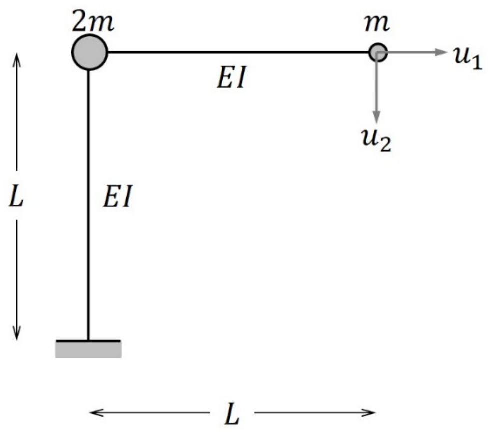
<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> (10 μονάδες):

Για τον εικονιζόμενο φορέα, δίδονται:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.097 & -1.431 \end{bmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\Omega} = \left(\sqrt{\frac{EI}{mL^3}}\right) \cdot \begin{bmatrix} 0.6987 & \\ & 1.874 \end{bmatrix}$$

Θεωρήσατε τον φορέα άνευ αποσβέσεως. Επισης θεωρήσατε οτι παραμορφώσεις λόγω αξονικών και τεμνουσών δυνάμεων ειναι αμελητέες.



(1) Δίδονται οι ακόλουθες δυνάμεις διεγέρσεως του φορέα:

$$\mathbf{p}(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ p_o \end{Bmatrix} \cdot \delta(t)$$

Ποία πρέπει να είναι η τιμή το p_o για να διεγερθεί μόνον η θεμελιώδης ιδιομορφή του φορέα? Θεωρούμε οτι ο φορέας εκκινεί απο την κατάσταση ηρεμίας.

(2) Με την χρήση της ανωτέρω υπολογισθείσας τιμής του p_o, υπολογίσατε την απόκριση του φορέα στο δυναμικό φορτίο $\mathbf{p}(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ p_o \end{Bmatrix} \cdot \delta(t)$. Θεωρούμε οτι ο φορέας εκκινεί απο την κατάσταση ηρεμίας.

(3) **<u>Με την χρήση</u>** της ανωτέρω υπολογισθείσας αποκρίσεως, υπολογίσατε την απόκριση το φορέα στο δυναμικό φορτίο

$$\mathbf{p}(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ p_o \end{Bmatrix} \cdot p(t)$$

όπου, p_o λαμβάνει την τιμή που υπολογίσθηκε στο ερώτημα (1), και

$$p(t) = \begin{cases} 1 & t \leq T_1 \\ 0 & t \geq T_1 \end{cases}$$

όπου T_1 η θεμελιώδης ιδιοπερίοδος του φορέα. Θεωρούμε οτι ο φορέας εκκινεί απο την κατάσταση ηρεμίας.

SOLUTION:

The displacement response $\mathbf{u}(t)$, in terms of its modal components, may be expressed as follows:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}(t) &= \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{\phi}_i q_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{2} \Gamma_i \boldsymbol{\phi}_i D_i(t) \\
&= \Gamma_1 \boldsymbol{\phi}_1 D_1(t) + \Gamma_2 \boldsymbol{\phi}_2 D_2(t) \\
&= \left(\frac{\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{s}}{M_1}\right) \boldsymbol{\phi}_1 D_1(t) + \left(\frac{\boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{s}}{M_2}\right) \boldsymbol{\phi}_2 D_2(t) \\
&= \left(\frac{L_1}{M_1}\right) \boldsymbol{\phi}_1 D_1(t) + \left(\frac{L_2}{M_2}\right) \boldsymbol{\phi}_2 D_2(t)
\end{aligned}
$$

In order for the given dynamic load $\mathbf{p}(t) = \begin{Bmatrix} 1 \\ p_o \end{Bmatrix} \cdot p(t) = \mathbf{s} \cdot p(t)$ to excite only the 1st mode, the **participation factor** Γ_2 **<u>must be zero</u>**, or equivalently, $L_2 = \boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{s} = 0$. Therefore,

$$
\begin{aligned}
L_2 &= \boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{s} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1.431 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ p_o \end{Bmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

It follows that: $\boxed{p_o = \frac{1}{1.431} = 0.6988}$.

For the above value of p_o, the response of structure to the given load is contained entirely in the 1st mode, *i.e.*

$$
\mathbf{u}(t) = \left(\frac{\boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{s}}{M_1}\right) \boldsymbol{\phi}_1 D_1(t) + \underbrace{\left(\frac{\boldsymbol{\phi}_2^T \mathbf{s}}{M_2}\right) \boldsymbol{\phi}_2 D_2(t)}_{0}
$$

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 1 & 2.097 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.6988 \end{Bmatrix} = 2.4654 \\
M_1 &= \boldsymbol{\phi}_1^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2.097 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3m & \\ & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2.097 \end{Bmatrix} = 7.397m
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\ddot{D}_1(t) + \omega_1^2 D_1(t) = \delta(t) \quad , \quad D_1(t=0) = 0 \quad \& \quad \dot{D}_1(t=0) = 0
$$

It follows that:

$$
D_1(t) = \frac{1}{\omega_1} \cdot \sin(\omega_1 t)
$$

Therefore:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= \left(\frac{2.4654}{7.397m}\right)\cdot\begin{Bmatrix}1\\2.097\end{Bmatrix}\cdot\frac{1}{\omega_1}\cdot\sin(\omega_1 t)\\ &= 0.3333\cdot\begin{Bmatrix}1\\2.097\end{Bmatrix}\cdot\frac{1}{m\omega_1}\cdot\sin(\omega_1 t)\end{aligned}$$

In order to compute the response of the structure to the given loading $\mathbf{p}(t)=\begin{Bmatrix}1\\p_o\end{Bmatrix}\cdot p(t)$, where $p(t)$ is a rectangular pulse of unit amplitude and duration equal to T_1, we reason as follows:

$$\begin{array}{ccc} EXCITATION & & RESPONSE\\ \begin{Bmatrix}1\\p_o\end{Bmatrix}\cdot\delta(t) & \rightarrow\boxed{STRUCTURE}\rightarrow & \mathbf{u}(t)=\left(\frac{L_1}{M_1}\right)\boldsymbol{\phi}_1 D_1(t)\\ \begin{Bmatrix}1\\p_o\end{Bmatrix}\cdot\delta(t)*p(t) & \rightarrow\boxed{STRUCTURE}\rightarrow & \mathbf{u}(t)=\left(\frac{L_1}{M_1}\right)\boldsymbol{\phi}_1 D_1(t)*p(t)\\ \begin{Bmatrix}1\\p_o\end{Bmatrix}\cdot p(t) & \rightarrow\boxed{STRUCTURE}\rightarrow & \mathbf{u}(t)=\left(\frac{L_1}{M_1}\right)\boldsymbol{\phi}_1 D_1(t)*p(t)\end{array}$$

Recall that '$*$' represents convolution. Therefore, we need to evaluate the convolution $D_1(t)*p(t)$ (see class notes):

$$\boxed{\begin{aligned}D_1(t)*p(t) &= \begin{cases}\int_0^t \frac{1}{\omega_1}\cdot\sin[\omega_1(t-\tau)]\cdot p(\tau)\,d\tau & t\le T_1\\ \int_0^{T_1}\frac{1}{\omega_1}\cdot\sin[\omega_1(t-\tau)]\cdot p(\tau)\,d\tau & t\ge T_1\end{cases}\\ &= \begin{cases}\frac{1}{\omega_1^2}\cdot[1-\cos(\omega_1 t)] & t\le T_1\\ \frac{1}{\omega_1^2}\cdot\left[\cos\left(\omega_1(t-T_1)\right)-\cos(\omega_1 t)\right] & t\ge T_1\end{cases}\end{aligned}}$$

Details of the evaluation of the convolution integrals:

$$\begin{aligned}\int_0^t\frac{1}{\omega_1}\cdot\sin[\omega_1(t-\tau)]\,p(\tau)\,d\tau &= \frac{1}{\omega_1}\cdot\int_0^t\sin[\omega_1(t-\tau)]\cdot 1\,d\tau \overset{\xi=t-\tau}{\triangleq} \frac{1}{\omega_1}\cdot\int_t^0\sin[\omega_1\xi]\;(-d\xi)\\ &= \frac{1}{\omega_1}\cdot\int_0^t\sin[\omega_1\xi]\;d\xi \overset{\zeta=\omega_1\xi}{\triangleq} \frac{1}{\omega_1^2}\cdot\int_0^{\omega_1 t}\sin\zeta\;d\zeta\\ &= \frac{1}{\omega_1^2}\cdot(-\cos\zeta)|_0^{\omega_1 t} = \frac{1}{\omega_1^2}\cdot[1-\cos(\omega_1 t)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{T_1}\frac{1}{\omega_1}\cdot\sin[\omega_1(t-\tau)]\,p(\tau)\,d\tau &= \frac{1}{\omega_1}\cdot\int_0^{T_1}\sin[\omega_1(t-\tau)]\cdot 1\,d\tau \overset{\xi=t-\tau}{\triangleq} -\frac{1}{\omega_1}\cdot\int_t^{t-T_1}\sin[\omega_1\xi]\;d\xi\\ &= \frac{1}{\omega_1}\cdot\frac{\cos(\omega_1\xi)}{\omega_1}\bigg|_t^{t-T_1} = \frac{1}{\omega_1^2}\cdot\left[\cos\left(\omega_1(t-T_1)\right)-\cos(\omega_1 t)\right]\end{aligned}$$