Πρωτεύοντα τόξα αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

Συνάρτηση	Πεδίο ορισμού	Πεδίο τιμών
$y = \arcsin x$	$-1 \le x \le 1$	$-\pi/2 \le y \le \pi/2$
$y = \arccos x$	$-1 \le x \le 1$	$0 \le y \le \pi$
$y = \mathrm{arcsec} x$	$x \le -1$ ή $x \ge 1$	$\pi/2 < y \le \pi$ ή $0 \le y < \pi/2$
$y = \mathrm{arccsc} x$	$x \le -1$ ή $x \ge 1$	$-\pi/2 \le y < 0$ ή $0 < y \le \pi/2$
$y = \arctan x$	$-\infty < x < \infty$	$-\pi/2 < y < \pi/2$
$y = \mathrm{arccot} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$

Τριγωνομετρικές σχέσεις

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta\,.$$

Αντίθετα τόξα:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,\quad \cos(-\theta) = \cos\theta,\quad \tan(-\theta) = -\tan\theta,$$
$$\cot(-\theta) = -\cot\theta,\quad \sec(-\theta) = \sec\theta,\quad \csc(-\theta) = -\csc\theta\,.$$

Συμπληρωματικά τόξα:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos\theta,\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\sin\theta,\quad \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\cot\theta,$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\tan\theta,\quad \sec\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp\csc\theta,\quad \csc\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \sec\theta\,.$$

Παραπληρωματικά τόξα:

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta,\quad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta,\quad \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta,$$
$$\cot(\pi - \theta) = -\cot\theta,\quad \sec(\pi - \theta) = -\sec\theta,\quad \csc(\pi - \theta) = \csc\theta,$$
$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta,\quad \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta,\quad \tan(\pi + \theta) = \tan\theta,$$
$$\cot(\pi + \theta) = \cot\theta,\quad \sec(\pi + \theta) = -\sec\theta,\quad \csc(\pi + \theta) = -\csc\theta\,.$$

Άθροισμα - διαφορά τόξων:

$$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b,$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b,$$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a\tan b},$$
$$\cot(a \pm b) = \frac{\cot a\cot b \mp 1}{\cot b \pm \cot a}\,.$$

Απλά - διπλάσια τόξα:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta,\quad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1,$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta,\quad \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$
$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2},\quad \cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}\,.$$

Ημίτονο, συνημίτονο από εφαπτομένη:

$$\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}},\quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}}\,.$$

Πολλαπλάσια τόξα:

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta,$$
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$
$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta},$$
$$\sin 4\theta = 4\sin\theta\cos\theta - 8\sin^3\theta\cos\theta,$$
$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1,$$
$$\tan 4\theta = \frac{4\tan\theta - 4\tan^3\theta}{1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta}\,.$$

Δυνάμεις συναρτήσεων:

$$\sin^3\theta = \frac{3}{4}\sin\theta - \frac{1}{4}\sin 3\theta,$$
$$\cos^3\theta = \frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta,$$
$$\sin^4\theta = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta,$$
$$\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta\,.$$

Πράξεις μεταξύ τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$
$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$
$$\cos a - \cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2}$$
$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

Συνάρτηση	Παράγωγος
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x = \sin x/\cos x$	$1/\cos^2 x$
$\cot x = \cos x/\sin x$	$-1/\sin^2 x$
$\sec x = 1/\cos x$	$\sec x\,\tan x$
$\csc x = 1/\sin x$	$-\csc x\,\cot x$
$\arcsin x$ ή $\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert < 1$
$\arccos x$ ή $\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x\rvert < 1$
$\arctan x$ ή $\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arccot}\, x$ ή $\cot^{-1} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\mathrm{arcsec}\, x$ ή $\sec^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ \lvert x\rvert > 1$
$\mathrm{arccsc}\, x$ ή $\csc^{-1} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ \lvert x\rvert > 1$
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh x$
$\tanh x = \sinh x/\cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$1/\cosh^2 x$
$\coth x = \cosh x/\sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	$-1/\sinh^2 x$
$\mathrm{sech}\, x = 1/\cosh x = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$	$-\mathrm{sech}\, x\,\tanh x$
$\mathrm{csch}\, x = 1/\sinh x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$	$-\mathrm{csch}\, x\,\coth x$
$\mathrm{arcsinh}\, x$ ή $\sinh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{arccosh}\, x$ ή $\cosh^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\ x > 1$
$\mathrm{arctanh}\, x$ ή $\tanh^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2},\ \lvert x\rvert < 1$
$\mathrm{arccoth}\, x$ ή $\coth^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2},\ \lvert x\rvert > 1$
$\mathrm{arcsech}\, x$ ή $\mathrm{sech}^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}},\ 0 < x < 1$
$\mathrm{arccsch}\, x$ ή $\mathrm{csch}^{-1} x$	$-\frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}},\ x \neq 0$

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$
$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b) + \sin(a+b)]\,.$$

Σχέσεις σε αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\arcsin(-\theta) = -\arcsin\theta,\quad \arccos(-\theta) = \pi - \arccos\theta,$$
$$\arctan(-\theta) = -\arctan\theta,\quad \mathrm{arccot}(-\theta) = \pi - \mathrm{arccot}\,\theta,$$
$$\mathrm{arcsec}(-\theta) = \pi - \mathrm{arcsec}\,\theta,\quad \mathrm{arccsc}(-\theta) = -\mathrm{arccsc}\,\theta,$$
$$\arcsin\theta + \arccos\theta = \frac{\pi}{2},\quad \arctan\theta + \mathrm{arccot}\,\theta = \frac{\pi}{2},$$
$$\mathrm{arccsc}\,\theta = \arcsin(1/\theta),\quad \mathrm{arcsec}\,\theta = \arccos(1/\theta),$$
$$\mathrm{arccot}\,\theta = \frac{\pi}{2} - \arctan(\theta).$$

Διωνυμικό Ανάπτυγμα - Σειρά:

$$(x+y)^n = x^n\left[1 + n\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \cdots\right].$$

Ανάπτυγμα Taylor:

• Αν η f έχει παραγώγους όλων των τάξεων σε ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το a, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n και για κάθε x στο εν λόγω διάστημα θα ισχύει

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1},$$

όπου,

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

για κάποιο c_{n+1} στο διάστημα (a, x).

• Αν στο τύπο του Taylor αντικαταστήσουμε το a με μηδέν, αν το μηδέν είναι σημείο του διαστήματος $[a, b]$, τότε έχουμε τη μορφή

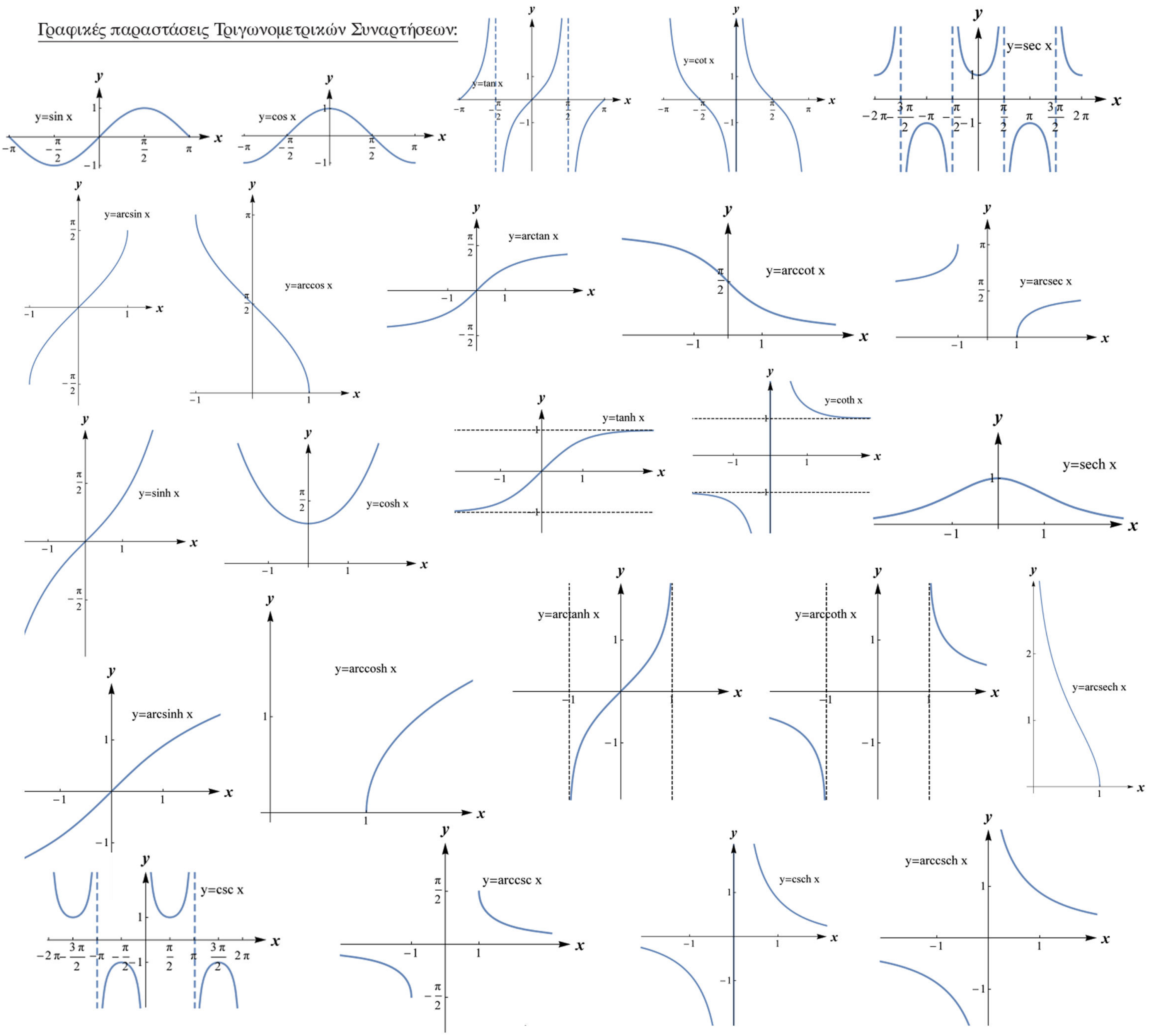
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

με το c σημείο μεταξύ του 0 και του x. Ο τύπος αυτός λέγεται τύπος του Maclaurin.

Μέθοδος N-R:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

Γραφικές παραστάσεις Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων:



Υπολογισμός όγκου στερεού από περιστροφή:

• Περιστροφή γύρω από τον $x-$άξονα.

1) Έστω $f(x)$ συνάρτηση συνεχής και θετική στο $[a,b]$ διάστημα. Όταν ο άξονας περιστροφής είναι τμήμα του συνόρου του επιπέδου τόπου R, τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή του R γύρω από τον $x-$άξονα, δίνεται από τη σχέση $V = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$

2) Όταν η περιοχή που περιστρέφεται ορίζεται από δύο καμπύλες $f(x)$, $g(x)$ με $f(x) > g(x)$ σε ένα διάστημα $[a,b]$, τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον $x-$άξονα, δίνεται από τη σχέση $V = \int_a^b \pi \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx.$

• Περιστροφή γύρω από τον $y-$άξονα.

1) Έστω $f(x)$ συνάρτηση συνεχής και θετική στο $[a,b]$ διάστημα. Αν η περιστροφή είναι γύρω από τον $y-$άξονα τότε ο όγκος δίνεται από τη σχέση $V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx.$

2) Όταν η περιοχή που περιστρέφεται ορίζεται από δύο καμπύλες $f(x)$, $g(x)$ με $f(x) > g(x)$ σε ένα διάστημα $[a,b]$, τότε ο όγκος του στερεού που προκύπτει από την περιστροφή γύρω από τον $y-$άξονα, δίνεται από τη σχέση $V = \int_a^b 2\pi x [f(x) - g(x)] dx.$

Υπολογισμός εμβαδού επιφάνειας στερεού από περιστροφή:

Έστω η συνεχής συνάρτηση $y = f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$.

1) Αν η $y = f(x)$ περιστραφεί γύρω από τον **$x-$άξονα,** τότε το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται, δίνεται από τη σχέση

$$E = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

2) Αν $x = g(y)$, $c \le y \le d$ περιστραφεί γύρω από τον **$y-$άξονα,** τότε το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται, δίνεται από τη σχέση

$$E = 2\pi \int_c^d |g(y)| \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy.$$

3) Αν η καμπύλη δίνεται σε παραμετρική μορφή $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$ οπότε $dx = \dot{x}(t)dt$, $dy = \dot{y}(t)dt$, οι πιο πάνω τύποι του εμβαδού γίνονται

$$E = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt. \qquad E = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y(t)| \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt,$$

4) Αν η καμπύλη δίνεται σε πολική μορφή $r = r(\phi)$, με $\phi_1 \le \phi \le \phi_2$ τότε $x(\phi) = r(\phi)\cos\phi$, $y(\phi) = r(\phi)\sin\phi$ (δηλαδή πάλι έχουμε παραμετρικές εξισώσεις με παράμετρο ϕ), οπότε $dx/d\phi = r'(\phi)\cos\phi - r(\phi)\sin\phi$ και $dy/d\phi = r'(\phi)\sin\phi + r(\phi)\cos\phi$ και οι τύποι του εμβαδού γίνονται

$$E = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} |r(\phi)\cos\phi| \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}\, d\phi = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} |x(\phi)| \sqrt{x'^2(\phi) + y'^2(\phi)}\, d\phi.$$

$$E = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} |r(\phi)\sin\phi| \sqrt{r^2(\phi) + r'^2(\phi)}\, d\phi = 2\pi \int_{\phi_1}^{\phi_2} |y(\phi)| \sqrt{x'^2(\phi) + y'^2(\phi)}\, d\phi,$$

Μήκος καμπύλης:

• Έστω $y = f(x)$ μία επίπεδη καμπύλη ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$. Το μήκος της καμπύλης δίνεται από τη σχέση: $L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$

• Αν η καμπύλη δίνεται σε παραμετρική μορφή $x = g(t)$, $y = h(t)$, τότε η σχέση που δίνει το μήκος της καμπύλης γίνεται:

$$L = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt,$$ όπου t_a, t_b είναι η τιμή του t στη θέση a και b αντίστοιχα.

• Τέλος αν η καμπύλη δίνεται σε πολική μορφή $r = r(\theta)$ και $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, τότε το μήκος δίνεται από τη σχέση:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$