ότι υπάρχει μία μόνο ρίζα. Οι μέθοδοι αυτοί δημιουργούν μια ακολουθία υποδιαστημάτων του αρχικού μικρότερου πλάτους στα οποία περιέχεται η ρίζα. Η διαδικασία αυτή κιβωτισμού μάς οδηγεί στον προσδιορισμό της προσέγγισης της ρίζας.

4.1.1 Μέθοδος Διχοτόμησης

Η πιο απλή αντιπρόσωπος αυτής της κατηγορίας προσεγγιστικών διαδικασιών, είναι η *μέθοδος της Διχοτόμησης*. Θεωρούμε ότι εργαζόμαστε σε ένα διάστημα όπου υπάρχει μία μόνο ρίζα. Η μέθοδος Διχοτόμησης συνδυάζει τον αλγόριθμο της δυαδικής αναζήτησης με το Θεώρημα Bolzano. Στην k επανάληψή της ($k = 1, 2, 3, \ldots$) η μέθοδος θεωρεί ένα διάστημα $[\alpha_k, \beta_k]$ και υπολογίζει το μέσο του

$$x_k = \frac{\alpha_k + \beta_k}{2}.$$

Εάν $f(x_k) = 0$, το μέσο είναι η ρίζα. Εάν δεν ισχύει αυτή και ισχύει ότι $f(\alpha_k) \cdot f(x_k) < 0$, η ρίζα θα βρίσκεται στο διάστημα $[\alpha_k, x_k]$ διαφορετικά η ρίζα θα βρίσκεται στο διάστημα $[x_k, \beta_k]$. Το ακόλουθο θεώρημα μας εξασφαλίζει τη σύγκλιση της μεθόδου.

Θεώρημα 4.1.1 (Θεώρημα Διχοτόμησης) *Θεωρούμε μια συνάρτηση $f \in C[\alpha, \beta]$ για την οποία υπάρχει αριθμός $r \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(r) = 0$. Εάν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ και συμβολίσουμε $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ την ακολουθία των μέσων των διαστημάτων που παράγει η μέθοδος της Διχοτόμησης, τότε ισχύει*

$$|r - x_k| \leq \frac{\beta - \alpha}{2^k} \tag{4.2}$$

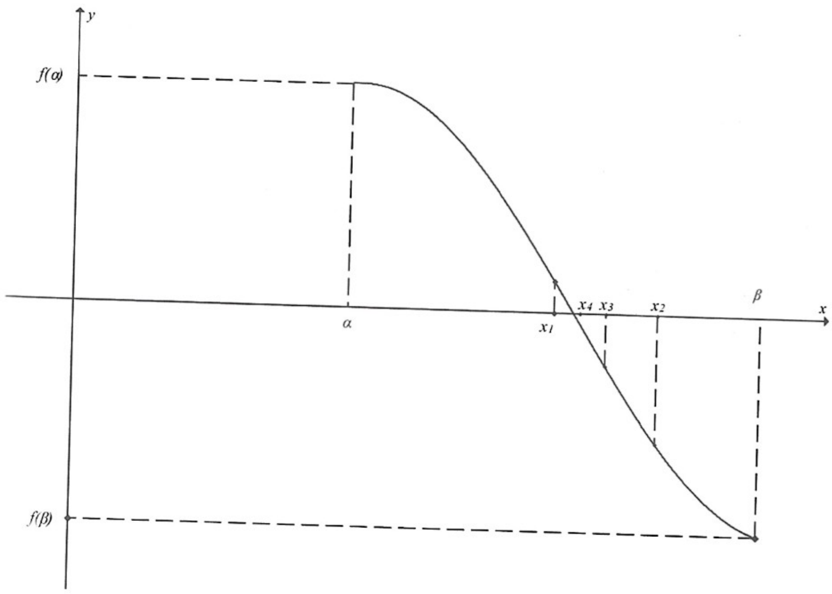
για $k = 1, 2, 3, \ldots$ και η ακολουθία συγκλίνει στη ρίζα

$$\lim_{k \to \infty} x_k = r.$$

Εφόσον ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του Θεωρήματος Διχοτόμησης, η σύγκλιση της μεθόδου είναι εξασφαλισμένη από τον τρόπο λειτουργίας της. Επίσης, από τη Σχέση 4.2 συμπεραίνουμε ότι μια απαιτούμενη ανοχή tol επιτυγχάνεται όταν $\frac{\beta-\alpha}{2^k} \leq tol$ από όπου έχουμε τον απαιτούμενο ελάχιστο αριθμό επαναλήψεων για να διακοπεί η διαδικασία

$$k \geq \log_2\left(\frac{\beta - \alpha}{tol}\right).$$

Σχηματικά η διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχήμα **4.2**



Σχήμα 4.2: Μέθοδος Διχοτόμησης.

Τα βήματα της μεθόδου περιγράφονται στον ακόλουθο αλγόριθμο:

Αλγόριθμος 4.1.1 ***Εφαρμογή μεθόδου Διχοτόμησης***

$a = \alpha,\ b = \beta$
$x = (a + b)/2$
while *Όσο δεν ικανοποιείται κάποιο από τα κριτήρια διακοπής* ***do***
    if $f(x) = 0$ ***then***
        Η ρίζα είναι το x
    else if $f(a) \cdot f(x) < 0$ ***then***
        $b = x$
        $x = (a + b)/2$
    else
        $a = x$
        $x = (a + b)/2$
    end if
end while
if *Έχει ξεπεραστεί ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων,* ***then***
    η διαδικασία δεν συγκλίνει μετά από τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων.

else

το x αποτελεί την προσέγγιση της ρίζας.

end if

Παράδειγμα 4.1.1 *Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο διχοτόμησης για την εύρεση της ρίζας της εξίσωσης $f(x) = x^2 - 3 = 0$ όταν το $x \in [1, 2]$ με τιμή της παραμέτρου ανοχής $tol = 0.03$ και κριτήριο διακοπής αυτό της επακρίβειας να γίνει μικρότερη από την παράμετρο ανοχής. Είναι φανερό ότι η ρίζα είναι η $\sqrt{3}$.*

Βήμα 1 *Θέτουμε $\alpha_1 = 1$ και $\beta_1 = 2$ για τα οποία ισχύει $f(1) = -2 < 0$ και $f(2) = 1 > 0$.*
Υπολογίζουμε το $x_1 = (1+2)/2 = 1.5$ και $f(x_1) = -0.75$.

Βήμα 2 *Αφού $f(x_1) \cdot f(\alpha_1) > 0$, θέτουμε $\alpha_2 = x_1 = 1.5$ και $\beta_2 = 2$.*
Υπολογίζουμε $x_2 = (1.5+2)/2 = 1.75$ και $f(x_2) = 0.625$.
Εφόσον $|x_2 - x_1| = 0.25 > tol = 0.03$, η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 3 *Αφού $f(x_2) \cdot f(\alpha_2) < 0$, θέτουμε $\alpha_3 = 1.5$ και $\beta_3 = x_2 = 1.75$.*
Υπολογίζουμε $x_3 = (1.5+1.75)/2 = 1.625$ και $f(x_3) = -0.3594$.
Εφόσον $|x_3 - x_2| = 0.125 > tol$, η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 4 *Αφού $f(x_3) \cdot f(\alpha_3) > 0$, θέτουμε $\alpha_4 = x_3 = 1.625$ και $\beta_4 = 1.75$.*
Υπολογίζουμε $x_4 = (1.625+1.75)/2 = 1.6875$ και $f(x_4) = -0.1523$.
Εφόσον $|x_4 - x_3| = 0.0625 > tol$, η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 5 *Αφού $f(x_4) \cdot f(\alpha_4) > 0$, θέτουμε $\alpha_5 = x_4 = 1.6875$ και $\beta_5 = 1.75$.*
Υπολογίζουμε $x_5 = (1.6875+1.75)/2 = 1.71875$ και $f(x_5) = -0.0459$.
Εφόσον $|x_5 - x_4| = 0.0313 > tol$, η διαδικασία συνεχίζεται.

Βήμα 6 *Αφού $f(x_5) \cdot f(\alpha_5) > 0$, θέτουμε $\alpha_6 = x_5 = 1.71875$ και $\beta_5 = 1.75$.*
Υπολογίζουμε $x_6 = (1.71875+1.75)/2 = 1.7344$ και $f(x_6) = 0.0081$.
Εφόσον $|x_6 - x_5| = 0.0157 < tol = 0.03$, η διαδικασία διακόπτεται.

Η προσεγγιστική τιμή της ρίζας 1.7344 είναι μια ικανοποιητική (με βάση τα κριτήρια διακοπής) προσέγγιση της άγνωστης τιμής $\sqrt{3} \approx 1.73205$. Σημειώνουμε ότι ελάχιστος αριθμός επαναλήψεων είναι

$$k \geq \log_2\left(\frac{\beta - \alpha}{TOL}\right) = \log_2\left(\frac{2-1}{0.03}\right) \approx 5.0589,$$

κάτι που επιβεβαιώνεται από την εφαρμογή της μεθόδου. Την όλη διαδικασία μπορούμε να τη δούμε πιο παραστατικά στον ακόλουθο πίνακα.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$	$?\,tol$	$f(x_k)\cdot f(a_k)$
1	1	2	−2	1	1.5	−0.75			+
2	1.5	2	−0.75	1	1.75	0.0625	0.25	>	−
3	1.5	1.75	−0.75	0.0625	1.625	−0.3594	0.125	>	+
4	1.625	1.75	−0.3594	0.0625	1.6875	−0.1523	0.0625	>	+
5	1.6875	1.75	−0.1523	0.0625	1.7188	−0.0459	0.0313	>	+
6	1.7188	1.75	−0.0459	0.0625	1.7344	0.0081	0.0157	<	

◇

4.1.2 Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης (Regula-Falsi)

Η μέθοδος *Regula-Falsi* μπορεί να θεωρηθεί ως παραλλαγή της μεθόδου Διχοτόμησης. Στη μέθοδο της Διχοτόμησης, χωρίζοντας το διάστημα της ρίζας $[\alpha_k\,,\,\beta_k]$ σε δύο υποδιαστήματα, δεν λαμβάνεται καθόλου υπόψη το μέγεθος των ποσοτήτων $f(\alpha_k)$, $f(\beta_k)$. Έτσι, αν η ποσότητα $f(\alpha_k)$ είναι πολύ πιο κοντά στο μηδέν από την ποσότητα $f(\beta_k)$, είναι πολύ πιθανόν η ρίζα να είναι πλησιέστερα στο α_k από ότι το β_k. Μια εναλλακτική μέθοδος, η οποία λαμβάνει υπόψη της αυτό το δεδομένο, είναι να ενώσουμε τα σημεία $(\alpha_k\,,\,f(\alpha_k))$ και $(\beta_k\,,\,f(\beta_k))$ με μια ευθεία γραμμή (δείτε το Σχήμα **4.3**).

Η τομή της ευθείας αυτής με τον άξονα Ox, ορίζει μια βελτιωμένη τιμή x_kτης νέας προσέγγιση ρίζας. Η αφετηρία για το όνομα της μεθόδου έγκειται στο γεγονός ότι η αντικατάσταση της καμπύλης με μια ευθεία γραμμή δίνει μια «εσφαλμένη θέση» της ρίζας. Από τα όμοια τρίγωνα που ορίζονται, και λαμβάνοντας υπόψη το πρόσημο των ποσοτήτων, έχουμε την αναλογία:

$$\frac{f(\alpha_k)}{x_k - \alpha_k} = \frac{-f(\beta_k)}{\beta_k - x_k}$$

από την οποία εύκολα προκύπτει η σχέση

$$x_k = \beta_k - \frac{f(\beta_k)\,(\beta_k - \alpha_k)}{f(\beta_k) - f(\alpha_k)}.$$

Η τιμή x_k η οποία ορίζεται από τον παραπάνω τύπο (ανάλογα με τον τρόπο που γίνεται στη μέθοδο Διχοτόμησης) αντικαθιστά μία από τις τιμές α_k ή β_k, ανάλογα με το αν ισχύει η σχέση εγκλεισμού

$$f(x_k)\cdot f(\beta_k) < 0 \ \text{ ή } f(x_k)\cdot f(\alpha_k) < 0$$

αντίστοιχα. Μπορεί να αποδειχτεί ότι η μέθοδος αυτή συγκλίνει πάντα. Τα κριτήρια διακοπής της επαναληπτικής διαδικασίας είναι τα ίδια με αυτά που εφαρμόζο-

4.2.2 Επιταχύνοντας τη Σύγκλιση

Το να επιτευχθεί τετραγωνική ή ταχύτερη σύγκλιση δεν είναι κάτι συνηθισμένο. Για αυτό έχουν αναπτυχθεί μεθοδολογίες με τις οποίες από μια επαναληπτική προσέγγιση μπορούμε να επιτύχουμε πιο γρήγορες προσεγγίσεις. Η μέθοδος του Aitken Δ^2 είναι μια από αυτές. Θεωρούμε ότι έχουμε μία προσεγγιστική λύση x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ που συγκλίνει στη λύση. Τότε η ακολουθία

$$\hat{x}_k = x_k - \frac{(\Delta x_k)^2}{\Delta^2 x_k} = x_k - \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{x_{k+2} - 2x_{k+1} + x_k}$$

συγκλίνει ταχύτερα στη ρίζα. Η μέθοδος του Aitken Δ^2 βελτιώνει τη σύγκλιση των γραμμικά συγκλινουσών διαδικασιών και την κάνει τετραγωνική.

Παράδειγμα 4.2.3 *Στον ακόλουθο πίνακα εμφανίζουμε τα αποτελέσματα της επιτά-χυνσης για το Παράδειγμα 4.2.2.*

k	x_k	$\lvert x_k - \rho \rvert$	$\hat{x}_k$	$\lvert \hat{x}_k - \rho \rvert$
0	0.500000000000000	0.242372346950263	0.258946959864664	0.001319306814928
1	0.202176886570878	0.055450766478859	0.257711873703233	0.000084220653497
2	0.272316802534861	0.014689149485124	0.257633290921260	0.000005637871523
3	0.253870980652002	0.003756672397735	0.257628026390230	0.000000373340493
4	0.258597295917794	0.000969642868057	0.257627677843575	0.000000024793838
5	0.257377967305906	0.000249685743831	0.257627654695105	0.000000001645368
6	0.257691987033225	0.000064333983488	0.257627653158947	0.000000000109211
7	0.257611079369690	0.000016573680046	0.257627653056985	0.000000000007248
8	0.257631922923413	0.000004269873676	0.257627653050218	0.000000000000481
9	0.257626553014551	0.000001100035186	0.257627653049769	0.000000000000032
10	0.257627936449376	0.000000283399639	0.257627653049739	0.000000000000002
11	0.257627580038163	0.000000073011574	0.257627653049737	0
12	0.257627671859538	0.000000018809801	0.257627653049737	0
13	0.257627648203812	0.000000004845925	0.257627653049737	0
14	0.257627654298181	0.000000001248444		
15	0.257627652728103	0.000000000321634		

4.2.3 Η μέθοδος Newton και οι παραλλαγές της

Η *μέθοδος Newton* είναι μια από τις πιο ικανές και δημοφιλείς επαναληπτικές μεθό-δους για την προσέγγιση μιας ρίζας της εξίσωσης $f(x) = 0$. Γενικά, αν x_k είναι τρέχουσα προσέγγιση, τότε η επόμενη προσέγγιση δίνεται από τον επαναληπτικό τύπο:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad \text{όπου} \quad x_0 \text{ δοθέν}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Η σύγκλιση της επαναληπτικής αυτής διαδικασίας μάς εξασφαλίζεται από το ακό-λουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.4 *Εάν $f \in C^2[\alpha,\beta]$ και υπάρχει $p \in [\alpha,\beta]$ έτσι ώστε $f(p) = 0$ και $f'(p) \neq 0$, τότε υπάρχει $\delta \geq 0$ ώστε η μέθοδος Newton να συγκλίνει για κάθε αρχική προσέγγιση $x_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.* ◇

Η Newton προκύπτει από το ανάπτυγμα Taylor 1ης τάξης με κέντρο ένα σημείο $\widehat{x}$ το οποίο ισούται με

$$f(x) = f(\widehat{x}) + \frac{f'(\widehat{x})}{1!}(x-\widehat{x}) + \frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-\widehat{x})^2,$$

όπου $\xi(x) \in [x,\widehat{x}]$. Εάν το $\widehat{x}$ είναι μια προσέγγιση της ρίζας p κοντά σε αυτή για το οποίο $f'(\widehat{x}) \neq 0$, τότε

$$0 = f(p) = f(\widehat{x}) + \frac{f'(\widehat{x})}{1!}(p-\widehat{x}) + \frac{f''(\xi(p))}{2!}(p-\widehat{x})^2.$$

Αποκόπτοντας τον όρο του σφάλματος έχουμε την προσέγγιση

$$0 \approx f(\widehat{x}) + \frac{f'(\widehat{x})}{1!}(p-\widehat{x})$$

και λύνοντας ως προς p έχουμε

$$p \approx \widehat{x} - \frac{f(\widehat{x})}{f'(\widehat{x})}.$$

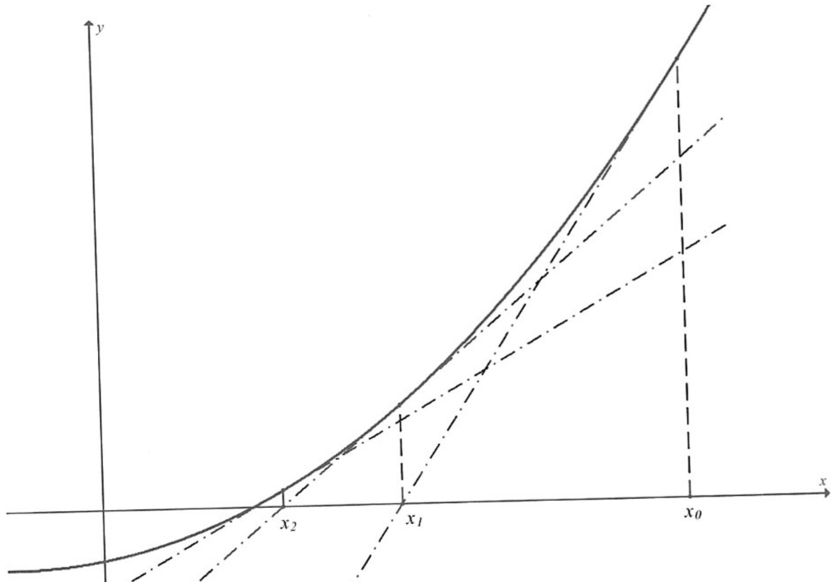
Το Σχήμα **4.9** δείχνει μια γεωμετρική εικόνα της επαναληπτικής διαδικασίας την οποία ορίζει η μέθοδος.

Τα κριτήρια διακοπής της επαναληπτικής διαδικασίας είναι τα ίδια με αυτά που αναφέραμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Τα βήματα της μεθόδου Newton περιγράφονται στον ακόλουθο αλγόριθμο.

Αλγόριθμος 4.2.1 ***Εφαρμογή μεθόδου Newton***

Θέσε τιμή στο x_0
while *Όσο δεν ικανοποιείται κάποιο από τα κριτήρια διακοπής* ***do***
  $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
end while
if *Έχει ξεπεραστεί ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων,* ***then***
  η διαδικασία δεν συγκλίνει μετά από τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων.
else
  το x_{k+1} αποτελεί την προσέγγισης της ρίζας.
end if

◇



Σχήμα 4.9: Σύγκλιση επαναληπτικής μεθόδου Newton.

Παράδειγμα 4.2.4 *Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Newton για την εύρεση της ρίζας της εξίσωσης* $f(x) = 4x^2 - 3 = 0$ *παίρνοντας ως αρχική τιμή* $x_0 = 0.5$ *και έχοντας ως κριτήριο διακοπής η επακρίβεια να είναι μικρότερη από την παράμετρο ανοχής* $tol = 10^{-4}$. *Είναι φανερό ότι η ρίζα είναι η* $\sqrt{3}/2 = 0.8660254\ldots$ *Η επαναληπτική διαδικασία είναι η ακόλουθη:*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{4x_k^2 - 3}{8x_k} = \frac{4x_k^2 + 3}{8x_k}.$$

Βήμα 1 *Υπολογίζουμε*

$$x_1 = \frac{4 \cdot x_0^2 + 3}{8 \cdot x_0} = \frac{4 \cdot 0.5^2 + 3}{8 \cdot 0.5} = 1.$$

Εφόσον $|x_1 - x_0| = |1 - 0.5| = 0.5 > tol = 0.0001$, *η διαδικασία συνεχίζεται.*

Βήμα 2 *Υπολογίζουμε*

$$x_2 = \frac{4 \cdot x_1^2 + 3}{8 \cdot x_1} = \frac{4 \cdot 1^2 + 3}{8 \cdot 1} = 0.875.$$

Εφόσον $|x_2 - x_1| = |0.875 - 1| = 0.125 > tol = 0.0001$, *η διαδικασία συνεχίζεται.*

Βήμα 3 *Υπολογίζουμε*

$$x_3 = \frac{4 \cdot x_2^2 + 3}{8 \cdot x_2} = \frac{4 \cdot 0.875^2 + 3}{8 \cdot 0.875} = 0.866071.$$

Εφόσον $|x_3 - x_2| = |0.866071 - 0.875| = 0.008928 > tol = 0.0001$, *η διαδικασία συνεχίζεται.*

Βήμα 4 *Υπολογίζουμε*

$$x_4 = \frac{4 \cdot x_3^2 + 3}{8 \cdot x_3} = \frac{4 \cdot 0.866071^2 + 3}{8 \cdot 0.866071} = 0.866025.$$

Εφόσον $|x_4 - x_3| = |0.866025 - 0.866071| = 0.000046 < tol = 0.0001$, *η διαδικασία διακόπτεται.*

Η προσεγγιστική τιμή της ρίζας 0.866025 *επιτεύχθηκε σε μόλις τέσσερις επαναλήψεις με βάση την παράμετρο ανοχής που έχουμε θεωρήσει. Την όλη διαδικασία μπορούμε να τη δούμε πιο παραστατικά στον ακόλουθο πίνακα.*

k	x_k	$\|x_k - x_{k-1}\|$	? tol
0	0.5		
1	1	0.5	>
2	0.875	0.125	>
3	0.866071	0.008928	>
4	0.866025	0.000046	<

◇

Ο προσδιορισμός της αρχικής προσέγγισης x_0 μπορεί να γίνει με γραφικά. Για τον γραφικό εντοπισμό της αρχικής προσέγγισης συνήθως η εξίσωση $f(x) = 0$ μετασχηματίζεται στην ισοδύναμη $f_1(x) = f_2(x)$. Κατασκευάζουμε τις γραφικές παραστάσεις των f_1 , f_2 και αν τέμνονται, τότε η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες οι οποίες καθορίζονται από τις προβολές των τομών στον άξονα Ox. Επίσης, είναι συνηθισμένη τακτική, πριν εφαρμοστεί η μέθοδος Newton, να υπολογίζουμε προσεγγίσεις της ρίζας με κάποιον αλγόριθμο ο οποίος συγκλίνει για κάθε αρχική προσέγγιση, όπως π.χ. η μέθοδος της Διχοτόμησης. Έτσι, η μέθοδος Newton συνήθως χρησιμοποιείται στην πράξη σαν μια γρήγορα συγκλίνουσα τελική διαδικασία που τερματίζει έναν άλλο πιο αργό αλλά πιο ασφαλή αλγόριθμο. Ο τερματισμός της επαναληπτικής διαδικασίας μπορεί να στηριχτεί στα κριτήρια που αναφέραμε στην Εισαγωγή του κεφαλαίου.

Η μέθοδος Newton έχει *τετραγωνική σύγκλιση* (δηλαδή $q = 2$) εάν $f'(p) \neq 0$. Δηλαδή, υπάρχει αριθμός $K > 0$ τέτοιος ώστε

$$\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - p|}{|x_k - p|^2} = K.$$

Παράδειγμα 4.2.5 *Επιστρέφουμε στο Παράδειγμα 4.2.4 για να διαπιστώσουμε το γεγονός ότι η σύγκλιση στη Newton είναι τετραγωνική. Δεδομένου ότι η συγκεκριμένη εξίσωση έχει ρίζα ($p = \frac{\sqrt{3}}{2}$), μπορούμε να υπολογίσουμε σε κάθε βήμα το πηλίκο*

$$\frac{|x_{k+1} - p|}{|x_k - p|^2}.$$

Αρχικά υπολογίζουμε τα απόλυτα σφάλματα σε κάθε βήμα

$$\begin{aligned}
|x_0 - p| &= |0.500000 - 0.866025| = 0.366025\\
|x_1 - p| &= |1.000000 - 0.866025| = 0.133974\\
|x_2 - p| &= |0.875000 - 0.866025| = 0.008974\\
|x_3 - p| &= |0.866071 - 0.866025| = 0.000046\\
|x_4 - p| &= |0.866025\ldots - 0.866025\ldots| = 0.000000001222925
\end{aligned}$$

και στη συνέχεια τις ποσότητες

$$\begin{aligned}
\frac{|x_1 - p|}{|x_0 - p|^2} &= \frac{0.133974}{0.366025^2} = 1.000000\\
\frac{|x_2 - p|}{|x_1 - p|^2} &= \frac{0.008974}{0.133974^2} = 0.50000\\
\frac{|x_3 - p|}{|x_2 - p|^2} &= \frac{0.000046}{0.008974^2} = 0.571428\\
\frac{|x_4 - p|}{|x_3 - p|^2} &= \frac{0.000000001222925}{0.000046^2} = 0.577319626365575.
\end{aligned}$$

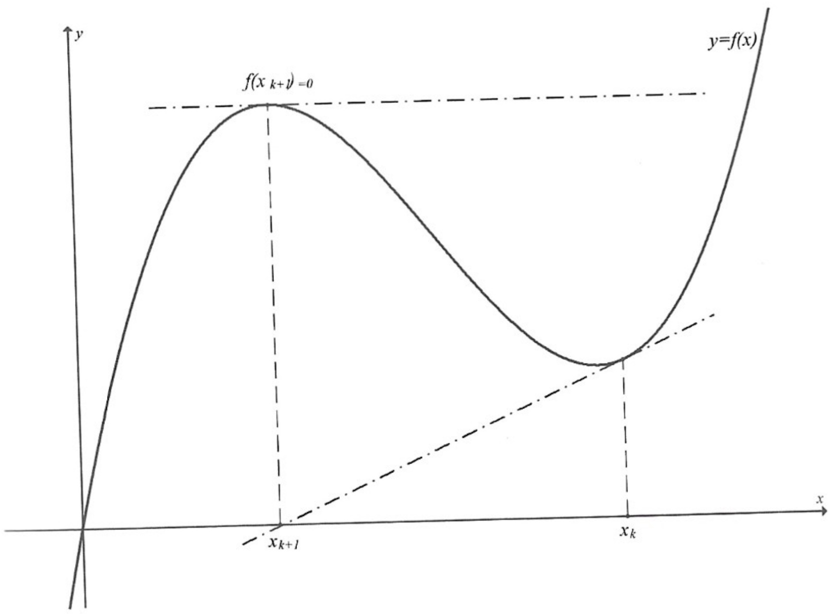
Στον τελευταίο υπολογισμό αναγκαζόμαστε να κάνουμε πράξεις με πολύ περισσότερα ψηφία από τα 6 που κάναμε στους προηγούμενους. Ωστόσο, είναι φανερό ότι τα πηλίκα συγκλίνουν σε έναν αριθμό $K \approx 0.57\ldots$

Η βασική δυσκολία της μεθόδου Newton είναι η επιλογή της αρχικής προσέγγισης x_0 ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 4.2.4. Αν το x_0 είναι εκτός της περιοχής $[p - \delta, p + \delta]$, οι διαδοχικές προσεγγίσεις της μεθόδου απομακρύνονται συνεχώς από το p και η ρίζα δεν μπορεί να προσεγγιστεί.

Υπάρχουν περιπτώσεις στις οποίες η φύση του τρέχοντος (ή του αρχικού) σημείου προσέγγισης οδηγεί τη μέθοδο σε αποτυχία. Για παράδειγμα, εάν έχουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 1 - x^2 = 0$, με προφανείς ρίζες τις ± 1, η επαναληπτική διαδικασία είναι η

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1 - x_k^2}{-2x_k}.$$

Εάν επιλέξουμε $x_0 = 0$, οδηγούμαστε σε κλάσμα $\frac{1}{0}$. Έχουμε δηλαδή μια περίπτωση όπου η παράγωγος της συνάρτησης στο σημείο προσέγγισης είναι 0. Αυτό απεικονίζεται στο Σχήμα **4.10**.



Σχήμα 4.10: Αποτυχία της μεθόδου Newton.

Έστω τώρα ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = x^4 - 3x + 3 = 0$, η επαναληπτική διαδικασία είναι η

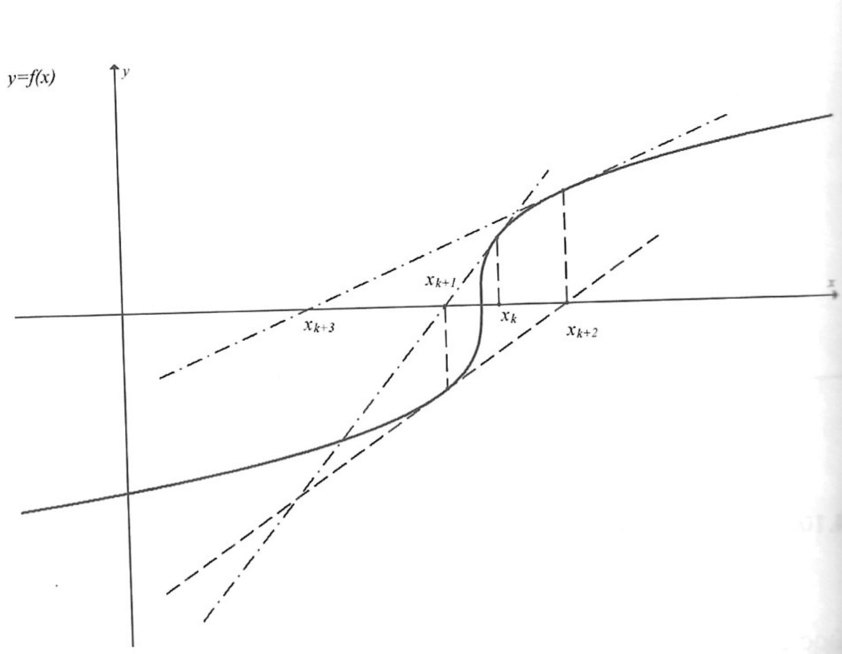
$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^4 - 3x_k + 3}{4x_k^3 - 3} = \frac{3x_k^4 - 3}{4x_k^2 - 3}.$$

Εάν επιλέξουμε $x_0 = 0$, οδηγούμαστε φανερά στο $x_1 = 1$, η οποία δίνει $x_2 = 0$ από όπου παίρνουμε $x_3 = 1, x_4 = 0, \ldots$ και η επαναληπτική διαδικασία συνεχίζεται στο ίδιο μοτίβο.

Ένα άλλο πρόβλημα εμφανίζεται σε συναρτήσεις για τις οποίες η παράγωγος δεν ορίζεται στο σημείο της ρίζας. Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = \sqrt[3]{x-10}$ για την οποία η παράγωγος δεν ορίζεται στο 10 (που είναι η ρίζα). Εφαρμόζοντας τη μέθοδο έχουμε την επαναληπτική διαδικασία

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{(x_k-10)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}(x_k-10)^{\frac{1}{3}-1}} = x_k - \frac{(x_k-10)^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}(x_k-10)^{-\frac{2}{3}}} = x_k - 3(x_k-10)^{\frac{2}{3}}(x_k-10)^{\frac{1}{3}} \\ &= x_k - 3(x_k - 10) = -2x_k + 10. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι σε κάθε επανάληψη η διαδικασία παράγει τιμές που είναι εναλλασσόμενα μικρότερες ή μεγαλύτερες της ρίζας 10 και απομακρύνονται από αυτήν. Έτσι, είναι φανερό ότι η μέθοδος αποτυγχάνει. Σχηματικά αυτό φαίνεται στο Σχήμα **4.11**.



Σχήμα 4.11: Απόκλιση της μεθόδου Newton.

Παρόμοια προβλήματα έχουμε και σε περιπτώσεις στις οποίες η παράγωγος δεν είναι συνεχής στη ρίζα.