

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΑΣΕΩΝ - ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΩΝ, ΛΕΠΤΟΤΟΙΧΙΑ ΚΕΛΥΦΗ

- Εντατική κατάσταση σε δομικά στοιχεία λόγω φόρτισης (διαμητικές τάσεις και παραμορφώσεις)
- Γενικοί μαθηματικοί ορισμοί για τις και διαμητικών παραμορφώσεων
- Ο γενικευμένος νόμος του Hooke για τη σχέση τάσεων – παραμορφώσεων στην τρισδιάστατη εντατική κατάσταση
- Εξισώσεις για τις περιπτώσεις καταπόνησης κελυφών μικρο ή μεγάλου πάχους

1

γ σε rad

$\sigma = 0 \Rightarrow$ Καθαρή διάτμηση

2

Νόμος του Hooke για την περίπτωση διάτμησης

$\tau = G\gamma$

$\sigma = E\varepsilon$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ (για υλικό με ν)

γραμμικά ελαστικά υλικά !!!

3

Ελαστομερικό εφέδρανο

καυσιούκος $G = 0.7 \text{ MPa}$

$F = k_s \Delta$

απόλυτα δύσκαμπτες μεταλλικές πλάκες

$\gamma \ll \Rightarrow \tan \gamma \approx \gamma \Rightarrow \gamma = \Delta / t$

$\tau = G\gamma = G\Delta / t$

$\tau = \frac{F}{A} = \frac{F}{ab} \Rightarrow F = \tau ab$

$\Rightarrow F = G \Delta ab / t = k_s \Delta$

$k_s = \frac{G ab}{t} = 700 \text{ N/mm}$

Δυστένεια $k = \frac{AE}{L}$

4

Ελαστική ενέργεια παραμόρφωσης σε διαμητική καταπόνηση

$\gamma \ll \Rightarrow \tan \gamma \approx \gamma \Rightarrow \frac{du_x}{dy} = \gamma$

$\Rightarrow du_x = \gamma dy$

ΕΡΓΟ = ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΣ ΠΡΟΚΑΛΟΥΜΕΝΗ ΜΕΤΑΚΙΝΗΣΗ

τάση \times επιφάνεια \times μετακίνηση

Μέση δύναμη = $(1/2)\tau dx dz$

Μετακίνηση = γdy

Παραγόμενο έργο = $(1/2)\tau dx dz \times \gamma dy = \frac{1}{2} \tau \gamma dx dy dz = \frac{1}{2} \tau \gamma dV = dU_s$

$U_s = \int \frac{\tau^2}{2G} dV$ ενέργεια διαμητικής παραμόρφωσης

$\frac{dU_s}{dV} = \frac{\tau \gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G}$ ειδική ενέργεια διαμητικής παραμόρφωσης (ή πηλοότητα αν έρθε ως διαμητικής παραμόρφωσης)

5

Μαθηματικός ορισμός της παραμόρφωσης και ταυτής παραμορφώσεων

$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$

$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$

$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$

$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$

6

Ο τανυστής των παραμορφώσεων

Ορθές παραμορφώσεις

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Διαμορφώσεις

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Επιπέδη παραμόρφωση

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & 0 \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

1η βασική εξίσωση: $\sigma_x = E \epsilon_x + \nu E (\epsilon_y + \epsilon_z)$
2η βασική εξίσωση: $\sigma_y = \nu E \epsilon_x + E \epsilon_y + \nu E \epsilon_z$
3η βασική εξίσωση: $\sigma_z = \nu E \epsilon_x + \nu E \epsilon_y + E \epsilon_z$

7

Γενικευμένη μορφή του νόμου του Hooke για την γενική τρισδιάστατη εντατική και παραμορφωσιακή κατάσταση

Γραμμικά ελαστικά υλικά!!!

Αρχικό σχήμα (α)

Τελικό σχήμα (β)

Τελικό σχήμα (γ)

Τελικό σχήμα (δ)

αρχή της επαλληλίας: $\epsilon_x = \epsilon'_x + \epsilon''_x + \epsilon'''_x$ $\epsilon_y = \epsilon'_y + \epsilon''_y + \epsilon'''_y$ $\epsilon_z = \epsilon'_z + \epsilon''_z + \epsilon'''_z$

8

σταθερές του Lamé (χαρακτηριστικά του υλικού)

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Εξισώσεις:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix}$$

9

Θερμοκρασιακή Μεταβολή ΔΤ

Εξισώσεις:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ισότητες Υλικά: E, G, ν ανεξάρτητα από διεύθυνση

10

Επίπεδη εντατική κατάσταση

Διαγράμματα εντάσεων και παραμορφώσεων

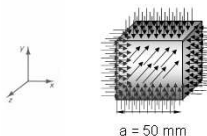
11

Επίπεδη εντατική κατάσταση

Επίπεδη παραμόρφωση

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau & 0 \\ \tau & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & 0 \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{pmatrix}$$

12



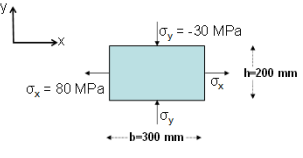
$E = 200 \text{ GPa}$
 $\nu = 0.25$
 $|\rho| = 200 \text{ M}^{-1}$
 $a = 50 \text{ mm}$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} \quad \epsilon_x = \frac{(-200)}{200 \times 10^3} - 0.25 \frac{(-200)}{200 \times 10^3} = -5 \times 10^{-4}$$

$$\Delta x = \epsilon_x \cdot l = -5 \times 10^{-4} \times 50 = -0.025 \text{ mm (βράχυνση)}$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z \quad \Delta x = \Delta y = \Delta z$$

13



$E = 210 \text{ GPa}$
 $\nu = 0.28$
 $\Delta b = ?$
 $\Delta h = ?$

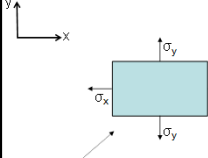
$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{210000} (80 - 0.28(-30)) = 4.2 \times 10^{-4}$$

$$\epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{210000} (-0.28 \times 80 + (-30)) = -2.5 \times 10^{-4}$$

$$\Delta b = \epsilon_x \times b = 4.2 \times 10^{-4} \times 300 = 0.126 \text{ mm}$$

$$\Delta h = \epsilon_y \times h = -2.5 \times 10^{-4} \times 200 = -0.05 \text{ mm}$$

14



Διαζωνικός εφελκυσμός
 $\frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = ?$
 $\frac{\sigma_y}{\epsilon_y} = ?$

Παραμόρφωση εγκάρσιας παραμόρφωσης (δηλ. κατά τη διεύθυνση y)

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$


$$-\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = 0 \Leftrightarrow \sigma_y = \nu \sigma_x$$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} (1 - \nu^2) \Leftrightarrow \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{E}{(1 - \nu^2)}$$

$$\frac{\sigma_y}{\epsilon_y} = \frac{E}{(1 - \nu^2)}$$

$$\frac{\sigma_z}{\epsilon_z} = \frac{E}{(1 - \nu^2)}$$

15



Σχέσεις μεταξύ των σταθερών E, G και ν
 $dA = \sqrt{2} a \times dz = \sqrt{2} dA$
 $dA = a \times dz$

καθαρή διάτμηση

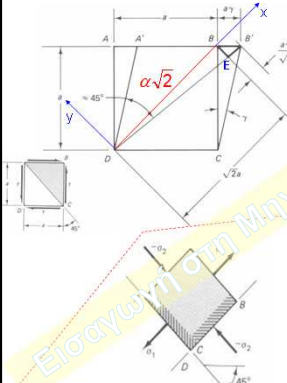
Ισορροπία $\sum \sigma_1 = \sum \sigma_2 = \tau$

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = \tau \Rightarrow \sigma_1 = \tau$$

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau$$

! περίπτωση καθαρής διάτμησης **ισοδυναμεί** με ίσες εφελκυστικές και θλιπτικές τάσεις υπό γωνία 45° ως προς τη διεύθυνση των διατμητικών τάσεων

16



$\sin \gamma \approx \tan \gamma \approx \gamma$
 $\cos \gamma \approx 1$
 $2x^2 = (a\gamma)^2 \Rightarrow x = \frac{a\gamma}{\sqrt{2}} = \frac{a\gamma}{2}$
 $\epsilon_{45^\circ} = \frac{x}{a\sqrt{2}} = \frac{\gamma}{2} \Rightarrow \epsilon_{45^\circ} = \frac{\tau}{2G}$

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E}$$

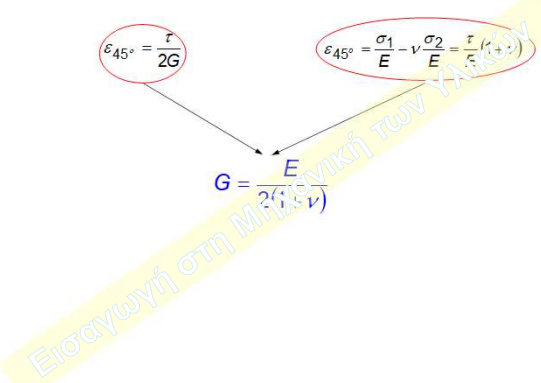
$$\sigma_x = \sigma_1 = \tau$$

$$\sigma_y = \sigma_2 = -\tau$$

$$\sigma_z = 0$$

$$\epsilon_{45^\circ} = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau}{E} (1 + \nu)$$

17



$\epsilon_{45^\circ} = \frac{\tau}{2G}$
 $\epsilon_{45^\circ} = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau}{E} (1 + \nu)$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

18