Λύση 1ης άσκησης (α): $y_1 = (x^3 + 2x + 1)/(x^2 + 3)$

$$
\begin{aligned}
dy &= f'(x)\,dx \Rightarrow \\
dy &= \frac{(x^3+2x+1)'(x^2+3) - (x^3+2x+1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}\,dx = \\
&= \frac{(3x^2+2)(x^2+3) - (x^3+2x+1)(2x)}{(x^2+3)^2}\,dx = \\
&= \frac{x^4+7x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}dx \quad \text{ή} \\
dy &= d\left[\frac{(x^3+2x+1)}{(x^2+3)}\right] \Rightarrow \\
dy &= \frac{(x^2+3)\cdot d(x^3+2x+1) - (x^3+2x+1)\cdot d(x^2+3)}{(x^2+3)^2} = \\
&= \frac{(x^2+3)(3x^2+2)dx - (x^3+2x+1)(2x)dx}{(x^2+3)^2} = \\
&= \frac{x^4+7x^2-2x+6}{(x^2+3)^2}dx
\end{aligned}
$$

Λύση 1ης άσκησης (β): $y_2 = \cos^2 2x + \sin 3x$

$$\begin{aligned}
dy &= d\left[\cos^2 2x + \sin 3x\right] \Rightarrow \\
dy &= d\left[\cos^2 2x\right] + d\left[\sin 3x\right] \Rightarrow \\
dy &= 2\cos 2x\, d(cos2x) + \cos 3x\, d(3x) = \\
&= 2\cos 2x(-2\sin 2x\, dx) + 3\cos 3x\, dx = \\
&= -4\sin 2x\, \cos 2x\, dx + 3\cos 3x\, dx = \\
&= (-2\sin 4x + 3\cos 3x)dx
\end{aligned}$$

(αφού $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$)

Λύση 1ης άσκησης (γ): $y_3 = e^{3x} + \arcsin 2x$

$$
\begin{aligned}
dy &= d\left[e^{3x} + \arcsin 2x\right] \Rightarrow \\
dy &= d(e^{3x}) + d(\arcsin 2x) = \\
&= 3e^{3x}\,dx + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}dx = \\
&= \left(3e^{3x} + \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\right)dx
\end{aligned}
$$

$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ άρα χρειαζόμαστε

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin ax \\ f'(x) &= a\cos ax \\ f''(x) &= -a^2 \sin ax \\ f'''(x) &= -a^3 \cos ax \\ f^{(4)}(x) &= a^4 \sin ax \\ f^{(5)}(x) &= a^5 \cos ax \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f(x)|_{x=0} &= 0 \\ f'(x)|_{x=0} &= a \\ f''(x)|_{x=0} &= 0 \\ f'''(x)|_{x=0} &= -a^3 \\ f^{(4)}(x)|_{x=0} &= 0 \\ f^{(5)}(x)|_{x=0} &= a^5 \quad \text{κ.λ.π.} \end{aligned}$$

οπότε το ζητούμενο ανάπτυγμα είναι

$$\begin{aligned} \sin ax &= 0 + x \cdot a + \frac{x^2}{2!} \cdot 0 + \frac{x^3}{3!}(-a^3) + \frac{x^4}{4!} \cdot 0 + \frac{x^5}{5!} \cdot a^5 + \cdots \Rightarrow \\ \sin ax &= ax - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(ax)^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \ \forall x \end{aligned}$$

Λύση 4ης άσκησης (2η): $f(x) = \arctan x$

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \arctan x & & & f(0) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} & & & f'(0) &= 1 \\
f''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & &\Rightarrow & f''(0) &= 0 \\
f'''(x) &= \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2} & & & f'''(0) &= -2 \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{48x^3}{(1+x^2)^4} + \frac{24x}{(1+x^2)^3} & & & f^{(4)}(0) &= 0 \\
f^{(5)}(x) &= \frac{384x^4}{(1+x^2)^5} - \frac{288x^2}{(1+x^2)^4} + \frac{24}{(1+x^2)^3} & & & f^{(5)}(0) &= 24, \text{κ.λ.π. άρα}
\end{aligned}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

Παρατήρηση:

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

Εφαρμογή του αναπτύγματος για τους 8 πρώτους όρους:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \Rightarrow \arctan\frac{1}{4} = 0.244978$$

$$\text{(αληθινή τιμή: } \arctan\frac{1}{4} = 0.244979)$$

$$\arctan\frac{3}{2} = -0.547098 \qquad \text{(αληθινή τιμή: } \arctan\frac{3}{2} = 0.982794)$$

Συμπέρασμα:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$$

μόνο όταν $-1 \leq x \leq 1$.

Λύση 5ης άσκησης: $f(x) = \cos x$

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \cdots$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \\ f'(x) &= -\sin x \\ f''(x) &= -\cos x \\ f'''(x) &= \sin x \\ f^{(4)}(x) &= \cos x \\ f^{(5)}(x) &= -\sin x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} f(\alpha) &= \cos\alpha \\ f'(\alpha) &= -\sin\alpha \\ f''(\alpha) &= -\cos\alpha \\ f'''(\alpha) &= \sin\alpha \\ f^{(4)}(\alpha) &= \cos\alpha \\ f^{(5)}(\alpha) &= -\sin\alpha, \quad \text{κ.λ.π.} \end{aligned}$$

άρα το ανάπτυγμα 'γύρω' από το α είναι

$$\cos x = \cos\alpha - \sin\alpha(x-\alpha) - \frac{\cos\alpha}{2!}(x-\alpha)^2 + \frac{\sin\alpha}{3!}(x-\alpha)^3 + \cdots$$

για κάθε x.

Λύση 6ης άσκησης: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Maclaurin βρίσκουμε το e^x και αντικαθιστώντας όπου x το $-x$ βρίσκουμε και το ανάπτυγμα του e^{-x}. Επιπλέον βρίσκουμε και το ανάπτυγμα Maclaurin του $\sin x$. Τότε το όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+\frac{2x^3}{3!}+\cdots}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\frac{2x^2}{3!}+\cdots}{1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots}=2\,.$$

Λύση 7ης άσκησης: $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$

Η λύση του αόριστου ολοκληρώματος $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x} dx$ δεν μπορεί να εκφραστεί με στοιχειώδεις συναρτήσεις. Εδώ με χρήση του αναπτύγματος Maclaurin υπολογίζουμε το $\sin x$ και συνεπώς το ορισμένο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{x} dx \\
&= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots\right) dx \\
&= \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots\right]_0^1 = 0.946083
\end{aligned}$$

(προσθέσαμε τους 4 πρώτους όρους του αποτελέσματος).

Λύση 8ης άσκησης: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^2}{x^2}$

Υπολογίζουμε από το ανάπτυγμα Maclaurin το $\sin x$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

και από αυτό το $\sin x^2$, αντικαθιστώντας όπου x το x^2,

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots$$

Άρα το όριο γίνεται

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots}{x^2} = \\ &= \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \frac{x^{12}}{7!} + \cdots\right) = 1\,.\end{aligned}$$

Λύση 10ης άσκησης: $f(x) = e^x \arctan x$

Βρίσκουμε χωριστά το ανάπτυγμα Maclaurin της e^x και $\arctan x$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Άρα

$$\begin{aligned} e^x \arctan x &= \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\right) \\ &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \cdots\right)\left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots\right) \\ &= x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots \end{aligned}$$

Άρα $e^x \arctan x = x + x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$.