ΝΟΜΟΣ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ (ΝΜΣ)
σε ειδική περίπτωση

Εστω μια συνάρτηση **f = f (x, y, z…)**

όπου x, y, z είναι **ασυσχέτιστες μεταβλητές**
και τα αντίστοιχα σφάλματά τους είναι

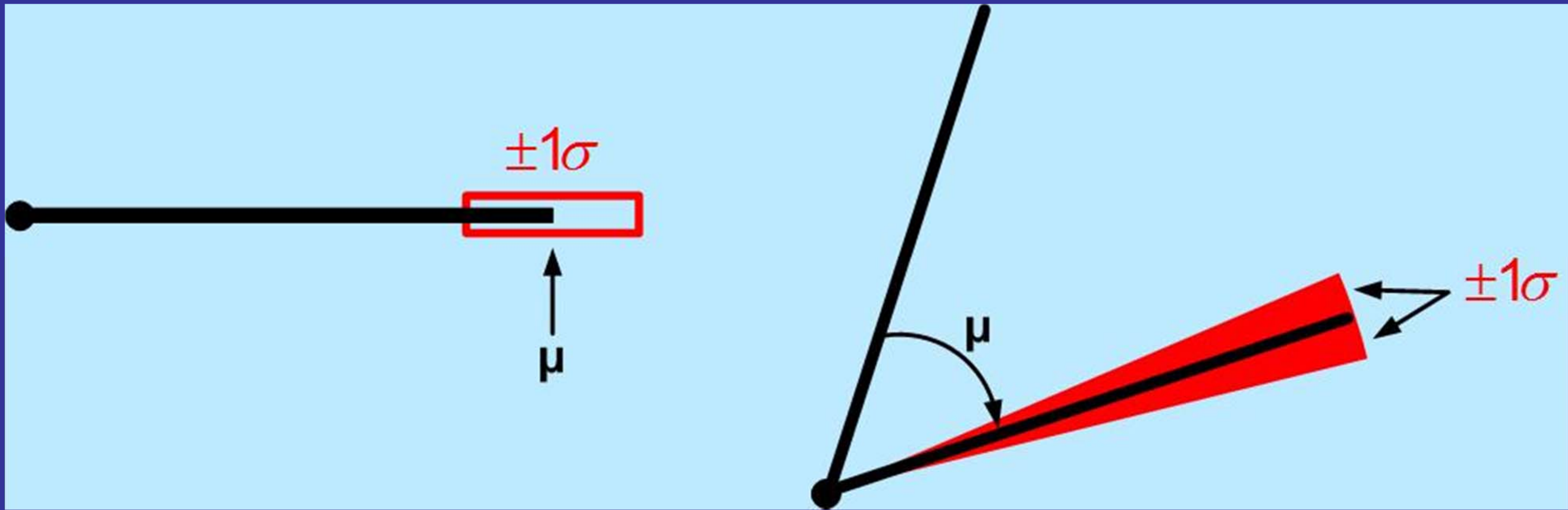
$$\sigma_x \;, \sigma_y , \sigma_z , \ldots.$$

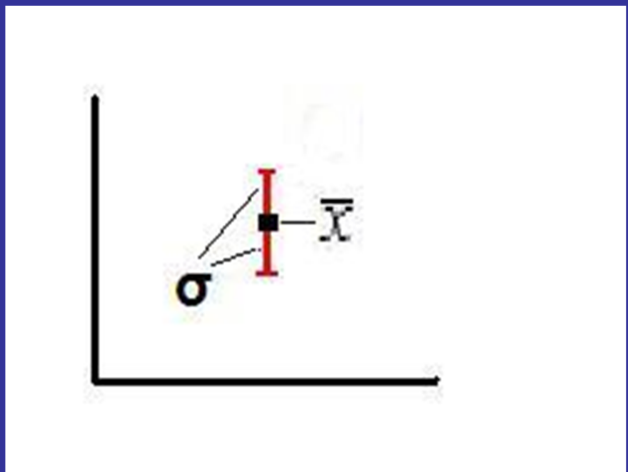
Τότε το σφάλμα $\boldsymbol{\sigma_f}$ της **f** υπολογίζεται από τη σχέση

$$\sigma_f^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_\chi^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \ldots..$$

(μερική περίπτωση για ασυσχέτιστες μεταβλητές)

Σε μία διάσταση (1-D), έχουμε μελετήσει τη **φυσική σημασία** των σφαλμάτων

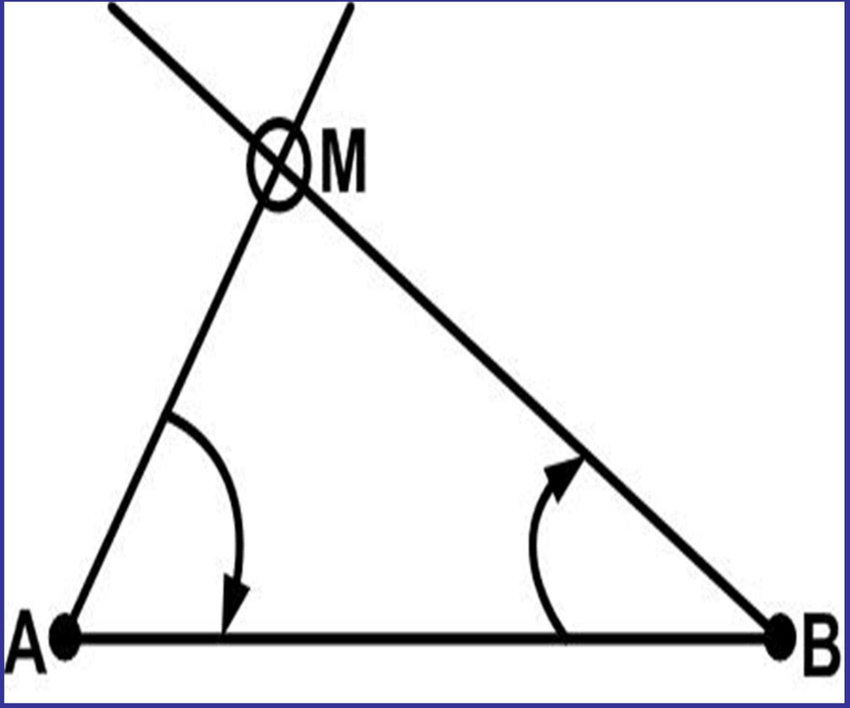


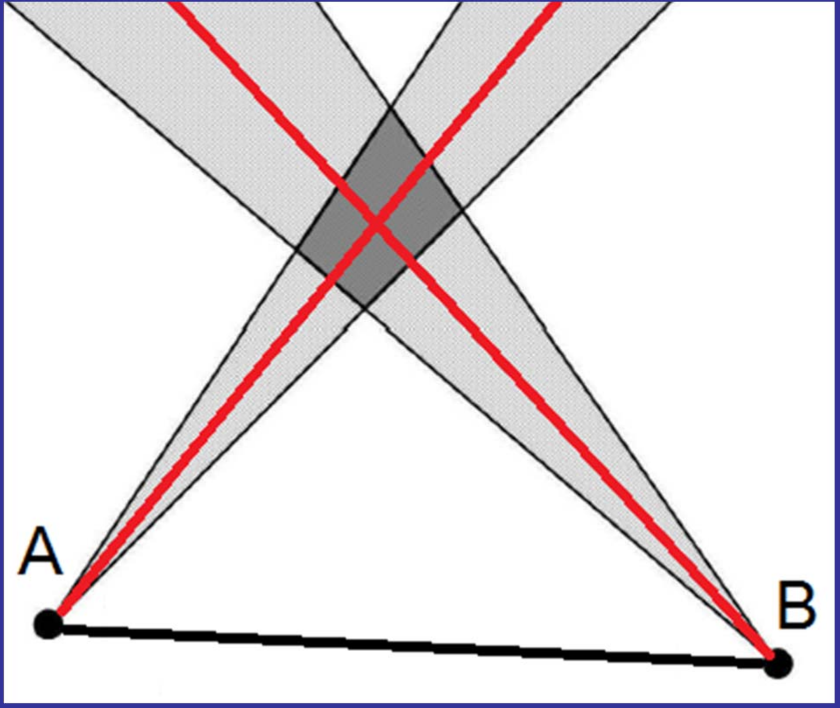


Τι γίνεται σε δύο (ή περισσότερες) διαστάσεις?

Συνήθης τρόπος παράστασης σφαλμάτων σε 1-D

Ομως, επειδή οι γωνίες είναι φυσικά μεγέθη (μετρήσεις) περιέχουν **σφάλματα**.
Αυτό σημαίνει ότι **κάθε μία μέτρηση** δε βρίσκεται σε έναν **άξονα**, αλλά σε μια **γωνία** που προσδιορίζεται από στατιστικά κριτήρια (ακρίβεια μετρήσεων, επίπεδο εμπιστοσύνης, κλπ).

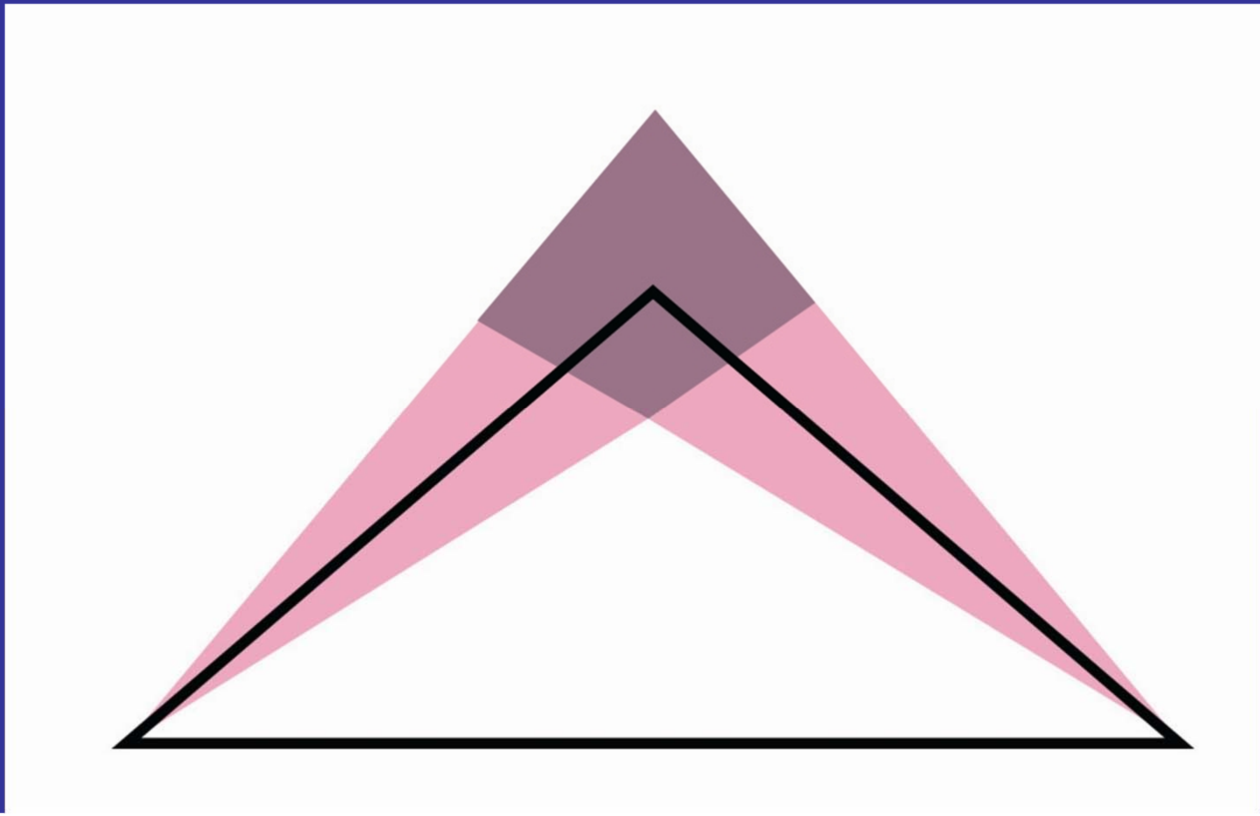




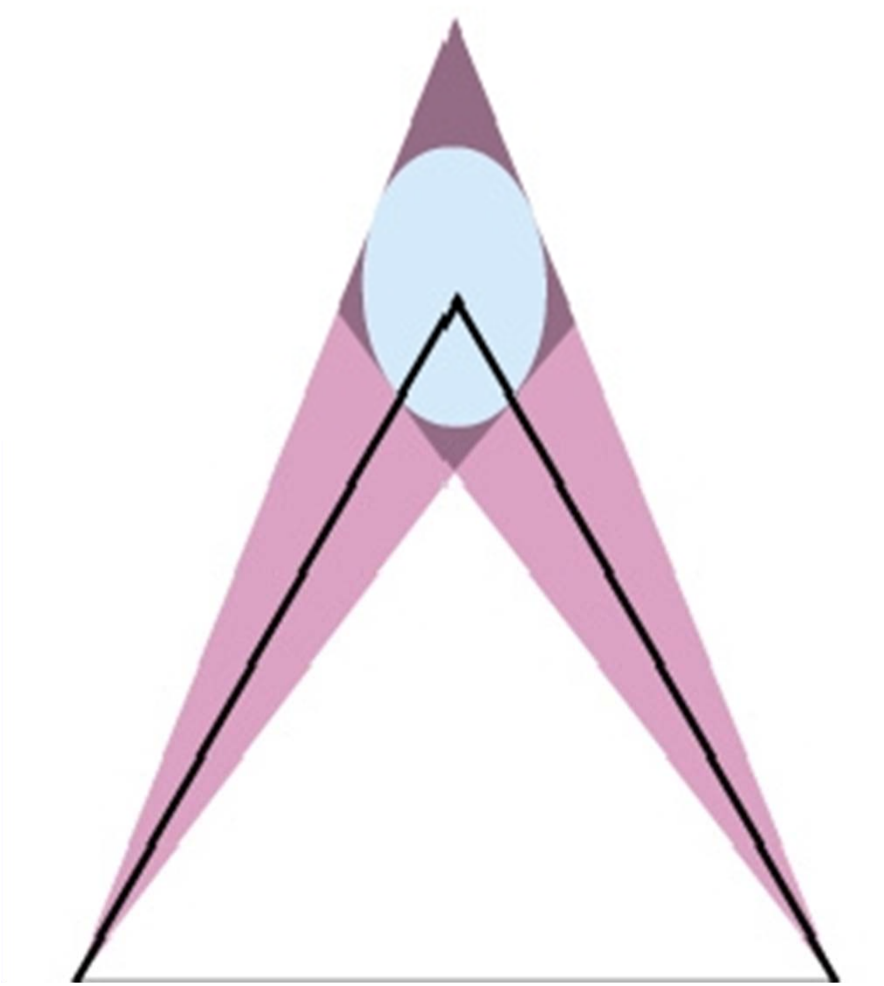
θεωρητική προσέγγιση

πραγματική κατάσταση

Ο προσδιορισμός της θέσης τομής των δύο αξόνων που ορίζονται από διευθύνσεις δεν είναι «απλή τομή» δύο γραμμών.
Ο μέσες τιμές ορίζουν ένα σημείο τομής, στην πράξη όμως το σημείο αυτό «περιπλανάται» στο κοινό τμήμα των «γωνιών» που ορίζουν τα όρια αβεβαιότητας των δύο διευθύνσεων, δηλαδή σε ένα τετράπλευρο.



Ομως, στατιστικά, η πιθανότητα να βρίσκεται το σημείο τομής των δύο αξόνων που προκύπτουν από μετρήσεις είναι προφανώς μικρότερη στις γωνίες απ' ότι στο κέντρο του τετραπλεύρου



Η στατιστική θεωρία μας λέει ότι η πιθανότητα είναι ίση στην έλλειψη που είναι εγγεγραμμένη στο τετράπλευρο.

- Η έλλειψη αυτή ονομάζεται **έλλειψη σφάλματος**

Οταν μετράμε τις συντεταγμένες μιας στάσης, στην πραγματικότητα μετράμε μια στατιστική κατανομή και ένα χώρο αβεβαιότητας, την έλλειψη σφάλματος

Εάν δεν το κατανοήσουμε αυτό, την πατήσαμε!!!

Η αβεβαιότητα της θέσης ενός σημείου

- ►σε έναν άξονα προσδιορίζεται από **ΜΙΑ** παράμετρο (σ_{χ})

- ► στο επίπεδο από **ΤΡΕΙΣ** παραμέτρους που ορίζουν την έλλειψη σφάλματος

$$\sigma_{xx}^{2} \qquad \sigma_{yy}^{2} \qquad \sigma_{\chi y}$$

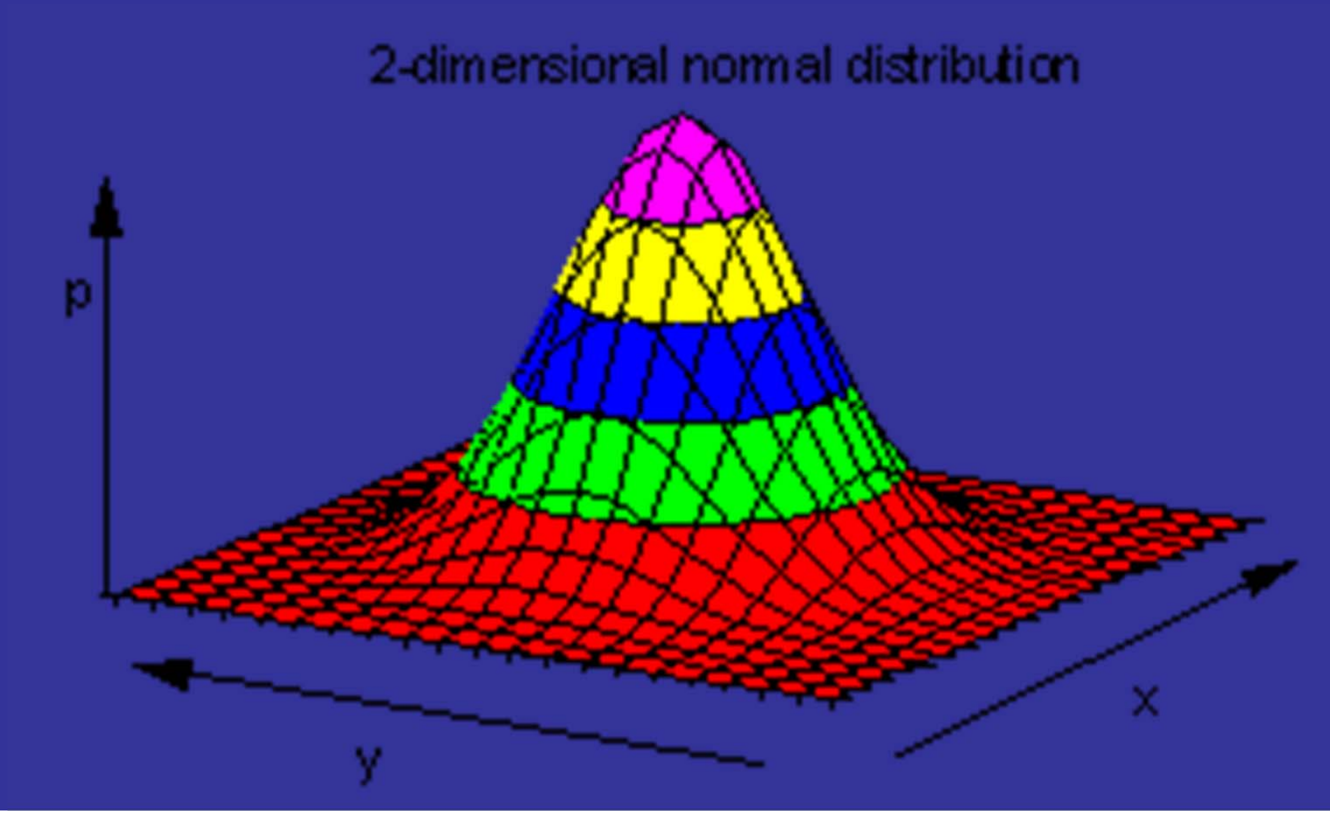
Ελλειψη σφάλματος από αναλυτική άποψη

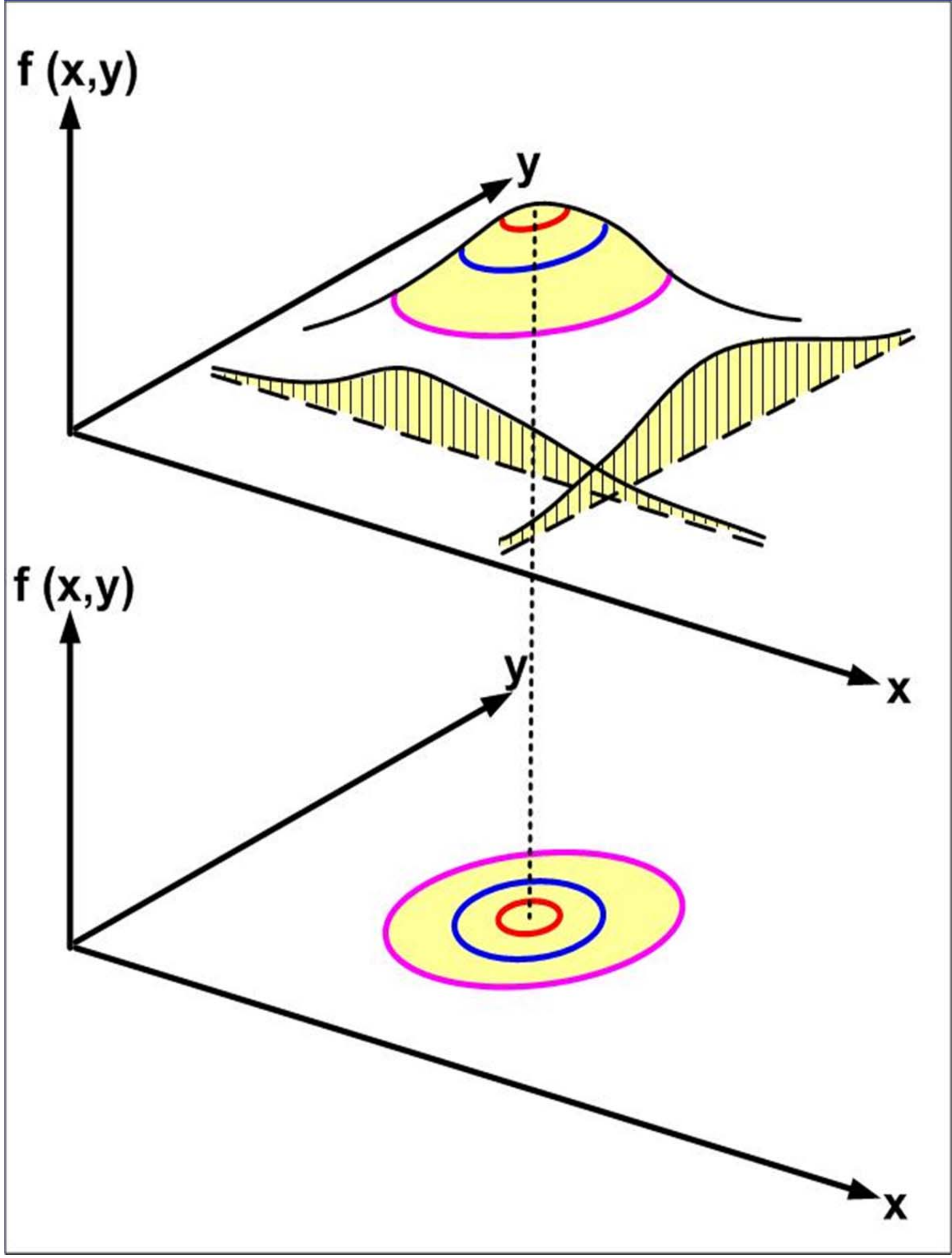
- η έλλειψη σφάλματος προσδιορίζεται από τις τιμές μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητότητας
- πιο συγκεκριμένα από τον Πίνακα μεταβλητοτήτας-συμμεταβλητότητας (v-cov)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}^2 \end{bmatrix}$$

Τι σημαίνει αν ένας ή περισσότεροι όροι είναι μηδενικοί??

Μια άλλη οπτική της έλλειψης σφάλματος
Η συνάρτηση κανονικής κατανομής στο χώρο δίνει ένα κωδωνοειδές
Η έλλειψη είναι η τομή του κωδωνοειδούς απο ορίζοντιο επίπεδο σε απόσταση οριζόμενη από το επίπεδο σημαντικότητας





Η τομή του κωδωνοειδούς με ένα οριζόντιο επίπεδο σε κάποια απόσταση από το επίπεδο χ-ψ είναι μια έλλειψη-
η **έλλειψη σφάλματος**.

Η απόσταση του επιπέδου αυτού από το επίπεδο βάσης αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης

Προσοχή

Οι τιμές επιπέδου σημαντικότητας στο επίπεδο (2-D) είναι διαφορετικές απ΄οτι σε ένα άξονα (1-D)

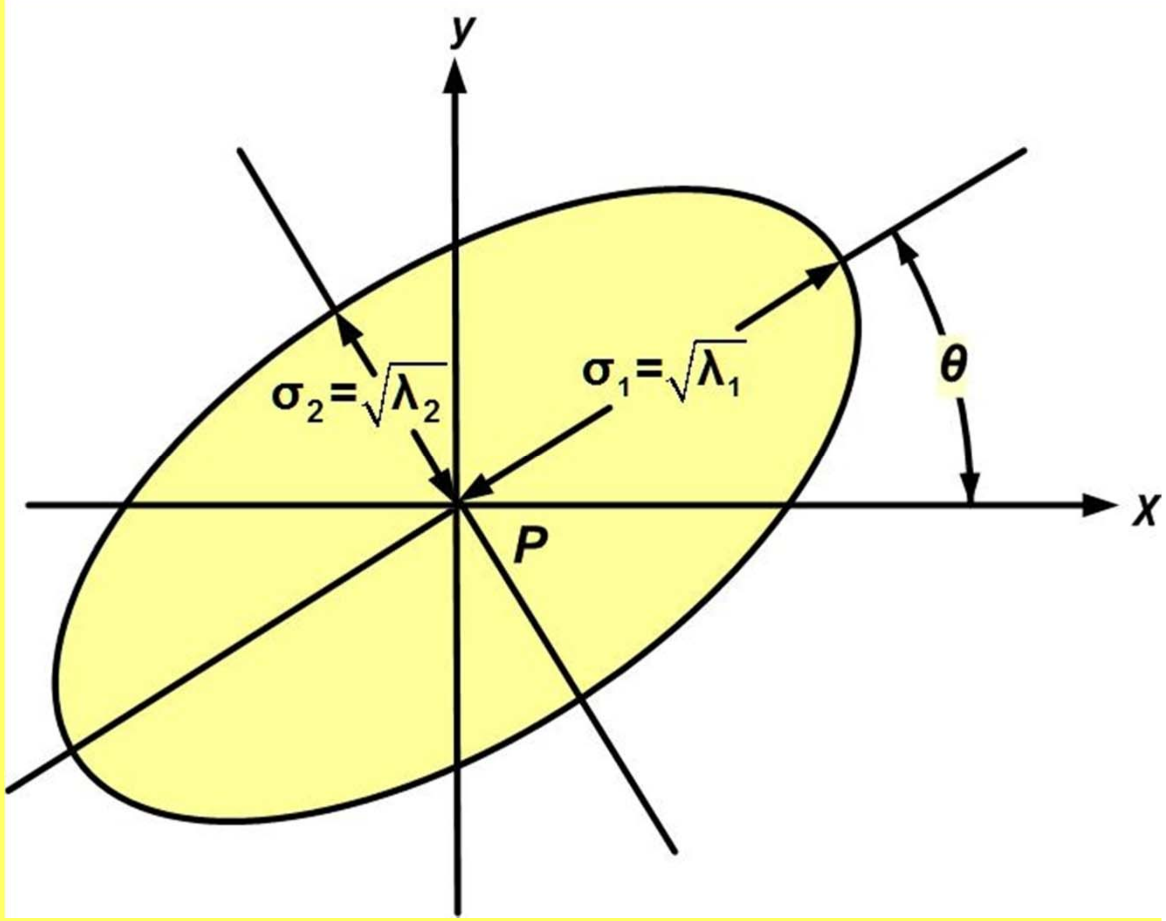
	1-D	**2-D**
1σ	**0.68**	**0.39**
2σ	**0.95**	**0.85**
3σ	**0.99**	**0.99**

Ελλειψη σφάλματος από αναλυτική άποψη

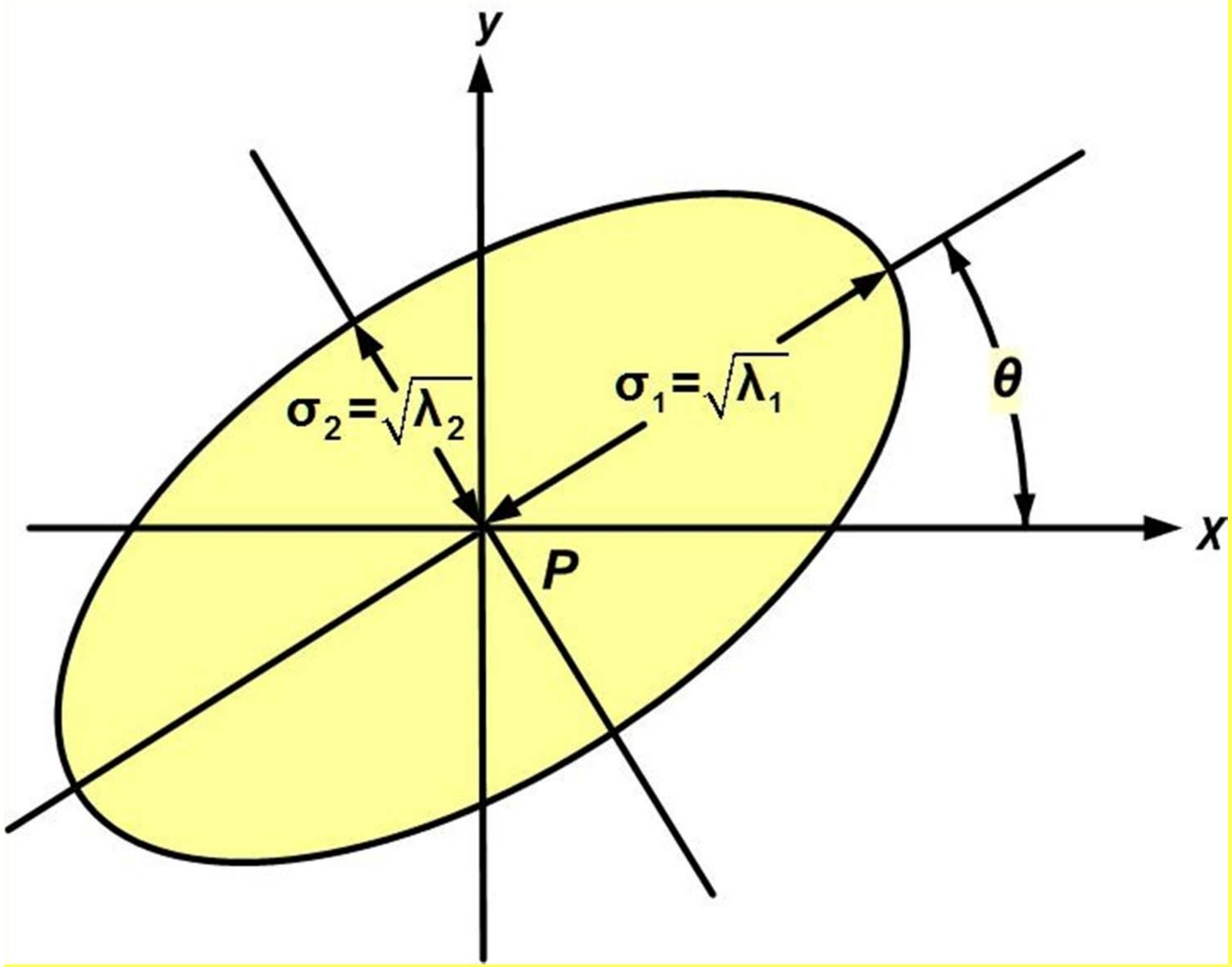
- η έλλειψη σφάλματος προσδιορίζεται από τις τιμές μεταβλητοτήτων-συμμεταβλητότητας
- πιο συγκεκριμένα από τον Πίνακα μεταβλητοτήτας-συμμεταβλητότητας (v-cov)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}^2 \end{bmatrix}$$

Τα μήκη των ημιαξόνων της έλλειψης προσδιορίζονται από τα ιδιοδιανύσματα του Πίνακα v-cov



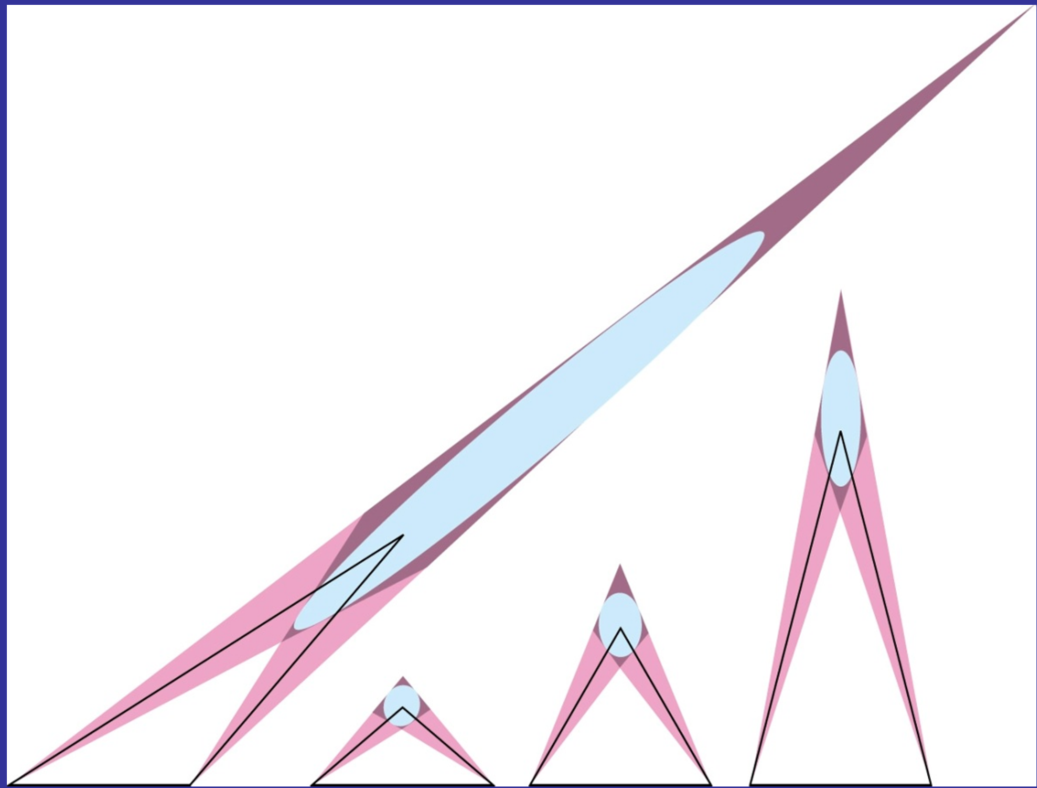
$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx}^2 - \lambda & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy}^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$



Η διεύθυνση **θ** της έλλειψης προσδιορίζεται από τη σχέση

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2}$$

Ο Πίνακας Σ (v-cov) μας προσδιορίζει πως μεταβάλλεται η έλλειψη σφάλματος ανάλογα με την ποιότητα των μετρήσεων και το σύστημα (γεωμετρία παρατηρήσεων)



Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι
τα τρίγωνα που σχηματίζουμε στις αλληλοτομίες
πρέπει να είναι περίπου **ισόπλευρα** για να έχουμε καλύτερη κατανομή σφαλμάτων

Η εμπειρική διόρθωση δεν εξουδετερώνει τα σφάλματα

Ο Πίνακας Σ (v-cov) που προσδιορίζει τα σφάλματα ενός σημείου προκύπτει

►είτε από **συνόρθωση**, δηλ.
από τη λύση συστήματος παρατηρήσεων

$$\mathbf{Ax = \ell + u}$$

► είτε από εφαρμογή του ΝΜΣ
(σε αυτό θα εστιαστούμε)

Σκεφτείτε την περίπτωση που εφαρμόζετε το 1ο θεμελιώδες

Γνωρίζετε τις συντεταγμένες (και πίνακα v-cov) ενός σημείου A και θέλετε να βρείτε τα αντίστοιχα (συντεταγμένες και v-cov) ενός σημείου B

Τι κάνετε?

Οι συντεταγμένες των δύο σημείων συνδέονται με κάποιες σχέσεις μη γραμμικές (λόγω γωνίας)

Ας υποθέσουμε ότι η γωνία (αζιμούθιο) δεν έχει σφάλμα

Εχουμε γραμμικές σχέσεις της μορφής

$X_B = X_A + d \sin \alpha \quad Y_B = Y_A + d \cos \alpha$

Οι δύο εξισώσεις

$$X_B = X_A + d \sin \alpha \qquad Y_B = Y_A + d \cos \alpha$$

γράφονται συμβολικά με μορφή Πινάκων

$$X^* = X + A\omega$$

Ο Πίνακας v-cov του $\mathbf{X^*}$ προκύπτει ως άθροισμα δύο αντίστοιχων Πινάκων

Οπότε το «δύσκολο» είναι να βρείς το v-cov της παράστασης $\mathbf{A\omega}$ (ή κάθε γραμμικού ή μη μετασχηματισμού)

Αυτές μπορεί να γραφούν

$$\mathbf{X^{*}=X+\Phi}$$

Στα αθροίσματα οι μεταβλητότητες όπως είναι γνωστόν αθροίζονται

Αρα

$$\mathbf{\Sigma_{X^{*}X^{*}}=\Sigma_{XX}+\Sigma_{\Phi\Phi}}$$

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε ξεχωριστά τους όρους, όπως κάναμε και στα σφάλματα των οργάνων

Εφαρμογή σε γραμμικές σχέσεις

Εστω μια μεταβλητή **x** ν διαστάσεων **x**$=[x_1, x_2, ..x_\nu]^T$

Με Πίνακα Μεταβλητότητας-Συμμεταβλητότητας (v-cov)

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & & \sigma_{1\nu} \\ & \sigma_{22}^2 & & \\ & & & \\ & & & \sigma_{\nu\nu}^2 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε μια άλλη μεταβλητή

$$\mathbf{y}=[y_1,\ y_2,\ ..y_v]^T$$

που ορίζεται από τη γραμμική σχέση

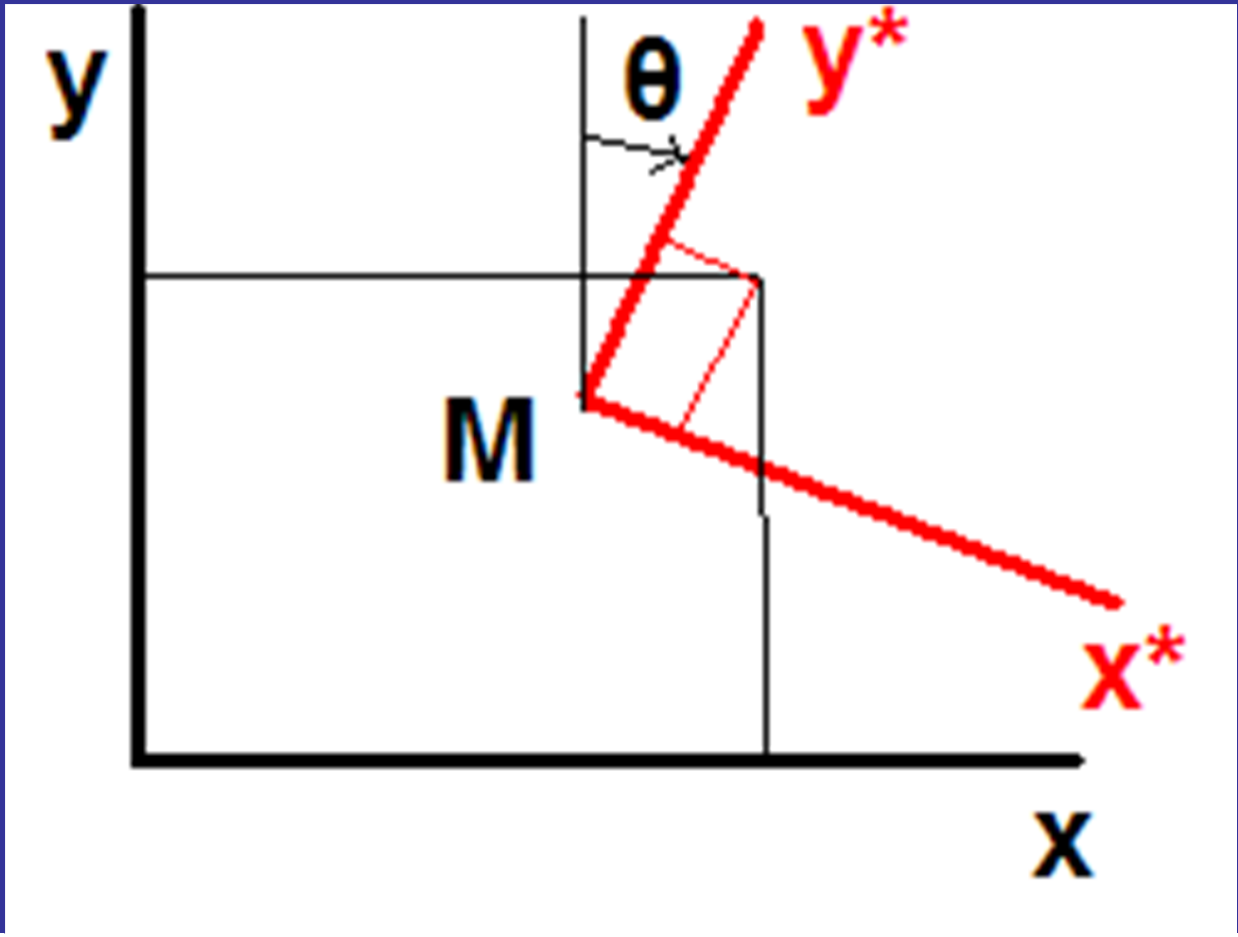
$$\mathbf{y}=A\mathbf{x}$$

όπου A πίνακας σταθερών όρων

Ο Πίνακας v-cov της μεταβλητής **y** δίνεται από τη σχέση

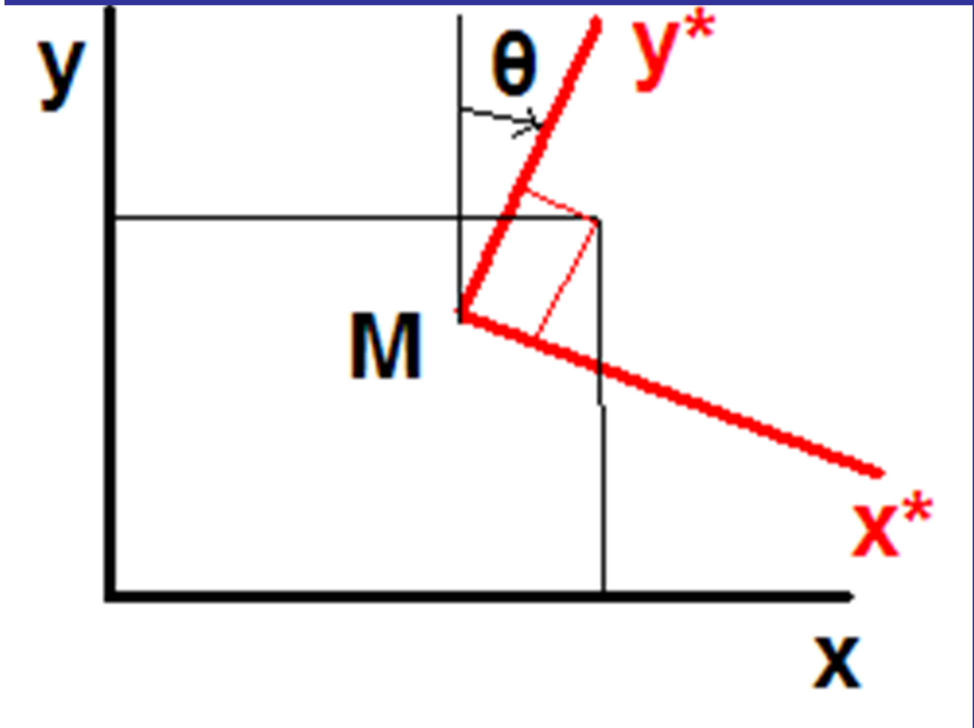
$$\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{A}\ \mathbf{\Sigma}_{xx}\ \mathbf{A}^T$$

Παράδειγμα 1:
μετατροπές συντεταγμένων



Οι νέες συντεταγμένες **X*** συνδέονται με τις παλιές **X** με τη σχέση

$$\mathbf{X^* = RX + x_o}$$ όπου



$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

x_o, y_o
οι συντεταγμένες
του M

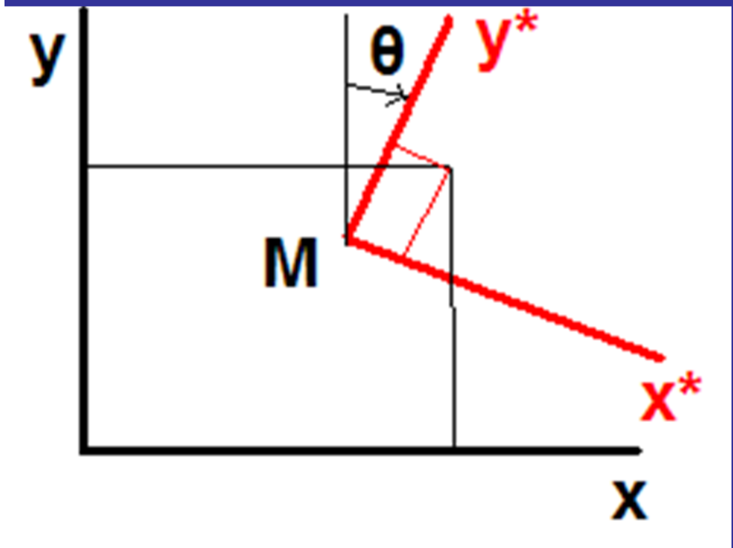
Εφαρμόζοντας τον τύπο

$$\mathbf{\Sigma}_{yy} = \mathbf{A}\,\mathbf{\Sigma}_{xx}\,\mathbf{A}^T$$

στη σχέση $\mathbf{X^*=RX+x}o$

προκύπτει ότι

$$\Sigma_{X^*X^*} = R\,\Sigma_{XX}\,R^T$$



όπου

$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ερώτημα:
Τι κάνουμε αν οι σχέσεις δεν είναι γραμμικές?
Απάντηση:

Το ίδιο πράγμα, όμως αντί για Πίνακα A στη σχέση

$$\Sigma_{yy} = \mathbf{A}\, \Sigma_{xx}\, \mathbf{A}^T$$

χρησιμοποιούμε την Ιακωβιανή J_{yx}, οπότε

$$\boldsymbol{\Sigma_{yy} = J_{yx}\, \Sigma_{xx}\, J_{yx}^T}$$

όπου $\mathbf{J_{yx}}$ είναι η Ιακωβιανή της y ως προς x.

Εστω μια μεταβλητή y διάστασης m που συνδέεται με τη μεταβλητή x διάστασης n με τη μη γραμική σχέση **y=f(x)**

όπου η Ιακωβιανή $\mathbf{J_{yx}}$ της y ως προς x.
είναι της μορφής

$$J_{yx} = \frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Εάν η σχέση γραμμική, J=A

Παράδειγμα 2
Μετατροπή πολικών συντεταγμένων σε καρτεσιανές

x=r sinα

y=r cosα

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial x}{\partial r} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\alpha & \sin\alpha \\ -r\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\Sigma^* = J\ \Sigma\ J^T$$