτηση επιρροής (influence function) $G(x, y, \xi, \eta)$, δηλαδή τι φυσική σημασία έχει; Ποια είναι η σχέση της με τον πυρήνα $K(x, y, \xi, \eta)$; Ποια θεμελιώδη ιδιότητα έχει η ίδια συνάρτηση; Με βάση ποιο θεώρημα (ή αρχή) στη Μηχανική των Υλικών προκύπτει η ιδιότητα αυτή;

(γ) Ποια είναι επομένως η ολοκληρωτική εξίσωση για τον προσδιορισμό της κατανεμημένης κάθετης φορτίσεως $\rho(x, y)$ στην πλάκα P , εάν το βέλος κάμψεως της (ή βύθισή της) $w(x, y)$ είναι γνωστό (μέσω μετρήσεων) σε όλα τα σημεία της πλάκας;

(δ) Τελικά από ποιους παράγοντες (όλους!) εξαρτάται η έκφραση της συναρτήσεως επιρροής $G(x, y, \xi, \eta)$ στο πρόβλημα πλάκας που εξετάζουμε;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Κ8 ([X και Y] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Διαχωρίσιμοι Πυρήνες): Για την ολοκληρωτική εξίσωση ie

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds, \quad a \leq x \leq b,$$

ζητείται η λύση της στην ειδική περίπτωση διαχωρίσιμου πυρήνα της μορφής

$$K(x, s) = \lambda u(x) v(s)$$

(με το λ σταθερά). Σαν εφαρμογή να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση ie1

$$\varphi(x) = 1 + \lambda \int_0^1 x^3 s^7 \varphi(s) ds, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Για τη λύση που προκύπτει (φυσικά στο διάστημα $[a, b] = [0, 1]$) να γίνει η σχετική γραφική παράσταση για $\lambda = 5$ και $\lambda = 10$ (στο ίδιο σχήμα, εντολή Plot) καθώς και η επαλήθευση της ισχύος της (για κάθε σχεδόν τιμή του λ) με αντικατάσταση στην ολοκληρωτική εξίσωση ie1. Τι συμβαίνει για $\lambda = 11$; Τέλος τι τύπων είναι η παραπάνω ολοκληρωτική εξίσωση ie1;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Κ9 ([X και Y] Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Μέθοδος των Διαχωρίσιμων Πυρήνων, Μέθοδος της Αριθμητικής Ολοκληρώσεως): Θεωρούμε την απλή ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) + \int_0^1 x^2 t y(t) dt = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

με άγνωστη συνάρτηση την $y(x)$. Ζητούνται:

(α) Οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής αυτής εξισώσεως.

(β) Η επίλυσή της με τη μέθοδο των διαχωρίσιμων πυρήνων. (Ο σχετικός τελικός τύπος θεωρείται εδώ γνωστός!) **Υπόδειξη:** Καταρχήν πρέπει να δηλωθούν οι γνωστές συναρτήσεις $L(x)$, $M(t)$ και $f(x)$ μέσω της προκαταρκτικής εντολής

Clear[f]

και της κύριας εντολής

{L[x_] := x^2, M[t_] := t, f[x_] := 1};

οπότε ο τελικός τύπος για τη λύση $y_s(x)$, ο τύπος (2.3.11) της Ενότητας Γ2.3 του Κεφαλαίου Γ2 του Μέρους Γ για τις Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, παίρνει τη μορφή

ys[x_] := f[x]-Integrate[M[t] f[t], {t,0,1}]/(1+Integrate[L[t] M[t], {t,0,1})) L[x];

Η λύση $y_s(x)$ που βρέθηκε έχει την ακόλουθη απλή μορφή:

$$ys[x] \quad 1 - \frac{2x^2}{5}$$

Η μέθοδος των διαχωρίσιμων πυρήνων είναι εφαρμόσιμη μόνο σε πολύ ειδικές περιπτώσεις όπου ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξισώσεως είναι πραγματικά διαχωρίσιμος. Πολύ γενικότερη είναι η μέθοδος της αριθμητικής ολοκληρώσεως, η οποία επιδεικνύεται στο αμέσως επόμενο ερώτημα.

(γ) Η επίλυση της παραπάνω ολοκληρωτικής εξισώσεως με τη μέθοδο της αριθμητικής ολοκληρώσεως, πιο συγκεκριμένα με τη χρήση του τροποποιημένου κανόνα (τύπου) αριθμητικής

ολοκληρώσεως Gauss-Legendre (στο διάστημα $[0, 1]$ αντί για το αρχικό διάστημα $[-1, 1]$) με μόλις $n = 2$ κόμβους

$$\int_0^1 g(t) dt \approx \sum_{i=1}^2 w_i g(t_i).$$

Οι κόμβοι (τα σημεία, οι τετμημένες) t_i και τα βάρη w_i έχουν τις τιμές

$$t_1 = \frac{1 - (1/\sqrt{3})}{2} \approx 0.21132, \quad t_2 = \frac{1 + (1/\sqrt{3})}{2} \approx 0.78868, \quad w_1 = w_2 = \frac{1}{2} = 0.5.$$

Δηλαδή εδώ $t_1 + t_2 = 1$ και $w_1 + w_2 = 1$.

Στη *Mathematica* οι παραπάνω κόμβοι (nodes) t_i μπορούν να δηλωθούν με την εντολή

```
nodes = {t[1] = (1-1/Sqrt[3])/2, t[2] = (1+1/Sqrt[3])/2} // Simplify
```

και τα βάρη w_i με την εντολή

```
weights = {w[1] = 1/2, w[2] = 1/2}
```

Τώρα πια η ολοκληρωτική εξίσωση παίρνει την προσεγγιστική μορφή της aie (approximate integral equation) λόγω της προσεγγίσεως που οφείλεται στην αριθμητική ολοκλήρωση

```
aei = y[x] + Sum[w[k] x^2 t[k] y[k], {k, 1, 2}] == 1 // Simplify
```

Το ζητούμενο σύστημα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων equations προκύπτει θέτοντας $x = t_k$ ($k = 1, 2$ στην περίπτωση μας). Τους αγνώστους $y(t_k)$ τους γράφουμε πιο απλά σαν y_k . Η εντολή Table μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε εύκολα τη λίστα των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων (equations, μόνο δύο στην περίπτωση μας)

```
equations = Table[aei /. {y[x] -> y[k], x -> t[k]}, {k, 1, 2}] // Simplify
```

με αγνώστους (unknowns) τις τιμές y_k της άγνωστης συναρτήσεως $y(x)$ στους κόμβους t_k :

```
unknowns = Table[y[k], {k, 1, 2}]
```

Η επίλυση του γραμμικού αυτού συστήματος γίνεται με την εντολή Solve

```
solution = Solve[equations, unknowns] // FullSimplify
```

(δ) Τελικά πέρα από τις (προσεγγιστικές;) τιμές $y_{1,2}$ της άγνωστης συναρτήσεως $y(x)$ στους κόμβους $t_{1,2}$ ποιος είναι ο τύπος φυσικής παρεμβολής (παρεμβολής του Nyström) που δίνει την $y(x)$ σε ολόκληρο το διάστημα ολοκληρώσεως $[0, 1]$; Πώς κρίνετε την προσέγγιση (εάν υπήρξε φυσικά προσέγγιση) του ολοκληρώματος μέσω του παραπάνω τύπου αριθμητικής ολοκληρώσεως με τη χρήση δύο μόνο κόμβων (σημείων); **Υπόδειξη:** Μπορεί να χρησιμοποιηθεί απλά η εντολή για τον τύπο της φυσικής παρεμβολής του Nyström (Nyström interpolation formula ή natural interpolation formula), όπου βέβαια δε λησμονείται η λύση solution που βρέθηκε στο προηγούμενο ερώτημα:

```
ys[x_] = Solve[aei, y[x]][[1, 1, 2]] /. solution[[1]] // Simplify
```

(ε) Συμφωνούν ή όχι τα αποτελέσματα των ερωτημάτων (β) και (γ), όπως θα έπρεπε;

Παρατήρηση 1: Όχι μόνο συμφωνούν, αλλά στην προκειμένη περίπτωση η αριθμητική ολοκλήρωση δεν εισήγαγε καθόλου σφάλμα αντίθετα με ό,τι συμβαίνει συνήθως. Τούτο οφείλεται απλά στην εξαιρετικά απλή μορφή της λύσεως $y(x)$ της ολοκληρωτικής εξισώσεως. Βέβαια, εάν είχε χρησιμοποιηθεί παρεμβολή Lagrange, που θα ήταν γραμμική με δύο μόνο κόμβους (σημεία) $t_{1,2}$, τότε θα υπήρχε σφάλμα προσεγγίσεως λόγω της μειωμένης ακρίβειας της παρεμβολής Lagrange έναντι της φυσικής παρεμβολής.

Παρατήρηση 2: Οι παραπάνω υπολογισμοί έγιναν χωρίς προσεγγίσεις των μεγεθών που υπεισέρχονται με δεκαδικούς αριθμούς μέσω της εντολής N. Αυτή δεν είναι η συνηθισμένη κατάσταση

στην αριθμητική ολοκλήρωση και στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων. Υιοθετήθηκε όμως στην παρούσα απλή άσκηση, όπου το σφάλμα της αριθμητικής ολοκληρώσεως (αλλά και της φυσικής παρεμβολής του Nyström) αποδείχθηκε τελικά μηδενικό.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Κ10 (IX ή Y) Ολοκληρωτικές Εξισώσεις, Μηχανική των Υλικών, Θραυστομηχανική: Ρωγμές): Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα του ρηγματωμένου, άπειρου, ομογενούς, ισότροπου και γραμμικά ελαστικού επιπέδου Oxy με τη ρωγμή (crack) C ευθύγραμμη και κατά μήκος του άξονα Ox ($C = [-1, 1]$). Η φόρτιση στο ρηγματωμένο δοκίμιό μας χαρακτηρίζεται αποκλειστικά από την ομοιόμορφη εφελκυστική τάση σ στο άπειρο κατά μήκος του άξονα Oy και ασφαλώς κάθετα προς τη διεύθυνση της ρωγμής C . Τα άκρα της ρωγμής $x = \pm 1$ προφανώς χαρακτηρίζονται από ιδιόμορφα τασικά πεδία, που τελικά μπορούν να οδηγήσουν σε φαινόμενα θραύσεως.

Η σχετική θεωρία στη Θραυστομηχανική (ή Μηχανική της Θραύσεως) δέχεται ότι η θραύση επέρχεται σε ένα άκρο ρωγμής, μόλις ο σχετικός συντελεστής εντάσεως τάσεων K φθάσει μια κρίσιμη τιμή του K_0 που είναι χαρακτηριστική του ελαστικού υλικού του δοκιμίου μας. Για τον υπολογισμό του συντελεστή εντάσεως τάσεων K στο συγκεκριμένο πρόβλημα θα πρέπει να λύσουμε την ακόλουθη κλασική ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \frac{g(t) - g(x)}{t-x} dt = \sigma, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

με την άγνωστη συνάρτηση $g(t)$ να σχετίζεται άμεσα με τις κλίσεις των δύο πλευρών της ρωγμής, που είναι μεταξύ τους αντίθετες.

Συγκεκριμένα η συνάρτηση

$$g^*(t) := \frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$$

είναι ανάλογη της διαφοράς των κλίσεων των δύο πλευρών της ρωγμής. Ισχύει επίσης εδώ και η συνθήκη του συμβιβαστού των μετατοπίσεων

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} g(t) dt = 0,$$

που μας εξασφαλίζει ότι η ρωγμή αρχίζοντας από το αριστερό άκρο της κλείνει στο δεξιό άκρο της. Με τη συνάρτηση $g(t)$ να έχει ήδη προσδιορισθεί ο συντελεστής εντάσεως τάσεων K δίνεται από τον τύπο

$$K(\pm 1) = \pm \sqrt{\pi} g(\pm 1)$$

(για τα δύο άκρα της ρωγμής). Ζητούνται:

(α) Οι κατηγορίες όπου ανήκει η πιο πάνω ολοκληρωτική εξίσωση της ρωγμής.

(β) Ποια μέθοδο θα θεωρούσατε πιο αποτελεσματική για την πρακτική επίλυσή της;

(γ) Να επαληθευθεί ότι για μοναδιαία κάθετη εφελκυστική τάση $\sigma = 1$ στο άπειρο η λύση της ολοκληρωτικής εξισώσεώς μας είναι η συνάρτηση

$$g(x) = x.$$

Σύμφωνα με αυτά ποια είναι η λύση για $\sigma \neq 1$;

(δ) Επομένως με το κριτήριο θραύσεως που ήδη αναφέρθηκε ποια είναι η ελάχιστη εφελκυστική τάση σ_0 (στο άπειρο και κατά τον άξονα Oy) που θα προκαλέσει τη διάδοση της ρωγμής C και τη θραύση του δοκιμίου μας, η οποία αρχίζει βέβαια από το ένα ή από το άλλο άκρο της ρωγμής C ;

ΟΜΑΔΑ ΕΜΙΙΙ-Λ

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Λ1 ([X] **Μιγαδικοί Αριθμοί: Ορίσματα. Ρωγμές**): Για μια ρωγή $[-a, a]$ πάνω στον άξονα Ox στο μιγαδικό επίπεδο Oxy σε ποια διαστήματα ακριβώς πρέπει να κυμαίνονται (για τον Πολιτικό Μηχανικό) τα ορίσματα $\theta_{1,2}$ των μιγαδικών αριθμών

$$w_{1,2} = \sqrt{z \mp a} = r_{1,2} \exp(i\theta_{1,2}) \equiv r_{1,2} e^{i\theta_{1,2}}$$

στο δεξιό και στο αριστερό άκρο της ρωγμής αντίστοιχα; Γιατί ακριβώς;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Λ2 ([Y] **Μιγαδικοί Αριθμοί, Στοιχειώδεις Αναλυτικές Συναρτήσεις Μιγαδικής Μεταβλητής**): Με τη χρήση της *Mathematica* ζητούνται:

(α) Τι γνωρίζετε για το πακέτο Algebra'Relm' (από τις λέξεις Real και Imaginary) της *Mathematica*; Να κληθεί (να φορτωθεί) το πακέτο αυτό στη *Mathematica* (εντολή Needs ή <<). Σε ποιες ακριβώς περιπτώσεις είναι χρήσιμο; Τι γνωρίζετε για τις εντολές Re, Im, Negative και RealValued της *Mathematica* και του παραπάνω πακέτου της;

(β) Δίνονται οι εξής τρεις μιγαδικοί αριθμοί:

$$z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id, \quad z_3 = e + if$$

με τους αριθμούς a, b, c, d, e και f πραγματικούς. (Στη *Mathematica* η μιγαδική μονάδα i συμβολίζεται με το κεφαλαίο I ή με το ειδικό σύμβολο του προγράμματος ii. Το τελευταίο αυτό σύμβολο, που προτιμάται ασφαλώς, μπορεί να εισαχθεί από το πληκτρολόγιο σαν Esc ii Esc.)

(γ) Να υπολογισθούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του μιγαδικού αριθμού z_1 (με τη χρήση των εντολών Re και Im). Τι παρατηρείται; Μπορεί να χρησιμοποιηθεί με επιτυχία η εντολή ComplexExpand για το σκοπό αυτό; Εναλλακτικά να δηλωθεί (εντολή /;, π.χ. a/:Im[a] = 0) ρητά ότι οι αριθμοί a, b, c, d, e και f είναι πραγματικοί και να υπολογισθούν και πάλι οι ίδιες ποσότητες.

(δ) Να επαληθευθεί ότι στη *Mathematica* ισχύουν οι εξής κλασικές ιδιότητες για τους μιγαδικούς αριθμούς: αντιμεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση και στον πολλαπλασιασμό (για τους αριθμούς $z_{1,2}$), ομοίως προσεταιριστική ιδιότητα (για τους αριθμούς $z_{1,2,3}$), επιμεριστική ιδιότητα (πάλι για τους αριθμούς $z_{1,2,3}$) και ύπαρξη ουδέτερων στοιχείων για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό (ως προς τον αριθμό z_1). Πρόκειται για γνώσεις που έχουν ενσωματωθεί στη *Mathematica* από τους προγραμματιστές της. **Υπόδειξη:** Για την απόδειξη π.χ. της αντιμεταθετικότητας στην πρόσθεση μπορεί να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\text{ver1} = z_1 + z_2 == z_2 + z_1$$

Μερικές φορές απαιτείται η χρήση και της εντολής Simplify.

(ε) Για το γινόμενο $z_4 = z_1(z_2z_3)$ να υπολογισθούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του, $\text{Re } z_4$ και $\text{Im } z_4$ αντίστοιχα (εντολές Re και Im αντίστοιχα στη *Mathematica*). Ποιος είναι ο συζυγής μιγαδικός αριθμός $z_5 = \bar{z}_4$ του αριθμού z_4 ; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Conjugate). Να υπολογισθούν και γι' αυτόν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος. Τι παρατηρείται;

(στ) Να υπολογισθεί το πηλίκο $z_6 = z_1/z_2$ και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του (στην απλούστερη δυνατή μορφή τους). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί και η εντολή Simplify.

(ζ) Για το μιγαδικό αριθμό $z_1 = a + ib$ να υπολογισθούν οι εξής στοιχειώδεις αναλυτικές συναρτήσεις: συνημίτονο, ημίτονο, εφαπτομένη, οι αντίστοιχες υπερβολικές συναρτήσεις καθώς και η εκθετική συνάρτηση. (Για τους υπολογισμούς αυτούς είναι αναγκαία η εντολή ComplexExpand και ίσως και η εντολή Simplify για απλούστερα αποτελέσματα.) Για το μιγαδικό αριθμό $\sinh z_1$ ζητείται και η γραφή του σε εκθετική μορφή με τη χρήση της εντολής TrigToExp. Τέλος για το μιγαδικό αριθμό $\exp z_1$ ζητείται η ισοδύναμη γραφή του με τη χρήση των συναρτήσεων cosh και sinh

(εντολή ExpToTrig).

(η) Να υπολογισθεί αριθμητικά (με είκοσι σημαντικά ψηφία, εντολή N) η πρωτεύουσα τιμή του αριθμού i^i . Να γίνει, εάν χρειάζεται, χρήση και της εντολής Chop. Χρειάζεται άραγε; Γιατί;

(θ) Να υπολογισθούν οι απόλυτες τιμές (εντολή Abs) και τα ορίσματα (εντολή Arg) του μιγαδικού αριθμού $z_7 = 6 + 8i$ και του συζυγούς του μιγαδικού αριθμού $6 - 8i$ ακριβώς, δηλαδή χωρίς τη χρήση δεκαδικών αριθμών, οι οποίοι περιέχουν συνήθως σφάλματα στρογγυλεύσεως. (Τα ορίσματα να υπολογισθούν και αριθμητικά με 20 σημαντικά ψηφία.) Τι παρατηρείται;

(ι) Για τον ίδιο αριθμό z_7 να υπολογισθούν αριθμητικά (με τη συνήθη ακρίβεια της *Mathematica*) οι τιμές των συναρτήσεων συνημίτονο, ημίτονο, εφαπτομένη καθώς και οι τιμές των αντίστοιχων υπερβολικών συναρτήσεων και της εκθετικής συναρτήσεως. Στη συνέχεια να υπολογισθούν οι αντίστοιχες (δηλαδή για τον ίδιο ακριβώς μιγαδικό αριθμό z_7) τιμές των αντίστροφων συναρτήσεων όλων (δηλαδή και των επτά) πιο πάνω στοιχειωδών υπερβατικών συναρτήσεων. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές ArcCos, ArcSin, ..., Log.

(ια) Στην ειδική περίπτωση του μιγαδικού αριθμού $z_1 = a + ib$ που ορίστηκε πιο πάνω να ελεγχθεί εάν είναι αληθείς (true) ή ψευδείς (false) οι τύποι

$$\cot(\cot^{-1} z_1) = z_1, \quad \coth(\coth^{-1} z_1) = z_1, \quad \exp(\ln z_1) = z_1.$$

(Ίσως απαιτηθούν απλοποιήσεις, εντολή Simplify, των αρχικών αποτελεσμάτων της *Mathematica*.)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-L3 ([Y] Μιγαδικοί Αριθμοί, Στοιχειώδεις Υπολογισμοί σε Καρτεσιανές και Πολικές Συντεταγμένες): Με τη χρήση της *Mathematica* ζητούνται: (α) Το γινόμενο των μιγαδικών αριθμών $1/(2 + 5i)$ και $1/(1 - i)$. (β) Το πηλίκο των μιγαδικών αριθμών $2 - 6i$ και $2 - i$. (γ) Για τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ ζητείται απλά να δηλωθεί στη *Mathematica* (πάλι με τη χρήση του πακέτου Algebra`ReIm' της *Mathematica*, σχετική εντολή είναι η εντολή Needs) ότι τόσο τα πραγματικά όσο και τα φανταστικά μέρη τους είναι στ' αλήθεια πραγματικοί αριθμοί. (δ) Παραπέρα για το μιγαδικό αριθμό z ζητούνται το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του (εντολές Re και Im αντίστοιχα). Ίδιο ερώτημα για το μιγαδικό αριθμό $1/z$ καθώς επίσης και για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1 z_2$ και z_1/z_2 . (Ασφαλώς να χρησιμοποιείται, όσες φορές απαιτείται, και η εντολή Simplify.) (ε) Στη συνέχεια να επαληθευθεί (πάλι με τη χρήση της *Mathematica* και της εντολής της Conjugate) ότι

$$\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

(στ) Να υπολογισθεί (προφανώς σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y)) το γινόμενο $z\bar{z}$. (ζ) Να υπολογισθούν το μέτρο (ή απόλυτος τιμή, εντολή Abs) και το όρισμα (εντολή Arg) των μιγαδικών αριθμών $z_3 = 2 + i$ και επίσης $z_4 = 2 - 3i$. Για το γινόμενο των συγκεκριμένων αυτών δύο μιγαδικών αριθμών να ελεγχθεί εάν το όρισμα είναι ίσο (αριθμητικά: εντολή N, δύο φορές) με το άθροισμα των ορισμάτων (ασφαλώς όπως εννοεί τα πρωτεύοντα ορίσματα η *Mathematica*).

(η) Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z_5 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ (εν προκειμένω σε πολικές συντεταγμένες (r, θ)). Ζητείται να ελεγχθεί κατά πόσον ο αντίστροφός του μιγαδικός αριθμός $1/z_5$ είναι ίσος με $(1/r)(\cos \theta - i \sin \theta)$. (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί και η εντολή Simplify.) (θ) Επίσης σε πολικές συντεταγμένες ζητείται τόσο το γινόμενο όσο και το πηλίκο των μιγαδικών αριθμών $z_6 = r_1 e^{i\theta_1}$ και $z_7 = r_2 e^{i\theta_2}$. Τι παρατηρείται; Φυσικά, επαναλαμβάνεται, να γίνονται και οι απλοποιήσεις, εντολή Simplify, σπάνια FullSimplify, όσες φορές αποδεικνύονται χρήσιμες για την απλούστευση των αποτελεσμάτων ή απλά για την «απόδειξη», μάλλον επαλήθευση, ζητούμενων τύπων.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-L4 ([Y] Αναλυτικές Συναρτήσεις: Γενικά, Όρια, Παράγωγοι): Δίνεται η μιγαδική μεταβλητή $z = x + iy$. Ζητούνται: (α) Να υπολογισθεί (ουσιαστικά να γραφεί σε συνήθη

μορφή μιγαδικού αριθμού) η συνάρτηση $f(z) = \sin z$ (εντολή ComplexExpand). Ποια είναι επομένως το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της συναρτήσεως αυτής; (β) Ποια είναι τα όρια (εντολή Limit) των συναρτήσεων

$$\frac{i \sinh z}{z}, \quad z \cot z \quad \text{και} \quad \sinh z \cot z \quad \text{για} \quad z \rightarrow 0$$

καθώς και της συναρτήσεως $1/z$ για $z \rightarrow \infty$; (γ) Για την συνάρτηση

$$f(z) = \sin z$$

ποιο είναι το όριο

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z};$$

(Η τιμή που βρέθηκε να συγκριθεί επίσης με την παράγωγο $f'(z)$ της ίδιας αναλυτικής συναρτήσεως.) (δ) Να υπολογισθεί (στην απλούστερη δυνατή μορφή της, εντολή Simplify, αν απαιτείται) η πρώτη παράγωγος (εντολή D) της συναρτήσεως

$$z^2 \tanh z \exp z.$$

(ε) Το ίδιο ερώτημα για το γινόμενο και το πηλίκο των τυχαίων (όχι καθορισμένων) αναλυτικών συναρτήσεων $f_1(z)$ και $f_2(z)$. (Θα προκύψουν έτσι οι κλασικοί τύποι για την παράγωγο γινομένου και πηλίκου αντίστοιχα. (Απαιτείται η χρήση και της εντολής Simplify.)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-L5 ([X και Y] Αναλυτικές Συναρτήσεις: Στοιχειώδεις Υπερβατικές Συναρτήσεις): **Υπόδειξη:** Στην άσκηση αυτή να χρησιμοποιούνται (όσες φορές απαιτείται) και οι εντολές: ComplexExpand για την υπόθεση πραγματικών συμβόλων σε ένα μιγαδικό ανάπτυγμα καθώς και (ίσως) Simplify ή FullSimplify για την απλοποίηση των αποτελεσμάτων. (α) Να υπολογισθούν οι στοιχειώδεις υπερβατικές συναρτήσεις

$$\exp z, \quad \sin z, \quad \cos z, \quad \tan z, \quad \sinh z, \quad \cosh z \quad \text{και} \quad \tanh z$$

στη θέση $z = x + iy$. (β) Να υπολογισθούν οι πρώτες παράγωγοι (συναρτήσει της ίδιας της μιγαδικής μεταβλητής z τώρα, δηλαδή αφού πρώτα χρησιμοποιηθεί η εντολή Clear[z]) μέσω της εντολής D των συναρτήσεων

$$\tan z, \quad \tanh z, \quad \exp z \quad \text{και} \quad \ln z.$$

(γ) Και πάλι για $z = x + iy$ να υπολογισθούν το άθροισμα

$$\cos^2 z + \sin^2 z$$

και η διαφορά

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z.$$

(δ) Να ελεγχθεί η ισχύς των τύπων (με $z = x + iy$)

$$\sinh iz = i \sin z, \quad \cosh iz = \cos z, \quad \sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z.$$

(ε) Ανάλογα να ελεγχθεί (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες και με $z = x + iy$) η ισχύς των τύπων

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

καθώς και του τύπου (για την απόλυτο τιμή $|\sinh z|$ στο τετράγωνο)

$$(\operatorname{Re} \sinh z)^2 + (\operatorname{Im} \sinh z)^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y.$$

(στ) Να υπολογισθούν αριθμητικά (με τη συνήθη ακρίβεια, εντολή N, εάν απαιτείται με τη χρήση και της εντολής Chop) οι εξής δυνάμεις:

$$(1 + i)^{-3i} \quad \text{και} \quad i^{-5i}.$$

(ζ) Για τη συνάρτηση

$$\tanh^{-1} z \quad \text{με} \quad z = x + iy$$

να γίνει απόπειρα συγκρίσεως (εντολές TrigToExp και Simplify) με τη λογαριθμική έκφρασή της

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}.$$

Ισχύει πράγματι η σχετική ισότητα; (η) Το ίδιο ερώτημα, αλλά τώρα αριθμητικά (εντολές N και Chop) στο σημείο $z = 2 + 3i$. Ποια είναι η σχετική (μιγαδική) αριθμητική τιμή και για τις δύο παραπάνω συναρτήσεις στο ίδιο σημείο;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-L6 ([Y] Στοιχειώδεις Αναλυτικές Συναρτήσεις): Με όρισμα το μιγαδικό αριθμό $z_0 = 2 + 3i$ ζητείται να υπολογισθούν αριθμητικά η εκθετική συνάρτηση και η αντίστροφή της (ποια είναι αυτή);, οι συναρτήσεις ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη και οι αντίστροφές τους καθώς και οι αντίστοιχες οκτώ υπερβολικές συναρτήσεις με μία μόνο εντολή (δηλαδή σε μορφή λίστας). Να υπολογισθούν επίσης (και πάλι αριθμητικά) οι παραστάσεις

$$\exp(\ln z_0), \quad \sin(\sin^{-1} z_0), \quad \cos(\cos^{-1} z_0), \quad \tan(\tan^{-1} z_0)$$

και οι αντίστοιχες παραστάσεις με τη χρήση υπερβολικών (αντί τριγωνομετρικών) συναρτήσεων. Τι παρατηρείται από τα αριθμητικά αποτελέσματα; Είναι δικαιολογημένη η παρατήρηση αυτή;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-L7 ([X και Y] Αναλυτικές Συναρτήσεις, Συνθήκες των Cauchy-Riemann, Συζυγείς Αρμονικές Συναρτήσεις): (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση των δύο μεταβλητών x και y

$$u(x, y) = y^4 - 6x^2y^2 + x^4.$$

Καταρχήν ζητείται να ελεγχθεί εάν ή όχι πρόκειται για αρμονική συνάρτηση. Σε καταφατική περίπτωση ζητείται επίσης η εύρεση της συζυγούς της αρμονικής συναρτήσεως $v(x, y)$. Ποια είναι η σχετική αναλυτική συνάρτηση

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y);$$

Να γίνει τέλος και η επαλήθευση όλων των αποτελεσμάτων που βρέθηκαν με τη *Mathematica*. (β) Θεωρούμε τώρα την αναλυτική συνάρτηση

$$f(z) = \frac{A}{z^2}$$

με το A σταθερά. Για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $u(r, \theta)$ και $v(r, \theta)$ αντίστοιχα σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) ζητείται η απόδειξη ότι ισχύουν οι συνθήκες (ή εξισώσεις) των Cauchy-Riemann (εννοείται τώρα σε πολικές συντεταγμένες) τόσο με το χέρι [X] όσο και με τη *Mathematica* [Y]. Σε ποιο μεμονωμένο σημείο δεν είναι αναλυτική η συνάρτηση αυτή $f(z)$; Στην Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών μέσα σε άπειρο γραμμικά ελαστικό μέσο, πού (δηλαδή σε ποια ειδική φόρτιση) θα μπορούσε ίσως να αποδοθεί μιγαδικό δυναμικό $f(z)$ της παραπάνω ειδικής μορφής;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-L8 ([X και Y] Αναλυτικές Συναρτήσεις: Συνθήκες των Cauchy–Riemann): Εδώ θεωρούμε ξανά τη μιγαδική μεταβλητή $z = x + iy$. Ζητούνται: (α) Για την αναλυτική συνάρτηση

$$f_1(z) = z \sin z$$

ποιο είναι το πραγματικό μέρος της u και ποιο το φανταστικό μέρος της v ; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί το πακέτο `ReIm` (από τις Αγγλικές λέξεις Real και Imaginary), το οποίο φορτώνεται με την εντολή `Needs`, δηλαδή

`Needs["Algebra`ReIm"]`

καθώς και οι εντολές `Re` και `Im` αντίστοιχα σε συνδυασμό με την εντολή `ComplexExpand`. (β) Να γίνει έλεγχος της ισχύος και των δύο κλασικών-θεμελιωδών συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy–Riemann (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες) για την ίδια συνάρτηση $f_1(z)$, δηλαδή των εξισώσεων

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

(**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί και η εντολή `Simplify`.) (γ) Τώρα σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) (με $z = re^{i\theta}$) ζητείται καταρχήν να δηλωθεί ότι οι αριθμοί r και θ είναι πραγματικοί. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`{r/:!Im[r] = 0, \theta/:!Im[\theta] = 0};`

Στη συνέχεια ζητείται και ο αντίστοιχος υπολογισμός (αλλά σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) τώρα) του πραγματικού και του φανταστικού μέρους (u και v αντίστοιχα) της αναλυτικής συναρτήσεως

$$f_2(z) = z^2 e^z.$$

(δ) Ακολουθώντας για την ίδια συνάρτηση $f_2(z)$ ζητείται ο έλεγχος της ισχύος και των δύο συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy–Riemann, αλλά τώρα προφανώς σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) , οπότε αυτές παίρνουν την μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

(ε) Για την αναλυτική συνάρτηση

$$f_3(z) = z^5$$

ζητείται ο υπολογισμός του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της (στην απλούστερη δυνατή μορφή τους με τη χρήση και της εντολής `ComplexExpand` και σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y)). (στ) Παραπέρα για την ίδια συνάρτηση $f_3(z)$ ζητείται ο έλεγχος της αρμονικότητας του πραγματικού μέρους της $u(x, y)$. (ζ) Θεωρούμε τέλος την αρμονική αυτή συνάρτηση $u(x, y)$ γνωστή και ζητάμε τη συζυγή της αρμονική συνάρτηση $v(x, y)$ με δύο ανάλογους τρόπους, που θα οδηγήσουν ασφαλώς στο ίδιο τελικό αποτέλεσμα: στο φανταστικό μέρος της συναρτήσεως $f_3(z)$ συν μια πραγματική σταθερά. (η) Τέλος ζητείται ο έλεγχος ότι και αυτή η συνάρτηση $v(x, y)$ είναι επίσης αρμονική.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-L9 ([X] Περιοδικές Αναλυτικές Συναρτήσεις, Ρευστομηχανική: Μιγαδικό Δυναμικό Ροής): Στην μόνιμη (σταθερή), διδιάστατη (επίπεδη), αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού θεωρούμε σε περιοχή D του μιγαδικού επιπέδου z ότι το μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$, που είναι σχεδόν παντού αναλυτική συνάρτηση (πού ακριβώς δεν είναι;), μπορεί να προσεγγισθεί από ένα πολυώνυμο της μιγαδικής μεταβλητής $z = x + iy$ επαρκώς μεγάλου βαθμού. Η αναλυτική συνάρτηση $\Omega(z)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

με το πραγματικό μέρος της $\Phi(x, y)$ και το φανταστικό μέρος της $\Psi(x, y)$ να δηλώνουν το δυναμικό ταχύτητας και τη ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής) αντίστοιχα, που στην παραπάνω ιδεατή ροή είναι αρμονικές συναρτήσεις. Ποιο είναι το σχετικό σχήμα; Παρουσιάζονται ορθογώνιες τροχιές; Πώς ακριβώς; Σε τι εξυπηρετεί επομένως τον Πολιτικό Μηχανικό η εισαγωγή του μιγαδικού δυναμικού ροής $\Omega(z)$; Είναι σημαντικό το σχετικό όφελος; Γιατί; Πού πρέπει να εστιάσει τώρα την προσοχή του; Ποια είναι η βασική συνοριακή συνθήκη σε σταθερό σύνορο της περιοχής της ροής; Αν τώρα έχουμε περιοδικότητα της ροής (άρα και του μιγαδικού δυναμικού ροής $\Omega(z)$) κατά τον άξονα y με περίοδο H (καλύτερα είναι το σύμβολο H για την περίοδο αυτή παρά το T , που συνήθως αναφέρεται σε χρόνο t και όχι σε θέση x ή y), π.χ. εξαιτίας περιοδικής διατάξεως σταθερών εμποδίων στη ροή με περίοδο H , ποια αναλυτική συνάρτηση $w(z)$ είναι σκόπιμο να αντικαταστήσει τη μιγαδική μεταβλητή z σαν όρισμα του μιγαδικού δυναμικού ροής $\Omega(z)$, που μπορεί να πάρει τώρα τη μορφή $\Omega^*(w)$; Αν η περιοδικότητα είναι κατά τον άξονα x ; Αν υπάρχει επιπλέον και απόλυτη συμμετρία της ροής γύρω από τον άξονα y ; Τέλος ζητείται ο έλεγχος (με πράξεις) της περιοδικότητας των βασικών αναλυτικών συναρτήσεων του προηγούμενου ερωτήματος.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-L10 (*[X και Y] Αναλυτικές Συναρτήσεις, Ρευστομηχανική*): Θεωρούμε τη διδιάστατη (επίπεδη), μόνιμη (σταθερή), αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού με ταχύτητα U κατά μήκος του άξονα x στο άπειρο που «παρενοχλείται» από μια πηγή (εισορή) και από μια βύθιση (εκροή, καταβόθρα, απαγωγή) στα σημεία $z = -a$ και $z = a$ του άξονα x αντίστοιχα. Και η πηγή (στο σημείο $z = -a$) και η βύθιση (στο σημείο $z = a$) θεωρούνται ισχύος (εντάσεως) m . Το σχετικό μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ δίδεται από τον τύπο

$$\Omega(z) = Uz + m \ln(z + a) - m \ln(z - a) = Uz - m \ln \frac{z - a}{z + a}, \quad z \notin [-a, a].$$

με τις συναρτήσεις δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και ροής (ροϊκή συνάρτηση) $\Psi(x, y)$ να είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του παραπάνω μιγαδικού δυναμικού ροής $\Omega(z)$ και προφανώς αρμονικές. Ζητούνται: (α) [X ή Y] Πού ακριβώς αντιστοιχεί ο κάθε όρος του πιο πάνω μιγαδικού δυναμικού (στην ομοιόμορφη ροή, στην πηγή ή στη βύθιση); και (β) [Y] Η σχεδίαση των γραμμών ροής της παραπάνω ροής χωρίς σκιά και χρώμα (εντολή ContourPlot για τη συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$ στην ειδική περίπτωση όπου $a = 1$, $m = 1$ και $U = 1$ και στην περιοχή (γειτονιά) της πηγής και της βυθίσεως $[-3, 3] \times [-3, 3]$ (με τη χρήση και της επιλογής ContourShading -> False) καθώς και τα αντίστοιχα έγχρωμα (και πιο «φανταχτερά») σχήματα με τη χρήση και της εντολής ContourPlot, αλλά και της εντολής DensityPlot (δύο σχήματα). Ποιο από τα τρία αυτά σχήματα θα προτιμούσατε εσείς;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-L11 (*[X και Y] Μιγαδικές Συναρτήσεις, Αρμονικές Συναρτήσεις, Μηχανική των Υλικών, Ελαστικότητα, Θραυστομηχανική, Μιγαδικό Δυναμικό του Westergaard*): Η θεωρία της Θραυστομηχανικής (ή Μηχανικής της Θραύσεως) ασχολείται με ρωγμές κι άλλες αιτίες θραύσεως, όπως π.χ. σε γωνίες μεγαλύτερες του π . Στην περίπτωση ευθύγραμμων ρωγμών μέσα σε άπειρο, επίπεδο, ισότροπο, γραμμικά ελαστικό μέσον είναι ιδιαίτερα χρήσιμο το μιγαδικό δυναμικό του Westergaard $Z(z)$ ($z = x + iy$). Αυτό συμβαίνει, επειδή από το δυναμικό αυτό $Z(z)$ μπορούν να προκύψουν και οι τρεις συνιστώσες των τάσεων: σ_x , σ_y και τ_{xy} καθώς και οι (γενικά μιγαδικοί) συντελεστές εντάσεως τάσεων

$$K = K_I - iK_{II}$$

στα άκρα των ρωγμών. Πιο συγκεκριμένα στη γειτονιά ενός απλού άκρου ευθύγραμμης ρωγμής (με $x < 0$, $y = 0$) στην αρχή των αξόνων $z = 0$ η ασυμπτωτική έκφραση του μιγαδικού δυναμικού του Westergaard $Z(z)$ παίρνει τελικά τη μορφή

$$Z_1(z) = \frac{A}{\sqrt{z}}, \quad z \rightarrow 0,$$

με το A κατάλληλη μιγαδική σταθερά. Ανάλογα για ρωγμή πεπερασμένου μήκους $2a$ ($-a < x < a$) το μιγαδικό δυναμικό του Westergaard παίρνει τη μορφή

$$Z_2(z) = \frac{(\sigma - i\tau)z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$$

με σ και τ τις εντάσεις της εφελκυστικής τάσεως (κατά τη διεύθυνση του άξονα Oy , δηλαδή κάθετα στη ρωγμή $[-a, a]$) και της διατμητικής τάσεως στο άπειρο αντίστοιχα. Τέλος για περιοδική διάταξη ρωγμών πάνω στον άξονα Ox (μήκους $2a$ η καθεμία και πάλι και με περίοδο $2b$, όχι απλά b) το μιγαδικό δυναμικό του Westergaard παίρνει τη μορφή

$$Z_3(z) = \frac{(\sigma - i\tau) \sin \frac{\pi z}{2b}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\pi z}{2b} - \sin^2 \frac{\pi a}{2b}}}$$

Πολύ σημαντικός για τον Πολιτικό Μηχανικό είναι ο υπολογισμός των συντελεστών εντάσεως τάσεων K (μιγαδικών γενικά) στα άκρα ρωγμών μέσω του υπολογισμού του σχετικού ορίου με βάση τον τύπο

$$K = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow c} [\sqrt{z - c} Z(z)]$$

(με $c = 0$ για το $Z_1(z)$ και $c = a$ για τα $Z_{2,3}(z)$ και στις τρεις περιπτώσεις στο δεξιό άκρο των αντίστοιχων ρωγμών). Είναι επίσης πολύ γνωστό ότι το άθροισμα $s(x, y)$ των ορθών τάσεων $\sigma_x + \sigma_y$ (και το ίδιο του άθροισμα των κυρίων τάσεων $\sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_x + \sigma_y$) είναι αρμονική συνάρτηση και δίνεται από το πραγματικό μέρος (εντολή `Re` του πακέτου `Algebra`ReIm`` της *Mathematica*) του μιγαδικού δυναμικού του Westergaard $Z(z)$. Ζητούνται:

(α) [X ή Y] Σε πολικές συντεταγμένες $z = r \exp(i\theta) \equiv r e^{i\theta}$ σε ποιο διάστημα κείται η πολική γωνία θ , αν πρόκειται για δεξιό άκρο ρωγμής; Αν αντίθετα πρόκειται για αριστερό άκρο ρωγμής; (Υπάρχει μια ουσιώδης διαφορά. Ποια είναι αυτή;)

(β) [X ή Y] Ποιες είναι οι εκφράσεις των συντελεστών εντάσεως τάσεων K_k ($k = 1, 2, 3$) για τα τρία πιο πάνω μιγαδικά δυναμικά του Westergaard $Z_k(z)$; (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή `Limit`, εάν χρειασθούν και οι εντολές `Simplify` και `PowerExpand`.)

(γ) [Y] Τώρα σε Καρτεσιανές συντεταγμένες ποιες είναι ισοσταθμικές καμπύλες του αθροίσματος των ορθών (ή των κυρίων) τάσεων $s(x, y)$ στην ειδική περίπτωση της απλής (της συνηθισμένης) πεπερασμένης ρωγμής $[-a, a]$ με μιγαδικό δυναμικό το $Z_2(z)$ (όταν υποθεθεί ότι $a = 1$, $\sigma = 0.5$ και $\tau = 0$) στην περιοχή $R = [0.8, 2.2] \times [-0.7, 0.7]$ ενός δεξιού άκρου ρωγμής; **Υπόδειξη:** Πιο συγκεκριμένα για το άθροισμα $s(x, y)$ πρέπει καταρχήν αυτό να είναι διαθέσιμο. Τούτο πετυχαίνεται εύκολα, αφού πρώτα φορτωθεί το πακέτο `Algebra`ReIm`` (αν αυτό δεν έχει ήδη γίνει) μέσω της εντολής `Needs`, δηλαδή

```
Needs["Algebra`ReIm"]
```

με τη χρησιμοποίησή της εντολής

$$z = x + iy; \text{ ΆθροισμαΤάσεωνΣεΆκροΡωγμής} = 2 \operatorname{Re}[Z_2[z]] /. \{a \rightarrow 1, \sigma \rightarrow 0.5, \tau \rightarrow 0\};$$

(αν και ασφαλώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί και κάποιο συντομότερο σύμβολο για το ίδιο άθροισμα). Για το σκοπό της καθαυτό σχεδιάσεως τώρα να χρησιμοποιηθεί πρώτα η εντολή `ContourPlot` της *Mathematica* με την επιλογή `PlotPoints` ρυθμισμένη στο 100 (για επαρκή ακρίβεια, πρόκειται για τη γειτονιά ενός άκρου ρωγμής, του άκρου $a = 1$, δηλαδή για ένα ιδιάζον, ανώμαλο σημείο, όπου το μιγαδικό δυναμικό $Z_2(z)$ απειρίζεται, για $z \rightarrow a$, εδώ $a = 1$) και με την επιλογή `ContourShading` ρυθμισμένη πρώτα στο `False` (δηλαδή χωρίς σκίαση ή χρώματα) και έπειτα στο `True` (με σκίαση

ή χρώματα, στην οθόνη τουλάχιστον). Στη δεύτερη αυτή περίπτωση να ρυθμισθεί και η παραπέρα επιλογή ColorFunction σε Hue.

(δ) Τέλος ζητείται και το ανάλογο σχήμα με τη χρήση της εντολής DensityPlot χωρίς πλέγμα (δηλαδή με την επιλογή Mesh -> False.) Πρέπει να γίνει παραδεκτό ότι και τα σχήματα βοηθούν κάπως στην κατανόηση της ενάρξεως του φαινομένου της θραύσεως λόγω της πολύ υψηλής συγκεντρώσεως τάσεων, εν προκειμένω πιθανώς πολύ μεγάλου συντελεστή εντάσεως τάσεων K . Αυτός μερικές φορές υπερβαίνει την αντοχή του υλικού σε θραύση K_0 , δηλαδή $|K| > K_0$.

ΟΜΑΔΑ ΕΜΙΙΙ-Μ

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ1 ([Υ] Αναλυτικές Συναρτήσεις: Ρευστομηχανική, Θραυστομηχανική): Ζητούνται: (α) Στη Ρευστομηχανική να σχεδιασθούν οι γραμμές ροής γύρω από κάθετο εμπόδιο (σε κανάλι ή σε ποταμό) που εμποδίζει την ομοιόμορφη ροή του νερού. Το σχετικό μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ έχει τη μορφή

$$\Omega(z) = iV\sqrt{(iz)^2 - a^2}.$$

(Υπόδειξη: Το i με l ή καλύτερα με Esc ii Esc στη Mathematica.) Στη γραφική παράσταση να χρησιμοποιηθούν οι αριθμητικές τιμές $a = 1$ και $V = 1$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές:

```
Needs["Algebra`ReIm`"];
```

```
z = x+I y;
```

```
Ω[z_] := I V Sqrt[(I z)^2-a^2];
```

```
Ψ[x_, y_] = Im[Ω[z]] /. {a -> 1, V -> 1} //ComplexExpand //Simplify;
```

```
ContourPlot[Ψ[x, y], {x,-10,10}, {y,0,2}, PlotPoints -> 100, ColorFunction -> Hue];
```

(β) Στη Θραυστομηχανική να σχεδιασθούν οι ισοσταθμικές καμπύλες για το άθροισμα των ορθών τάσεων $s = \sigma_x + \sigma_y$ στο άκρο $z = a = 1$ ευθύγραμμης ρωγμής μήκους $2a = 2$ άρα με εφελκυστική φόρτιση $\sigma = \frac{1}{2}$ στο άπειρο (κάθετα προς τη ρωγμή) και χωρίς διατμητική φόρτιση: με $\tau = 0$. **Υπόδειξη:** Το σχετικό μιγαδικό δυναμικό του Westergaard $Z(z)$ δίνεται από τον τύπο

$$Z(z) = \frac{(\sigma - i\tau)z}{\sqrt{z^2 - a^2}}.$$

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθούν οι εντολές

```
Z[z_] := (σ-I τ)z/Sqrt[z^2-a^2];
```

```
s[x_,y_] = 2 Re[Z[z]] /. {a -> 1, σ -> 1/2, τ -> 0} //ComplexExpand //Simplify;
```

```
ContourPlot[s[x,y], {x,1,3}, {y,-1,1}, PlotPoints -> 100, ColorFunction -> Hue];
```

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ2 ([Υ] Αναλυτικές Συναρτήσεις: Επικαμπύλια Ολοκληρώματα, Αριθμητική Ολοκλήρωση, Θεωρήματα του Cauchy): Για τον υπολογισμό μιγαδικών επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων θα ήταν ιδιαίτερα ευχάριστο να μπορούσαμε να εργασθούμε πάντα με αναλυτικό τρόπο και να έχουμε κομψά και κλειστής μορφής (ακόμη και με σύμβολα σ' αυτά) αποτελέσματα με λίγη υπολογιστική προσπάθεια. Δυστυχώς όμως αυτό είναι συχνά ανέφικτο, οπότε και καταφεύγουμε στην αριθμητική ολοκλήρωση. Η απλούστερη περίπτωση αριθμητικής ολοκληρώσεως είναι η χρήση του κανόνα του τραπεζίου (τραπεζοειδούς κανόνα) σε περιφέρεια κύκλου C ακτίνας R με κέντρο την αρχή των αξόνων $z_0 = 0$. Η πολική γωνία θ θεωρείται συνήθως ότι μεταβάλλεται στο διάστημα $[0, 2\pi]$ στην περιφέρεια του κύκλου, οπότε $z = R \exp i\theta$ για τη σχετική μιγαδική μεταβλητή z . Ζητούνται: (α) Η έκφραση του διαφορικού dz στην περιφέρεια του κύκλου μας C

και ο έλεγχος ότι

$$\frac{dz}{z} = i d\theta$$

στην ίδια περιφέρεια. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\{z = R \text{Exp}[I \theta], D[z, \theta], D[z, \theta]/z == I\}$$

(ασφαλώς με τη χρήση κατάλληλης στοιχειοθεσίας στη *Mathematica*, δηλαδή με ακολουθίες Esc όπου χρειάζεται). (β) Με τη χρήση της *Mathematica* η κατασκευή μιας κατάλληλης συναρτήσεως ΜιγαδικήΑριθμητικήΟλοκλήρωσηΣτονΚύκλο (ή με κάποια συντομότερη ονομασία) με βάση τα n συμμετρικά κατανεμημένα και ισαπέχοντα σημεία (τους n κόμβους)

$$z_{kn} = R \exp \frac{2ik\pi}{n} \quad \text{με } k = 0, 1, \dots, n-1$$

πάνω στην περιφέρεια του κύκλου, αφού προηγουμένως διαπιστωθεί ότι τα αντίστοιχα βάρη στην αριθμητική ολοκλήρωση είναι προφανώς ίσα με

$$w_{kn} = \frac{2\pi i R}{n} \exp \frac{2ik\pi}{n} \quad \text{με } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Στη συνάρτηση αυτή να μη λησμονηθεί ο όρος σφάλματος, ΌροςΣφάλματος, αν κι αυτό αποτελεί πλεονασμό, και η χρήση της βοηθητικής εντολής Chop. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$\begin{aligned} & \text{ΜιγαδικήΑριθμητικήΟλοκλήρωσηΣτονΚύκλο}[f_, z_, R_, n_] \\ & := (2 \pi I R / n) \text{Sum}[N[\text{Exp}[2 I k \pi / n] f[R \text{Exp}[2 I k \pi / n]]], \{k, 0, n-1\}] \\ & + \text{ΌροςΣφάλματος}[n, R, f] / \text{Chop} \end{aligned}$$

Τι πληροφορίες δίνει η *Mathematica* για την ίδια συνάρτηση που μόλις κατασκευάστηκε; (εντολή ??). (γ) Για την ειδική περίπτωση όπου έχουμε $n = 10$ σημεία ολοκληρώσεως (κόμβους), ποιες είναι οι τιμές των σημείων που χρησιμοποιήθηκαν (αναλυτικά και αριθμητικά); Πραγματικά κείνται στην περιφέρεια C ; (δ) Στη συνέχεια για τον ίδιο αριθμό σημείων, $n = 10$, ζητείται ο αριθμητικός υπολογισμός (πάνω στην ίδια περιφέρεια C και με ακτίνα $R = 2$) των μιγαδικών ολοκληρωμάτων

$$I_m = \oint_C f_m(z) dz, \quad z = x + iy = R \exp(i\theta) \quad \text{με } m = 1, 2, 3$$

για τις αναλυτικές συναρτήσεις

$$f_1(z) = 1, \quad f_2(z) = 1 + z^5 + z^{10}, \quad f_3(z) = \exp z.$$

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή (π.χ. για την πρώτη από αυτές)

$$f1[z_] := 1; i1 = \text{ΜιγαδικήΑριθμητικήΟλοκλήρωσηΣτονΚύκλο}[f1, z, 2, 10]$$

(και ανάλογα για τις άλλες δύο). Τι παρατηρείται για τις δύο πρώτες από αυτές $f_{1,2}(z)$ και τι για την τρίτη $f_3(z)$; (ε) Για τη συνάρτηση αυτή $f_3(z)$ ζητείται και ο παραπέρα έλεγχος της συγκλίσεως των αριθμητικών αποτελεσμάτων με τη χρήση $n = 4^m$ σημείων (με $m = 0, 1, \dots, 5$) σε μορφή πίνακα (εντολές Table και TableForm). Τι παρατηρείται; Υπάρχει ταχεία σύγκλιση; (στ) Τελικά επαληθεύθηκε η ισχύς του θεωρήματος του Cauchy και για τις τρεις πιο πάνω αναλυτικές συναρτήσεις;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ3 (Υ) Αναλυτικές Συναρτήσεις: Επικαμπύλια Ολοκληρώματα, Αριθμητική Ολοκλήρωση, Κανόνας του Τραπεζίου, Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy): Με βάση το γνωστό ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy στην ανοικτή (χωρίς το σύνορό της) περιοχή D του μιγαδικού επιπέδου (με σύνορο λεία απλή κλειστή καμπύλη $C \equiv \partial D$)

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \text{με } z_0 \in D$$

στην ειδική περίπτωση της περιφέρειας C με κέντρο το σημείο $z_c = 0$ και ακτίνα $R = 3$ και με τη χρήση του κανόνα του τραπεζίου της προηγούμενης ασκήσεως ζητούνται: (α) Η τιμή $f_4(i)$ της συναρτήσεως $f_4(z)$ με συνοριακές τιμές

$$f_4(z) = 1 + 2z + 3z^2 \quad \text{με } z \in C$$

στο σημείο $z_0 = i$ με $n = 20$ σημεία ολοκληρώσεως (κόμβους) στον κανόνα αριθμητικής ολοκληρώσεως. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

$$z0 = i; \quad g[z_] := f[z]/((2 \pi i) (z-z0))$$

(με τη χρήση κατάλληλης στοιχειοθεσίας φυσικά!) πριν από τη χρήση της εντολής

Μιγαδική Αριθμητική Ολοκλήρωση Στον Κύκλο

για την προς ολοκλήρωση συνάρτηση $g(z)$. (β) Ακριβώς ανάλογα (και πάλι στο σημείο $z_0 = i$) για τη συνάρτηση $f_5(z)$ με συνοριακές τιμές

$$f_5(z) = \sin z \cosh z \operatorname{erf} z \quad \text{με } z \in C$$

με αριθμητικό υπολογισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος για $n = 2^m$ σημεία με $m = 2, 3, \dots, 8$ σε μορφή πίνακα (εντολές `Table` και `TableForm`). Υπάρχει ταχεία σύγκλιση στην αριθμητική ολοκλήρωση; (γ) Και στις δύο πιο πάνω περιπτώσεις συμφωνούν τα αποτελέσματα με τα αναλυτικά αναμενόμενα; (δ) Τελικά και για τις δύο πιο πάνω συναρτήσεις $f_{4,5}(z)$ επαληθεύεται ή όχι ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy; (ε) Θα ίσχυε ο ίδιος τύπος και για τις συναρτήσεις

$$f_{6a}(z) = \bar{z} \quad \text{και} \quad f_{6b}(z) = |z|;$$

Γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ4 ([X] Ολοκληρωτικός Τύπος του Cauchy): Θεωρούμε το μιγαδικό δυναμικό $\Omega(z)$ γνωστό μόνο στην περιφέρεια κύκλου $|z| = R$ (ακτίνας R) στο μιγαδικό επίπεδο $z = x + iy$ και αναλυτική συνάρτηση και στην περιφέρεια και στο εσωτερικό του κύκλου. Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε το μιγαδικό αυτό δυναμικό σε σημείο $z = x + iy$ στο εσωτερικό του κύκλου, αφού αναγάγουμε τη μιγαδική ολοκλήρωση στην περιφέρεια σε πραγματική; (Να μην υπολογισθεί βέβαια κανένα ολοκλήρωμα!) Ανάλογα για ελλειπτική περιοχή με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = a \cos \theta \quad \text{και} \quad y = b \sin \theta \quad \text{με } 0 \leq \theta < 2\pi$$

και με τα a και b θετικές σταθερές. Τι παριστάνουν οι σταθερές αυτές;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ5 ([X] Αναλυτικές Συναρτήσεις, Αρμονικές Συναρτήσεις: Αρχές Μεγίστου και Ελαχίστου, Ρευστομηχανική: Υδροδυναμική): Στη Ρευστομηχανική (Μηχανική των Ρευστών) για μόνιμη (σταθερή, ανεξάρτητη από το χρόνο t), διδιάστατη (επίπεδη) ροή ιδεατού ρευστού το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\Psi(x, y)$$

έχει σαν πραγματικό μέρος το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και σαν φανταστικό μέρος τη ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής) $\Psi(x, y)$. Εδώ ζητούνται: (α) Ποιος χαρακτηρισμός δικαιολογημένα αποδίδεται στο μιγαδικό δυναμικό $\Omega(z)$; Στις συναρτήσεις $\Phi(x, y)$ και $\Psi(x, y)$; (β) Πώς καλούνται οι καμπύλες όπου $\Psi(x, y) = c$ (με το c σταθερά); (γ) Σε ποια κυρίως σημεία δεν ισχύει η αναλυτικότητα του μιγαδικού δυναμικού $\Omega(z)$; (δ) Περιοριζόμαστε τώρα σε απλή, κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη C του μιγαδικού επιπέδου z (όπως η περιφέρεια κύκλου στην προηγούμενη άσκηση), η οποία περικλείει περιοχή D , και υποθέτουμε (θεωρητικά τουλάχιστον) ότι έχει καταστεί δυνατή η πειραματική μέτρηση του $\Omega(z)$ (πιθανότατα μέσω των συναρτήσεων $\Phi(x, y)$ και $\Psi(x, y)$) σε όλο

το μήκος της καμπύλης C και μόνο αυτής. (Η συνάρτηση $\Omega(z)$ θεωρείται αναλυτική $\forall z \in D$.) Τι μπορούμε να συναγάγουμε για τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|\Omega(z)| \forall z \in D$; Αντίστοιχα για τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και της συναρτήσεως ροής $\Psi(x, y) \forall (x, y) \in D$; Πώς ακριβώς γράφονται μαθηματικά οι σχετικές ανισότητες με τη χρήση των συνήθων συμβόλων \max , \min και \in ;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ6 ([X] *Αναλυτικές Συναρτήσεις, Θεώρημα του Cauchy, Επίπεδη Ελαστικότητα: Συγκεντρωμένες Δυνάμεις*): Θεωρούμε επίπεδο, ισότροπο, γραμμικά ελαστικό μέσο D απλής συνοχής με σύνορο απλή, κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη $C = \partial D$ υπό στατικές συνθήκες γενικευμένης επίπεδης εντάσεως. Για το ελαστικό μέσον D θεωρείται γνωστό ότι υφίσταται συγκεντρωμένη δύναμη $F = X + iY$ που εφαρμόζεται στο εσωτερικό σημείο του $z = z_0$ χωρίς καμία άλλη εσωτερική φόρτιση. (Ούτε η δύναμη F ούτε το σημείο z_0 είναι γνωστά!) Με κατάλληλες πειραματικές μετρήσεις υποτίθεται ότι έχει προσδιορισθεί το μιγαδικό δυναμικό $\Phi(z)$ της επίπεδης ισότροπης ελαστικότητας σε όλο το μήκος του συνόρου $C = \partial D$ του ελαστικού μέσου D , το οποίο σύνορο C (μόνο) θεωρείται προσιτό στον Πολιτικό Μηχανικό (σε αντίθεση με το εσωτερικό του μέσου D). Θεωρητικά προκύπτει ότι το μιγαδικό αυτό δυναμικό $\Phi(z)$ έχει την εξής έκφραση:

$$\Phi(z) = -\frac{F}{2\pi(1+\kappa)} \frac{1}{z-z_0} + \Phi_0(z) \quad \text{με } z \in D \cup C,$$

και με $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ υπό τις συνθήκες γενικευμένης επίπεδης εντάσεως που υιοθετήθηκαν (ενώ θα ήταν $\kappa = 3-4\nu$ υπό συνθήκες επίπεδης παραμορφώσεως με το ν να δηλώνει και στις δύο περιπτώσεις το λόγο του Poisson του υλικού του δοκιμίου) και με την συνάρτηση $\Phi_0(z)$ (άγνωστη βέβαια) αναλυτική σε ολόκληρο το ελαστικό μέσον D και στο σύνορό του C . Με κατάλληλη διπλή (δηλαδή δύο φορές) χρήση του θεωρήματος του Cauchy στη Μιγαδική Ανάλυση ζητούνται: (α) το μέγεθος F της εξωτερικής δυνάμεως και (β) το σημείο εφαρμογής της z_0 αποκλειστικά με βάση τις προαναφερθείσες τιμές του μιγαδικού δυναμικού $\Phi(z)$ στο σύνορο C του ελαστικού μέσου D . (Αντίστοιχα ισχύουν και για το δεύτερο μιγαδικό δυναμικό $\Psi(z)$ της ισότροπης επίπεδης Ελαστικότητας.) Ποιο είναι το «ανάλογο» πρόβλημα στην Ρευστομηχανική (Μηχανική των Ρευστών);

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ7 ([X] *Σειρές Taylor και Laurent*): Για τη σχεδόν παντού αναλυτική συνάρτηση (σε ποια ακριβώς σημεία δεν είναι αναλυτική);

$$f(z) = -\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

Ζητούνται η σειρά Maclaurin της στον ανοικτό κύκλο $|z| < 1$ και οι δύο ξεχωριστές σειρές Laurent της στον ανοικτό δακτύλιο $1 < |z| < 2$ καθώς και στην άπειρη περιοχή $|z| > 2$.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ8 ([X] *Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα: Μιγαδικά Δυναμικά*): Σε ποιες ακριβώς περιπτώσεις στη Μηχανική των Υλικών (συγκεκριμένα στην Ελαστικότητα) και στη Ρευστομηχανική παρουσιάζονται πόλοι στις παραγώγους των μιγαδικών δυναμικών τους $\Omega'(z)$ και $\varphi''(z)$ αντίστοιχα (με φυσικούς χαρακτηρισμούς των πόλων αυτών); Τι τάξεων είναι; Ποια είναι τα σχετικά ολοκληρωτικά υπόλοιπα (residues), εάν αυτά δεν είναι ίσα με το μηδέν;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ9 ([Y] *Αναλυτικές Συναρτήσεις: Σειρές Maclaurin, Taylor και Laurent, Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα*): Με τη χρήση της *Mathematica*, ζητούνται: (α) Οι σειρές Taylor γύρω από το σημείο $z_0 = 0$ του μιγαδικού επιπέδου (δηλαδή οι σειρές Maclaurin) των αναλυτικών συναρτήσεων

$$\exp z, \quad \frac{\sin z \cosh z}{z}, \quad \tan z \operatorname{erfc} z$$

με δώδεκα όρους συμπεριλαμβάνοντας και τους μηδενικούς όρους. (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή *Series* της *Mathematica*.) (β) Οι σειρές Taylor ή Laurent ακριβώς όπως και στο προηγούμενο

ερώτημα (με $z_0 = 0$) για τις (σχεδόν παντού) αναλυτικές συναρτήσεις $\tan z$ και $\cot z$ (πάλι με δώδεκα όρους). Για ποια συνάρτηση από αυτές τις δύο μιλάμε για σειρά Taylor και για ποια για σειρά Laurent; Σε ποια ακριβώς σημεία δεν είναι αναλυτική η συνάρτηση $\tan z$; Η συνάρτηση $\cot z$; Παραπέρα να ελεγχθεί ότι το γινόμενο των δύο αυτών σειρών δίνει προφανώς τη σταθερά 1.

(γ) Τέλος για τη συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z-4)^2(z-5)^3}$$

σε ποια σημεία δεν είναι αναλυτική η συνάρτηση αυτή, αλλά παρουσιάζει πόλους; (**Υπόδειξη:** Στα σημεία $z = 3$, $z = 4$ και $z = 5$, όπου απειρίζεται, επειδή μηδενίζεται ο παρονομαστής της.) Τι τάξεως είναι ο κάθε πόλος; Ποια είναι η σειρά Maclaurin της συναρτήσεως αυτής (με έξι όρους); Οι σειρές Laurent στους τρεις πόλους; (τρεις σειρές). Τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα (residues); Τελικά ζητείται και η επαλήθευση των τιμών των ολοκληρωτικών αυτών υπολοίπων με τη χρήση της ειδικής εντολής Residue της Mathematica, π.χ.

Residue[f[z], {z, 0}]

για το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο σημείο $z = 0$. Πόσο είναι (προφανώς) το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της ίδιας συναρτήσεως στο ομαλό σημείο $z_0 = 0$;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ10 (IY) Μιγαδικές Συναρτήσεις: Μιγαδικά Ολοκληρώματα, Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα, Ιδιάζοντα Σημεία, Σειρές Laurent): (α) Υποχρεωτικά με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων (residues, εντολή Residue) ζητείται ο υπολογισμός (ακριβώς και αριθμητικά) του ολοκληρώματος της συναρτήσεως

$$g_1(z) = \frac{\exp(-z)}{(z-1)^4}$$

κατά μήκος της περιφέρειας $|z| = 3$. (β) Το ίδιο ερώτημα για την πολύ πιο δύσκολη συνάρτηση

$$g_2(z) = \frac{z^2(z + \exp z) \cos z \sinh z}{(z-i)^7}.$$

(γ) Ποιο είναι το κύριο μέρος της συναρτήσεως

$$g_3(z) = \cot^3 z \coth^2 z \csc^4 z$$

στο ιδιάζον σημείο $z_0 = 0$; (**Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Series.) Το σχετικό ολοκληρωτικό υπόλοιπο (residue); Να υπολογισθεί και ανεξάρτητα το υπόλοιπο αυτό με την κατευθείαν χρήση της εντολής Residue. (δ) Ανάλογο ερώτημα για τη συνάρτηση

$$g_4(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) - 1$$

κοντά στο ίδιο ιδιάζον σημείο (δυστυχώς όμως τώρα με ουσιώδη ιδιομορφία, ανωμαλία) $z_0 = 0$; Πώς μπορούμε να έχουμε την σχετική σειρά Laurent (με πέντε όρους) με τη βοήθεια της Mathematica; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

Series[Exp[w] - 1, {w, 0, 5}]/. w -> 1/z

γιατί η συνήθης εντολή

Series[Exp[1/z] - 1, {z, 0, 5}]

δεν είναι επιτυχής στη Mathematica (να ελεγχθεί αυτό) λόγω της ουσιώδους ιδιομορφίας της συναρτήσεως $\exp(1/z)$ στο σημείο $z = 0$. (Έτσι κατά κάποιον τρόπο «εξαπατήσαμε» τη Mathematica έχοντας βρει μια αποκλίνουσα σειρά, που πιθανώς δε θα έπρεπε να είχε βρεθεί.)

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ11 (IX και Y) Μιγαδικές Συναρτήσεις: Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα, Πραγματικά Ολοκληρώματα): (α) Με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων (residues) στις Μιγαδικές

Συναρτήσεις (ίσως και με τη βοήθεια της *Mathematica*) ζητείται ο υπολογισμός του πραγματικού ολοκληρώματος

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad \text{με} \quad f(\theta) = \frac{1}{11 + 3 \sin \theta + \cos \theta}$$

τόσο ακριβώς (αναλυτικά) όσο και προσεγγιστικά (με εφαρμογή της εντολής *N* στο αναλυτικό αποτέλεσμα) με 50 σημαντικά ψηφία. (β) Συμφωνεί το αποτέλεσμα που βρέθηκε με εκείνο που δίνει άμεσα η εντολή *Integrate* της *Mathematica*;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ12 (*[X και Y: Mathematica] Μιγαδικές Συναρτήσεις: Λογαριθμική Παράγωγος, Αρχή του Ορίσματος, Ελαστικότητα, Ρευστομηχανική*): Για τη χρήση της αρχής του ορίσματος στις Μιγαδικές Συναρτήσεις για τη μερόμορφη συνάρτηση (αναλυτική σχεδόν παντού, αλλά με έναν πόλο)

$$\Phi(z) = \frac{A}{z - a}$$

(με το A σταθερά και $|a| < 1$) Ζητούνται: (α) Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συναρτήσεως $\Phi(z)$ στον πόλο $z = a$. Τι τάξεως είναι ο πόλος αυτός; (β) Η λογαριθμική παράγωγος

$$F(z) = \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$$

της ίδιας συναρτήσεως. (γ) Ο αριθμός των πόλων της συναρτήσεως αυτής με βάση την αρχή του ορίσματος (μάλλον του σχετικού ολοκληρωτικού τύπου) για την περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου C με κέντρο το σημείο $z_c = 0$. (Προφανώς το αποτέλεσμα που θα προκύψει πρέπει να είναι 1 στο απλό παράδειγμά μας.) (δ) Σε ποια ακριβώς προβλήματα της Ελαστικότητας και της Ρευστομηχανικής παρουσιάζονται πόλοι πρώτης τάξεως στα μιγαδικά δυναμικά; Παρουσιάζονται και πόλοι δευτέρας τάξεως; (ε) Τέλος με τη χρήση της αρχής του ορίσματος στην ολοκληρωτική της μορφή (δηλαδή αυτή με την λογαριθμική παράγωγο) και του κανόνα του τραπεζίου με $n = 5, 10, 15$ και 20 σημεία στην περιφέρεια του κύκλου με κέντρο και πάλι το σημείο $z_c = 0$ και ακτίνα $R = 3$ ζητείται ο αριθμός των ριζών της αναλυτικής συναρτήσεως

$$f_7(z) = z^6 - 4z^5 + z^4 + 10z^3 - 4z^2 - 8z$$

μέσα στην ίδια περιφέρεια. (Προφανώς στη *Mathematica* θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί τελικά και η εντολή *Round*, γιατί ο ζητούμενος αριθμός των ριζών είναι ασφαλώς ένας φυσικός αριθμός!) Τέλος ποια είναι η αναλυτική έκφραση της λογαριθμικής παραγώγου που χρησιμοποιήθηκε;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ13 (*[Y] Μιγαδικές Συναρτήσεις: Σύμμορφη Απεικόνιση, Ρευστομηχανική*): Θεωρούμε τη μιγαδική απεικόνιση που βασίζεται στην απλή αναλυτική συνάρτηση

$$w(z) = z^2.$$

Με τη χρήση της *Mathematica* ζητούνται:

(α) Είναι στ' αλήθεια σύμμορφη η απεικόνιση αυτή από το μιγαδικό επίπεδο $z = x + iy$ στο επίσης μιγαδικό επίπεδο $w = u + iv$; Γιατί; (**Υπόδειξη**: Για να είναι σύμμορφη η μιγαδική απεικόνιση $w = w(z)$ σε ένα σημείο z , πρέπει η συνάρτηση $w(z)$ να είναι αναλυτική στο σημείο αυτό και επίσης πρέπει να ισχύει $w'(z) \neq 0$.) Στην περίπτωση μας ποιο ειδικά σημείο εξαιρείται, δηλαδή δεν απεικονίζεται σύμμορφα από το ένα επίπεδο στο άλλο;

(β) Με τη χρήση των πακέτων *Algebra`Reml`* και, κυρίως, *Graphics`ComplexMap`* (για το ερώτημα (δ) παρακάτω) της *Mathematica* ποια προκύπτει ότι είναι η έκφραση της ίδιας απεικόνισεως, αλλά τώρα σε Καρτεσιανές (πραγματικές) συντεταγμένες $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$;

(γ) Ποια είναι τα μιγαδικά σημεία του επιπέδου w που αντιστοιχούν στα επίσης μιγαδικά σημεία $z = 0, 3, 3 + 5i$ και $5i$ του επιπέδου z ;

(δ) Τέλος με τη χρήση της εντολής *CartesianMap* του πακέτου *Graphics`ComplexMap`* ζητείται η εικόνα (στο δεύτερο μιγαδικό επίπεδο w) της ορθογωνικής περιοχής $R = [0, 3] \times [0, 5]$ (με κορυφές

τα πιο πάνω τέσσερα σημεία) στο (αρχικό) μιγαδικό επίπεδο z . **Υπόδειξη:** Αφού φορτωθεί το πακέτο που προαναφέρθηκε (εντολή Needs), να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`CartesianMap[w, {0, 3}, {0, 5}]`

(με τη συνάρτηση $w(z)$ να υποτίθεται ότι έχει ήδη εξαρχής ορισθεί).

(ε) Συμφωνεί το σχήμα που προέκυψε με τις παρατηρήσεις σας, οι οποίες έχουν ήδη γίνει στο ερώτημα (α);

(στ) Τελικά, ουσιαστικά τι πετύχαμε με τη σύμμορφη αυτή απεικόνιση; Μπορείτε να φαντασθείτε μια συγκεκριμένη αληθινή εφαρμογή στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού, ειδικότερα στη Ρευστομηχανική ή έστω στην Επίπεδη Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ14 (Υ) Μιγαδικές Συναρτήσεις: Σύμμορφη Απεικόνιση, Ελαστικότητα): Απολύτως ανάλογα με την προηγούμενη άσκηση ζητείται τώρα να μελετηθεί η σχεδόν παντού σύμμορφη απεικόνιση

$$w = \cosh z.$$

Ποια σημεία εξαιρούνται; Ειδικότερα ζητείται να σχεδιασθεί η απεικόνιση (από το πρώτο μιγαδικό επίπεδο z στο δεύτερο μιγαδικό επίπεδο w) της ορθογωνικής περιοχής $R_1 = [0, 1.5] \times [0, \pi/2]$ και της σαφώς μεγαλύτερης (τετραπλής στο μέγεθος) ορθογωνικής περιοχής $R_2 = [0, 1.5] \times [0, 2\pi]$ (και πάλι με τη χρήση της εντολής CartesianMap). Σε ποια σημεία του μιγαδικού επιπέδου w απεικονίζονται οι κορυφές της ορθογωνικής περιοχής R_1 ; Να αναφερθεί τέλος και μια πιθανή εφαρμογή της σύμμορφης αυτής απεικόνισης (για την περιοχή R_1) στην Επίπεδη Ελαστικότητα στη Μηχανική των Υλικών.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ15 (Υ) Μιγαδικές Συναρτήσεις: Σύμμορφη Απεικόνιση, Ελαστικότητα): Ζητούνται: (α) Απλά να γραφεί η σύμμορφη απεικόνιση $w = w(z)$ (φυσικά σε μορφή συναρτήσεως) που να μετασχηματίζει το μοναδιαίο κύκλο D σε επίπεδο με ρωγμή $[-a, a]$ (με $a > 0$).

(β) Με τη χρήση λίστας με τέσσερα στοιχεία να βρεθούν τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου w όπου απεικονίζονται τα τέσσερα σημεία $z = 1$, $z = i$, $z = -1$ και $z = -i$ της περιφέρειας C του μοναδιαίου κύκλου D στο μιγαδικό επίπεδο z . Τι παρατηρείται;

(γ) Πού είναι χρήσιμη στη Ρευστομηχανική η ίδια ακριβώς σύμμορφη απεικόνιση $w = w(z)$;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ16 (Υ) Μιγαδικές Συναρτήσεις: Σειρές Taylor και Laurent): Ζητούνται:

(α) Να βρεθεί η σειρά Taylor $s1$ της μιγαδικής συναρτήσεως $\exp z \equiv e^z$ με όρους μέχρι και z^{10} . **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Series. **Υπόδειξη:** Πληροφορίες για εντολές της Mathematica πέρα από τα βιβλία είναι διαθέσιμες και από την οθόνη του υπολογιστή με Help -> Help Browser -> Go To και γραφή της εντολής στην οποία αναφερόμαστε στο σχετικό κενό.

(β) Να επιχειρηθεί η εύρεση της σειράς Laurent $s2$ με όρους μέχρι και z^{-10} της συναρτήσεως

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) \equiv e^{\frac{1}{z}}.$$

Τι παρατηρείται;

(γ) Το ίδιο ακριβώς ερώτημα με τη χρήση της εντολής

`s3 = s1 /. z -> 1/z // Normal`

(Πρόκειται φυσικά για πολύ γνωστό τέχνασμα που εύκολα «εξαπατά» τα προγράμματα συμβολικών υπολογισμών!) Τι παρατηρείται τώρα; Χρειάζεται πραγματικά και η εντολή Normal;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ17 (Υ) Μιγαδικές Συναρτήσεις: Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα): Ζητούνται:

(α) Να μελετηθούν όλες οι πληροφορίες για την εντολή Residue για την εύρεση ολοκληρωτικού

υπολοίπου (residue). **Υπόδειξη:** Πληροφορίες για την εντολή Residue δίνονται και από την οθόνη του υπολογιστή με Help -> Help Browser -> Go To και γραφή της εντολής Residue στο κενό.

(β) Να μεταφερθούν τα δύο σχετικά παραδείγματα στο σημερινό notebook.

(γ) Σε λίστα με δύο στοιχεία να υπολογισθούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα (residues) των σειρών s_1 και s_3 της προηγούμενης ασκήσεως στο σημείο $z = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ18 ([Y] *Μιγαδικές Συναρτήσεις: Σύμμορφη Απεικόνιση, Ρευστομηχανική*): Ζητούνται:

(α) Να φορτωθεί (αν δεν έγινε αυτό ήδη ...) το πακέτο Realm (real: πραγματικός, imaginary: φανταστικός) της Mathematica. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`Needs["Algebra`ReIm"]`

ή παραπλήσια εντολή. **Υπόδειξη:** Στο πληκτρολόγιο η βαρεία βρίσκεται πάνω αριστερά (ακριβώς κάτω από την περισπωμένη).

(β) Να γραφεί (σαν συνάρτηση) η σύμμορφη απεικόνιση $w = w(z)$ που μετασχηματίζει το ογδομημόριο $0 \leq \theta \leq \pi/4$ στο ημιεπίπεδο $\text{Im } w \geq 0$.

(γ) Σε ποιο σημείο z η απεικόνιση αυτή δεν είναι σύμμορφη;

(δ) Να δηλωθεί ο γενικός μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$.

(ε) Σε λίστα με δύο στοιχεία να υπολογισθούν το πραγματικό μέρος $u(x, y)$ και το φανταστικό μέρος $v(x, y)$ της μιγαδικής συναρτήσεως $w(z)$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί (δύο φορές) και η εντολή ComplexExpand.

(στ) Ανάλογα να γραφεί (σαν συνάρτηση) η σύμμορφη απεικόνιση $\Omega = \Omega(z)$ που μετασχηματίζει το τεταρτημόριο $0 \leq \theta \leq \pi/2$ στο ημιεπίπεδο $\text{Im } \Omega \geq 0$.

(ζ) Σε ποιο σημείο z η απεικόνιση αυτή δεν είναι σύμμορφη;

(η) Σε λίστα με δύο στοιχεία να υπολογισθούν το πραγματικό μέρος $\Phi(x, y)$ και το φανταστικό μέρος $\Psi(x, y)$ της μιγαδικής συναρτήσεως $\Omega(z)$. **Υπόδειξη:** Το Φ με Esc F Esc. Επίσης το Ψ με Esc Y Esc (Λατινικό κεφαλαίο Y). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί (δύο φορές) και η εντολή ComplexExpand.

(θ) Να μελετηθεί η εντολή ContourPlot και να μεταφερθούν τα δύο παραδείγματά της στο παρόν notebook (με εμφάνιση και των γραφικών παραστάσεων!).

(ι) Σε ποια ροή αναφέρεται το μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ το ερωτήματος (η); Σε τι ροή τη μετασχηματίζει από το μιγαδικό επίπεδο z στο μιγαδικό επίπεδο Ω ;

(ια) Γι' αυτό το μιγαδικό δυναμικό ροής να σχεδιασθούν οι ισοδυναμικές γραμμές καθώς και οι γραμμές ροής στο τετράγωνο $R = [0, 1] \times [0, 1]$ του μιγαδικού επιπέδου z (σε έγχρωμα σχήματα). **Υπόδειξη:** Για τις ισοδυναμικές γραμμές να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`ContourPlot[Φ[x, y], {x, 0, 1}, {y, 0, 1}, ColorFunction -> Hue]`

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ19 ([Y] *Μιγαδικές Συναρτήσεις: Αναλυτικές Συναρτήσεις, Ρευστομηχανική*): Εξετάζουμε το πεδίο ροής που οφείλεται στην αλληλεπίδραση (interaction) ομοιόμορφης ροής $V_0 z$ με ταχύτητα V παράλληλη στον άξονα x και διπόλου ισχύος M στην αρχή των αξόνων $z = 0$. Ζητούνται:

(α) Να εξαλειφθεί ο ορισμός του μιγαδικού αριθμού $z = x + iy$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Clear.

(β) Ποιο είναι το σχετικό μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$; **Υπόδειξη:** Έχει τη μορφή

$$\Omega(z) = V_0 z + \frac{M}{2\pi z}.$$

(γ) Τι παριστάνει ο καθένας από τους δύο αυτούς όρους; **Υπόδειξη:** Την ομοιόμορφη ροή και το δίπολο αντίστοιχα.

(δ) Ποιο είναι το ολοκληρωτικό υπόλοιπο του μιγαδικού δυναμικού ροής $\Omega(z)$ στο σημείο του διπόλου; **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή Residue.

(ε) Να ξαναορισθεί τώρα που τον ξαναχρησιμοποιούμε ο γενικός μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$.

(στ) Να υπολογισθούν το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και η ροϊκή συνάρτηση (ή συνάρτηση ροής) $\Psi(x, y)$ ανάλογα με την προηγούμενη άσκηση. **Υπόδειξη:** Να μη λησμονηθεί η εντολή ComplexExpand (δύο φορές μάλιστα!). Πιο λεπτομερής υπόδειξη: Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`{Φ[x_, y_] = Re[Ω[z]] // ComplexExpand, Ψ[x_, y_] = Im[Ω[z]] // ComplexExpand}`

(ζ) Να σχεδιασθούν οι γραμμές ροής για ομοιόμορφη ροή (σε έγχρωμο σχήμα) με $V_0 = 1$. **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`ContourPlot[Ψ[x, y] /. {V0 -> 1, M -> 0}, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PlotPoints -> 50, ColorFunction -> Hue]`

(η) Το ίδιο ερώτημα μόνο για δίπολο ισχύος $M = 1$.

(θ) Το ίδιο ερώτημα για την αλληλεπίδραση (interaction) ομοιόμορφης ροής με $V_0 = 1$ και διπόλου με $M = 2$.

(ι) Το ίδιο ερώτημα για τη ροή που αντιστοιχεί στη ροή γύρω από κύλινδρο (με σχεδίαση στο τετράγωνο $R = [0, 2] \times [0, 2]$). **Υπόδειξη:** Να χρησιμοποιηθεί η εντολή

`ContourPlot[Ψ[x, y] /. {V0 -> 1, M -> 2Pi}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotPoints -> 50, ColorFunction -> Hue]`

(Το π αντί για Pi καλύτερα να γραφεί με Esc p Esc.) Γιατί τέθηκε αυτή η τιμή $M = 2\pi$ της ισχύος του διπόλου στο παρόν τελευταίο ερώτημα;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ20 (IX) Μιγαδικές Συναρτήσεις: Αρμονικές Συναρτήσεις, Μετάδοση Θερμότητας): Θεωρούμε το στατικό πρόβλημα της θερμοκρασιακής κατανομής $T = T(r, \theta)$ (σε πολικές συντεταγμένες (r, θ)) για την ημιάπειρη επίπεδη περιοχή D (σε σχήμα γωνίας) $r \geq 0$ και $0 \leq \theta \leq \alpha$ (με το α θετική σταθερά στο διάστημα $(0, \pi)$). Οι δύο ημιευθείες που αποτελούν το σύνορο της περιοχής D βρίσκονται σε σταθερές θερμοκρασίες T_1 και T_2 αντίστοιχα. Ζητούνται: (α) Δύο εξαιρητικά απλές αρμονικές συναρτήσεις $u = u(r, \theta)$ και $v = v(r, \theta)$ για την περιοχή D . (β) Η σχεδόν παντού αναλυτική συνάρτηση $f = f(z)$, της οποίας οι παραπάνω συναρτήσεις u και v είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος αντίστοιχα. (γ) Η αληθινή και ζητούμενη θερμοκρασιακή κατανομή $T = T(r, \theta)$ στην ίδια περιοχή (βέβαια με την πλήρωση και των συνοριακών συνθηκών). (δ) Τέλος ποια σύμμορφη απεικόνιση θα βοηθούσε ίσως (ασφαλώς όχι ιδιαίτερα στη συγκεκριμένη περίπτωση ...) στην απλούστευση του προβλήματός μας;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ21 (IX και Y) Μιγαδικές Συναρτήσεις: Αρμονικές Συναρτήσεις, Μηχανική των Υλικών: Ελαστικότητα, Μετάδοση Θερμότητας): Όπως είναι γνωστό, στο κλασικό στατικό πρόβλημα της επίπεδης ισότροπης γραμμικής ελαστικότητας το άθροισμα $s = s(x, y)$ των ορθών τάσεων σ_x και σ_y (ασφαλώς και των κυρίων τάσεων σ_1 και σ_2) είναι αρμονική συνάρτηση, δηλαδή

$$\nabla^2 s(x, y) = 0.$$

Για ένα ελαστικό ημιεπίπεδο $y \geq 0$ υπό κατάλληλες συνθήκες φορτίσεως το άθροισμα αυτό $s(x, y)$ έχει βρεθεί (πειραματικά) στο σύνορο $y = 0$ του ημιεπιπέδου ότι έχει τη σταθερή τιμή S_0 για $|x| \leq 1$, ενώ μηδενίζεται για $|x| > 1$, όπως επίσης και στο άπειρο ($x^2 + y^2 \rightarrow \infty$). Ζητούνται: (α) Με τη χρήση κατάλληλης σχεδόν παντού αναλυτικής συναρτήσεως $w = w(z)$ να προσδιορισθεί η (πραγματική βέβαια) λύση $s = s(x, y)$ του προβλήματος στην απλούστερη δυνατή μορφή της. (β) Το ίδιο ερώτημα να απαντηθεί και με την παραπλήσια μέθοδο της σύμμορφης απεικόνισεως. (γ) Ποια είναι η αναλυτική έκφραση των ισοσταθμικών καμπύλων $s(x, y) = c$ (με το c σταθερά);

(δ) Σε ποιο σχετικό πρόβλημα της στατικής Μεταδόσεως Θερμότητας αρμόζει απόλυτα η λύση που ήδη προσδιορίστηκε παραπάνω;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ22 ([Y] *Μιγαδικές Συναρτήσεις: Αρμονικές Συναρτήσεις, Μετάδοση Θερμότητας, Μηχανική των Υλικών: Ελαστικότητα*): Θεωρούμε τώρα το ανάλογο πρόβλημα της ημιλωρίδας (δηλαδή μιας ημιάπειρης λωρίδας) $|x| \leq \pi/2$ και $y \geq 0$. Ζητούνται: (α) Να ελεγχθεί ότι η απλή σύμμορφη απεικόνιση

$$w = \sin z \quad \text{με} \quad z = x + iy \quad \text{και} \quad w = u + iv,$$

μετατρέπει την ημιλωρίδα αυτή στο ημιεπίπεδο της προηγούμενης ασκήσεως, το οποίο δηλώνεται τώρα σαν επίπεδο w (αντί z προηγουμένως). (β) Να επαληθευθεί πως πραγματικά αυτή είναι η χρήσιμη σύμμορφη απεικόνιση για το μετασχηματισμό της ημιλωρίδας σε ημιεπίπεδο με βάση το μετασχηματισμό Schwarz-Christoffel. Αυτό να γίνει με την ολοκλήρωση της συναρτήσεως

$$G(w) = \frac{A}{\sqrt{1-w^2}}$$

με $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq y \leq 2$ και το A σταθερά, εντολή Integrate. Τελικά να χρησιμοποιηθεί και η εντολή CartesianMap (με $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ και $0 \leq y \leq 2$), για να φανεί και οπτικά απόλυτα καθαρά πώς η ημιλωρίδα μετασχηματίζεται σε ημιεπίπεδο. Σε ποια σημεία απεικονίζονται οι τέσσερις κορυφές της ευθύς πιο πάνω ορθογωνικής περιοχής; (γ) Επομένως είναι εύκολη πια η χρησιμοποίηση του αποτελέσματος $s = s(x, y)$ της προηγούμενης ασκήσεως και στην περίπτωση της ημιλωρίδας είτε στην Ελαστικότητα είτε στη Μετάδοση Θερμότητας. Ας θεωρήσουμε (χάριν αλλαγής) το στατικό επίπεδο θερμοκρασιακό πρόβλημα με τη βάση της ημιλωρίδας $y = 0$ σε θερμοκρασία T_0 και τις (κατακόρυφες) πλευρές της $x = \pm\pi/2$ σε μηδενική θερμοκρασία (όπως και στο άπειρο: $y \rightarrow \infty$). Ποια είναι επομένως η θερμοκρασιακή κατανομή $T = T(x, y)$ στην ημιλωρίδα; Στην απλούστερη μορφή της πρέπει να προκύψει η έκφραση

$$T(x, y) = \frac{2T_0}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\cos x}{\sinh y} \right)$$

με τη συνάρτηση $\tan^{-1} \equiv \arctan$ (τόξο εφαπτομένης) στο διάστημα $[0, \pi/2]$ (πρωτεύουσα τιμή). (δ) Να ελεγχθεί αναλυτικά (επαλήθευση) ότι στ' αλήθεια η πιο πάνω συνάρτηση $T(x, y)$ είναι αρμονική και, ταυτόχρονα, πληροί και τις συνοριακές συνθήκες. (ε) Ποιες είναι οι ισόθερμες (ισοθερμοκρασιακές) καμπύλες $T(x, y) = c$ (με το c σταθερά) στο παρόν πρόβλημα; (στ) Παραπέρα με τη χρήση της Mathematica (εντολές ContourPlot και DensityPlot) να σχεδιασθεί το ανηγμένο θερμοκρασιακό πεδίο $T(x, y)/T_0$. Σε τι ακριβώς διαφέρουν οι δύο αυτές εντολές ως προς τα σχήματα που δημιουργούνται; (το πρώτο προκύπτει με την εντολή ContourPlot και το δεύτερο προκύπτει με την εντολή DensityPlot για $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$ και $10^{-6} \leq y \leq 2.1$) με την επιλογή PlotPoints -> 100.) Σημειώνεται επίσης ότι μπορούμε με την εντολή ContourPlot να σχεδιάσουμε μόνο τις ισόθερμες (ισοθερμοκρασιακές) καμπύλες

$$\frac{T(x, y)}{T_0} = c$$

(δηλαδή χωρίς σκιάς ή χρώματα) με την επιλογή ContourShading -> False (αντί για True). (ζ) Τι παρατηρούμε για τη ροή της θερμότητας από τα σχήματα αυτά; Είναι εύλογη; (η) Τέλος ποιο είναι το ακριβές ανάλογο της πιο πάνω λύσεως για την Επίπεδη Ελαστικότητα στην ημιλωρίδα μας (με βάση και την προηγούμενη άσκηση);

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ23 ([X] *Μιγαδικές Συναρτήσεις. Ρευστομηχανική*): Στη Ρευστομηχανική θεωρούμε τη μόνιμη (σταθερή), διδιάστατη (επίπεδη) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού μέσα στη γωνία $0 \leq \theta \leq \pi/3$ (με θ την πολική γωνία). Το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ δίνεται από τον τύπο

$$\Phi(x, y) = x^3 - 3xy^2$$

με (x, y) τις Καρτεσιανές συντεταγμένες. Ζητούνται: (α) Ο φυσικός ορισμός του ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική. (β) Η επαλήθευση ότι το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ είναι αρμονική συνάρτηση. (γ) Οι δύο συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού. (δ) Μέσω των συνιστωσών αυτών V_x και V_y η επαλήθευση της ισχύος της εξισώσεως της συνεχείας. (ε) Ανάλογα για την εξίσωση του αστρόβιλου (ελλείψεως στροβιλισμού) της ροής. (στ) Η εύρεση της ροϊκής συναρτήσεως (ή συναρτήσεως ροής) $\Psi(x, y)$. (ζ) Ο προσδιορισμός του μιγαδικού δυναμικού ροής $\Omega(z)$.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ24 ([X] Μιγαδικές Συναρτήσεις. Ρευστομηχανική): Συνεχίζοντας την προηγούμενη άσκηση, ζητούνται επίσης: (α) Ο προσδιορισμός της μιγαδικής ταχύτητας στο πεδίο ροής. (β) Από αυτήν ο προσδιορισμός του σημείου ανακοπής, εάν υπάρχει (ή των σημείων ανακοπής, εάν υπάρχουν), δηλαδή του σημείου (ή των σημείων) μηδενικής ταχύτητας, κατευθείαν με τη χρήση της μιγαδικής μεταβλητής $z = x + iy$. (γ) Από τη μιγαδική ταχύτητα ο προσδιορισμός και πάλι των συνιστωσών της ταχύτητας V_x και V_y . (δ) Η μαθηματική επαλήθευση στο παρόν πρόβλημα (όχι γενικά) ότι οι ισοδυναμικές γραμμές και οι γραμμές ροής τέμνονται ορθογώνια, δηλαδή αποτελούν σύστημα ορθογωνίων τροχιών. (ε) Η πρόχειρη σχεδίαση του πεδίου ροής: οι γραμμές ροής συνεχείς (και με βέλη!), ενώ οι ισοδυναμικές γραμμές διακεκομμένες (και χωρίς βέλη!) ή με διαφορετικά χρώματα μέσα στη γωνία $0 \leq \theta \leq \pi/3$ που εξετάζουμε. (στ) Να βρεθεί σε ποια ακριβώς σταθερή τιμή της ροϊκής συναρτήσεως (ή συναρτήσεως ροής) $\Psi(x, y)$ αντιστοιχεί το συνολικό σύνορο (δύο ημιευθείες) στο παρόν πεδίο ροής. (ζ) Να εξηγηθεί μαθηματικά γιατί ακριβώς η κυκλοφορία Γ και η παροχή Q του ρευστού σε μια απλή κλειστή καμπύλη C μέσα στο πεδίο ροής είναι και οι δυο τους μηδενικές. Για την παροχή Q να δοθεί και φυσική εξήγηση.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ25 ([X] Μιγαδικές Συναρτήσεις. Ρευστομηχανική): Θεωρούμε ξανά στη Ρευστομηχανική τη μόνιμη (σταθερή), διδιάστατη (επίπεδη) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού, τώρα όμως σε ολόκληρο το επίπεδο. Η ροή αυτή παρεμποδίζεται από ευθύγραμμο στερεό και σταθερό (δηλαδή ακίνητο) πολύ λεπτό εμπόδιο στο διάστημα $[-1, 1]$ του πραγματικού άξονα Ox σαν ένα είδος «σχισμής» στη ροή. Η ροή που εξετάζουμε έχει κυκλοφορία Γ γύρω από το ευθύγραμμο αυτό εμπόδιο $[-1, 1]$. Το σχετικό μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ δίνεται από τον τύπο

$$\Omega(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \cosh^{-1} z \quad \text{με} \quad z = x + iy, \quad z \notin [-1, 1].$$

Ζητούνται: (α) Η απόδειξη του τύπου που δίνει τη συνάρτηση $\cosh^{-1} z$ με τη βοήθεια της λογαριθμικής συναρτήσεως $\ln z$ (με πρόσημο συν στη ρίζα!). Ποια είναι επομένως η έκφραση του μιγαδικού δυναμικού ροής $\Omega(z)$ με τη βοήθεια της λογαριθμικής συναρτήσεως; (β) Υποχρεωτικά με τη λογαριθμική έκφραση του μιγαδικού δυναμικού ροής να υπολογισθεί η μιγαδική ταχύτητα στην παρούσα ροή. (γ) Στη συνέχεια να υπολογισθεί η μιγαδική ποσότητα $V_x + iV_y$ με τη χρήση Καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) . Γενικά είναι ή όχι αναλυτική συνάρτηση μέσα στο πεδίο ροής; (δ) Να υπολογισθούν οι συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας του ρευστού στον πραγματικό άξονα x (προφανώς με $y = 0$), αλλά έξω από το εμπόδιο, δηλαδή με $|x| > 1$. (ε) Το ίδιο ερώτημα, τώρα όμως πάνω στις δύο πλευρές του εμποδίου, δηλαδή με $|x| < 1$ και $y = \pm 0$. (στ) Να διερευνηθεί μαθηματικά σε ποια ακριβώς σημεία απειρίζεται η ταχύτητα του ρευστού. (ζ) Ποιο (ή ποια) είναι τα σημεία ανακοπής (εάν βέβαια υπάρχουν!), δηλαδή τα σημεία μηδενικής ταχύτητας του ρευστού; (η) Ποια είναι η συνοριακή συνθήκη πάνω στο ευθύγραμμο εμπόδιο $[-1, 1]$; Επαληθεύεται ή όχι η συνθήκη αυτή; Γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ26 ([X] Μιγαδικές Συναρτήσεις. Ρευστομηχανική): Σε μια μόνιμη (σταθερή, ανεξάρτητη από το χρόνο t), διδιάστατη (επίπεδη) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού στη Ρευστομηχανική (ή Μηχανική των Ρευστών) θεωρούμε γνωστό το μιγαδικό δυναμικό ροής

$$\Omega(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + V_0 z \quad \text{με} \quad z = x + iy = re^{i\theta}$$

(σε Καρτεσιανές και σε πολικές συντεταγμένες αντίστοιχα). Οι ποσότητες G και V_0 θεωρούνται γνωστές πραγματικές σταθερές. Ζητούνται: (α) Από φυσικής απόψεως σε ποιο συγκεκριμένο πρόβλημα της Ρευστομηχανικής αναφέρεται το πιο πάνω μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ και ο κάθε όρος του χωριστά; (β) Να υπολογισθούν το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$ και η συνάρτηση ροής $\Psi(r, \theta)$ υποχρεωτικά σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) . (γ) Να ελεγχθεί η ισχύς των δύο συνθηκών (ή εξισώσεων) των Cauchy–Riemann σε πολικές συντεταγμένες. (Υπόδειξη: Είναι ανάλογες με τις αντίστοιχες συνθήκες σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) , αλλά τώρα με ∂r αντί για ∂x και επίσης με $r\partial\theta$ αντί για ∂y στις παραγωγίσεις.) (δ) Από την πρώτη συνθήκη των Cauchy–Riemann (σε γενική μορφή, όχι στο παρόν πεδίο ροής) να υπολογισθεί η μικτή παράγωγος $\partial^2\Psi(r, \theta)/(\partial r \partial\theta)$ με τη βοήθεια του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$. (ε) Από τη δεύτερη συνθήκη των Cauchy–Riemann να υπολογισθεί ανάλογα και η μικτή παράγωγος $\partial^2\Psi(r, \theta)/(\partial\theta \partial r)$. (στ) Υποχρεωτικά με βάση τα δύο προηγούμενα ερωτήματα να αποδειχθεί ότι το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$ είναι γενικά (όχι μόνο στο παρόν πεδίο ροής) αρμονική συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ27 (IX) Μιγαδικές Συναρτήσεις. Ρευστομηχανική): Συνεχίζοντας την προηγούμενη άσκηση, *πάλι σε πολικές συντεταγμένες (r, θ)* , ζητούνται επίσης: (α) Για το συγκεκριμένο μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ η αντίστοιχη μιγαδική ταχύτητα. (β) Υποχρεωτικά με βάση το προηγούμενο ερώτημα οι συνιστώσες της ταχύτητας $V_x(r, \theta)$ (κατά τον άξονα x) και $V_y(r, \theta)$ (κατά τον άξονα y). (γ) Να αναφερθεί το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$ που αντιστοιχεί στο μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$. (δ) Η επαλήθευση (σε πολικές συντεταγμένες) ότι το συγκεκριμένο δυναμικό ταχύτητας $\Phi(r, \theta)$ είναι αρμονική συνάρτηση. (ε) Ο γενικός ορισμός της κυκλοφορίας Γ ιδεατού ρευστού πάνω σε μια απλή κλειστή τμηματικά λεία καμπύλη C με τη βοήθεια των δύο συνιστωσών της ταχύτητας V_x και V_y και σχετικού πραγματικού επικαμπύλιου ολοκληρώματος σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) . (στ) Η απόδειξη του γενικού τύπου για τον υπολογισμό της ίδιας κυκλοφορίας Γ με την άμεση χρήση της μιγαδικής ταχύτητας. Για το συγκεκριμένο μιγαδικό δυναμικό ροής $\Omega(z)$ της προηγούμενης ασκήσεως ο υπολογισμός της κυκλοφορίας Γ του ρευστού πάνω σε μια περιφέρεια ακτίνας a με κέντρο το σημείο $z = 0$: (ζ) τόσο με άμεση ολοκλήρωση όσο και (η) με χρήση του θεωρήματος του Cauchy και της σχετικής μεθόδου των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Τι σημαντικό (αληθινά σημαντικό!) παρατηρείται;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-Μ28 (IX) Μιγαδικές Συναρτήσεις. Ρευστομηχανική): Εξετάζουμε τη μόνιμη (σταθερή), διδιάστατη (επίπεδη) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού παράλληλα στον άξονα x με ταχύτητα V_0 θετική (προς τα δεξιά). Η ροή αυτή παρεμποδίζεται από κάθετο σ' αυτήν ευθύγραμμο λεπτό και στερεό (αμετακίνητο) εμπόδιο στο διάστημα $[-a, a]$ του φανταστικού άξονα y , δηλαδή από το σημείο $z_1 = -ia$ μέχρι το σημείο $z_2 = ia$ του φανταστικού άξονα y με το a θετική σταθερά. Το σχετικό μιγαδικό δυναμικό ροής έχει τη μορφή

$$\Omega(z) = V_0\sqrt{z^2 + a^2}.$$

Το συναντήσαμε επίσης (σε ελάχιστα διαφορετική γραφή) στο Μέρος Δ των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών για Πολιτικούς Μηχανικούς που αφορά στις Μιγαδικές Συναρτήσεις: πρώτο σχήμα αμέσως πριν από τα Περιεχόμενα. Στην άσκηση αυτή εργαζόμαστε σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) . Ζητούνται: (α) Η μιγαδική ταχύτητα του ρευστού. (β) Η ίδια ταχύτητα ειδικά πάνω στο φανταστικό άξονα y (με $x = 0^\pm$). (γ) Οι συνιστώσες V_x και V_y της ταχύτητας του ρευστού πάνω στο φανταστικό άξονα y έξω από το εμπόδιο (δηλαδή με $|y| > a$). (δ) Ανάλογο ερώτημα πάνω στο εμπόδιο, δηλαδή με $|y| < a$ στη θετική, τη δεξιά πλευρά του εμποδίου (δηλαδή με $x = 0^+$) (ε) και στην αρνητική, την αριστερή πλευρά του εμποδίου (δηλαδή με $x = 0^-$). (στ) Πληρούται εδώ η βασική συνοριακή συνθήκη της Ρευστομηχανικής στις δύο πλευρές του σταθερού ευθύγραμμου εμποδίου; (ζ) Ποια ακριβώς είναι (εάν βέβαια υπάρχουν) τα σημεία ανακοπής της παρούσας ροής, δηλαδή τα σημεία μηδενισμού της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού;

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙΙ: ΟΜΑΔΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΜΕ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥΣ ΣΕ NOTEBOOKS

Τα δύο προηγούμενα μέρη αυτού του τεύχους των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς περιελάμβαναν εκφωνήσεις εφαρμοσμένων ασκήσεων στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού χωρίς τις λύσεις τους. Επίσης στο κύριο τεύχος του ίδιου διδακτικού συγγράμματος, Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙΙ για Πολιτικούς Μηχανικούς, πέρα από τη θεωρία έχουν συμπεριληφθεί και πολλές πλήρως λυμένες εφαρμογές της χωρίς όμως τη χρήση του υπολογιστή.

Άρα υπάρχει έλλειψη λυμένων ασκήσεων με τη χρήση του υπολογιστή και εδώ του προγράμματος συμβολικών υπολογισμών (και όχι μόνο ...) *Mathematica* εννοείται πάντοτε στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού. Αυτή η έλλειψη επιδιώκεται να καλυφθεί στο παρόν μέρος του τεύχους.

Συγκεκριμένα στο μέρος αυτό περιλαμβάνονται εννέα εκτενείς ομάδες ασκήσεων (με 56 ασκήσεις) που είναι προσανατολισμένες στη λύση τους με τη *Mathematica*. Μετά τις εκφωνήσεις των ασκήσεων ακολουθούν οι λύσεις τους σε notebooks της *Mathematica*, εδώ με χρήση της έκδοσης (version) 4.1 της *Mathematica*, με την πλήρη παράθεση των notebooks αυτών (και εντολών και εξόδων της *Mathematica*) και όχι απλά υποδείξεων. Πρόκειται για πάνω από 750 εντολές της *Mathematica*, που αντιστοιχούν στα ερωτήματα των εκφωνήσεων μαζί με τις σχετικές εξόδους της *Mathematica*. Μερικές από τις εντολές αυτές (όχι όμως πολλές) είναι σχόλια που έχουν σαν στόχο να κατανοηθούν έννοιες του Πολιτικού Μηχανικού. Έτσι κι αλλιώς σχεδόν όλες οι ασκήσεις (για την ακρίβεια οι 55 από τις 56) είναι εφαρμοσμένες στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού.

Με τον τρόπο που περιγράφηκε, στο μέρος αυτό ο Πολιτικός Μηχανικός έχει στη διάθεσή του τις πλήρεις λύσεις με τη *Mathematica* πάρα πολλών εφαρμοσμένων ασκήσεων της επιστήμης του ακριβώς όπως οι λύσεις αυτές προκύπτουν με τη *Mathematica* στα notebooks, δηλαδή χωρίς καμία απολύτως αλλοίωσή τους από το γράφοντα. Η βασική ιδέα είναι να γίνεται η προσπάθεια επιλύσεως των εφαρμοσμένων ασκήσεων από το φοιτητή/τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό στον υπολογιστή και σε περίπτωση δυσκολίας ή για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων που βρίσκονται να ελέγχονται οι απαντήσεις στα notebooks τα οποία ακολουθούν την κάθε ομάδα ασκήσεων.

Εντούτοις πρέπει να ομολογηθεί πως κι η μελέτη των ίδιων των notebooks χωρίς άμεση χρήση του υπολογιστή (ή/και με χρήση του υπολογιστή) έχει κι αυτή αρκετά να προσφέρει στο φοιτητή/στη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό στις γνώσεις του/της στην επιστήμη του/της σε συνδυασμό με τη *Mathematica*. Μετά από μια τέτοια μελέτη θα μπορέσει σίγουρα να αντιμετωπίσει μόνος του/μόνη της τις ίδιες ασκήσεις ή/και άλλες ασκήσεις, όπως τις υπολογιστικές ασκήσεις (με το σύμβολο [Υ]) του προηγούμενου μέρους αυτού του τεύχους, έχοντας αυξημένες εμπειρία και γνώσεις και ασφαλώς με πολύ μεγαλύτερη επιτυχία. Ας μην είμαστε λοιπόν εντελώς αντίθετοι με τη μελέτη των notebooks που επισυνάπτονται στις εκφωνήσεις των ομάδων των ασκήσεων ακόμη και χωρίς την ταυτόχρονη χρήση του υπολογιστή απλά για εξοικείωση με τις μεθόδους που παρουσιάζονται.

Τέλος είναι προφανές, αλλ' ας σημειωθεί, ότι ο φοιτητής/η φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός που θα προσπαθήσει να επιλύσει τις παρούσες ομάδες ασκήσεων με τη βοήθεια και των notebooks που τις ακολουθούν θα πρέπει να είναι από πριν εξοικειωμένος/εξοικειωμένη με τη *Mathematica*.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMIII-MA

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MA1 (Εξισώσεις του Laplace και του Poisson, Μηχανική των Υλικών: Στρέψη):

Ζητούνται με τα συνηθισμένα σύμβολα χωρίς τη χρήση του συμβόλου της μερικής παραγωγίσεως ∂ (χωρίς τη χρήση παλέτας) και επίσης χωρίς τη χρήση του πακέτου Vector Analysis: (α) Η διδιάστατη εξίσωση του Laplace LaplacePDE2 και η αντίστοιχη τριδιάστατη εξίσωση LaplacePDE3. (β) Η επίλυση της εξισώσεως LaplacePDE2: γενική λύση sol2, ο σχηματισμός της σχετικής συναρτήσεως $u_s(x, y)$ από τη λύση αυτή και η επαλήθευση ver2 της ίδιας λύσεως. (γ) Απόπειρα επίλυσεως της τριδιάστατης εξισώσεως του Laplace και σχετικό σχόλιο comment1 (με συμβολοσειρά σε εισαγωγικά: comment1 = "Η μέθοδος επίλυσεως με την εντολή ...") για την επιτυχία της ή την αποτυχία της. (δ) Λίστα WhereLaplacePDEAppears με επτά στοιχεία: τα φυσικά μεγέθη του Πολιτικού Μηχανικού (όχι περιοχές της επιστήμης του!) που επαληθεύουν τις εξισώσεις LaplacePDE2 ή LaplacePDE3. (ε) Η εξίσωση TorsionPDE, την οποία επαληθεύει η τασική συνάρτηση του Prandtl στη στρέψη συνήθους ράβδου. (στ) Η επίλυση της εξισώσεως TorsionPDE: γενική λύση solt, ο σχηματισμός της σχετικής συναρτήσεως $u_{st}(x, y)$ από τη λύση αυτή και η επαλήθευση ver1 της ίδιας λύσεως. (ζ) Λίστα CharTorsionPDE με επτά στοιχεία: τους χαρακτηρισμούς της εξισώσεως TorsionPDE. (η) Οι δύο διατμητικές τάσεις τ_{xz} και τ_{yz} στο παρόν πρόβλημα στρέψεως σαν συναρτήσεις κατάλληλων μεταβλητών και η επαλήθευση EquilibriumEquationVerification της σχετικής εξισώσεως ισορροπίας.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MA2 (Διαρμονική Εξίσωση, Πλάκες):

Και πάλι χωρίς τη χρήση του συμβόλου ∂ ούτε του πακέτου VectorAnalysis ζητούνται: (α) Η γνωστή διδιάστατη διαρμονική εξίσωση BiharmonicPDE με άγνωστη συνάρτηση τη w . (β) Η εξίσωση StaticPlatePDE1 για το στατικό πρόβλημα συνήθους πλάκας δυσκαμψίας D_p και υπό γνωστή κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y)$ χωρίς τη χρήση της εξισώσεως BiharmonicPDE. (γ) Με τη χρήση της εξισώσεως BiharmonicPDE: η εξίσωση StaticPlatePDE2 και η σύγκριση των εξισώσεων StaticPlatePDE1 και StaticPlatePDE2. (δ) Η εξίσωση DynamicPlatePDE για το δυναμικό πρόβλημα της πλάκας. (ε) Απόπειρα επίλυσεως της εξισώσεως BiharmonicPDE και το σχετικό σχόλιο comment2. (στ) Η κατευθείαν αναγραφή μιας μέτρια γενικής πραγματικής λύσεως $w_s(x, y)$ της εξισώσεως BiharmonicPDE με τη χρήση των δύο συναρτήσεων $f(x + iy)$ και $g(x + iy)$ με $i = \sqrt{-1}$ τη φανταστική μονάδα και η επαλήθευσή της (με απλοποίηση). (ζ) Η δήλωση σε μια λίστα DataList του μέτρου ελαστικότητας E_0 του υλικού της πλάκας (με αριθμητική τιμή 10^6) μαζί με τις σωστές μονάδες του, του λόγου του Poisson ν (με αριθμητική τιμή 0.32) και του πάχους της πλάκας h (με αριθμητική τιμή 0.15). (η) Ο υπολογισμός της δυσκαμψίας D_p της πλάκας (μαζί με τη μονάδα της). Σε σχόλιο comment3 ποια είναι η μονάδα αυτή; Για παράδειγμα (λάθος απάντηση): comment3 = "Η συνηθισμένη μονάδα της δυσκαμψίας πλάκας είναι 1/sec".

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MA3 (Εξίσωση του Laplace, Διαρμονική Εξίσωση, Πλάκες):

Τώρα υποχρεωτικά με τη χρήση του πακέτου VectorAnalysis ζητούνται: (α) Το φόρτωμα του πακέτου αυτού. (β) Η δήλωση Καρτεσιανών συντεταγμένων στον τριδιάστατο χώρο. (γ) Η διδιάστατη εξίσωση του Laplace LaplacePDE2 και η αντίστοιχη τριδιάστατη εξίσωση LaplacePDE3. (δ) Ανάλογα για τη διδιάστατη διαρμονική εξίσωση BiharmonicPDE2 και την αντίστοιχη τριδιάστατη εξίσωση BiharmonicPDE3. (ε) Σε σχόλιο comment4: Στην Τριδιάστατη Ελαστικότητα (όχι απλά στρέψη) υπάρχουν συναρτήσεις που να επαληθεύουν την εξίσωση του Laplace LaplacePDE3; Πόσες είναι και πώς συμβολίζονται; (στ) Η στατική εξίσωση της συνήθους πλάκας StaticPlatePDE και (ζ) Η αντίστοιχη δυναμική εξίσωση DynamicPlatePDE. (η) Η δήλωση σφαιρικών συντεταγμένων (ρ, θ, ϕ) και η εξίσωση του Laplace LaplaceSphericalPDE στις συντεταγμένες αυτές.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MA4 (Μονοδιάστατη Εξίσωση του Κύματος, Εξίσωση του Καλωδίου):

Ζητούνται: (α) Με το συνηθισμένο συμβολισμό η προσεγγιστική εξίσωση CablePDE ενός καλωδίου σε μια

καλωδιωτή γέφυρα. (β) Σε μια λίστα ProblemsList σε ποια άλλα προβλήματα παρουσιάζεται η ίδια ακριβώς εξίσωση; (γ) Σε σχόλιο comment5 ποια είναι η προσέγγιση που έχει γίνει στην περίπτωση του καλωδίου; Πόση είναι και πόση έχει θεωρηθεί ότι είναι προσεγγιστικά η σχετική δυσκαμψία; (δ) Η γενική λύση solc της εξισώσεως CablePDE (με χρήση και της εντολής PowerExpand για την αποφυγή ριζών), η αντίστοιχη συνάρτηση $u_c(x, t)$ και επαλήθευση ver της λύσεως με απλοποίηση του αποτελέσματος. (7ε) Λίστα ListYes με τρία στοιχεία: Τα ονόματα (με συμβολοσειρές στα Ελληνικά) τριών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους όπου η εντολή επίλυσεως διαφορικών εξισώσεων της Mathematica είναι επιτυχής. (στ) Ανάλογα λίστα ListNo με έξι στοιχεία (όπως και πριν): προβλήματα όπου η ίδια εντολή δεν είναι επιτυχής για τις σχετικές διαφορικές εξισώσεις. (ζ) Οι συνοριακές συνθήκες σε λίστα CableBCs για το παρόν πρόβλημα καλωδίου. (η) Η άμεση εύρεση της λύσεως $u_L(x, y)$ της διδιάστατης εξισώσεως του Laplace κατευθείαν από την ήδη γνωστή λύση $u_c(x, y)$ της εξισώσεως του καλωδίου: χωρίς την επίλυση της εξισώσεως του Laplace.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜΑ5 (Εξίσωση της Διαχύσεως, Μετάδοση Θερμότητας): Χωρίς τη χρήση του συμβόλου θ ούτε και του πακέτου VectorAnalysis ζητούνται: (α) Με το συνηθισμένο συμβολισμό και με σταθερά a^2 (αντί για D) η μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως DiffusionPDE, η αντίστοιχη διδιάστατη εξίσωση DiffusionPDE2 και επίσης η ανάλογη τριδιάστατη εξίσωση DiffusionPDE3. (β) Περιορίζομαστε στη μονοδιάστατη εξίσωση DiffusionPDE. Ποιος είναι ο κατάλληλος χωρισμός μεταβλητών για την άγνωστη συνάρτηση $u(x, t)$ και τι μορφή παίρνει με αυτόν η μονοδιάστατη διαφορική εξίσωση της διαχύσεως; (γ) Η αναγωγή της σε μορφή καθαρά χωρισμένων μεταβλητών SeparatedDiffusionPDE με τη θέση στο αριστερό μέλος και το χρόνο στο δεξιό. (Υπόδειξη: Χρειάζεται διαίρεση και των δύο μελών της διαφορικής εξισώσεως χωριστά!) (δ) Με κατάλληλη εκ των προτέρων επιλογή της σταθεράς διαχωρισμού η κατευθείαν γραφή (όχι ο υπολογισμός!) των δύο σχετικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων: της χωρικής ode_x και της χρονικής ode_t . (ε) Οι προσδιορισμοί των γενικών λύσεων τους (με κατάλληλα σύμβολα), οι αντίστοιχες συναρτήσεις και οι επαληθεύσεις των λύσεων αυτών. (στ) Λίστα DiffusionProblemsList με προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού (εδώ όχι φυσικές ποσότητες!) όπου απαντάται η εξίσωση της διαχύσεως. (ζ) Στη μονοδιάστατη Μετάδοση Θερμότητας δια μέσου τοίχου οι συνοριακές συνθήκες (boundary conditions) σε λίστα HeatTransferDirichletBCs για τη χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση με συνθήκες Dirichlet στις πλευρές του τοίχου: δύο θερμοκρασίες Θ_1 και Θ_2 στις δύο πλευρές του $x = 0$ και $x = L$ αντίστοιχα. Ανάλογα για συνθήκες Neumann τώρα σε λίστα HeatTransferNeumannBCs. (η) Σε σχόλιο comment6 τι υποδηλώνει η συνοριακή συνθήκη Neumann με σχετική φυσική εξήγηση. Επίσης σε σχόλιο comment7: είναι από φυσικής απόψεως δυνατόν στο παρόν πρόβλημα Μεταδόσεως Θερμότητας να ισχύουν συνοριακή συνθήκη Dirichlet στη μια πλευρά του τοίχου και συνοριακή συνθήκη Neumann στην άλλη πλευρά και γιατί;

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜΑ6 (Χωρισμός των Μεταβλητών, Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Δοκού): Στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις συνήθους δοκού δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA (και οι δύο αυτές σταθερές να δηλώνονται με ενιαία σύμβολα στη Mathematica!) ζητούνται: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους BeamPDE. (β) Ο χωρισμός μεταβλητών και η μορφή που παίρνει με αυτόν η διαφορική εξίσωση BeamPDE. (γ) Η κατευθείαν γραφή των αντίστοιχων δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων, της χωρικής BeamODE_x και της χρονικής BeamODE_t, με κατάλληλη επιλογή της σταθεράς διαχωρισμού λ . (δ) Σε σχόλιο comment8 η λεπτομερής επεξήγηση της πιο πάνω επιλογής της σταθεράς διαχωρισμού λ . (ε) Η επίλυση της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως BeamODE_x και η αντίστοιχη συνάρτηση $X_{s1}(x)$. (στ) Η μετατροπή της συναρτήσεως $X_{s1}(x)$ σε απλοποιημένη υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή $X_{s2}(x)$ (με απλοποίηση). (ζ) Η απευθείας γραφή της ίδιας λύσεως στη συνήθη μορφή της, η οποία δηλώνεται εδώ με τη συνάρτηση $X_s(x)$, και η επαλήθευσή της (πάλι με απλοποίηση). (η) Τέλος η δήλωση των τεσσάρων συνοριακών συνθηκών CantileverBCs για τη συνάρτηση $X_s(x)$ σε πρόβολο με $0 \leq x \leq L$ με την πάκτωση στο δεξιό άκρο του $x = L$.

■ Notebook EMIII-MA

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMIII-MA (ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMIII-MA 1 ΕΩΣ EMIII-MA 6)

In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MA 1 (ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ LAPLACE ΚΑΙ ΤΟΥ POISSON, ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ, ΣΤΡΕΨΗ)

In[2]:= LaplacePDE2 = D[u[x, y], {x, 2}] + D[u[x, y], {y, 2}] == 0

Out[2]= $u^{(0,2)}(x, y) + u^{(2,0)}(x, y) == 0$

In[3]:= LaplacePDE3 = D[u[x, y, z], {x, 2}] + D[u[x, y, z], {y, 2}] + D[u[x, y, z], {z, 2}] == 0

Out[3]= $u^{(0,0,2)}(x, y, z) + u^{(0,2,0)}(x, y, z) + u^{(2,0,0)}(x, y, z) == 0$

In[4]:= sol2 = DSolve[LaplacePDE2, u[x, y], {x, y}]

Out[4]= {{u(x, y) → $c_1[i x + y] + c_2[y - i x]$ }}

In[5]:= us[x_, y_] = sol2[[1, 1, 2]]

Out[5]= $c_1[i x + y] + c_2[y - i x]$

In[6]:= ver2 = LaplacePDE2 /. u → us 1

Out[6]= $us^{(0,2)}(x, y) + us^{(2,0)}(x, y) == 0$

In[7]:= sol3 = DSolve[LaplacePDE3, u[x, y, z], {x, y, z}]

Out[7]= DSolve[$u^{(0,0,2)}(x, y, z) + u^{(0,2,0)}(x, y, z) + u^{(2,0,0)}(x, y, z) == 0$, u(x, y, z), {x, y, z}]

In[8]:= comment 1 = "Η μέθοδος επιλύσεως της τριδιάστατης
εξίσωσης του Laplace με την εντολή DSolve δεν είναι επιτυχής. Αυτό
συμβαίνει, επειδή η εξίσωση αυτή δε διαθέτει απλή κλειστή γενική λύση.";

In[9]:= WhereLaplacePDEAppears = {"Δυναμικό βαρύτητας", "Θερμοκρασία σε μόνιμη κατάσταση",
"Δυναμικό ταχύτητας", "Συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση)",
"Συνάρτηση στρεβλώσεως", "Υδραυλικό φορτίο (ή διαφορά πιεζομετρικής στάθμης)",
"Αθροισμα ορθών τάσεων και κυρίων τάσεων"};

In[10]:= TorsionPDE = D[u[x, y], {x, 2}] + D[u[x, y], {y, 2}] == -2 Gθ

Out[10]= $u^{(0,2)}(x, y) + u^{(2,0)}(x, y) == -2 G\theta$

In[11]:= solt = DSolve[TorsionPDE, u[x, y], {x, y}]

Out[11]= {{u(x, y) → $-G\theta x^2 + c_1[i x + y] + c_2[y - i x]$ }}

In[12]:= ust[x_, y_] = solt[[1, 1, 2]]

Out[12]= $-G\theta x^2 + c_1[i x + y] + c_2[y - i x]$

In[13]:= **vert = TorsionPDE /. u → ust**

Out[13]= True

In[14]:= **CharTorsionPDE = {"Διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους",
"Δευτέρας τάξεως", "Γραμμική", "Μη ομογενής", "Με σταθερούς συντελεστές",
"Με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές", "Ελλειπτικού τύπου", "Εξίσωση Poisson"};**

In[15]:= **{τxz[x_, y_] = D[ust[x, y], y], τyz[x_, y_] = -D[ust[x, y], x]}**

Out[15]= $\{c_1'(i x + y) + c_2'(y - i x), 2 G \theta x - i c_1'(i x + y) + i c_2'(y - i x)\}$

In[16]:= **EquilibriumEquationVerification = D[τxz[x, y], x] + D[τyz[x, y], y] == 0**

Out[16]= True

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MA2 (ΔΙΑΡΜΟΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ, ΠΛΑΚΕΣ)

In[17]:= **BiharmonicPDE = D[w[x, y], {x, 4}] + 2D[w[x, y], {x, 2}, {y, 2}] + D[w[x, y], {y, 4}] == 0**

Out[17]= $w^{(0,4)}(x, y) + 2 w^{(2,2)}(x, y) + w^{(4,0)}(x, y) == 0$

In[18]:= **StaticPlatePDE1 = D[w[x, y], {x, 4}] + 2D[w[x, y], {x, 2}, {y, 2}] + D[w[x, y], {y, 4}] == ρ[x, y]/Dp**

Out[18]= $w^{(0,4)}(x, y) + 2 w^{(2,2)}(x, y) + w^{(4,0)}(x, y) == \frac{\rho(x, y)}{Dp}$

In[19]:= **StaticPlatePDE2 = BiharmonicPDE[1] == ρ[x, y]/Dp**

Out[19]= $w^{(0,4)}(x, y) + 2 w^{(2,2)}(x, y) + w^{(4,0)}(x, y) == \frac{\rho(x, y)}{Dp}$

In[20]:= **ver = StaticPlatePDE1 == StaticPlatePDE2**

Out[20]= True

In[21]:= **DynamicPlatePDE = D[w[x, y, t], {x, 4}] + 2D[w[x, y, t], {x, 2}, {y, 2}] +
D[w[x, y, t], {y, 4}] + (ρh)/Dp D[w[x, y, t], {t, 2}] == ρ[x, y, t]/D**

Out[21]= $\frac{\rho h w^{(0,0,2)}(x, y, t)}{Dp} + w^{(0,4,0)}(x, y, t) + 2 w^{(2,2,0)}(x, y, t) + w^{(4,0,0)}(x, y, t) == \frac{\rho(x, y, t)}{D}$

In[22]:= **DSolve[BiharmonicPDE, w[x, y], {x, y}]**

Out[22]= $DSolve[w^{(0,4)}(x, y) + 2 w^{(2,2)}(x, y) + w^{(4,0)}(x, y) == 0, w(x, y), \{x, y\}]$

In[23]:= **comment2 =**

"Η μέθοδος επιλύσεως της διδιάστατης διαρμονικής εξισώσεως με την εντολή DSolve δεν είναι επιτυχής, παρόλο που αυτή διαθέτει απλή κλειστή γενική λύση, η οποία και αναφέρεται αμέσως παρακάτω στην περίπτωση που είναι μια πραγματική συνάρτηση. Αυτό συμβαίνει απλά, επειδή η *Mathematica* δεν έχει προγραμματισθεί κατάλληλα";

In[24]:= **ws[x_, y_] = (x + i y) f[x + i y] + (x - i y) f[x - i y] + g[x + i y] + g[x - i y]**

Out[24]= $(x - i y) f(x - i y) + (x + i y) f(x + i y) + g(x - i y) + g(x + i y)$

In[25]:= **ver = BiharmonicPDE /. w → ws // Simplify**

Out[25]= True

In[26]:= **DataList = {E0 = 10⁶ N/m², ν = 0.32, h = 0.15 m}**

Out[26]= $\left\{ \frac{1000000 \text{ N}}{\text{m}^2}, 0.32, 0.15 \text{ m} \right\}$

In[27]:= **Dp = E0 * h³ / (12 (1 - ν²))**

Out[27]= 313.336 mN

In[28]:= **comment3 = "Η συνηθισμένη μονάδα της δυσκαμψίας πλάκας είναι N m.";**

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MA3 (ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE, ΔΙΑΡΜΟΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ, ΠΛΑΚΕΣ)

In[29]:= **Needs["Calculus`VectorAnalysis"]**

In[30]:= **SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]]**

Out[30]= Cartesian(x, y, z)

In[31]:= **LaplacePDE2 = Laplacian[u[x, y]] == 0**

Out[31]= $u^{(0,2)}(x, y) + u^{(2,0)}(x, y) == 0$

In[32]:= **LaplacePDE3 = Laplacian[u[x, y, z]] == 0**

Out[32]= $u^{(0,0,2)}(x, y, z) + u^{(0,2,0)}(x, y, z) + u^{(2,0,0)}(x, y, z) == 0$

In[33]:= **BiharmonicPDE2 = Biharmonic[u[x, y]] == 0**

Out[33]= $u^{(0,4)}(x, y) + 2 u^{(2,2)}(x, y) + u^{(4,0)}(x, y) == 0$

In[34]:= **BiharmonicPDE3 = Biharmonic[u[x, y, z]] == 0**

Out[34]= $u^{(0,0,4)}(x, y, z) + 2 u^{(0,2,2)}(x, y, z) + u^{(0,4,0)}(x, y, z) + 2 u^{(2,0,2)}(x, y, z) + 2 u^{(2,2,0)}(x, y, z) + u^{(4,0,0)}(x, y, z) == 0$

In[35]:= **comment4 = "Ναι, στην Τριδιάστατη Ελαστικότητα υπάρχουν συναρτήσεις που επαληθεύουν την εξίσωση του Laplace, π.χ. οι τέσσερις αρμονικές συναρτήσεις φ₀, φ₁, φ₂ και φ₃;"**

In[36]:= **StaticPlatePDE = Biharmonic[w[x, y]] == p[x, y] / D**

Out[36]= $w^{(0,4)}(x, y) + 2 w^{(2,2)}(x, y) + w^{(4,0)}(x, y) == \frac{p(x, y)}{D}$

In[37]:= **DynamicPlatePDE = Biharmonic[w[x, y, t]] == (p[x, y] - ρh D[p[x, y, t], {t, 2}]) / D**

Out[37]= $w^{(0,4,0)}(x, y, t) + 2 w^{(2,2,0)}(x, y, t) + w^{(4,0,0)}(x, y, t) == \frac{p(x, y) - \rho h p^{(0,0,2)}(x, y, t)}{D}$

In[38]:= **SetCoordinates[Spherical[ρ, θ, φ]]**

Out[38]= Spherical(ρ, θ, φ)

In[39]:= **LaplaceSphericalPDE = Laplacian[u[ρ, θ, φ]] == 0**

Out[39]= $\frac{1}{\rho^2} (\csc(\theta) (\sin(\theta) u^{(2,0,0)}(\rho, \theta, \phi) \rho^2 + 2 \sin(\theta) u^{(1,0,0)}(\rho, \theta, \phi) \rho + \csc(\theta) u^{(0,0,2)}(\rho, \theta, \phi) + \cos(\theta) u^{(0,1,0)}(\rho, \theta, \phi) + \sin(\theta) u^{(0,2,0)}(\rho, \theta, \phi)) == 0$

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MA4 (ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ, ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΑΛΩΔΙΟΥ)

In[40]:= CablePDE = D[u[x, t], {x, 2}] == 1/c² D[u[x, t], {t, 2}]

Out[40]= $u^{(2,0)}(x, t) == \frac{u^{(0,2)}(x, t)}{c^2}$

In[41]:= ProblemsList = {"Πρόβλημα εγκάρσιων ιδιοταλαντώσεων χορδής",
"Πρόβλημα αξονικών (ή διαμήκων) ιδιοταλαντώσεων ράβδου",
"Πρόβλημα στρεπτικών ιδιοταλαντώσεων ράβδου"};

In[42]:= comment5 = "Έχει προσεγγιστικά υποτεθεί πως το καλώδιο δεν έχει καθόλου δυσκαμψία.";

In[43]:= solc = DSolve[CablePDE, u[x, t], {x, t}] // PowerExpand

Out[43]= $\left\{ \left\{ u(x, t) \rightarrow c_1 \left[t + \frac{x}{c} \right] + c_2 \left[t - \frac{x}{c} \right] \right\} \right\}$

In[44]:= uc[x_, t_] = solc[[1, 1, 2]]

Out[44]= $c_1 \left[t + \frac{x}{c} \right] + c_2 \left[t - \frac{x}{c} \right]$

In[45]:= ver = CablePDE /. u → uc // Simplify

Out[45]= True

In[46]:= ListYes = {"Εξίσωση της χορδής ή του καλωδίου",
"Εξίσωση του Laplace", "Εξίσωση της τασικής συναρτήσεως του Prandtl"};

In[47]:= ListNo = {"Εξίσωση της διαχύσεως", "Εξίσωση της μεταγωγής-διαχύσεως",
"Εξίσωση της μεταγωγής-διαχύσεως-αποδομήσεως", "Διαρμονική εξίσωση",
"Στατική εξίσωση της πλάκας", "Δυναμική εξίσωση της πλάκας"};

In[48]:= CableBCs = {u[0, t] == 0, u[L, t] == 0}

Out[48]= {u(0, t) == 0, u(L, t) == 0}

In[49]:= uL[x_, y_] = us[x, y] /. c → i

Out[49]= $c_1 [i x + y] + c_2 [y - i x]$

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MA5 (ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΧΥΣΕΩΣ, ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ)

In[50]:= DiffusionPDE = D[u[x, t], {x, 2}] == (1/a²) D[u[x, t], t]

Out[50]= $u^{(2,0)}(x, t) == \frac{u^{(0,1)}(x, t)}{a^2}$

In[51]:= DiffusionPDE2 = D[u[x, y, t], {x, 2}] + D[u[x, y, t], {y, 2}] == (1/a²) D[u[x, y, t], t]

Out[51]= $u^{(0,2,0)}(x, y, t) + u^{(2,0,0)}(x, y, t) == \frac{u^{(0,0,1)}(x, y, t)}{a^2}$

```

In[52]:= DiffusionPDE3 =
          D[u[x, y, z, t], {x, 2}] + D[u[x, y, z, t], {y, 2}] + D[u[x, y, z, t], {z, 2}] == (1/a^2)D[u[x, y, z, t], t]

Out[52]=  $u^{(0,0,2,0)}(x, y, z, t) + u^{(0,2,0,0)}(x, y, z, t) + u^{(2,0,0,0)}(x, y, z, t) == \frac{u^{(0,0,0,1)}(x, y, z, t)}{a^2}$ 

In[53]:= u[x_, t_] = X[x] T[t]

Out[53]= T(t) X(x)

In[54]:= DiffusionPDE

Out[54]=  $T(t) X''(x) == \frac{X(x) T'(t)}{a^2}$ 

In[55]:= SeparatedDiffusionPDE = DiffusionPDE[[1]]/u[x, t] == DiffusionPDE[[2]]/u[x, t]

Out[55]=  $\frac{X''(x)}{X(x)} == \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}$ 

In[56]:= odex = X''[x] + p^2 X[x] == 0

Out[56]=  $X(x) p^2 + X''(x) == 0$ 

In[57]:= odet = T'[t] + a^2 p^2 T[t] == 0

Out[57]=  $a^2 T(t) p^2 + T'(t) == 0$ 

In[58]:= solx = DSolve[odex, X[x], x]

Out[58]= {{X(x) -> c1 cos(p x) + c2 sin(p x)}}

In[59]:= Xs[x_] = solx[[1, 1, 2]]

Out[59]= c1 cos(p x) + c2 sin(p x)

In[60]:= verx = odex /. X -> Xs // Simplify

Out[60]= True

In[61]:= solt = DSolve[odet, T[t], t]

Out[61]= {{T(t) -> e^{-a^2 p^2 t} c1}}

In[62]:= Ts[t_] = solt[[1, 1, 2]]

Out[62]= e^{-a^2 p^2 t} c1

In[63]:= vert = odet /. T -> Ts

Out[63]= True

In[64]:= DiffusionProblemsList = {"Μετάδοση Θερμότητας", "Εδαφομηχανική στη Θεωρία Στερεοποιήσεως",
                                   "Περιβαλλοντική Μηχανική στη διάχυση ρύπου"};

In[65]:= HeatTransferDirichletBCs = {X[0] == Θ1, X[L] == Θ2}

Out[65]= {X(0) == Θ1, X(L) == Θ2}

In[66]:= HeatTransferNeumannBCs = {X'[0] == 0, X'[L] == 0}

Out[66]= {X'(0) == 0, X'(L) == 0}

```

In[67]:= **comment6** = "Η συνοριακή συνθήκη Neumann (με μηδέν δεξιά) στο παρόν πρόβλημα Μεταδόσεως Θερμότητας δηλώνει τέλεια πλευρική μόνωση του τοίχου.;"

In[68]:= **comment7** = "Ναι, από φυσικής απόψεως είναι δυνατόν. Εάν η μία πλευρά του τοίχου έχει καθορισμένη θερμοκρασία, ενώ η άλλη έχει τέλεια μόνωση, τότε στην πρώτη πλευρά θα ισχύει συνοριακή συνθήκη Dirichlet, ενώ στη δεύτερη συνοριακή συνθήκη Neumann.;"

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MA6 (ΧΩΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ, ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ)

In[69]:= **BeamPDE** = $EID[w[x, t], \{x, 4\}] + \rho A D[w[x, t], \{t, 2\}] == 0$

Out[69]= $\rho A w^{(0,2)}(x, t) + EI w^{(4,0)}(x, t) == 0$

In[70]:= **w[x_, t_] = X[x] T[t];**

In[71]:= **BeamPDE**

Out[71]= $\rho A X(x) T''(t) + EI T(t) X^{(4)}(x) == 0$

In[72]:= **SeparatedBeamPDE** = **BeamPDE[[1]]/w[x, t] == 0 // Simplify**

Out[72]= $\frac{\rho A T''(t)}{T(t)} + \frac{EI X^{(4)}(x)}{X(x)} == 0$

In[73]:= **BeamODEx** = $X''''[x] - \beta^4 X[x] == 0;$

In[74]:= **BeamODEt** = $T''[t] + \omega^2 T[t] == 0;$

In[75]:= **comment8** =

"Η σταθερά διαχωρισμού λ επιλέχθηκε εδώ σαν $\lambda = -\rho A \omega^2$, έτσι ώστε η πιο πάνω χρονική διαφορική εξίσωση BeamODEt να έχει τριγωνομετρικές και όχι υπερβολικές λύσεις. Οι υπερβολικές λύσεις είναι προφανώς εντελώς απαράδεκτες σε καμπτικές ιδιοταλαντώσεις και γενικότερα σε ελεύθερες καμπτικές ταλαντώσεις δοκού. Σημειώνεται επίσης ότι στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση BeamODEx έχουμε $\beta^4 = \rho A \omega^2 / (EI)$."

In[76]:= **solx** = **DSolve[BeamODEx, X[x], x]**

Out[76]= $\{\{X(x) \rightarrow e^{-x\beta} c_2 + e^{x\beta} c_4 + c_1 \cos(x\beta) + c_3 \sin(x\beta)\}\}$

In[77]:= **Xs1[x_] = solx[[1, 1, 2]]**

Out[77]= $e^{-x\beta} c_2 + e^{x\beta} c_4 + c_1 \cos(x\beta) + c_3 \sin(x\beta)$

In[78]:= **Xs2[x_] = Xs1[x] // ExpToTrig // Simplify**

Out[78]= $c_1 \cos(x\beta) + (c_2 + c_4) \cosh(x\beta) + c_3 \sin(x\beta) + (c_4 - c_2) \sinh(x\beta)$

In[79]:= **Xs[x_] = A Cosh[βx] + B Sinh[βx] + C Cos[βx] + D Sin[βx]**

Out[79]= $C \cos(x\beta) + A \cosh(x\beta) + D \sin(x\beta) + B \sinh(x\beta)$

In[80]:= **ver** = **BeamODEx /. X -> Xs // Simplify**

Out[80]= True

In[81]:= **CantileverBCs** = $\{X''[0] == 0, X'''[0] == 0, X[L] == 0, X'[L] == 0\};$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMIII-MB

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MB1 (Εξίσωση του Κύματος): Με τα συνηθισμένα σύμβολα, χωρίς τη χρήση του συμβόλου της μερικής παραγωγίσεως ∂ (χωρίς τη χρήση παλέτας) και επίσης χωρίς τη χρήση του πακέτου Vector Analysis ζητούνται: (α) Η μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος WavePDE1 (με τη χωρική παράγωγο αριστερά και τη χρονική δεξιά) καθώς και οι σχετικές διδιάστατη εξίσωση και τριδιάστατη εξίσωση WavePDE2 και WavePDE3 αντίστοιχα. (β) Για τη μονοδιάστατη εξίσωση WavePDE1 ζητούνται όλοι οι χαρακτηρισμοί της σε λίστα CharWavePDE1. (γ) Επίσης ζητούνται σε λίστα WhereWavePDE1Appears οι εξισώσεις (με λέξεις!) ή/και τα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού όπου αυτή απαντάται. (δ) Σε σχόλιο comment1 ζητείται να αναφερθεί σε ποιο πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού στις Θεμελιώσεις παρουσιάζεται η μη ομογενής μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος. (ε) Να βρεθούν η λύση sol της μονοδιάστατης εξισώσεως του κύματος WavePDE1 (με χρήση και της εντολής PowerExpand και η σχετική συνάρτηση $u_s(x, t)$). Να γίνει επίσης επαλήθευση ver της λύσεως αυτής με απλοποίηση του αποτελέσματος. (στ) Για την ίδια εξίσωση WavePDE1 ζητείται η αντίστοιχη μετασχηματισμένη κατά Laplace εξίσωση LaplaceTransformedWavePDE1. (ζ) Στη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών ζητείται να ορισθεί κατάλληλη συνάρτηση $u_{sv}(x, t)$ για το χωρισμό των μεταβλητών x και t και να βρεθεί η σχετική εξίσωση SeparatedWavePDE1. Στη συνέχεια, διαιρώντας και τα δύο μέλη (χωριστά!) της εξισώσεως SeparatedWavePDE1 με τη συνάρτηση $u_{sv}(x, t)$, να γίνει και ο χωρισμός των μεταβλητών με νέα εξίσωση τη SeparatedWavePDE1a. (η) Να γραφούν κατευθείαν (όχι να υπολογισθούν!) οι σχετικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις odex (για τη χωρική μεταβλητή x) και odet (για τη χρονική μεταβλητή t). Τέλος ζητείται να υπολογισθούν και οι λύσεις τους solx και solt αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MB2 (Εδαφομηχανική: Διήθηση): Στην Εδαφομηχανική (Soil Mechanics) θεωρούμε το φαινόμενο της διήθησεως (seepage) σε ανισότροπο έδαφος με συντελεστές διαπερατότητας του εδάφους k_x οριζόντια και k_z κατακόρυφα. Με το συνηθισμένο συμβολισμό ζητούνται: (α) Να γραφεί η σχετική διδιάστατη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους AnisotropicSoilSeepagePDE ως προς το υδραυλικό φορτίο (ή διαφορά πιεζομετρικής στάθμης) $h(x, z)$ και να βρεθεί η λύση της sol. (β) Να ορισθεί η σχετική συνάρτηση $h_s(x, z)$ και να γίνει η επαλήθευση ver ότι πρόκειται για λύση της πιο πάνω εξισώσεως (με απλοποίηση του αποτελέσματος). (γ) Να ορισθεί κατάλληλη συνάρτηση για τον προσδιορισμό της γενικής λύσεως της διαφορικής εξισώσεως AnisotropicSoilSeepagePDE μέσω χαρακτηριστικής εξισώσεως. (δ) Στη συνέχεια να προσδιορισθεί η χαρακτηριστική αυτή εξίσωση CharEq (δυστυχώς εδώ πολλαπλασιασμένη με όρο που να περιέχει παράγωγο της συναρτήσεως που δοκιμάζουμε!) με απλοποίηση του αποτελέσματος. (ε) Να βρεθούν οι δύο λύσεις solm της χαρακτηριστικής εξισώσεως CharEq και μετά να ορισθούν χωριστά μ_1 και μ_2 σε λίστα με δύο στοιχεία. (στ) Να ορισθεί κατάλληλη συνάρτηση h_g για τη γενική λύση της εξισώσεως AnisotropicSoilSeepagePDE και να γίνει επαλήθευσή της (με απλοποίηση του αποτελέσματος). (ζ) Να αναφερθεί σε σχόλιο DarcyLaw ο νόμος του Darcy (1856) στην Εδαφομηχανική. (η) Τέλος από τη συνάρτηση h_g να υπολογισθούν οι συνιστώσες v_x και v_z της ταχύτητας του νερού μέσα στο έδαφος.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MB3 (Περιβαλλοντική Υδραυλική: Εξίσωση Μεταγωγής-Διαχύσεως): Σε μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα ταυτόχρονα (i) με μεταγωγή και (ii) με διάχυση του ρύπου ζητούνται: (α) Με τα συνηθισμένα σύμβολα η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ConvectionDiffusionPDE. (β) Σε λίστα CharConvectionDiffusionPDE οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της. (γ) Η κατευθείαν γραφή της εξισώσεως της μεταγωγής ConvectionPDEa καθώς και εναλλακτικά η εύρεσή της ConvectionPDEb από τη γενικότερη εξίσωση ConvectionDiffusionPDE. (δ) Η σύγκριση comparison1 των αποτελεσμάτων με τη γραφή και της εξόδου της Mathematica. (ε) Η κατευθείαν γραφή της εξισώσεως της διαχύσεως DiffusionPDEa καθώς και η εύρεσή της DiffusionPDEb από την εξίσωση ConvectionDiffusionPDE. (στ) Η σύγκριση comparison2 των αποτελεσμάτων πάλι με τη γραφή και της εξόδου της Mathematica. (ζ) Προσπάθεια άμεσης επιλύσεως της εξισώσεως DiffusionPDEa και το σχετικό λεπτομερές σχόλιο comment2 για την

επιτυχία ή μη της προσπάθειας αυτής και το σχετικό λόγο. (η) Τέλος για την αρχική-γενική εξίσωση ConvectionDiffusionPDE ζητείται και η αντίστοιχη μετασχηματισμένη κατά Laplace εξίσωση LaplaceTransformedConvectionDiffusionPDE.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜΒ4 (Μηχανική των Υλικών: Επίπεδη Ελαστικότητα: Τασική Συνάρτηση του Airy): Στη Μηχανική των Υλικών (Mechanics of Materials, που καλείται επίσης και Αντοχή των Υλικών: Strength of Materials) θεωρούμε το επίπεδο ελαστικό πρόβλημα (χωρίς όμως δυνάμεις μάζας). Ζητούνται: (α) Οι σχετικές εξισώσεις ισορροπίας PlaneElasticityEquilibriumEquations. (β) Η εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων StressWrittenPlaneElasticityCompatibilityEquation γραμμένη όμως εδώ στην τελική της και απλοποιημένη μορφή με τάσεις. (γ) Με βάση τα δύο προηγούμενα ερωτήματα το σχετικό σύστημα εξισώσεων PlaneElasticitySystemOfEquations σε λίστα με τρία ακριβώς στοιχεία. Τώρα με τη βοήθεια της τασικής συναρτήσεως (ή τασεοσυναρτήσεως, stress function) του Airy ζητούνται (δ) οι ορθές τάσεις και (ε) η διατμητική τάση. (στ) Έλεγχος της ισχύος του συστήματος PlaneElasticitySystemOfEquations. (ζ) Τώρα να γραφούν σε λίστα AiryStressFunctionMainAdvantages τα δύο βασικά πλεονεκτήματα της τασικής συναρτήσεως του Airy. (η) Τέλος να γραφούν σε αντίστοιχη λίστα AiryStressFunctionMainDisadvantages και τα τρία βασικά μειονεκτήματα της ίδιας συναρτήσεως.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜΒ5 (Δυναμική των Κατασκευών: Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Δοκού): Θεωρούμε μια συνήθη δοκό στη Δυναμική των Κατασκευών. Με τη χρήση των συνηθισμένων συμβόλων ζητούνται: (α) Οι συνοριακές συνθήκες BoundaryConditions1 για τη σχετική χωρική συνήθη διαφορική εξίσωση σε αμφίπακτη δοκό. Ανάλογα BoundaryConditions2 για αμφιέριστη δοκό. Επίσης BoundaryConditions3 για δοκό με πάκτωση αριστερά και κύλιση δεξιά. (β) Στη συνέχεια για πρόβολο με πάκτωση δεξιά, για δοκό με άρθρωση αριστερά και ελεύθερο άκρο δεξιά και τέλος για απόλυτα ελεύθερη δοκό. (γ) Η σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους BeamPDE χωρίς εξωτερική φόρτιση. (δ) Η συνάρτηση $v_s(x, t)$ για το χωρισμό των μεταβλητών με τη χρονική συνάρτηση να υποτίθεται εξαρχής της μορφής $\cos(\omega t - \alpha)$ και η σχετική συνήθης διαφορική εξίσωση BeamODEx0 για τη χωρική συνάρτηση $X(x)$. (ε) Από την εξίσωση BeamODEx0 η τελική εξίσωση BeamODEx για την ίδια συνάρτηση $X(x)$. (στ) Η κατευθείαν γραφή της λύσεως $X_s(x)$ της εξισώσεως BeamODEx σε υπερβολική-τριγωνομετρική μορφή. (ζ) Για δοκό με πάκτωση-κύλιση στα άκρα της με τη χρήση της συναρτήσεως $X_s(x)$ και των συνοριακών συνθηκών BoundaryConditions3 η εύρεση του συστήματος των σχετικών γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων για τις σταθερές στη λύση $X_s(x)$. (η) Σε ένα λεπτομερές σχόλιο procedure (σε πενήντα περίπου λέξεις) η περιγραφή της διαδικασίας για την εύρεση των ιδιοτιμών β_n και στη συνέχεια και των ιδιοσυχνοτήτων ω_n της παρούσας δοκού.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜΒ6 (Δυναμική των Κατασκευών: Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Δοκού): Για τη δοκό με πάκτωση αριστερά και κύλιση δεξιά του προηγούμενου θέματος ζητούνται επίσης: (α) Η κατευθείαν γραφή του μητρώου BeamMatrix με τους συντελεστές των αγνώστων συντελεστών της λύσεως $X_s(x)$ και από αυτό η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση σε μορφή οριζουσας DetBeamMatrix ίσης με το μηδέν (με απλοποίηση του αποτελέσματος). (β) Με διαίρεση με κατάλληλο γινόμενο η εύρεση της χαρακτηριστικής εξισώσεως BeamCharEq στην τελική της μορφή. Σημειώνεται ότι από την εξίσωση αυτή (από τις ρίζες της) μπορούν τελικά να προκύψουν οι ιδιοσυχνότητες των ιδιοταλαντώσεων της δοκού. (γ) Η σχεδίαση σε ενιαίο σχήμα των δύο σχετικών συναρτήσεων $\tan h z$ και $\tan z$ με $0 \leq z \leq 10$. (δ) Οι αρχικές προσεγγίσεις z_n των αδιάστατων ποσοτήτων $\beta_n L$ (με $z_n = \beta_n L$) στην παρούσα δοκό με β_n τις σχετικές ιδιοτιμές σε μορφή συναρτήσεως και στη συνέχεια (ε) σχετικός πίνακας Table1 με 10 στοιχεία και ο αντίστοιχος πίνακας αριθμητικών τιμών Table1a με ακρίβεια 30 ψηφία. (στ) Πίνακας Table2 των αριθμητικών τιμών z_n με τη χρήση της εντολής FindRoot και ακρίβεια εργασίας 30 ψηφία. (ζ) Πίνακας Table2a με στοιχεία μόνο τις αριθμητικές τιμές των λύσεων z_n . (η) Πίνακας Table3 με στοιχεία τις διαφορές των τελικών αριθμητικών τιμών z_n του πίνακα Table2a και των αρχικών προσεγγίσεών τους του πίνακα Table1a. Σε σχετικό σχόλιο AccuracyComment, τι ακριβώς παρατηρείται από τις διαφορές του πίνακα Table3; (θ) Τέλος ποιες είναι οι ίδιες οι ιδιοσυχνότητες ω_n της δοκού με μήκος L , γραμμική πυκνότητα ρA και δυσκαμψία EI ;

■ Notebook EMIII-MB

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMIII-MB

(ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMIII-MB 1 ΕΩΣ EMIII-MB 6)

In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MB 1 (ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ)

In[2]:= WavePDE1 = D[u[x, t], {x, 2}] == (1/c²) D[u[x, t], {t, 2}]

Out[2]= $u^{(2,0)}(x, t) == \frac{u^{(0,2)}(x, t)}{c^2}$

In[3]:= WavePDE2 = D[u[x, y, t], {x, 2}] + D[u[x, y, t], {y, 2}] == (1/c²) D[u[x, y, t], {t, 2}]

Out[3]= $u^{(0,2,0)}(x, y, t) + u^{(2,0,0)}(x, y, t) == \frac{u^{(0,0,2)}(x, y, t)}{c^2}$

In[4]:= WavePDE3 =

D[u[x, y, z, t], {x, 2}] + D[u[x, y, z, t], {y, 2}] + D[u[x, y, z, t], {z, 2}] == (1/c²) D[u[x, y, z, t], {t, 2}]

Out[4]= $u^{(0,0,2,0)}(x, y, z, t) + u^{(0,2,0,0)}(x, y, z, t) + u^{(2,0,0,0)}(x, y, z, t) == \frac{u^{(0,0,0,2)}(x, y, z, t)}{c^2}$

In[5]:= CharWavePDE1 = {"Διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους",
"Δευτέρας τάξεως", "Γραμμική", "Ομογενής", "Με σταθερούς συντελεστές",
"Υπερβολικού τύπου", "Με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές τις x και t"};

In[6]:= WhereWavePDE1Appears = {"Εξίσωση της χορδής", "Εξίσωση του καλωδίου",
"Αξονικές ταλαντώσεις ράβδου", "Στρεπτικές ταλαντώσεις ράβδου"};

In[7]:= comment1 = "Η μη ομογενής μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος παρουσιάζεται σε
εξαναγκασμένες αξονικές (ή διαμήκειες) ταλαντώσεις πασσάλων στις θεμελιώσεις";

In[8]:= sol = DSolve[WavePDE1, u[x, t], {x, t}] // PowerExpand

Out[8]= $\left\{ \left\{ u(x, t) \rightarrow c_1 \left[t + \frac{x}{c} \right] + c_2 \left[t - \frac{x}{c} \right] \right\} \right\}$

In[9]:= us[x_, t_] = sol[[1, 1, 2]]

Out[9]= $c_1 \left[t + \frac{x}{c} \right] + c_2 \left[t - \frac{x}{c} \right]$

In[10]:= ver = WavePDE1 /. u → us // Simplify

Out[10]= True

In[11]:= LaplaceTransformedWavePDE1 = LaplaceTransform[WavePDE1, t, s]

Out[11]= $\text{LaplaceTransform}[u^{(2,0)}(x, t), t, s] == \frac{\text{LaplaceTransform}[u(x, t), t, s] s^2 - u(x, 0) s - u^{(0,1)}(x, 0)}{c^2}$

In[12]:= usv[x_, t_] := X[x] T[t]

In[13]:= **SeparatedWavePDE1 = WavePDE1 /. u -> usv**

$$\text{Out[13]} = T(t) X''(x) == \frac{X(x) T''(t)}{c^2}$$

In[14]:= **SeparatedWavePDE1a = SeparatedWavePDE1[[1]] / usv[x, t] == SeparatedWavePDE1[[2]] / usv[x, t]**

$$\text{Out[14]} = \frac{X''(x)}{X(x)} == \frac{T''(t)}{c^2 T(t)}$$

In[15]:= **odex = X''[x] + (\omega c)^2 X[x] == 0**

$$\text{Out[15]} = c^2 X(x) \omega^2 + X''(x) == 0$$

In[16]:= **odet = T''[t] + \omega^2 T[t] == 0**

$$\text{Out[16]} = T(t) \omega^2 + T''(t) == 0$$

In[17]:= **solx = DSolve[odex, X[x], x]**

$$\text{Out[17]} = \{\{X(x) \rightarrow c_1 \cos(c x \omega) + c_2 \sin(c x \omega)\}\}$$

In[18]:= **solt = DSolve[odet, T[t], t]**

$$\text{Out[18]} = \{\{T(t) \rightarrow c_1 \cos(t \omega) + c_2 \sin(t \omega)\}\}$$

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MB2 (ΕΔΑΦΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΔΙΗΘΗΣΗ)

In[19]:= **AnisotropicSoilSeepagePDE = kx D[h[x, z], {x, 2}] + kz D[h[x, z], {z, 2}] == 0**

$$\text{Out[19]} = kz h^{(0,2)}(x, z) + kx h^{(2,0)}(x, z) == 0$$

In[20]:= **sol = DSolve[AnisotropicSoilSeepagePDE, h[x, z], {x, z}]**

$$\text{Out[20]} = \{\{h(x, z) \rightarrow c_1 \left[\frac{\sqrt{-kx kz} x}{kx} + z \right] + c_2 \left[z - \frac{\sqrt{-kx kz} x}{kx} \right]\}\}$$

In[21]:= **hs[x_, z_] = sol[[1, 1, 2]]**

$$\text{Out[21]} = c_1 \left[\frac{\sqrt{-kx kz} x}{kx} + z \right] + c_2 \left[z - \frac{\sqrt{-kx kz} x}{kx} \right]$$

In[22]:= **ver = AnisotropicSoilSeepagePDE /. h -> hs // Simplify**

$$\text{Out[22]} = \text{True}$$

In[23]:= **h0[x_, z_] := \phi[x + \mu z]**

In[24]:= **CharEq = AnisotropicSoilSeepagePDE /. h -> h0 // Simplify**

$$\text{Out[24]} = (kz \mu^2 + kx) \phi''(x + z \mu) == 0$$

In[25]:= **sol\mu = Solve[CharEq, \mu]**

InverseFunction::ifun : Inverse functions are being used. Values may be lost for multivalued inverses.

$$\text{Out[25]} = \left\{ \left\{ \mu \rightarrow -\frac{i \sqrt{kx}}{\sqrt{kz}} \right\}, \left\{ \mu \rightarrow \frac{i \sqrt{kx}}{\sqrt{kz}} \right\}, \left\{ \mu \rightarrow \frac{\text{InverseFunction}[\phi'', 1, 1][0] - x}{z} \right\} \right\}$$

In[26]:= $\{\mu1 = \text{sol}\mu[[1, 1, 2]], \mu2 = \text{sol}\mu[[2, 1, 2]]\}$

$$\text{Out}[26]= \left\{ -\frac{i\sqrt{kx}}{\sqrt{kz}}, \frac{i\sqrt{kx}}{\sqrt{kz}} \right\}$$

In[27]:= $\text{hg}[x_, z_] = \phi1[x + \mu1 z] + \phi2[x + \mu2 z]$

$$\text{Out}[27]= \phi1\left(x - \frac{i\sqrt{kx} z}{\sqrt{kz}}\right) + \phi2\left(x + \frac{i\sqrt{kx} z}{\sqrt{kz}}\right)$$

In[28]:= $\text{ver} = \text{AnisotropicSoilSeepagePDE} /. h \rightarrow \text{hg} // \text{Simplify}$

Out[28]= True

In[29]:= **DarcyLaw** = "Ο πειραματικός νόμος του Darcy (1856) στην Εδαφομηχανική για το φαινόμενο της διηθήσεως μας λέει απλά ότι οι συνιστώσες v_x και v_z της φαινομενικής μέσης ταχύτητας (της παροχής ανά μονάδα επιφανείας του εδάφους, που συχνά καλείται και ταχύτητα Darcy) του νερού που διηθείται μέσα στο έδαφος είναι ανάλογες των αντίστοιχων υδραυλικών κλίσεων (ή βαθμίδων) i_x και i_z , δηλαδή $v_x = ki_x$ και $v_z = ki_z$. Ο συντελεστής αναλογίας k είναι ο συντελεστής διαπερατότητας του εδάφους και εξαρτάται από το ίδιο το έδαφος. Για ανισότροπο έδαφος οι τιμές του k είναι διαφορετικές σε κάθε κατεύθυνση.";

In[30]:= $\{vx[x_, z_] = -kx D[\text{hg}[x, z], x], vz[x_, z_] = -kz D[\text{hg}[x, z], z]\} // \text{Simplify}$

$$\text{Out}[30]= \left\{ -kx \left(\phi1' \left(x - \frac{i\sqrt{kx} z}{\sqrt{kz}} \right) + \phi2' \left(x + \frac{i\sqrt{kx} z}{\sqrt{kz}} \right) \right), i\sqrt{kx} \sqrt{kz} \left(\phi1' \left(x - \frac{i\sqrt{kx} z}{\sqrt{kz}} \right) - \phi2' \left(x + \frac{i\sqrt{kx} z}{\sqrt{kz}} \right) \right) \right\}$$

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MB3 (ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ: ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕΤΑΓΩΓΗΣ-ΔΙΑΧΥΣΕΩΣ)

In[31]:= **ConvectionDiffusionPDE** = $D[c[x, t], t] + V D[c[x, t], x] == Dm D[c[x, t], \{x, 2\}]$

$$\text{Out}[31]= c^{(0,1)}(x, t) + V c^{(1,0)}(x, t) == Dm c^{(2,0)}(x, t)$$

In[32]:= **CharConvectionDiffusionPDE** = {"Διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους", "Δευτέρας τάξεως", "Γραμμική", "Ομογενής", "Με σταθερούς συντελεστές", "Με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές τις x και t ", "Παραβολικού τύπου"};

In[33]:= **ConvectionPDEa** = $D[c[x, t], t] + V D[c[x, t], x] == 0$

$$\text{Out}[33]= c^{(0,1)}(x, t) + V c^{(1,0)}(x, t) == 0$$

In[34]:= **ConvectionPDEb** = **ConvectionDiffusionPDE** /. $Dm \rightarrow 0$

$$\text{Out}[34]= c^{(0,1)}(x, t) + V c^{(1,0)}(x, t) == 0$$

In[35]:= **comparison 1** = **ConvectionPDEa** == **ConvectionPDEb**

Out[35]= True

In[36]:= **DiffusionPDEa** = $D[c[x, t], t] == Dm D[c[x, t], \{x, 2\}]$

$$\text{Out}[36]= c^{(0,1)}(x, t) == Dm c^{(2,0)}(x, t)$$

In[37]:= **DiffusionPDEb** = **ConvectionDiffusionPDE** /. $V \rightarrow 0$

$$\text{Out}[37]= c^{(0,1)}(x, t) == Dm c^{(2,0)}(x, t)$$

In[38]:= comparison2 = DiffusionPDEa == DiffusionPDEb

Out[38]= True

In[39]:= DSolve[DiffusionPDEa, c[x, t], {x, t}]

Out[39]= DSolve[c^(0,1)(x, t) == Dm c^(2,0)(x, t), c(x, t), {x, t}]

In[40]:= comment2 = "Η εντολή DSolve δε μπόρεσε να λύσει την
παρούσα μονοδιάστατη εξίσωση της διαχύσεως DiffusionPDEa, απέτυχε,
επειδή η εξίσωση αυτή δε διαθέτει λύση σε απλή αναλυτική μορφή";

In[41]:= LaplaceTransformedConvectionDiffusionPDE = LaplaceTransform[ConvectionDiffusionPDE, t, s]

Out[41]= -c(x, 0) + s LaplaceTransform[c(x, t), t, s] + V LaplaceTransform[c^(1,0)(x, t), t, s] ==
Dm LaplaceTransform[c^(2,0)(x, t), t, s]

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MB4 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΕΠΙΠΕΔΗ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ: ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ AIRY)

In[42]:= PlaneElasticityEquilibriumEquations =

$$\{D[\sigma x[x, y], x] + D[\tau xy[x, y], y] == 0, D[\tau xy[x, y], x] + D[\sigma y[x, y], y] == 0\}$$

Out[42]= {\tau xy^(0,1)(x, y) + \sigma x^(1,0)(x, y) == 0, \sigma y^(0,1)(x, y) + \tau xy^(1,0)(x, y) == 0}

In[43]:= StressWrittenPlaneElasticityCompatibilityEquation =

$$D[\sigma x[x, y] + \sigma y[x, y], \{x, 2\}] + D[\sigma x[x, y] + \sigma y[x, y], \{y, 2\}] == 0$$

Out[43]= \sigma x^(0,2)(x, y) + \sigma y^(0,2)(x, y) + \sigma x^(2,0)(x, y) + \sigma y^(2,0)(x, y) == 0

In[44]:= PlaneElasticitySystemOfEquations = {PlaneElasticityEquilibriumEquations,
StressWrittenPlaneElasticityCompatibilityEquation} // Flatten

Out[44]= {\tau xy^(0,1)(x, y) + \sigma x^(1,0)(x, y) == 0, \sigma y^(0,1)(x, y) + \tau xy^(1,0)(x, y) == 0,
\sigma x^(0,2)(x, y) + \sigma y^(0,2)(x, y) + \sigma x^(2,0)(x, y) + \sigma y^(2,0)(x, y) == 0}

In[45]:= \sigma x[x_, y_] = D[A[x, y], \{y, 2\}]

Out[45]= A^(0,2)(x, y)

In[46]:= \sigma y[x_, y_] = D[A[x, y], \{x, 2\}]

Out[46]= A^(2,0)(x, y)

In[47]:= \tau xy[x_, y_] = -D[A[x, y], x, y]

Out[47]= -A^(1,1)(x, y)

In[48]:= PlaneElasticitySystemOfEquations

Out[48]= {True, True, A^(0,4)(x, y) + 2 A^(2,2)(x, y) + A^(4,0)(x, y) == 0}

In[49]:= AiryStressFunctionMainAdvantages =

{\"Πετύχαμε να αναγάγουμε ένα σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων με μερικές
παραγώγους σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους\",
\"Μειώσαμε επίσης τον αριθμό των αγνώστων συναρτήσεων από τρεις σε μία.\"};

In[50]:= **AiryStressFunctionMainDisadvantages =**
 {"Η τασική συνάρτηση του Airy δεν έχει φυσική σημασία.", "Η σχετική διαφορική εξίσωση
 με μερικές παραγώγους, η διαρμονική εξίσωση, είναι τώρα τετάρτης τάξεως",
 "Με την τασική συνάρτηση του Airy δυσκολεύεται η δήλωση των συνοριακών συνθηκών."};

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MB5 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ)

In[51]:= **BoundaryConditions1 = {X[0] == 0, X'[0] == 0, X[L] == 0, X'[L] == 0}** (* Αμφίπακτη δοκός *)

Out[51]= {X(0) == 0, X'(0) == 0, X(L) == 0, X'(L) == 0}

In[52]:= **BoundaryConditions2 = {X[0] == 0, X''[0] == 0, X[L] == 0, X''[L] == 0}** (* Αμφιέριστη δοκός *)

Out[52]= {X(0) == 0, X''(0) == 0, X(L) == 0, X''(L) == 0}

In[53]:= **BoundaryConditions3 = {X[0] == 0, X'[0] == 0, X[L] == 0, X''[L] == 0}**
 (* Δοκός με πάκτωση αριστερά και κύλιση δεξιά *)

Out[53]= {X(0) == 0, X'(0) == 0, X(L) == 0, X''(L) == 0}

In[54]:= **BoundaryConditions4 = {X''[0] == 0, X'''[0] == 0, X[L] == 0, X'[L] == 0}**
 (* Πρόβολος με πάκτωση δεξιά *)

Out[54]= {X''(0) == 0, X'''(0) == 0, X(L) == 0, X'(L) == 0}

In[55]:= **BoundaryConditions5 = {X[0] == 0, X''[0] == 0, X''[L] == 0, X'''[L] == 0}**
 (* Δοκός με άρθρωση αριστερά και ελεύθερο άκρο δεξιά *)

Out[55]= {X(0) == 0, X''(0) == 0, X''(L) == 0, X'''(L) == 0}

In[56]:= **BoundaryConditions6 =**
{X''[0] == 0, X'''[0] == 0, X''[L] == 0, X'''[L] == 0} (* Απόλυτα ελεύθερη δοκός *)

Out[56]= {X''(0) == 0, X'''(0) == 0, X''(L) == 0, X'''(L) == 0}

In[57]:= **BeamPDE = EID[v[x, t], {x, 4}] + ρA D[v[x, t], {t, 2}] == 0**

Out[57]= $\rho A v^{(0,2)}(x, t) + EI v^{(4,0)}(x, t) == 0$

In[58]:= **vs[x_, t_] = X[x] Cos[ω t - α]**

Out[58]= $\cos(\alpha - t\omega) X(x)$

In[59]:= **BeamODEx0 = BeamPDE /. v -> vs // Simplify**

Out[59]= $\cos(\alpha - t\omega) (EI X^{(4)}(x) - \rho A \omega^2 X(x)) == 0$

In[60]:= **BeamODEx = BeamODEx0[[1, 2]] == 0**

Out[60]= $EI X^{(4)}(x) - \rho A \omega^2 X(x) == 0$

In[61]:= **Xs[x_] = A Cosh[β x] + B Sinh[β x] + C Cos[β x] + D Sin[β x]**

Out[61]= $C \cos(x\beta) + A \cosh(x\beta) + D \sin(x\beta) + B \sinh(x\beta)$

In[62]:= **BoundaryConditions3a = BoundaryConditions3 /. X -> Xs**

Out[62]= {A + C == 0, B β + D β == 0, C cos(L β) + A cosh(L β) + D sin(L β) + B sinh(L β) == 0, -C cos(L β) β² + A cosh(L β) β² - D sin(L β) β² + B sinh(L β) β² == 0}

In[63]:= **procedure =**

"Πρέπει να σχηματισθεί η ορίζουσα των συντελεστών των σταθερών A, B, C και D και να τεθεί ίση με το μηδέν. (Αυτό γίνεται αμέσως πιο κάτω.) Έτσι θα βρεθεί η χαρακτηριστική εξίσωση για τον προσδιορισμό της βοηθητικής σταθεράς, της ιδιοτιμής β. Από την εξίσωση αυτή, που είναι μια υπερβατική εξίσωση, μπορούν να προσδιορισθούν, συνήθως μόνο αριθμητικά, οι ιδιοτιμές β_n και στη συνέχεια από αυτές οι ιδιοσυχνότητες της δοκού ω_n = β_n²[EI/(ρA)]^{1/2}. (Οι επτά πρώτες από αυτές υπολογίζονται και παρουσιάζονται στο τέλος του notebook.) Για το λόγο αυτό η χαρακτηριστική αυτή εξίσωση καλείται συχνά *εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων* της δοκού."

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MB6 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ)

In[64]:= **BeamMatrix = {{1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 1}, {Cosh[z], Sinh[z], Cos[z], Sin[z]}, {Cosh[z], Sinh[z], -Cos[z], -Sin[z]}}; BeamMatrix // MatrixForm**

Out[64]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(z) & \sinh(z) & \cos(z) & \sin(z) \\ \cosh(z) & \sinh(z) & -\cos(z) & -\sin(z) \end{pmatrix}$$

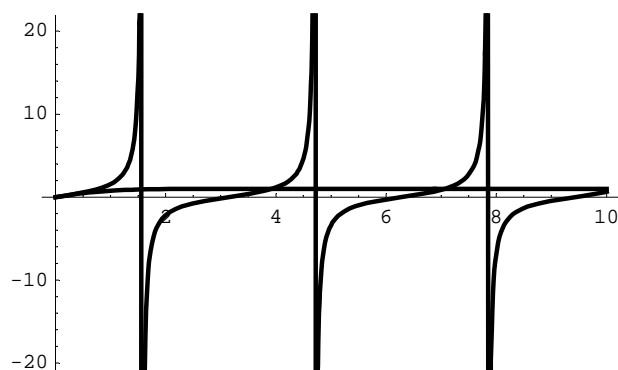
In[65]:= **DetBeamMatrix = Det[BeamMatrix] == 0 // Simplify**

Out[65]= 2 cosh(z) sin(z) == 2 cos(z) sinh(z)

In[66]:= **BeamCharEq = DetBeamMatrix[[1]] / (2 Cosh[z] Cos[z]) == DetBeamMatrix[[2]] / (2 Cosh[z] Cos[z])**

Out[66]= tan(z) == tanh(z)

In[67]:= **Plot[{Tanh[z], Tan[z]}, {z, 0, 10}, PlotStyle -> Thickness[0.008]];**



In[68]:= **z[n_] = (4 n + 1) π / 4;**

In[69]:= **Table1 = Table[z[n], {n, 1, 10}]**

Out[69]= { 5π / 4, 9π / 4, 13π / 4, 17π / 4, 21π / 4, 25π / 4, 29π / 4, 33π / 4, 37π / 4, 41π / 4 }

In[70]:= **Table1a = N[Table1, 30]**

Out[70]= {3.92699081698724154807830422910, 7.06858347057703478654094761238,
10.2101761241668280250035909957, 13.3517687777566212634662343789,
16.4933614313464145019288777622, 19.6349540849362077403915211455,
22.7765467385260009788541645288, 25.9181393921157942173168079121,
29.0597320457055874557794512953, 32.2013246992953806942420946786}

In[71]:= **Table2 =**

Table[FindRoot[Tanh[z] == Tan[z], {z, z[n]}, AccuracyGoal → 25, WorkingPrecision → 30], {n, 10}]

Out[71]= {{z → 3.92660231204791877823853334415}, {z → 7.06858274562873208855295892755},
{z → 10.2101761228130305454682055947}, {z → 13.3517687777540931242097038229},
{z → 16.4933614313464097807735984324}, {z → 19.6349540849362077315750340338},
{z → 22.7765467385260009788377002440}, {z → 25.9181393921157942173167771659},
{z → 29.0597320457055874557794512379}, {z → 32.2013246992953806942420946785}}

In[72]:= **Table2a = Table[Table2[n, 1, 2], {n, 10}]**

Out[72]= {3.92660231204791877823853334415, 7.06858274562873208855295892755,
10.2101761228130305454682055947, 13.3517687777540931242097038229,
16.4933614313464097807735984324, 19.6349540849362077315750340338,
22.7765467385260009788377002440, 25.9181393921157942173167771659,
29.0597320457055874557794512379, 32.2013246992953806942420946785}

In[73]:= **Table3 = Table[Table2a[n] - Table1a[n], {n, 10}]**

Out[73]= {-0.00038850493932276983977088495, -7.249483026979879886848 × 10⁻⁷,
-1.3537974795353854010 × 10⁻⁹, -2.5281392565305561 × 10⁻¹², -4.7211552793298 × 10⁻¹⁵,
-8.8164871116 × 10⁻¹⁸, -1.64642848 × 10⁻²⁰, -3.07461 × 10⁻²³, -5.74 × 10⁻²⁶, -0. × 10⁻²⁸}

In[74]:= **Table3a = Table3 // Chop**

Out[74]= {-0.00038850493932276983977088495,
-7.249483026979879886848 × 10⁻⁷, -1.3537974795353854010 × 10⁻⁹, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0}

In[75]:= **AccuracyComment =**

"Παρατηρείται ότι οι διαφορές αυτές μικραίνουν με πάρα πολύ γρήγορο ρυθμό, όσο μεγαλώνει ο δείκτης n της σταθεράς β_n . Για $n = 2$, μόλις 2, η διαφορά αυτή είναι ήδη αμελητέα.;"

In[76]:= **FrequenciesTable = Table[{"ω[" n ", "] =", (Table2a[n]/L)² Sqrt[EI/ρA]}, {n, 1, 7}]**

Out[76]=
$$\left(\begin{array}{l} \omega[1] = \frac{15.4182057169800613148415768426 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2} \\ \omega[2] = \frac{49.9648620318002246101418190271 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2} \\ \omega[3] = \frac{104.247696458861329008253234813 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2} \\ \omega[4] = \frac{178.269729494609029791115669045 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2} \\ \omega[5] = \frac{272.030971305025291196184867193 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2} \\ \omega[6] = \frac{385.531421917553070701999665427 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2} \\ \omega[7] = \frac{518.77108133225941240173793408 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{L^2} \end{array} \right)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMIII-MC

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MC1 (Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί, Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις): Θεωρούμε το κλασικό πρόβλημα των καμπτικών (εγκάρσιων) ιδιοταλαντώσεων μιας συνήθους δοκού: ευθύγραμμης, λεπτής, σταθερής διατομής από ομογενές, ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό κατά μήκος του άξονα Ox μήκους L (με $0 \leq x \leq L$). Για τις ταλαντώσεις αυτές ισχύει η ακόλουθη γνωστή διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς σύμφωνα με την απλή, αλλά συνήθως χρησιμοποιούμενη στην πράξη από τον Πολιτικό Μηχανικό, θεωρία των Bernoulli–Euler:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Στην εξίσωση αυτή $v = v(x, t)$ είναι το άγνωστο βέλος κάμψης της δοκού κατά τον κατακόρυφο άξονα Oy , EI η δυσκαμψία της δοκού: το γινόμενο του μέτρου ελαστικότητας (ή μέτρου του Young) E του υλικού της επί τη ροπή αδρανείας της διατομής της I γύρω από τον ουδέτερο άξονά της Oz στην κάμψη, ρ η συνήθης πυκνότητα του υλικού της δοκού, που είναι σταθερή κατά μήκος της, και A το σταθερό εμβαδόν της διατομής της. Οποσδήποτε η εισαγωγή της βοηθητικής σταθεράς

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

ή, καλύτερα εδώ, της αντίστροφής της σταθεράς

$$a = \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$$

απλοποιεί (μη ουσιαστικά ασφαλώς) την παραπάνω διαφορική εξίσωση. Ζητούνται:

(α) Δήλωση της εξισώσεως στη *Mathematica* σαν `BeamPDE`.

(β) Λίστα `Characterizations` με τους λεπτομερείς χαρακτηρισμούς της εξισώσεως αυτής.

(γ) Απόπειρα επιλύσεώς της με την εντολή `DSolve` και σχετικό σχόλιο `comment`.

(δ) Κάνουμε τώρα χρήση της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών και πιο συγκεκριμένα υποθέτουμε ότι

$$v(x, t) = X(x)q(t)$$

για την άγνωστη συνάρτηση $v = v(x, t)$. Ποια μορφή παίρνει τώρα η εξίσωση `BeamPDE` τελικά με πλήρη χωρισμό των μεταβλητών;

(ε) Ποιες είναι επομένως οι δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις `BeamODEt` και `BeamODEx` ως προς τις δύο νέες άγνωστες συναρτήσεις $q(t)$ (χρονική συνάρτηση) και $X(x)$ (χωρική συνάρτηση) αντίστοιχα; Ποιες είναι οι αντίστοιχες γενικές λύσεις τους `solt` και `solx` καθώς και οι σχετικές συναρτήσεις $q_s(t)$ και $X_s(x)$;

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MC2 (Δυναμική των Κατασκευών: Αμφιέριστη Δοκός, Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις, Ιδιοσυχνότητες): Συνεχίζουμε την προηγούμενη άσκηση. Εδώ ζητείται για αμφιέριστη δοκό ο πολύ λεπτομερής προσδιορισμός των οκτώ πρώτων **ιδιοσυχνοτήτων** (*eigenfrequencies*) της δοκού ω_n (με $n = 1, 2, \dots, 8$), δηλαδή της θεμελιώδους ιδιοσυχνότητας ω_1 της αμφιέριστης δοκού και άλλων επτά ιδιοσυχνοτήτων της ω_n . Να γίνει και σχετική γραφική παράστασή τους με τη χρήση της εντολής `ListPlot`.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MC3 (Δυναμική των Κατασκευών: Πρόβολος, Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις, Ιδιοσυχνότητες): Ακριβώς τα ίδια ερωτήματα με την προηγούμενη άσκηση, αλλά τώρα για πρόβολο (αντί για αμφιέριστη δοκό) με πάκτωση στο αριστερό άκρο του $x = 0$ και με ελεύθερο το δεξιό άκρο του $x = L$. Στο τέλος να γίνει και γραφική σύγκριση των ιδιοσυχνοτήτων (*eigenfrequencies*) ω_n (με $n = 1, 2, \dots, 8$) τόσο της αμφιέριστης δοκού όσο και του πρόβολου μέσω κατάλληλων γραφικών παραστάσεών τους στο ίδιο σχήμα με τη χρήση της εντολής `Show`.

■ Notebook EMIII-MC

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMIII-MC

(ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMIII-MC1 ΕΩΣ EMIII-MC3)

```
In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MC1 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΔΟΚΟΙ, ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ)

```
In[2]:= BeamPDE = EID[v[x, t], {x, 4}] + ρA D[v[x, t], {t, 2}] == 0
```

```
Out[2]= ρA v(0,2)(x, t) + EI v(4,0)(x, t) == 0
```

```
In[3]:= Characterizations =
  {"Διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους", "τετάρτης τάξεως", "γραμμική",
  "ομογενής", "με σταθερούς συντελεστές", "με άγνωστη συνάρτηση το βέλος
  κάμψεως v(x, t) και ανεξάρτητες μεταβλητές τη θέση x και το χρόνο t"};
```

```
In[4]:= sol = DSolve[BeamPDE, v[x, t], {x, t}]
```

```
Out[4]= DSolve[ρA v(0,2)(x, t) + EI v(4,0)(x, t) == 0, v(x, t), {x, t}]
```

```
In[5]:= comment = "Παρατηρείται ότι η διαφορική αυτή εξίσωση δε μπορεί να επιλυθεί με
  την εντολή DSolve. Αυτό οφείλεται στο ότι δεν έχει απλή κλειστή λύση.";
```

```
In[6]:= v[x_, t_] = X[x] q[t];
```

```
In[7]:= BeamPDE
```

```
Out[7]= ρA X(x) q''(t) + EI q(t) X(4)(x) == 0
```

```
In[8]:= BeamPDE1 = BeamPDE[[1, 1]] == -BeamPDE[[1, 2]]
```

```
Out[8]= ρA X(x) q''(t) == -EI q(t) X(4)(x)
```

```
In[9]:= BeamPDE2 = BeamPDE1[[1]] / (ρA v[x, t]) == BeamPDE1[[2]] / (ρA v[x, t])
```

```
Out[9]=  $\frac{q''(t)}{q(t)} == -\frac{EI X^{(4)}(x)}{\rho A X(x)}$ 
```

```
In[10]:= BeamODEt = BeamPDE2[[1]] == -ω2
```

```
Out[10]=  $\frac{q''(t)}{q(t)} == -\omega^2$ 
```

```
In[11]:= solt = DSolve[BeamODEt, q[t], t]
```

```
Out[11]= {{q(t) → c1 cos(tω) + c2 sin(tω)}}
```

```
In[12]:= qs[t_] = solt[[1, 1, 2]]
```

```
Out[12]= c1 cos(tω) + c2 sin(tω)
```

In[13]:= BeamODEx = BeamPDE2[[2]] == - ω^2

Out[13]= $-\frac{EI X^{(4)}(x)}{\rho A X(x)} == -\omega^2$

In[14]:= BeamODEx1 = BeamODEx /. $\rho A \rightarrow a^2 EI$

Out[14]= $-\frac{X^{(4)}(x)}{a^2 X(x)} == -\omega^2$

In[15]:= solx = DSolve[BeamODEx1, X[x], x]

Out[15]= $\{\{X(x) \rightarrow e^{-\sqrt{a} x \sqrt{\omega}} c_2 + e^{\sqrt{a} x \sqrt{\omega}} c_4 + c_1 \cos(\sqrt{a} x \sqrt{\omega}) + c_3 \sin(\sqrt{a} x \sqrt{\omega})\}\}$

In[16]:= Xs[x_] = solx[[1, 1, 2]]

Out[16]= $e^{-\sqrt{a} x \sqrt{\omega}} c_2 + e^{\sqrt{a} x \sqrt{\omega}} c_4 + c_1 \cos(\sqrt{a} x \sqrt{\omega}) + c_3 \sin(\sqrt{a} x \sqrt{\omega})$

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MC2 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗ ΔΟΚΟΣ, ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ, ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ)

In[17]:= eqns = {Xs[0] == 0, Xs''[0] == 0, Xs[L] == 0, Xs''[L] == 0}

Out[17]= $\{c_1 + c_2 + c_4 == 0, -a \omega c_1 + a \omega c_2 + a \omega c_4 == 0, e^{-\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} c_2 + e^{\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} c_4 + c_1 \cos(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) + c_3 \sin(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) == 0, a e^{-\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} \omega c_2 + a e^{\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} \omega c_4 - a \omega c_1 \cos(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) - a \omega c_3 \sin(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) == 0\}$

In[18]:= mat2 = Table[Table[Coefficient[eqns[[k, 1]], C[m]], {m, 1, 4}], {k, 1, 4}]

Out[18]=
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -a \omega & a \omega & 0 & a \omega \\ \cos(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) & e^{-\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} & \sin(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) & e^{\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} \\ -a \omega \cos(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) & a e^{-\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} \omega & -a \omega \sin(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) & a e^{\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} \omega \end{pmatrix}$$

In[19]:= chareq = Det[mat2] == 0 // Simplify

Out[19]= $4 a^2 e^{-\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} (-1 + e^{2 \sqrt{a} L \sqrt{\omega}}) \omega^2 \sin(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) == 0$

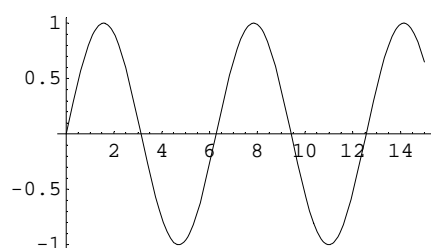
In[20]:= chareq1 = chareq[[1, 6]] == 0

Out[20]= $\sin(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) == 0$

In[21]:= chareq2 = chareq1 /. L \rightarrow z / (Sqrt[a] Sqrt[ω])

Out[21]= $\sin(z) == 0$

In[22]:= Plot[Evaluate[chareq2[[1]], {z, 0, 15}], ImageSize \rightarrow 200];



```
In[23]:= solz = {FindRoot[chareq2, {z, π}],
                FindRoot[chareq2, {z, 2 π}], FindRoot[chareq2, {z, 3 π}]}
```

```
Out[23]= {{z → 3.14159}, {z → 6.28319}, {z → 9.42478}}
```

```
In[24]:= Table[z[n] = n π, {n, 1, 8}] // N
```

```
Out[24]= {3.14159, 6.28319, 9.42478, 12.5664, 15.708, 18.8496, 21.9911, 25.1327}
```

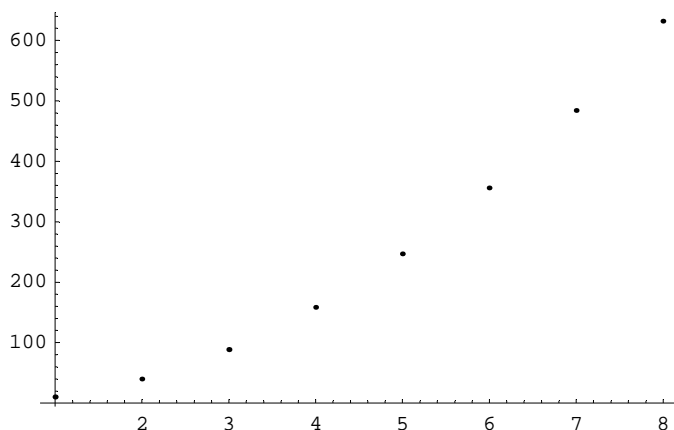
```
In[25]:= Eigenfrequencies = Table[z[n]^2 / (a L^2) /. a → Sqrt[ρA] / Sqrt[EI], {n, 1, 8}]
```

```
Out[25]= { $\frac{\sqrt{EI} \pi^2}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{4 \sqrt{EI} \pi^2}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{9 \sqrt{EI} \pi^2}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{16 \sqrt{EI} \pi^2}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{25 \sqrt{EI} \pi^2}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{36 \sqrt{EI} \pi^2}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{49 \sqrt{EI} \pi^2}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{64 \sqrt{EI} \pi^2}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ }
```

```
In[26]:= Eigenfrequencies // N
```

```
Out[26]= { $\frac{9.8696 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{39.4784 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{88.8264 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{157.914 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,
           $\frac{246.74 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{355.306 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{483.611 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{631.655 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ }
```

```
In[27]:= lpl = ListPlot[Table[z[n]^2, {n, 1, 8}], ImageSize → 320];
```



■ ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜC3 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΠΡΟΒΟΛΟΣ, ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ, ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ)

```
In[28]:= eqnsc = {Xs[0] == 0, Xs'[0] == 0, Xs''[L] == 0, Xs'''[L] == 0}
```

```
Out[28]= {c1 + c2 + c4 == 0, -√a √ω c2 + √a √ω c3 + √a √ω c4 == 0,
          a e^{-√a L √ω} ω c2 + a e^{√a L √ω} ω c4 - a ω c1 cos(√a L √ω) - a ω c3 sin(√a L √ω) == 0,
          -a^{3/2} e^{-√a L √ω} c2 ω^{3/2} + a^{3/2} e^{√a L √ω} c4 ω^{3/2} -
          a^{3/2} c3 cos(√a L √ω) ω^{3/2} + a^{3/2} c1 sin(√a L √ω) ω^{3/2} == 0}
```

```
In[29]:= mat = Table[Table[Coefficient[eqnsc[[k, 1]], C[m]], {m, 1, 4}], {k, 1, 4}]
```

```
Out[29]= 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\sqrt{a} \sqrt{\omega} & \sqrt{a} \sqrt{\omega} & \sqrt{a} \sqrt{\omega} \\ -a \omega \cos(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) & a e^{-\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} \omega & -a \omega \sin(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) & a e^{\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} \omega \\ a^{3/2} \omega^{3/2} \sin(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) & -a^{3/2} e^{-\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} \omega^{3/2} & -a^{3/2} \omega^{3/2} \cos(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) & a^{3/2} e^{\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} \omega^{3/2} \end{pmatrix}$$

```


In[30]:= **chareq = Det[mat] == 0**

Out[30]= $-2 a^3 \omega^3 - 2 a^3 \cos^2(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) \omega^3 - 2 a^3 \sin^2(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) \omega^3 - 2 a^3 e^{-\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} \cos(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) \omega^3 - 2 a^3 e^{\sqrt{a} L \sqrt{\omega}} \cos(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) \omega^3 == 0$

In[31]:= **chareq1 = Simplify[ExpToTrig[chareq[[1]]] == 0**

Out[31]= $-4 a^3 \omega^3 (\cos(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) \cosh(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) + 1) == 0$

In[32]:= **chareq1a = chareq1[[1, 4]] == 0**

Out[32]= $\cos(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) \cosh(\sqrt{a} L \sqrt{\omega}) + 1 == 0$

In[33]:= **chareq2 = chareq1a /. L -> z / (Sqrt[a] Sqrt[omega])**

Out[33]= $\cos(z) \cosh(z) + 1 == 0$

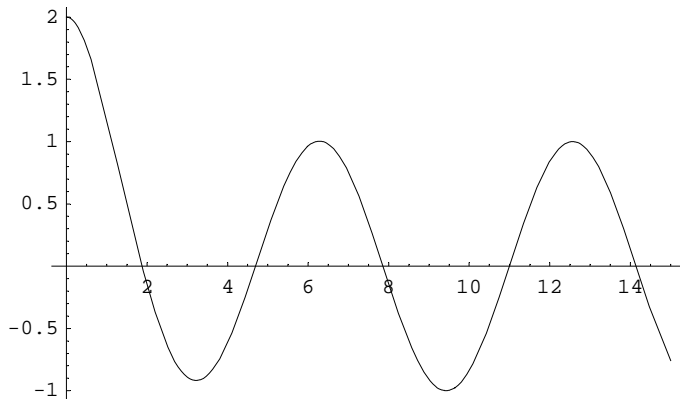
In[34]:= **chareq3 = chareq2[[1]] / Cosh[z] == 0 // Simplify**

Out[34]= $\cos(z) + \operatorname{sech}(z) == 0$

In[35]:= **chareq3[[1]]**

Out[35]= $\cos(z) + \operatorname{sech}(z)$

In[36]:= **Plot[Evaluate[chareq3[[1]], {z, 0, 15}], ImageSize -> 320];**



In[37]:= **solz = {FindRoot[chareq2, {z, 2}], FindRoot[chareq2, {z, 4}], FindRoot[chareq2, {z, 8}]}**

Out[37]= {{z -> 1.8751}, {z -> 4.69409}, {z -> 7.85476}}

In[38]:= **Table[z[n] = solz[[n, 1, 2]], {n, 1, Length[solz]}]**

Out[38]= {1.8751, 4.69409, 7.85476}

In[39]:= **Table[omega[n] = z[n]^2 / (a L^2) /. a -> Sqrt[rho A] / Sqrt[EI], {n, 1, Length[solz]}] // Simplify**

Out[39]= $\left\{ \frac{3.51602 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}, \frac{22.0345 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}, \frac{61.6972 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}} \right\}$

In[40]:= **solz = Table[FindRoot[chareq2, {z, (n - 0.5) pi}], AccuracyGoal -> 4], {n, 1, 8}]**

Out[40]= {{z -> 1.8751}, {z -> 4.69409}, {z -> 7.85476}, {z -> 10.9955}, {z -> 14.1372}, {z -> 17.2788}, {z -> 20.4204}, {z -> 23.5619}}

```
In[41]:= solz1 = Table[z[n] = solz[[n, 1, 2]], {n, 1, 8}]
```

```
Out[41]= {1.8751, 4.69409, 7.85476, 10.9955, 14.1372, 17.2788, 20.4204, 23.5619}
```

```
In[42]:= solz2 = Table[(n - 0.5)  $\pi$ , {n, 1, 8}]
```

```
Out[42]= {1.5708, 4.71239, 7.85398, 10.9956, 14.1372, 17.2788, 20.4204, 23.5619}
```

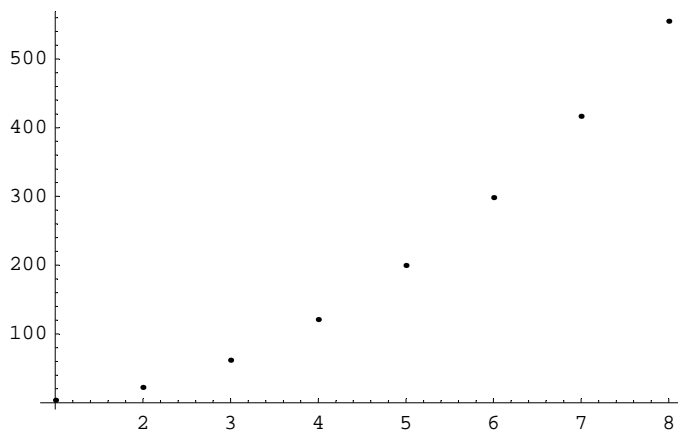
```
In[43]:= dsolz = solz1 - solz2 // Chop
```

```
Out[43]= {0.304308, -0.0182977, 0.000775804, -0.0000335516,  
1.44989  $\times 10^{-6}$ , -6.26556  $\times 10^{-8}$ , 2.70759  $\times 10^{-9}$ , -1.17002  $\times 10^{-10}$ }
```

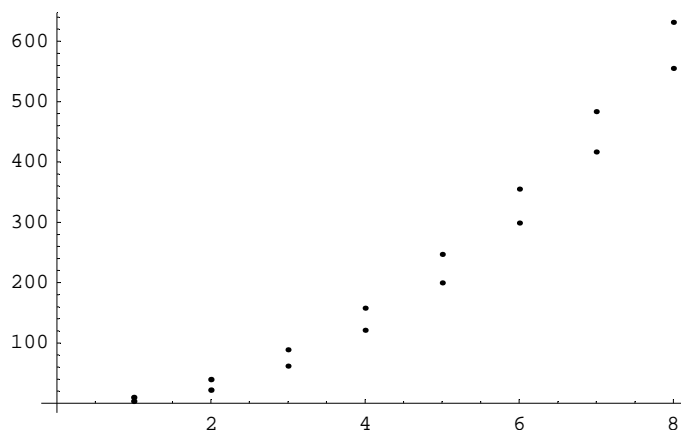
```
In[44]:= Eigenfrequencies = Table[ $\omega$ [n] = z[n]^2 / (a L^2) /. a  $\rightarrow$  Sqrt[ $\rho A$ ] / Sqrt[EI], {n, 1, 8}]
```

```
Out[44]= {  $\frac{3.51602 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{22.0345 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{61.6972 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{120.902 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  
 $\frac{199.86 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{298.556 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{416.991 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$ ,  $\frac{555.165 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}$  }
```

```
In[45]:= lp2 = ListPlot[Table[z[n]^2, {n, 1, 8}], ImageSize  $\rightarrow$  320];
```



```
In[46]:= Show[lp1, lp2, ImageSize  $\rightarrow$  320];
```



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMIII-MD

ΑΣΚΗΣΗ-EMIII-MD1 (Περιβαλλοντική Υδραυλική: Διάχυση και Αποδόμηση): Στην Περιβαλλοντική Υδραυλική θεωρούμε τη μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με διάχυση (με συντελεστή D_0) και με αποδόμηση πρώτης τάξεως (με συντελεστή k). Τώρα για τη συγκέντρωση $c(x, t)$ του ρύπου ζητούνται: (1) Η σχετική διαφορική εξίσωση DiffusionReactionPDE, (2) οι χαρακτηρισμοί της Characterizations1, (3) απόπειρα αναλυτικής επιλύσεώς της, (4) αριθμητική επίλυσή της NumericalSolution για $D_0 = 1$ και $k = 0.7$ στα διαστήματα $0 < x < 5$ και $0 < t < 10$, (5) η σχετική προσεγγιστική λύση της $c_s(x, t)$ και τέλος (6) η τριδιάστατη γραφική παράσταση της λύσεως αυτής στα πιο πάνω διαστήματα $0 < x < 5$ και $0 < t < 10$ με κατάλληλα σύμβολα στους άξονες, πλήρη εμφάνισή της, τίτλο ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΡΥΠΟΥ και γραμματοσειρά (σε όλη τη γραφική παράσταση) Arial-Bold στις 12 στιγμές.

ΑΣΚΗΣΗ-EMIII-MD2 (Εξίσωση του Laplace): Ζητούνται: (7) Χωρίς τη χρήση πακέτου η διδιάστατη εξίσωση του Laplace LaplacePDE, (8) όλοι οι χαρακτηρισμοί της Characterizations2, (9) λίστα WhereItAppears περιοχών όπου απαντάται, (10) η γενική λύση της sol1, (11) ξανά η ίδια λύση, τώρα sol2, με τις συναρτήσεις με φ μέσω ειδικής επιλογής, (12) η σχετική συνάρτηση u_2 και τέλος (13) η επαλήθευσή της ver2.

ΑΣΚΗΣΗ-EMIII-MD3 (Μηχανική των Υλικών: Στρέψη): Σε στρέψη συνήθους ράβδου ζητούνται: (14) Η διαφορική εξίσωσή της TorsionPDE (με γινόμενο δεξιά!), (15) η γενική λύση της sol, (16) σε μία λίστα το μέτρο ελαστικότητας του υλικού $E = 6 \cdot 10^3$ kN/m² (μαζί με τις μονάδες), ο λόγος του Poisson $\nu = 0.30$ και το αντίστοιχο μέτρο διατμήσεως. (17) Σε σχόλιο comment πώς γράφουμε το E πιο πάνω (μ' αυτό το σύμβολο!) και γιατί; (18) Σε μία λίστα η τιμή $\theta = 1^\circ/\text{m}$ γυρισμένη σε ακτίνια με ειδική σταθερά της Mathematica και το δεξιό μέλος της διαφορικής εξισώσεως (κι εδώ μαζί με τις μονάδες).

ΑΣΚΗΣΗ-EMIII-MD4 (Μηχανική των Υλικών Ελαστικότητα): Ζητούνται: (19) Σε μία λίστα και οι δύο εντολές για τη μη εμφάνιση προειδοποιήσεων ορθογραφικών λαθών. (20) Το φόρτωμα του πακέτου για τη Διανυσματική Ανάλυση (21) και με δεύτερο τρόπο. (22) Ο καθορισμός Καρτεσιανών συντεταγμένων και (23) η αναφορά του συστήματος συντεταγμένων. (24) Η συνάρτηση $A(x, y) = a(x^4 - y^4) + b(x^2 - y^2) + cxy$. Οι επαληθεύσεις (25) ver1 και επίσης (26) ver2 ότι είναι διαρμονική με δύο διαφορετικούς τρόπους. (27) Σε λίστα οι συνιστώσες των τάσεων σαν συναρτήσεις. Οι εξισώσεις ισορροπίας: (28) η πρώτη και (29) η δεύτερη. Η εξίσωση του συμβιβαστού StressBasedCompatibilityEquation (εδώ με τις τάσεις) (30) με πρώτο καθώς και (31) δεύτερο τρόπο. (32) Η εξάλειψη της τιμής του E . Οι παραμορφώσεις (33) ϵ_x , (34) ϵ_y και (35) γ_{xy} σαν συναρτήσεις. (36) Η εξίσωση συμβιβαστού DeformationBasedCompatibilityEquation με τις παραμορφώσεις. (37) Σε λίστα subs οι αντικαταστάσεις $a \rightarrow 5$, $b \rightarrow 8$, $c \rightarrow 3$, $E \rightarrow 10^5$ και $\nu \rightarrow 0.32$ (χωρίς μονάδες) και μετά (38) σε λίστα ListOfStressAndDeformationValues οι τάσεις και οι παραμορφώσεις στο σημείο (1, 2).

ΑΣΚΗΣΗ-EMIII-MD5 (Ρευστομηχανική): Στη μόνιμη (σταθερή) διδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού ζητούνται: (39) Οι δύο βασικές ιδιότητες του IdealFluidProperties. (40) Ο ορισμός του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, y) = \cos x \sinh y$. Με τη χρήση του πακέτου για τη Διανυσματική Ανάλυση, το οποίο έχει ήδη φορτωθεί, (41) η επαλήθευση verΦ ότι είναι αρμονική συνάρτηση. (42) Η ταχύτητα $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x, y)$ του ρευστού. (43) Από την ταχύτητα \mathbf{V} σε λίστα οι δύο συνιστώσες της $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$. (44) Η εξίσωση του αστρόβιλου της ροής IrrotationalFlow με βάση τις δύο συνιστώσες της u και v και επίσης (45) με βάση την ταχύτητα \mathbf{V} . Χωρίς πια τις εξόδους ανάλογα η εξίσωση της συνεχείας ContinuityEquation (46) με τον πρώτο τρόπο: με τις συνιστώσες της ταχύτητας u και v και (47) με το δεύτερο τρόπο: με την ίδια την ταχύτητα \mathbf{V} . (48) Η άμεση επίλυση sol1 (σε μία εντολή χωρίς λίστα) της εξισώσεως για τη συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση) $\Psi = \Psi(x, y)$ με βάση την ταχύτητα u και επίσης (49) sol2 με βάση την ταχύτητα v . (50) Η συνάρτηση Ψ που προκύπτει από τη λύση sol1 με δεξιό μέλος το sol1[[1, 1, 2, 1]]. (51) Με τη χρήση της εντολής D

η επαλήθευση $\text{ver}\Psi$ ότι η συνάρτηση ροής Ψ είναι αρμονική. (52) Οι εξισώσεις (ή οι συνθήκες) των Cauchy–Riemann $\text{CauchyRiemannEquations}$. Με βάση τις συνιστώσες u και v της ταχύτητας \mathbf{V} του ρευστού οι κλίσεις (53) $\text{slope}\Phi$ μιας ισοδυναμικής γραμμής και (54) $\text{slope}\Psi$ μιας γραμμής ροής σε οποιοδήποτε σημείο (x, y) τομής τους και (55) η επαλήθευση $\text{OrthogonalityVerification}$ ότι είναι ορθογώνιες μεταξύ τους.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-MD6 (Αριθμητικές Μέθοδοι: Μεταγωγή, Στρέψη): Ζητούνται: (56) Να δηλωθεί η συνάρτηση $f(x) = A \cosh bx \sin cx \operatorname{erf} x$. (57) Να ελεγχθεί ότι η πρώτη παράγωγός της προκύπτει με όριο του κλάσματος $[f(x+h) - f(x)]/h$ για $h \rightarrow 0$ (προς τα εμπρός διαφορά) με απλοποίηση. Ανάλογα, αλλά χωρίς τις εξόδους (58) με προς τα πίσω διαφορά και (59) με κεντρική διαφορά. (60) Ανάλογα για τη δεύτερη παράγωγο με κεντρική διαφορά. (61) Να δηλωθεί η διαφορική εξίσωση της μεταγωγής ConvectionPDE και (62) να προσεγγισθεί $\text{ConvectionPDEApproximation}$ με κεντρικές διαφορές βημάτων Δx και Δt (βέβαια χωρίς όρια!). (63) Να εξαλειφθεί η τιμή του συμβόλου u . (64) Να δηλωθεί η διαφορική εξίσωση της στρέψεως συνήθους ράβδου TorsionPDE και (65) να προσεγγισθεί $\text{TorsionPDEApproximation}$ με κεντρικές διαφορές βήματος h και ως προς x και ως προς y .

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-MD7 (Μετάδοση Θερμότητας): Θεωρούμε εδώ τη μη μόνιμη μετάδοση θερμότητας σε τοίχο με $0 \leq x \leq L$. Ζητούνται: (66) Η σχετική εξίσωση HeatTransferPDE με άγνωστη συνάρτηση τη $u(x, t)$ και με σταθερά $1/a^2$. (67) Η συνάρτηση $u_0(x, t)$ που δοκιμάζεται για την επίλυσή της με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως (και με τα i στον εκθέτη), (68) η εξίσωση equation που προκύπτει έτσι, (69) η λύση της sol , (70) η σχετική τιμή μ_1 , (71) η τελική μορφή της συναρτήσεως $u_0(x, t)$, (72) η επαλήθευση της διαφορικής εξισώσεως HeatTransferPDE και (73) η γενική λύση της. Και τώρα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών (74) ο ίδιος ο χωρισμός των μεταβλητών στην άγνωστη συνάρτηση $u(x, t)$, (75) η σχετική διαφορική εξίσωση $\text{SeparatedHeatTransferPDE}$, (76) κατευθείαν σε λίστα οι δύο σχετικές συνήθειες διαφορικές εξισώσεις $\text{ODE}x$ και $\text{ODE}t$ (77) και σε επόμενη λίστα να βρεθούν οι λύσεις τους $\text{sol}x$ και $\text{sol}t$ αντίστοιχα, η δεύτερη με σταθερά F με τη χρήση επιλογής. Με τις ιδιοσυναρτήσεις $X_n(x)$ και τις αντίστοιχες χρονικές συναρτήσεις $T_n(t)$ να υποτίθενται γνωστές (78) η μορφή (σε σειρά) $u_s(x, t)$ για τη λύση (τη θερμοκρασία) στο παρόν πρόβλημα. (79) Οι συνοριακές συνθήκες $\text{BCs}1$ για τις χωρικές συναρτήσεις $X(x)$ για μηδενικές θερμοκρασίες στις πλευρές $x = 0$ και $x = L$ του τοίχου και (80) η αντίστοιχη σειρά για τη σχετική λύση $u_1(x, t)$ της αντίστοιχης μη ομογενούς διαφορικής εξισώσεως. Ανάλογα (81) και (82) (με δείκτη 2) για μονωμένες πλευρές του τοίχου, επίσης (83) και (84) (με δείκτη 3) για μηδενική θερμοκρασία αριστερά και μόνωση δεξιά και τέλος (85) και (86) (με δείκτη 4) για την ακριβώς αντίθετη περίπτωση στις συνοριακές μας συνθήκες.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-MD8 (Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Σε συνήθη δοκό μήκους L ($0 \leq x \leq L$) στη Δυναμική των Κατασκευών ζητούνται: Απλά να αναγραφούν οι εξισώσεις ιδιοσυχνοτήτων με μεταβλητή τη βοηθητική ποσότητα $z = \beta L$ (87) $\text{FrequencyEquation}1$ για αμφιέριστη δοκό, (88) $\text{FrequencyEquation}2$ για αμφίπακτη δοκό (89) $\text{FrequencyEquation}3$ για πρόβολο με στήριξη αριστερά και (90) $\text{FrequencyEquation}4$ για πρόβολο με στήριξη δεξιά. Με γνωστές τις ποσότητες β_n απλά να γραφούν οι αντίστοιχες ιδιομορφές (91) $X_{1,n}(x)$, (92) $X_{2,n}(x)$ και (93) $X_{3,n}(x)$ για τις τρεις πρώτες δοκούς και (94) να ελεγχθεί η ορθογωνιότητα των δύο πρώτων ιδιομορφών για την αμφιέριστη δοκό μόνο. Τέλος να δηλωθούν κατευθείαν οι προσεγγίσεις $\tilde{\omega}_n$ ($\omega[n]$) των ιδιοσυχνοτήτων για τις τέσσερις πιο πάνω δοκούς (95) (με 1: $\omega t1[n]$), (96) (με 2: $\omega t2[n]$), (97) (με 3: $\omega t3[n]$) και (98) (με 4: $\omega t4[n]$).

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ MD9 (Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Σε συνήθη δοκό στη Δυναμική των Κατασκευών, που τη θεωρούμε άπειρου μήκους, για $t \geq 0$ ζητούνται: (99) Η σχετική διαφορική εξίσωση BeamPDE και (100) ο μετασχηματισμός Laplace της LT ως προς το χρόνο t . (101) Απλοποίηση της εξισώσεως LT στη μορφή $\text{LT}1$ με τη χρήση ειδικού συμβόλου $V(x, s)$ για τον άγνωστο μετασχηματισμό Laplace. (102) Σε σχόλιο comment πού πάσχει η όλη διαδικασία; (103) Τέλος κατάλληλη διόρθωση $\text{LT}2$ της εξισώσεως $\text{LT}1$, (104) αναφορά μηδενικών αρχικών συνθηκών ICs και (105) η λύση της εξισώσεως $\text{LT}2$.

■ Notebook EMIII-MD

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMIII-MD

(ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMIII-MD1 ΕΩΣ EMIII-MD9)

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MD1 (ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ: ΔΙΑΧΥΣΗ ΚΑΙ ΑΠΟΔΟΜΗΣΗ)

```
In[1]:= DiffusionReactionPDE = D[c[x, t], t] == D0 D[c[x, t], {x, 2}] - k c[x, t]
```

```
Out[1]= c(0,1)(x, t) == D0 c(2,0)(x, t) - k c(x, t)
```

```
In[2]:= Characterizations1 =
  {"Διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους", "δευτέρας τάξεως",
  "γραμμική", "ομογενής", "με σταθερούς συντελεστές", "παραβολικού τύπου",
  "με άγνωστη συνάρτηση τη συγκέντρωση του ρύπου c(x,t) και
  ανεξάρτητες μεταβλητές τη θέση x στο υδατόρρευμα και το χρόνο t"};
```

```
In[3]:= DSolve[DiffusionReactionPDE, c[x, t], {x, t}]
```

```
Out[3]= DSolve[c(0,1)(x, t) == D0 c(2,0)(x, t) - k c(x, t), c(x, t), {x, t}]
```

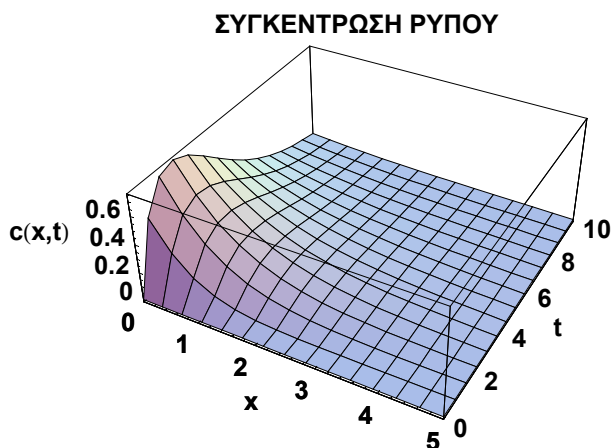
```
In[4]:= NumericalSolution = NDSolve[{DiffusionReactionPDE /. {k -> 0.7, D0 -> 1},
  c[0, t] == t Exp[-t/2], c[5, t] == 0, c[x, 0] == 0}, c[x, t], {x, 0, 5}, {t, 0, 10}]
```

```
Out[4]= {{c(x, t) -> InterpolatingFunction[{{0. 5.}, <>][x, t]}}
```

```
In[5]:= cs[x_, t_] = NumericalSolution[[1, 1, 2]]
```

```
Out[5]= InterpolatingFunction[{{0. 5.}, <>][x, t]
```

```
In[6]:= Plot3D[cs[x, t], {x, 0, 5}, {t, 0, 10},
  AxesLabel -> {"x", "t", "c(x,t) "}, PlotRange -> All,
  PlotLabel -> "ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΡΥΠΟΥ", DefaultFont -> {"Arial-Bold", 12}];
```



■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MD2 (ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE)

In[7]:= LaplacePDE = D[u[x, y], {x, 2}] + D[u[x, y], {y, 2}] == 0

Out[7]= $u^{(0,2)}(x, y) + u^{(2,0)}(x, y) == 0$

In[8]:= Characterizations2 =

{ "διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους", "δευτέρας τάξεως",
"γραμμική", "ομογενής", "με σταθερούς συντελεστές", "ελλειπτικού τύπου",
"με άγνωστη συνάρτηση τη u και ανεξάρτητες μεταβλητές τις x και y" };

In[9]:= WhereItAppears =

{ "Κλασική Μηχανική", "Μετάδοση Θερμότητας (ή Διάδοση Θερμότητας)",
"Ρευστομηχανική (ή Μηχανική των Ρευστών)", "Εδαφομηχανική",
"Μηχανική των Υλικών (ή Αντοχή των Υλικών)" };

In[10]:= sol1 = DSolve[LaplacePDE, u[x, y], {x, y}]

Out[10]= {{u(x, y) → C₁[i x + y] + C₂[y - i x]}}

In[11]:= sol2 = DSolve[LaplacePDE, u[x, y], {x, y}, DSolveConstants → φ]

Out[11]= {{u(x, y) → φ(1)(i x + y) + φ(2)(y - i x)}}

In[12]:= u2[x_, y_] = sol2[[1, 1, 2]]

Out[12]= φ(1)(i x + y) + φ(2)(y - i x)

In[13]:= ver2 = LaplacePDE /. u → u2

Out[13]= True

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MD3 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΣΤΡΕΨΗ)

In[14]:= TorsionPDE = D[φ[x, y], {x, 2}] + D[φ[x, y], {y, 2}] == -2 G θ

Out[14]= $\phi^{(0,2)}(x, y) + \phi^{(2,0)}(x, y) == -2 G \theta$

In[15]:= sol = DSolve[TorsionPDE, φ[x, y], {x, y}, DSolveConstants → f]

Out[15]= {{φ(x, y) → -G θ x² + f(1)(i x + y) + f(2)(y - i x)}}

In[16]:= {E = 6 10³ kN / m², ν = 0.30, G = E / (2 (1 + ν))}

Out[16]= $\left\{ \frac{6000 \text{ kN}}{\text{m}^2}, 0.3, \frac{2307.69 \text{ kN}}{\text{m}^2} \right\}$

In[17]:= comment =

"Το E το γράφουμε με Esc E Esc ή κατευθείαν με Ελληνικό Ε, ώστε να είναι
πραγματικά το Ελληνικό Ε και έτσι να μην το συγχέει η Mathematica με τη
βάση e των φυσικών λογαρίθμων, που δηλώνεται και με το Λατινικό E.";

In[18]:= {θ = 1. Degree / m, -2 G θ}

Out[18]= $\left\{ \frac{0.0174533}{\text{m}}, -\frac{80.5537 \text{ kN}}{\text{m}^3} \right\}$

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MD4 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ)

```

In[19]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};
In[20]:= Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]
In[21]:= << Calculus`VectorAnalysis`
In[22]:= SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]]
Out[22]= Cartesian(x, y, z)
In[23]:= CoordinateSystem
Out[23]= Cartesian
In[24]:= A[x_, y_] = a (x^4 - y^4) + b (x^2 - y^2) + c x y
Out[24]= c x y + b (x^2 - y^2) + a (x^4 - y^4)
In[25]:= ver1 = D[A[x, y], {x, 4}] + 2 D[A[x, y], {x, 2}, {y, 2}] + D[A[x, y], {y, 4}] == 0
Out[25]= True
In[26]:= ver2 = Biharmonic[A[x, y]] == 0
Out[26]= True
In[27]:= {σx[x_, y_] = D[A[x, y], {y, 2}],
          σy[x_, y_] = D[A[x, y], {x, 2}], τxy[x_, y_] = -D[A[x, y], x, y]}
Out[27]= {-12 a y^2 - 2 b, 12 a x^2 + 2 b, -c}
In[28]:= EquilibriumEquation[1] = D[σx[x, y], x] + D[τxy[x, y], y] == 0
Out[28]= True
In[29]:= EquilibriumEquation[2] = D[τxy[x, y], x] + D[σy[x, y], y] == 0
Out[29]= True
In[30]:= StressBasedCompatibilityEquation =
          D[σx[x, y] + σy[x, y], {x, 2}] + D[σx[x, y] + σy[x, y], {y, 2}] == 0
Out[30]= True
In[31]:= StressBasedCompatibilityEquation = Laplacian[σx[x, y] + σy[x, y]] == 0
Out[31]= True
In[32]:= Clear[E]
In[33]:= ex[x_, y_] = (1/E) (σx[x, y] - ν σy[x, y]) // Simplify
Out[33]= 
$$\frac{-3.6 a x^2 - 12 a y^2 - 2.6 b}{E}$$


```

In[34]:= $\epsilon_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = (1/E) (\sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} - \nu \sigma_{\mathbf{x}, \mathbf{x}})$ // Simplify

Out[34]= $\frac{12ax^2 + 3.6ay^2 + 2.6b}{E}$

In[35]:= $\gamma_{\mathbf{x}\mathbf{y}}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = 2((1 + \nu)/E) \tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$

Out[35]= $-\frac{2.6c}{E}$

In[36]:= DeformationBasedCompatibilityEquation =

$D[\epsilon_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}, \{\mathbf{y}, 2\}] + D[\epsilon_{\mathbf{y}, \mathbf{y}}, \{\mathbf{x}, 2\}] + D[\gamma_{\mathbf{x}\mathbf{y}}[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{x}, \mathbf{y}] = 0$

Out[36]= True

In[37]:= subs = {a → 5, b → 8, c → 3, E → 10⁵, ν → 0.32};

In[38]:= ListOfStressAndDeformationValues =

{σ_x[1, 2], σ_y[1, 2], τ_{xy}[1, 2], ε_x[1, 2], ε_y[1, 2], γ_{xy}[1, 2]} /. subs

Out[38]= {-256, 76, -3, -0.002788, 0.001528, -0.000078}

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MD5 (ΠΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ)

In[39]:= IdealFluidProperties =

{"σταθερή πυκνότητα", "έλλειψη συνεκτικότητας: μηδενικό ιξώδες"};

In[40]:= $\Phi[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \text{Cos}[\mathbf{x}] \text{Sinh}[\mathbf{y}]$

Out[40]= cos(x) sinh(y)

In[41]:= $\text{ver}\Phi = \text{Laplacian}[\Phi[\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = 0$

Out[41]= True

In[42]:= $\mathbf{V}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \text{Grad}[\text{Cos}[\mathbf{x}] \text{Sinh}[\mathbf{y}]]$

Out[42]= {-sin(x) sinh(y), cos(x) cosh(y), 0}

In[43]:= {u[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = V[\mathbf{x}, \mathbf{y}][[1]], v[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = V[\mathbf{x}, \mathbf{y}][[2]]}

Out[43]= {-sin(x) sinh(y), cos(x) cosh(y)}

In[44]:= IrrotationalFlow = D[u[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{y}] = D[v[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{x}]

Out[44]= True

In[45]:= IrrotationalFlow = Curl[V[\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = {0, 0, 0}

Out[45]= True

In[46]:= ContinuityEquation = D[u[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{x}] + D[v[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{y}] = 0

Out[46]= True

In[47]:= ContinuityEquation = Div[V[\mathbf{x}, \mathbf{y}]] = 0

Out[47]= True


```

In[48]:= sol1 = DSolve[D[Ψ[x, y], y] == u[x, y], Ψ[x, y], {x, y}]
Out[48]= {{Ψ(x, y) → c1[x] - cosh(y) sin(x)}}

In[49]:= sol2 = DSolve[D[Ψ[x, y], x] == -v[x, y], Ψ[x, y], {x, y}]
Out[49]= {{Ψ(x, y) → c1[y] - cosh(y) sin(x)}}

In[50]:= Ψ[x_, y_] = sol1[[1, 1, 2, 1]]
Out[50]= -cosh(y) sin(x)

In[51]:= verΨ = D[Ψ[x, y], {x, 2}] + D[Ψ[x, y], {y, 2}] == 0
Out[51]= True

In[52]:= CauchyRiemannEquations =
      {D[ϕ[x, y], x] == D[Ψ[x, y], y], D[ϕ[x, y], y] == -D[Ψ[x, y], x]}
Out[52]= {True, True}

In[53]:= slopeϕ = -u[x, y] / v[x, y]
Out[53]= tan(x) tanh(y)

In[54]:= slopeΨ = v[x, y] / u[x, y]
Out[54]= -cot(x) coth(y)

In[55]:= OrthogonalityVerification = slopeϕ slopeΨ == -1
Out[55]= True

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MD6 (ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ: ΜΕΤΑΓΩΓΗ, ΣΤΡΕΨΗ)

```

In[56]:= f[x_] = A Cosh[b x] Sin[c x] Erf[x]
Out[56]= A cosh(b x) erf(x) sin(c x)

In[57]:= DApproximation1 = f'[x] == Limit[(f[x + h] - f[x]) / h, h → 0] // Simplify
Out[57]= True

In[58]:= DApproximation2 = f'[x] == Limit[(f[x] - f[x - h]) / h, h → 0] // Simplify
Out[58]= True

In[59]:= DApproximation3 = f'[x] == Limit[(f[x + h] - f[x - h]) / (2 h), h → 0] // Simplify
Out[59]= True

In[60]:= D2Approximation = f''[x] == Limit[(f[x + h] + f[x - h] - 2 f[x]) / h2, h → 0] // Simplify
Out[60]= True

In[61]:= ConvectionPDE = D[c[x, t], t] == -V D[c[x, t], x]
Out[61]= c(0,1)(x, t) == -V c(1,0)(x, t)

```

```

In[62]:= ConvectionPDEApproximation =
      (c[x, t + Δt] - c[x, t - Δt]) / (2 Δt) == -v (c[x + Δx, t] - c[x - Δx, t]) / (2 Δx)

Out[62]= 
$$\frac{c(x, t + \Delta t) - c(x, t - \Delta t)}{2 \Delta t} == -\frac{v (c(x + \Delta x, t) - c(x - \Delta x, t))}{2 \Delta x}$$


In[63]:= Clear[u]

In[64]:= TorsionPDE = D[u[x, y], {x, 2}] + D[u[x, y], {y, 2}] == -2 Gθ

Out[64]= 
$$u^{(0,2)}(x, y) + u^{(2,0)}(x, y) == -2 G\theta$$


In[65]:= TorsionPDEApproximation =
      (u[x + h, y] + u[x - h, y] - 2 u[x, y]) / h^2 + (u[x, y + h] + u[x, y - h] - 2 u[x, y]) / h^2 ==
      -2 Gθ // Simplify

Out[65]= 
$$\frac{-4 u(x, y) + u(x, y - h) + u(x, h + y) + u(x - h, y) + u(h + x, y)}{h^2} == -2 G\theta$$


```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MD7 (ΜΕΤΑΔΟΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ)

```

In[66]:= HeatTranferPDE = D[u[x, t], {x, 2}] == (1 / a^2) D[u[x, t], t]

Out[66]= 
$$u^{(2,0)}(x, t) == \frac{u^{(0,1)}(x, t)}{a^2}$$


In[67]:= u0[x_, t_] = e^{i x λ + i μ t};

In[68]:= equation = HeatTranferPDE /. u → u0

Out[68]= 
$$-e^{i x \lambda + i t \mu} \lambda^2 == \frac{i e^{i x \lambda + i t \mu} \mu}{a^2}$$


In[69]:= sol = Solve[equation, μ]

Out[69]= {{μ → i a^2 λ^2}}

In[70]:= μ1 = sol[[1, 1, 2]]

Out[70]= i a^2 λ^2

In[71]:= u0[x_, t_] = u0[x, t] /. μ → μ1

Out[71]= 
$$e^{i x \lambda - a^2 t \lambda^2}$$


In[72]:= ver = HeatTranferPDE /. u → u0

Out[72]= True

In[73]:= us[x_, t_] = Integrate[A[λ] u0[x, t], {λ, -∞, ∞}]

Out[73]= 
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i x \lambda - a^2 t \lambda^2} A(\lambda) d\lambda$$


In[74]:= u[x_, t_] = X[x] T[t];

```

```

In[75]:= SeparatedHeatTransferPDE =
      HeatTransferPDE[[1]] / u[x, t] == HeatTransferPDE[[2]] / u[x, t]

Out[75]=  $\frac{X''(x)}{X(x)} == \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}$ 

In[76]:= {ODEx = X''[x] + p^2 X[x] == 0, ODEt = T'[t] + a^2 p^2 T[t] == 0};

In[77]:= {solx = DSolve[ODEx, X[x], x], solt = DSolve[ODEt, T[t], t, DSolveConstants -> F]}

Out[77]=  $\left( \begin{array}{l} \{X(x) \rightarrow c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px)\} \\ \{T(t) \rightarrow e^{-a^2 p^2 t} F(1)\} \end{array} \right)$ 

In[78]:= us[x_, t_] = Sum[D[n] X[n, x] T[n, t], {n, 1, \infty}]

Out[78]=  $\sum_{n=1}^{\infty} D[n] X(n, x) T(n, t)$ 

In[79]:= BCs1 = {X[0] == 0, X[L] == 0};

In[80]:= u1[x_, t_] = Sum[D[n] q[n, t] Sin[n \pi x / L], {n, 1, \infty}]

Out[80]=  $\sum_{n=1}^{\infty} D[n] q(n, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ 

In[81]:= BCs2 = {X'[0] == 0, X'[L] == 0};

In[82]:= u2[x_, t_] = Sum[D[n] q[n, t] Cos[n \pi x / L], {n, 1, \infty}]

Out[82]=  $\sum_{n=1}^{\infty} D[n] q(n, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ 

In[83]:= BCs3 = {X[0] == 0, X'[L] == 0};

In[84]:= u3[x_, t_] = Sum[D[n] q[n, t] Sin[(2 n - 1) \pi x / (2 L)], {n, 1, \infty}]

Out[84]=  $\sum_{n=1}^{\infty} D[n] q(n, t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$ 

In[85]:= BCs4 = {X'[0] == 0, X[L] == 0};

In[86]:= u4[x_, t_] = Sum[D[n] q[n, t] Cos[(2 n - 1) \pi x / (2 L)], {n, 1, \infty}]

Out[86]=  $\sum_{n=1}^{\infty} D[n] q(n, t) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$ 

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MD8 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

```

In[87]:= FrequencyEquation1 = Sin[z] == 0;

In[88]:= FrequencyEquation2 = Cosh[z] Cos[z] == 1;

In[89]:= FrequencyEquation3 = Cosh[z] Cos[z] == -1;

In[90]:= FrequencyEquation4 = FrequencyEquation3;

In[91]:= X1[n_, x_] = Sin[n \pi x / L];

```

```

In[92]:= X2[n_, x_] = Cosh[β[n] x] - Cos[β[n] x] -
  ((Cosh[β[n] L] - Cos[β[n] L]) / (Sinh[β[n] L] - Sin[β[n] L]))
  (Sinh[β[n] x] - Sin[β[n] x])

Out[92]= -cos(xβ(n)) + cosh(xβ(n)) - (cosh(Lβ(n)) - cos(Lβ(n)))(sinh(xβ(n)) - sin(xβ(n)))
  sinh(Lβ(n)) - sin(Lβ(n))

In[93]:= X3[n_, x_] = Cosh[β[n] x] - Cos[β[n] x] -
  ((Cosh[β[n] L] + Cos[β[n] L]) / (Sinh[β[n] L] + Sin[β[n] L]))
  (Sinh[β[n] x] - Sin[β[n] x])

Out[93]= -cos(xβ(n)) + cosh(xβ(n)) - (cos(Lβ(n)) + cosh(Lβ(n)))(sinh(xβ(n)) - sin(xβ(n)))
  sin(Lβ(n)) + sinh(Lβ(n))

In[94]:= Orthogonality =
  Integrate[X1[1, x] X1[2, x] /. {β[1] → π / L, β[2] → 2 π / L}, {x, 0, L}] == 0

Out[94]= True

In[95]:= ωt1[n_] = (n π / L)^2 Sqrt[EI / ρA];

In[96]:= ωt2[n_] = ((2 n + 1) π / (2 L))^2 Sqrt[EI / ρA];

In[97]:= ωt3[n_] = ((2 n - 1) π / (2 L))^2 Sqrt[EI / ρA];

In[98]:= ωt4[n_] = ωt3[n];

```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MD9 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

```

In[99]:= Clear[v, V]; BeamPDE = EI D[v[x, t], {x, 4}] + ρA D[v[x, t], {t, 2}] == 0

Out[99]= ρA v^(0,2)(x, t) + EI v^(4,0)(x, t) == 0

In[100]:= LT = LaplaceTransform[BeamPDE, t, s]

Out[100]= EI LaplaceTransform[v^(4,0)(x, t), t, s] + ρA (LaplaceTransform[v(x, t), t, s] s^2 - v(x, 0) s - v^(0,1)(x, 0)) == 0

In[101]:= LT1 = LT /. LaplaceTransform[v[x, t], t, s] → V[x, s]

Out[101]= EI LaplaceTransform[v^(4,0)(x, t), t, s] + ρA (V(x, s) s^2 - v(x, 0) s - v^(0,1)(x, 0)) == 0

In[102]:= comment = "Η όλη διαδικασία πάσχει στο ότι η Mathematica δε μπορεί
  να υπολογίσει το μετασχηματισμό Laplace ως προς το χρόνο t της
  τέταρτης παραγώγου ως προς τη θέση x. Αυτό μπορεί να διορθωθεί
  με ειδική εντολή για τον κανόνα αυτό: την επόμενη εντολή:";

In[103]:= LT2 = LT1 /. LaplaceTransform[D[v[x, t], {x, 4}], t, s] → D[V[x, s], {x, 4}]

Out[103]= ρA (V(x, s) s^2 - v(x, 0) s - v^(0,1)(x, 0)) + EI V^(4,0)(x, s) == 0

In[104]:= ICs = {v[x, 0] → 0, (D[v[x, t], t] /. t → 0) → 0}

Out[104]= {v(x, 0) → 0, v^(0,1)(x, 0) → 0}

In[105]:= solLT2 = DSolve[LT2 /. ICs, V[x, s], x] // FullSimplify

Out[105]= {{V(x, s) → e^((-1)^(3/4) √s x^4 √ρA / (4 EI)) C1 + e^(-√(-1) √s x^4 √ρA / (4 EI)) C2 + e^((-1)^(3/4) √s x^4 √ρA / (4 EI)) C3 + e^(√(-1) √s x^4 √ρA / (4 EI)) C4}}

```

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK ΕΜΙΙΙ-ΜΕ

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΕ1 (Περιβαλλοντική Υδραυλική): Θεωρούμε τη μεταφορά ρύπου A σε υδατόρρευμα. Ζητείται: (1) Σε λίστα οι δύο εντολές για τη μη εμφάνιση προειδοποιήσεων ορθογραφικών λαθών. Έπειτα για τη σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ζητείται να γραφούν ένας-ένας και, εάν χρειάζεται, με κατάλληλους συντελεστές οι όροι της: (2) Όρος Συσσωρεύσεως, (3) Όρος Διαχύσεως και Διασποράς, (4) Όρος Μεταγωγής και (5) Όρος Αποδομήσεως Πρώτης Τάξεως και μ' αυτούς (6) η ίδια η διαφορική εξίσωση Διαφορική Εξίσωση και (7) οι χαρακτηρισμοί της σε λίστα χαρακτηρισμοί.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΕ2 (Ρευστομηχανική): Θεωρούμε την τριδιάστατη μόνιμη ροή ιδεατού ρευστού που οφείλεται σε πηγή ρευστού παροχής Q στο σημείο $O = (0, 0, 0)$. Ζητούνται: (8) Η κλήση (το «φόρτωμα») του πακέτου για τη Διανυσματική Ανάλυση. (9) Ο καθορισμός Καρτεσιανών συντεταγμένων και (10) η αναφορά του συστήματος συντεταγμένων. (11) Ο ορισμός του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, y, z) = -Q/(4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ και από αυτό (12) η ταχύτητα $\mathbf{V}(x, y, z)$ του ρευστού και (13) σε λίστα οι τρεις συνιστώσες της u, v και w κι αυτές σαν συναρτήσεις των (x, y, z) . (14) Η επαλήθευση της εξίσωσης της συνεχείας Continuity Equation Verification από τις συνιστώσες (u, v, w) με απλοποίηση. (15) Ανάλογη επαλήθευση με τη χρήση της ταχύτητας \mathbf{V} και (16) η αντίστοιχη επαλήθευση με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας Φ . (17) Σε λίστα Irrotational Flow Verification οι επαληθεύσεις των εξισώσεων του αστρόβιλου της ροής με βάση τις συνιστώσες (u, v, w) της ταχύτητας \mathbf{V} . (18) Ο άμεσος ορισμός του μηδενικού διανύσματος Zero Vector εδώ στις τρεις διαστάσεις και υποχρεωτικά με τη χρήση του (19) και πάλι η παραπάνω επαλήθευση του αστρόβιλου της ροής με βάση την ίδια την ταχύτητα \mathbf{V} και (20) με βάση το δυναμικό ταχύτητας Φ . Προχωράμε τώρα στο γενικό πρόβλημα της τριδιάστατης μόνιμης ροής ιδεατού ρευστού με δυναμικό ταχύτητας $\Phi_{\text{general}}(x, y, z)$ ($\Phi_{\text{general}}[x, y, z]$). Ζητούνται τώρα: (21) η σχετική ταχύτητα $\mathbf{V}_{\text{general}}(x, y, z)$, (22) η επαλήθευση του αστρόβιλου της ροής Irrotational Flow Verification με βάση αυτήν την ταχύτητα $\mathbf{V}_{\text{general}}(x, y, z)$ και το διάνυσμα Zero Vector φυσικά. (23) Ανάλογα, αλλά τώρα με βάση το δυναμικό ταχύτητας $\Phi_{\text{general}}(x, y, z)$. (24) Στη συνέχεια η εξίσωση της συνεχείας Continuity Equation με βάση την ταχύτητα \mathbf{V} και (25) η αντίστοιχη εξίσωση με βάση το δυναμικό ταχύτητας Φ . (26) Απόπειρα επίλυσης της τελευταίας εξίσωσης και (27) το σχετικό σχόλιο comment1. (28) Αντίστοιχο σχόλιο comment2 για τη διδιάστατη ροή και (29) η λύση sol της σχετικής διδιάστατης εξίσωσης με συναρτήσεις f_1 και f_2 σ' αυτή (με f , όχι με C). (30) Από τη λύση αυτή sol η σχετική συνάρτηση $\Phi_{\text{general}}\text{sol}$ και (31) η επαλήθευση verification της αρμονικότητάς της. (32) Τέλος σε λίστα Ideal Fluid Properties οι δύο βασικές ιδιότητες τις οποίες έχει ένα ιδεατό ρευστό.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΕ3 (Καλώδια): Σε εγκάρσιες ελεύθερες ταλαντώσεις καλωδίου ζητούνται: (33) Η σχετική διαφορική εξίσωση Cable PDE, (34) οι χαρακτηρισμοί της characterizations σε λίστα, (35) η γενική λύση της sol2, (36) η ίδια λύση sol2a, αλλά τώρα με συναρτήσεις $f_{1,2}$ αντί για τις $C_{1,2}$ και (37) η μετατροπή της τελευταίας λύσεως sol2a σε νέα μορφή sol2b χωρίς ρίζες. Στη συνέχεια από τη λύση αυτή sol2b (38) η σχετική συνάρτηση $u_s(x, t)$ και (39) η επαλήθευσή της (με απλοποίηση). (40) Σε σχόλιο comment τι παριστάνουν από φυσικής απόψεως οι δύο συναρτήσεις $f_{1,2}$ στην παραπάνω λύση; (41) Σε λίστα απλά οι αλλαγές μεταβλητών σε ξ και η από x και t που χρησιμοποιούνται στη μέθοδο του d'Alembert. (42) Σε λίστα οι ποσότητες A, B, Γ και Δ για τον τύπο της εξίσωσης του καλωδίου.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΕ4 (Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Για συνήθη δοκό σε ιδιοταλαντώσεις ζητούνται: (43) Η σχετική διαφορική εξίσωση Beam PDE. (44) Ο χωρισμός των μεταβλητών για την άγνωστη συνάρτηση. (45) Η νέα μορφή που παίρνει η διαφορική εξίσωση Beam PDE και (46) η τροποποιημένη μορφή της Separated Beam PDE με το χωρισμό των μεταβλητών σε δύο κλάσματα (με απλοποίηση). Κατευθείαν οι σχετικές (47) χωρική διαφορική εξίσωση ODE $_x$ και (48) χρονική διαφορική εξίσωση ODE $_t$. (49) Η λύση sol $_x$ της χωρικής εξίσωσης ODE $_x$ και (50) η σχετική συνάρτηση $X_s(x)$ σε τριγωνομετρική-υπερβολική μορφή (με απλοποίηση). Για την ίδια εξίσωση

ODEx (51) εκθετική υπόθεση για τη λύση της και (52) η μορφή CharEq που αυτή παίρνει με την υπόθεση αυτή (με απλοποίηση). Στη συνέχεια (53) οι λύσεις solm της σχετικής χαρακτηριστικής εξίσωσης και (54) ο αριθμός number των λύσεων.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΕ5 (Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Και πάλι για μια συνήθη δοκό σε ιδιοταλαντώσεις ζητούνται: (55) Λίστα με στοιχεία τους ορισμούς Beam1 = "Αμφίπακτη δοκός", ανάλογα Beam2 για δοκό με πάκτωση αριστερά και κύλιση δεξιά, Beam3 για πρόβολο με στήριξη αριστερά, Beam4 για αμφιέριστη δοκό, Beam5 για δοκό με άρθρωση αριστερά και ελεύθερη δεξιά και Beam6 για ελεύθερη δοκό. Στη συνέχεια (56) οι συνοριακές συνθήκες BoundaryConditions 1 για τη δοκό Beam1 και ανάλογα για τις άλλες πέντε δοκούς: (57) (με 2), (58) (με 3), (59) (με 4), (60) (με 5) και (61) (με 6). (62) Με τη χρήση και του συμβόλου $z = \beta L$ η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων FrequencyEquation[Beam1] και (63) ανάλογα για τη Beam3 και (64) για τη Beam2. (65) Για την τελευταία εξίσωση (με Beam2) λίστα προσεγγίσεων των ριζών της zApproximations για τις δέκα πρώτες ρίζες της και μετά οι αντίστοιχες λίστες (66) β Approximations (67) ω Approximations και (68) Numerical ω Approximations με αναπτύγματα δυνάμεων και ριζών γινομένων. (69) Τέλος οι ιδιομορφές $X_n(x)$ της δοκού μας Beam4.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΕ6 (Δυναμική των Κατασκευών: Ράβδοι): Εδώ θεωρούμε τις αξονικές ταλαντώσεις μιας συνήθους ράβδου με εξωτερική φόρτιση $f(x, t)$. Ζητούνται: (70) Το καθάρισμα της μεταβλητής u . (71) Η σχετική διαφορική εξίσωση AxialBarVibrationsPDE και από αυτήν (72) η αντίστοιχη εξίσωση χωρίς εξωτερική φόρτιση AxialBarVibrationsWithoutLoadingPDE. (73) Η γενική λύση solh της τελευταίας εξισώσεως με συναρτήσεις $g_{1,2}$ και με χρήση της εντολής για ανάπτυγμα δυνάμεων και ριζών γινομένων. Από αυτήν (74) η σχετική συνάρτηση u_{hs} και (75) η επαλήθευση της διαφορικής εξισώσεως (με απλοποίηση). (76) Σε σχόλιο comment πώς δημιουργείται το σύμβολο ∞ με το πληκτρολόγιο; Σε εξαναγκασμένες τώρα αξονικές ταλαντώσεις απλά οι συναρτήσεις-σειρές που πρέπει να υποθεθούν: (77) $u_1(x, t)$ για αμφίπακτη ράβδο και ανάλογα (78) $u_2(x, t)$ για ελεύθερη ράβδο, (79) $u_3(x, t)$ για ράβδο με πάκτωση αριστερά και ελεύθερη δεξιά και (80) $u_4(x, t)$ για αντίστοιχη ράβδο με πάκτωση δεξιά. (81) Η τελευταία συνάρτηση $u_4(x, t)$, τώρα όμως προσεγγιστικά $u_{4a}(x, t)$ με οκτώ όρους. Με τη χρήση της (82) η προσεγγιστική μορφή ReducedAxialBarVibrationsPDE της διαφορικής εξισώσεως AxialBarVibrationsPDE (χωρίς να γραφεί από την αρχή!) με τη χρήση και του συμβόλου $c = \sqrt{EA/(\rho A)}$.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΕ7 (Περιβαλλοντική Υδραυλική: Διάχυση): Εδώ εξετάζουμε τη μονοδιάστατη μεταφορά ρύπου μόνο με διάχυση. Ζητούνται: (83) Η σχεδίαση σε ενιαίο σχήμα της συναρτήσεως σφάλματος και της συμπληρωματικής της στο διάστημα $[0, 4]$ με πάχος των γραφικών παραστάσεων 0.008, σε πλαίσιο με κατάλληλες ενδείξεις κάτω, αριστερά και επάνω και με γραμματοσειρά Arial στις 11 στιγμές. (84) Τώρα η επαλήθευση της βασικής ταυτότητας για τις δύο πιο πάνω συναρτήσεις σε λίστα: χωρίς απλοποίηση, με απλοποίηση και με πλήρη απλοποίηση. (85) Λίστα των αριθμητικών τιμών της συναρτήσεως σφάλματος για $x = 0, 1, \dots, 10$. (86) Ο μετασχηματισμός Laplace LT της συμπληρωματικής συναρτήσεως σφάλματος ως προς t για την τιμή $x/(2a\sqrt{t})$ του ορίσματός της και (87) η επαλήθευσή του με ανάπτυγμα δυνάμεων και ριζών γινομένων και πλήρη απλοποίηση. (88) Σε λίστα οι πρώτες παράγωγοι της συναρτήσεως σφάλματος και της συμπληρωματικής της. (89) Η εξίσωση της διαχύσεως DiffusionPDE στο παρόν μονοδιάστατο πρόβλημα με σταθερά D_0 . (90) Ο ορισμός FP της επιλογής των παραμέτρων στο μετασχηματισμό Fourier που ταιριάζει με τον ορισμό του που υιοθετεί ο Πολιτικός Μηχανικός. (91) Οι μετασχηματισμοί Fourier των συναρτήσεων $\delta(x)$ και $\delta(x-a)$. (92) Ο μετασχηματισμός Fourier FT2 (ως προς τη χωρική μεταβλητή x) του όρου με τη χωρική μερική παράγωγο στην εξίσωση της διαχύσεως DiffusionPDE (χωρίς να γραφεί από την αρχή!) με την ταυτόχρονη χρήση και του συμβόλου $C(\omega, t)$ για το μετασχηματισμό Fourier της άγνωστης συναρτήσεως $c(x, t)$. Με τη χρήση του (93) η συνήθης διαφορική εξίσωση ODE με μετασχηματισμό Fourier (ως προς x) της εξισώσεως της διαχύσεως, (94) η λύση της sol, (95) η αντίστοιχη συνάρτηση $C_s(\omega, t)$, (96) η αντίστροφή της κατά Fourier $c_s(x, t)$ (με τη σταθερά ανεξάρτητη του ω) και (97) η επαλήθευση ver της λύσεως $c_s(x, t)$.

■ Notebook EMIII-ME

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMIII-ME (ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMIII-ME1 ΕΩΣ EMIII-ME7)

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-ME1 (ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ)

In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};

In[2]:= ΌροςΣυσσωρεύσεως = D[c[x, t], t];

In[3]:= ΌροςΔιαχύσεωςΚαιΔιασποράς = D₀ D[c[x, t], {x, 2}];

In[4]:= ΌροςΜεταγωγής = -V D[c[x, t], x];

In[5]:= ΌροςΑποδομήσεωςΠρώτηςΤάξεως = -k c[x, t];

In[6]:= ΔιαφορικήΕξίσωση = ΌροςΣυσσωρεύσεως ==
ΌροςΔιαχύσεωςΚαιΔιασποράς + ΌροςΜεταγωγής + ΌροςΑποδομήσεωςΠρώτηςΤάξεως

Out[6]= $c^{(0,1)}(x, t) == -k c(x, t) - V c^{(1,0)}(x, t) + D_0 c^{(2,0)}(x, t)$

In[7]:= χαρακτηρισμοί = {"Διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους", "δευτέρας τάξεως",
"γραμμική", "ομογενής", "με σταθερούς συντελεστές", "παραβολικού τύπου",
"με άγνωστη συνάρτηση τη c(x,t) και ανεξάρτητες μεταβλητές τις x και t"};

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-ME2 (ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ)

In[8]:= Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]

In[9]:= SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]];

In[10]:= CoordinateSystem

Out[10]= Cartesian

In[11]:= $\Phi[x_, y_, z_] = -Q / (4 \pi \text{Sqrt}[x^2 + y^2 + z^2]);$

In[12]:= V[x_, y_, z_] = Grad[$\Phi[x, y, z]$]

Out[12]= $\left\{ \frac{Qx}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{Qy}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{Qz}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\}$

In[13]:= {u[x_, y_, z_] = V[x, y, z][[1],
v[x, y, z] = V[x, y, z][[2], w[x, y, z] = V[x, y, z][[3]}

Out[13]= $\left\{ \frac{Qx}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{Qy}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{Qz}{4\pi(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right\}$

```

In[14]:= ContinuityEquationVerification =
          D[u[x, y, z], x] + D[v[x, y, z], y] + D[w[x, y, z], z] == 0 // Simplify

Out[14]= True

In[15]:= ContinuityEquationVerification = Div[V[x, y, z]] == 0 // Simplify

Out[15]= True

In[16]:= ContinuityEquationVerification = Laplacian[φ[x, y, z]] == 0 // Simplify

Out[16]= True

In[17]:= IrrotationalFlowVerification = {D[u[x, y, z], y] == D[v[x, y, z], x],
          D[v[x, y, z], z] == D[w[x, y, z], y], D[w[x, y, z], x] == D[u[x, y, z], z]}

Out[17]= {True, True, True}

In[18]:= ZeroVector = {0, 0, 0};

In[19]:= IrrotationalFlowVerification = Curl[V[x, y, z]] == ZeroVector

Out[19]= True

In[20]:= IrrotationalFlowVerification = Curl[Grad[φ[x, y, z]]] == ZeroVector

Out[20]= True

In[21]:= Vgeneral[x_, y_, z_] = Grad[φgeneral[x, y, z]]

Out[21]= {Φgeneral(1,0,0)(x, y, z), Φgeneral(0,1,0)(x, y, z), Φgeneral(0,0,1)(x, y, z)}

In[22]:= IrrotationalFlowVerification = Curl[Vgeneral[x, y, z]] == ZeroVector

Out[22]= True

In[23]:= IrrotationalFlowVerification = Curl[Grad[φgeneral[x, y, z]]] == ZeroVector

Out[23]= True

In[24]:= ContinuityEquation = Div[Vgeneral[x, y, z]] == 0

Out[24]= Φgeneral(0,0,2)(x, y, z) + Φgeneral(0,2,0)(x, y, z) + Φgeneral(2,0,0)(x, y, z) == 0

In[25]:= ContinuityEquation = Laplacian[φgeneral[x, y, z]] == 0

Out[25]= Φgeneral(0,0,2)(x, y, z) + Φgeneral(0,2,0)(x, y, z) + Φgeneral(2,0,0)(x, y, z) == 0

In[26]:= DSolve[ContinuityEquation, φgeneral[x, y, z], {x, y, z}]

Out[26]= DSolve[Φgeneral(0,0,2)(x, y, z) + Φgeneral(0,2,0)(x, y, z) + Φgeneral(2,0,0)(x, y, z) == 0,
          Φgeneral(x, y, z), {x, y, z}]

In[27]:= comment1 = "Η έξοδος της πιο πάνω εντολής DSolve συμπίπτει με την
          είσοδό της. Αυτό συμβαίνει, επειδή η εντολή DSolve δε μπορεί να
          βρει τη γενική λύση της τριδιάστατης εξίσωσης του Laplace, που
          με τη σειρά της δε μπορεί να ορισθεί με απλό μαθηματικό τύπο.";

```



```
In[28]:= comment2 = "Αντίθετα στη διδιδιάστατη περίπτωση, εδώ για
    διδιδιάστατη ροή, η εξίσωση του Laplace έχει απλή κλειστή λύση,
    που καθορίζεται με τη βοήθεια δύο αυθαίρετων συναρτήσεων των
    δύο συζυγών μιγαδικών μεταβλητών  $x+iy$  και  $x-iy$ . Συγκεκριμένα";
```

```
In[29]:= sol = DSolve[Laplacian[ $\Phi$ general[x, y]] == 0,  $\Phi$ general[x, y], {x, y},
    DSolveConstants -> f]
```

```
Out[29]= {{ $\Phi$ general(x, y) -> f(1)(i x + y) + f(2)(y - i x)}}
```

```
In[30]:=  $\Phi$ generalsol[x_, y_] = sol[[1, 1, 2]]
```

```
Out[30]= f(1)(i x + y) + f(2)(y - i x)
```

```
In[31]:= verification = Laplacian[ $\Phi$ generalsol[x, y]] == 0
```

```
Out[31]= True
```

```
In[32]:= IdealFluidProperties = {"ασυμπίεστο: με σταθερή πυκνότητα",
    "χωρίς συνεκτικότητα: με μηδενική συνεκτικότητα ή υξώδες"};
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-ME3 (ΚΑΛΩΔΙΑ)

```
In[33]:= CablePDE = D[u[x, t], {x, 2}] == (1/c^2) D[u[x, t], {t, 2}]
```

```
Out[33]=  $u^{(2,0)}(x, t) == \frac{u^{(0,2)}(x, t)}{c^2}$ 
```

```
In[34]:= characterizations = {"διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους",
    "δευτέρας τάξεως", "γραμμική", "ομογενής", "με σταθερούς συντελεστές",
    "υπερβολικού τύπου", "με άγνωστη συνάρτηση τη  $u(x, y)$ 
    και ανεξάρτητες μεταβλητές τη θέση  $x$  και το χρόνο  $t$ "};
```

```
In[35]:= sol2 = DSolve[CablePDE, u[x, t], {x, t}]
```

```
Out[35]= {{u(x, t) ->  $c_1\left[t + \sqrt{\frac{1}{c^2}} x\right] + c_2\left[t - \sqrt{\frac{1}{c^2}} x\right]$ }}
```

```
In[36]:= sol2a = DSolve[CablePDE, u[x, t], {x, t}, DSolveConstants -> f]
```

```
Out[36]= {{u(x, t) ->  $f(1)\left(t + \sqrt{\frac{1}{c^2}} x\right) + f(2)\left(t - \sqrt{\frac{1}{c^2}} x\right)$ }}
```

```
In[37]:= sol2b = sol2a // PowerExpand
```

```
Out[37]= {{u(x, t) ->  $f(1)\left(t + \frac{x}{c}\right) + f(2)\left(t - \frac{x}{c}\right)$ }}
```

```
In[38]:= us[x_, t_] = sol2b[[1, 1, 2]]
```

```
Out[38]=  $f(1)\left(t + \frac{x}{c}\right) + f(2)\left(t - \frac{x}{c}\right)$ 
```

```
In[39]:= ver2 = CablePDE /. u -> us // Simplify
```

```
Out[39]= True
```

In[40]:= `comment = "Η πρώτη συνάρτηση δηλώνει κίνηση του κύματος
προς τα αριστερά με ταχύτητα V. Επίσης η δεύτερη συνάρτηση
δηλώνει κίνηση του κύματος προς τα δεξιά πάλι με ταχύτητα V";`

In[41]:= `ChangeOfVariables = {ξ = x - c t, η = x + c t};`

In[42]:= `{A = 1, B = 0, Γ = -1 / c^2, Δ = B^2 - 4 A Γ}`

Out[42]= $\left\{1, 0, -\frac{1}{c^2}, \frac{4}{c^2}\right\}$

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-ME4 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

In[43]:= `BeamPDE = EI D[v[x, t], {x, 4}] + ρA D[v[x, t], {t, 2}] == 0`

Out[43]= $\rho A v^{(0,2)}(x, t) + EI v^{(4,0)}(x, t) == 0$

In[44]:= `v[x_, t_] = X[x] T[t]`

Out[44]= $T(t) X(x)$

In[45]:= `BeamPDE`

Out[45]= $\rho A X(x) T''(t) + EI T(t) X^{(4)}(x) == 0$

In[46]:= `SeparatedBeamPDE = BeamPDE[[1]] / v[x, t] == 0 // Simplify`

Out[46]= $\frac{\rho A T''(t)}{T(t)} + \frac{EI X^{(4)}(x)}{X(x)} == 0$

In[47]:= `ODEx = X''''[x] - β4 X[x] == 0`

Out[47]= $X^{(4)}(x) - \beta^4 X(x) == 0$

In[48]:= `ODEt = T''[t] + ω2 T[t] == 0`

Out[48]= $T(t) \omega^2 + T''(t) == 0$

In[49]:= `solx = DSolve[ODEx, X[x], x]`

Out[49]= $\{\{X(x) \rightarrow e^{-x\beta} c_2 + e^{x\beta} c_4 + c_1 \cos(x\beta) + c_3 \sin(x\beta)\}\}$

In[50]:= `Xs[x_] = solx[[1, 1, 2]] // ExpToTrig // Simplify`

Out[50]= $c_1 \cos(x\beta) + (c_2 + c_4) \cosh(x\beta) + c_3 \sin(x\beta) + (c_4 - c_2) \sinh(x\beta)$

In[51]:= `X0[x_] = eμ x`

Out[51]= $e^{x\mu}$

In[52]:= `CharEq = ODEx /. X → X0 // Simplify`

Out[52]= $e^{x\mu} (\mu^4 - \beta^4) == 0$

In[53]:= `solμ = Solve[CharEq[[1, 2]] == 0, μ]`

Out[53]= $\{\{\mu \rightarrow -\beta\}, \{\mu \rightarrow -i\beta\}, \{\mu \rightarrow i\beta\}, \{\mu \rightarrow \beta\}\}$

In[54]:= number = Length[solμ]

Out[54]= 4

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-ME5 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

In[55]:= {Beam1 = "Αμφίπακτη δοκός",
Beam2 = "Δοκός με πάκτωση αριστερά και κύλιση δεξιά",
Beam3 = "Πρόβολος με στήριξη αριστερά", Beam4 = "Αμφιέρευστη δοκός",
Beam5 = "Δοκός με άρθρωση αριστερά και ελεύθερη δεξιά",
Beam6 = "Ελεύθερη δοκός"};

In[56]:= BoundaryConditions1 = {X[0] == 0, X'[0] == 0, X[L] == 0, X'[L] == 0};

In[57]:= BoundaryConditions2 = {X[0] == 0, X'[0] == 0, X[L] == 0, X''[L] == 0};

In[58]:= BoundaryConditions3 = {X[0] == 0, X'[0] == 0, X''[L] == 0, X'''[L] == 0};

In[59]:= BoundaryConditions4 = {X[0] == 0, X''[0] == 0, X[L] == 0, X''[L] == 0};

In[60]:= BoundaryConditions5 = {X[0] == 0, X''[0] == 0, X''[L] == 0, X'''[L] == 0};

In[61]:= BoundaryConditions6 = {X''[0] == 0, X'''[0] == 0, X''[L] == 0, X'''[L] == 0};

In[62]:= FrequencyEquation[Beam1] = Cosh[z] Cos[z] == 1

Out[62]= COS(Z) COSH(Z) == 1

In[63]:= FrequencyEquation[Beam3] = Cosh[z] Cos[z] == -1

Out[63]= COS(Z) COSH(Z) == -1

In[64]:= FrequencyEquation[Beam2] = Tanh[z] == Tan[z]

Out[64]= tanh(z) == tan(z)

In[65]:= zApproximations = Table[(4 n + 1) π / 4, {n, 1, 10}]

Out[65]= $\left\{ \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \frac{21\pi}{4}, \frac{25\pi}{4}, \frac{29\pi}{4}, \frac{33\pi}{4}, \frac{37\pi}{4}, \frac{41\pi}{4} \right\}$

In[66]:= βApproximations = zApproximations / L

Out[66]= $\left\{ \frac{5\pi}{4L}, \frac{9\pi}{4L}, \frac{13\pi}{4L}, \frac{17\pi}{4L}, \frac{21\pi}{4L}, \frac{25\pi}{4L}, \frac{29\pi}{4L}, \frac{33\pi}{4L}, \frac{37\pi}{4L}, \frac{41\pi}{4L} \right\}$

In[67]:= ωApproximations = βApproximations² Sqrt[EI / ρA]

Out[67]= $\left\{ \frac{25\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{16L^2}, \frac{81\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{16L^2}, \frac{169\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{16L^2}, \frac{289\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{16L^2}, \frac{441\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{16L^2}, \right.$
 $\left. \frac{625\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{16L^2}, \frac{841\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{16L^2}, \frac{1089\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{16L^2}, \frac{1369\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{16L^2}, \frac{1681\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}}{16L^2} \right\}$

```
In[68]:= Numerical $\omega$ Approximations = N[ $\omega$ Approximations] // PowerExpand
```

$$\text{Out}[68]= \left\{ \frac{15.4213 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}, \frac{49.9649 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}, \frac{104.248 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}, \frac{178.27 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}, \frac{272.031 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}, \right. \\ \left. \frac{385.531 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}, \frac{518.771 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}, \frac{671.75 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}, \frac{844.468 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}}, \frac{1036.93 \sqrt{EI}}{L^2 \sqrt{\rho A}} \right\}$$

```
In[69]:= X4[n_, x_] = Sin[n  $\pi$  x / L]
```

$$\text{Out}[69]= \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-ME6 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΡΑΒΔΟΙ)

```
In[70]:= Clear[u]
```

```
In[71]:= AxialBarVibrationsPDE = EA D[u[x, t], {x, 2}] + f[x, t] ==  $\rho A$  D[u[x, t], {t, 2}]
```

$$\text{Out}[71]= f(x, t) + EA u^{(2,0)}(x, t) == \rho A u^{(0,2)}(x, t)$$

```
In[72]:= AxialBarVibrationsWithoutLoadingPDE =  
AxialBarVibrationsPDE /. {f[x, t]  $\rightarrow$  0, u  $\rightarrow$  uh}
```

$$\text{Out}[72]= EA uh^{(2,0)}(x, t) == \rho A uh^{(0,2)}(x, t)$$

```
In[73]:= solh = DSolve[AxialBarVibrationsWithoutLoadingPDE,  
uh[x, t], {x, t}, DSolveConstants  $\rightarrow$  g] // PowerExpand
```

$$\text{Out}[73]= \left\{ \left\{ uh(x, t) \rightarrow g(1) \left(t + \frac{x \sqrt{\rho A}}{\sqrt{EA}} \right) + g(2) \left(t - \frac{x \sqrt{\rho A}}{\sqrt{EA}} \right) \right\} \right\}$$

```
In[74]:= uhs[x_, t_] = solh[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Out}[74]= g(1) \left(t + \frac{x \sqrt{\rho A}}{\sqrt{EA}} \right) + g(2) \left(t - \frac{x \sqrt{\rho A}}{\sqrt{EA}} \right)$$

```
In[75]:= verh = AxialBarVibrationsWithoutLoadingPDE /. uh  $\rightarrow$  uhs // Simplify
```

```
Out[75]= True
```

```
In[76]:= comment = "Το σύμβολο  $\infty$  δημιουργείται με το πληκτρολόγιο με Esc inf Esc.";
```

```
In[77]:= u1[x_, t_] = Sum[q[n, t] Sin[n  $\pi$  x / L], {n, 1,  $\infty$ }]
```

$$\text{Out}[77]= \sum_{n=1}^{\infty} q(n, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

```
In[78]:= u2[x_, t_] = Sum[q[n, t] Cos[n  $\pi$  x / L], {n, 1,  $\infty$ }]
```

$$\text{Out}[78]= \sum_{n=1}^{\infty} q(n, t) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

In[79]:= u3[x_, t_] = Sum[q[n, t] Sin[(2 n - 1) π x / (2 L)], {n, 1, ∞}]

$$\text{Out}[79]= \sum_{n=1}^{\infty} q(n, t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

In[80]:= u4[x_, t_] = Sum[q[n, t] Cos[(2 n - 1) π x / (2 L)], {n, 1, ∞}]

$$\text{Out}[80]= \sum_{n=1}^{\infty} q(n, t) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right)$$

In[81]:= u4a[x_, t_] = Sum[q[n, t] Cos[(2 n - 1) π x / (2 L)], {n, 1, 8}]

$$\text{Out}[81]= \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) q(1, t) + \cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) q(2, t) + \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) q(3, t) + \cos\left(\frac{7\pi x}{2L}\right) q(4, t) + \\ \cos\left(\frac{9\pi x}{2L}\right) q(5, t) + \cos\left(\frac{11\pi x}{2L}\right) q(6, t) + \cos\left(\frac{13\pi x}{2L}\right) q(7, t) + \cos\left(\frac{15\pi x}{2L}\right) q(8, t)$$

In[82]:= ReducedAxialBarVibrationsPDE =
AxialBarVibrationsPDE /. {u → u4a, EA → c² ρA} // FullSimplify

$$\text{Out}[82]= \frac{1}{L^2} \left(\rho A \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) (\pi^2 q(1, t) c^2 + 4 L^2 q^{(0,2)}(1, t)) + \cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) (9 \pi^2 q(2, t) c^2 + 4 L^2 q^{(0,2)}(2, t)) + \right. \right. \\ \left. \left. \cos\left(\frac{5\pi x}{2L}\right) (25 \pi^2 q(3, t) c^2 + 4 L^2 q^{(0,2)}(3, t)) + \cos\left(\frac{7\pi x}{2L}\right) (49 \pi^2 q(4, t) c^2 + 4 L^2 q^{(0,2)}(4, t)) + \right. \right. \\ \left. \left. \cos\left(\frac{9\pi x}{2L}\right) (81 \pi^2 q(5, t) c^2 + 4 L^2 q^{(0,2)}(5, t)) + \cos\left(\frac{11\pi x}{2L}\right) (121 \pi^2 q(6, t) c^2 + 4 L^2 q^{(0,2)}(6, t)) + \right. \right. \\ \left. \left. \cos\left(\frac{13\pi x}{2L}\right) (169 \pi^2 q(7, t) c^2 + 4 L^2 q^{(0,2)}(7, t)) + \right. \right. \\ \left. \left. \cos\left(\frac{15\pi x}{2L}\right) (225 \pi^2 q(8, t) c^2 + 4 L^2 q^{(0,2)}(8, t)) \right) - 4 L^2 f(x, t) \right) == 0$$

■ ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜΕ7 (ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ: ΔΙΑΧΥΣΗ)

In[83]:= Plot[{Erf[x], Erfc[x]}, {x, 0, 4},
PlotStyle → Thickness[0.008], Frame → True, FrameLabel →
{ "x", "erf(x), erfc(x)", "ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ", "" },
DefaultFont → {"Arial", 11}];



In[84]:= {identity = Erf[x] + Erfc[x] == 1, identity // Simplify, identity // FullSimplify}

Out[84]= {erf(x) + erfc(x) == 1, erf(x) + erfc(x) == 1, True}

In[85]:= **tb = Table[N[Erf[x]], {x, 0, 10}]**

Out[85]= {0., 0.842701, 0.995322, 0.999978, 1., 1., 1., 1., 1., 1., 1.}

In[86]:= **LT = LaplaceTransform[Erfc[x / (2 a Sqrt[t])], t, s]**

Out[86]= $\frac{e^{-\frac{\sqrt{s} x}{a}}}{s}$

In[87]:= **InverseLaplaceTransform[LT, s, t] // PowerExpand // FullSimplify**

Out[87]= $\text{erfc}\left(\frac{x}{2 a \sqrt{t}}\right)$

In[88]:= **D[{Erf[x], Erfc[x]}, x]**

Out[88]= $\left\{\frac{2 e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}, -\frac{2 e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\right\}$

In[89]:= **DiffusionPDE = D[c[x, t], t] == D0 D[c[x, t], {x, 2}]**

Out[89]= $c^{(0,1)}(x, t) == D_0 c^{(2,0)}(x, t)$

In[90]:= **FP = FourierParameters → {1, -1}**

Out[90]= FourierParameters → {1, -1}

In[91]:= **FourierTransform[{DiracDelta[x], DiracDelta[x - a]}, x, ω, FP]**

Out[91]= {1, $e^{-i a \omega}$ }

In[92]:= **FT2 = FourierTransform[DiffusionPDE[[2]], x, ω, FP] /.
FourierTransform[c[x, t], x, ω] → C[ω, t]**

Out[92]= $-\omega^2 C[\omega, t] D_0$

In[93]:= **ODE = D[C[ω, t], t] == FT2**

Out[93]= $C^{(0,1)}[\omega, t] == -\omega^2 C[\omega, t] D_0$

In[94]:= **sol = DSolve[ODE, C[ω, t], t]**

Out[94]= $\{\{C[\omega, t] \rightarrow e^{-t \omega^2 D_0} C_1\}\}$

In[95]:= **Cs[ω_, t_] = sol[[1, 1, 2]]**

Out[95]= $e^{-t \omega^2 D_0} C_1$

In[96]:= **cs[x_, t_] = InverseFourierTransform[Cs[ω, t], ω, x, FP]**

Out[96]= $\frac{e^{-\frac{x^2}{4 t D_0}} C_1}{2 \sqrt{\pi} \sqrt{t D_0}}$

In[97]:= **ver = DiffusionPDE /. c → cs // Simplify**

Out[97]= True

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMIII-MF

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MF1 (Περιβαλλοντική Υδραυλική: Μεταφορά Ρύπου): [Y] Θεωρούμε τη μεταφορά ρύπου κατά μήκος υδατορρέυματος με μεταγωγή και μοριακή διάχυση. Η ταχύτητα του νερού στο υδατόρρευμα είναι V_x και ο συντελεστής μοριακής διαχύσεως είναι D_x . Παρουσιάζεται επίσης και αποδόμηση του ρύπου πρώτης τάξεως με σχετική σταθερά k . Ζητούνται: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση PollutantTransportPDE για τη συγκέντρωση $c(x, t)$ του ρύπου (στο αριστερό μέλος μόνο η χρονική μερική παράγωγος, όλοι οι άλλοι όροι δεξιά) και οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της Characterizations 1. (β) Υπόθεση (σε συνάρτηση $c_0(x, t)$) για τη λύση με τη μέθοδο της εκθετικής αντικαταστάσεως με σταθερές $i\lambda$ και $i\omega$ και (γ) η σχετική χαρακτηριστική εξίσωση CharacteristicEquation (με απλοποίηση). (δ) Η λύση $sol\omega$ της χαρακτηριστικής αυτής εξισώσεως ως προς ω και η τιμή ω_1 της σταθεράς ω με ανάπτυγμα (εντολή Expand) του αποτελέσματος. (ε) Η λύση $c_1(x, t)$ της διαφορικής εξισώσεως PollutantTransportPDE για την τιμή αυτή ω_1 (με απλοποίηση) και η επαλήθευσή της ver. (στ) Ο μετασχηματισμός Laplace της διαφορικής εξισώσεως PollutantTransportPDE ως προς το χρόνο t . (ζ) Κατάλληλος χωρισμός των μεταβλητών σε συνάρτηση $c_1(x, t)$ για τη λύση της ίδιας εξισώσεως PollutantTransportPDE και χρήση του στην ίδια εξίσωση με αποτέλεσμα την εξίσωση SeparatedPollutantTransportPDE (με απλοποίησή του). (η) Κατάλληλη διαίρεση και των δύο μελών (συγκεκριμένα και του ενός και του άλλου χωριστά), ώστε να επιτευχθεί ο χωρισμός των μεταβλητών x και t , ο οποίος ζητείται με αποτέλεσμα την τελική εξίσωση FinalSeparatedPollutantTransportPDE.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MF2 (Μηχανική των Υλικών: Ελαστικότητα): [Y] Δίνεται η τασική συνάρτηση του Airy (εδώ σε Καρτεσιανές συντεταγμένες x και y)

$$A(x, y) = x \cosh x \cos y + \cos x \cosh y + y \sinh x \sin y.$$

Ζητούνται: (α) Να δηλωθεί η συνάρτηση αυτή στη *Mathematica* και σε ένα σχόλιο comment 1 να αναφερθεί σε ποιο ακριβώς πρόβλημα και υπό ποιες ακριβώς συνθήκες είναι χρήσιμη μια τέτοια συνάρτηση. (β) Για τη συγκεκριμένη αυτή συνάρτηση $A(x, y)$ να υπολογισθούν οι τρεις συνιστώσες των τάσεων σαν συναρτήσεις των x και y (και με απλοποιήσεις). (γ) Να γραφούν σε λίστα οι ισχύουσες εξισώσεις ισορροπίας EquilibriumEquations (με απλοποίηση). (δ) Να δηλωθεί σε συνάρτηση το άθροισμα $s(x, y)$ των ορθών τάσεων (με απλοποίηση) και στη συνέχεια (ε) να γραφεί η εξίσωση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων StressWrittenCompatibilityEquation στην τελική της μορφή συναρτήσεως των τάσεων. (στ) Να υπολογισθούν οι συνιστώσες των παραμορφώσεων σαν συναρτήσεις (με απλοποιήσεις), η τρίτη $\gamma_{xy}(x, y)$ με τη χρήση του μέτρου διατμήσεως G . (ζ) Να υπολογισθεί το μέτρο διατμήσεως G με τη βοήθεια του μέτρου ελαστικότητας E (Ελληνικό E στη *Mathematica*) και του λόγου του Poisson ν . Σε σχόλιο comment 2 να εξηγηθεί για ποιο ακριβώς λόγο το E πρέπει εδώ να είναι Ελληνικό στη *Mathematica*. (η) Να γραφεί η εξίσωση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων StrainCompatibilityEquation με τη χρήση των παραμορφώσεων στην αρχική της μορφή (και πάλι με απλοποίηση).

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MF3 (Ρευστομηχανική: Μόνιμη Διδιάστατη Αστρόβιλη Ροή Ιδεατού Ρευστού): [Y] Στη Ρευστομηχανική σε συγκεκριμένη ροή δίνεται η συνάρτηση ροής

$$\Psi(x, y) = x^{10} - 45x^2y^2(x^6 - y^6) + 210x^4y^4(x^2 - y^2) - y^{10}.$$

Ζητούνται: (α) Σε σχόλιο comment 3 να αναφερθούν όλες οι υποθέσεις υπό τις οποίες είναι χρήσιμη, ισχύει η συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$. (β) Να δηλωθεί η πιο πάνω συνάρτηση $\Psi(x, y)$ και να κληθεί το πακέτο για τη Διανυσματική Ανάλυση. (γ) Να δηλωθούν τώρα Καρτεσιανές συντεταγμένες. (δ) Υποχρεωτικά με τη χρήση του πιο πάνω πακέτου να ελεγχθεί εάν ή όχι η συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$ είναι αρμονική. (Ναι είναι!) (ε) Σε λίστα να υπολογισθούν οι συνιστώσες της ταχύτητας $u(x, y)$ και $v(x, y)$ του ρευστού (με απλοποίηση). (στ) Να γραφεί η εξίσωση της συνεχείας ContinuityEquation (με απλοποίηση). (ζ) Ανάλογα και για την εξίσωση του αστρόβιλου της ροής

IrrotationalFlowEquation. (η) Από την ταχύτητα $u(x,y)$ να υπολογισθεί το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x,y)$ και να ελεγχθεί ότι είναι κι αυτό αρμονική συνάρτηση.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜF4 (Δυναμική των Κατασκευών: Ιδιοσυχνότητες Καμπτικών Ιδιοταλαντώσεων Δοκού): [Υ] Θεωρούμε τις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις προβόλου με πάκτωση στο δεξιό άκρο του $x = L$ και ελεύθερο το αριστερό άκρο του $x = 0$. Ζητούνται: (α) Να εξαλειφθεί προηγουμένη δήλωση του συμβόλου v στη *Mathematica*. (β) Με γνωστές τη δυσκαμψία EI και τη γραμμική πυκνότητα ρA του προβόλου να γραφεί η σχετική διαφορική εξίσωση *BeamPartialDifferentialEquation*. (γ) Να γραφεί κατευθείαν η γενική λύση $X_f(x)$ της σχετικής χωρικής διαφορικής εξίσωσης χωρίς τη χρήση της εκθετικής συναρτήσεως. (δ) Να γραφούν οι ισχύουσες συνοριακές συνθήκες *CantileverBoundaryConditions* και οι αντίστοιχες εξισώσεις *equations* για τη λύση $X_f(x)$ στη θέση της γενικής συναρτήσεως $X(x)$. (ε) Να γραφεί κατευθείαν η συνάρτηση $f(z)$ στη χαρακτηριστική εξίσωση $f(z) = 0$ που προκύπτει για την ποσότητα $z = \beta L$. (στ) Να γίνει σχεδίαση της συναρτήσεως $f(z)$ στο διάστημα $[0, 5]$. (ζ) Να υπολογισθεί η πρώτη ρίζα της z_1 με αρχική προσέγγιση $z_1 \approx 2$ και με ακρίβεια περίπου 80 σημαντικών ψηφίων. (η) Να υπολογισθεί το σχετικό σφάλμα *FunctionError* που δίνει η ρίζα αυτή z_1 στη συνάρτηση $f(z)$ με ακρίβεια 100 ψηφίων.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜF5 (Ταλαντώσεις: Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Απόσβεση): [Υ] Στις ελεύθερες ταλαντώσεις μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος με απόσβεση ζητούνται: (α) Η σχετική ολοκληρωτική εξίσωση *IntegralEquationOfVibrationsWithDamping* με δύο ολοκληρώματα με άγνωστη συνάρτηση τη μετατόπιση $x(t)$ του υλικού σημείου και με γνωστές σταθερές ξ και ω_0 . Σημειώνεται ο όρος στο δεξιό μέλος: $x_0 + (v_0 + 2\xi\omega_0 x_0)t$ με x_0 και v_0 τις δύο αρχικές συνθήκες. (β) Να ξαναγραφεί η ίδια ακριβώς ολοκληρωτική εξίσωση σε απλοποιημένη (με το χέρι!) μορφή *SimplifiedIntegralEquationOfVibrationsWithDamping* (τώρα με ένα ολοκλήρωμα!) και στη συνέχεια να δηλωθεί η ίδια εξίσωση και με το πολύ πιο απλό σύμβολο *ie*. (γ) Σε λίστα *Characterizations2* να δοθούν οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της ολοκληρωτικής αυτής εξίσωσης *ie*. (δ) Να υπολογισθεί η σχετική ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση *IntegrodifferentialEquation* και από αυτήν και η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση *DifferentialEquation1*. Το ίδιο και απευθείας με εξίσωση *DifferentialEquation2* (χωρίς να μεσολαβήσει η ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση) και να ελεγχθεί ότι πρόκειται για την ίδια διαφορική εξίσωση. (ε) Να δηλωθούν οι δύο αρχικές συνθήκες *InitialConditions* και στη συνέχεια (στ) να υπολογισθεί με αυτές η λύση *solution* της διαφορικής εξίσωσης (με απλοποίηση). (ζ) Να γραφεί η λύση αυτή σαν συνάρτηση $x_{s1d}(t)$ (με απλοποίηση) και σαν συνάρτηση $x_{s2d}(t)$ (με πλήρη απλοποίηση). (η) Τέλος για τη συνάρτηση $x_{s2d}(t)$ να γίνουν οι επαληθεύσεις τόσο της διαφορικής εξίσωσης: *DifferentialEquationVerification* όσο και της ολοκληρωτικής εξίσωσης: *IntegralEquationVerification* (με απλοποιήσεις).

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜF6 (Μηχανική των Υλικών: Ισοελαστικότητα): [Υ] Στη Γραμμική Ισοελαστικότητα για διπααραμετρικό υλικό Maxwell γνωρίζουμε την ενδοτικότητα του σε ερπυσμό

$$J(t) = \frac{p_1 + t}{q_1}$$

με t το χρόνο και p_1 και q_1 γνωστές σταθερές. Ζητούνται: (α) Η δήλωση της συναρτήσεως αυτής πρώτα σαν συνάρτηση *MaxwellMaterialJ* και έπειτα με το πιο απλό όνομα *J*. (β) Ο μετασχηματισμός Laplace της $J_L(s)$ (με απλοποίηση) και μετά (γ) η αλγεβρική εξίσωση *AlgebraicEquation* για το μετασχηματισμό Laplace $Y_L(s)$ του μέτρου χαλαρώσεως $Y(t)$ μαζί με τη λύση της *SolutionYL* ως προς $Y_L(s)$. (δ) Η σχετική συνάρτηση $Y_{Ls}(s)$ και η αντίστροφη της κατά Laplace $Y_s(t)$. (ε) Η επαληθεύση *verification* της λύσεως $Y_s(t)$ ως προς τον ολοκληρωτικό τύπο που συνδέει την ενδοτικότητα σε ερπυσμό και το μέτρο χαλαρώσεως. (στ) Η γραφή της Αρχής της Υπερθέσεως του Boltzmann στη Γραμμική Ισοελαστικότητα *BoltzmannSuperpositionPrinciple1* σαν εξίσωση με την παραμόρφωση $\epsilon(t)$ αριστερά και επίσης την τάση $\sigma(t)$ (και την παράγωγο της $\dot{\sigma}(t)$) δεξιά (με απλοποίηση). (ζ) Η ίδια εξίσωση να ξαναγραφεί από την αρχή, τώρα όμως χωρίς παράγωγο της τάσεως δεξιά με το σύμβολο *BoltzmannSuperpositionPrinciple2* (με απλοποίηση). (η) Να δοθούν οι χαρακτηρισμοί της *Characterizations3* με γνωστή την παραμόρφωση $\epsilon(t)$ και άγνωστη την τάση $\sigma(t)$.

■ Notebook EMIII-MF

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMIII-MF (ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMIII-MF1 ΕΩΣ EMIII-MF6)

```
In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MF1 (ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ: ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΡΥΠΟΥ)

■ Η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

```
In[2]:= PollutantTransportPDE =  
      D[c[x, t], t] == -Vx D[c[x, t], x] + Dx D[c[x, t], {x, 2}] - k c[x, t]
```

```
Out[2]= c(0,1)(x, t) == -k c(x, t) - Vx c(1,0)(x, t) + Dx c(2,0)(x, t)
```

```
In[3]:= Characterizations1 = {"διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους",  
      "δευτέρας τάξεως", "γραμμική", "ομογενής", "με σταθερούς συντελεστές",  
      "παραβολικού τύπου", "με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τις x και t"};
```

■ Η επίλυσή της με τη μέθοδο της εκθετικής αντικατάστασης

```
In[4]:= c0[x_, t_] = Exp[i (λ x + ω t)]
```

```
Out[4]= ei(xλ+tω)
```

```
In[5]:= CharacteristicEquation = PollutantTransportPDE /. c -> c0 // Simplify
```

```
Out[5]= ei(xλ+tω) (Dx λ2 + i Vx λ + k + i ω) == 0
```

```
In[6]:= solω = Solve[CharacteristicEquation, ω]
```

```
Out[6]= {{ω -> -i (-Dx λ2 - i Vx λ - k)}}
```

```
In[7]:= ω1 = solω[[1, 1, 2]] // Expand
```

```
Out[7]= i Dx λ2 - Vx λ + i k
```

```
In[8]:= c1[x_, t_] = c0[x, t] /. ω -> ω1 // Simplify
```

```
Out[8]= e-k t - λ (i t Vx - i x + Dx t)
```

```
In[9]:= ver = PollutantTransportPDE /. c -> c1 // Simplify
```

```
Out[9]= True
```

■ Ο μετασχηματισμός Laplace της

```
In[10]:= LaplaceTransform[PollutantTransportPDE, t, s] // Simplify
```

```
Out[10]= (k + s) LaplaceTransform[c(x, t), t, s] + Vx LaplaceTransform[c(1,0)(x, t), t, s] ==  
c(x, 0) + Dx LaplaceTransform[c(2,0)(x, t), t, s]
```

■ Ο χωρισμός των μεταβλητών της

```
In[11]:= c1[x_, t_] := X[x] T[t]
```

```
In[12]:= SeparatedPollutantTransportPDE = PollutantTransportPDE /. c -> c1 // Simplify
```

```
Out[12]= X(x) T'(t) == -T(t) (k X(x) + Vx X'(x) - Dx X''(x))
```

```
In[13]:= FinalSeparatedPollutantTransportPDE =  
SeparatedPollutantTransportPDE[[1]] / c1[x, t] ==  
SeparatedPollutantTransportPDE[[2]] / c1[x, t]
```

```
Out[13]=  $\frac{T'(t)}{T(t)} == -\frac{k X(x) + Vx X'(x) - Dx X''(x)}{X(x)}$ 
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MF-2 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ)

■ Η τασική συνάρτηση του Airy

```
In[14]:= A[x_, y_] = x Cosh[x] Cos[y] + Cos[x] Cosh[y] + y Sinh[x] Sin[y]
```

```
Out[14]= x cos(y) cosh(x) + cos(x) cosh(y) + y sin(y) sinh(x)
```

```
In[15]:= comment1 =
```

"Είναι χρήσιμη στη γραμμική επίπεδη Ελαστικότητα σε στατικά προβλήματα για
λοστροπα ελαστικά μέσα χωρίς δυνάμεις μάζας (καθολικές δυνάμεις) είτε
υπό συνθήκες επίπεδης παραμορφώσεως είτε υπό συνθήκες επίπεδης εντάσεως."

■ Οι συνιστώσες των τάσεων

```
In[16]:= σx[x_, y_] = D[A[x, y], {y, 2}] // Simplify
```

```
Out[16]= -x cos(y) cosh(x) + cos(x) cosh(y) + (2 cos(y) - y sin(y)) sinh(x)
```

```
In[17]:= σy[x_, y_] = D[A[x, y], {x, 2}] // Simplify
```

```
Out[17]= x cos(y) cosh(x) - cos(x) cosh(y) + (2 cos(y) + y sin(y)) sinh(x)
```

```
In[18]:= τxy[x_, y_] = -D[A[x, y], x, y] // Simplify
```

```
Out[18]= -y cos(y) cosh(x) + x sin(y) sinh(x) + sin(x) sinh(y)
```

■ Οι εξισώσεις ισορροπίας και η εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων γραμμένη μέσω των τάσεων

```
In[19]:= EquilibriumEquations = {D[σx[x, y], x] + D[τxy[x, y], y] == 0,
    D[τxy[x, y], x] + D[σy[x, y], y] == 0} // Simplify
```

```
Out[19]= {True, True}
```

```
In[20]:= s[x_, y_] = σx[x, y] + σy[x, y] // Simplify
```

```
Out[20]= 4 cos(y) sinh(x)
```

```
In[21]:= StressWrittenCompatibilityEquation = D[s[x, y], {x, 2}] + D[s[x, y], {y, 2}] == 0
```

```
Out[21]= True
```

■ Οι συνιστώσες των παραμορφώσεων και η σχετική εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων

```
In[22]:= εx[x_, y_] = (1 / E) (σx[x, y] - ν σy[x, y]) // Simplify
```

```
Out[22]= 
$$\frac{-x(\nu + 1) \cos(y) \cosh(x) + (\nu + 1) \cos(x) \cosh(y) - (2(\nu - 1) \cos(y) + y(\nu + 1) \sin(y)) \sinh(x)}{E}$$

```

```
In[23]:= εy[x_, y_] = (1 / E) (σy[x, y] - ν σx[x, y]) // Simplify
```

```
Out[23]= 
$$\frac{x(\nu + 1) \cos(y) \cosh(x) - (\nu + 1) \cos(x) \cosh(y) + (y(\nu + 1) \sin(y) - 2(\nu - 1) \cos(y)) \sinh(x)}{E}$$

```

```
In[24]:= γxy[x_, y_] = τxy[x, y] / G // Simplify
```

```
Out[24]= 
$$\frac{-y \cos(y) \cosh(x) + x \sin(y) \sinh(x) + \sin(x) \sinh(y)}{G}$$

```

```
In[25]:= G = E / (2 (1 + ν))
```

```
Out[25]= 
$$\frac{E}{2(\nu + 1)}$$

```

```
In[26]:= comment2 = "Το σύμβολο E πρέπει να είναι εδώ
    Ελληνικό και όχι Λατινικό, επειδή η Mathematica χρησιμοποιεί
    το Λατινικό E για να δηλώνει τον αριθμό e = 2.71828...";
```

```
In[27]:= StrainCompatibilityEquation =
    D[εx[x, y], {y, 2}] + D[εy[x, y], {x, 2}] - D[γxy[x, y], x, y] == 0 // Simplify
```

```
Out[27]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MF3 (ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΜΟΝΙΜΗ ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΑΣΤΡΟΒΙΛΗ ΡΟΗ ΙΔΕΑΤΟΥ ΡΕΥΣΤΟΥ)

■ Η συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση)

In[28]:= comment3 = "Η συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση) είναι χρήσιμη σε προβλήματα μόνιμης (σταθερής), διδιάστατης (επίπεδης) και αστρόβιλης ροής ιδεατού ρευστού (ασυμπίεστου και χωρίς συνεκτικότητα, ιξώδες).";

In[29]:= Ψ[x_, y_] = x¹⁰ - 45 x² y² (x⁶ - y⁶) + 210 x⁴ y⁴ (x² - y²) - y¹⁰

Out[29]= x¹⁰ + 210 y⁴ (x² - y²) x⁴ - 45 y² (x⁶ - y⁶) x² - y¹⁰

In[30]:= Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]

In[31]:= SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]]

Out[31]= Cartesian(x, y, z)

In[32]:= Laplacian[Ψ[x, y]] == 0 // Simplify

Out[32]= True

■ Οι συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού

In[33]:= {u[x_, y_] = D[Ψ[x, y], y], v[x_, y_] = -D[Ψ[x, y], x]} // Simplify

Out[33]= {-10 (y⁹ - 36 x² y⁷ + 126 x⁴ y⁵ - 84 x⁶ y³ + 9 x⁸ y), -10 (x⁹ - 36 y² x⁷ + 126 y⁴ x⁵ - 84 y⁶ x³ + 9 y⁸ x)}

In[34]:= ContinuityEquation = D[u[x, y], x] + D[v[x, y], y] == 0 // Simplify

Out[34]= True

In[35]:= IrrotationalFlowEquation = D[u[x, y], y] == D[v[x, y], x] // Simplify

Out[35]= True

■ Το δυναμικό ταχύτητας

In[36]:= Φ[x_, y_] = Integrate[u[x, y], x]

Out[36]= -10 y x⁹ + 120 y³ x⁷ - 252 y⁵ x⁵ + 120 y⁷ x³ - 10 y⁹ x

In[37]:= Laplacian[Φ[x, y]] == 0

Out[37]= True

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MF4 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ ΚΑΜΠΤΙΚΩΝ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΔΟΚΟΥ)

```
In[38]:= Clear[v]
```

■ Η διαφορική εξίσωση των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού

```
In[39]:= BeamPartialDifferentialEquation = EI D[v[x, t], {x, 4}] + ρA D[v[x, t], {t, 2}] == 0
```

```
Out[39]= ρA v^(0,2)(x, t) + EI v^(4,0)(x, t) == 0
```

■ Η λύση της σχετικής χωρικής συνήθους διαφορικής εξίσωσης

```
In[40]:= Xf[x_] = A Cosh[β x] + B Sinh[β x] + C Cos[β x] + D Sin[β x];
```

■ Οι συνοριακές συνθήκες

```
In[41]:= CantileverBoundaryConditions = {X''[0] == 0, X'''[0] == 0, X[L] == 0, X'[L] == 0};
```

```
In[42]:= equations = CantileverBoundaryConditions /. x -> Xf
```

```
Out[42]= {A β² - C β² == 0, B β³ - D β³ == 0, C cos(L β) + A cosh(L β) + D sin(L β) + B sinh(L β) == 0,
          D β cos(L β) + B β cosh(L β) - C β sin(L β) + A β sinh(L β) == 0}
```

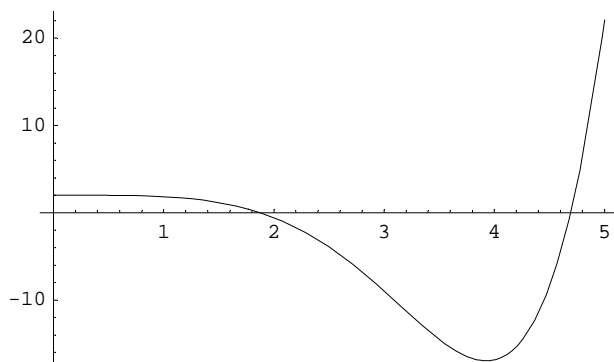
■ Η χαρακτηριστική εξίσωση για τις ιδιοσυχνότητες: η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων

```
In[43]:= f[z_] = Cosh[z] Cos[z] + 1
```

```
Out[43]= cos(z) cosh(z) + 1
```

■ Η πρώτη ιδιοσυχνότητα

```
In[44]:= Plot[f[z], {z, 0, 5}];
```



```
In[45]:= z1 = FindRoot[f[z], {z, 2}, WorkingPrecision -> 80][[1, 2]]
```

```
Out[45]= 1.8751040687119611664453082410782141625701117335310699882454137131056799528404286
```

```
In[46]:= FunctionError = N[f[z1], 100]
```

```
Out[46]= 0. × 10-80
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MF5 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ: ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ)

■ Η ολοκληρωτική εξίσωση

```
In[47]:= IntegralEquationOfVibrationsWithDamping =  
  x[t] + 2 ξ ω0 Integrate[x[τ], {τ, 0, t}] + ω02 Integrate[(t - τ) x[τ], {τ, 0, t}] ==  
  x0 + (v0 + 2 ξ ω0 x0) t
```

```
Out[47]=  $\left(\int_0^t (t-\tau) x(\tau) d\tau\right) \omega_0^2 + 2\xi \left(\int_0^t x(\tau) d\tau\right) \omega_0 + x(t) == x_0 + t(v_0 + 2x_0\xi\omega_0)$ 
```

```
In[48]:= SimplifiedIntegralEquationOfVibrationWithDamping =  
  x[t] + Integrate[(ω02 (t - τ) + 2 ξ ω0) x[τ], {τ, 0, t}] == x0 + (v0 + 2 ξ ω0 x0) t
```

```
Out[48]=  $\int_0^t ((t-\tau)\omega_0^2 + 2\xi\omega_0) x(\tau) d\tau + x(t) == x_0 + t(v_0 + 2x_0\xi\omega_0)$ 
```

```
In[49]:= ie = SimplifiedIntegralEquationOfVibrationWithDamping
```

```
Out[49]=  $\int_0^t ((t-\tau)\omega_0^2 + 2\xi\omega_0) x(\tau) d\tau + x(t) == x_0 + t(v_0 + 2x_0\xi\omega_0)$ 
```

```
In[50]:= Characterizations2 =
```

```
{ "ολοκληρωτική εξίσωση Volterra", "δευτέρου είδους", "συνελκτικού τύπου",  
  "μονοδιάστατη", "γραμμική", "με σταθερούς συντελεστές", "μη ομογενής" };
```

■ Η επίλυσή της με αναγωγή της σε διαφορική εξίσωση

```
In[51]:= IntegrodifferentialEquation = D[ie, t]
```

```
Out[51]=  $\left(\int_0^t x(\tau) d\tau\right) \omega_0^2 + 2\xi x(t) \omega_0 + x'(t) == v_0 + 2x_0\xi\omega_0$ 
```

```
In[52]:= DifferentialEquation1 = D[IntegrodifferentialEquation, t]
```

```
Out[52]=  $x(t) \omega_0^2 + 2\xi x'(t) \omega_0 + x''(t) == 0$ 
```

```
In[53]:= DifferentialEquation2 = D[ie, {t, 2}]
```

```
Out[53]=  $x(t) \omega_0^2 + 2\xi x'(t) \omega_0 + x''(t) == 0$ 
```

```
In[54]:= DifferentialEquation1 == DifferentialEquation2
```

```
Out[54]= True
```

```
In[55]:= InitialConditions = {x[0] == x0, x'[0] == v0}
```

```
Out[55]= {x(0) == x0, x'(0) == v0}
```

```
In[56]:= solution =
```

```
DSolve[{DifferentialEquation2, InitialConditions}, x[t], t] // Simplify
```

```
Out[56]= {{x(t) -> 
$$\frac{e^{-t(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \omega_0} ((-1 + e^{2t\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0}) v_0 + x_0 (\sqrt{\xi^2 - 1} (1 + e^{2t\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0}) + (-1 + e^{2t\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0}) \xi) \omega_0)}{2 \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0}$$
}}
```

```
In[57]:= xs1d[t_] = solution[[1, 1, 2]] // Simplify
```

```
Out[57]= 
$$\frac{e^{-t(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \omega_0} ((-1 + e^{2t\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0}) v_0 + x_0 (\sqrt{\xi^2 - 1} (1 + e^{2t\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0}) + (-1 + e^{2t\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0}) \xi) \omega_0)}{2 \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0}$$

```

```
In[58]:= xs2d[t_] = xs1d[t] // FullSimplify
```

```
Out[58]= 
$$e^{-t\xi \omega_0} \left( x_0 \cosh(t \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0) + \frac{(v_0 + x_0 \xi \omega_0) \sinh(t \sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0)}{\sqrt{\xi^2 - 1} \omega_0} \right)$$

```

■ Οι επαληθεύσεις της διαφορικής εξίσωσης και της ολοκληρωτικής εξίσωσης

```
In[59]:= DifferentialEquationVerification = DifferentialEquation2 /. x -> xs2d // Simplify
```

```
Out[59]= True
```

```
In[60]:= IntegralEquationVerification = ie /. x -> xs2d // Simplify
```

```
Out[60]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MF6 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΙΞΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ)

■ Υλικό Maxwell: η ενδοτικότητα σε ερπυσμό και το μέτρο χαλαρώσεως

```
In[61]:= MaxwellMaterialJ[t_] = (p1 + t) / q1
```

```
Out[61]= 
$$\frac{p1 + t}{q1}$$

```

```
In[62]:= J[t_] = MaxwellMaterialJ[t]
```

```
Out[62]= 
$$\frac{p1 + t}{q1}$$

```

```
In[63]:= JL[s_] = LaplaceTransform[J[t], t, s] // Simplify
```

```
Out[63]= 
$$\frac{p1 s + 1}{q1 s^2}$$

```

```
In[64]:= {AlgebraicEquation = JL[s] YL[s] == 1 / s^2,
SolutionYL = Solve[AlgebraicEquation, YL[s]]}
```

```
Out[64]= 
$$\left\{ \frac{(p1 s + 1) YL(s)}{q1 s^2} == \frac{1}{s^2}, \left\{ \left\{ YL(s) \rightarrow \frac{q1}{p1 s + 1} \right\} \right\} \right\}$$

```

```
In[65]:= YLs[s_] = SolutionYL[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Out[65]} = \frac{q_1}{p_1 s + 1}$$

```
In[66]:= Ys[t_] = InverseLaplaceTransform[YLs[s], s, t]
```

$$\text{Out[66]} = \frac{e^{-\frac{t}{p_1}} q_1}{p_1}$$

```
In[67]:= verification = Integrate[J[t - \tau] Ys[\tau], {\tau, 0, t}] == t
```

```
Out[67]= True
```

■ Η αρχή της υπερθέσεως του Boltzmann για υλικό Maxwell

```
In[68]:= BoltzmannSuperpositionPrinciple1 =
  \epsilon[t] == J[t] \sigma[0] + Integrate[J[t - \tau] \sigma'[\tau], {\tau, 0, t}] // Simplify
```

$$\text{Out[68]} = \epsilon(t) == \frac{\int_0^t (p_1 + t - \tau) \sigma'(\tau) d\tau + (p_1 + t) \sigma(0)}{q_1}$$

```
In[69]:= BoltzmannSuperpositionPrinciple2 =
  \epsilon[t] == J[0] \sigma[t] + Integrate[J'[t - \tau] \sigma[\tau], {\tau, 0, t}] // Simplify
```

$$\text{Out[69]} = \epsilon(t) == \frac{\int_0^t \sigma(\tau) d\tau + p_1 \sigma(t)}{q_1}$$

```
In[70]:= Characterizations3 =
  {"ολοκληρωτική εξίσωση Volterra", "δευτέρου είδους", "συνελκτικού τύπου",
  "μονοδιάστατη", "γραμμική", "με σταθερούς συντελεστές", "μη ομογενής"};
```


ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK EMIII-MG

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MG1 (Ρευστομηχανική: Ροή γύρω από Κύλινδρο): Σε ροή γύρω από κυκλικό κύλινδρο ακτίνας a και με κέντρο το σημείο $(0, 0)$ (ομοιόμορφη ροή στο άπειρο κατά τον άξονα Ox με ταχύτητα V) το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ και η συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση) $\Psi(x, y)$ έχουν τις ακόλουθες μορφές:

$$\Phi(x, y) = Vx \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right), \quad \Psi(x, y) = Vy \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right).$$

Ζητούνται: (α) Να δηλωθεί το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ στη *Mathematica* και να επαληθευθεί με άμεσες παραγωγίσεις *HarmonicityVerification* (και απλοποίηση) ότι είναι αρμονική συνάρτηση. (β) Να γίνει η ίδια εργασία με τη χρήση του πακέτου της Διανυσματικής Αναλύσεως. (γ) Σε σχόλιο *comment 1* να διευκρινισθεί λεπτομερώς σε τι ροή αναφερόμαστε εδώ: χαρακτηρισμοί της. Επίσης σε δεύτερο σχόλιο *comment 2* να εξηγηθεί γιατί η ροή στο άπειρο είναι ομοιόμορφη με ταχύτητα V . (δ) Σε λίστα με δύο στοιχεία να υπολογισθούν οι δύο συνιστώσες της ταχύτητας

$$u = u(x, y) \quad \text{και} \quad v = v(x, y)$$

(σαν συναρτήσεις και με απλοποίηση). (ε) Με αυτές να ελεγχθεί η ισχύς της εξίσωσης της συνεχείας *ContinuityEquation* και του αστρόβιλου της ροής *IrrrotationalFlowEquation* (με απλοποιήσεις). (στ) Να ελεγχθεί η αρμονικότητα των δύο συνιστωσών $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ της ταχύτητας του ρευστού. (ζ) Να δηλωθεί η συνάρτηση ροής $\Psi(x, y)$, να ελεγχθεί *IsHarmonicPsi* (με οποιοδήποτε τρόπο) ότι είναι και αυτή αρμονική και επίσης *IsCorrectPsi* ότι είναι και σωστή με την έννοια ότι συμφωνεί με τις συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού u και v που ήδη έχουν βρεθεί. (η) Σε μια ισοδυναμική γραμμή στο παρόν πεδίο ροής να υπολογισθεί η κλίση της *slope 1* στο σημείο (x, y) με τη χρήση των συνιστωσών της ταχύτητας u και v . Ανάλογα και σε μια γραμμή ροής εκεί με κλίση *slope 2*. Παραπέρα να γίνει και κάποια επαλήθευση των κλίσεων αυτών *SlopesVerification* (με απλοποίηση).

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MG2 (Ρευστομηχανική: Πολικές, Κυλινδρικές και Σφαιρικές Συντεταγμένες): Συνεχίζουμε το προηγούμενο θέμα ... Εδώ ζητούνται επίσης: (α) Σε λίστα οι μετασχηματισμοί *CartesianToPolarTransformations* (με βελάκια!) για τη μετατροπή μιας συναρτήσεως από Καρτεσιανές συντεταγμένες σε πολικές. (β) Με τη χρήση τους (και με απλοποίηση) η συνάρτηση $\Phi_p(r, \theta)$ για το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$. (γ) Στη συνέχεια ο έλεγχος της αρμονικότητάς της με τη δήλωση κυλινδρικών συντεταγμένων στο πακέτο Διανυσματικής Αναλύσεως και τη χρήση του. (δ) Γενικότερα τώρα η εξίσωση του Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες για αυθαίρετη συνάρτηση U στις συντεταγμένες αυτές. (ε) Το ίδιο ακριβώς ερώτημα, αλλά τώρα επιπλέον και με αξονική συμμετρία (ως προς τον άξονα Oz) με δήλωση της εξίσωσης σαν *AxialSymmetryLaplacian*. (στ) Να προσδιορισθεί η λύση *AxialSymmetrySolution* της εξίσωσης που προέκυψε. (ζ) Να δηλωθούν τώρα σφαιρικές συντεταγμένες και με αυτές να προσδιορισθεί και πάλι η εξίσωση του Laplace για μια αυθαίρετη συνάρτηση U . (η) Τώρα για σφαιρική συμμετρία να βρεθεί η εξίσωση του Laplace *SphericalSymmetryLaplacian* και η λύση της *SphericalSymmetrySolution*.

ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MG3 (Πλάκες, Πλακοδοκοί): Θεωρούμε συνήθη πλάκα δυσκαμψίας D_0 υπό στατική κάθετη φόρτιση $p(x, y)$ με βέλος κάμψεως $w(x, y)$. Ζητούνται: (α) Σχόλιο *comment* για τον τύπο υπολογισμού της δυσκαμψίας D_0 και όλα τα μεγέθη τα οποία υπεισέρχονται σ' αυτόν. (β) Η σχετική διαφορική εξίσωση *PlatePDE 1* με άμεσες παραγωγίσεις και σε σχόλιο *comment* οι χαρακτηρισμοί της. (γ) Η ίδια εξίσωση *PlatePDE 2* με τη χρήση του πακέτου Διανυσματικής Αναλύσεως (να φορτωθεί ξανά!) και σύγκριση των δύο εξισώσεων. (δ) Από το βέλος κάμψεως $w(x, y)$ ο υπολογισμός των ροπών κάμψεως M_x και (ε) M_y καθώς και (στ) της ροπής συστροφής M_{xy} στην πλάκα σαν συναρτήσεων των μεταβλητών x και y . (ζ) Ο κατευθείαν καθορισμός της συνήθους διαφορικής εξίσωσης *PlateODE* για πολύ επιμήκη πλάκα (πλακοδοκό) με $w = w(x)$ μόνο και (η) η λύση της *SolutionPlateODE* για σταθερή φόρτιση $p = p_0$.

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-MG4 (Δυναμική των Κατασκευών: Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Δοκού, Ιδιοσυχνοτήτες): Εδώ θεωρούμε συνήθη δοκό μήκους L (με $0 \leq x \leq L$), δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA σε καμπτικές ιδιοταλαντώσεις. Ζητούνται: (α) Η σχετική διαφορική εξίσωση BeamPDE και σε σχόλιο comment οι χαρακτηρισμοί της. (β) Οι ιδιομορφές $X_n(x)$ για αμφιέριστη δοκό σαν συναρτήσεις και του n και του x . (γ) Ο ορισμός συναρτήσεως Orthogonality[m_, n_] για τον έλεγχο της ορθογωνιότητας δύο ιδιομορφών $X_m(x)$ και $X_n(x)$. (δ) Με τη συνάρτηση αυτή ο έλεγχος της ορθογωνιότητας των ιδιομορφών $X_2(x)$ και $X_3(x)$ στην αμφιέριστη δοκό. (ε) Απλά η αρχική έκφραση του βέλους κάμψεως $v(x, t)$ μέσω των κυρίων συντεταγμένων σε εξαναγκασμένες ταλαντώσεις με φόρτιση $p(x, t)$. (στ) Η χαρακτηριστική εξίσωση για τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων ω_n (μέσω πρώτα των σταθερών β_n) με τη χρήση ορίζουσας D_1 τετάρτης τάξεως για δοκό πακτωμένη αριστερά και με κύλιση δεξιά. (ζ) Όμοια για αμφίπακτη δοκό D_2 και (η) για πρόβολο με πάκτωση αριστερά D_3 .

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-MG5 (Ολοκληρωτικές Εξισώσεις: Ελεύθερες Ταλαντώσεις με Απόσβεση): Εδώ θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$x(t) + \int_0^t [\omega_0^2(t - \tau) + 2\xi\omega_0]x(\tau) d\tau = x_0 + (v_0 + 2\xi\omega_0 x_0)t \quad \text{με} \quad t \geq 0$$

και με τα ξ και ω_0 δύο απόλυτα γνωστές θετικές σταθερές μάλιστα με $\xi > 1$. Ζητούνται: (α) Να δηλωθεί η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση στη Mathematica με το σύμβολο ie. (β) Σε σχόλιο comment να εξηγηθεί πολύ λεπτομερώς σε ποιο ακριβώς ενδιαφέρον πρόβλημα του Πολιτικού Μηχανικού παρουσιάζεται. (γ) Να υπολογισθεί ο μετασχηματισμός Laplace LaplaceTransformedIntegralEquation της εξισώσεως αυτής ie. (δ) Να βρεθεί η λύση solution1 της προκύπτουσας πρωτοβάθμιας αλγεβρικής εξισώσεως. (ε) Η ίδια εξίσωση LaplaceTransformedIntegralEquation να γραφεί και σε οπτικά απλοποιημένη μορφή SimplifiedLaplaceTransformedIntegralEquation με τη χρήση του νέου συμβόλου $X(s)$ για το μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συναρτήσεως $x(t)$. (στ) Να βρεθεί η λύση $X(s)$ της σχετικής αλγεβρικής εξισώσεως. (ζ) Να υπολογισθεί ο παρονομαστής denominator στη λύση αυτή $X(s)$ και στη συνέχεια και οι ρίζες του roots. Σε σχόλιο τι ιδιότητα έχουν οι ρίζες αυτές; (η) Από τη λύση solution2 να προσδιορισθεί η λύση $x(t)$ της ολοκληρωτικής εξισώσεως σε απλοποιημένη μορφή $x_{s1}(t)$ και σε πλήρως απλοποιημένη μορφή $x_{s2}(t)$, που είναι πολύ διαφορετική στην εμφάνιση. Σε σχόλιο comment ποιες συναρτήσεις υπεισέρχονται στις λύσεις $x_{s1}(t)$ και $x_{s2}(t)$; Να γίνει και επαλήθευση ver της λύσεως $x_{s2}(t)$ (με απλοποίηση).

ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-MG6 (Ολοκληρωτικές Εξισώσεις: Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Θεωρούμε συνήθη δοκό μήκους L και δυσκαμψίας EI υπό άγνωστη (όχι γνωστή!) στατική κάθετη φόρτιση $p(x)$ με γνωστές αρχικές συνθήκες v_0 , θ_0 , M_0 και Q_0 στο αριστερό άκρο της $x = 0$. Το βέλος κάμψεως της δοκού δηλώνεται με $v(x)$ (με $0 \leq x \leq L$) και θεωρείται εδώ γνωστό. (Πρόκειται για ένα **αντίστροφο πρόβλημα** στη Μηχανική των Υλικών!) Ζητούνται: (α) Σε σχόλιο comment να δηλωθούν οι καλύτεροι τεχνικοί όροι που χρησιμοποιεί ο Πολιτικός Μηχανικός για τις τέσσερις πιο πάνω αρχικές συνθήκες. (β) Να δηλωθούν ρητά οι σχετικές τέσσερις αρχικές συνθήκες BeamInitialConditions βέβαια ως προς το βέλος κάμψεως $v(x)$ της δοκού και τις παραγώγους του. (γ) Με τη χρήση των αρχικών συνθηκών v_0 , θ_0 , M_0 και Q_0 να δηλωθεί η σχετική ολοκληρωτική εξίσωση BeamIntegralEquation και (δ) να αναφερθούν σε λίστα οι λεπτομερείς χαρακτηρισμοί της Characterizations. (ε) Με διαδοχικές παραγωγίσεις να αναχθεί η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση σε ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις BeamIntegrodifferentialEquation1 και παραπέρα (με 2, 3, κλπ., αν χρειάζεται) μέχρι και (στ) τη διαφορική εξίσωση BeamDifferentialEquation. (ζ) Σε σχόλιο να εξηγηθεί λεπτομερώς αν είναι σωστός ή όχι ο όρος «διαφορική εξίσωση» υπό τις παρούσες συνθήκες. Πότε θα ήταν; (η) Άλλη δυνατότητα αποτελεί η χρήση της μεθόδου του μετασχηματισμού Laplace. Να υπολογισθεί επομένως ο μετασχηματισμός Laplace της ολοκληρωτικής εξισώσεως LaplaceTransformedBeamIntegralEquation και στη συνέχεια η λύση sol της αλγεβρικής εξισώσεως που προκύπτει.

■ Notebook EMIII-MG

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMIII-MG (ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMIII-MG1 ΕΩΣ EMIII-MG6)

```
In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MG1 (ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ)

■ Το δυναμικό ταχύτητας

```
In[2]:=  $\Phi[x_, y_] = V x (1 + a^2 / (x^2 + y^2));$ 
```

```
In[3]:= HarmonicityVerification = D[ $\Phi[x, y]$ , {x, 2}] + D[ $\Phi[x, y]$ , {y, 2}] == 0 // Simplify
```

```
Out[3]= True
```

```
In[4]:= Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]
```

```
In[5]:= SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]]
```

```
Out[5]= Cartesian(x, y, z)
```

```
In[6]:= Laplacian[ $\Phi[x, y]$ ] == 0 // Simplify
```

```
Out[6]= True
```

■ Σχόλια για τη ροή και οι συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού

```
In[7]:= comment1 = "Αναφερόμαστε εδώ σε μια διδιάστατη (επίπεδη), μόνιμη (σταθερή) και αστρόβιλη ροή ιδεατού ρευστού. Ιδεατό είναι ένα ρευστό που έχει σταθερή πυκνότητα και δεν έχει ιξώδες, συνεκτικότητα";
```

```
In[8]:= comment2 =
```

"Η ροή στο άπειρο είναι ομοιόμορφη και έχει ταχύτητα V κατά μήκος του άξονα x . Τούτο προκύπτει εύκολα από τους τύπους που δίνουν τις δύο συνιστώσες της ταχύτητας του ρευστού $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ από το δυναμικό ταχύτητας Φ ή/και τη συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση) Ψ με παραγωγίσιους τους. Συγκεκριμένα παρατηρούμε αμέσως ότι $u(x, y) = \partial\Phi/\partial x = \partial\Psi/\partial y = V$, όταν το x τείνει στο συν ή πλην άπειρο. Επίσης ότι $v(x, y) = \partial\Phi/\partial y = -\partial\Psi/\partial x = 0$ στην ίδια ακριβώς περίπτωση. Αυτά φαίνονται ακόμη πιο αναλυτικά στην αμέσως πιο κάτω εντολή πάλι για x να τείνει στο συν ή πλην άπειρο.";

```
In[9]:= {u[x_, y_] = D[ $\Phi[x, y]$ , x], v[x_, y_] = D[ $\Phi[x, y]$ , y]} // Simplify
```

```
Out[9]=  $\left\{ \frac{V(y^2 - x^2)a^2 + (x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2a^2 Vxy}{(x^2 + y^2)^2} \right\}$ 
```

■ Η εξίσωση της συνεχείας και το αστρόβιλο της ροής

```
In[10]:= ContinuityEquation = D[u[x, y], x] + D[v[x, y], y] == 0 // Simplify
```

```
Out[10]= True
```

```
In[11]:= IrrotationalFlowEquation = D[u[x, y], y] - D[v[x, y], x] == 0 // Simplify
```

```
Out[11]= True
```

```
In[12]:= {Laplacian[u[x, y]] == 0, Laplacian[v[x, y]] == 0} // Simplify
```

```
Out[12]= {True, True}
```

■ Η συνάρτηση ροής (ή ροϊκή συνάρτηση)

```
In[13]:= Ψ[x_, y_] = V y (1 - a^2 / (x^2 + y^2))
```

```
Out[13]= V y (1 -  $\frac{a^2}{x^2 + y^2}$ )
```

```
In[14]:= IsHarmonicΨ = Laplacian[Ψ[x, y]] == 0 // Simplify
```

```
Out[14]= True
```

```
In[15]:= IsCorrectΨ = {D[Ψ[x, y], y] == u[x, y], -D[Ψ[x, y], x] == v[x, y]} // Simplify
```

```
Out[15]= {True, True}
```

■ Η ορθογωνιότητα των ισοδυναμικών γραμμών και των γραμμών ροής

```
In[16]:= slope1 = -u[x, y] / v[x, y] // Simplify
```

```
Out[16]=  $\frac{(y^2 - x^2) a^2 + (x^2 + y^2)^2}{2 a^2 x y}$ 
```

```
In[17]:= slope2 = v[x, y] / u[x, y] // Simplify
```

```
Out[17]=  $\frac{2 a^2 x y}{a^2 (x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2}$ 
```

```
In[18]:= SlopesVerification = slope1 slope2 == -1 // Simplify
```

```
Out[18]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MG2 (ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΠΟΛΙΚΕΣ, ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ)

■ Το δυναμικό ταχύτητας σε ροή γύρω από κύλινδρο σε πολικές συντεταγμένες

```
In[19]:= CartesianToPolarTransformations = {x → r Cos[θ], y → r Sin[θ]};
```

In[20]:= $\Phi[\mathbf{r}_-, \theta_-] = \Phi[\mathbf{x}, \mathbf{y}] /. \text{CartesianToPolarTransformations} // \text{Simplify}$

$$\text{Out}[20]= \frac{(a^2 + r^2) V \cos(\theta)}{r}$$

In[21]:= $\text{SetCoordinates}[\text{Cylindrical}[r, \theta, z]]$

Out[21]= $\text{Cylindrical}(r, \theta, z)$

In[22]:= $\text{Laplacian}[\Phi[\mathbf{r}, \theta]] == 0 // \text{Simplify}$

Out[22]= True

■ Η Λαπλασιανή σε κυλινδρικές συντεταγμένες

In[23]:= $\text{Laplacian}[U[r, \theta, z]] == 0 // \text{Simplify}$

$$\text{Out}[23]= U^{(0,0,2)}(r, \theta, z) + \frac{U^{(0,2,0)}(r, \theta, z)}{r^2} + \frac{U^{(1,0,0)}(r, \theta, z)}{r} + U^{(2,0,0)}(r, \theta, z) == 0$$

■ Συμμετρία γύρω από άξονα

In[24]:= $\text{AxialSymmetryLaplacian} = \text{Laplacian}[U[r]] == 0 // \text{Simplify}$

$$\text{Out}[24]= \frac{U'(r)}{r} + U''(r) == 0$$

In[25]:= $\text{AxialSymmetrySolution} = \text{DSolve}[\text{AxialSymmetryLaplacian}, U[r], r]$

Out[25]= $\{\{U(r) \rightarrow c_2 + c_1 \log(r)\}\}$

■ Η Λαπλασιανή σε σφαιρικές συντεταγμένες

In[26]:= $\text{SetCoordinates}[\text{Spherical}[\rho, \theta, \phi]]$

Out[26]= $\text{Spherical}(\rho, \theta, \phi)$

In[27]:= $\text{Laplacian}[U[\rho, \theta, \phi]] == 0 // \text{Simplify}$

$$\text{Out}[27]= \frac{U^{(2,0,0)}(\rho, \theta, \phi) \rho^2 + 2 U^{(1,0,0)}(\rho, \theta, \phi) \rho + \csc^2(\theta) U^{(0,0,2)}(\rho, \theta, \phi) + \cot(\theta) U^{(0,1,0)}(\rho, \theta, \phi) + U^{(0,2,0)}(\rho, \theta, \phi)}{\rho^2} == 0$$

■ Συμμετρία γύρω από σημείο

In[28]:= $\text{SphericalSymmetryLaplacian} = \text{Laplacian}[U[\rho]] == 0 // \text{Simplify}$

$$\text{Out}[28]= \frac{2 U'(\rho)}{\rho} + U''(\rho) == 0$$

In[29]:= $\text{SphericalSymmetrySolution} = \text{DSolve}[\text{SphericalSymmetryLaplacian}, U[\rho], \rho]$

Out[29]= $\{\{U(\rho) \rightarrow c_2 - \frac{c_1}{\rho}\}\}$

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MG3 (ΠΛΑΚΕΣ, ΠΛΑΚΟΔΟΚΟΙ)

■ Η δυσκαμψία της πλάκας

In[30]:= comment = "Ο πολύ γνωστός τύπος για τη δυσκαμψία D_0 μιας συνήθους πλάκας είναι $D_0 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$. Στον τύπο αυτό υπεισέρχονται το πάχος h της πλάκας (και μάλιστα στην τρίτη δύναμη), το μέτρο ελαστικότητας E του υλικού της (που θεωρείται ισότροπο και γραμμικά ελαστικό) και ο λόγος του Poisson ν του ίδιου υλικού.";

■ Η διαφορική εξίσωση της πλάκας

In[31]:= PlatePDE1 =

$$D[w[x, y], \{x, 4\}] + 2 D[w[x, y], \{x, 2\}, \{y, 2\}] + D[w[x, y], \{y, 4\}] == p[x, y] / D0$$

Out[31]= $w^{(0,4)}(x, y) + 2 w^{(2,2)}(x, y) + w^{(4,0)}(x, y) == \frac{p(x, y)}{D0}$

In[32]:= comment = "Πρόκειται για διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, τετάρτης τάξεως, γραμμική, μη ομογενή και με σταθερούς συντελεστές. Έχει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τις Καρτεσιανές συντεταγμένες x και y . Δεν ορίζεται ο τύπος της.";

In[33]:= Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]

In[34]:= SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]];

In[35]:= PlatePDE2 = Biharmonic[w[x, y]] == p[x, y] / D0

Out[35]= $w^{(0,4)}(x, y) + 2 w^{(2,2)}(x, y) + w^{(4,0)}(x, y) == \frac{p(x, y)}{D0}$

In[36]:= PlatePDE1 == PlatePDE2

Out[36]= True

■ Οι ροπές κάμψεως και συστροφής στην πλάκα

In[37]:= Mx[x_, y_] = -D0 (D[w[x, y], \{x, 2\}] + \nu D[w[x, y], \{y, 2\}])

Out[37]= $-D0 (\nu w^{(0,2)}(x, y) + w^{(2,0)}(x, y))$

In[38]:= My[x_, y_] = -D0 (D[w[x, y], \{y, 2\}] + \nu D[w[x, y], \{x, 2\}])

Out[38]= $-D0 (w^{(0,2)}(x, y) + \nu w^{(2,0)}(x, y))$

In[39]:= Mxy[x_, y_] = D0 (\nu - 1) D[w[x, y], x, y]

Out[39]= $D0 (\nu - 1) w^{(1,1)}(x, y)$

■ Πλακοδοκός και η λύση της σχετικής διαφορικής εξίσωσης

```
In[40]:= PlateODE = D[w[x], {x, 4}] == p[x] / D0
```

```
Out[40]= w(4)(x) ==  $\frac{p(x)}{D0}$ 
```

```
In[41]:= SolutionPlateODE = DSolve[PlateODE /. p[x] -> p0, w[x], x]
```

```
Out[41]= {{w(x) ->  $\frac{p0 x^4}{24 D0} + c_4 x^3 + c_3 x^2 + c_2 x + c_1$ }}
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MG4 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΔΟΚΟΥ, ΙΔΙΟΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ)

■ Η διαφορική εξίσωση των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού

```
In[42]:= Clear[v]; BeamPDE = EI D[v[x, t], {x, 4}] + ρA D[v[x, t], {t, 2}] == 0
```

```
Out[42]= ρA v(0,2)(x, t) + EI v(4,0)(x, t) == 0
```

```
In[43]:= comment = "Πρόκειται για διαφορική εξίσωση με μερικές  
    παραγώγους, τετάρτης τάξεως, γραμμική, ομογενή και με σταθερούς  
    συντελεστές. Έχει δύο ανεξάρτητες μεταβλητές: τη θέση x κατά  
    μήκος της δοκού και το χρόνο t. Δεν ορίζεται ο τύπος της.";
```

■ Η ορθογωνιότητα των ιδιομορφών αμφιέρειστης δοκού

```
In[44]:= X[n_, x_] := Sin[n π x / L]
```

```
In[45]:= Orthogonality[m_, n_] := Integrate[X[m, x] X[n, x], {x, 0, L}];  
    Orthogonality[2, 3]
```

```
Out[45]= 0
```

■ Το βέλος κάμψεως σε εξαναγκασμένες καμπτικές ταλαντώσεις δοκού

```
In[46]:= v0[x_, t_] = Sum[q[n, t] X[n, x], {n, Infinity}]
```

```
Out[46]=  $\sum_{n=1}^{\infty} q(n, t) X(n, x)$ 
```

■ Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις για τις ιδιοσυχνότητες

```
In[47]:= D1 = Det[{{1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 1}, {Cosh[z], Sinh[z], Cos[z], Sin[z]},  
    {Cosh[z], Sinh[z], -Cos[z], -Sin[z]}}] == 0 // Simplify
```

```
Out[47]= 2 cosh(z) sin(z) == 2 cos(z) sinh(z)
```

```
In[48]:= D2 = Det[{{1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 1}, {Cosh[z], Sinh[z], Cos[z], Sin[z]},
  {Sinh[z], Cosh[z], -Sin[z], Cos[z]}}] == 0 // Simplify
```

```
Out[48]= 2 Cos(z) Cosh(z) == 2
```

```
In[49]:= D3 = Det[{{1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 1}, {Cosh[z], Sinh[z], -Cos[z], -Sin[z]},
  {Sinh[z], Cosh[z], Sin[z], -Cos[z]}}] == 0 // Simplify
```

```
Out[49]= 2 Cos(z) Cosh(z) + 2 == 0
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MG5 (ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ)

■ Η ολοκληρωτική εξίσωση

```
In[50]:= ie = x[t] + Integrate[(ω0^2 (t - τ) + 2 ξ ω0) x[τ], {τ, 0, t}] == x0 + (v0 + 2 ξ ω0 x0) t
```

```
Out[50]= ∫₀ᵗ ((t-τ) ω₀² + 2 ξ ω₀) x(τ) dτ + x(t) == x₀ + t(v₀ + 2 x₀ ξ ω₀)
```

```
In[51]:= comment =
```

"Η πιο πάνω ολοκληρωτική εξίσωση ie παρουσιάζεται στο πρόβλημα των ελεύθερων ταλαντώσεων (με απόσβεση) μονοβάθμιου μηχανικού συστήματος μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα. Στην ολοκληρωτική αυτή εξίσωση υπεισέρχονται επίσης η αρχική θέση x_0 και η αρχική ταχύτητα v_0 του υλικού σημείου."

■ Επίλυση με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace

```
In[52]:= LaplaceTransformedIntegralEquation = LaplaceTransform[ie, t, s]
```

```
Out[52]= ω₀ ( 2 ξ / s + ω₀ / s² ) LaplaceTransform[x(t), t, s] + LaplaceTransform[x(t), t, s] == v₀ / s² + x₀ / s + 2 x₀ ξ ω₀ / s²
```

```
In[53]:= solution1 = Solve[LaplaceTransformedIntegralEquation,
  LaplaceTransform[x[t], t, s]] // Simplify
```

```
Out[53]= { { LaplaceTransform[x(t), t, s] → (v₀ + s x₀ + 2 x₀ ξ ω₀) / (s² + 2 ξ ω₀ s + ω₀²) } }
```

```
In[54]:= SimplifiedLaplaceTransformedIntegralEquation =
  LaplaceTransformedIntegralEquation /. LaplaceTransform[x[t], t, s] → X[s]
```

```
Out[54]= ω₀ ( 2 ξ / s + ω₀ / s² ) X(s) + X(s) == v₀ / s² + x₀ / s + 2 x₀ ξ ω₀ / s²
```

```
In[55]:= solution2 =
```

```
Solve[SimplifiedLaplaceTransformedIntegralEquation, X[s]] // Simplify
```

```
Out[55]= { { X(s) → (v₀ + s x₀ + 2 x₀ ξ ω₀) / (s² + 2 ξ ω₀ s + ω₀²) } }
```


■ Οι ρίζες του παρονομαστή

```
In[56]:= denominator = Denominator[solution2[[1, 1, 2, 2]]]
```

```
Out[56]= s2 + 2 ξ ω0 s + ω02
```

```
In[57]:= roots = Solve[denominator == 0, s] // Simplify
```

```
Out[57]= {{s → -(ξ + √(ξ2 - 1)) ω0}, {s → (√(ξ2 - 1) - ξ) ω0}}
```

```
In[58]:= comment = "Οι δύο αυτές ρίζες είναι πραγματικές και αρνητικές.";
```

■ Η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

```
In[59]:= xs1[t_] = InverseLaplaceTransform[solution2[[1, 1, 2]], s, t] // Simplify
```

```
Out[59]= 
$$\frac{e^{-t(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0}((-1 + e^{2t\sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0})v_0 + x_0(\sqrt{\xi^2 - 1}(1 + e^{2t\sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0}) + (-1 + e^{2t\sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0})\xi)\omega_0)}{2\sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0}$$

```

```
In[60]:= xs2[t_] = xs1[t] // FullSimplify
```

```
Out[60]= 
$$e^{-t\xi\omega_0} \left( x_0 \cosh(t\sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0) + \frac{(v_0 + x_0\xi\omega_0) \sinh(t\sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0)}{\sqrt{\xi^2 - 1}\omega_0} \right)$$

```

```
In[61]:= comment = "Στη λύση xs1(t) υπεισέρχεται μόνο η εκθετική συνάρτηση.  
Αντίθετα στη λύση xs2(t) υπεισέρχονται οι συναρτήσεις υπερβολικό  
συννημίτονο και υπερβολικό ημίτονο αντί για την εκθετική συνάρτηση.";
```

```
In[62]:= ver = ie /. x → xs2 // Simplify
```

```
Out[62]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MG6 (ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

■ Οι αρχικές συνθήκες στη δοκό

```
In[63]:= comment = "v0 είναι το βέλος κάμψευς, θ0 η στροφή (ή γωνία  
στροφής), που είναι σχεδόν ίση με την κλίση, M0 η ροπή κάμψευς (  
ή καμπτική ροπή) και q0 η τέμνουσα δύναμη. Και οι τέσσερις αυτές  
ποσότητες αναφέρονται εδώ στο αριστερό άκρο x = 0 της δοκού.";
```

```
In[64]:= BeamInitialConditions =
```

```
{v[0] == v0, v'[0] == θ0, v''[0] == M0 / EI, v'''[0] == Q0 / EI}
```

```
Out[64]= {v(0) == v0, v'(0) == θ0, v''(0) ==  $\frac{M_0}{EI}$ , v'''(0) ==  $\frac{Q_0}{EI}$ }
```

■ Η ολοκληρωτική εξίσωση της δοκού

```
In[65]:= BeamIntegralEquation = v[x] == v[0] + x v'[0] + (x^2 / 2) v''[0] +
      (x^3 / 6) v'''[0] + (1 / (6 EI)) Integrate[(x - ξ)^3 p[ξ], {ξ, 0, x}]
```

$$\text{Out[65]= } v(x) == \frac{1}{6} v^{(3)}(0) x^3 + \frac{1}{2} v''(0) x^2 + v'(0) x + \frac{\int_0^x (x-\xi)^3 p(\xi) d\xi}{6EI} + v(0)$$

```
In[66]:= Characterizations =
      {"ολοκληρωτική εξίσωση Volterra", "πρώτου είδους", "συνελκτικού τύπου",
      "μονοδιάστατη", "γραμμική", "με σταθερούς συντελεστές", "μη ομογενής"};
```

■ Αναγωγή σε ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις και σε διαφορική εξίσωση

```
In[67]:= BeamIntegrodifferentialEquation1 = D[BeamIntegralEquation, x]
```

$$\text{Out[67]= } v'(x) == \frac{1}{2} v^{(3)}(0) x^2 + v''(0) x + \frac{\int_0^x (x-\xi)^2 p(\xi) d\xi}{2EI} + v'(0)$$

```
In[68]:= BeamIntegrodifferentialEquation2 = D[BeamIntegrodifferentialEquation1, x]
```

$$\text{Out[68]= } v''(x) == \frac{\int_0^x (x-\xi) p(\xi) d\xi}{EI} + v''(0) + x v^{(3)}(0)$$

```
In[69]:= BeamIntegrodifferentialEquation3 = D[BeamIntegrodifferentialEquation2, x]
```

$$\text{Out[69]= } v^{(3)}(x) == \frac{\int_0^x p(\xi) d\xi}{EI} + v^{(3)}(0)$$

```
In[70]:= BeamDifferentialEquation = D[BeamIntegrodifferentialEquation3, x]
```

$$\text{Out[70]= } v^{(4)}(x) == \frac{p(x)}{EI}$$

```
In[71]:= comment = "Πρόκειται για διαφορική εξίσωση εάν είναι γνωστή η φόρτιση p(x)
      και άγνωστο το βέλος κάμψης v(x) (ευθύ πρόβλημα). Στην αντίθετη
      περίπτωση (στο αντίστροφο πρόβλημα) πρόκειται απλά για έναν τύπο
      που δίνει τη φόρτιση p(x) που οφείλεται στο βέλος κάμψης v(x).";
```

■ Επίλυση με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace

```
In[72]:= LaplaceTransformedBeamIntegralEquation =
      LaplaceTransform[BeamIntegralEquation, x, s]
```

$$\text{Out[72]= } \text{LaplaceTransform}[v(x), x, s] == \frac{\text{LaplaceTransform}[p(x), x, s]}{EI s^4} + \frac{v(0)}{s} + \frac{v'(0)}{s^2} + \frac{v''(0)}{s^3} + \frac{v^{(3)}(0)}{s^4}$$

```
In[73]:= sol = Solve[LaplaceTransformedBeamIntegralEquation,
      LaplaceTransform[p[x], x, s]] // Simplify
```

$$\text{Out[73]= } \{ \{ \text{LaplaceTransform}[p(x), x, s] \rightarrow EI (\text{LaplaceTransform}[v(x), x, s] s^4 - v(0) s^3 - v'(0) s^2 - v''(0) s - v^{(3)}(0)) \} \}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK ΕΜΙΙΙ-ΜΗ

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΗ1 (Εξίσωση του Laplace): Ζητούνται: (1) Πρώτα-πρώτα η λίστα των δύο εντολών για τη μη εκτύπωση πιθανών ορθογραφικών λαθών. (2) Η διδιάστατη εξίσωση του Laplace `Laplace2PDEa`. (3) Η κλήση (το φόρτωμα) του πακέτου για τη Διανυσματική Ανάλυση. (4) Ο καθορισμός Καρτεσιανών συντεταγμένων. (5) Το σύστημα συντεταγμένων που έχει καθορισθεί. (6) Με τη χρήση του πιο πάνω πακέτου και πάλι η διδιάστατη εξίσωση του Laplace, τώρα `Laplace2PDEb` και (7) η λύση της `sol` υποχρεωτικά με τη χρήση ειδικής επιλογής για τη χρησιμοποίηση του συμβόλου f στις αυθαίρετες συναρτήσεις. (8) Η σχετική συνάρτηση $u_s(x, y)$ και (9) η επαλήθευση `ver` της λύσεως.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΗ2 (Μηχανική των Υλικών: Τασική Συνάρτηση του Airy): Στην επίπεδη Ελαστικότητα Ζητούνται: (10) Με ειδική εντολή η διαρμονική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση την $A(x, y)$. Θεωρώντας την σαν τασική συνάρτηση του Airy οι τάσεις (11) $\sigma_x(x, y)$, (12) $\sigma_y(x, y)$ και (13) $\tau_{xy}(x, y)$. (14) Η πρώτη εξίσωση ισορροπίας `EquilibriumEquation1` και (15) η αντίστοιχη δεύτερη εξίσωση (αλλ' αυτή με 2). (16) Σχόλιο `comment1` για το εάν πληρούνται ή όχι οι εξισώσεις αυτές γενικά: για μη διαρμονική συνάρτηση $A(x, y)$. (17) Η εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων `CompatibilityEquation` γραμμένη αρχικά με τη βοήθεια των τάσεων και (18) σχόλιο `comment2` για το εάν πληρούται γενικά ή όχι. (19) Πέντε γραμμές σχόλιο `comment3` για την ιστορία της τελευταίας εξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΗ3 (Ρευστομηχανική: Ιδεατό Ρευστό): Θεωρούμε τη μόνιμη, αστρόβιλη, τριδιάστατη ροή ιδεατού ρευστού. Ζητούνται: (20) Η άμεση γραφή της εξισώσεως `PDEPhi` για το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y, z)$ και (21) σε λίστα οι τρεις σχετικές συνιστώσες της ταχύτητας (u, v, w) σαν συναρτήσεις. (22) Με τη χρήση τους η εξίσωση της συνεχείας `ContinuityEquation1`. (23) Με τη χρήση ειδικής εντολής η διανυσματική ταχύτητα $\mathbf{V}(x, y, z)$ του ρευστού από το δυναμικό $\Phi(x, y, z)$. (24) Με τη χρήση της \mathbf{V} ξανά η εξίσωση της συνεχείας (τώρα με 2). (25) Η επαλήθευση `ver1` ότι οι εξισώσεις της συνεχείας που βρέθηκαν συμπίπτουν. (26) Με τη χρήση ειδικής εντολής ο στροβιλισμός (η περιστροφή) της ταχύτητας \mathbf{V} . Η επαλήθευση του αστρόβιλου της παρούσας ροής (27) με τη χρήση της ταχύτητας \mathbf{V} : `ver2a` και (28) με τη χρήση του δυναμικού ταχύτητας $\Phi(x, y, z)$: `ver2b` (με μία μόνο απλή εντολή).

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΗ4 (Δυναμική των Κατασκευών: Δοκοί): Σε συνήθη δοκό μήκους L ($0 \leq x \leq L$), δυσκαμψίας EI και γραμμικής πυκνότητας ρA Ζητούνται: (29) Η διαφορική εξίσωση `BeamPDE` των ιδιοταλαντώσεών της. (30) Η κατευθείαν γραφή της χωρικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως `ODEx` που προκύπτει με το χωρισμό των μεταβλητών (με τη χρήση και ειδικού συμβόλου β) και (31) η εύρεση της λύσεώς της `solx`. (32) Η σχετική συνάρτηση $X_s(x)$ σε υπερβολική-τριγωνομετρική απλοποιημένη μορφή. (33) Η γραφή και της χρονικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως `ODEt` (με τη χρήση και ειδικού συμβόλου ω) και (34) η εύρεση της λύσεώς της `solt`. Οι συνοριακές συνθήκες για τη χωρική συνάρτηση $X(x)$ σε άκρο $x = a$ δοκού (35) πακτωμένο (με πάκτωση): `bc1`, (36) με άρθρωση (αρθρωμένο) ή κύλιση (κυλιόμενο): `bc2` και (37) ελεύθερο: `bc3`. Κατευθείαν η εξίσωση ιδιοσυχνοτήτων με άγνωστο το z (με $z = \beta L$) για (38) αμφίπακτη δοκό: `FrequencyEquation1`, (39) πρόβολο με πάκτωση αριστερά (με 2), και (40) δεξιά (με 3), (41) μονόπακτη δοκό με πάκτωση αριστερά και κύλιση δεξιά (με 4) και (42) αντίστροφα: με την πάκτωση δεξιά (με 5). (43) Η άμεση και απλή γραφή του μητρώου 4×4 `MatrixA` που σχετίζεται με τις πιο πάνω ιδιοσυχνότητες για τη μονόπακτη δοκό με πάκτωση αριστερά και κύλιση δεξιά και από αυτό (44) με την έξοδο αληθινά σε μορφή μητρώου `MatrixA1`. (45) Η εύρεση και της σχετικής εξισώσεως ιδιοσυχνοτήτων `FrequencyEquationA` (με απλοποίηση). (46) , (47) , (48) Τα τρία αντίστοιχα ερωτήματα (με \mathbf{B} αντί \mathbf{A}) για αμφίπακτη δοκό και επίσης (49) , (50) , (51) για πρόβολο με την πάκτωση αριστερά (τώρα όμως με \mathbf{C} αντί \mathbf{A} ή \mathbf{B}).

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΗ5 (Μηχανική των Υλικών: Δοκοί): Ζητούνται: (52) σε λίστα `Methods1` οι πέντε βασικές μέθοδοι επιλύσεως ολοκληρωτικών εξισώσεων. (53) Σε συνήθη δοκό δυσκαμψίας EI ,

μήκους L (με $0 \leq x \leq L$), υπό κάθετη φόρτιση $p(x)$ και με αρχικές συνθήκες για $x = 0$ γνωστές: v_0, θ_0, M_0 και Q_0 η εξίσωση BeamIE η οποία δίνει το βέλος κάμψεως της (την ελαστική γραμμή της) $v(x)$. (54) Σχόλιο comment1 για το πότε ακριβώς η εξίσωση αυτή είναι ολοκληρωτική εξίσωση. (55) Χαρακτηρισμός comment2 (με δυο-τρεις μόνο λέξεις) του προβλήματος αυτού. (56) Λίστα Characterizations με τους χαρακτηρισμούς της. (57) Λίστα με τις αρχικές συνθήκες γραμμένες κατευθείαν (χωρίς κανένα ίσον) με τη βοήθεια της συναρτήσεως $v(x)$. (58) Λίστα Methods2 με όλες τις μεθόδους που είναι εύκολα εφαρμόσιμες για την ολοκληρωτική εξίσωση BeamIE με πρώτη την ευκολότερη. Διαδοχικές παραγωγίσεις (59) BeamIE1, (60) BeamIE2, (61) BeamIE3 και (62) BeamODE της ολοκληρωτικής εξισώσεως BeamIE και τελικά (63) η άμεση γραφή της λύσεως $p_s(x)$ που προέκυψε (σαν συνάρτηση). (64) Ο μετασχηματισμός Laplace LT1 της ολοκληρωτικής εξισώσεως BeamIE. (65) Λίστα substitutions κανόνων αντικαταστάσεων για τις απλοποιημένες γραφές των μετασχηματισμών Laplace που υπεισέρχονται και (66) χρήση τους στο αποτέλεσμα LT1 με νέο αποτέλεσμα LT2. (67) Η λύση sol της εξισώσεως LT1, (68) σχόλιο comment3 γιατί γενικά προτιμήθηκε η μορφή LT1 από την απλούστερη της LT2 και (69) ο προσδιορισμός της σχετικής συναρτήσεως $P_s(s)$ (με πλήρη απλοποίηση). (70) Η άμεση γραφή (ξανά!) της λύσεως $p_s(x)$ η οποία συνάγεται και τελικά (71) η επαλήθευση της λύσεως αυτής $p_s(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΗ6 (Θραυστομηχανική: Ρωγμές): Θεωρούμε μια απλή ευθύγραμμη ρωγμή μήκους $L = 2a$ (με $-a \leq x \leq a$) σε ένα άπειρο επίπεδο ελαστικό μέσον. Ζητούνται: (72) Θεωρώντας γνωστή τη σχετική συνάρτηση $g(x) = x \cosh x$, απλά να γίνει η δήλωσή της. (73) Να επαληθευθεί η1συνθήκη μονοσημάντου των μετατοπίσεων και (74) σε σχόλιο comment1 να γίνει σε δέκα γραμμές φυσική εξήγησή της: γιατί υπάρχει; Να υπολογισθούν οι συντελεστές εντάσεως τάσεων (75) K_1 και (76) K_2 στα δύο άκρα $x = \mp a$ της ρωγμής. (77) Σε σχόλιο comment2 να εξηγηθεί πώς δημιουργείται το σύμβολο \geq με το πληκτρολόγιο. Ανάλογα για (78) το λογικό H : comment3 και (79) το λογικό KAI : comment4. (80) Ο λογικός υπολογισμός της συνθήκης ενάρξεως θραύσεως (με χρήση του λογικού H και απλοποίηση) για κρίσιμο συντελεστή K_0 . (81) Σχόλιο comment5 για ποιο λόγο είναι χρήσιμη εδώ η απλοποίηση. (82) Ο ανάλογος υπολογισμός της συνθήκης FractureAvoidance αποφυγής της θραύσεως (πάλι με απλοποίηση). (83) Η συνάρτηση $\sigma_y(x)$ της φορτίσεως των δύο πλευρών της ρωγμής.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΗ7 (Ιξοελαστικότητα: Ερπυσμός και Χαλάρωση): Στην ιξοελαστικότητα (ή ιξωδοελαστικότητα: viscoelasticity) θεωρούμε γραμμικά ιξοελαστικό υλικό. Ζητούνται: (84) Σε σχόλιο comment1 με οκτώ-δέκα γραμμές η επεξήγηση των φαινομένων-πειραμάτων ερπυσμού και χαλαρώσεως και της διαφοράς τους. (85) Λίστα ViscoelasticMaterials με τέσσερα είδη ιξοελαστικών υλικών. (86) Η ενδοτικότητα σε ερπυσμό $J_{\text{Kelvin}}(t)$ για υλικό Kelvin (με παραμέτρους q_0 και q_1) και (87) ανάλογα για υλικό Maxwell (με παραμέτρους p_1 και q_1). (88) Επ' ευκαιρία και για συνηθισμένο ελαστικό υλικό με μέτρο ελαστικότητας E . (89) Σε σχόλιο comment2 πώς πρέπει να γραφεί το E με το πληκτρολόγιο; Γιατί; (90) Πάλι για το υλικό Maxwell το μέτρο χαλαρώσεως $Y_{\text{Maxwell}}(t)$. (91) Για οποιοδήποτε γραμμικά ιξοελαστικό υλικό η ολοκληρωτική εξίσωση IE για την τάση $\sigma(t)$ σε μονοαξονικό εφελκυσμό-θλίψη (χωρίς βέβαια την παράγωγο $\dot{\sigma}(t)$) με γνωστή την παραμόρφωση $\varepsilon(t)$ και (92) η αντίστοιχη ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση IDE (με την παράγωγο $\dot{\sigma}(t)$). (93) Λίστα IECharacterizations με όλους τους χαρακτηρισμούς της ολοκληρωτικής εξισώσεως IE. (94) Ο μετασχηματισμός Laplace της LTIE (με απλοποίηση). (95) Η κατευθείαν γραφή της σχέσεως LTIE1 που συνδέει τους τρεις μετασχηματισμούς Laplace $\varepsilon_L(s)$, $\sigma_L(s)$ και $J_L(s)$ καθώς και (96) της σχέσεως LTJY που συνδέει τους δύο μετασχηματισμούς Laplace $J_L(s)$ και $Y_L(s)$. Τώρα πίσω στο πεδίο του χρόνου t (97) η σχέση JYeqn1 που συνδέει τις συναρτήσεις $J(t)$ και $Y(t)$ και (98) σε δεύτερη (και προφανώς ισοδύναμη) μορφή JYeqn2. Για υλικό Maxwell η επαλήθευση (99) ver1 της πρώτης σχέσεως JYeqn1 και (100) ver2 της δεύτερης σχέσεως JYeqn2. (101) Για το ίδιο υλικό, το υλικό Maxwell, η επαλήθευση ver3 της αντίστοιχης σχέσεως στο πεδίο s του μετασχηματισμού Laplace (με τη χρήση και της εντολής υπολογισμού μετασχηματισμών Laplace).

■ Notebook EMIII-MH

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMIII-MH (ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMIII-MH1 ΕΩΣ EMIII-MH7)

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MH1 (ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ LAPLACE)

```
In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};

In[2]:= Laplace2PDEa = D[u[x, y], {x, 2}] + D[u[x, y], {y, 2}] == 0
Out[2]=  $u^{(0,2)}(x, y) + u^{(2,0)}(x, y) == 0$ 

In[3]:= Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]

In[4]:= SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]]
Out[4]= Cartesian(x, y, z)

In[5]:= CoordinateSystem
Out[5]= Cartesian

In[6]:= Laplace2PDEb = Laplacian[u[x, y]] == 0
Out[6]=  $u^{(0,2)}(x, y) + u^{(2,0)}(x, y) == 0$ 

In[7]:= sol = DSolve[Laplace2PDEb, u[x, y], {x, y}, DSolveConstants -> f]
Out[7]= {{u(x, y) -> f(1)(i x + y) + f(2)(y - i x)}}

In[8]:= us[x_, y_] = sol[[1, 1, 2]]
Out[8]= f(1)(i x + y) + f(2)(y - i x)

In[9]:= ver = Laplace2PDEb /. u -> us
Out[9]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MH2 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ AIRY)

```
In[10]:= BiharmonicPDE = Biharmonic[A[x, y]] == 0
Out[10]=  $A^{(0,4)}(x, y) + 2 A^{(2,2)}(x, y) + A^{(4,0)}(x, y) == 0$ 

In[11]:= σx[x_, y_] = D[A[x, y], {y, 2}]
Out[11]=  $A^{(0,2)}(x, y)$ 
```

In[12]:= $\sigma\mathbf{x}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-] = \mathbf{D}[\mathbf{A}[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \{\mathbf{x}, 2\}]$

Out[12]= $A^{(2,0)}(x, y)$

In[13]:= $\tau\mathbf{xy}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-] = -\mathbf{D}[\mathbf{A}[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{x}, \mathbf{y}]$

Out[13]= $-A^{(1,1)}(x, y)$

In[14]:= $\text{EquilibriumEquation1} = \mathbf{D}[\sigma\mathbf{x}[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{x}] + \mathbf{D}[\tau\mathbf{xy}[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{y}] == 0$

Out[14]= True

In[15]:= $\text{EquilibriumEquation2} = \mathbf{D}[\tau\mathbf{xy}[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{x}] + \mathbf{D}[\sigma\mathbf{y}[\mathbf{x}, \mathbf{y}], \mathbf{y}] == 0$

Out[15]= True

In[16]:= **comment1** = "Οι δύο πιο πάνω εξισώσεις ισορροπίας πληρούνται ακόμη κι αν η τασική συνάρτηση $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ που επιλέγεται δεν είναι διαρμονική.";

In[17]:= $\text{CompatibilityEquation} = \text{Laplacian}[\sigma\mathbf{x}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \sigma\mathbf{y}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]] == 0$

Out[17]= $A^{(0,4)}(x, y) + 2A^{(2,2)}(x, y) + A^{(4,0)}(x, y) == 0$

In[18]:= **comment2** =

"Αντίθετα η εξίσωση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων δεν πληρούται εκτός κι αν η τασική συνάρτηση $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ που επιλέγεται είναι στ' αλήθεια διαρμονική.";

In[19]:= **comment3** = "Ο J. C. Maxwell ήταν ο πρώτος που έλαβε υπόψη του τη συνθήκη του συμβιβαστού των παραμορφώσεων στην τασική συνάρτηση του Airy $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Διαπίστωσε έτσι ότι πρέπει να είναι διαρμονική συνάρτηση. Ο G. B. Airy την είχε λησμονήσει κι αυτό ήταν μια σημαντική παράλειψή του στην τασική συνάρτησή του, η οποία οδηγούσε όμως από την αρχή στην πλήρωση και των δύο εξισώσεων ισορροπίας";

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MH3 (ΠΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΙΔΕΑΤΟ ΠΡΕΥΣΤΟ)

In[20]:= $\text{PDE}\Phi = \mathbf{D}[\Phi[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \{\mathbf{x}, 2\}] + \mathbf{D}[\Phi[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \{\mathbf{y}, 2\}] + \mathbf{D}[\Phi[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \{\mathbf{z}, 2\}] == 0$

Out[20]= $\Phi^{(0,0,2)}(x, y, z) + \Phi^{(0,2,0)}(x, y, z) + \Phi^{(2,0,0)}(x, y, z) == 0$

In[21]:= $\{\mathbf{u}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] = \mathbf{D}[\Phi[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{x}],$

$\mathbf{v}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] = \mathbf{D}[\Phi[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{y}], \mathbf{w}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] = \mathbf{D}[\Phi[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{z}]\}$

Out[21]= $\{\Phi^{(1,0,0)}(x, y, z), \Phi^{(0,1,0)}(x, y, z), \Phi^{(0,0,1)}(x, y, z)\}$

In[22]:= $\text{ContinuityEquation1} = \mathbf{D}[\mathbf{u}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{x}] + \mathbf{D}[\mathbf{v}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{y}] + \mathbf{D}[\mathbf{w}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}], \mathbf{z}] == 0$

Out[22]= $\Phi^{(0,0,2)}(x, y, z) + \Phi^{(0,2,0)}(x, y, z) + \Phi^{(2,0,0)}(x, y, z) == 0$

In[23]:= $\mathbf{V}[\mathbf{x}_-, \mathbf{y}_-, \mathbf{z}_-] = \text{Grad}[\Phi[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]]$

Out[23]= $\{\Phi^{(1,0,0)}(x, y, z), \Phi^{(0,1,0)}(x, y, z), \Phi^{(0,0,1)}(x, y, z)\}$

In[24]:= $\text{ContinuityEquation2} = \text{Div}[\mathbf{V}[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]] == 0$

Out[24]= $\Phi^{(0,0,2)}(x, y, z) + \Phi^{(0,2,0)}(x, y, z) + \Phi^{(2,0,0)}(x, y, z) == 0$

```
In[25]:= ver1 = ContinuityEquation1 == ContinuityEquation2
```

```
Out[25]= True
```

```
In[26]:= vorticity = Curl[V[x, y, z]]
```

```
Out[26]= {0, 0, 0}
```

```
In[27]:= ver2a = Curl[V[x, y, z]] == {0, 0, 0}
```

```
Out[27]= True
```

```
In[28]:= ver2b = Curl[Grad[ϕ[x, y, z]]] == {0, 0, 0}
```

```
Out[28]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MH4 (ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

```
In[29]:= BeamPDE = EI D[v[x, t], {x, 4}] + ρA D[v[x, t], {t, 2}] == 0
```

```
Out[29]= ρA v(0,2)(x, t) + EI v(4,0)(x, t) == 0
```

```
In[30]:= ODEx = X''''[x] - β4 X[x] == 0
```

```
Out[30]= X(4)(x) - β4 X(x) == 0
```

```
In[31]:= solx = DSolve[ODEx, X[x], x]
```

```
Out[31]= {{X(x) → e-xβ c2 + exβ c4 + c1 cos(xβ) + c3 sin(xβ)}}
```

```
In[32]:= Xs[x_] = solx[[1, 1, 2]] // ExpToTrig // Simplify
```

```
Out[32]= c1 cos(xβ) + (c2 + c4) cosh(xβ) + c3 sin(xβ) + (c4 - c2) sinh(xβ)
```

```
In[33]:= ODEt = T''[t] + ω2 T[t] == 0
```

```
Out[33]= T(t) ω2 + T''(t) == 0
```

```
In[34]:= solt = DSolve[ODEt, T[t], t]
```

```
Out[34]= {{T(t) → c1 cos(tω) + c2 sin(tω)}}
```

```
In[35]:= bc1 = {X[a] == 0, X'[a] == 0};
```

```
In[36]:= bc2 = {X[a] == 0, X''[a] == 0};
```

```
In[37]:= bc3 = {X''[a] == 0, X''''[a] == 0};
```

```
In[38]:= FrequencyEquation1 = Cosh[z] Cos[z] == 1;
```

```
In[39]:= FrequencyEquation2 = Cosh[z] Cos[z] == -1;
```

```
In[40]:= FrequencyEquation3 = Cosh[z] Cos[z] == -1;
```

```
In[41]:= FrequencyEquation4 = Tanh[z] == Tan[z];
```

```
In[42]:= FrequencyEquation5 = Tanh[z] == Tan[z];
```

```
In[43]:= MatrixA = {{1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 1},
                  {Cosh[z], Sinh[z], Cos[z], Sin[z]}, {Cosh[z], Sinh[z], -Cos[z], -Sin[z]}}
```

$$\text{Out[43]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(z) & \sinh(z) & \cos(z) & \sin(z) \\ \cosh(z) & \sinh(z) & -\cos(z) & -\sin(z) \end{pmatrix}$$

```
In[44]:= MatrixA1 = MatrixA // MatrixForm
```

```
Out[44]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(z) & \sinh(z) & \cos(z) & \sin(z) \\ \cosh(z) & \sinh(z) & -\cos(z) & -\sin(z) \end{pmatrix}$$

```
In[45]:= FrequencyEquationA = Det[MatrixA] == 0 // Simplify
```

```
Out[45]= 2 cosh(z) sin(z) == 2 cos(z) sinh(z)
```

```
In[46]:= MatrixB = {{1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 1},
                  {Cosh[z], Sinh[z], Cos[z], Sin[z]}, {Sinh[z], Cosh[z], -Sin[z], Cos[z]}}
```

$$\text{Out[46]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(z) & \sinh(z) & \cos(z) & \sin(z) \\ \sinh(z) & \cosh(z) & -\sin(z) & \cos(z) \end{pmatrix}$$

```
In[47]:= MatrixB1 = MatrixB // MatrixForm
```

```
Out[47]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(z) & \sinh(z) & \cos(z) & \sin(z) \\ \sinh(z) & \cosh(z) & -\sin(z) & \cos(z) \end{pmatrix}$$

```
In[48]:= FrequencyEquationB = Det[MatrixB] == 0 // Simplify
```

```
Out[48]= 2 cos(z) cosh(z) == 2
```

```
In[49]:= MatrixC = {{1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 1},
                  {Cosh[z], Sinh[z], -Cos[z], -Sin[z]}, {Sinh[z], Cosh[z], Sin[z], -Cos[z]}}
```

$$\text{Out[49]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(z) & \sinh(z) & -\cos(z) & -\sin(z) \\ \sinh(z) & \cosh(z) & \sin(z) & -\cos(z) \end{pmatrix}$$

```
In[50]:= MatrixC1 = MatrixC // MatrixForm
```

```
Out[50]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh(z) & \sinh(z) & -\cos(z) & -\sin(z) \\ \sinh(z) & \cosh(z) & \sin(z) & -\cos(z) \end{pmatrix}$$

```
In[51]:= FrequencyEquationC = Det[MatrixC] == 0 // Simplify
```

```
Out[51]= 2 cos(z) cosh(z) + 2 == 0
```


■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MH5 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΤΩΝ ΥΛΙΚΩΝ: ΔΟΚΟΙ)

```
In[52]:= Methods1 = {"Μέθοδος αναγωγής σε διαφορική εξίσωση",
  "Μέθοδος διαχωρίσιμων πυρήνων", "Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace",
  "Μέθοδος διαδοχικών προσεγγίσεων", "Μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης"};
```

```
In[53]:= BeamIE = v[x] ==
  v0 + θ0 x + M0 x^2 / (2 EI) + Q0 x^3 / (6 EI) + 1 / (6 EI) Integrate[(x - ξ)^3 p[ξ], {ξ, 0, x}]
```

```
Out[53]= v(x) ==  $\frac{Q0 x^3}{6 EI} + \frac{M0 x^2}{2 EI} + \theta0 x + v0 + \frac{\int_0^x (x - \xi)^3 p(\xi) d\xi}{6 EI}$ 
```

```
In[54]:= comment1 =
  "Η πιο πάνω εξίσωση BeamIE αποτελεί γενικά έναν τύπο (για την ακρίβεια
  έναν ολοκληρωτικό τύπο) που δίνει το βέλος κάμψης v(x) της δοκού με
  γνωστές βέβαια τις τέσσερις αρχικές συνθήκες στο αριστερό άκρο
  x = 0 της δοκού και επίσης γνωστή την κάθετη κατανεμημένη φόρτιση
  p(x) της δοκού. Η ίδια ακριβώς εξίσωση BeamIE είναι ολοκληρωτική
  εξίσωση στην αντίθετη περίπτωση, όπου είναι γνωστό το βέλος
  κάμψης v(x) και άγνωστη η κάθετη κατανεμημένη φόρτιση p(x).";
```

```
In[55]:= comment2 = "Αντίστροφο πρόβλημα (inverse problem)";
```

```
In[56]:= Characterizations = {"Ολοκληρωτική εξίσωση Volterra",
  "Μονοδιάστατη", "Γραμμική", "Πρώτου είδους", "Μη ομογενής",
  "Συνελκτικού τύπου", "Με σταθερό συντελεστή"};
```

```
In[57]:= {v[0], v'[0], EI v''[0], EI v''''[0]};
```

```
In[58]:= Methods2 = {"Μέθοδος άμεσης επιλύσεως με παραγωγίσεις (εδώ δεν προκύπτει
  καν διαφορική εξίσωση)", "Μέθοδος μετασχηματισμού Laplace"};
```

```
In[59]:= BeamIE1 = D[BeamIE, x]
```

```
Out[59]= v'(x) ==  $\frac{Q0 x^2}{2 EI} + \frac{M0 x}{EI} + \theta0 + \frac{\int_0^x (x - \xi)^2 p(\xi) d\xi}{2 EI}$ 
```

```
In[60]:= BeamIE2 = D[BeamIE1, x]
```

```
Out[60]= v''(x) ==  $\frac{M0}{EI} + \frac{Q0 x}{EI} + \frac{\int_0^x (x - \xi) p(\xi) d\xi}{EI}$ 
```

```
In[61]:= BeamIE3 = D[BeamIE2, x]
```

```
Out[61]= v'''(x) ==  $\frac{Q0}{EI} + \frac{\int_0^x p(\xi) d\xi}{EI}$ 
```

```
In[62]:= BeamODE = D[BeamIE3, x]
```

```
Out[62]= v''''(x) ==  $\frac{p(x)}{EI}$ 
```

```
In[63]:= ps[x_] = EI v''''[x];
```

```
In[64]:= LT1 = LaplaceTransform[BeamIE, x, s]
```

```
Out[64]= LaplaceTransform[v(x), x, s] ==  $\frac{M0}{EI s^3} + \frac{v0}{s} + \frac{\theta0}{s^2} + \frac{\text{LaplaceTransform}[p(x), x, s]}{EI s^4} + \frac{Q0}{EI s^4}$ 
```

```
In[65]:= substitutions =
      {LaplaceTransform[p[x], x, s] → P[s], LaplaceTransform[v[x], x, s] → V[s]};
```

```
In[66]:= LT2 = LT1 /. substitutions
```

```
Out[66]= V(s) ==  $\frac{M0}{EI s^3} + \frac{v0}{s} + \frac{\theta0}{s^2} + \frac{P(s)}{EI s^4} + \frac{Q0}{EI s^4}$ 
```

```
In[67]:= sol = Solve[LT1, LaplaceTransform[p[x], x, s]]
```

```
Out[67]= {{LaplaceTransform[p(x), x, s] → -EI s^4  $\left( \frac{M0}{EI s^3} + \frac{v0}{s} + \frac{\theta0}{s^2} - \text{LaplaceTransform}[v(x), x, s] + \frac{Q0}{EI s^4} \right)$ }}
```

```
In[68]:= comment3 = "Γενικά προτιμάται στη λύση sol η χρήση των αρχικών συμβολισμών των μετασχηματισμών Laplace, που περιέχουν την εντολή LaplaceTransform, και όχι των συντομευμένων συμβολισμών τους. Αυτό γίνεται, επειδή υπάρχει αρκετές φορές η δυνατότητα ευκολότερης αντιστροφής της λύσεως η οποία προκύπτει και επιστροφής στο πεδίο της αρχικής μεταβλητής, εδώ της θέσεως x, από το πεδίο της μεταβλητής s του μετασχηματισμού Laplace. Αντίθετα η εισαγωγή νέων ειδικών συμβόλων για τους μετασχηματισμούς Laplace γενικά δυσκολεύει στην αντιστροφή κατά Laplace της λύσεως που προκύπτει.";
```

```
In[69]:= Ps[s_] = sol[[1, 1, 2]] // FullSimplify
```

```
Out[69]= EI LaplaceTransform[v(x), x, s] s^4 - (M0 + EI s(sv0 + θ0)) s - Q0
```

```
In[70]:= ps[x_] = EI v''''[x];
```

```
In[71]:= verBeamIE = BeamIE /.
```

```
{p → ps, v0 → v[0], θ0 → v'[0], M0 → EI v''[0], Q0 → EI v''''[0]} // Simplify
```

```
Out[71]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MH6 (ΘΡΑΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ: ΡΩΓΜΕΣ)

```
In[72]:= g[x_] = x Cosh[x];
```

```
In[73]:= SingleValuednessOfDisplacements = Integrate[g[t] / Sqrt[a^2 - t^2], {t, -a, a}] == 0
```

```
Out[73]= True
```

```
In[74]:= comment1 =
```

"Η πιο πάνω συνθήκη μονοσημάντου των μετατοπίσεων μας εξασφαλίζει το κλείσιμο της ρωγμής στο δεξιό άκρο της (εδώ στο άκρο της $x = a$), η οποία δεν είναι εξασφαλισμένη. Η εξασφάλιση αυτού του κλεισίματος: μηδενικό άνοιγμα μεταξύ των δύο πλευρών της ρωγμής (πάνω και κάτω πλευράς) στο δεξιό άκρο της $x = a$ εξασφαλίζεται με τη συνθήκη που προαναφέρθηκε. Αυτό συμβαίνει, επειδή η συνολική συνάρτηση που ολοκληρώνεται είναι ανάλογη της κλίσεως των πλευρών της ρωγμής και το ολοκλήρωμα της κλίσεως αυτής από το αριστερό άκρο της ρωγμής ($x = -a$) μέχρι το δεξιό ($x = a$) πρέπει να είναι μηδέν. Είναι αναγκαίο, υποχρεωτικό να είναι μηδέν, γιατί η σχετική μετατόπιση μεταξύ των δύο πλευρών της ρωγμής είναι προφανώς μηδενική και στα δύο άκρα της ρωγμής $x = -a$ και $x = a$.";

```
In[75]:= K1 = -Sqrt[π/a] g[-a] // PowerExpand
```

```
Out[75]=  $\sqrt{a} \sqrt{\pi} \cosh(a)$ 
```

In[76]:= $K2 = \text{Sqrt}[\pi / a] \text{g}[a]$ // PowerExpand

Out[76]= $\sqrt{a} \sqrt{\pi} \cosh(a)$

In[77]:= comment2 = "Το σύμβολο μεγαλύτερο ή ίσο, \geq , δημιουργείται με το πληκτρολόγιο με \geq ή καλύτερα (και σε κάθε περίπτωση) με Esc \geq Esc.";

In[78]:= comment3 = "Το λογικό Η, V, δημιουργείται με το πληκτρολόγιο με Esc or Esc.";

In[79]:= comment4 =
"Το λογικό ΚΑΙ, Λ, δημιουργείται με το πληκτρολόγιο με Esc and Esc.";

In[80]:= FractureInitiation = {K1 \geq K0 V K2 \geq K0} // PowerExpand // Simplify

Out[80]= $\{\sqrt{a} \sqrt{\pi} \cosh(a) \geq K0\}$

In[81]:= comment5 = "Ναι, στην προκειμένη περίπτωση είναι χρήσιμη, βοηθάει η απλοποίηση, επειδή οι δύο συντελεστές εντάσεως τάσεων (στα δύο άκρα $x = \pm a$ της ρωγμής) είναι ίσοι μεταξύ τους. Αυτό οφείλεται στη συμμετρία του όλου προβλήματος ρωγμής.";

In[82]:= FractureAvoidance = {K1 < K0 Λ K2 < K0} // PowerExpand // Simplify

Out[82]= $\{\sqrt{a} \sqrt{\pi} \cosh(a) < K0\}$

In[83]:= $\sigma\gamma[x_] = (1 / \pi) \text{Integrate}[(1 / \text{Sqrt}[a^2 - t^2]) (\text{g}[t] - \text{g}[x]) / (t - x), \{t, -a, a\}]$

Out[83]=
$$\frac{\int_{-a}^a \frac{t \cosh(t-x) \cosh(x)}{\sqrt{a^2-t^2} (t-x)} dt}{\pi}$$

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MH7 (ΙΞΟΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ: ΕΡΠΥΣΜΟΣ ΚΑΙ ΧΑΛΑΡΩΣΗ)

In[84]:= comment1 =

"Τα φαινόμενα-πειράματα του ερπυσμού και της χαλαρώσεως αφορούν και τα δύο σε ιξοελαστικά υλικά (viscoelastic materials). (α) Στο φαινόμενο του ερπυσμού (creep) ένα ιξοελαστικό δοκίμιο σε μονοαξονικό εφελκυσμό υπό σταθερή τάση σ_0 αποκτά παραμόρφωση $\epsilon(t)$ η οποία μεταβάλλεται (αυξάνεται) με το χρόνο t . (β) Αντίθετα στο φαινόμενο της χαλαρώσεως (relaxation) το ίδιο δοκίμιο βρίσκεται υπό σταθερή παραμόρφωση ϵ_0 και αποκτά (απαιτεί) έτσι τάση $\sigma(t)$, η οποία μεταβάλλεται (μειώνεται) με το χρόνο t . Δηλαδή στον ερπυσμό έχουμε σταθερή τάση σ_0 , ενώ στη χαλάρωση έχουμε σταθερή παραμόρφωση ϵ_0 . Και τα δύο αυτά φαινόμενα είναι ιδιαίτερα σημαντικά για τον Πολιτικό Μηχανικό. Εκτός βέβαια από τα γραμμικά ιξοελαστικά υλικά πολύ σημαντικά είναι και τα μη γραμμικά ιξοελαστικά υλικά.";

In[85]:= ViscoelasticMaterials =

{"Πολλά πλαστικά", "Πολλά μέταλλα", "Το σκυρόδεμα (σε μικρό βαθμό)",
"Το ασφαλτικό σκυρόδεμα (ή ασφαλτοσκυρόδεμα)"};

In[86]:= JKelvin[t_] = (1 / q0) $e^{-(q0/q1) t}$

Out[86]=
$$\frac{e^{-\frac{q0t}{q1}}}{q0}$$

```

In[87]:= JMaxwell[t_] = (p1 + t) / q1;

In[88]:= JElastic[t_] = 1 / E;

In[89]:= comment2 =
  "Το E πρέπει εδώ να γραφεί με Esc E Esc, ώστε να είναι Ελληνικό E και να
  μη μπορεί να γίνει σύγχυση με το Λατινικό E, που χρησιμοποιείται στη
  Mathematica σαν βάση των φυσικών λογαρίθμων: E ≡ e ≈ 2.71828.";

In[90]:= YMaxwell[t_] = (q1 / p1) e-t/p1

Out[90]=  $\frac{e^{-\frac{t}{p1}} q1}{p1}$ 

In[91]:= IE = ε[t] == J[0] σ[t] + Integrate[J'[t - τ] σ[τ], {τ, 0, t}]

Out[91]=  $\epsilon(t) == \int_0^t \sigma(\tau) J'(t-\tau) d\tau + J(0)\sigma(t)$ 

In[92]:= IDE = ε[t] == σ[0] J[t] + Integrate[J[t - τ] σ'[τ], {τ, 0, t}]

Out[92]=  $\epsilon(t) == \int_0^t J(t-\tau) \sigma'(\tau) d\tau + J(t)\sigma(0)$ 

In[93]:= IECharacterizations = {"Ολοκληρωτική εξίσωση Volterra",
  "Μονοδιάστατη", "Γραμμική", "Δευτέρου είδους", "Μη ομογενής",
  "Συνελκτικτού τύπου", "Με σταθερούς συντελεστές"};

In[94]:= LTIE = LaplaceTransform[IE, t, s] // Simplify

Out[94]= LaplaceTransform[ε(t), t, s] == s LaplaceTransform[J(t), t, s] LaplaceTransform[σ(t), t, s]

In[95]:= LTIE1 = εL[s] == s JL[s] σL[s];

In[96]:= LTJY = JL[s] YL[s] == 1 / s2;

In[97]:= JYeqn1 = Integrate[J[τ] Y[t - τ], {τ, 0, t}] == t

Out[97]=  $\int_0^t J(\tau) Y(t-\tau) d\tau == t$ 

In[98]:= JYeqn2 = Integrate[Y[τ] J[t - τ], {τ, 0, t}] == t

Out[98]=  $\int_0^t J(t-\tau) Y(\tau) d\tau == t$ 

In[99]:= ver1 = Integrate[JMaxwell[τ] YMaxwell[t - τ], {τ, 0, t}] == t

Out[99]= True

In[100]:= ver2 = Integrate[YMaxwell[τ] JMaxwell[t - τ], {τ, 0, t}] == t

Out[100]= True

In[101]:= ver3 = LaplaceTransform[JMaxwell[t], t, s]
  LaplaceTransform[YMaxwell[t], t, s] == 1 / s2 // Simplify

Out[101]= True

```

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ NOTEBOOK ΕΜΙΙΙ-ΜΙ

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΙ1 (Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους): Ζητούνται: (1) Πρώτα-πρώτα η λίστα των δύο εντολών για τη μη εκτύπωση πιθανών ορθογραφικών λαθών. (2) Χωρίς τη χρήση ειδικού πακέτου η εξίσωση TorsionPDE για την τασική συνάρτηση του Prandtl $\varphi(x, y)$ στη στρέψη συνήθους ράβδου με σταθερά $G\theta$ και (3) η γενική λύση της sol1. (4) Η προσεγγιστική εξίσωση του καλωδίου CablePDE (με σταθερά c) και (5) η γενική λύση της sol2 με τη σταθερά c σ' αυτή θετική. (6) Σε μεταφορά ρύπου σε υδατόρρευμα με μεταγωγή με ταχύτητα V_0 και με διάχυση με σταθερά D_0 η σχετική εξίσωση AdvectionDiffusionPDE για τη συγκέντρωση $c(x, t)$ του ρύπου και (7) η γενική λύση της sol3. (8) Λίστα SuccessfulSolution των πιο πάνω εξισώσεων όπου έχει πετύχει η επίλυσή τους.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΙ2 (Περιβαλλοντική Υδραυλική): Θεωρούμε τη μεταφορά ρύπου με μεταγωγή και διάχυση σε υδατόρρευμα. (9) Να γίνει υπενθύμιση της εξισώσεως μεταγωγής-διαχύσεως του προηγούμενου θέματος ή να γραφεί από την αρχή. (10) Να υπολογισθεί η μετασχηματισμένη κατά Laplace εξίσωση LTPDE. (11) Να γίνει λεπτομερές σχόλιο comment για το βαθμό επιτυχίας του μετασχηματισμού αυτού. (12) Να δηλωθεί μηδενική αρχική συνθήκη InitialCondition (για $t = 0$). (13) Να δηλωθούν οι εξής δύο συνοριακές συνθήκες BoundaryConditions: $c(0, t) = c_0(1 - e^{-t/t_0})$ και $c(10, t) = 0$. (14) Να ορισθούν κανόνες αντικαταστάσεως, όχι καθορισμού τιμών, values, εάν $D_0 = 1$, $V_0 = 1$, $c_0 = 1$ και $t_0 = 1$. (15) Να υπολογισθεί η προσεγγιστική αριθμητική λύση NSolution του πιο πάνω προβλήματος για $0 \leq x \leq 10$ και $0 \leq t \leq 10$. (16) Να ορισθεί η σχετική συνάρτηση παρεμβολής $c_s(x, t)$ και (17) να γίνει η γραφική παράστασή της με την κατάλληλη δήλωση και των αξόνων (χωρίς όμως άλλες επιλογές).

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΙ3 (Πολικές, Κυλινδρικές και Σφαιρικές Συντεταγμένες): (18) Να γραφούν οι αντικαταστάσεις CartesianToSpherical για τη μετάβαση από Καρτεσιανές συντεταγμένες σε σφαιρικές συντεταγμένες (με τους συνηθισμένους συμβολισμούς). (19) Να υπολογισθεί το μήκος $L = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες με απλοποίηση και θετική τη σφαιρική ακτίνα ρ . (20) Να φορτωθεί το πακέτο για τη Διανυσματική Ανάλυση και με αυτό (21) να υπολογισθεί με μία εντολή η Λαπλασιανή LaplacianCartesian συναρτησεως u σε Καρτεσιανές συντεταγμένες. (22) Επίσης η αντίστοιχη Λαπλασιανή LaplacianCylindrical σε κυλινδρικές συντεταγμένες (με απλοποίηση) και (23) ανάλογα η Λαπλασιανή LaplacianSpherical σε σφαιρικές συντεταγμένες (και πάλι με απλοποίηση). (24) Και τώρα χωρίς το πακέτο να γραφεί κατευθείαν η Λαπλασιανή LaplacianPolar1 σε πολικές συντεταγμένες. (25) Να δηλωθούν κυλινδρικές συντεταγμένες και (26) να ελεγχθεί το σύστημα συντεταγμένων, εδώ με γραφή και της εξόδου της εντολής. (27) Με χρήση τώρα του πακέτου να υπολογισθεί η Λαπλασιανή LaplacianPolar2 σε πολικές συντεταγμένες (με απλοποίηση) και (28) να γίνει η επαλήθευση ver πως οι δύο υπολογισμοί της που έγιναν συμφωνούν. Συνεχώς τώρα με τη χρήση του πακέτου (αν χρειάζεται) (29) να υπολογισθούν η εξίσωση του Laplace LaplacianAxisymmetric με αξονική (ή κυκλική) συμμετρία, (30) η λύση της solution1 και (31) η σχετική συνάρτηση $u_{s1}(r)$ (32) με επαλήθευσή της ver1. (33) Να ορισθούν τώρα σφαιρικές συντεταγμένες και (34) να υπολογισθεί το σύστημα συντεταγμένων. (35) Να υπολογισθεί η εξίσωση του Laplace LaplacianSphericalSymmetric σε σφαιρικές συντεταγμένες με σφαιρική συμμετρία (με απλοποίηση), (36) να βρεθεί η λύση της solution2, (37) η σχετική συνάρτηση $u_{s2}(\rho)$ και (38) να γίνει η σχετική επαλήθευση ver2. (39) Με τη χρήση τώρα της ποσότητας LaplacianPolar2 να βρεθεί η εξίσωση του Laplace PDE1 σε πολικές συντεταγμένες με άγνωστη συνάρτηση πάλι τη u . Γι' αυτήν τη συνάρτηση u (40) να γίνει ο χωρισμός των μεταβλητών της. (41) Να γραφεί κατευθείαν η σχετική συνήθης διαφορική εξίσωση ODER ως προς την πολική ακτίνα r και (42) να βρεθεί η γενική λύση της solR. (43) Ανάλογα η εξίσωση ODEΘ ως προς την πολική γωνία θ και (44) η λύση της solΘ.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΙ4 (Πρόβλημα Dirichlet στον Κύκλο): Εδώ ζητούνται: (45) Να φορτωθεί πρώτα κατάλληλο πακέτο για τον υπολογισμό σειρών Fourier. (46) Να ορισθεί η απλή συνάρτηση

$f(\theta) = \pi - |\theta|$ και (47) να σχεδιασθεί στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ με πάχος γραμμής 0.008 και μέγεθος σχήματος 300. (48) Μετά να υπολογισθεί η σχετική τριγωνομετρική σειρά Fourier $f_{p1}(\theta)$ στο ίδιο διάστημα $[-\pi, \pi]$ με όρους τάξεως μέχρι και 7. (49) Σε ένα σχόλιο comment τι παρατηρείται και γιατί; Στη συνέχεια να υπολογισθεί ο συντελεστής A_5 της σειράς αυτής (50) με άμεση ολοκλήρωση A_{5i} , (51) αναλυτικά με ειδική εντολή A_{5f} και (52) αριθμητικά με ειδική εντολή A_{5N} . (53) Να γίνει κατάλληλη επαλήθευση `ver` ότι οι τρεις αυτές τιμές συμπίπτουν αριθμητικά εννοείται. (54) Να σχεδιασθούν στο ίδιο σχήμα η συνάρτηση $f(\theta)$ και η προσέγγισή της $f_{p1}(\theta)$ στο διάστημα $[-5\pi/4, 5\pi/4]$ και με πάχος γραμμής 0.008. (55) Σε σχόλιο comment τί παρατηρείται; (56) Να ξαναυπολογισθεί η σειρά Fourier, πάλι με όρους τάξεως μέχρι και 7, αλλά τώρα σε μιγαδική ή εκθετική μορφή $f_{p2}(\theta)$. Να συγκριθούν τώρα οι δύο σειρές Fourier που βρέθηκαν (57) με τη χρήση της εντολής `Simplify`, (58) με μετατροπή της εκθετικής σε τριγωνομετρική μορφή και (59) με μετατροπή της τριγωνομετρικής σε εκθετική μορφή. Στην εκθετική ή μιγαδική σειρά Fourier (60) να υπολογισθεί ο συντελεστής C_{5f} τάξεως -5 από την αρχή με τη χρήση ειδικής εντολής αναλυτικά, αλλά (61) και (ανάλογα) αριθμητικά C_{5N} και (62) να συγκριθούν αριθμητικά τα αποτελέσματα. (63) Να ορισθεί με άμεση ολοκλήρωση συνάρτηση του n για τους συντελεστές A_n της πιο πάνω σειράς Fourier. (64) Με τη χρήση της να γραφεί απευθείας (όχι να υπολογισθεί!) η λύση του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet σε έναν κύκλο ακτίνας $r = a$ με συνοριακή συνθήκη στην περιφέρειά του $u(a, \theta) = f(\theta)$. Να γίνουν (65) η επαλήθευση `verPDE` ισχύος της εξισώσεως του Laplace (με απλοποίηση) και (66) η επαλήθευση `verBC` της συνοριακής συνθήκης.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΙ5 (Ολοκληρωτικές Εξισώσεις): Εδώ εξετάζουμε την ολοκληρωτική εξίσωση $a(t) = -g - c \int_0^t a(\tau) d\tau$. Ζητούνται: (67) Να καθαρισθεί το σύμβολο a και στην ίδια γραμμή να δηλωθεί η ολοκληρωτική αυτή εξίσωση σαν `IE`. (68) Να δοθεί λίστα `characterizations` με χαρακτηρισμούς. (69) Σε σχόλιο comment να αναφερθεί σε ποιο ακριβώς πρόβλημα απαντάται. (70) Να υπολογισθεί η αντίστοιχη συνήθης διαφορική εξίσωση ODE, εάν υπάρχει. (71) Από την εξίσωση `IE` να υπολογισθεί η αρχική συνθήκη `IC` της εξισώσεως ODE. (72) Να βρεθεί η λύση `sol` των δύο εξισώσεων ODE και `IC` και (73) να γραφεί η σχετική συνάρτηση $a_{s1}(t)$. (74) Να γίνει υπενθύμιση της ολοκληρωτικής εξισώσεως. (75) Να βρεθεί η μετασχηματισμός Laplace της `LTIE`, (76) η λύση `LTIESolution` της σχετικής αλγεβρικής εξισώσεως και (77) η αντίστοιχη συνάρτηση $a_{s2}(t)$. (78) Να γίνει τέλος και η σύγκριση των δύο λύσεων $a_{s1}(t)$ και $a_{s2}(t)$.

ΑΣΚΗΣΗ-ΕΜΙΙΙ-ΜΙ6 (Μιγαδικές Συναρτήσεις, Ροή Γύρω από Κύλινδρο): (79) Να ορισθεί ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = 3 - 4i$. (80) Γι' αυτόν σε μια λίστα να υπολογισθούν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, η απόλυτος τιμή και το όρισμα. (81) Να ορισθεί η μιγαδική συνάρτηση $\Omega(z) = U(z + a^2\bar{z}/|z|^2)$. (Είναι το μιγαδικό δυναμικό ροής γύρω από κύλινδρο ακτίνας a με ταχύτητα στο άπειρο U .) (82) Να δηλωθεί ο κανόνας αντικαταστάσεως `subs` με $|x + iy| \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$. (83) Από τη συνάρτηση $\Omega(z)$ να ορισθεί η ισοδύναμη συνάρτηση $\Omega_1(x, y)$ με $z = x + iy$, την αντικατάσταση `subs` και υπόθεση πραγματικών μεταβλητών. Με τη συνάρτηση $\Omega_1(x, y)$ (για πραγματικές μεταβλητές και με απλοποίηση) να ορισθούν (84) το πραγματικό μέρος της $\Phi(x, y)$ (δυναμικό ταχύτητας) και (85) το φανταστικό μέρος της $\Psi(x, y)$ (ροϊκή συνάρτηση). (86) Να (ξανα)φορτωθεί εδώ το πακέτο για τη διανυσματική ανάλυση. (87) Να δηλωθούν Καρτεσιανές συντεταγμένες και (88) να βρεθεί το σύστημα συντεταγμένων. (89) Με τη χρήση του πακέτου να υπολογισθεί η ταχύτητα του ρευστού $V_{1a}(x, y)$ (με απλοποίηση) και επειδή η τρίτη συνιστώσα της είναι μηδέν, (90) να γραφεί πάλι σαν $V_1(x, y)$, με δύο όμως τώρα συνιστώσες. Η ίδια ταχύτητα $V(x, y)$ να υπολογισθεί (91) από το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ σαν $V_2(x, y)$ (με απλοποίηση) και (92) από τη ροϊκή συνάρτηση $\Psi(x, y)$ σαν $V_3(x, y)$ (και πάλι με απλοποίηση). Να επαληθευθούν οι εξισώσεις (93) συνεχείας `ContinuityEquation` και (94) αστρόβιλου της ροής `IrrotationalFlow` (και οι δύο με απλοποιήσεις). (95) Να δηλωθούν σε λίστα οι τιμές $a = 1$ και $U = 10$. (96) Να δηλωθεί κατάλληλα η ταχύτητα $V(x, y)$ σαν συνάρτηση $V_4(x, y)$, αλλά με μηδενικές τιμές μέσα στον κύλινδρο. Με τη χρήση της και (97) το φόρτωμα πακέτου (98) να σχεδιασθεί το πεδίο ταχύτητας στην περιοχή $R = [-5, 5] \times [-4, 4]$ (με πλαίσιο). (99) Το ίδιο για το δυναμικό ταχύτητας $\Phi(x, y)$ (100) με σχεδίαση του ίδιου πεδίου. (101) Όμοια για τη ροϊκή συνάρτηση $\Psi(x, y)$ (102) με σχεδίαση του ίδιου πεδίου.

■ Notebook EMIII-MI

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ EMIII-MI (ΑΣΚΗΣΕΙΣ EMIII-MI1 ΕΩΣ EMIII-MI6)

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MI1 (ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ)

```
In[1]:= {Off[General::spell], Off[General::spell1]};
```

```
In[2]:= TorsionPDE = D[φ[x, y], {x, 2}] + D[φ[x, y], {y, 2}] == -2 G θ
```

```
Out[2]= φ(0,2)(x, y) + φ(2,0)(x, y) == -2 G θ
```

```
In[3]:= sol1 = DSolve[TorsionPDE, φ[x, y], {x, y}]
```

```
Out[3]= {{φ(x, y) → -G θ x2 + c1[i x + y] + c2[y - i x]}}
```

```
In[4]:= CablePDE = D[u[x, t], {x, 2}] == (1 / c2) D[u[x, t], {t, 2}]
```

```
Out[4]= u(2,0)(x, t) ==  $\frac{u^{(0,2)}(x, t)}{c^2}$ 
```

```
In[5]:= sol2 = DSolve[CablePDE, u[x, t], {x, t}] // PowerExpand
```

```
Out[5]= {{u(x, t) → c1 $\left[t + \frac{x}{c}\right]$  + c2 $\left[t - \frac{x}{c}\right]$ }}
```

```
In[6]:= AdvectionDiffusionPDE = D[c[x, t], t] == D0 D[c[x, t], {x, 2}] - V0 D[c[x, t], x]
```

```
Out[6]= c(0,1)(x, t) == D0 c(2,0)(x, t) - V0 c(1,0)(x, t)
```

```
In[7]:= sol3 = DSolve[AdvectionDiffusionPDE, c[x, t], {x, t}]
```

```
Out[7]= DSolve[c(0,1)(x, t) == D0 c(2,0)(x, t) - V0 c(1,0)(x, t), c(x, t), {x, t}]
```

```
In[8]:= SuccessfulSolution = {"TorsionPDE", "CablePDE"};
```

■ ΑΣΚΗΣΗ EMIII-MI2 (ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΙΚΗ ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ)

```
In[9]:= AdvectionDiffusionPDE
```

```
Out[9]= c(0,1)(x, t) == D0 c(2,0)(x, t) - V0 c(1,0)(x, t)
```

```
In[10]:= LTPDE = LaplaceTransform[AdvectionDiffusionPDE, t, s]
```

```
Out[10]= s LaplaceTransform[c(x, t), t, s] - c(x, 0) ==  
LaplaceTransform[c(2,0)(x, t), t, s] D0 - LaplaceTransform[c(1,0)(x, t), t, s] V0
```

```
In[11]:= comment = "Αυτός ο μετασχηματισμός Laplace δεν υπήρξε επιτυχής. Συγκεκριμένα
υπήρξε επιτυχής μόνο ως προς τη χρονική μερική παράγωγο και ανεπιτυχής
ως προς τις δύο χωρικές μερικές παραγώγους. Αυτό συνέβη εδώ, επειδή
η Mathematica δε γνωρίζει το σχετικό κανόνα μετασχηματισμού Laplace.";
```

```
In[12]:= InitialCondition = c[x, 0] == 0;
```

```
In[13]:= BoundaryConditions = {c[0, t] == c0 (1 - e-t/t0), c[10, t] == 0};
```

```
In[14]:= values = {D0 → 1, V0 → 1, c0 → 1, t0 → 1};
```

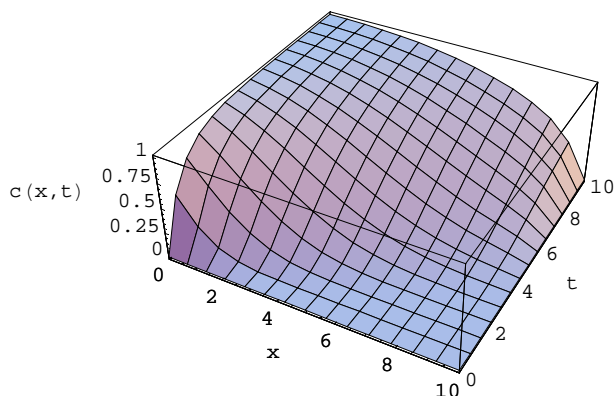
```
In[15]:= NSolution = NDSolve[
  {AdvectionDiffusionPDE, InitialCondition, BoundaryConditions} /. values,
  c[x, t], {x, 0, 10}, {t, 0, 10}]
```

```
Out[15]= {{c(x, t) → InterpolatingFunction[{{0. 10.}, <>][x, t]}}
```

```
In[16]:= cs[x_, t_] = NSolution[[1, 1, 2]]
```

```
Out[16]= InterpolatingFunction[{{0. 10.}, <>][x, t]
```

```
In[17]:= Plot3D[cs[x, t], {x, 0, 10}, {t, 0, 10}, AxesLabel → {"x", "t", "c(x,t)"}];
```



■ ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜΙ3 (ΠΟΛΙΚΕΣ, ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ)

```
In[18]:= CartesianToSpherical = {x → ρ Cos[θ] Sin[φ], y → ρ Sin[θ] Sin[φ], z → ρ Cos[φ]}
```

```
Out[18]= {x → ρ cos(θ) sin(φ), y → ρ sin(θ) sin(φ), z → ρ cos(φ)}
```

```
In[19]:= L = Sqrt[x2 + y2 + z2] /. CartesianToSpherical // Simplify // PowerExpand
```

```
Out[19]= ρ
```

```
In[20]:= Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]
```


In[21]:= **LaplacianCartesian** = **Laplacian**[**u**[**x**, **y**, **z**], **Cartesian**[**x**, **y**, **z**]]

Out[21]= $u^{(0,0,2)}(x, y, z) + u^{(0,2,0)}(x, y, z) + u^{(2,0,0)}(x, y, z)$

In[22]:= **LaplacianCylindrical** = **Laplacian**[**u**[**r**, **θ**, **z**], **Cylindrical**[**r**, **θ**, **z**]] // **Simplify**

Out[22]= $u^{(0,0,2)}(r, \theta, z) + \frac{u^{(0,2,0)}(r, \theta, z)}{r^2} + \frac{u^{(1,0,0)}(r, \theta, z)}{r} + u^{(2,0,0)}(r, \theta, z)$

In[23]:= **LaplacianSpherical** = **Laplacian**[**u**[**ρ**, **θ**, **φ**], **Spherical**[**ρ**, **θ**, **φ**]] // **Simplify**

Out[23]= $\frac{1}{\rho^2} (u^{(2,0,0)}(\rho, \theta, \phi) \rho^2 + 2 u^{(1,0,0)}(\rho, \theta, \phi) \rho + \csc^2(\theta) u^{(0,0,2)}(\rho, \theta, \phi) + \cot(\theta) u^{(0,1,0)}(\rho, \theta, \phi) + u^{(0,2,0)}(\rho, \theta, \phi))$

In[24]:= **LaplacianPolar1** =

$(1/r) D[u[r, \theta], r] + D[u[r, \theta], \{\theta, 2\}] + (1/r^2) D[u[r, \theta], \{\theta, 2\}]$

Out[24]= $\frac{u^{(0,2)}(r, \theta)}{r^2} + \frac{u^{(1,0)}(r, \theta)}{r} + u^{(2,0)}(r, \theta)$

In[25]:= **SetCoordinates**[**Cylindrical**[**r**, **θ**, **z**]]

Out[25]= **Cylindrical**(**r**, **θ**, **z**)

In[26]:= **CoordinateSystem**

Out[26]= **Cylindrical**

In[27]:= **LaplacianPolar2** = **Laplacian**[**u**[**r**, **θ**]] // **Simplify**

Out[27]= $\frac{u^{(0,2)}(r, \theta)}{r^2} + \frac{u^{(1,0)}(r, \theta)}{r} + u^{(2,0)}(r, \theta)$

In[28]:= **ver** = **LaplacianPolar1** == **LaplacianPolar2**

Out[28]= **True**

In[29]:= **LaplacianAxisymmetric** = **Laplacian**[**u**[**r**]] == 0

Out[29]= $\frac{u'(r) + r u''(r)}{r} == 0$

In[30]:= **solution1** = **DSolve**[**LaplacianAxisymmetric**, **u**[**r**], **r**]

Out[30]= {{**u**(**r**) → **c**₂ + **c**₁ **log**(**r**)}}

In[31]:= **us1**[**r_**] = **solution1**[[1, 1, 2]]

Out[31]= **c**₂ + **c**₁ **log**(**r**)

In[32]:= **ver1** = **LaplacianAxisymmetric** /. **u** → **us1**

Out[32]= **True**

In[33]:= **SetCoordinates**[**Spherical**[**ρ**, **θ**, **φ**]]

Out[33]= **Spherical**(**ρ**, **θ**, **φ**)

In[34]:= **CoordinateSystem**

Out[34]= **Spherical**

```
In[35]:= LaplacianSphericalSymmetric = Laplacian[u[ρ]] == 0 // Simplify
```

$$\text{Out[35]} = \frac{2u'(\rho)}{\rho} + u''(\rho) == 0$$

```
In[36]:= solution2 = DSolve[LaplacianSphericalSymmetric, u[ρ], ρ]
```

$$\text{Out[36]} = \left\{ \left\{ u(\rho) \rightarrow c_2 - \frac{c_1}{\rho} \right\} \right\}$$

```
In[37]:= us2[ρ_] = solution2[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Out[37]} = c_2 - \frac{c_1}{\rho}$$

```
In[38]:= ver2 = LaplacianSphericalSymmetric /. u → us2
```

```
Out[38]= True
```

```
In[39]:= PDE1 = LaplacianPolar2 == 0
```

$$\text{Out[39]} = \frac{u^{(0,2)}(r, \theta)}{r^2} + \frac{u^{(1,0)}(r, \theta)}{r} + u^{(2,0)}(r, \theta) == 0$$

```
In[40]:= u[r_, θ_] = R[r] Θ[θ]
```

```
Out[40]= R(r) Θ(θ)
```

```
In[41]:= ODER = r^2 R''[r] + r R'[r] - p^2 R[r] == 0
```

$$\text{Out[41]} = -R(r)p^2 + rR'(r) + r^2R''(r) == 0$$

```
In[42]:= solR = DSolve[ODER, R[r], r]
```

$$\text{Out[42]} = \left\{ \left\{ R(r) \rightarrow c_1 \cosh(\rho \log(r)) + i c_2 \sinh(\rho \log(r)) \right\} \right\}$$

```
In[43]:= ODEΘ = Θ''[θ] + p^2 Θ[θ] == 0
```

$$\text{Out[43]} = \Theta(\theta)p^2 + \Theta''(\theta) == 0$$

```
In[44]:= solθ = DSolve[ODEΘ, Θ[θ], θ]
```

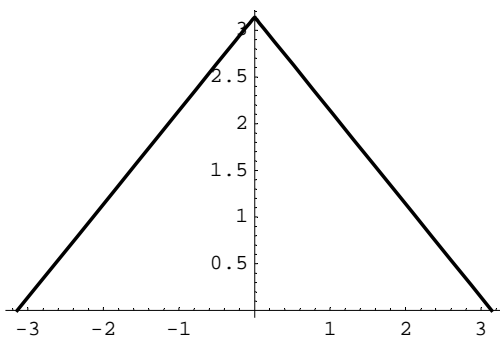
$$\text{Out[44]} = \left\{ \left\{ \Theta(\theta) \rightarrow c_1 \cos(\rho \theta) + c_2 \sin(\rho \theta) \right\} \right\}$$

■ ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜΙ4 (ΠΡΟΒΛΗΜΑ DIRICHLET ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ)

```
In[45]:= Needs["Calculus`FourierTransform`"]
```

```
In[46]:= f[θ_] = π - Abs[θ];
```

```
In[47]:= Plot[f[θ], {θ, -π, π}, PlotStyle → Thickness[0.008]];
```



```
In[48]:= fpl[θ_] = FourierTrigSeries[f[θ], θ, 7, FourierParameters → {-1, 1 / (2 π)}]
```

$$\text{Out[48]} = \frac{4 \cos(\theta)}{\pi} + \frac{4 \cos(3 \theta)}{9 \pi} + \frac{4 \cos(5 \theta)}{25 \pi} + \frac{4 \cos(7 \theta)}{49 \pi} + \frac{\pi}{2}$$

In[49]:= comment = "Παρατηρείται ότι η πιο πάνω σειρά Fourier περιλαμβάνει μόνο το σταθερό όρο και συνημιτονικούς όρους, καθόλου ημιτονικούς όρους. Αυτό είναι εύλογο, επειδή η συνάρτηση που δόθηκε είναι άρτια και οι ημιτονικές συναρτήσεις είναι περιττές συναρτήσεις";

```
In[50]:= A5i = (1 / π) Integrate[f[θ] Cos[5 θ], {θ, -π, π}]
```

$$\text{Out[50]} = \frac{4}{25 \pi}$$

```
In[51]:= A5f = FourierCosCoefficient[f[θ], θ, 5, FourierParameters → {-1, 1 / (2 π)}]
```

$$\text{Out[51]} = \frac{4}{25 \pi}$$

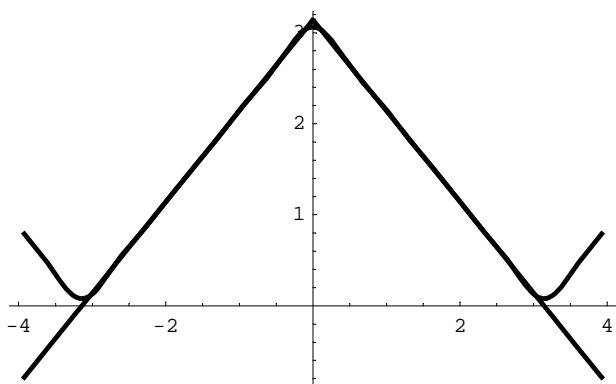
```
In[52]:= A5N = NFourierCosCoefficient[f[θ], θ, 5, FourierParameters → {-1, 1 / (2 π)}]
```

$$\text{Out[52]} = 0.0509296$$

```
In[53]:= ver = A5i == A5f == A5N // N
```

$$\text{Out[53]} = \text{True}$$

```
In[54]:= Plot[{f[θ], fpl[θ]}, {θ, -5 π / 4, 5 π / 4}, PlotStyle → Thickness[0.008]];
```



In[55]:= comment1 = "Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση είναι ικανοποιητική μόνο στο διάστημα [-π,π] της μιας περιόδου";

```

In[56]:= fp2[θ_] = FourierSeries[f[θ], θ, 7, FourierParameters → {-1, 1 / (2 π)}]

Out[56]=  $\frac{2 e^{-i\theta}}{\pi} + \frac{2 e^{i\theta}}{\pi} + \frac{2 e^{-3i\theta}}{9\pi} + \frac{2 e^{3i\theta}}{9\pi} + \frac{2 e^{-5i\theta}}{25\pi} + \frac{2 e^{5i\theta}}{25\pi} + \frac{2 e^{-7i\theta}}{49\pi} + \frac{2 e^{7i\theta}}{49\pi} + \frac{\pi}{2}$ 

In[57]:= ver1 = fp1[θ] == fp2[θ] // Simplify

Out[57]= True

In[58]:= ver2 = fp1[θ] == ExpToTrig[fp2[θ]]

Out[58]= True

In[59]:= ver3 = TrigToExp[fp1[θ]] == fp2[θ]

Out[59]= True

In[60]:= C5f = FourierCoefficient[f[θ], θ, -5, FourierParameters → {-1, 1 / (2 π)}]

Out[60]=  $\frac{2}{25\pi}$ 

In[61]:= C5N = NFourierCoefficient[f[θ], θ, -5, FourierParameters → {-1, 1 / (2 π)}] // Chop

Out[61]= 0.0254648

In[62]:= ver = C5N == N[C5f]

Out[62]= True

In[63]:= A[n_] := FourierCosCoefficient[f[θ], θ, n, FourierParameters → {-1, 1 / (2 π)}]

In[64]:= u[r_, θ_] = A[0] + Sum[A[n] Cos[n θ] (r / a)^n, {n, 1, 7}]

Out[64]=  $\frac{4 \cos(7\theta) r^7}{49 a^7 \pi} + \frac{4 \cos(5\theta) r^5}{25 a^5 \pi} + \frac{4 \cos(3\theta) r^3}{9 a^3 \pi} + \frac{4 \cos(\theta) r}{a \pi} + \frac{\pi}{2}$ 

In[65]:= verPDE = LaplacianPolar2 == 0 // Simplify

Out[65]= True

In[66]:= verBC = u[a, θ] == fp1[θ]

Out[66]= True

```

■ ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜΙ5 (ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ)

■ Η ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

```

In[67]:= Clear[a]; IE = a[t] == -g - c Integrate[a[τ], {τ, 0, t}]

Out[67]=  $a(t) == -g - c \int_0^t a(\tau) d\tau$ 

In[68]:= characterizations = {"Ολοκληρωτική εξίσωση Volterra",
    "μονοδιάστατη", "γραμμική", "με σταθερούς συντελεστές",
    "μη ομογενής", "δευτέρου είδους", "με πυρήνα τη μονάδα"};

```

```
In[69]:= comment =
      "Η πιο πάνω ολοκληρωτική εξίσωση απαντάται στη Δυναμική στο πρόβλημα της
      κατακόρυφης κίνησης υλικού σημείου (είτε προς τα επάνω είτε προς τα κάτω,
      αλλ' εδώ με θετική κατεύθυνση προς τα επάνω) στο γήινο πεδίο βαρύτητας
      με αντίσταση του αέρα ανάλογη της ταχύτητας του υλικού σημείου.";
```

■ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

```
In[70]:= ODE = D[IE, t]
Out[70]= a'(t) == -c a(t)

In[71]:= IC = IE /. t -> 0
Out[71]= a(0) == -g

In[72]:= sol = DSolve[{ODE, IC}, a[t], t]
Out[72]= {{a(t) -> -e^{-ct} g}}

In[73]:= as1[t_] = sol[[1, 1, 2]]
Out[73]= -e^{-ct} g
```

■ ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ LAPLACE

```
In[74]:= IE
Out[74]= a(t) == -g - c \int_0^t a(\tau) d\tau

In[75]:= LTIE = LaplaceTransform[IE, t, s]
Out[75]= LaplaceTransform[a(t), t, s] == -\frac{g}{s} - \frac{c LaplaceTransform[a(t), t, s]}{s}

In[76]:= LTIESolution = Solve[LTIE, LaplaceTransform[a[t], t, s]]
Out[76]= {{LaplaceTransform[a(t), t, s] -> -\frac{g}{(\frac{c}{s} + 1) s}}}}

In[77]:= as2[t_] = InverseLaplaceTransform[LTIESolution[[1, 1, 2]], s, t]
Out[77]= -e^{-ct} g

In[78]:= ver = as1[t] == as2[t]
Out[78]= True
```

■ ΑΣΚΗΣΗ ΕΜΙΙΙ-ΜΙ6 (ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ, ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ)

```
In[79]:= z1 = 3 - 4 i;
```

```

In[80]:= {Re[z1], Im[z1], Abs[z1], Arg[z1]} // N
Out[80]= {3., -4., 5., -0.927295}

In[81]:=  $\Omega[z_] = U (z + a^2 \text{Conjugate}[z] / \text{Abs}[z]^2)$ 
Out[81]=  $U \left( \frac{\text{Conjugate}(z) a^2}{|z|^2} + z \right)$ 

In[82]:= subs = Abs[x + i y] → Sqrt[x^2 + y^2];
In[83]:=  $\Omega1[x_, y_] = \Omega[z] /. z \rightarrow x + i y /. \text{subs} // \text{ComplexExpand}$ 
Out[83]=  $\frac{U x a^2}{x^2 + y^2} + U x + i \left( U y - \frac{a^2 U y}{x^2 + y^2} \right)$ 

In[84]:=  $\Phi[x_, y_] = \text{Re}[\Omega1[x, y]] // \text{ComplexExpand} // \text{Simplify}$ 
Out[84]=  $U x \left( \frac{a^2}{x^2 + y^2} + 1 \right)$ 

In[85]:=  $\Psi[x_, y_] = \text{Im}[\Omega1[x, y]] // \text{ComplexExpand} // \text{Simplify}$ 
Out[85]=  $U y \left( 1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right)$ 

In[86]:= Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]
In[87]:= SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]]
Out[87]= Cartesian(x, y, z)

In[88]:= CoordinateSystem
Out[88]= Cartesian

In[89]:=  $\text{V1a}[x_, y_] = \text{Grad}[\Phi[x, y]] // \text{Simplify}$ 
Out[89]=  $\left\{ \frac{U((y^2 - x^2) a^2 + (x^2 + y^2)^2)}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2 a^2 U x y}{(x^2 + y^2)^2}, 0 \right\}$ 

In[90]:=  $\text{V1}[x_, y_] = \{\text{V1a}[x, y][[1]], \text{V1a}[x, y][[2]]\}$ 
Out[90]=  $\left\{ \frac{U((y^2 - x^2) a^2 + (x^2 + y^2)^2)}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2 a^2 U x y}{(x^2 + y^2)^2} \right\}$ 

In[91]:=  $\text{V2}[x_, y_] = \{\text{D}[\Phi[x, y], x], \text{D}[\Phi[x, y], y]\} // \text{Simplify}$ 
Out[91]=  $\left\{ \frac{U((y^2 - x^2) a^2 + (x^2 + y^2)^2)}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2 a^2 U x y}{(x^2 + y^2)^2} \right\}$ 

In[92]:=  $\text{V3}[x_, y_] = \{\text{D}[\Psi[x, y], y], -\text{D}[\Psi[x, y], x]\} // \text{Simplify}$ 
Out[92]=  $\left\{ \frac{U((y^2 - x^2) a^2 + (x^2 + y^2)^2)}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2 a^2 U x y}{(x^2 + y^2)^2} \right\}$ 

In[93]:= ContinuityEquation = Div[V1a[x, y]] == 0 // Simplify
Out[93]= True

```

```
In[94]:= IrrotationalFlow = Curl[V1a[x, y]] == {0, 0, 0} // Simplify
```

```
Out[94]= True
```

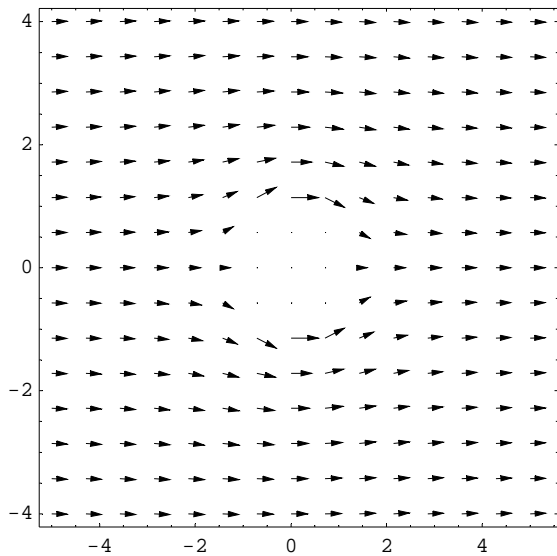
```
In[95]:= {a = 1, U = 10};
```

```
In[96]:= V4[x_, y_] = If[x2 + y2 ≥ a2, Evaluate[V1[x, y]], {0, 0}]
```

```
Out[96]= If[x2 + y2 ≥ 1, { $\frac{10(-x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2)}{(x^2 + y^2)^2}$ ,  $-\frac{20xy}{(x^2 + y^2)^2}$ }, {0, 0}]
```

```
In[97]:= Needs["Graphics`PlotField`"]
```

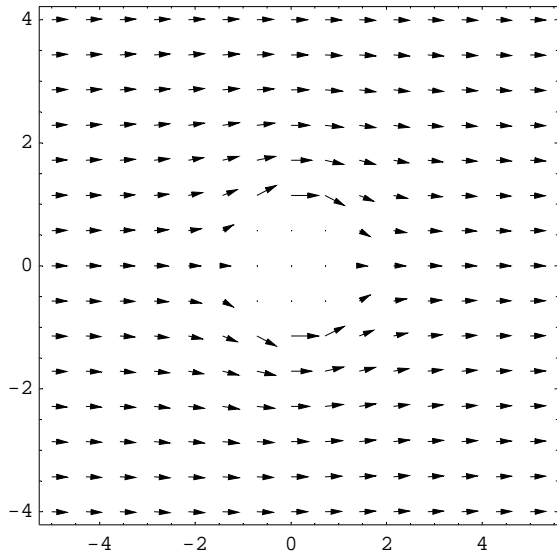
```
In[98]:= VelocityField = PlotVectorField[V4[x, y], {x, -5, 5},
    {y, -4, 4}, AspectRatio → 1, Frame → True, ImageSize → 260];
```



```
In[99]:= ϕ1[x_, y_] = If[x2 + y2 ≥ a2, Evaluate[ϕ[x, y]], 0]
```

```
Out[99]= If[x2 + y2 ≥ 1,  $10x\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2}\right)$ , 0]
```

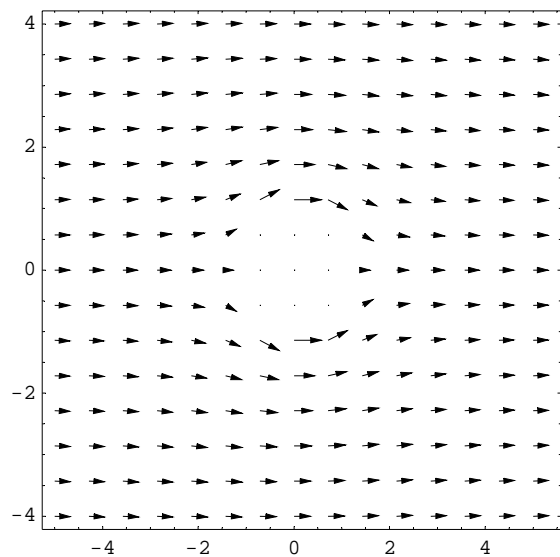
```
In[100]:= PlotGradientField[ϕ1[x, y], {x, -5, 5},
    {y, -4, 4}, AspectRatio → 1, Frame → True, ImageSize → 260];
```



```
In[101]:=  $\Psi1[x_, y_] = \text{If}[x^2 + y^2 \geq a^2, \text{Evaluate}[\Psi[x, y]], 0]$ 
```

```
Out[101]=  $\text{If}[x^2 + y^2 \geq 1, 10y\left(1 - \frac{1}{x^2 + y^2}\right), 0]$ 
```

```
In[102]:= PlotHamiltonianField $[\Psi1[x, y], \{x, -5, 5\},$   
 $\{y, -4, 4\}, \text{AspectRatio} \rightarrow 1, \text{Frame} \rightarrow \text{True}, \text{ImageSize} \rightarrow 260];$ 
```



ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ NOTEBOOKS ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Στις επόμενες σελίδες παρατίθενται δύο εφαρμοσμένα notebooks της *Mathematica*, που έχουν προετοιμασθεί με αρκετή προσοχή, λίγο-πολύ σαν να ήταν απλές επιστημονικές εργασίες, και επιχειρούν να δείξουν τη χρησιμότητά της σε συγκεκριμένα προβλήματα του Πολιτικού Μηχανικού που σχετίζονται με διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους. Τα notebooks αυτά είναι τα εξής:

• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ NOTEBOOKS

1. Εφαρμοσμένο Notebook EN-EMIII-AIRY: Τασική Συνάρτηση του Airy (15 σελίδες)

Περίληψη του notebook: Στο notebook αυτό γίνεται μια λεπτομερής μελέτη της τασικής συναρτήσεως του Airy. Με τη χρήση της είναι δυνατός ο προσδιορισμός των τάσεων στο στατικό πρόβλημα της Επίπεδης Ελαστικότητας για ένα ισότροπο και γραμμικά ελαστικό μέσον. Μετά τη σχετική εισαγωγή αναφέρονται οι σχετικές εξισώσεις: οι δύο εξισώσεις ισορροπίας και η συνθήκη συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Με τη χρήση τους καθώς και τη χρήση του νόμου του Hooke στην Ελαστικότητα αποδεικνύεται τελικά ότι η τασική συνάρτηση του Airy πρέπει να είναι διαρμονική, δηλαδή να επαληθεύει τη διαρμονική εξίσωση, εδώ στο επίπεδο. Δίνονται επίσης πέντε απλά παραδείγματα τασικών συναρτήσεων του Airy. Μετά αναφέρεται και επαληθεύεται η γενική έκφραση της τασικής συναρτήσεως του Airy. Στη συνέχεια με βάση την τασική συνάρτηση του Airy προσδιορίζονται οι συνιστώσες των τάσεων, αλλά και των παραμορφώσεων. Έπειτα αναφέρεται και η αντίστοιχη διαρμονική εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες. Το notebook τελειώνει με συμπεράσματα και σχόλια.

2. Εφαρμοσμένο Notebook EN-EMIII-PLATES: Συνήθεις Πλάκες (10 σελίδες)

Περίληψη του notebook: Στο notebook αυτό εξετάζεται το ενδιαφέρον πρόβλημα της συνήθους πλάκας με τις παραδοχές που γενικά γίνονται αποδεκτές από τον Πολιτικό Μηχανικό. Βασική άγνωστη ποσότητα είναι το βέλος κάμψεως (ή βύθιση) της πλάκας. Με βάση αυτό, αλλά και το νόμο του Hooke στην Ελαστικότητα, προσδιορίζονται πρώτα οι τάσεις και οι παραμορφώσεις στην πλάκα. Με χρήση τους προσδιορίζονται έπειτα οι τρεις ροπές στην πλάκα: οι δύο ροπές κάμψεως και η ροπή συστροφής. Από τις εκφράσεις τους προκύπτει επίσης και η δυσκαμψία της πλάκας. Στη συνέχεια από τις εξισώσεις ισορροπίας προκύπτει η μη ομογενής διαφορική εξίσωση τετάρτης τάξεως την οποία πρέπει να πληροί το βέλος κάμψεως της πλάκας. Αυτή περιλαμβάνει στο αριστερό μέλος της το διαρμονικό τελεστή, στον οποίο γίνεται αναφορά για τη χρήση του. Λεπτομερής εφαρμογή της θεωρίας γίνεται στην αρκετά απλή ισόπλευρη τριγωνική πλάκα με απλή στήριξη στην περίμετρό της και υπό ομοιόμορφη κάθετη κατανεμημένη φόρτιση με πλήρη επαλήθευση της εκφράσεως του βέλους κάμψεως της πλάκας. Και το notebook αυτό τελειώνει με συμπεράσματα και σχόλια.

Τα δύο αυτά εφαρμοσμένα notebooks έχουν ασφαλώς το καθαυτό ενδιαφέρον τους στο μάθημα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III και στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού γενικότερα: συγκεκριμένα τόσο η Επίπεδη Ελαστικότητα όσο και οι Πλάκες αποτελούν δύο ιδιαίτερα ενδιαφέροντα θέματα του Πολιτικού Μηχανικού. Η παρουσία τους όμως εδώ στοχεύει επίσης και στη χρήση τους σαν υποδειγμάτων από το φοιτητή/τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό για την εξίσου επιμελημένη προετοιμασία και των δικών του/των δικών της εφαρμοσμένων notebooks με τη *Mathematica*.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟ NOTEBOOK EN-EMIII-AIRY

ΤΑΣΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ AIRY

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Επίπεδη Ελαστικότητα

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους, Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Αρμονικός Τελεστής (Τελεστής του Laplace), Εξίσωση του Laplace, Διαρμονικός Τελεστής, Διαρμονική Εξίσωση

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Ελαστικοί Δίσκοι, Επίπεδη Ελαστικότητα, Γραμμική Ελαστικότητα, Ισότροπη Ελαστικότητα, Στατικό Πρόβλημα, Ελαστικές Σταθερές, Τάσεις, Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Νόμος του Hooke, Επίπεδη Εντατική Κατάσταση (Επίπεδη Ένταση), Εξισώσεις Ισορροπίας, Συνθήκη Συμβιβαστού των Παραμορφώσεων, Τασική Συνάρτηση (Τασεοσυνάρτηση), Συνάρτηση του Airy

ΣΧΕΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (ΔΕΙΓΜΑ):

[1] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity* (Θεωρία Ελαστικότητας), 3η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, Tokyo, 1970 (1η έκδοση το 1934), Κεφάλαια 2 και 3.

[2] Muskhelishvili, N. I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* (Μερικά Βασικά Προβλήματα της Μαθηματικής Θεωρίας Ελαστικότητας). Noordhoff, Groningen, 1963 (μετάφραση της 4ης Ρωσικής εκδόσεως, Moscow, 1954, 1η έκδοση το 1933), Εδάφια 27, 29 και 31.

[3] Μαστρογιάννη, Ε. Ν., *Μηχανική των Υλικών*, Τόμος Πρώτος. Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999, Εδάφια 1.13.1, 2.13, 3.4 και Πρόβλημα Π3-10.

[4] Νιτσιώτα, Γ. Μ., *Ελαστοστατική: Γραμμική Θεωρία*, Δεύτερος Τόμος: *Επιφανειακοί Φορείς: Μέθοδοι Επίλυσεως*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1995, Κεφάλαιο 9, Εδάφια 9.1 και 9.2.

[5] Γδούτου, Ε. Ε., *Θεωρία Ελαστικότητας*. Εκδοτικός Οίκος Αδελφών Κυριακίδη, Θεσσαλονίκη, 1995, Κεφάλαιο 4.

[6] Βαλιάση, Θ. Ν., *Επιφανειακοί Φορείς: Θεωρία και Μέθοδοι Επίλυσης*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2000, Κεφάλαιο 5.

[7] Nash, W. A., *Αντοχή των Υλικών* (Schaum's Outline Series: *Strength of Materials*, Ελληνική Μετάφραση: Περισίδης, Σ. Κ. και Τυπάδης, Γ. Γ.). McGraw-Hill, New York, 1977, και ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1988, Κεφάλαιο 19.

1.1. Εισαγωγή

Στο παρόν εφαρμοσμένο notebook εξετάζεται σύντομα το επίπεδο πρόβλημα στη θεωρία της γραμμικής ισότροπης Ελαστικότητας (που βασίζεται στο νόμο του Hooke) υπό στατικές συνθήκες επίπεδης έντασης χωρίς δυνάμεις μάζας και σε Καρτεσιανές συντεταγμένες.

Το πρόβλημα αυτό είναι εξαιρετικά συνηθισμένο στην πράξη. Ο Πολιτικός Μηχανικός έχει το εξής σύστημα εξισώσεων:

(α) Τις δύο εξισώσεις ισορροπίας [3, σ. 42, εξισώσεις (1.30)], που αφορούν στη στατική ισορροπία ενός απειροστού στοιχείου του επίπεδου ελαστικού μέσου (του ελαστικού δίσκου) και που είναι διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους με ανεξάρτητες μεταβλητές τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) και εξαρτημένες μεταβλητές (άγνωστες συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών) τις τάσεις (τις συνιστώσες του τανυστή των τάσεων) σ_x, σ_y και τ_{xy} ,

(β) Τη συνθήκη του συμβιβαστού των παραμορφώσεων [3, σ. 95, εξίσωση (2.27)], που είναι επίσης μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους με τις ίδιες ανεξάρτητες μεταβλητές (τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y) και πάλι) και με εξαρτημένες μεταβλητές (άγνωστες συναρτήσεις) τις παραμορφώσεις (τις συνιστώσες του τανυστή των παραμορφώσεων) ϵ_x, ϵ_y και γ_{xy} και που είναι εξίσου απόλυτα αναγκαία, ώστε να είναι οι παραμορφώσεις του ελαστικού δίσκου αποδεκτές, και

(γ) Το νόμο του Hooke για την ισότροπη γραμμική Ελαστικότητα, εν προκειμένω στις δύο διαστάσεις (x, y) και υπό συνθήκες επίπεδης έντασης [3, σ. 112, εξισώσεις (3.14)], που μας εκφράζει τις τρεις παραμορφώσεις (στο πρόβλημα της επίπεδης έντασης) συναρτήσει των επίσης τριών τάσεων (στο ίδιο πρόβλημα) μέσω τριών γραμμικών αλγεβρικών (και όχι ασφαλώς διαφορικών) εξισώσεων.

Επομένως συνολικά διαθέτουμε έξι εξισώσεις (δύο της ισορροπίας, μία του συμβιβαστού των παραμορφώσεων και τρεις του νόμου του Hooke) στο επίπεδο πρόβλημά μας με έξι αγνώστους: τις τρεις τάσεις σ_x, σ_y και τ_{xy} και τις τρεις παραμορφώσεις ϵ_x, ϵ_y και γ_{xy} .

Είναι επίσης ιδιαίτερα γνωστό ότι η εύρεση τόσο των τάσεων όσο και των παραμορφώσεων είναι θεμελιώδης στην επίλυση ενός επίπεδου ελαστικού προβλήματος (για έναν ελαστικό δίσκο) που εξετάζεται εδώ. Εξαιρετικά σημαντικός είναι ασφαλώς ο προσδιορισμός των τάσεων στον ελαστικό δίσκο, οι οποίες μπορούν να οδηγήσουν σε πλαστική καταπόνηση του υλικού και παραπέρα σε διαρροή, θραύση και ανάλογα μη αποδεκτά φαινόμενα αστοχίας του υλικού που εξετάζονται στη Μηχανική των Υλικών [3, Κεφάλαιο 5]. Αυτά με κανέναν τρόπο δεν πρέπει να αγνοούνται από τον Πολιτικό Μηχανικό. Αν και τα φαινόμενα αυτά δε θα εξετασθούν καθόλου στο παρόν εφαρμοσμένο notebook, εντούτοις θα εξετασθεί η δυνατότητα “απλοποίησης” του συστήματος των έξι εξισώσεων με έξι αγνώστους που προαναφέρθηκε με τέτοιο τρόπο, ώστε αυτό να καταστεί υπολογιστικά κάπως πιο εύκολο στην επίλυσή του υπό συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες. Ειδικότερα στόχο του παρόντος εφαρμοσμένου notebook αποτελεί η αναγωγή του συστήματος των έξι πιο πάνω εξισώσεων μόνο σε μία και μάλιστα με μία μόνο άγνωστη συνάρτηση: την καλούμενη τασική συνάρτηση του Airy.

Για τον πιο πάνω σκοπό το πρώτο και ευκολότερο βήμα είναι η απαλοιφή των συνιστωσών του τανυστή των παραμορφώσεων (πιο απλά των παραμορφώσεων) ϵ_x, ϵ_y και γ_{xy} με χρήση των συνιστωσών του τανυστή των τάσεων (πιο απλά των τάσεων) σ_x, σ_y και τ_{xy} στην εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Αυτή η εργασία είναι πολύ απλή λόγω της ισχύος του νόμου του Hooke, που άμεσα εκφράζει τις παραμορφώσεις συναρτήσει των τάσεων.

Προκύπτει έτσι ένα σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με τρεις αγνώστους: τις τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} . Αυτές, όπως ήδη αναφέρθηκε, πρέπει οπωσδήποτε να υπολογισθούν, για να ελεγχθεί κατά πόσον είναι αποδεκτές, δηλαδή δεν οδηγούν το υλικό του ελαστικού δίσκου σε φαινόμενα αστοχίας.

Στη συνέχεια το σύστημα αυτό των τριών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους μετατρέπεται σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους μετά από την έκφραση των τάσεων συναρτήσει μιας νέας, βοηθητικής συναρτήσεως, της τασικής συναρτήσεως (ή τασεοσυναρτήσεως) του Airy $A(x, y)$. Αυτήν την πρότεινε αρχικά ο G. B. Airy το 1862. Στη συνέχεια ο J. C. Maxwell απέδειξε τη διαρμονικότητα της συναρτήσεως αυτής. Επομένως καταρχήν τουλάχιστον η όλη διαδικασία είναι εξαιρετικά χρήσιμη: να έχουμε μία μόνο διαφορική εξίσωση αντί για τρεις και αυτός είναι ο λόγος που η τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$ έχει καταστεί τόσο δημοφιλής με την πάροδο των ετών. Από την αρνητική πλευρά όμως υπάρχει και το σχετικό κόστος. Αυτό συνίσταται σε τρία κυρίως σημεία: (α) ότι η τασική συνάρτηση του Airy στερείται φυσικής σημασίας, επειδή είναι ένα μαθηματικό δημιούργημα που αποβλέπει μόνο σε υπολογιστικά οφέλη, (β) ότι η τελική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους είναι τετάρτης τάξεως, ενώ οι εξισώσεις ισορροπίας είναι πρώτης και η εξίσωση συμβιβαστού των παραμορφώσεων δευτέρας και (γ) ότι η χρήση της συναρτήσεως του Airy δυσχεραίνει κάπως την έκφραση των συνοριακών συνθηκών στο σύνορο (ή στα σύνορα) του ελαστικού δίσκου. (Στο παρόν εφαρμοσμένο notebook δε θα εξετασθούν οι συνοριακές συνθήκες.) Παρά ταύτα η αναγωγή ενός συστήματος τριών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους είναι ιδιαίτερα υπολογιστικά ωφέλιμη για τον Πολιτικό Μηχανικό και συνεπώς τα πιο πάνω τρία μειονεκτήματα της χρήσεως της τασικής συναρτήσεως του Airy πρέπει να θεωρούνται μικρής σημασίας σε σύγκριση με το υπολογιστικό όφελος από τη χρήση της. Σύμφωνα με όλα αυτά η μέθοδος της τασικής συναρτήσεως του Airy έχει χρησιμοποιηθεί και συνεχίζει βέβαια να χρησιμοποιείται κατά κόρο για την εύρεση των τάσεων σε δίσκους στην επίπεδη, στατική, ισότροπη και γραμμική Ελαστικότητα.

Προχωράμε τώρα στην υπολογιστική υλοποίηση της μεθοδολογίας που ήδη περιγράψαμε στο κλασικό αυτό πρόβλημα της επίπεδης Ελαστικότητας με τη χρήση της *Mathematica*.

1.2. Το πλήρες σύστημα των εξισώσεων

Καταρχήν έχουμε διαθέσιμες τις δύο εξισώσεις ισορροπίας του ελαστικού δίσκου [3, σ. 42, εξισώσεις (1.30)], που είναι αναγκαίο να ισχύουν σε κάθε σημείο (x, y) του δίσκου. Εύλογα οι εξισώσεις αυτές, που είναι δύο διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, αλλά με τρεις αγνώστες συναρτήσεις έχουν εκφρασθεί συναρτήσει των τάσεων σ_x , σ_y και τ_{xy} :

$$\text{In}[1]:= \text{ΕξισώσειςΙσορροπίας} = \{\partial_x \sigma_x[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \partial_y \tau_{xy}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] == 0, \partial_x \tau_{xy}[\mathbf{x}, \mathbf{y}] + \partial_y \sigma_y[\mathbf{x}, \mathbf{y}] == 0\};$$

Η τρίτη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους είναι η συνθήκη του συμβιβαστού των παραμορφώσεων [3, σ. 95, εξίσωση (2.27)]. Αυτή εκφράζεται καταρχήν συναρτήσει των παραμορφώσεων ϵ_x , ϵ_y και γ_{xy} :

$$\text{In[2]:= Συνθήκη Συμβιβαστού Των Παραμορφώσεων =} \\ \text{eqn} = \partial_{\{y,2\}} \epsilon_x[x, y] + \partial_{\{x,2\}} \epsilon_y[x, y] == \partial_{x,y} \gamma_{xy}[x, y];$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης (εντελώς βοηθητικά) τη σχέση μεταξύ του μέτρου διατμήσεως G (σταθεράς του Lamé μ) και του μέτρου ελαστικότητας E [3, σ. 110, εξίσωση (3.10)]

$$\text{In[3]:= Σχέση Ελαστικών Σταθερών} = \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)};$$

Έτσι ο θεμελιώδης νόμος του Hooke που ισχύει στην παρούσα ειδική περίπτωση του προβλήματος του δίσκου [3, σ. 112, εξισώσεις (3.14)]

$$\text{In[4]:= Νόμος Του Hooke} = \left\{ \epsilon_x[x_, y_] = \frac{1}{E} (\sigma_x[x, y] - \nu \sigma_y[x, y]), \right. \\ \epsilon_y[x_, y_] = \frac{1}{E} (\sigma_y[x, y] - \nu \sigma_x[x, y]), \\ \left. \gamma_{xy}[x_, y_] = \frac{1}{G} \tau_{xy}[x, y] \right\}$$

$$\text{Out[4]=} \left\{ \frac{\sigma_x(x, y) - \nu \sigma_y(x, y)}{E}, \frac{\sigma_y(x, y) - \nu \sigma_x(x, y)}{E}, \frac{2(\nu + 1) \tau_{xy}(x, y)}{E} \right\}$$

Θα είναι τελικά διατυπωμένος μόνο με τη χρήση του μέτρου ελαστικότητας E και του λόγου του Poisson ν του υλικού σαν τρεις γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις που μας επιτρέπουν να απαλείψουμε τις παραμορφώσεις από τη συνθήκη του συμβιβαστού των παραμορφώσεων. Αυτή τώρα γράφεται άμεσα συναρτήσει των τάσεων:

$$\text{In[5]:= Συνθήκη Συμβιβαστού Των Παραμορφώσεων Με Τάσεις} = \text{eqn} = \text{eqn} // \text{Simplify}$$

$$\text{Out[5]=} \frac{\sigma_x^{(0,2)}(x, y) - \nu \sigma_y^{(0,2)}(x, y) - 2(\nu + 1) \tau_{xy}^{(1,1)}(x, y) - \nu \sigma_x^{(2,0)}(x, y) + \sigma_y^{(2,0)}(x, y)}{E} == 0$$

Ασφαλώς κρίνεται σκόπιμος ο πολλαπλασιασμός της επί το μέτρο ελαστικότητας E , ώστε να απαλειφθεί εντελώς από αυτήν η ελαστική αυτή σταθερά και να παραμείνει μόνο ο λόγος του Poisson ν :

$$\text{In[6]:= Συνθήκη Συμβιβαστού Των Παραμορφώσεων Με Τάσεις} = \text{eqn} = E \text{eqn}[1] == 0$$

$$\text{Out[6]=} \sigma_x^{(0,2)}(x, y) - \nu \sigma_y^{(0,2)}(x, y) - 2(\nu + 1) \tau_{xy}^{(1,1)}(x, y) - \nu \sigma_x^{(2,0)}(x, y) + \sigma_y^{(2,0)}(x, y) == 0$$

1.3. Εναλλακτική μορφή της συνθήκης συμβιβαστού των παραμορφώσεων

Προχωρώντας, είναι σκόπιμο, αν και όχι αναγκαίο, να έχουμε διαθέσιμο και το πακέτο **Vector-Analysis** της *Mathematica*. Με τον τρόπο αυτό θα μπορούμε εύκολα να υπολογίζουμε Λαπλασιανές (μέσω της εντολής **Laplacian**) για την εφαρμογή του αρμονικού τελεστή Δ και επίσης να εφαρμόζουμε άμεσα και το διαρμονικό τελεστή Δ^2 (μέσω της εντολής **Biharmonic**):

$$\text{In[7]:= Needs["Calculus`VectorAnalysis"]}$$

Στο συγκεκριμένο εφαρμοσμένο notebook εργαζόμαστε σε Καρτεσιανές συντεταγμένες (αν και η όλη μέθοδος είναι γενικεύσιμη και σε πολικές συντεταγμένες)

In[8]:= **SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]]**

Out[8]= Cartesian(x, y, z)

Στο σημείο αυτό σημειώνεται ότι πέρα από την κύρια μορφή της συνθήκης του συμβιβαστού των παραμορφώσεων που προαναφέρθηκε μέσω των ιδίων των παραμορφώσεων και παραπέρα και μέσω των τάσεων, όπως ήδη είδαμε, υπάρχει και μια ισοδύναμη, εναλλακτική μορφή της συνθήκης αυτής (μέσω των τάσεων), η οποία προκύπτει, αφού ληφθούν υπόψη και οι εξισώσεις ισορροπίας, και έχει τελικά την εξής έκφραση [1, σ. 31, εξίσωση (b)]:

In[9]:= **ΕναλλακτικήΤελικήΜορφήΤηςΣυνθήκηςΣυμβιβαστούΤωνΠαραμορφώσεωνΜεΤάσεις = ΣυνθήκηΣυμβιβαστούΤωνΤάσεων = Laplacian[σ_x[x, y] + σ_y[x, y]] == 0**

Out[9]= $\sigma_x^{(0,2)}(x, y) + \sigma_y^{(0,2)}(x, y) + \sigma_x^{(2,0)}(x, y) + \sigma_y^{(2,0)}(x, y) == 0$

Η έκφραση αυτή χρησιμοποιεί την Λαπλασιανή του αθροίσματος των ορθών τάσεων $\sigma_x + \sigma_y$. Πρόκειται επομένως για μια ακόμη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που μπορεί να αντικαταστήσει την εξίσωση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων (γραμμένη είτε μέσω των παραμορφώσεων είτε μέσω των τάσεων) και ίσως μπορεί να αποκληθεί και συνθήκη συμβιβαστού των τάσεων [4, σ. 20, εξίσωση (24)]. Εν προκειμένω, στο παρόν εφαρμοσμένο notebook, θα χρησιμοποιηθεί μόνο η βασική εξίσωση του συμβιβαστού των παραμορφώσεων, την οποία όμως έχουμε ήδη μετατρέψει στην απόλυτα ισοδύναμη της μορφή μέσω των συνιστωσών των τάσεων, **ΣυνθήκηΣυμβιβαστούΤωνΠαραμορφώσεωνΜεΤάσεις** (6), έχοντας βασισθεί στον νόμο του Hooke, αλλ' όχι και στις εξισώσεις ισορροπίας. Αυτές τις θεωρούμε (και πραγματικά είναι) ανεξάρτητες και ασφαλώς έχουμε την πρόθεση να τις λάβουμε υπόψη μας από 'δώ και πέρα.

1.4. Η τασική συνάρτηση (ή τασεοσυνάρτηση) του Airy

Για να είμαστε σαφέστεροι και πληρέστεροι, θα χρησιμοποιήσουμε στο σημείο αυτό τις γνώσεις που έχουμε αποκτήσει από τις πλήρεις ή ακριβείς συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που έχουν ήδη εξετασθεί στο Μέρος Α (στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά II για Πολιτικούς Μηχανικούς). Σύμφωνα με τις γνώσεις αυτές καταρχήν η πρώτη από τις πιο πάνω εξισώσεις ισορροπίας (1) καθιστά σαφές ότι οι τάσεις σ_x και τ_{xy} προέρχονται (μέσω πρώτων μερικών παραγωγίσεων) από μία και μόνο μία συνάρτηση $p(x, y)$, πιο συγκεκριμένα

In[10]:= **{σ_x[x_, y_] = ∂_y p[x, y], τ_{xy}[x_, y_] = -∂_x p[x, y]};**

Θεωρώντας τις παραγώγους στις εξισώσεις ισορροπίας (1) συνεχείς συναρτήσεις, προκύπτει ότι οι μικτές μερικές παράγωγοι της συναρτήσεως $p(x, y)$ που ορίσαμε είναι ίσες:

In[11]:= **∂_{x,y} p[x, y] == ∂_{y,x} p[x, y]**

Out[11]= True

Αυτό γίνεται αυτόματα αποδεκτό και από τη *Mathematica*, όπου εξ υποθέσεως αυτές οι μικτές μερικές παράγωγοι θεωρήθηκαν συνεχείς. Εξαιτίας της ισότητας (11), οι εκφράσεις (10) για τις τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} μέσω της βοηθητικής συναρτήσεως $p(x, y)$ επαληθεύουν την πρώτη από τις εξισώσεις ισορροπίας (1):

```
In[12]:= ΕξισώσειςΙσορροπίας[1]
```

```
Out[12]= True
```

Με απόλυτα ανάλογο τρόπο εργαζόμαστε και για τη δεύτερη από τις εξισώσεις ισορροπίας (1) (υποθέτοντας και πάλι πως τα δύο ίσα μέλη της είναι συνεχείς συναρτήσεις), όπου χρησιμοποιούμε μια δεύτερη βοηθητική συνάρτηση $q(x, y)$ για τον ορισμό των τάσεων σ_y και τ_{xy} (μέσω πρώτων μερικών παραγωγίσεων και πάλι) ως εξής:

```
In[13]:= {σy[x_, y_] = ∂x q[x, y], τxy[x_, y_] = -∂y q[x, y]};
```

Κατ' αυτόν τον τρόπο επαληθεύεται και η δεύτερη εξίσωση ισορροπίας

```
In[14]:= ΕξισώσειςΙσορροπίας[2]
```

```
Out[14]= True
```

Έτσι οι εξισώσεις ισορροπίας **ΕξισώσειςΙσορροπίας** (1) έχουν αποτελέσει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες [2, σ. 104] για την ύπαρξη των δύο συναρτήσεων $p(x, y)$ και $q(x, y)$ για τον καθορισμό των τάσεων (μέσω πρώτων μερικών παραγωγίσεων). Ας αναφέρουμε επίσης ότι αποφυγάμε την χρήση του όρου τασικές συναρτήσεις για τις δύο αυτές συναρτήσεις $p(x, y)$ και $q(x, y)$. Αυτό το κάναμε, επειδή σκοπεύουμε να αφιερώσουμε τον όρο αυτό μόνο στη συνάρτηση του Airy $A(x, y)$, η οποία θα μας επιτρέψει να υπολογίζουμε και τις τρεις τάσεις αντίθετα με τις $p(x, y)$ και $q(x, y)$ που είναι ελλιπείς και επομένως ελάχιστα χρήσιμες τελικά.

Για να γίνουμε σαφέστεροι, πρέπει να σημειώσουμε ότι έχοντας εισαγάγει ανεξάρτητα τις συναρτήσεις $p(x, y)$ και $q(x, y)$ μέσω του "χωρισμού" των δύο εξισώσεων ισορροπίας (1), αγνοήσαμε προς στιγμή το γεγονός ότι οι δύο διατμητικές τάσεις τ_{xy} και τ_{yx} είναι ίσες μεταξύ τους [3, σ. 8, εξίσωση (1.5a)]. (Άρα στις εξισώσεις ισορροπίας (1) μόνο η διατμητική τάση τ_{xy} έχει χρησιμοποιηθεί.) Επομένως, εξισώνοντας τις εκφράσεις της διατμητικής τάσεως τ_{xy} από τις εξισώσεις (10) και (13)

```
In[15]:= ΔιατμητικήΤάση = -∂x p[x, y] == -∂y q[x, y] // Simplify
```

```
Out[15]= q(0,1)(x, y) == p(1,0)(x, y)
```

διαπιστώνουμε ότι τώρα (μέσω της χρήσεως αυτών των δύο συναρτήσεων $p(x, y)$ και $q(x, y)$) ουσιαστικά αντικαταστήσαμε τις δύο εξισώσεις ισορροπίας (1) (που είναι ασφαλώς διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους) με την εξίσωση (15) (που είναι επίσης ασφαλώς διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους). Ταυτόχρονα βέβαια σαν εξαρτημένες μεταβλητές αντί για τις τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} έχουμε τώρα πια τις συναρτήσεις $p(x, y)$ και $q(x, y)$.

Με βάση όσα ήδη αναφέρθηκαν η εξίσωση (15) για τη διατμητική τάση τ_{xy} μας δηλώνει και πάλι ότι οι δύο βοηθητικές συναρτήσεις $p(x, y)$ και $q(x, y)$ που εισαγάγαμε, έτσι ώστε να επαληθεύονται αυτόματα οι εξισώσεις ισορροπίας (1) προέρχονται και αυτές με τη σειρά τους από μία μόνο συνάρτηση $A(x, y)$. Συγκεκριμένα είναι πρώτες μερικές παράγωγοι της συναρτήσεως αυτής. Έτσι η συνθήκη (15) για τη διατμητική τάση τ_{xy} επαληθεύεται (και αυτή) αυτόματα. Ορίζουμε επομένως απλά την τασική συνάρτηση (ή τασεοσυνάρτηση) του Airy $A(x, y)$ πιο συγκεκριμένα

In[16]:= **ΤασικήΣυνάρτησηΤουAiry = A[x, y];**

Έχουμε την πρόθεση να χρησιμοποιήσουμε και τους τύπους που εκφράζουν τις δύο βοηθητικές συναρτήσεις $p(x, y)$ και $q(x, y)$ μέσω της τασικής συναρτήσεως του Airy $A(x, y)$, πιο συγκεκριμένα

In[17]:= **{p[x_, y_] = $\partial_y A[x, y]$, q[x_, y_] = $\partial_x A[x, y]$ };**

Κατ' αυτόν τον τρόπο πετύχαμε να έχουμε εξασφαλίσει την ικανοποίηση και των δύο εξισώσεων ισορροπίας (1) με την ταυτόχρονη αντικατάσταση των τριών τάσεων σ_x , σ_y και τ_{xy} από μία μόνο νέα εξαρτημένη μεταβλητή: την τασική συνάρτηση (ή τασεοσυνάρτηση) του Airy $A(x, y)$. Τώρα πια οι τάσεις μπορούν να εκφραστούν αντί μέσω των δύο βοηθητικών συναρτήσεων $p(x, y)$ και $q(x, y)$ μέσω μόνο της τασικής συναρτήσεως του Airy $A(x, y)$ ως εξής:

In[18]:= **ΕκφράσειςΤωνΤάσεων = { $\sigma_x[x, y]$, $\sigma_y[x, y]$, $\tau_{xy}[x, y]$ }**

Out[18]= { $A^{(0,2)}(x, y)$, $A^{(2,0)}(x, y)$, $-A^{(1,1)}(x, y)$ }

Ασφαλώς επαληθεύονται και οι δύο εξισώσεις ισορροπίας (1)

In[19]:= **ΕξισώσειςΙσορροπίας**

Out[19]= {True, True}

1.5. Η διαρμονική εξίσωση για την τασική συνάρτηση του Airy

Μέχρι τώρα δεν έχουμε δώσει καμία ουσιαστική προσοχή στη συνθήκη του συμβιβαστού των παραμορφώσεων (6) (γραμμένη μέσω των τάσεων, σαν να ήταν συνθήκη συμβιβαστού των τάσεων), η οποία πρέπει οπωσδήποτε να ισχύει και αυτή. Θα πρέπει επομένως η τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$ να ικανοποιεί όχι μόνο τις δύο εξισώσεις ισορροπίας (1) (όπως αυτόματα συμβαίνει), αλλά και την εξής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους:

In[20]:= **ΔιαφορικήΕξίσωσηΤουΕπίπεδουΕλαστικούΠροβλήματος =
ΣυνθήκηΣυμβιβαστούΤωνΠαραμορφώσεωνΜεΤηνΤασικήΣυνάρτησηΤουAiry=
ΣυνθήκηΣυμβιβαστούΤωνΠαραμορφώσεωνΜεΤάσεις // Simplify**

Out[20]= $A^{(0,4)}(x, y) + 2 A^{(2,2)}(x, y) + A^{(4,0)}(x, y) == 0$

Αυτή έχει πλέον καταστεί η μοναδική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που πρέπει να επιλύεται σε ένα επίπεδο ελαστικό πρόβλημα (ελαστικό δίσκο) υπό συνθήκες επίπεδης

έντασης. (Ανάλογα ασφαλώς ισχύουν και στο πρόβλημα της επίπεδης παραμόρφωσης, ενώ γενικεύσεις ισχύουν στην επίπεδη ανισότροπη Ελαστικότητα τόσο υπό συνθήκες επίπεδης έντασης όσο και υπό συνθήκες επίπεδης παραμόρφωσης.)

Η πιο πάνω διαφορική εξίσωση (20) που πρέπει να επαληθεύεται από την τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$ είναι η βασική και μοναδική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους στο πρόβλημά μας. Πετύχαμε δηλαδή την αναγωγή του από ένα σύστημα τριών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους σε μία μόνο τέτοια εξίσωση. Εναλλακτικά βέβαια θα μπορούσε ασφαλώς να είχε χρησιμοποιηθεί και η εναλλακτική μορφή της συνθήκης του συμβιβαστού των παραμορφώσεων (η συνθήκη συμβιβαστού των τάσεων) (9)

In[21]:= **ΣυνθήκηΣυμβιβαστούΤωνΤάσεων**

Out[21]= $A^{(0,4)}(x, y) + 2 A^{(2,2)}(x, y) + A^{(4,0)}(x, y) == 0$

Η κατάληξη θα ήταν η ίδια ακριβώς διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, η καλούμενη διαρμονική εξίσωση. Αυτή εκφράζεται εύκολα και μέσω του διαρμονικού τελεστή Δ^2 (εντολή **Biharmonic** του πακέτου **VectorAnalysis**) ως εξής:

In[22]:= **ΔιαρμονικήΕξίσωση = Biharmonic[A[x, y]] == 0**

Out[22]= $A^{(0,4)}(x, y) + 2 A^{(2,2)}(x, y) + A^{(4,0)}(x, y) == 0$

Είναι πλέον προφανές ότι η διαφορική εξίσωση του επίπεδου ελαστικού προβλήματος συμπίπτει πλήρως με τη διαρμονική εξίσωση:

In[23]:= **ΔιαφορικήΕξίσωσηΤουΕπίπεδουΕλαστικούΠροβλήματος == ΔιαρμονικήΕξίσωση**

Out[23]= True

1.6. Απλά παραδείγματα διαρμονικών συναρτήσεων

Προφανώς κάθε συνάρτηση δεν είναι διαρμονική, δηλαδή δεν είναι κατάλληλη σαν τασική συνάρτηση του Airy στο επίπεδο ελαστικό πρόβλημα, π.χ. η συνάρτηση

In[24]:= **A1[x_, y_] := x⁴; ΔιαφορικήΕξίσωσηΤουΕπίπεδουΕλαστικούΠροβλήματος /. A → A1**

Out[24]= False

Αντίθετα το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο των δύο μεταβλητών x και y προφανώς είναι

In[25]:= **A2[x_, y_] := a x² + b x y + c y² + d x + e y + f;**

ΔιαφορικήΕξίσωσηΤουΕπίπεδουΕλαστικούΠροβλήματος /. A → A2

Out[25]= True

Αυτό συμβαίνει απλά επειδή η διαρμονική εξίσωση έχει τρεις μερικές παραγώγους τετάρτης τάξεως, που είναι προφανώς και οι τρεις τους ίσες με μηδέν στην ειδική αυτή περίπτωση. Οι τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} παίρνουν τώρα τις εξής σταθερές εκφράσεις:

In[26]:= **Εκφράσεις Των Τάσεων /. A → A2**

Out[26]= {2 c, 2 a, -b}

Πρόκειται βέβαια για μια πολύ απλή λύση της διαρμονικής εξισώσεως, πολύ καλύτερα για ένα πολύ απλό πεδίο τάσεων στο επίπεδο. Από αυτό βέβαια προκύπτει εύκολα και το αντίστοιχο πεδίο παραμορφώσεων με βάση το νόμο του Hooke (4). Αντίθετα ο προσδιορισμός των μετατοπίσεων απαιτεί ολοκληρώσεις των εκφράσεων των παραμορφώσεων. Ευτυχώς η όλη διαδικασία μας επέτρεψε να διαθέτουμε την ασφάλεια της ισχύος τόσο και των δύο εξισώσεων ισορροπίας (1) όσο και της συνθήκης του συμβιβαστού των παραμορφώσεων (2). Δηλαδή οι ολοκληρώσεις που μόλις αναφέρθηκαν οδηγούν σε μονοσήμαντες εκφράσεις των μετατοπίσεων (πέρα βέβαια από την κίνηση στερεού σώματος του ελαστικού δίσκου μας).

Και ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού στο επίπεδο

In[27]:= **A3[x_, y_] := a x³ + b x² y + c x y² + d y³ + e x² + f x y + g y² + h x + j y + k;**
Διαφορική Εξίσωση Του Επίπεδου Ελαστικού Προβλήματος /. A → A3

Out[27]= True

είναι επίσης πάντοτε διαρμονική συνάρτηση, ακόμη και με αυθαίρετους συντελεστές, και μας επιτρέπει να έχουμε γραμμικά μεταβαλλόμενες εκφράσεις των τάσεων:

In[28]:= **Εκφράσεις Των Τάσεων /. A → A3**

Out[28]= {2 g + 2 c x + 6 d y, 2 e + 6 a x + 2 b y, -f - 2 b x - 2 c y}

Είναι προφανές ότι οι όροι μέχρι και πρώτου βαθμού ($h x + j y + k$ πιο πάνω) δεν επηρεάζουν το πεδίο των τάσεων (αλλ' ούτε και των παραμορφώσεων) λόγω του νόμου του Hooke. Άρα είναι σκόπιμο να αγνοούνται, όταν χρησιμοποιείται η τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$.

Αντίθετα ένα πολυώνυμο τετάρτου (ή και μεγαλύτερου) βαθμού στο επίπεδο, π.χ.

In[29]:= **A4[x_, y_] := a x⁴ + b x³ y + c x² y² + d x y³ + e y⁴;**
Διαφορική Εξίσωση Του Επίπεδου Ελαστικού Προβλήματος /. A → A4 // Simplify

Out[29]= 8(3 a + c + 3 e) == 0

δεν είναι διαρμονική συνάρτηση, εκτός και αν ισχύουν ορισμένες συνθήκες μεταξύ των συντελεστών του. Για παράδειγμα, το παραπάνω τεταρτοβάθμιο πολυώνυμο $A_4(x, y)$ απαιτείται να επαληθεύει τη συνθήκη (29) μεταξύ των συντελεστών του, ισοδύναμα $c = -3(a + e)$, ώστε να είναι διαρμονικό, δηλαδή και κατάλληλο για τασική συνάρτηση του Airy.

Για το ακόλουθο ειδικό πεμπτοβάθμιο πολυώνυμο (με πεμπτοβάθμιους όρους μόνο)

In[30]:= **A5[x_, y_] := a x⁵ + b x⁴ y + c x³ y² + d x² y³ + e x y⁴ + f y⁵; Συνθήκη =**
Διαφορική Εξίσωση Του Επίπεδου Ελαστικού Προβλήματος /. A → A5 // FullSimplify

Out[30]= (5 a + c + e) x + (b + d + 5 f) y == 0

έχουν προκύψει προφανώς δύο συνθήκες μεταξύ των συντελεστών του

In[31]:= **Συνθήκες = {Coefficient[Συνθήκη[[1]], x] == 0, Coefficient[Συνθήκη[[1]], y] == 0}**

Out[31]= {5 a + c + e == 0, b + d + 5 f == 0}

επειδή η συνθήκη (30) οφείλει να ισχύει για κάθε τιμή του x όπως και για κάθε τιμή του y .

Πάρα πολύ εύκολα μπορούν να εξετασθούν ανάλογα και πολυώνυμα ανώτερου του πέμπτου βαθμού με τη *Mathematica* πρόθυμη να εκτελέσει άμεσα (εν πάση περιπτώσει σχεδόν άμεσα) όλες τις σχετικές παραγωγίσεις. Ίσως όμως είναι προτιμότερο να ασχοληθούμε με τη γενική έκφραση της τασικής συναρτήσεως του Airy. Αυτή παρουσιάζεται στο επόμενο εδάφιο του παρόντος εφαρμοσμένου notebook και μας απαλλάσσει από το καθήκον (έστω και τόσο απλό στο υπολογιστικό περιβάλλον της *Mathematica*) της εφαρμογής του διαρμονικού τελεστή Δ^2 , δηλαδή της εκτελέσεως τριών παραγωγίσεων τετάρτης τάξεως. Η δυνατότητα αυτή επιτρέπει την άμεση χρήση δύο αυθαίρετων συναρτήσεων στην τασική συνάρτηση του Airy, η οποία είναι βέβαια πραγματική σε προβλήματα Ελαστικότητας. (Για τη μιγαδική διαρμονική συνάρτηση θα είχαμε βέβαια τέσσερις αυθαίρετες συναρτήσεις στη γενική έκφρασή της).

1.7. Γενική έκφραση της διαρμονικής συναρτήσεως του Airy

Η γενική μορφή της τασικής συναρτήσεως του Airy $A(x, y)$, δηλαδή η γενική λύση $A_g(x, y)$ της διαρμονικής εξισώσεως (22), έχει την εξής μορφή για πραγματικές συναρτήσεις $A(x, y)$, τις μόνες ενδιαφέρουσες για τον Πολιτικό Μηχανικό [2, σ. 110, εξισώσεις (31.1) και (31.2)] (επί 2):

In[32]:= **Ag[x_, y_] = (x - i y) φ[x + i y] + (x + i y) f[x - i y] + χ[x + i y] + g[x - i y];**

όπου $\phi(z)$ και $\chi(z)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις της μιας μεταβλητής z (με συνεχείς παραγώγους τετάρτης τάξεως) και $f(z)$ και $g(z)$ οι συζυγείς μιγαδικές συναρτήσεις αντίστοιχα. Όπως προκύπτει από την παραπάνω γενική έκφραση των πραγματικών λύσεων της διαρμονικής εξισώσεως, σε κάθε εμφάνιση της φανταστικής μονάδας $i = \sqrt{-1}$ αντιστοιχεί και μια εμφάνιση του $-i$. Έτσι τελικά παίρνουμε μια πραγματική διαρμονική συνάρτηση $A(x, y)$ ανεξάρτητα από το εάν το όρισμα z στις παραπάνω συναρτήσεις παίρνει μιγαδικές τιμές στον πιο πάνω θεμελιώδη τύπο (32). Παρατηρούμε επίσης αμέσως πως η πιο πάνω έκφραση της γενικής λύσεως $A(x, y)$ της διαρμονικής εξισώσεως θα μπορούσε επίσης να είχε γραφεί με πολύ πιο συνεπτυγμένο τρόπο σαν το πραγματικό μέρος (το real part, Re) της μιγαδικής συναρτήσεως $(x - i y) \phi(x + i y) + \chi(x + i y)$. (Αυτό συμβαίνει, επειδή οι συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ είναι οι συζυγείς μιγαδικές συναρτήσεις των συναρτήσεων $\phi(z)$ και $\chi(z)$ αντίστοιχα).

Πολύ εύκολα μπορεί η *Mathematica* να επαληθεύσει την πιο πάνω γενική έκφραση της τασικής συναρτήσεως του Airy $A(x, y)$, δηλαδή το γεγονός ότι η αυτή είναι διαρμονική

In[33]:= **Επαλήθευση = ΔιαρμονικήΕξίσωση /. A → Ag // Simplify**

Out[33]= True

Σαν ένα απλοϊκό παράδειγμα, εξετάζουμε την ειδική περίπτωση όπου έχουμε τις εξής ειδικές (πραγματικές και μάλλον απλές) μορφές των αυθαίρετων συναρτήσεων $\phi(z)$ και $\chi(z)$:

$$\text{In}[34]:= \{\phi1[z_]=\text{Cos}[z]\text{Sinh}[z], \chi1[z_]= (a z^3 + b z^2 + c z + d) \text{Sin}[z]\};$$

Αυτές άμεσα μας οδηγούν στην εξής (ουσιαστικά πραγματική εννοείται) έκφραση $A_p(x, y)$ της τασικής συναρτήσεως του Airy $A(x, y)$:

$$\text{In}[35]:= \text{Ap}[x_ , y_]= \text{Ag}[x, y] /. \{\phi \rightarrow \phi1, f \rightarrow \phi1, \chi \rightarrow \chi1, g \rightarrow \chi1\}$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[35]= & (a(x-iy)^3 + b(x-iy)^2 + c(x-iy) + d) \sin(x-iy) + \\ & (a(x+iy)^3 + b(x+iy)^2 + c(x+iy) + d) \sin(x+iy) + \\ & (x+iy) \cos(x-iy) \sinh(x-iy) + (x-iy) \cos(x+iy) \sinh(x+iy) \end{aligned}$$

η σε πλήρως απλοποιημένη (μέσω και της εντολής **FullSimplify**) τελική πραγματική μορφή

$$\text{In}[36]:= \text{Ap}[x_ , y_]= \text{Ap}[x, y] // \text{ComplexExpand} // \text{FullSimplify}$$

$$\begin{aligned} \text{Out}[36]= & 2(\cosh(y)((-b+3ax)y^2+d+x(c+x(b+ax)))\sin(x) + \\ & y\cos(x)\cosh(x)\sin(y) + x\cos(x)\cos(y)\sinh(x)) + \\ & (\sin(x)(x\cosh(x)\sin(y) - y\cos(y)\sinh(x)) - y(3ax^2+2bx-ay^2+c)\cos(x))\sinh(y) \end{aligned}$$

(Η εντολή **ComplexExpand** δηλώνει ότι όλες οι παράμετροι και οι μεταβλητές μας είναι πραγματικές και εξαλείφει επομένως τη μιγαδική μονάδα i .) Προφανώς, με βάση τα παραπάνω πρόκειται για κατάλληλη τασική συνάρτηση του Airy, δηλαδή για διαρμονική συνάρτηση. Αυτό μπορεί άμεσα να επαληθευθεί

$$\text{In}[37]:= \text{ΕπαλήθευσηΔιαρμονικότητας} = \text{Biharmonic}[\text{Ap}[x, y]] == 0 // \text{Simplify}$$

$$\text{Out}[37]= \text{True}$$

Θα άξιζε άραγε τον κόπο για έναν Πολιτικό Μηχανικό να εκτελέσει αυτές τις μάλλον απλές (πολύ εύκολα μπορούν να παρουσιασθούν και πάρα πολύ πολύπλοκες) τέταρτες παραγωγίσεις (ή/και τις αντίστοιχες παραγωγίσεις για τις τάσεις στο επόμενο εδάφιο) με το χέρι αντί να δώσει βαρύτητα σε κάτι πιο αξιόλογο, όπως είναι οι βασικές έννοιες στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά, στην Ελαστικότητα και στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού γενικότερα; Ο συγγραφέας του παρόντος notebook αμφιβάλλει . . . (Ανάλογα βέβαια για τη χρήση του υπολογιστή ισχύουν, και κατά μείζονα λόγο μάλιστα, στη μελέτη πολύ πιο πολύπλοκων προβλημάτων του Πολιτικού Μηχανικού, όπως στη μελέτη μιας ολόκληρης κατασκευής.)

Τέλος θα ήταν μάλλον σοβαρή παράλειψη να μη σημειώναμε επίσης ότι η *Mathematica* μπορεί εύκολα να βρεί τη γενική (μιγαδική) λύση $u(x, y)$ της εξισώσεως του Laplace στις δύο διαστάσεις (x, y) με τη χρήση της εντολής **DSolve**

$$\text{In}[38]:= \text{ΓενικήΛύσηΤηςΕξισώσεωςΤουLaplace} = \text{DSolve}[\text{Laplacian}[u[x, y]] == 0, u[x, y], \{x, y\}]$$

$$\text{Out}[38]= \{\{u(x, y) \rightarrow c_1[i x + y] + c_2[y - i x]\}\}$$

Παρατηρούμε πως η λύση αυτή εξαρτάται από δύο αυθαίρετες συναρτήσεις $c_{1,2}(z)$. Εάν μάλιστα επιζητούμε πραγματική λύση, όπως συνήθως συμβαίνει, τότε εξαρτάται από μία μόνο αυθαίρετη συνάρτηση $c_1(z)$. Η δεύτερη πιο πάνω συνάρτηση, η $c_2(z)$, είναι ανάλογη της συζυγούς μιγαδικής συναρτήσεως της πρώτης συναρτήσεως, της $c_1(z)$. Δυστυχώς όμως η *Mathematica* δεν έχει προγραμματισθεί ώστε να λύνει ανάλογα και τη διαρμονική εξίσωση

In[39]:= **ΓενικήΛύσηΤηςΔιαρμονικήςΕξίσωσεως =**
DSolve[Biharmonic[u[x, y]] == 0, u[x, y], {x, y}]

Out[39]= DSolve[$u^{(0,4)}(x, y) + 2 u^{(2,2)}(x, y) + u^{(4,0)}(x, y) == 0, u(x, y), \{x, y\}$]

τουλάχιστον μέχρι την έκδοση 4.1 της *Mathematica*, που χρησιμοποιήθηκε εδώ. Αυτό δεν είναι καθόλου δύσκολο για το διαρμονικό τελεστή Δ^2 , που αποτελεί απλά διπλή εφαρμογή του αρμονικού τελεστή, του γνωστού τελεστή του Laplace Δ . Και μάλιστα, όπως ήδη διαπιστώθηκε, αφού και η διαρμονική εξίσωση διαθέτει κλειστή λύση στις δύο διαστάσεις. Επομένως ο σχετικός προγραμματισμός της *Mathematica* μπορεί πάρα πολύ εύκολα να πραγματοποιηθεί.

1.8. Γενικές εκφράσεις των τάσεων και των παραμορφώσεων

Τώρα μπορούν εύκολα να υπολογισθούν (μέσω των κατάλληλων και δευτέρων μερικών παραγωγίσεων που ήδη αναφέρθηκαν) και οι γενικές εκφράσεις των τάσεων σ_x, σ_y και τ_{xy} (18)

In[40]:= **Τάσεις = ΕκφράσειςΤωνΤάσεων /. A → Ag**

Out[40]= $\{2 f'(x - iy) + 2 \phi'(x + iy) - (x + iy) f''(x - iy) - g''(x - iy) - (x - iy) \phi''(x + iy) - \chi''(x + iy), 2 f'(x - iy) + 2 \phi'(x + iy) + (x + iy) f''(x - iy) + g''(x - iy) + (x - iy) \phi''(x + iy) + \chi''(x + iy), i(x + iy) f''(x - iy) + i g''(x - iy) - i(x - iy) \phi''(x + iy) - i \chi''(x + iy)\}$

αντίστοιχα, που και αυτές με τη σειρά τους εκφράζονται συναρτήσει των δύο νέων και ουσιαστικά αυθαίρετων (πλην της αναγκαιότητας υπάρξεως συνεχών τέταρτων παραγώγων) βοηθητικών συναρτήσεων $\phi(z)$ και $\chi(z)$ (και των συζυγών τους μιγαδικών συναρτήσεων $f(z)$ και $g(z)$ αντίστοιχα). Δηλαδή τελικά ο Πολιτικός Μηχανικός δε χρειάζεται να λύσει καμία απόλυτως διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, για να προσδιορίσει τις τάσεις σ_x, σ_y και τ_{xy} και τις παραμορφώσεις ϵ_x, ϵ_y και γ_{xy} :

In[41]:= **Παραμορφώσεις =**
ΕκφράσειςΤωνΠαραμορφώσεων = ΝόμοςΤουHooke /. A → Ag // FullSimplify

Out[41]= $\left\{ -\frac{1}{E} (2(v-1)f'(x-iy) + 2(v-1)\phi'(x+iy) + (v+1)((x+iy)f''(x-iy) + g''(x-iy) + (x-iy)\phi''(x+iy) + \chi''(x+iy))), \frac{1}{E} (-2(v-1)f'(x-iy) - 2(v-1)\phi'(x+iy) + (v+1)((x+iy)f''(x-iy) + g''(x-iy) + (x-iy)\phi''(x+iy) + \chi''(x+iy))), \frac{2i(v+1)((x+iy)f''(x-iy) + g''(x-iy) - (x-iy)\phi''(x+iy) - \chi''(x+iy))}{E} \right\}$

αντίστοιχα (εννοείται, αν τις χρειάζεται και τις παραμορφώσεις) στο στατικό πρόβλημα της επίπεδης ισότροπης γραμμικής Ελαστικότητας (του ισότροπου ελαστικού δίσκου), που εξετάζεται στο παρόν notebook. Αυτό συμβαίνει γιατί διαθέτει τελικές εκφράσεις, συγκεκριμένα τις (40) για τις τάσεις και τις ανάλογες, (41) για τις παραμορφώσεις μέσω του νόμου του Hooke (4). Και αυτές του εξασφαλίζουν την ισχύ και των δύο εξισώσεων ισορροπίας (1) και της συνθήκης συμβιβαστού των παραμορφώσεων (2) με οποιοδήποτε λίγο-πολύ ισοδύναμο τρόπο γραφής της τελευταίας, δηλαδή έστω και σαν συνθήκης συμβιβαστού των τάσεων (9).

Τελειώνοντας το παρόν εδάφιο, δίνουμε τις εκφράσεις των τάσεων σ_x , σ_y και τ_{xy} στην ειδική περίπτωση των βοηθητικών συναρτήσεων (34), που εξετάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Εημειώνουμε ότι έχουμε ήδη επαληθεύσει (αν και δεν ήταν αναγκαίο) τη διαρμονικότητα της σχετικής τασικής συναρτήσεως του Airy, $A_p(x, y)$, (37). Οι τάσεις λοιπόν σ_x , σ_y και τ_{xy} δίνονται από τους εξής κάπως πολύπλοκους τύπους:

In[42]:= **Τάσεις_p = Τάσεις /. {ϕ → ϕ1, f → ϕ1, χ → χ1, g → χ1} // ComplexExpand // Simplify**

Out[42]=
$$\{-2 (\cosh(y) (-a \sin(x) x^3 + 6 a \cos(x) x^2 - b \sin(x) x^2 + 4 b \cos(x) x + 3 a y^2 \sin(x) x + 6 a \sin(x) x - c \sin(x) x - 6 a y^2 \cos(x) + 2 c \cos(x) + b y^2 \sin(x) + 2 b \sin(x) - d \sin(x) - 2 \cos(y) \cosh(x) (\cos(x) + x \sin(x)) + 2 \sin(x) (\cos(y) - y \sin(y)) \sinh(x)) + (y ((c + 2 b x + a (3 x^2 - y^2 - 6)) \cos(x) + 4 (b + 3 a x) \sin(x)) - 2 \cos(x) \cosh(x) (y \cos(y) + \sin(y)) + 2 (x \cos(x) - \sin(x)) \sin(y) \sinh(x) \sinh(y)), 2 (\cosh(y) (-a \sin(x) x^3 + 6 a \cos(x) x^2 - b \sin(x) x^2 + 4 b \cos(x) x + 3 a y^2 \sin(x) x + 6 a \sin(x) x - c \sin(x) x - 6 a y^2 \cos(x) + 2 c \cos(x) + b y^2 \sin(x) + 2 b \sin(x) - d \sin(x) + 2 \cos(y) \cosh(x) (\cos(x) - x \sin(x)) - 2 \sin(x) (\cos(y) + y \sin(y)) \sinh(x)) + (y ((c + 2 b x + a (3 x^2 - y^2 - 6)) \cos(x) + 4 (b + 3 a x) \sin(x)) - 2 \cos(x) \cosh(x) (y \cos(y) - \sin(y)) + 2 (x \cos(x) + \sin(x)) \sin(y) \sinh(x) \sinh(y)), 2 (\cosh(y) (2 y \cos(y) \cosh(x) \sin(x) - 2 x \sin(y) \sinh(x) \sin(x) + y (4 (b + 3 a x) \cos(x) - (c + 2 b x + a (3 x^2 - y^2 - 6)) \sin(x))) - (a \cos(x) x^3 + b \cos(x) x^2 + 6 a \sin(x) x^2 - 3 a y^2 \cos(x) x - 6 a \cos(x) x + c \cos(x) x + 2 \cos(x) \cos(y) \cosh(x) x + 4 b \sin(x) x - b y^2 \cos(x) - 2 b \cos(x) + d \cos(x) - 6 a y^2 \sin(x) + 2 c \sin(x) + 2 y \cos(x) \sin(y) \sinh(x) \sinh(y))\}$$

αντίστοιχα. Ανάλογα μπορούμε να προσδιορίσουμε και τις παραμορφώσεις με τη χρήση του νόμου του Hooke ή και των σχετικών τύπων (41)).

1.9. Η τασική συνάρτηση του Airy σε πολικές συντεταγμένες

Η τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$ ισχύει επίσης και σε πολικές συντεταγμένες [1, Κεφάλαιο 4, επίσης 5, Εδάφιο 4.8]. Στο παρόν εφαρμοσμένο notebook δε θα αναφερθούμε καθόλου σε πολικές συντεταγμένες, που παρουσιάζουν βέβαια αναλογία με τις Καρτεσιανές. Στις πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται οι τάσεις σ_r , σ_θ και $\tau_{r\theta}$. Τώρα όμως η διαρμονική εξίσωση, που επαληθεύεται και πάλι από την τασική συνάρτηση του Airy $A_{\text{polar}}(r, \theta)$ (σε πολικές συντεταγμένες, polar coordinates, τώρα), παίρνει την ακόλουθη μορφή:

In[43]:= Διαφορική Εξίσωση Του Επίπεδου Ελαστικού Προβλήματος Σε Πολικές Συντεταγμένες =
 Διαρμονική Εξίσωση Σε Πολικές Συντεταγμένες =
 Biharmonic[A_{polar}[r, θ], Cylindrical[r, θ, z]] == 0 // Simplify

$$\text{Out[43]} = \frac{1}{r^4} (4 A_{\text{polar}}^{(0,2)}(r, \theta) + A_{\text{polar}}^{(0,4)}(r, \theta) + r (A_{\text{polar}}^{(1,0)}(r, \theta) - 2 A_{\text{polar}}^{(1,2)}(r, \theta) + r (A_{\text{polar}}^{(4,0)}(r, \theta) r^2 + 2 A_{\text{polar}}^{(3,0)}(r, \theta) r - A_{\text{polar}}^{(2,0)}(r, \theta) + 2 A_{\text{polar}}^{(2,2)}(r, \theta))) == 0$$

ομολογουμένως αρκετά πολυπλοκότερη από την (21) (ή (22)) σε Καρτεσιανές συντεταγμένες.

1.10. Συμπεράσματα και σχόλια

Είναι απόλυτα σαφές από τα παραπάνω ότι το πρόβλημα του ελαστικού δίσκου (δηλαδή το πρόβλημα της Επίπεδης Ελαστικότητας) υπό συνθήκες επίπεδης έντασης (ή παραμόρφωσης) στη στατική μορφή του και για ισότροπο ελαστικό μέσον μπορεί αρκετά εύκολα να αναχθεί σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους: στη διαρμονική εξίσωση. Αυτό ισχύει βέβαια, μόνο εφόσον χρησιμοποιηθεί η τασική συνάρτηση του Airy. Από αυτή με απλές δευτερες μερικές παραγωγίσεις προκύπτουν οι τάσεις και, εάν απαιτούνται, με βάση το νόμο του Hooke) και οι παραμορφώσεις. Τα αποτελέσματα αυτά ισχύουν αναλλοίωτα (εκτός από την αλλαγή στο λόγο του Poisson ν) και στην περίπτωση επίπεδης παραμόρφωσης, δηλαδή σε ένα πάρα πολύ παχύ δοκίμιο. Είναι επίσης γενικεύσιμα και σε ορισμένες περιπτώσεις υπέρξεως δυνάμεων μάζας (όπως το βάρος του δίσκου), στην περίπτωση των πολικών συντεταγμένων και στην περίπτωση του ανισότροπου ελαστικού μέσου (όμως με μερικές ουσιαστικές αλλαγές στην περίπτωση αυτή).

Είναι επίσης ιδιαίτερα ενδιαφέρον ότι στη γενική πραγματική λύση της διαρμονικής εξίσωσης υπεισέρχονται δύο αυθαίρετες συναρτήσεις (που υποτίθενται όμως ότι διαθέτουν παραγώγους τετάρτης τάξεως) και οι συζυγείς τους μιγαδικές συναρτήσεις. (Παρενθετικά σημειώνεται πως αντίθετα στη γενική μιγαδική λύση της διαρμονικής εξίσωσης υπεισέρχονται τέσσερις αυθαίρετες συναρτήσεις.) Το γεγονός αυτό επιτρέπει στον Πολιτικό Μηχανικό να έχει διαθέσιμη μια διπλή απειρία πραγματικών λύσεων της διαρμονικής εξίσωσης, με άλλα λόγια εκφράσεων των τάσεων και των παραμορφώσεων. Επομένως δεν απαιτείται να λύσει καμία απολύτως διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους.

Βέβαια πρέπει τελικά να σημειωθεί ότι η τασική συνάρτηση του Airy επέτρεψε στον Πολιτικό Μηχανικό ουσιαστικά να απαλλαγεί από το σύστημα διαφορικών εξισώσεων που είχε να αντιμετωπίσει στο εξεταζόμενο στατικό πρόβλημα του ισότροπου ελαστικού δίσκου. Εντούτοις δεν τον ωφέλησε στις συνοριακές συνθήκες (δεδομένη φόρτιση ή/και μετατοπίσεις στο σύνορο του δίσκου), οι οποίες πρέπει οπωσδήποτε να ληφθούν επίσης υπόψη. Το σημείο αυτό δεν είναι εύκολο και δεν εξετάστηκε στον παρόν εφαρμοσμένο notebook. Αξίζει όμως να παρατηρηθεί ότι το σύνορο του δίσκου είναι στη μια μόνο διάσταση και η ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών μπορεί να επιτευχθεί τοπικά στο σύνορο με τον κατάλληλο καθορισμό των δύο αυθαιρέτων συναρτήσεων $\phi(z)$ και $\chi(z)$ με βάση τις συνθήκες αυτές. Η σχετική μέθοδος μπορεί να οδηγήσει σε συνοριακές ολοκληρωτικές εξισώσεις (εδώ στη μία διάσταση), που μπορούν να λυθούν π.χ. με τη μέθοδο των συνοριακών στοιχείων (boundary elements).

Όμως η σχετική διαδικασία ξεφεύγει από το στόχο του παρόντος εφαρμοσμένου notebook. Ο στόχος αυτός ήταν απλά ναδειχθεί η δυνατότητα αναγωγής ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Αυτό κατορθώθηκε εδώ μέσω της χρήσεως της τασικής συναρτήσεως (ή τασεοσυναρτήσεως) του Airy $A(x, y)$ φυσικά και με την άμεση πρόσθετη δυνατότητα υπολογισμού των τάσεων με τη βοήθεια της συναρτήσεως αυτής. (Αλλιώς προφανώς δε θα μπορούσε να έχει αποκληθεί τασική συνάρτηση!)

Μια τελική παρατήρηση αφορά στο γεγονός ότι ειδικά στις Καρτεσιανές συντεταγμένες (όχι στις πολικές συντεταγμένες) όπως η τασική συνάρτηση του Airy είναι διαρμονική, έτσι και οι τάσεις είναι διαρμονικές λόγω των εκφράσεών τους (18) σαν δευτέρων παραγώγων της διαρμονικής τασικής συναρτήσεως του Airy $A(x, y)$. Το ίδιο ισχύει βέβαια και για τις παραμορφώσεις λόγω της ισχύος του νόμου του Hooke (4).

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΟ NOTEBOOK EN-EMIII-PLATES

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΠΛΑΚΕΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΧΗ: Πλάκες

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους, Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους, Αρμονικός Τελεστής (Τελεστής του Laplace), Διαρμονικός Τελεστής, Εξίσωση του Laplace, Συνοριακές Συνθήκες, Προβλήματα Συνοριακών Τιμών

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΛΕΞΕΙΣ-ΚΛΕΙΔΙΑ: Συνήθειες Πλάκες, Γραμμική Ελαστικότητα, Ελαστικές Σταθερές, Δυσκαμψία, Μετατοπίσεις, Παραμορφώσεις, Τάσεις, Νόμος του Hooke, Ροπές Κάμψεως, Ροπές Συστροφής, Τέμνουσες (Διατμητικές) Δυνάμεις, Εξισώσεις Ισορροπίας, Βέλος Κάμψεως (Βύθιση), Διαφορική Εξίσωση Πλάκας, Τριγωνική Πλάκα

ΣΧΕΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ (ΔΕΙΓΜΑ):

[1] Timoshenko, S. P. and Woinowsky-Krieger, S., *Theory of Plates and Shells* (Θεωρία Πλακών και Κελυφών), 2η Έκδοση. McGraw-Hill, New York, Tokyo, 1959, Κεφάλαιο 4.

[2] Νιτσιώτα, Γ. Μ., *Ελαστοστατική: Γραμμική Θεωρία*, Δεύτερος Τόμος: *Επιφανειακοί Φορείς: Μέθοδοι Επίλυσεως*, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 1995, Κεφάλαιο 10.

[3] Βαρκαράκη, Κ. Ι., *Στατική των Πλακών*, Τόμος I: *Θεωρία και Μέθοδοι Επίλυσεως*. Αθήναι, 1977, Κεφάλαιο 1.

[4] Ugural, A. C., *Stresses in Plates and Shells*, 2η Έκδοση, McGraw-Hill, New York, 1999, Κεφάλαιο 3 και Εδάφιο 6.3.

2.1. Εισαγωγή

Θεωρούμε το πρόβλημα της συνήθους πλάκας πάχους h υπό κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y)$. Το πρόβλημα αυτό είναι ένα κλασικό πρόβλημα για τον Πολιτικό Μηχανικό, ο οποίος συναντάει πάρα πολύ συχνά ελαστικές πλάκες σαν επιφανειακούς φορείς στις κατασκευές του. Για την επίλυση του προβλήματος αυτού καταρχήν δεχόμαστε συνήθειες πλάκες, δηλαδή πλάκες με μικρά βέλη κάμψεως, από ισότροπο και γραμμικά ελαστικό υλικό, ομογενείς και ισοπαχείς και, κάτι που είναι επίσης σημαντικό, λεπτές. Παραπέρα στην τεχνική θεωρία των πλακών υπό κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y)$ γίνεται σειρά απλοποιητικών παραδοχών για τη μαθηματική αντιμετώπιση του όλου προβλήματος και τελικά για την εξαγωγή της σχετικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους ως προς το βέλος κάμψεως (τη βύθιση) της πλάκας $w(x, y)$. Αυτές θεωρούνται ότι ισχύουν πλήρως και εδώ. Στο παρόν εφαρμοσμένο notebook θα αναγάγουμε τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους που ισχύουν στο πιο πάνω πρόβλημα της συνήθους πλάκας στη βασική και κλασική σχετική διαφορική εξίσωση επίσης με μερικές παραγώγους ως προς το βέλος κάμψεως $w(x, y)$ της πλάκας. Έτσι ένα αρκετά πολύπλοκο σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους απλοποιείται σημαντικά μέσω της αναγωγής του σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές

παραγώγους. Ο ενδιαφερόμενος φοιτητής και η ενδιαφερόμενη φοιτήτρια Πολιτικός Μηχανικός πρέπει ασφαλώς να ανατρέξουν στη σχετική εκτενή βιβλιογραφία, δείγμα της οποίας έχει αναφερθεί παραπάνω [1-4]. Όπως αναφέρουν οι Timoshenko και Woipowsky-Krieger [1, σ. 82], η κλασική εξίσωση (διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους) της ελαστικής πλάκας που θα βρεθεί και εδώ βρέθηκε για πρώτη φορά από το Lagrange το 1811. Βέβαια ποικίλες γενικεύσεις και βελτιώσεις της είναι επίσης διαθέσιμες, αλλ' ασφαλώς πέρα από τους στόχους του παρόντος εφαρμοσμένου notebook.

2.2. Μετατοπίσεις, παραμορφώσεις και τάσεις

Το ισότροπο ελαστικό υλικό της λεπτής πλάκας μας χαρακτηρίζεται από δύο ελαστικές σταθερές: το μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο του Young E και το λόγο του Poisson ν . (Εν προκειμένω χρησιμοποιήσαμε το Ελληνικό κεφαλαίο E , ώστε να μη γίνει σύγχυση του μέτρου ελαστικότητας με τη βάση e των φυσικών λογαρίθμων, που παριστάνεται και με το Αγγλικό γράμμα E στη *Mathematica*.) Από τις δύο αυτές ελαστικές σταθερές E και ν προκύπτουν εύκολα και άλλες ελαστικές σταθερές, όπως π.χ. το μέτρο διατμήσεως G με βάση την απλή σχέση

$$\text{In[1]:= ΜέτροΔιατμήσεως} = G = \frac{E}{2(1 + \nu)};$$

Παρατηρούμε ότι στη σχέση αυτή το μέτρο διατμήσεως ορίσθηκε (με τη χρησιμοποίηση διπλής ισότητας) τόσο με το σύμβολο G όσο με το σύμβολο **ΜέτροΔιατμήσεως**.

Σε ένα ελαστικό μέσον (όπως είναι εδώ η συνήθης πλάκα που εξετάζουμε) σε όλα τα σημεία του έχουμε τις συνιστώσες των μετατοπίσεων, των παραμορφώσεων και των τάσεων. Οι παραμορφώσεις και οι τάσεις συνδέονται με το γνωστό γραμμικό νόμο του Hooke. Στο πρόβλημα της συνήθους πλάκας οι μετατοπίσεις $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ στο επίπεδο της πλάκας αποδεικνύεται ότι μπορούν να προκύψουν πολύ εύκολα από την τρίτη, την κάθετη μετατόπιση $w = w(x, y)$, δηλαδή από το βέλος κάμψεως (ή τη βύθιση) της πλάκας, με βάση τους τύπους [1-4]

$$\text{In[2]:= Μετατοπίσεις} = \{u[x_, y_] := -z \partial_x w[x, y], v[x_, y_] := -z \partial_y w[x, y]\};$$

Αυτοί περιέχουν τις πρώτες μερικές παραγώγους του βέλους κάμψεως $w(x, y)$. Και τους δύο αυτούς τύπους (λίστα με δύο στοιχεία) τους αποκαλέσαμε (μάλλον εύλογα) **Μετατοπίσεις**. Μέσω των μετατοπίσεων $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε και τις σχετικές παραμορφώσεις με νέες απλές παραγωγίσεις με βάση τους γνωστούς τύπους ορισμού των παραμορφώσεων

$$\text{In[3]:= Παραμορφώσεις} = \{\epsilon_x = \partial_x u[x, y], \epsilon_y = \partial_y v[x, y], \gamma_{xy} = \partial_y u[x, y] + \partial_x v[x, y]\} // \text{Simplify}$$

$$\text{Out[3]=} \{-z w^{(2,0)}(x, y), -z w^{(0,2)}(x, y), -2 z w^{(1,1)}(x, y)\}$$

Βέβαια τώρα οι παραμορφώσεις αυτές (πάνω στο επίπεδο xy της πλάκας) προκύπτουν σαν δεύτερες παράγωγοι του βέλους κάμψεως $w(x, y)$.

Τώρα όσον αφορά στις τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} (επίσης στο επίπεδο xy της πλάκας) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Hooke, το βασικό νόμο στην Ελαστικότητα, το νόμο που εκφράζει γραμμικά τις παραμορφώσεις συναρτήσει των τάσεων (ή αντίστροφα) και έχει στην ειδική περίπτωση μας (με $\sigma_z = 0$) τη μορφή

$$\text{In[4]: } \mathbf{\text{ΝόμοςΤουHooke}} = \left\{ \epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \right\};$$

όπου με το σύμβολο **ΝόμοςΤουHooke** δηλώσαμε την παραπάνω λίστα των τριών βασικών εξισώσεων που μας δίνει ο νόμος του Hooke στο συγκεκριμένο πρόβλημα συνήθους πλάκας στο επίπεδο xy της πλάκας. Λύνοντας τις εξισώσεις **ΝόμοςΤουHooke** ως προς τις τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} , βρίσκουμε τις συνιστώσες αυτές των τάσεων συναρτήσει των συνιστωσών των παραμορφώσεων ϵ_x , ϵ_y και γ_{xy} . Όμως οι παραμορφώσεις αυτές έχουν ήδη εκφρασθεί μέσω δευτέρων μερικών παραγώγων του βέλους κάμψεως $w(x, y)$ της πλάκας με βάση τους τύπους (3). Επομένως λόγω της ισχύος του γραμμικού νόμου του Hooke και οι τάσεις σ_x , σ_y και τ_{xy} μπορούν να προκύψουν αμέσως συναρτήσει των ιδίων δευτέρων μερικών παραγώγων ως εξής (μετά και τη σχετική απλοποίηση των αποτελεσμάτων με την αναγκαία εδώ χρήση και της εντολής **Simplify**):

$$\text{In[5]: } \mathbf{\text{Τάσεις}} = \mathbf{\text{Solve[ΝόμοςΤουHooke, \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}][[1]] // Simplify}}$$

$$\text{Out[5]: } \left\{ \tau_{xy} \rightarrow -\frac{z E w^{(1,1)}(x, y)}{\nu + 1}, \sigma_x \rightarrow \frac{z E (\nu w^{(0,2)}(x, y) + w^{(2,0)}(x, y))}{\nu^2 - 1}, \right. \\ \left. \sigma_y \rightarrow \frac{z E (w^{(0,2)}(x, y) + \nu w^{(2,0)}(x, y))}{\nu^2 - 1} \right\}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρηθεί ότι όλες οι βασικές συνιστώσες των μετατοπίσεων, των παραμορφώσεων και των τάσεων έχουν ήδη εκφρασθεί συναρτήσει των κατάλληλων παραγώγων του βέλους κάμψεως (της βυθίσεως) $w(x, y)$ της πλάκας. Άρα το βέλος αυτό έχει ήδη καταστεί το βασικό μέγεθος προς προσδιορισμό στο συγκεκριμένο πρόβλημα συνήθους πλάκας και ο προσδιορισμός του για μια συγκεκριμένη πλάκα (γεωμετρία, υλικό, συνοριακές συνθήκες και φόρτιση) θα επιτρέψει τον προσδιορισμό και των μεγεθών που προαναφέρθηκαν (μετατοπίσεων, παραμορφώσεων και τάσεων) καθώς και των ροπών και των τεμνουσών δυνάμεων, όπως θα γίνει σαφές παρακάτω, σε ολόκληρη της πλάκα με βάση τους παραπάνω τύπους. Επ' ευκαιρία ας σημειωθεί ότι σε αντίθεση με το πρόβλημα της συνήθους πλάκας στο πρόβλημα της Επίπεδης Ελαστικότητας το βασικό μέγεθος προς προσδιορισμό, η άγνωστη συνάρτηση στη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, που είναι η τασική συνάρτηση του Airy $A(x, y)$, στερείται του πλεονεκτήματος της φυσικής ερμηνείας.

2.3. Ροπές και δυσκαψία

Με τη χρήση των συνιστωσών των τάσεων σ_x , σ_y και τ_{xy} μπορούν επίσης να προσδιορισθούν και οι ροπές M_x , M_y και M_{xy} πάνω στην πλάκα, από τις οποίες οι δύο πρώτες, M_x και M_y , είναι οι ροπές κάμψεως, ενώ η τρίτη, $M_{xy} = M_{yx}$, είναι η ροπή συστροφής [1-4]. Οι ροπές αυτές προσδιορίζονται εύκολα με απλές ολοκληρώσεις κατά μήκος του πάχους $[-h/2, h/2]$

της πλάκας και προφανώς εκφράζονται και αυτές (ακριβώς όπως και οι τάσεις) μέσω δευτέρων μερικών παραγώγων του βέλους κάμψεως $w = w(x, y)$ της πλάκας, αφού [1-4]

$$\begin{aligned} \text{In[6]:= } \mathbf{Ροπές} &= \{ \mathbf{M}_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_x /. \mathbf{Τάσεις}) z dz, \\ & \mathbf{M}_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_y /. \mathbf{Τάσεις}) z dz, \mathbf{M}_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\tau_{xy} /. \mathbf{Τάσεις}) z dz \} \\ \text{Out[6]= } & \left\{ \frac{h^3 E (\nu w^{(0,2)}(x, y) + w^{(2,0)}(x, y))}{12 (\nu^2 - 1)}, \frac{h^3 E (w^{(0,2)}(x, y) + \nu w^{(2,0)}(x, y))}{12 (\nu^2 - 1)}, -\frac{h^3 E w^{(1,1)}(x, y)}{12 (\nu + 1)} \right\} \end{aligned}$$

Για την απλούστευση των αμέσως πιο πάνω τύπων για τις ροπές μπορεί να γίνει η εξής αντικατάσταση του μέτρου ελαστικότητας E από τη δυσκαμψία D της πλάκας:

$$\text{In[7]:= } \mathbf{Αντικατάσταση} = \mathbf{h^3 E \to 12 D (1 - \nu^2)};$$

Τώρα η δυσκαμψία D προκύπτει τελικά ότι ορίζεται από τον τύπο

$$\text{In[8]:= } \mathbf{Δυσκαμψία} = \mathbf{Solve[h^3 E == 12 D (1 - \nu^2), D]}$$

$$\text{Out[8]= } \left\{ \left\{ D \rightarrow \frac{h^3 E}{12 (1 - \nu^2)} \right\} \right\}$$

Παρατηρούμε ασφαλώς ότι η δυσκαμψία D είναι ένα σύνθετο γεωμετρικό-μηχανικό μέγεθος που εξαρτάται τόσο από το πάχος h της συνήθους πλάκας όσο και από τις ελαστικές σταθερές (μέτρο ελαστικότητας E και λόγο του Poisson ν) του ισότροπου γραμμικά ελαστικού υλικού της. Περισσότερο εξαρτάται από το πάχος h (π.χ. διπλασιασμός του πάχους οδηγεί σε οκταπλασιασμό της δυσκαμψίας D) παρά από το μέτρο ελαστικότητας E (προς το οποίο είναι ανάλογη), ενώ η επιρροή του λόγου του Poisson ν στην τιμή της δυσκαμψίας D είναι εντελώς αμελητέα. Εν πάση περιπτώσει οι τύποι για τις ροπές στην πλάκα παίρνουν την εξής μορφή με την παρούσα αντικατάσταση **Αντικατάσταση**

$$\text{In[9]:= } \mathbf{Ροπές} = \mathbf{Ροπές /. Αντικατάσταση // Simplify}$$

$$\text{Out[9]= } \{-D (\nu w^{(0,2)}(x, y) + w^{(2,0)}(x, y)), -D (w^{(0,2)}(x, y) + \nu w^{(2,0)}(x, y)), D (\nu - 1) w^{(1,1)}(x, y)\}$$

2.4. Εξισώσεις ισορροπίας

Υπό τις παρούσες συνθήκες απομένει η ικανοποίηση των στερεοστατικών εξισώσεων ισορροπίας της πλάκας (σε κάθε απειροστό στοιχείο της). Αυτές έχουν την μορφή της εντολής (10) παρακάτω [1-4] και αποτελούν σύστημα τριών επιπλέον διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. Οι δύο πρώτες από αυτές τις εξισώσεις ισορροπίας ουσιαστικά εκφράζουν τις τέμνουσες (ή διατμητικές) δυνάμεις Q_x και Q_y συναρτήσεων των πρώτων μερικών παραγώγων των ροπών. Επομένως το σύστημα αυτό είναι εύκολο να αναχθεί σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, εάν ληφθεί υπόψη και το γεγονός ότι οι ροπές έχουν ήδη εκφραστεί συναρτήσεων του βέλους κάμψεως $w(x, y)$ με την πιο πάνω λίστα **Ροπές**. Σύμφωνα με αυτά η *Mathematica* μεριμνά για την τελική γραφή (συναρτήσεων του βέλους κάμψεως $w(x, y)$) τόσο των τεμνουσών δυνάμεων Q_x και Q_y όσο και της τελικής διαφορικής εξίσωσης

με μερικές παραγώγους (για την ισορροπία σε διεύθυνση κάθετη στην πλάκα, δηλαδή κατά τον άξονα z). Βέβαια στη διαφορική εξίσωση υπεισέρχεται και η κάθετη κατανομημένη φόρτιση $p(x, y)$ (σε kN/m^2 ή σε ανάλογες μονάδες) πάνω στην πλάκα. Επομένως προκύπτουν οι εξής εκφράσεις για τις εξισώσεις ισορροπίας [1-4]:

In[10]:= **ΕξισώσειςΙσορροπίας =**

$$\{\mathbf{Q}_x = \partial_x \mathbf{M}_x + \partial_y \mathbf{M}_{xy}, \mathbf{Q}_y = \partial_x \mathbf{M}_{xy} + \partial_y \mathbf{M}_y, \partial_x \mathbf{Q}_x + \partial_y \mathbf{Q}_y == -\mathbf{p}[x, y]\} /.$$

Αντικατάσταση // FullSimplify

$$\text{Out[10]= } \{-D(w^{(1,2)}(x, y) + w^{(3,0)}(x, y)), -D(w^{(0,3)}(x, y) + w^{(2,1)}(x, y)), \\ p(x, y) == D(w^{(0,4)}(x, y) + 2 w^{(2,2)}(x, y) + w^{(4,0)}(x, y))\}$$

2.5. Διαφορική εξίσωση της πλάκας

Από τις πιο πάνω εξισώσεις ισορροπίας η τρίτη είναι η τελική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους που ζητείται με άγνωστη συνάρτηση (εξαρτημένη μεταβλητή) το βέλος κάμψης (βύθιση, κάθετη μετατόπιση) $w(x, y)$ της συνήθους πλάκας και ανεξάρτητες μεταβλητές τις συντεταγμένες x και y των σημείων της πλάκας. Έχουμε λοιπόν την εξής διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (partial differential equation, pde)

In[11]:= **pde = ΔιαφορικήΕξίσωσηΠλάκας = ΕξισώσειςΙσορροπίας[3]**

$$\text{Out[11]= } p(x, y) == D(w^{(0,4)}(x, y) + 2 w^{(2,2)}(x, y) + w^{(4,0)}(x, y))$$

Αυτή είναι προφανώς μια γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους τετάρτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές και μάλιστα μη ομογενής λόγω της παρουσίας της φορτίσεως $p(x, y)$ της πλάκας που μπορεί να διαιρεθεί με τη δυσκαμψία D . Κανένα άλλο ελαστικό ή γεωμετρικό μέγεθος της πλάκας (εκτός από τη δυσκαμψία της) δεν υπεισέρχεται (ανεξαρτηता εννοείται) στη διαφορική αυτή εξίσωση. Ασφαλώς η ίδια εξίσωση γράφεται ελάχιστα απλούστερα διαιρώντας και τα δύο μέλη της με τη δυσκαμψία D και φέρνοντας την άγνωστη συνάρτηση (το βέλος κάμψης) $w(x, y)$ στο αριστερό μέλος ως εξής:

In[12]:= **pde = pde[2] / D == pde[1] / D**

$$\text{Out[12]= } w^{(0,4)}(x, y) + 2 w^{(2,2)}(x, y) + w^{(4,0)}(x, y) == \frac{p(x, y)}{D}$$

Καταλήξαμε επομένως στην κλασική διαφορική εξίσωση της συνήθους πλάκας υπό τις παραδοχές που γίνονται στην Τεχνική Θεωρία των Πλακών και οι οποίες περιγράφονται στη σχετική βιβλιογραφία (π.χ. στις πιο πάνω αναφορές [1-4]). Η διαφορική αυτή εξίσωση βρέθηκε για πρώτη φορά από το Lagrange το 1811, όπως ήδη σημειώθηκε και στην εισαγωγική ενότητα αυτού του εφαρμοσμένου notebook, και παραμένει και σήμερα η κλασική εξίσωση που χρησιμοποιείται στη μελέτη και στην πρακτική εφαρμογή των συνήθων πλακών. Πιο πολύπλοκες (ταυτόχρονα όμως και πιο ακριβείς) θεωρίες έχουν επίσης αναπτυχθεί, όπως είναι η θεωρία του Reissner. Πρέπει όμως να ομολογηθεί ότι η απλότητα της παραπάνω διαφορικής εξισώσεως **pde** την καθιστά προτιμότερη για τον Πολιτικό Μηχανικό έστω και παρά τις ελλείψεις της και τις παραδοχές που έγιναν κατά την εξαγωγή των τύπων πάνω στους οποίους βασίσθηκε. Αυτές φυσικά αμελήσαμε να τις τονίσουμε πιο πάνω. Εδώ αποσκοπούμε στην

επίδειξη της δυνατότητας αναγωγής ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και συνήθων εξισώσεων (όπως είναι ο νόμος του Hooke) σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Και μάλιστα χρησιμοποιούμε μια αρκετά αυτοματοποιημένη μέθοδο με τη βοήθεια της *Mathematica*, όπως είδαμε παραπάνω.

2.6. Αρμονικός και διαρμονικός τελεστής

Η παραπάνω εξίσωση της συνήθους πλάκας μπορεί ασφαλώς να γραφεί και με τη χρήση του αρμονικού τελεστή (ή τελεστή του Laplace) Δ και του διαρμονικού τελεστή Δ^2 που εν προκειμένω δηλώνονται σαν **H** και **BH** αντίστοιχα (με βάση τις δύο λέξεις harmonic, αρμονικός, και biharmonic, διαρμονικός). Οι ορισμοί των τελεστών αυτών στις δύο διαστάσεις x, y είναι

$$\text{In}[13]:= \mathbf{H}[\mathbf{u}__] := \partial_{\{x,2\}} \mathbf{u} + \partial_{\{y,2\}} \mathbf{u}$$

$$\text{In}[14]:= \mathbf{BH}[\mathbf{u}__] := \partial_{\{x,4\}} \mathbf{u} + 2 \partial_{\{x,2\},\{y,2\}} \mathbf{u} + \partial_{\{y,4\}} \mathbf{u}$$

Προφανώς ο διαρμονικός τελεστής **BH** δηλώνει διπλή εφαρμογή (δύο διαδοχικές εφαρμογές) του αρμονικού τελεστή **H**.

Άρα η διαφορική εξίσωση της συνήθους πλάκας (12) μπορεί, όπως αμέσως διαπιστώνεται, να γραφεί (απόλυτα ισοδύναμα) και με τη βοήθεια του διαρμονικού τελεστή **BH** ως εξής:

$$\text{In}[15]:= \mathbf{pde} = \mathbf{BH}[\mathbf{w}[x, y]] == \frac{\mathbf{p}[x, y]}{\mathbf{D}}$$

$$\text{Out}[15]= w^{(0,4)}(x, y) + 2 w^{(2,2)}(x, y) + w^{(4,0)}(x, y) == \frac{p(x, y)}{D}$$

2.7. Το πακέτο *VectorAnalysis*

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθεί ότι τόσο ο αρμονικός τελεστής (ο τελεστής του Laplace) όσο και ο διαρμονικός τελεστής (καθώς και άλλοι τελεστές που έχουν σχέση με τη Διανυσματική Ανάλυση) είναι διαθέσιμοι στο πακέτο **Calculus'VectorAnalysis'** της *Mathematica* με τις ονομασίες **Laplacian** και **Biharmonic** αντίστοιχα. Αυτό το πακέτο μπορεί να κληθεί, να φορτωθεί, μόλις το χρειασθούμε, με τη χρήση της εντολής

$$\text{In}[16]:= \text{Needs}["\text{Calculus'VectorAnalysis}"]$$

ή της αντίστοιχης λίγο συντομότερης εντολής **<<Calculus'VectorAnalysis'**. Μπορούμε να πάρουμε και κάποιες στοιχειώδεις πληροφορίες για τις συναρτήσεις **Laplacian** και **Biharmonic** με τη χρήση της εντολής **??**

$$\text{In}[17]:= \text{?? Laplacian}$$

Laplacian[f] gives the Laplacian of the scalar- or vector-valued function f in the default coordinate system. Laplacian[f, coordsys] gives the Laplacian of f in the coordinate system coordsys. More...

Attributes[Laplacian] = {Protected, ReadProtected}

In[18]:= **?? Biharmonic**

Biharmonic[f] gives the Laplacian of the Laplacian of the scalar function f in the default coordinate system. Biharmonic[f, coordsys] gives the biharmonic of f in the coordinate system coordsys. More...

Attributes[Biharmonic] = {Protected, ReadProtected}

και πολύ περισσότερες από τις Επιλογές Βοήθειας (Help Menu) της *Mathematica*.

Το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε το δηλώνουμε είτε με κάθε κλήση της εντολής **Laplacian** ή **Biharmonic** ή μία φορά μόνο μέσω της εντολής **SetCoordinates**, π.χ.

In[19]:= **SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]]**

Out[19]= Cartesian(x, y, z)

Πέρα από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) (που μπορούν να δηλωθούν και με άλλα σύμβολα) χρησιμοποιούνται και οι κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z) (και αυτές μπορούν να δηλωθούν και με άλλα σύμβολα), **ακόμα και όταν έχουμε πολικές συντεταγμένες (r, θ)** , καθώς και οι σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, ϕ) (και αυτές μπορούν να δηλωθούν και με άλλα σύμβολα). Εν πάση περιπτώσει είναι χρήσιμο να χρησιμοποιείται η εντολή **SetCoordinates** σε κάθε πρόβλημα το οποίο έχει να αντιμετωπίσει ο Πολιτικός Μηχανικός με σταθερές συντεταγμένες. Αν οι συντεταγμένες αλλάξουν, πρέπει να χρησιμοποιηθεί ξανά η ίδια εντολή.

2.8. Εφαρμογή στην απλά εδραζόμενη ισόπλευρη τριγωνική πλάκα

Θα εξετάσουμε τώρα το κλασικό πρόβλημα της ισόπλευρης τριγωνικής πλάκας ύψους a και δυσκαμψίας D υπό σταθερή κάθετη κατανεμημένη φόρτιση $p(x, y) = p_0$ σε ολόκληρη την επιφάνεια της πλάκας με την εξής έκφραση $w_t(x, y)$ του βέλους κάμψεως της w :

In[20]:= **wt[x_, y_] = $\frac{p_0}{64 D a} \left(x^3 - a(x^2 + y^2) - 3xy^2 + \frac{4}{27} a^3 \right) \left(\frac{4}{9} a^2 - x^2 - y^2 \right)$ // Factor**

Out[20]= $\frac{(a + 3x)(4a^2 - 12xa + 9x^2 - 27y^2)(4a^2 - 9x^2 - 9y^2)p_0}{15552 a D}$

Η πλάκα αυτή θεωρείται απλά εδραζόμενη στην περίμετρό της με τιμή του βέλους κάμψεως της w σταθερή, μηδενική στην περίμετρο αυτή, που αποτελείται προφανώς από τρία ευθύγραμμα τμήματα ως εξής:

In[21]:= **Περίμετρος = c = λύση1 = Solve[$x^3 - a(x^2 + y^2) - 3xy^2 + \frac{4}{27} a^3 == 0, x]$ // Simplify**

Out[21]= $\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{a}{3} \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{2a}{3} - \sqrt{3}y \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{2a}{3} + \sqrt{3}y \right\} \right\}$

Ο δεύτερος παράγοντας της πιο πάνω συναρτήσεως $w_t(x, y)$, η οποία δηλώνει περιφέρεια, αν εξισωθεί με το μηδέν,

In[22]:= **λύση2 = Solve** $\left[\frac{4}{9} a^2 - x^2 - y^2 == 0, x\right]$

Out[22]= $\left\{\left\{x \rightarrow -\sqrt{\frac{4 a^2}{9} - y^2}\right\}, \left\{x \rightarrow \sqrt{\frac{4 a^2}{9} - y^2}\right\}\right\}$

προφανώς δεν αφορά στην τμηματικά ευθύγραμμη περίμετρο της τριγωνικής πλάκας, αλλ' απλά σε κύκλο έξω από την πλάκα αυτή, όπου βέβαια μηδενίζεται η συνάρτηση $w_t(x, y)$. Όμως το γεγονός αυτό δεν έχει κανένα ουσιαστικό νόημα για την ίδια την τριγωνική πλάκα.

Θα προχωρήσουμε τώρα στις σχετικές επαληθεύσεις ως προς τη διαφορική εξίσωση της πλάκας καθώς και ως προς τις συνοριακές συνθήκες στην περίμετρό της. Για το πρόβλημα της απλά εδραζόμενης συνήθους πλάκας, όπως συμβαίνει εδώ, θα πρέπει τόσο το βέλος κάμψεως w όσο και η Λαπλασιανή του Δw να είναι ίσες με το μηδέν στο σύνορο της πλάκας. Ο μηδενισμός του βέλους κάμψεως w είναι ασφαλώς γεωμετρικής φύσεως και οφείλεται προφανώς στην απλή έδραση της πλάκας που υποθέσαμε σε όλο το σύνορό της. Επίσης ο μηδενισμός της Λαπλασιανής Δw του ίδιου βέλους κάμψεως w (μόνο για απλά εδραζόμενες πλάκες) δηλώνει την έλλειψη εξωτερικών καμπτικών ροπών στο ίδιο σύνορο κάτω από κάποιες παραδοχές, που είναι γενικά αποδεκτές σαν ορθές.

2.9. Επαληθεύσεις

Για τη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους **pde** μέσα στην τριγωνική πλάκα προκύπτει αμέσως ότι

In[23]:= **Επαλήθευση1 = pde /. {w → wt, p[x, y] → p0} // Simplify**

Out[23]= True

Δηλαδή επαληθεύεται η θεμελιώδης διαφορική εξίσωση της συνήθους πλάκας από τη συνάρτηση του βέλους κάμψεως $w_t(x, y)$ που υποθέσαμε εδώ. Εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε τη Λαπλασιανή της ίδιας συναρτήσεως μια πρώτη φορά

In[24]:= **Λαπλασιανή1 = Laplacian[wt[x, y]] // Simplify**

Out[24]= $-\frac{(a + 3 x)(4 a^2 - 12 x a + 9(x^2 - 3 y^2)) p_0}{108 a D}$

και μια δεύτερη φορά

In[25]:= **Επαλήθευση2 = Λαπλασιανή2 = Laplacian[Λαπλασιανή1] == $\frac{p_0}{D}$ // Simplify**

Out[25]= True

Εξακριβώνουμε έτσι και πάλι ότι η παραπάνω έκφραση του βέλους κάμψεως $w_t(x, y)$ πραγματικά επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση της πλάκας **pde**. Σημειώνεται και πάλι ότι διπλή εφαρμογή του αρμονικού τελεστή Δ ισοδυναμεί με απλή εφαρμογή του διαρμονικού τελεστή

$\Delta^2 \equiv \Delta \Delta$. Απλούστερα βέβαια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και απευθείας το διαρμονικό τελεστή ως εξής:

$$\text{In}[26]:= \text{Επαλήθευση3} = \text{Biharmonic}[\text{wt}[x, y]] == \frac{\rho_0}{D} // \text{Simplify}$$

Out[26]= True

(εννοείται με τη χρήση του πακέτου **Calculus'VectorAnalysis'** και του καθορισμού των συντεταγμένων σαν Καρτεσιανών που προηγήθηκε στην εντολή (19). Εντούτοις ας σημειωθεί ότι η διπλή εφαρμογή του αρμονικού τελεστή Δ μας επέτρεψε να διαπιστώσουμε (μετά την πρώτη εφαρμογή του) ότι η Λαπλασιανή του βέλους κάμψεως $w_i(x, y)$ μηδενίζεται στο σύνορο (στην περίμετρο) της τριγωνικής πλάκας μας.

Ας προχωρήσουμε τώρα και επίσημα στις επαληθεύσεις των συνοριακών συνθηκών στην περίμετρο της πλάκας. Την περίμετρο αυτή την έχουμε ήδη συμβολίσει με **Περίμετρος** ή **c** μέσω της εντολής (21)

$$\text{In}[27]:= \text{Επαλήθευση4} = \{\text{wt}[x, y] /. \text{c}[1], \text{wt}[x, y] /. \text{c}[2], \text{wt}[x, y] /. \text{c}[3]\} // \text{Simplify}$$

Out[27]= {0, 0, 0}

$$\text{In}[28]:= \text{Επαλήθευση5} =$$

$$\{\text{wt}[x, y] == 0 /. \text{c}[1], \text{wt}[x, y] == 0 /. \text{c}[2], \text{wt}[x, y] == 0 /. \text{c}[3]\} // \text{Simplify}$$

Out[28]= {True, True, True}

Προφανώς οι δύο αυτές επαληθεύσεις είναι απόλυτα ισοδύναμες. Επομένως η μία από αυτές είναι απόλυτα επαρκής. Ακολουθεί και η επαλήθευση του μηδενισμού της Λαπλασιανής στην ίδια περίμετρο:

$$\text{In}[29]:= \text{Επαλήθευση6} = \{\text{Λαπλασιανή1} == 0 /. \text{c}[1],$$

$$\text{Λαπλασιανή1} == 0 /. \text{c}[2], \text{Λαπλασιανή1} == 0 /. \text{c}[3]\} // \text{Simplify}$$

Out[29]= {True, True, True}

Σύμφωνα με αυτά τόσο η διαφορική εξίσωση της συνήθους πλάκας όσο και όλες οι συνοριακές συνθήκες (και η γεωμετρική και η στατική) στο σύνορο (στην περίμετρο) της τριγωνικής πλάκας που μελετάμε έχουν πλήρως επαληθευθεί. Με τον τρόπο αυτό έχει αποδειχθεί ότι η πιο πάνω συνάρτηση $w_i(x, y)$ είναι πραγματικά η λύση του προβλήματος της απλά εδραζόμενης τριγωνικής πλάκας υπό σταθερή κάθετη κατανεμημένη φόρτιση ρ_0 .

2.10. Συμπεράσματα και σχόλια

Αναμφίβολα το πρόβλημα της συνήθους πλάκας είναι ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον πρόβλημα για τον Πολιτικό Μηχανικό στην επιστήμη του. Αυτό συμβαίνει, επειδή οι πλάκες αποτελούν επίπεδους επιφανειακούς φορείς που απαντώνται πολύ συχνά στις κατασκευές. Γενίκευση των πλακών αποτελούν τα κελύφη [1], που είναι όμως μη επίπεδοι επιφανειακοί φορείς. Άρα οι σχετικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγωγούς είναι πολύ πιο πολύπλοκες.

Στο παρόν εφαρμοσμένο notebook περιορισθήκαμε στην Τεχνική Θεωρία των Πλακών και εξαγάγαμε τη σχετική κλασική γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους ως προς το βέλος κάμψεως (τη βύθιση) της πλάκας $w(x, y)$ ουσιαστικά έχοντας αναγάγει ένα αρκετά πολύπλοκο σύστημα διαφορικών και μη εξισώσεων σε μία μόνο διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους. Πρόκειται για ένα ιδιαίτερα κλασικό πρόβλημα, αφού η διαφορική εξίσωση που προέκυψε είναι γνωστή από το 1811 και οφείλεται στο Lagrange. Εντούτοις η γνώση και η λύση του προβλήματος αυτού είναι χρήσιμες για το δευτεροετή φοιτητή και τη δευτεροετή φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό σαν μια εισαγωγή σε ολόκληρο το θέμα των πλακών. Ελπίζεται ότι αυτός/αυτή θα έχει την ευκαιρία να διατρίψει στο θέμα των λεπτών ελαστικών πλακών (ή τουλάχιστον να το μελετήσει πολύ εκτενέστερα) στις περαπέρα σπουδές του/της (κυρίως στο Ε' Έτος Σπουδών) και στη σταδιοδρομία του/της γενικότερα.

Διαπιστώθηκε επίσης πιο πάνω πως η χρήση του προγράμματος συμβολικών υπολογισμών (computer algebra system) *Mathematica* μας επέτρεψε την αυτόματη εκτέλεση των αναγκαίων υπολογισμών (όπως παραγωγίσεων, απλών ολοκληρώσεων, επιλύσεως ενός απλού συστήματος γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων, πολλών αντικαταστάσεων, κλπ., κλπ.). Εντούτοις η χρήση αυτή με κανέναν τρόπο δεν επηρέασε το ουσιαστικό μέρος της όλης διαδικασίας, η οποία φυσικά δεν είναι δυνατόν να μεταβιβασθεί από τον Πολιτικό Μηχανικό σ' ένα πρόγραμμα υπολογισμών. Με άλλα λόγια αυτός που δεν είναι ειδικός είναι αδύνατο να βρει την πιο πάνω εξίσωση της πλάκας έστω και αν έχει προσπέλαση στη *Mathematica*. Όποιος φιλοδοξεί να εκτελέσει υπολογισμούς ανάλογους με τους πιο πάνω σε θέματα της Επιστήμης του Πολιτικού Μηχανικού ίσως δεν απαιτείται να γνωρίζει να εκτελεί τέλεια τους μαθηματικούς υπολογισμούς (συμβολικούς κυρίως). Ασφαλώς όμως πρέπει να γνωρίζει καλά τη σχετική θεωρία και τούτο είναι γνώση η οποία αποκτάται με μελέτη και αφιέρωση του αναγκαίου χρόνου. Κατά τη γνώμη του γράφοντα είναι έτσι προφανές ότι η *Mathematica* δε μπορεί να αντικαταστήσει τον Πολιτικό Μηχανικό. Μπορεί όμως θαυμάσια να το βοηθήσει να μην αποσπά την προσοχή του σε συνηθισμένους, τετριμμένους μαθηματικούς υπολογισμούς, αλλά να την αφιερώνει περισσότερο σε θέματα της ειδικότητάς του.

Αυτό το εφαρμοσμένο notebook στοιχειοθετήθηκε με τη *Mathematica* χωρίς την παρεμβολή εξωτερικού προγράμματος (ούτε και του προγράμματος $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$). Χρησιμοποιήθηκε μονάχα το πρόγραμμα Acrobat (πιο συγκεκριμένα ο Acrobat Distiller) για την τελική μετατροπή ολόκληρου του αρχείου nb (αρχείου notebook της *Mathematica*) σε μορφή PDF (Portable Document Format). Όμως αυτή η μετατροπή είναι τυπική και δεν έχει να κάνει καθόλου με τη στοιχειοθεσία. Παρατηρείται έτσι ότι η *Mathematica* είναι ήδη αρκετά επαρκής ιδίως για την υποστήριξη τεχνικών αναφορών σε μορφή notebook (όπως είναι η παρούσα αναφορά).

Τέλος δεν πρέπει να λησμονείται ότι βασικό στόχο του παρόντος εφαρμοσμένου notebook αποτελεί και η σύνδεση των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών με την καθαυτό Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού (εν προκειμένω σε θέματα συνήθων πλακών) έστω και σ' ένα στοιχειώδες επίπεδο, όπως έγινε εδώ. Υπάρχουν αρκετά βιβλία αφιερωμένα στη Θεωρία των Πλακών. (Τρία από αυτά αναφέρθηκαν στην πρώτη σελίδα [1, 2, 4].) Θα ήταν μεγάλη χαρά για το γράφοντα εάν το παρόν notebook αποτελούσε επίσης την αφετηρία για τη μελέτη κάποιου συγγράμματος ή έστω κάποιας επιστημονικής εργασίας που να αναφέρεται στις πλάκες.

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ANIMATIONS ΤΟΥ ΠΟΛΙΤΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ

Στις επόμενες σελίδες παρατίθενται δύο εφαρμοσμένα notebooks της *Mathematica* για animations, δηλαδή για τη δημιουργία κινήσεως σε σχήματα (ή κινούμενων σχημάτων). Αυτά τα notebooks για animations μας δείχνουν πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η *Mathematica* για τη δημιουργία animations. Τα τελικά αρχεία που δημιουργεί η *Mathematica* είναι αρχεία τύπου animated gif. Αυτά μπορούν εύκολα να εμφανισθούν σαν κινούμενα σχήματα στην οθόνη του υπολογιστή μέσω των *Windows*. Υπάρχει επίσης και η δυνατότητα να αναρτηθούν στο διαδίκτυο (internet) για ανάλογη εμφάνιση σε οποιοδήποτε υπολογιστή συνδεδεμένο στο διαδίκτυο.

Τα δύο αυτά notebooks αφορούν σε εφαρμογές που σχετίζονται άμεσα με την Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού και ειδικότερα με τις Ταλαντώσεις. Βασίζονται στα αποτελέσματα της επίλυσεως των σχετικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγωγούς. Αυτά τα δύο notebooks είναι τα εξής:

• ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ANIMATIONS

1. *Notebook για Animations: Animations-BeamVibrations: Καμπτικές Ιδιοταλαντώσεις Αμφιέριστης Δοκού* (3 σελίδες)

Περιληψη του notebook: Στο notebook αυτό μέσω της χρήσεως animations (κινήσεως σε σχήματα, κινούμενων σχημάτων) εξετάζεται το πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων δοκού. Εδώ σαν δοκός θεωρείται μια αμφιέριστη δοκός με ήδη γνωστές τις ιδιομορφές της $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ με L το μήκος της αμφιέριστης δοκού. Είναι επίσης γνωστή η τριγωνομετρική μορφή των αντίστοιχων χρονικών συναρτήσεων $T_n(t)$ που εδώ θεωρείται απλά συνημιτονική με κυκλική συχνότητα $\omega_n = 1$. Με βάση αυτές τις δύο συναρτήσεις (χωρική και χρονική) για $L = 1$ και για $n = 3$ (τρίτη ιδιομορφή, τρίτος τρόπος ταλαντώσεως της αμφιέριστης δοκού) δημιουργείται για το βέλος κάμψεως της δοκού $v_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ μια ακολουθία σχημάτων από $t = 0$ μέχρι και $t = 2\pi - (\pi/8)$ ανά $\pi/8$. Παίρνουμε έτσι 16 σχήματα που δείχνουν ποια ακριβώς μορφή παίρνει η αμφιέριστη δοκός (εννοείται για τις τιμές των σταθερών που επιλέξαμε: εδώ $L = 1$ και $\omega_n = 1$) στην τρίτη ιδιομορφή της: με $n = 3$. Τα σχήματα αυτά παρουσιάζονται εδώ στο χαρτί. Στον υπολογιστή όμως με βάση τα σχήματα αυτά δημιουργείται άμεσα η σχετική animation (το σχετικό κινούμενο σχήμα) πάνω στην οθόνη για τις ιδιοταλαντώσεις της παρούσας αμφιέριστης δοκού. Την animation αυτή μπορούμε άμεσα να την «εξαγάγουμε» από τη *Mathematica* και να την κάνουμε απόλυτα ανεξάρτητη από αυτή σ' ένα αρχείο gif που μπορεί να είναι διαθέσιμο οπουδήποτε χωρίς να έχει ανάγκη τη διαθεσιμότητα της *Mathematica*. Από την παρούσα animation παρατηρείται επίσης το αναμενόμενο φαινόμενο της υπέρξεως δύο εσωτερικών κόμβων (δύο εντελώς ακίνητων σημείων) στην παρούσα αμφιέριστη δοκό για την τρίτη ιδιομορφή της (με $n = 3$) πέρα βέβαια από τα δύο άκρα της $x = 0$ και $x = L$. Τέλος σημειώνεται ότι η παρούσα διαδικασία δημιουργίας animation με τη *Mathematica* μπορεί επίσης να εφαρμοσθεί και για άλλες δοκούς πέρα από την αμφιέριστη δοκό. Τέτοιες δοκοί είναι η αμφίπακτη δοκός, η μονόπακτη υπερστατική δοκός, ο πρόβολος και η ελεύθερη δοκός (είναι κι αυτή αποδεκτή στη Δυναμική!). Σ' αυτές όμως οι ιδιοσυχνότητες ω_n και οι ιδιομορφές $X_n(x)$ έχουν πολυπλοκότερες εκφράσεις από τις αντίστοιχες εκφράσεις για την αμφιέριστη δοκό. Ομολογουμένως η αμφιέριστη δοκός είναι υπολογιστικά η απλούστερη δοκός ως προς τις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις.

2. Notebook για Animations: Animations-RectangularPlateVibrations: Ιδιοταλαντώσεις Ορθογωνικής Πλάκας (8 σελίδες)

Περίληψη του notebook: Στο δεύτερο αυτό notebook και πάλι μέσω της χρήσεως animations (κινήσεως σε σχήματα, κινούμενων σχημάτων) εξετάζεται το επίσης πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο των καμπτικών ιδιοταλαντώσεων πλάκας, εδώ μιας ορθογωνικής πλάκας με απλή στήριξη της (έδρασή της) στο σύνορό της. Όπως οι δοκοί είναι ο πιο βασικός γραμμικός (μονοδιάστατος) φορέας του Πολιτικού Μηχανικού, έτσι και οι πλάκες είναι ο πιο βασικός επιφανειακός (διδιάστατος) φορέας του Πολιτικού Μηχανικού. Σε τούτο το notebook θεωρείται κατ' αρχήν η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς των ιδιοταλαντώσεων μιας συνήθους πλάκας, που περιλαμβάνει και το διαρμονικό τελεστή στο αριστερό μέλος της. Με την κλασική μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών η εξίσωση αυτή ανάγεται σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις: μία χωρική και μία χρονική. Η τελευταία επιλύεται εύκολα αναλυτικά και δίνει απλή τριγωνομετρική λύση, όπως αναμενόταν άλλωστε και μπορεί έτσι κι αλλιώς να υποτεθεί από την αρχή σε ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση. Τώρα για το χωρικό μέρος της λύσεως (το προσημασμένο εύρος των ταλαντώσεων της ορθογωνικής πλάκας) υποτίθεται κατάλληλη τριγωνομετρική λύση (βέβαια στις δύο διαστάσεις) που πληροί όλες τις συνοριακές συνθήκες στο σύνορο της παρούσας ορθογωνικής πλάκας με απλή στήριξη. Για να επαληθεύει όμως η τελική τριγωνομετρική λύση την αρχική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγωγούς της πλάκας, θα πρέπει οι ιδιοσυχνότητες της πλάκας ω_n να πάρουν συγκεκριμένες τιμές, που εξαρτώνται από την τάξη (m, n) της σχετικής ιδιομορφής $W_{mn}(x, y)$ και εδώ υπολογίζονται εύκολα με βάση όλες τις σταθερές του προβλήματος. Έτσι τελικά το βέλος κάμψεως της πλάκας έχει προσδιορισθεί σαν $w_{mn}(x, y, t) = W_{mn}(x, y)T_{mn}(t)$. Θεωρούμε τώρα συγκεκριμένες τιμές των σταθερών της ορθογωνικής πλάκας (των διαστάσεών της a και b , της επιφανειακής πυκνότητάς της ρh και της δυσκαμψίας της D) και τάξη $(m, n) = (2, 3)$ της ιδιομορφής της πλάκας. Σχεδιάζονται έτσι οι μορφές που παίρνει η πλάκα, οι ελαστικές επιφάνειές της, και συγκεκριμένα 10 επιφάνειες στο διάστημα μιας περιόδου T των ιδιοταλαντώσεων της πλάκας, που εδώ θεωρήθηκε ίση με $T = 2$. Οι ελαστικές αυτές επιφάνειες παρουσιάζονται εδώ στο χαρτί. Στην οθόνη όμως του υπολογιστή μας επιτρέπουν αμέσως τη δημιουργία της σχετικής animation (του κινούμενου σχήματος). Αυτή μας δίνει μια αρκετά εντυπωσιακή και εκπαιδευτικά ενδιαφέρουσα εικόνα για το πώς ταλαντώνεται η παρούσα ορθογωνική πλάκα. Η animation αυτή μπορεί φυσικά να «εξαχθεί» εύκολα από τη *Mathematica* σε μορφή αρχείου gif και να είναι διαθέσιμη οπουδήποτε χωρίς πια να χρειάζεται καθόλου η *Mathematica* για την παρουσίαση της animation. Τέλος στο παρόν notebook υπολογίζονται και οι πρώτες 16 ιδιοσυχνότητες της πλάκας (για m και n από 1 έως 4) και οι εκφράσεις τους δίνονται αναλυτικά και αριθμητικά για τις τιμές των παραμέτρων που έχουν υποτεθεί εδώ.

Η παρουσία εδώ αυτών των δύο notebooks για animations (κίνηση σε σχήματα, κινούμενα σχήματα) ελπίζεται ότι θα επιτρέψει τη χρήση των animations μέσω της *Mathematica* από το φοιτητή/τη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό για την προετοιμασία και **των δικών του/των δικών της** animations στα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά III και στην Επιστήμη του Πολιτικού Μηχανικού γενικότερα. Οι animations προσφέρουν μια θαυμάσια δυνατότητα οπτικής κατανοήσεως ενός φαινομένου συνήθως (όχι όμως και κατ' ανάγκη) δυναμικού.

Από την άλλη πλευρά η *Mathematica* προσφέρει τη δυνατότητα εκτελέσεως των αναλυτικών και αριθμητικών υπολογισμών που απαιτούνται σε ένα πρόβλημα, αλλά και της δημιουργίας της animation για το «ζωντάνεμα» των τελικών αποτελεσμάτων. Τα παρόντα δύο notebooks για animations αποτελούν παραδείγματα της σχετικής διαδικασίας. Αυτή ξεκινάει από τους υπολογισμούς (αναλυτικούς και αριθμητικούς), προχωράει στις αναγκαίες γραφικές παραστάσεις που θα ενσωματωθούν στην animation και φθάνει τέλος στη δημιουργία του σχετικού με την animation αρχείου τύπου gif, καλύτερα animated gif. Αυτό μάλιστα το αρχείο είναι εντελώς ανεξάρτητο από τη *Mathematica* που, όπως αναφέρθηκε, δε χρειάζεται καθόλου για την εμφάνιση του αρχείου gif στην οθόνη του υπολογιστή. Η διαθεσιμότητα του λειτουργικού συστήματος, συνήθως των *Windows*, αρκεί!

■ Notebook Animations-BeamVibrations

ΚΑΜΠΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ

Εδώ αναφερόμαστε σ' ένα πολύ ενδιαφέρον παράδειγμα animation (κινήσεως σε σχήμα, κινήσεως σχήματος) με τη *Mathematica*. Αυτό αφορά στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις συνήθους αμφιέρειστης δοκού μήκους L χωρίς απόσβεση. Οι σχετικές ιδιομορφές ταλαντώσεως είναι, όπως γνωρίζουμε, ημιτονικές: $X_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ με $n = 1, 2, \dots$ (Η λεπτομερής μελέτη των ιδιομορφών αμφιέρειστης δοκού περιλαμβάνεται στην Ενότητα A9.2 και ειδικότερα στην Παράγραφο της A9.2.3 του Μέρους A των διδακτικών βιβλίων με τελική εξίσωση για τις ιδιομορφές $X_n(x)$ την εξίσωση (9.2.34).) Το πραγματικό βέλος κάμψεως της αμφιέρειστης δοκού (η χρονικά εξαρτημένη ελαστική γραμμή της δοκού) θα είναι της μορφής $v_n(x, t) = X_n(x) T_n(t)$ με τη χρονική συνάρτηση $T_n(t)$ να είναι είτε συνημιτονική είτε ημιτονική με κατάλληλη βέβαια διαφορά φάσεως. (Αυτά τα γνωρίζουμε από τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών στις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους και ειδικότερα στις Παραγράφους B6.2.5 και B6.2.6 του Μέρους B των διδακτικών βιβλίων, οι οποίες αφορούν ακριβώς στις καμπτικές ταλαντώσεις δοκού.)

Εμείς εδώ πήραμε τη χρονική μας συνάρτηση $T_n(t)$ συνημιτονική συνάρτηση, $T_n(t) = \cos t$, θεωρώντας κυκλική συχνότητα $\omega_n = 1$, υποτίθεται για κατάλληλη τιμή του λόγου $E/(\rho A)$ δυσκαμψίας προς γραμμική πυκνότητα, και με διαφορά φάσεως $\alpha = 0$. Επίσης πήραμε το μήκος της αμφιέρειστης δοκού μας $L = 1$ και επιλέξαμε την τρίτη ιδιομορφή $X_3(x)$: αυτή με $n = 3$. Δημιουργήσαμε σειρά σχημάτων με τη χρήση της επόμενης εντολής, όπου μάλιστα χρησιμοποιήσαμε πλαίσιο σε κάθε σχήμα, τίτλο του σχήματος, παχιές γραμμές και γράμματα και μεταβαλλόμενο χρώμα. Όλα μαζί τα σχήματα που δημιουργήθηκαν είναι 16: χρονικές στιγμές σε όλο το διάστημα $[0, 2\pi)$ ανά $\pi/8$. Δυστυχώς για λόγους οικονομίας χώρου δε θα τα δείξουμε εδώ στην αρχική τους μορφή (ένα σε κάθε γραμμή) για την animation. (Όμως θα τα δείξουμε παρακάτω με τη χρήση και της εντολής **GraphicsArray** ανά δύο σε κάθε γραμμή.) Ξεκινάμε με τα αρχικά σχήματα, με τα ίδια τα σχήματα που δημιουργούν την animation. Η animation αυτή δείχνει πώς ακριβώς ταλαντώνεται η παρούσα αμφιέρειστη δοκός, εδώ στην τρίτη ιδιομορφή καμπτικής ιδιοταλαντώσεώς της:

```
In[1] := BeamVibrationsImages =
Table[Plot[Sin[3 π x] Cos[t], {x, 0, 1}, PlotStyle → {Thickness[0.02], Hue[t/8]},
PlotRange → {-1, 1}, AxesLabel → {" x", ""}, Frame → True, PlotLabel →
"ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ", DefaultFont → {"Arial-Bold", 11.5},
FrameTicks → {{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0}, {-1, -0.5, 0, 0.5, 1}},
ImageSize → 340], {t, 0, 2 π - π/8, π/8}];
```

Τώρα, για να δούμε την animation, πατάμε το ποντίκι στην κατακόρυφη μπλε γραμμή δεξιά από όλα τα παραπάνω σχήματα και τη μαυρίζουμε. Έπειτα πατάμε είτε **Cell** → **Animate Selected Graphics** (από τις επιλογές, από τα menus) είτε **Ctrl Y** (από το πληκτρολόγιο). Και στις δύο περιπτώσεις αρχίζει η κίνηση ενός σχήματος, η animation, οι ταλαντώσεις της αμφιέρειστης δοκού μας. (Μπορούμε να διακόψουμε την animation ξαναπατώντας **Ctrl Y**.) Σημειώνεται ότι ο αριθμός των σχημάτων **BeamVibrationsImages** προκύπτει με την εντολή

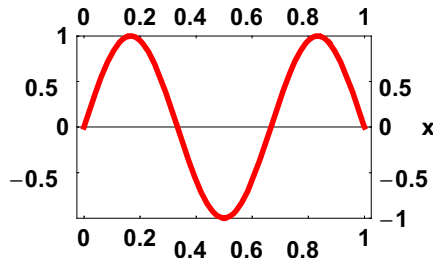
```
In[2] := NumberOfBeamVibrationsImages = Length[BeamVibrationsImages]
```

```
Out[2] = 16
```

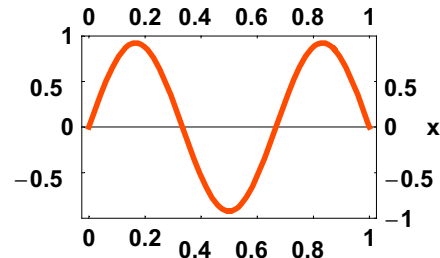
Τώρα με την παρακάτω εντολή μετράζουμε λίγο την "τσιγγουνιά" μας να μη δείξουμε και τα 16 σχήματα (σε χωριστές γραμμές) δείχνοντάς τα έξι πρώτα από αυτά με τις εντολές **Show** και **GraphicsArray** (μαζί και με την εντολή **Partition**) ανά δύο (δύο-δύο) σε κάθε γραμμή: άρα τρεις γραμμές σχημάτων συνολικά:

```
In[3]:= Show[GraphicsArray[Partition[BeamVibrationsImages[{{1, 2, 3, 4, 5, 6}}, 2]]];
```

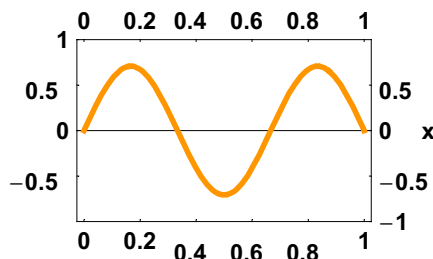
ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ



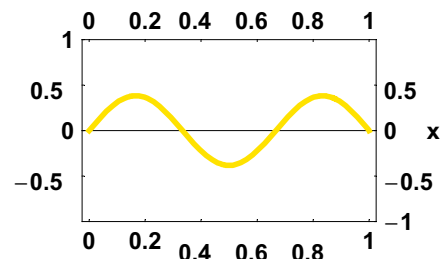
ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ



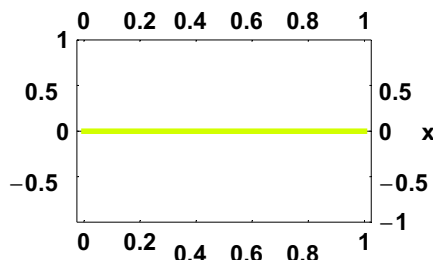
ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ



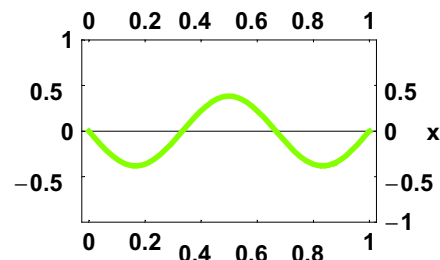
ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ



ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ



ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΑΜΦΙΕΡΕΙΣΤΗΣ ΔΟΚΟΥ



Έπειτα, προχωρώντας, με την εντολή **Export** γίνεται η αποθήκευση σε αρχείο animated **gif** (ή **GIF**), εδώ στο αρχείο **BeamVibrations.gif**, του αποτελέσματος **BeamVibrationsImages** δηλαδή όλων μαζί των προηγούμενων σχημάτων. Ένα τέτοιο αρχείο μπορεί να κληθεί με πάτημα του ποντικού πάνω του από τον υπολογιστή (π.χ. μέσω του **My Computer**). Ανάλογα μπορεί να κληθεί (με ένα πάτημα του ποντικιού) και από ένα αρχείο **html** όπου να αναφέρεται το σχετικό αρχείο **gif**. Είτε έτσι είτε αλλιώς με το αρχείο **gif** παρουσιάζεται αμέσως η σχετική animation (το σχετικό κινούμενο σχήμα) χωρίς να χρειάζεται καθόλου η **Mathematica**. Αυτή απλά έχει δημιουργήσει το αρχείο **gif**. Το αρχείο μας **BeamVibrations.gif** περιλαμβάνεται και στην ιστοσελίδα του μαθήματος και μπορεί θαυμάσια να κληθεί και από εκεί. Ή ακόμη μπορεί εύκολα να κατεβασθεί σε έναν υπολογιστή από τον ενδιαφερόμενο φοιτητή/την ενδιαφερόμενη φοιτήτρια Πολιτικό Μηχανικό και μετά να χρησιμοποιηθεί τοπικά στον υπολογιστή του/της. Εντούτοις ο παρών κώδικας της **Mathematica** που το δημιούργησε δε συμπεριλαμβάνεται στο αρχείο αυτό **gif**. (Αυτό είναι ένα αρχείο γραφικών μόνο.) Και τώρα ακολουθεί η εντολή **Export** για τη δημιουργία του αρχείου **gif** που προαναφέραμε και το αποκαλούμε εδώ **BeamVibrations.gif**. Δεν πρέπει βέβαια με κανέναν τρόπο να λησμονηθεί η επιλογή **ConversionOptions** της εντολής **Export** στο τέλος της, ακριβώς όπως γίνεται εδώ: δηλαδή χωρίς καμία αλλαγή στην επιλογή αυτή: **ConversionOptions** → **{Loop** → **True}**. Αλλιώς δεν πρόκειται να υπάρξει καμία απολύτως κίνηση, καμία animation! Να λοιπόν η εντολή **Export** όπως αυτή

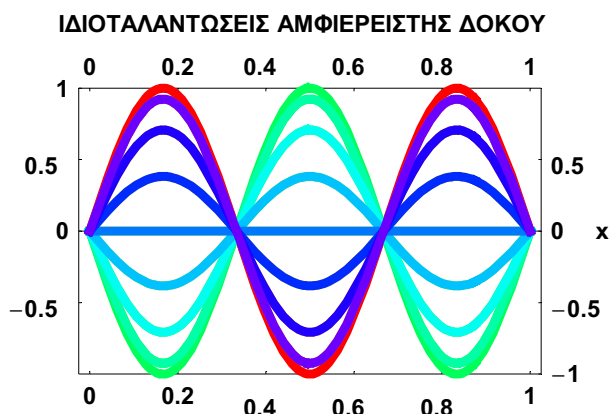
χρησιμοποιήθηκε εδώ για τη δημιουργία του gif αρχείου **BeamVibrations.gif** για την παρούσα animation, συγκεκριμένα την animation του τρίτου τρόπου ($n = 3$) καμπτικών ιδιοταλαντώσεων αμφιέρειστης δοκού:

```
In[4] := Export["D:\cemb\animations\BeamVibrations.gif",
  BeamVibrationsImages, ConversionOptions -> {Loop -> True}]
```

```
Out[4] = D:\cemb\animations\BeamVibrations.gif
```

Επ' ευκαιρία δείχνουμε εδώ, σχεδόν στο τέλος του notebook, όλα μαζί τα σχήματα σε ένα ενιαίο σχήμα. Αυτό όμως δεν αποτελεί κίνηση, δε δείχνει καμία κίνηση της ταλαντούμενης αμφιέρειστης δοκού μας. Είναι απλά η "συλλογή" όλων των σχημάτων της animation, ένα εντελώς στατικό, ένα ακίνητο σχήμα. Δε μπορεί με τίποτε να χρησιμοποιηθεί για animation! Ούτε όμως και τα σχήματα της εντολής [3] μπορούν.

```
In[5] := Show[BeamVibrationsImages];
```



Στο σημείο αυτό είναι σκόπιμο να σημειώσουμε ότι έχοντας χρησιμοποιήσει την τρίτη ιδιομορφή $X_3(x) = \sin(3\pi x/L)$ για την αμφιέρειστη δοκό, θα έχουμε $k = 3 - 1 = 2$ κόμβους στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις της δοκού. Δηλαδή θα υπάρχουν δύο σημεία της δοκού (χωρίς να περιλαμβάνονται βέβαια τα άκρα της $x = 0$ και $x = L$ που δε θα μετακινούνται καθόλου κατά τη διάρκεια των ιδιοταλαντώσεών της. Οι κόμβοι αυτοί είναι βέβαια τα σημεία που το ημίτονο στην ιδιομορφή $X_n(x)$ μηδενίζεται: για $n = 3$ και $L = 1$ τα δύο σημεία $3\pi x = k\pi$ με $k = 1, 2$ και τελικά $x = 1/3$ και $x = 2/3$. Αυτοί οι δύο κόμβοι των ιδιοταλαντώσεων φαίνονται καθαρά σε όλα σχεδόν τα προηγούμενα σχήματα που συμπεριλαμβάνουν βέβαια και το πιο πάνω σχήμα.

Τελειώνοντας εδώ το notebook αυτό για την animation σε ιδιοταλαντώσεις αμφιέρειστης δοκού, πρέπει ασφαλώς να σημειώσουμε ότι ανάλογες animations μπορούν επίσης να δημιουργηθούν και για δοκούς με εντελώς διαφορετικές συνοριακές συνθήκες από την αμφιέρειστη δοκό. Τέτοιες δοκοί είναι η αμφίπακτη δοκός, η μονόπακτη υπερστατική δοκός (με πάκτωση είτε αριστερά είτε δεξιά), ο πρόβολος (επίσης με πάκτωση είτε αριστερά είτε δεξιά) και η ελεύθερη δοκός. Ασφαλώς στις δοκούς αυτές οι κύριες διαφορές είναι οι διαφορετικές ιδιοσυχνότητες (συχνότητες ιδιοταλαντώσεων) ω_n και οι διαφορετικές ιδιομορφές $X_n(x)$. (Θα πρέπει επίσης να ομολογηθεί ότι η αμφιέρειστη δοκός είναι η απλούστερη ως προς τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιομορφές της.) Πάντως η όλη εργασία για τη δημιουργία της σχετικής animation για τις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις οποιασδήποτε συνήθους δοκού είναι απόλυτα ανάλογη με αυτήν η οποία έγινε εδώ για την αμφιέρειστη δοκό και δε θα υπεισέλθουμε σε σχετικές λεπτομέρειες.

Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης και η ενδιαφερόμενη αναγνώστρια Πολιτικός Μηχανικός μπορούν να ανατρέξουν στην Ενότητα Β6.2 του Μέρους Β των διδακτικών βιβλίων, η οποία αφορά στις καμπτικές ιδιοταλαντώσεις δοκού. Ειδικά στην Παράγραφο Β6.2.5 της ενότητας αυτής προσδιορίζονται λεπτομερώς οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιομορφές για τη μονόπακτη υπερστατική δοκό με στήριξη αριστερά και κύλιση δεξιά. Με βάση αυτές είναι δυνατή (χωρίς δυσκολία) η δημιουργία της σχετικής animation.

■ Notebook Animations-RectangularPlateVibrations ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

■ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΤΗΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ

Θεωρούμε τις ιδιοταλαντώσεις μιας συνήθους ορθογωνικής πλάκας (rectangular plate) επιφανειακής πυκνότητας ρh (πυκνότητα ρ του ελαστικού υλικού της επί το πάχος της h) και δυσκαμψίας D . Την ορθογωνική μας πλάκα τη θεωρούμε διαστάσεων a επί b με $0 \leq x \leq a$ και $0 \leq y \leq b$. (Δηλαδή έχουμε ένα απλό δυναμικό πρόβλημα, όχι στατικό, στις Πλάκες.) Στο πρόβλημα αυτό άγνωστη συνάρτηση είναι το βέλος κάμψεως $w(x, y, t)$ της πλάκας (ή βύθιση της πλάκας). Αυτό δημιουργεί την ελαστική επιφάνειά της, που εδώ όμως μεταβάλλεται χρονικά. Εύκολα ορίζουμε τη σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (partial differential equation) **PlatePDE**: την εξίσωση της πλάκας. Προς το σκοπό αυτό δίνουμε πρώτα τις εντολές για τη μη εμφάνιση πιθανών ορθογραφικών λαθών και στη συνέχεια καλούμε το πακέτο **Calculus`VectorAnalysis`** της *Mathematica* για τη Διανυσματική Ανάλυση. Αυτό πρόκειται να μας φανεί χρήσιμο στον καθορισμό της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους της πλάκας **PlatePDE**.

```
In[1] := Off[General::spell]; Off[General::spell1];
```

```
In[2] := Needs["Calculus`VectorAnalysis`"]
```

Στη συνέχεια ορίζουμε βέβαια Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) , αφού έχουμε μια ορθογωνική πλάκα:

```
In[3] := SetCoordinates[Cartesian[x, y, z]];
```

Τώρα γράφουμε εύκολα τη σχετική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους **PlatePDE** με βάση την εξίσωση (2.2.18), Παράγραφος B2.2.4, του Μέρους Β των διδακτικών βιβλίων. (Χρησιμοποιούμε μάλιστα για διευκόλυνσή μας το ενιαίο σύμβολο ρh για την επιφανειακή πυκνότητα της πλάκας αντί για το αντίστοιχο γινόμενο ρ επί h , παρόλο που αυτό είναι ασφαλώς εξίσου αποδεκτό και μάλιστα και πιο σωστό από μαθηματικής απόψεως.)

```
In[4] := PlatePDE = Biharmonic[w[x, y, t]] == -(\rho h / D) D[w[x, y, t], {t, 2}]
```

```
Out[4] = w^{(0,4,0)}(x, y, t) + 2 w^{(2,2,0)}(x, y, t) + w^{(4,0,0)}(x, y, t) == -\frac{\rho h w^{(0,0,2)}(x, y, t)}{D}
```

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής (αυτό που έχει το διδιάστατο διαρμονικό τελεστή) προέρχεται από το στατικό πρόβλημα της πλάκας. Η συμβολή του χρόνου t στο παρόν δυναμικό πρόβλημα πλάκας είναι μέσω της αδρανειακής δύναμης ή φορτίσεως (με μείον παρακαλώ!), η οποία έχει τεθεί στο δεξιό μέλος της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους. Στο παρόν πρόβλημα ιδιοταλαντώσεων (όπου δεν υπάρχει κατανεμημένη κάθετη φόρτιση στην πλάκα) το παραπάνω βέλος κάμψεως $w(x, y, t)$ της πλάκας θα έχει τη μορφή γινομένου μιας συναρτήσεως $W(x, y)$ μόνο της θέσεως (x, y) πάνω στην πλάκα επί μία συνάρτηση $T(t)$ μονάχα του χρόνου t . Η τελευταία μάλιστα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών προκύπτει ότι είναι μια απλή τριγωνομετρική συνάρτηση (συνημιτονική ή ημιτονική με γωνία φάσεως α). Συγκεκριμένα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών δεχόμαστε για το βέλος κάμψεως της πλάκας $w(x, y, t)$ ότι είναι συνάρτηση της μορφής

```
In[5] := w1[x_, y_, t_] = W[x, y] T[t];
```


Η συνάρτηση αυτή θα πρέπει βέβαια να επαληθεύει την πιο πάνω διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους **PlatePDE** της ορθογωνικής πλάκας. Είναι λοιπόν αναγκαίο να ισχύει

```
In[6] := PlatePDE1 = PlatePDE /. w -> w1
```

$$\text{Out}[6] = T(t) W^{(0,4)}(x, y) + 2 T(t) W^{(2,2)}(x, y) + T(t) W^{(4,0)}(x, y) == -\frac{\rho h W(x, y) T''(t)}{D}$$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $w_1(x, y, t)$, ώστε να χωρισθούν καθαρά οι μεταβλητές. (Προσοχή όμως: να διαιρεθούν και τα δύο μέλη χωριστά!)

```
In[7] := SeparatedVariablesPlatePDE =
  PlatePDE1[[1]] / w1[x, y, t] == PlatePDE1[[2]] / w1[x, y, t] == λ // Simplify
```

$$\text{Out}[7] = \frac{W^{(0,4)}(x, y) + 2 W^{(2,2)}(x, y) + W^{(4,0)}(x, y)}{W(x, y)} == -\frac{\rho h T''(t)}{D T(t)} == \lambda$$

Τη σταθερά διαχωρισμού την αποκαλέσαμε λ . Άρα η χρονική συνήθης διαφορική εξίσωση έχει τη μορφή

```
In[8] := TimePlateODE = SeparatedVariablesPlatePDE[[2]] == SeparatedVariablesPlatePDE[[3]]
```

$$\text{Out}[8] = -\frac{\rho h T''(t)}{D T(t)} == \lambda$$

Υποθέτοντας τώρα ότι $\lambda > 0$, αυτή η εξίσωση έχει σαν λύση της την τριγωνομετρική συνάρτηση

```
In[9] := SolutionT = DSolve[TimePlateODE, T[t], t]
```

$$\text{Out}[9] = \left\{ \left\{ T(t) \rightarrow c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{D} t \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\rho h}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{D} t \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\rho h}}\right) \right\} \right\}$$

Σημειώνουμε ότι αφού η επιφανειακή πυκνότητα ρh της πλάκας όπως και η δυσκαμψία της D είναι θετικές ποσότητες, θα πρέπει οπωσδήποτε και η σταθερά διαχωρισμού λ να είναι και αυτή θετική. Έτσι θα πάρουμε τριγωνομετρική λύση. Αν αντίθετα η σταθερά διαχωρισμού λ ήταν αρνητική, τότε η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{\lambda}$ θα ήταν φανταστική (δηλαδή $i\mu$) και έτσι θα προέκυπτε υπερβολική λύση. Τότε όχι μόνο δε θα είχαμε ιδιοταλαντώσεις στην πλάκα, αλλά θα είχαμε συνεχή αύξηση του βέλους κάμψης της μέχρι το άπειρο. Έτσι κι αλλιώς χωρίς φόρτιση της πλάκας (όμως εδώ σε ιδιοταλαντώσεις) αυτό παραβαίνει την αρχή διατηρήσεως της ενεργείας. Πρέπει λοιπόν αμέσως να απορριφθεί. Τώρα η λύση της χρονικής συνήθους διαφορικής εξισώσεως **TimePlateODE** θα είναι προφανώς η εξής:

```
In[10] := Ts[t_] = SolutionT[[1, 1, 2]]
```

$$\text{Out}[10] = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{D} t \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\rho h}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{D} t \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\rho h}}\right)$$

και φυσικά επαληθεύει τη χρονική συνήθη διαφορική εξίσωση **TimePlateODE**. Εμείς εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο ω για κάθε συχνότητα (για τον Πολιτικό Μηχανικό εννοείται κυκλική συχνότητα) των ιδιοταλαντώσεων της πλάκας: ιδιοσυχνότητα. Με βάση την πιο πάνω συνάρτηση $T_s(t)$ ορίζουμε

```
In[11] := ω = Sqrt[D λ / ρh]; Clear[ω];
```

Τώρα η πιο πάνω χρονική συνάρτηση $T_s(t)$ παίρνει προφανώς την απλούστερη μορφή της

```
In[12] := Ts1[t_] = Ts[t] /. D -> ω^2 ρh / λ // PowerExpand
```

$$\text{Out}[12] = c_1 \cos(t \omega) + c_2 \sin(t \omega)$$

Ασφαλώς δεν έχει νόημα εδώ στις ιδιοταλαντώσεις να ασχολούμαστε ταυτόχρονα και με τις δύο αυτές τριγωνομετρικές συναρτήσεις (συνημίτονο και ημίτονο) ούτε με τη διαφορά φάσεως, αν ξαναγράψουμε την πιο πάνω συνάρτηση $T_{s1}(t)$ με τη χρήση μόνο της συνημιτονικής ή μόνο της ημιτονικής συναρτήσεως. Εδώ στις ιδιοταλαντώσεις απλά παίρνουμε μόνο τη μία από τις δύο αυτές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, ας πούμε τη συνημιτονική. Συγκεκριμένα δεχόμαστε τελικά την απλή χρονική συνάρτηση

```
In[13] := Tf[t_] = Ts1[t] /. {C[1] -> 1, C[2] -> 0}
```

```
Out[13] = cos(t ω)
```

Τώρα η διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους **PlatePDE1** στο παρόν δυναμικό πρόβλημα πλάκας, συγκεκριμένα στις ιδιοταλαντώσεις ορθογωνικής πλάκας, παίρνει τελικά την απλούστερη μορφή

```
In[14] := ModifiedPlatePDE = PlatePDE1 /. T -> Tf // Simplify
```

```
Out[14] = cos(t ω) (W^(0,4)(x, y) + 2 W^(2,2)(x, y) + W^(4,0)(x, y)) ==  $\frac{\rho h \omega^2 \cos(t \omega) W(x, y)}{D}$ 
```

Στο σημείο αυτό διαιρούμε βέβαια και με τη συνημιτονική συνάρτηση και τα δύο μέλη της εξισώσεως αυτής. Παίρνουμε έτσι την καθαρά χωρική (ως προς x και y) διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

```
In[15] := SpacePlatePDE1 = ModifiedPlatePDE[[1]] / Tf[t] == ModifiedPlatePDE[[2]] / Tf[t]
```

```
Out[15] = W^(0,4)(x, y) + 2 W^(2,2)(x, y) + W^(4,0)(x, y) ==  $\frac{\rho h \omega^2 W(x, y)}{D}$ 
```

Η ίδια ακριβώς χωρική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους έχει βέβαια ουσιαστικά ήδη προκύψει στην εντολή [7] και από τον εκεί χωρισμό των μεταβλητών. Πραγματικά

```
In[16] := SpacePlatePDE2a = SeparatedVariablesPlatePDE[[1]] == SeparatedVariablesPlatePDE[[3]]
```

```
Out[16] =  $\frac{W^(0,4)(x, y) + 2 W^(2,2)(x, y) + W^(4,0)(x, y)}{W(x, y)} == \lambda$ 
```

που είναι ακριβώς η ίδια χωρική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, αφού

```
In[17] := SpacePlatePDE2b =
```

```
W[x, y] SpacePlatePDE2a[[1]] == W[x, y] SpacePlatePDE2a[[2]] /. λ -> ρ h ω^2 / D
```

```
Out[17] = W^(0,4)(x, y) + 2 W^(2,2)(x, y) + W^(4,0)(x, y) ==  $\frac{\rho h \omega^2 W(x, y)}{D}$ 
```

```
In[18] := SpacePlatePDE1 == SpacePlatePDE2b // Simplify
```

```
Out[18] = True
```

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειώσουμε ότι πολύ συχνά ο Πολιτικός Μηχανικός καταλήγει στην ίδια χωρική διαφορική εξίσωση και με διαφορετικό, απλούστερο τρόπο. Συγκεκριμένα, κατανοώντας ότι στις ιδιοταλαντώσεις (και στις ελεύθερες ταλαντώσεις γενικότερα) χωρίς απόσβεση (όπως συμβαίνει εδώ) η χρονική μερική παράγωγος είναι η δεύτερη παράγωγος, λόγω του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα, δέχεται (σωστά!) εξαρχής τριγωνομετρική χρονική μεταβολή της λύσεως που υποθέτει. Δηλαδή το συγκεκριμένο πρόβλημα ιδιοταλαντώσεων πλάκας δέχεται λύση της διαφορικής εξισώσεώς του με μερικές παραγώγους **PlatePDE** της συνημιτονικής μορφής (εναλλακτικά ημιτονικής μορφής ή ακόμη και μιγαδικής εκθετικής μορφής):

```
In[19] := ws[x_, y_, t_] = W[x, y] Cos[ω t - α];
```

Τότε η διαφορική εξίσωση **PlatePDE** της πλάκας παίρνει τη μορφή

```
In[20] := PlatePDE2 = PlatePDE /. w -> ws
```

$$\text{Out}[20] = \cos(\alpha - t\omega) W^{(0,4)}(x, y) + 2 \cos(\alpha - t\omega) W^{(2,2)}(x, y) + \cos(\alpha - t\omega) W^{(4,0)}(x, y) == \frac{\rho h \omega^2 \cos(\alpha - t\omega) W(x, y)}{D}$$

και με απλοποίηση του συνημιτονικού όρου (και στο αριστερό και στο δεξιό μέλος) την τελική μορφή:

```
In[21] := SpacePlatePDE3 = PlatePDE2[[1]] / Cos[ω t - α] == PlatePDE2[[2]] / Cos[ω t - α] // Simplify
```

$$\text{Out}[21] = W^{(0,4)}(x, y) + 2 W^{(2,2)}(x, y) + W^{(4,0)}(x, y) == \frac{\rho h \omega^2 W(x, y)}{D}$$

Δηλαδή και με τον τρόπο αυτό (που είναι ουσιαστικά ένα έξυπνο και εύχρηστο τέχνασμα) προκύπτει ξανά η χωρική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους **SpacePlatePDE2b**, αφού προφανώς

```
In[22] := SpacePlatePDE3 == SpacePlatePDE2b
```

```
Out[22] = True
```

Μετά από την παραπάνω παρατήρηση μπορούμε πια να προχωρήσουμε (χωρίς όμως τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών) στις μεταβλητές θέσεως x και y πάνω στην πλάκα (τις δύο χωρικές μεταβλητές) σε συνδυασμό βέβαια και με τις συνοριακές συνθήκες απλής στηρίξεως τις οποίες δεχόμαστε στο σύνορο της ορθογωνικής πλάκας. (Αυτές αφορούν σε μηδενικό βέλος κάμψεως και επίσης σε μηδενική καμπτική ροπή κάθετα στο σύνορο της πλάκας.) Χωρίς απόδειξη παρατηρούμε ότι η χωρική συνάρτηση

```
In[23] := Wmn[x_, y_] = Sin[m π x / a] Sin[n π y / b];
```

με τα m και n θετικούς ακέραιους αριθμούς σχεδόν επαληθεύει τη χωρική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους των ιδιοταλαντώσεων πλάκας **SpacePlatePDE1** και είναι κατάλληλη για λύση. Πραγματικά

```
In[24] := equation = SpacePlatePDE1 /. W -> Wmn // Simplify
```

$$\text{Out}[24] = \left(\frac{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2 \pi^4}{a^4 b^4} - \frac{\rho h \omega^2}{D} \right) \sin\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n \pi y}{b}\right) == 0$$

Αρκεί βέβαια ο σταθερός όρος μέσα στις παρενθέσεις αριστερά να μηδενίζεται, δηλαδή

```
In[25] := FrequencyEquationmn = equation[[1, 1]] == 0
```

$$\text{Out}[25] = \frac{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2 \pi^4}{a^4 b^4} - \frac{\rho h \omega^2}{D} == 0$$

Και αυτό βέβαια συμβαίνει, εφόσον η συχνότητα ιδιοταλαντώσεων ω είναι ρίζα αυτής της εξίσωσης ιδιοσυχνοτήτων (ή απλούστερα εξίσωσης συχνοτήτων) **FrequencyEquationmn**:

```
In[26] := PlateVibrationFrequenciesmn = Solve[FrequencyEquationmn, ω]
```

$$\text{Out}[26] = \left\{ \left\{ \omega \rightarrow -\frac{\sqrt{D} (b^2 m^2 + a^2 n^2) \pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}} \right\}, \left\{ \omega \rightarrow \frac{\sqrt{D} (b^2 m^2 + a^2 n^2) \pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}} \right\} \right\}$$

Προφανώς και οι δύο πιο πάνω ρίζες δεν έχουν νόημα ταυτόχρονα για τη ζητούμενη ιδιοσυχνότητα $\omega_{m,n}$. Η δεύτερη ρίζα, η θετική ρίζα αρκεί σαν συχνότητα $\omega_{m,n}$ των ιδιοταλαντώσεων της πλάκας. Άρα

```
In[27] :=  $\omega[m, n] = \text{PlateVibrationFrequencies}[2, 1, 2]$ 
```

$$\text{Out}[27] = \frac{\sqrt{D} (b^2 m^2 + a^2 n^2) \pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις $W_{m,n}(x, y)$ επαληθεύουν βέβαια όχι μόνο τη χωρική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, αλλ' επίσης και τις συνοριακές συνθήκες στις τέσσερις πλευρές $x = 0, x = a, y = 0$ και $y = b$ της παρούσας ορθογωνικής πλάκας εδώ με την υπόθεση απλής στηρίξεως (εδράσεως) στην περίμετρό της. Οι συνθήκες αυτές (για μηδενικό τόσο το βέλος κάμψεως όσο και τη δεύτερη παράγωγο του λόγω της σχετικής μηδενικής καμπτικής ροπής στην πλάκα στην κάθετη στην περίμετρό της, στο σύνορό της διεύθυνση) ανά δύο σε κάθε πλευρά της ορθογωνικής πλάκας είναι οι ακόλουθες πρώτα για το ίδιο το βέλος κάμψεως (με δήλωση βέβαια ότι οι σταθερές m και n είναι ακέραιοι αριθμοί):

```
In[28] := Simplify[{Wmn[0, y], Wmn[a, y], Wmn[x, 0], Wmn[x, b]}, {m, n} ∈ Integers]
```

```
Out[28] = {0, 0, 0, 0}
```

Και στη συνέχεια μετά τον υπολογισμό και των δεύτερων μερικών παραγώγων ως προς x και ως προς y

```
In[29] := {DxxWmn[x, y] = D[Wmn[x, y], {x, 2}], DyyWmn[x, y] = D[Wmn[x, y], {y, 2}]}
```

$$\text{Out}[29] = \left\{ -\frac{m^2 \pi^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{a^2}, -\frac{n^2 \pi^2 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{b^2} \right\}$$

και για τις δεύτερες παραγώγους (κατά τις κάθετες στο σύνορο διευθύνσεις) στις τέσσερις πλευρές της ορθογωνικής πλάκας:

```
In[30] := Simplify[{DxxWmn[0, y], DxxWmn[a, y], DyyWmn[x, 0], DyyWmn[x, b]}, {m, n} ∈ Integers]
```

```
Out[30] = {0, 0, 0, 0}
```

Χρησιμοποιούμε τις παραπάνω συναρτήσεις $W_{m,n}(x, y)$ που επαληθεύουν βέβαια, όπως ήδη είδαμε, όχι μόνο τη χωρική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους **SpacePlatePDE1**, αλλά και όλες τις συνοριακές συνθήκες (ανά δύο σε κάθε πλευρά της ορθογωνικής πλάκας). Στο τέλος έχουμε για το βέλος κάμψεως $w_{m,n}(x, y, t)$ στις ιδιοταλαντώσεις της πλάκας που αντιστοιχούν στην ιδιοσυχνότητα $\omega_{m,n}$

```
In[31] := wmn[x, y, t] = Wmn[x, y] Cos[ $\omega[m, n]$  t]
```

$$\text{Out}[31] = \cos\left(\frac{\sqrt{D} (b^2 m^2 + a^2 n^2) \pi^2 t}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

έχοντας πάρει για χρονική συνάρτηση μόνο τη συνημιτονική συνάρτηση χωρίς γωνία φάσεως $a_{m,n}$. Είναι βέβαια προφανές ότι η συνάρτηση αυτή, η οποία αντιστοιχεί στην ιδιομορφή $W_{m,n}(x, y)$ της πλάκας, είναι λύση της αρχικής διαφορικής εξισώσεως με μερικές παραγώγους της πλάκας. Συγκεκριμένα ισχύει

```
In[32] := VerificationOfThePlatePDE = PlatePDE /. w → wmn // Simplify
```

```
Out[32] = True
```

Προχωράμε τώρα και σε ένα αριθμητικό παράδειγμα για την ιδιοσυχνότητα $\omega_{2,3}$ τάξεως (2, 3), με $m = 2$ και $n = 3$, και την αντίστοιχη ιδιομορφή $W_{2,3}(x, y)$. Συγκεκριμένα δεχόμαστε τις εξής τιμές των διαστάσεων a και b της ορθογωνικής πλάκας, της επιφανειακής πυκνότητάς της ρh και της δυσκαμψίας της D :

```
In[33] := values = {a → 3, b → 2,  $\rho h$  → 71.6536, D → 1};
```

Για τις τιμές αυτές το βέλος κάμψεως $w_{2,3}(x, y, t)$ της πλάκας θα έχει την τριγωνομετρική μορφή

```
In[34] := w23[x_, y_, t_] = wmn[x, y, t] /. {m -> 2, n -> 3} /. values
```

```
Out[34] = cos(3.14159 t) sin(2 π x / 3) sin(3 π y / 2)
```

Πρόκειται βέβαια, επαναλαμβάνουμε, για τις αντίστοιχες ιδιομορφές, τάξεως (2, 3), της πλάκας επί τη σχετική χρονική συνάρτηση. Μόνο που εδώ αγνοήσαμε τη διαφορά φάσεως a που γενικά υπάρχει. Αλλά αυτό δεν είναι σημαντικό, επειδή απλά σκοπεύουμε να δημιουργήσουμε τη σχετική animation και σ' αυτή μια διαφορά φάσεως a (ουσιαστικά μια μετατόπιση στην αρχή μετρήσεως του χρόνου) δεν παίζει κανέναν ουσιαστικό ρόλο. Σημειώνουμε ότι η σχετική ιδιοσυχνότητα, πάλι τάξεως (2, 3), της πλάκας θα είναι

```
In[35] := ω23 = ω[2, 3] /. values
```

```
Out[35] = 3.14159
```

Αυτό φαίνεται εξάλλου καθαρά και από τον συνημιτονικό όρο στο πιο πάνω αντίστοιχο βέλος κάμψεως.

■ ΔΗΜΙΟΥΡΓΙΑ ΤΗΣ ANIMATION (ΤΟΥ ΚΙΝΟΥΜΕΝΟΥ ΣΧΗΜΑΤΟΣ)

Και τώρα ορίζουμε τη συνάρτηση που δημιουργεί την ελαστική επιφάνεια (elastic surface) της ορθογωνικής πλάκας (rectangular plate) τη χρονική στιγμή t (την οποιαδήποτε χρονική στιγμή t), όπως αυτή προκύπτει από το πιο πάνω βέλος κάμψεως $w_{2,3}(x, y, t)$ με καθυστερημένο υπολογισμό, δηλαδή με το σύμβολο $:=$ αντί για το $=$ στον ορισμό της συναρτήσεως. Αυτό το κάνουμε, επειδή δεν έχουμε καθορίσει ακόμη το χρόνο t και επομένως δε μπορούμε να σχεδιάσουμε την ελαστική επιφάνεια της πλάκας.

```
In[36] := PlateElasticSurface[t_] :=
  Plot3D[w23[x, y, t], {x, 0, 3}, {y, 0, 2}, PlotPoints -> 50, ImageSize -> 350,
  DefaultFont -> {"Arial-Bold", 11.5}, AxesLabel -> {"x", " y", "w "},
  PlotRange -> {-1, 1}, Ticks -> {{0, 1, 2, 3}, {0, 1, 2}, {-1, 0, 1}},
  PlotLabel -> "ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ"];
```

Τώρα πια που διαθέτουμε αυτήν τη συνάρτηση μπορούμε να σχεδιάζουμε την ελαστική επιφάνεια της πλάκας κάθε χρονική στιγμή. Ας το κάνουμε αυτό με την εντολή **Table** για χρονικές στιγμές από $t = 0$ μέχρι $t = 2$ ανά $\Delta t = 0.2$ με εξαίρεση την τελευταία χρονική στιγμή $t = 2$ λόγω της περιοδικότητας του φαινομένου. (Δηλαδή δε χρειαζόμαστε στην animation την ελαστική επιφάνεια της πλάκας για $t = 2$.)

```
In[37] := PlateVibrationElasticSurfaces =
  Table[p[t] = PlateElasticSurface[t], {t, 0, 1.8, 0.2}];
```

Πήραμε συνολικά δέκα τριδιάστατα σχήματα: δέκα ελαστικές επιφάνειες για την ορθογωνική πλάκα μας, που για οικονομία χώρου δεν τα δείχνουμε εδώ ένα-ένα, όπως παρουσιάζονται στην οθόνη. (Όμως παρακάτω τα δείχνουμε ανά δύο με τη χρήση της εντολής **GraphicsArray**.) Ο αριθμός των σχημάτων είναι:

```
In[38] := NumberOfPlateElasticSurfaces = Length[PlateVibrationElasticSurfaces]
```

```
Out[38] = 10
```

Μαυρίζοντας τη δεξιά κατακόρυφη μπλε γραμμή που τα καλύπτει όλα τους και στη συνέχεια πατώντας **Ctrl Y**, παίρνουμε τη σχετική animation (κινούμενο σχήμα: εδώ κίνηση στην ελαστική επιφάνεια της πλάκας: κινούμενη ελαστική επιφάνεια). Το σχήμα αυτό μπορούμε να το "εξαγάγουμε" σε μορφή αρχείου **gif**,

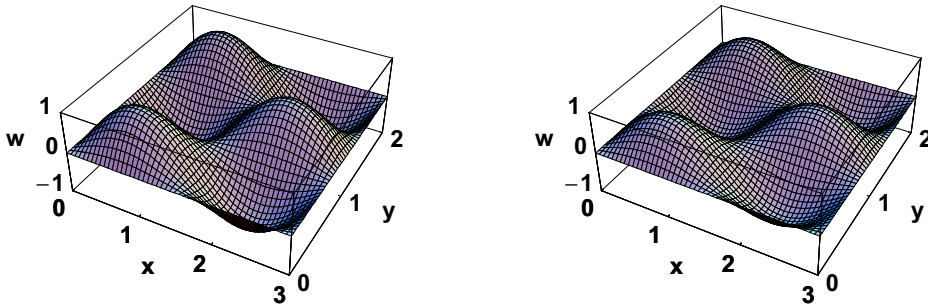
ώστε να έχουμε διαθέσιμη την ενδιαφέρουσα αυτή animation και έξω από τη *Mathematica*. Το αρχείο με τα σχήματα για την animation αυτών των ταλαντώσεων το ονομάζουμε **RectangularPlateVibrations.gif**.

```
In[39]:= Export["D:\cemb\animations\RectangularPlateVibrations.gif",
  PlateVibrationElasticSurfaces, ConversionOptions -> {Loop -> True}];
```

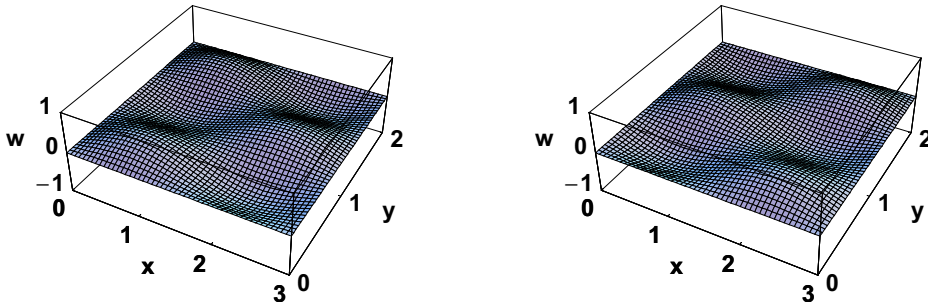
Και τώρα δείχνουμε (ανά δύο στην κάθε γραμμή) τα δέκα σχήματα που πήραμε για την animation και που επαναλαμβάνονται περιοδικά με περίοδο $T = 2$. (Δηλαδή το ενδέκατο σχήμα θα είναι ίδιο με το πρώτο.) Μια πολύ ενδιαφέρουσα ιδιότητα στα σχήματα αυτά είναι ότι έχουν γραμμές-κόμβους παράλληλες στον άξονα y , όταν $\sin(m\pi x/a) = 0$, δηλαδή όταν $m x/a = k$ με $k = 1, 2, \dots, m-1$. Εδώ με $m = 2$ και $a = 3$ η γραμμή-κόμβος είναι η $x = 3/2$. Ανάλογα και για γραμμές-κόμβους παράλληλες στον άξονα x (δύο εδώ).

```
In[40]:= Show[GraphicsArray[{{p[0], p[0.2]}, {p[0.4], p[0.6]},
  {p[0.8], p[1.0]}, {p[1.2], p[1.4]}, {p[1.6], p[1.8]}}], ImageSize -> 520];
```

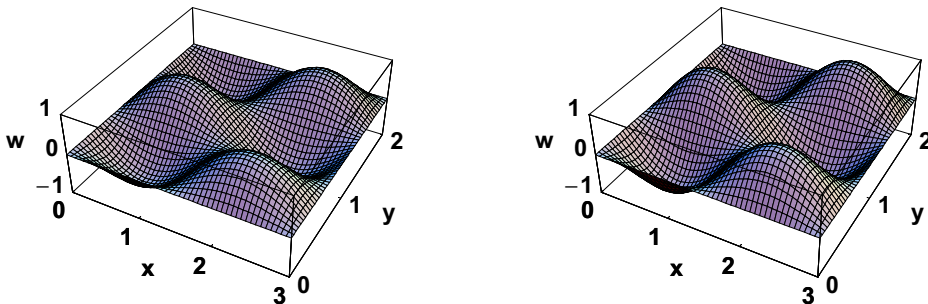
ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ



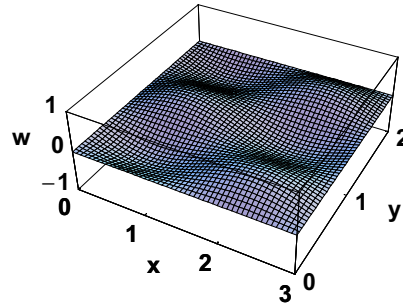
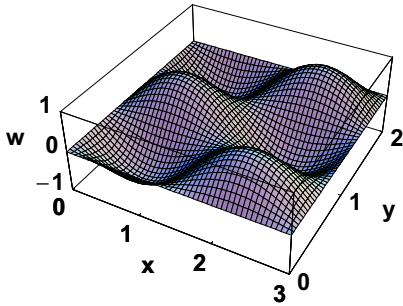
ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ



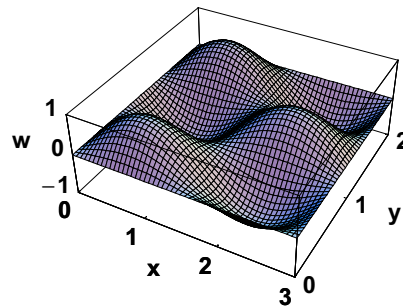
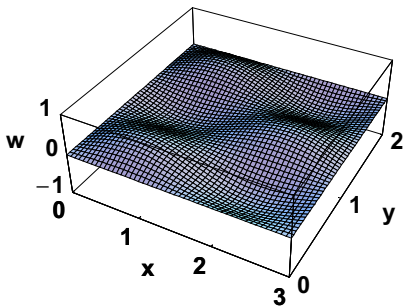
ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ



ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ



ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ ΙΔΙΟΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΚΗΣ ΠΛΑΚΑΣ



Εννοείται ότι τα αμέσως παραπάνω σχήματα τα δείχνουμε απλά για την ενημέρωση του αναγνώστη του notebook αυτού. Τα αληθινά σχήματα, τα οποία ήδη χρησιμοποιήσαμε παραπάνω για την animation με **Ctrl Y** και επίσης με την εντολή **Export** για τη δημιουργία του αρχείου **gif** είναι τα σχήματα στην εντολή [37] για τις **PlateVibrationElasticSurfaces** το καθένα τους σε διαφορετική (κατακόρυφη) γραμμή: μόνο του στη γραμμή. Φυσικά θυμίζουμε πως πιο πάνω εργασθήκαμε μόνο με την ιδιοσυχνότητα $\omega_{2,3}$. Ανάλογα όμως μπορούμε να εργασθούμε και με κάθε άλλη ιδιοσυχνότητα της πλάκας. Ας υπολογίσουμε τώρα μερικές από τις ιδιοσυχνότητες αυτές (συγκεκριμένα όλες τις συχνότητες ιδιοταλαντώσεων της πλάκας με $m, n = 1, 2, 3$ και 4) αναλυτικά και επίσης αριθμητικά για τις εδώ αριθμητικές τιμές **values**:

```
In[41] := PlateFrequencies = Table[ω[m, n], {m, 1, 4}, {n, 1, 4}] // TableForm
```

```
Out[41] // TableForm =
```

| | | | |
|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $\frac{(a^2+b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ | $\frac{(4 a^2+b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ | $\frac{(9 a^2+b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ | $\frac{(16 a^2+b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ |
| $\frac{(a^2+4 b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ | $\frac{(4 a^2+4 b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ | $\frac{(9 a^2+4 b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ | $\frac{(16 a^2+4 b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ |
| $\frac{(a^2+9 b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ | $\frac{(4 a^2+9 b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ | $\frac{(9 a^2+9 b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ | $\frac{(16 a^2+9 b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ |
| $\frac{(a^2+16 b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ | $\frac{(4 a^2+16 b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ | $\frac{(9 a^2+16 b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ | $\frac{(16 a^2+16 b^2)\sqrt{D}\pi^2}{a^2 b^2 \sqrt{\rho h}}$ |

```
In[42] := NumericalPlateFrequencies = PlateFrequencies /. values
```

```
Out[42] // TableForm =
```

| | | | |
|----------|---------|---------|---------|
| 0.421038 | 1.2955 | 2.75294 | 4.79336 |
| 0.809689 | 1.68415 | 3.14159 | 5.18201 |
| 1.45744 | 2.3319 | 3.78934 | 5.82976 |
| 2.36429 | 3.23876 | 4.6962 | 6.73661 |

