ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

I

1 Τι είναι η Τοπολογία;

1.1 Εισαγωγή

Η Τοπολογία αποτελεί έναν από τους πιο θεμελιώδεις κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών, όχι επειδή ασχολείται με συγκεκριμένα αντικείμενα ή μετρήσιμες ποσότητες, αλλά επειδή εισάγει έναν τρόπο σκέψης για τη μελέτη της *δομής*. Ιστορικά, οι απαρχές της Τοπολογίας μπορούν να εντοπιστούν τον 18ο αιώνα, με προβλήματα που δεν μπορούσαν να αντιμετωπιστούν με τα εργαλεία της Κλασικής Ανάλυσης ή της Γεωμετρίας. Σε αντίθεση με τη Γεωμετρία, η οποία επικεντρώνεται σε μήκη, γωνίες και καμπυλότητες, η Τοπολογία ενδιαφέρεται για τις ιδιότητες εκείνες που παραμένουν αναλλοίωτες υπό συνεχείς μετασχηματισμούς. Η βασική της φιλοσοφία συνοψίζεται στην ιδέα ότι δύο αντικείμενα θεωρούνται ισοδύναμα εφόσον μπορούν να μετασχηματιστούν το ένα στο άλλο μέσω συνεχών παραμορφώσεων, χωρίς να αλλοιώνεται η τοπολογική τους δομή. Ένα από τα ιστορικά σημαντικότερα παραδείγματα, που συχνά αναφέρεται ως το έναυσμα για την ανάπτυξη της τοπολογίας, είναι το πρόβλημα των γεφυρών του Königsberg το οποίο οδήγησε στη γέννηση της θεωρίας γραφημάτων αλλά και σε μια πρώτη μορφή τοπολογικής σκέψης: η ακριβής γεωμετρία της πόλης ήταν άνευ σημασίας· μόνο η συνδεσιμότητα είχε σημασία. Αυτή η μετατόπιση από το *ποσοτικό* στο *δομικό* στοιχείο υπήρξε καθοριστική.

Κατά τον 19ο αιώνα, η Τοπολογία άρχισε να διαμορφώνεται ως αυτόνομος κλάδος, μέσα από την ανάγκη θεμελίωσης εννοιών της Ανάλυσης, όπως η συνέχεια, το όριο και η σύγκλιση. Η εισαγωγή των τοπολογικών χώρων επέτρεψε την αφαίρεση της έννοιας της απόστασης, διατηρώντας μόνο την πληροφορία της γειτνίασης. Έτσι, η Τοπολογία εξελίχθηκε σε μια γενική γλώσσα, ικανή να ενοποιήσει διαφορετικά μαθηματικά πλαίσια υπό κοινές αρχές. Κατά τον 20ό αιώνα, η ανάπτυξη της Αλγεβρικής Τοπολογίας επέτρεψε τη συστηματική μελέτη της μορφής μέσω αλγεβρικών αναλλοίωτων. Η προσέγγιση αυτή προσφέρει ένα ενδιάμεσο επίπεδο περιγραφής μεταξύ της γεωμετρίας και της στατιστικής. Δεν απαιτεί ακριβείς μετρήσεις, αλλά ούτε περιορίζεται σε συνοπτικούς στατιστικούς δείκτες, όπως οι μέσοι όροι και οι διακυμάνσεις. Αντιθέτως, εστιάζει σε αναλλοίωτες ιδιότητες της μορφής των μαθηματικών αντικειμένων, οι οποίες παραμένουν σταθερές ακόμη και υπό την παρουσία σημαντικού θορύβου. Το χαρακτηριστικό αυτό καθιστά την τοπολογική προσέγγιση ιδιαίτερα κατάλληλη για σύγχρονες εφαρμογές σε δεδομένα ή υπολογιστικά προβλήματα.

Ως εκ τούτου, η Τοπολογία, στο πλαίσιο της μελέτης μεγάλων και πολύπλοκων συνόλων δεδομένων, υποστηρίζει σύγχρονες εφαρμογές σε ένα ευρύ φάσμα γνωστικών περιοχών της Πληροφορικής, όπως η μηχανική μάθηση και η αναπαράσταση γνώσης, η ανάλυση και οπτικοποίηση δεδομένων υψηλής διάστασης, η εξόρυξη δεδομένων, η ανάλυση γραφημάτων και δικτύων, η υπολογιστική όραση, η επεξεργασία σημάτων και εικόνων, η ανάλυση χρονοσειρών, η βιοπληροφορική, καθώς και η μελέτη πολύπλοκων συστημάτων και υπολογιστικών υποδομών.

Η Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων (Topological Data Analysis – TDA) αποτελεί τη φυσική εξέλιξη αυτής της ιδέας. Αντί να επικεντρώνεται σε τοπικές ή αμιγώς στατιστικές ιδιότητες των δεδομένων, επιχειρεί να καταγράψει τη συνολική τους μορφή. Η βασική παραδοχή είναι ότι τα δεδομένα, ακόμη και όταν παρατηρούνται ως πεπερασμένα σύνολα σημείων, ενσωματώνουν μια υποκείμενη τοπολογική δομή. Η ανίχνευση και η ποσοτικοποίηση αυτής της δομής αποτελεί τον κεντρικό στόχο του TDA.

Στο παρόν βιβλίο, η Τοπολογία δεν αντιμετωπίζεται ως αυτοσκοπός, αλλά ως εργαλείο. Η ιστορική και εννοιολογική εισαγωγή λειτουργεί ως γέφυρα ανάμεσα στη θεωρητική θεμελίωση και στις υπολογιστικές μεθόδους που ακολουθούν. Στα επόμενα κεφάλαια, οι έννοιες αυτές θα εξειδικευτούν και θα αποκτήσουν συγκεκριμένο περιεχόμενο μέσα από την ανάπτυξη της απλής και της εμμένουσας ομολογίας, θέτοντας τα θεμέλια για την Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων.

1.2 Ο ρόλος της Τοπολογίας στο παρόν βιβλίο

Οι απαιτήσεις της επιστήμης και της βιομηχανίας για μεθόδους κατανόησης και αξιοποίησης μεγάλων και πολύπλοκων συνόλων δεδομένων αυξάνονται με ιδιαίτερα γρήγορους ρυθμούς, γεγονός που οφείλεται εν μέρει στη δυνατότητά μας να συλλέγουμε ολοένα και περισσότερα δεδομένα από πλήθος διαφορετικών πεδίων. Μία βασική ανάγκη είναι η κατασκευή χρήσιμων μοντέλων δεδομένων, τα οποία να μας επιτρέπουν να αντιλαμβανόμαστε με μεγαλύτερη σαφήνεια και ταχύτητα τι μας "λένε" τα δεδομένα. Η μαθηματική μοντελοποίηση συνήθως θεωρείται ως η διαδικασία κατασκευής αλγεβρικών ή αναλυτικών μοντέλων, όπου το αποτέλεσμα του μοντέλου είναι μία εξίσωση, ένα σύστημα εξισώσεων ή, ενδεχομένως, ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Η προσέγγιση αυτή έχει αποδειχθεί εξαιρετικά αποτελεσματική στο παρελθόν, ιδιαίτερα όταν τα σύνολα δεδομένων που μελετώνται περιλάμβαναν μικρό αριθμό χαρακτηριστικών και όταν οι σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών που διέπουν τα δεδομένα ήταν απλές. Το έργο των Galileo, Kepler και Newton αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα της επιτυχίας αυτού του είδους μοντελοποίησης. Ωστόσο, οι μέθοδοι αυτές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες όταν εφαρμόζονται σε ορισμένα από τα ιδιαίτερα πολύπλοκα δεδομένα που προκύπτουν σήμερα σε σύγχρονες εφαρμογές. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε σύνολα δεδομένων όπου ο στόχος είναι ο εντοπισμός πιθανών περιπτώσεων απάτης ή η ανακάλυψη νέων φαρμάκων, όπου η πολύπλοκη δομή των μορίων καθιστά την αναγνώριση αποτελεσματικών φαρμακευτικών ουσιών ένα εξαιρετικά απαιτητικό πρόβλημα. Για τον λόγο αυτό, καθίσταται επιτακτική ανάγκη για τη μαθηματική και στατιστική κοινότητα να αναπτύξει νέες μεθόδους μοντελοποίησης. Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε σύνολα δεδομένων στα οποία ο στόχος είναι ο εντοπισμός πιθανών περιπτώσεων απάτης ή η ανακάλυψη νέων φαρμάκων. Στις περιπτώσεις αυτές, η πολυπλοκότητα των υποκείμενων δομών - όπως η χημική και γεωμετρική πολυπλοκότητα των μορίων - καθιστά την αναγνώριση προτύπων και τη λήψη αποφάσεων ένα ιδιαίτερα απαιτητικό πρόβλημα. Κατά συνέπεια, αναδεικνύεται ως επιτακτική ανάγκη η ανάπτυξη νέων μαθηματικών και στατιστικών μεθόδων μοντελοποίησης, ικανών να χειριστούν δεδομένα μεγάλης κλίμακας και υψηλής δομικής πολυπλοκότητας. Για να κατανοήσουμε ποιες θα μπορούσαν να είναι αυτές οι μέθοδοι, τίθεται ένα θεμελιώδες ερώτημα: τι ακριβώς μας προσφέρει ένα μαθηματικό μοντέλο; Παρακάτω συνοψίζονται ορισμένοι βασικοί ρόλοι που καλείται να επιτελέσει.

- Καταρχάς, ένα μαθηματικό μοντέλο οφείλει να παρέχει κάποιο είδος συμπίεσης των δεδομένων σε μία διαχειρίσιμη μορφή. Για παράδειγμα, όταν μοντελοποιούμε δεδομένα μέσω μιας απλής γραμμικής παλινδρόμησης μίας μεταβλητής, ένα μεγάλο πλήθος παρατηρήσεων συνοψίζεται σε δύο μόνο παραμέτρους: την κλίση και την τεταγμένη επί την αρχή. Εφόσον η προσέγγιση είναι ικανοποιητική, το μοντέλο έχει επιτύχει μια ουσιαστική συμπίεση, διατηρώντας τα βασικά χαρακτηριστικά των δεδομένων και απορρίπτοντας τον περιττό θόρυβο.

- Πέραν της συμπίεσης, ένα μαθηματικό μοντέλο θα πρέπει να προσφέρει κατανόηση των δεδομένων. Με τον όρο κατανόηση εννοούμε την αποκάλυψη της εσωτερικής δομής του φαινομένου και των βασικών παραμέτρων που καθορίζουν τη συμπεριφορά του. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η κλασική μαθηματική μοντελοποίηση της κίνησης ενός κανονιοβόλου, η οποία δεν περιορίζεται στην περιγραφή της τροχιάς του βλήματος, αλλά αποσαφηνίζει τον ρόλο της αρχικής ταχύτητας, της γωνίας βολής και της βαρυτικής επιτάχυνσης, καθώς και τον τρόπο με τον οποίο οι παράγοντες αυτοί αλληλεπιδρούν και διαμορφώνουν τη συνολική δυναμική του συστήματος. Σε πολλές περιπτώσεις, επιθυμούμε επιπλέον ένα μοντέλο να μας επιτρέπει την πρόβλεψη μελλοντικών ή μη παρατηρημένων καταστάσεων. Στο πρόβλημα του κανονιοβόλου, η γνώση των αρχικών συνθηκών αρκεί για να προβλεφθεί όχι μόνο η τροχιά του βλήματος, αλλά και το σημείο πρόσκρουσης ή το μέγιστο ύψος που θα επιτευχθεί. Η προβλεπτική ικανότητα αποτελεί συνεπώς έναν ακόμη κρίσιμο στόχο της μαθηματικής μοντελοποίησης.

- Αξίζει να σημειωθεί ότι κανένας από τους παραπάνω ρόλους δεν προϋποθέτει το μαθηματικό μοντέλο να είναι κατ' ανάγκην αλγεβρικό ή να οδηγεί σε ρητές εξισώσεις. Για παράδειγμα, στην ανάλυση συστάδων (cluster analysis), το αποτέλεσμα της μοντελοποίησης δεν είναι μια συνάρτηση ή ένας τύπος, αλλά μια δομική οργάνωση των δεδομένων σε ομάδες με κοινά χαρακτηριστικά. Η αξία του μοντέλου έγκειται εδώ στην αποκάλυψη της σχέσης και της μορφής που διέπει τα δεδομένα, και όχι στην παραγωγή ενός κλειστού αναλυτικού τύπου.

Για να κατανοήσουμε ποιες θα μπορούσαν να είναι αυτές οι μέθοδοι, τίθεται το ερώτημα: τι ακριβώς μας προσφέρουν τα μαθηματικά μοντέλα; Παρακάτω παρατίθενται ορισμένες απαντήσεις στο ερώτημα αυτό.

- Ένα μαθηματικό μοντέλο θα πρέπει να παρέχει κάποιο είδος συμπίεσης των δεδομένων σε μία διαχειρίσιμη μορφή. Για παράδειγμα, όταν μοντελοποιούμε δεδομένα χρησιμοποιώντας μία απλή γραμμική παλινδρόμηση μίας μεταβλητής, το αποτέλεσμα συμπιέζει χιλιάδες ή εκατοντάδες χιλιάδες σημεία δεδομένων σε δύο μόνο αριθμούς: την κλίση και την τεταγμένη επί την αρχή. Εάν η προσέγγιση είναι καλή, τότε έχει επιτευχθεί μία ιδιαίτερα σημαντική συμπίεση.

- Ένα μαθηματικό μοντέλο θα πρέπει να προσφέρει κατανόηση των δεδομένων. Η κλασική μαθηματική μοντελοποίηση της κίνησης ενός κανονιοβόλου παρέχει βαθιά κατανόηση της συμπεριφοράς του.

- Σε πολλές περιπτώσεις, επιθυμούμε ένα μοντέλο να μας επιτρέπει την πρόβλεψη αποτελεσμάτων. Στο πρόβλημα του κανονιοβόλου, αρκεί να γνωρίζουμε την αρχική ταχύτητα εξόδου και τη γωνία βολής για να προβλέψουμε την τροχιά.

Η παραπάνω συζήτηση υποδεικνύει ότι η έννοια του μαθηματικού μοντέλου είναι ουσιαστικά ευρύτερη από την παραδοσιακή εικόνα ενός αναλυτικού τύπου ή ενός συστήματος εξισώσεων. Στην πραγματικότητα, αυτό που αναζητούμε δεν είναι κατ' ανάγκην μια ακριβής εξίσωση που να περιγράφει τα δεδομένα, αλλά μια μαθηματική δομή ικανή να αποτυπώσει τα ουσιώδη χαρακτηριστικά τους. Η έμφαση μετατοπίζεται έτσι από την ακριβή αριθμητική αναπαράσταση προς την κατανόηση της εσωτερικής οργάνωσης και του "σχήματος" που εμφανίζουν τα δεδομένα ως σύνολο. Σε αυτό το σημείο καθίσταται σαφές ότι πολλές από τις κλασικές τεχνικές ανάλυσης δεδομένων αντιμετωπίζουν εγγενείς περιορισμούς. Οι μέθοδοι παλινδρόμησης, για παράδειγμα, προϋποθέτουν συχνά κάποια μορφή ομαλότητας ή γραμμικότητας, ενώ ακόμη και πιο ευέλικτα μη γραμμικά μοντέλα τείνουν να επικεντρώνονται στη σημειακή πρόβλεψη και όχι στη συνολική γεωμετρική δομή του συνόλου δεδομένων. Αντίστοιχα, η ανάλυση συστάδων, αν και εξαιρετικά χρήσιμη για την αποκάλυψη διακριτών ομάδων, οδηγεί σε αποτελέσματα μηδενικής διάστασης, τα οποία αγνοούν πληροφορίες σχετικές με τη συνέχεια, τις μεταβάσεις και τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των δεδομένων. Ωστόσο, σε πολλά σύγχρονα προβλήματα ανάλυσης δεδομένων, η πληροφορία που μας ενδιαφέρει δεν εντοπίζεται αποκλειστικά σε διακριτές κατηγορίες ή σε τοπικές σχέσεις μεταξύ σημείων, αλλά στη συνολική γεωμετρική και τοπολογική δομή που αναδύεται από το σύνολο των δεδομένων. Παραδείγματα τέτοιων καταστάσεων εμφανίζονται σε δεδομένα υψηλής διάστασης που προέρχονται από φυσικές, βιολογικές ή κοινωνικές διεργασίες, όπου τα δεδομένα συχνά συγκεντρώνονται γύρω από πολύπλοκες πολλαπλότητες, παρουσιάζουν οπές, κύκλους ή άλλες μορφές μη τετριμμένης δομής, οι οποίες δεν μπορούν να ανιχνευθούν με καθαρά στατιστικά ή αλγεβρικά εργαλεία.
Η Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων (Topological Data Analysis – TDA) εισάγεται ακριβώς για να καλύψει αυτό το κενό. Αντί να επιχειρεί να προσαρμόσει τα δεδομένα σε ένα προκαθορισμένο

λειτουργικό μοντέλο, η TDA επιδιώκει να εξαγάγει πληροφορία από το ίδιο το σχήμα που σχηματίζουν τα δεδομένα στον χώρο. Η βασική φιλοσοφία είναι ότι η τοπολογία, ως κλάδος των μαθηματικών που μελετά ιδιότητες αμετάβλητες υπό συνεχείς παραμορφώσεις, προσφέρει ένα φυσικό πλαίσιο για την ανάλυση δομών που είναι ανθεκτικές στον θόρυβο και ανεξάρτητες από συγκεκριμένες παραμετροποιήσεις. Ένα από τα βασικά πλεονεκτήματα της TDA είναι ότι επιτρέπει την ταυτόχρονη μελέτη διακριτών και συνεχών χαρακτηριστικών ενός συνόλου δεδομένων. Μέσω της κατασκευής γράφων και απλοϊκών συμπλόκων, τα δεδομένα μετασχηματίζονται σε μαθηματικά αντικείμενα τα οποία διατηρούν πληροφορία τόσο για τοπικές γειτνιάσεις όσο και για παγκόσμιες δομές, όπως κύκλους, κοιλότητες ή συνδεσιμότητα. Με τον τρόπο αυτό, το μοντέλο που προκύπτει δεν αποτελεί απλώς μια σύνοψη των δεδομένων, αλλά μια δομική αναπαράσταση της γεωμετρίας τους. Ιδιαίτερη σημασία έχει το γεγονός ότι τα τοπολογικά μοντέλα προσφέρουν υψηλό βαθμό λειτουργικότητας. Πολλές φορές, οι ενδιαφέρουσες πληροφορίες δεν βρίσκονται μόνο στα ίδια τα δεδομένα, αλλά σε συναρτήσεις που ορίζονται επ' αυτών, όπως πυκνότητες, ενεργειακές ποσότητες ή σήματα. Η δυνατότητα μεταφοράς τέτοιων συναρτήσεων από το αρχικό σύνολο δεδομένων στο τοπολογικό μοντέλο επιτρέπει την ανάλυση της συμπεριφοράς τους σε σχέση με τη δομή του χώρου, προσφέροντας νέες ερμηνευτικές δυνατότητες που δεν είναι προσβάσιμες με κλασικές μεθόδους.

Στο πλαίσιο αυτό, η επίμονη ομολογία διαδραματίζει κεντρικό ρόλο, καθώς παρέχει έναν συστηματικό τρόπο καταγραφής και ποσοτικοποίησης τοπολογικών χαρακτηριστικών σε πολλαπλές κλίμακες. Η ιδέα ότι τα τοπολογικά χαρακτηριστικά μπορούν να εμφανίζονται και να εξαφανίζονται καθώς μεταβάλλεται μια παράμετρος κλίμακας επιτρέπει τη διάκριση μεταξύ ουσιωδών δομών και φαινομένων που οφείλονται σε θόρυβο. Παράλληλα, η ανάπτυξη χαμηλής διάστασης απλοϊκών μοντέλων προσφέρει πρακτικά εργαλεία για την οπτικοποίηση και την ερμηνεία πολύπλοκων δεδομένων. Συνοψίζοντας, η Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων δεν πρέπει να θεωρείται ως μια εναλλακτική τεχνική μεταξύ άλλων, αλλά ως ένα ευρύτερο πλαίσιο μοντελοποίησης, το οποίο επεκτείνει την έννοια του μαθηματικού μοντέλου πέρα από τις παραδοσιακές αλγεβρικές και στατιστικές προσεγγίσεις. Παρέχει εργαλεία για τη μελέτη της δομής, της μορφής και της λειτουργικότητας των δεδομένων, και προσφέρει μια φυσική γέφυρα μεταξύ γεωμετρίας, τοπολογίας και σύγχρονης ανάλυσης δεδομένων. Με αυτή την οπτική, το TDA αναδεικνύεται ως ένα από τα πλέον υποσχόμενα εργαλεία για την κατανόηση και την αξιοποίηση δεδομένων μεγάλης κλίμακας και υψηλής πολυπλοκότητας.

1.3 Από τη Μοντελοποίηση στην Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων

Η μαθηματική μοντελοποίηση αποτελεί διαχρονικά έναν από τους βασικότερους μηχανισμούς κατανόησης, ερμηνείας και πρόβλεψης φαινομένων. Παραδοσιακά, η έννοια του μοντέλου ταυτίστηκε με αλγεβρικές ή αναλυτικές κατασκευές: συναρτήσεις, συστήματα εξισώσεων ή διαφορικές εξισώσεις, οι οποίες περιγράφουν τη σχέση μεταξύ μεταβλητών με σαφή και ρητό τρόπο. Η επιτυχία αυτής της προσέγγισης υπήρξε εντυπωσιακή σε πληθώρα εφαρμογών, ιδίως σε περιβάλλοντα όπου οι μεταβλητές ήταν λίγες, οι αλληλεπιδράσεις απλές και τα δεδομένα ακριβή. Ωστόσο, η ραγδαία εξέλιξη της επιστήμης των δεδομένων και της υπολογιστικής τεχνολογίας ανέδειξε νέα είδη προβλημάτων, στα οποία τα δεδομένα είναι υψηλής διάστασης, ετερογενή, θορυβώδη και συχνά στερούνται σαφούς γεωμετρικής ή αναλυτικής ερμηνείας.

Στο νέο αυτό πλαίσιο, η ίδια η έννοια της μοντελοποίησης επαναπροσδιορίζεται. Ένα σύγχρονο μαθηματικό μοντέλο δεν αποσκοπεί απαραίτητα στην παραγωγή μιας εξίσωσης, αλλά στη συμπύκνωση της πληροφορίας των δεδομένων σε μια δομή η οποία διατηρεί τα ουσιώδη χαρακτηριστικά τους. Η συμπίεση, η κατανόηση και η δυνατότητα πρόβλεψης παραμένουν κεντρικοί στόχοι, αλλά επιτυγχάνονται μέσω διαφορετικών μαθηματικών εργαλείων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της μετατόπισης αποτελεί η ανάλυση συστάδων, όπου το αποτέλεσμα του μοντέλου είναι ένας διαμερισμός του συνόλου δεδομένων και όχι μια αναλυτική σχέση. Παρά τη χρησιμότητά της, η ανάλυση συστάδων παραμένει εγγενώς διακριτή και αδυνατεί να αποτυπώσει συνεχείς ή πολυκλιμακωτές δομές που συχνά υπάρχουν στα δεδομένα.

Η ανάγκη για μοντέλα που να γεφυρώνουν το διακριτό με το συνεχές, και το τοπικό με το συνολικό, οδηγεί φυσικά στην τοπολογική θεώρηση των δεδομένων. Η Τοπολογία, ως κλάδος των μαθηματικών που μελετά ιδιότητες αναλλοίωτες υπό συνεχείς παραμορφώσεις, παρέχει ένα ιδιαίτερα κατάλληλο εννοιολογικό πλαίσιο για τη μελέτη της μορφής και της δομής σύνθετων αντικειμένων. Σε αντίθεση με τη γεωμετρία, δεν βασίζεται σε ακριβείς αποστάσεις ή γωνίες, ενώ σε αντίθεση με τη στατιστική δεν περιορίζεται σε συνοπτικούς δείκτες κατανομής. Αντιθέτως, εστιάζει σε δομικά χαρακτηριστικά, όπως η συνδεσιμότητα, η ύπαρξη οπών ή κύκλων και η γενικότερη οργάνωση των δεδομένων στον χώρο.

Η Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων (Topological Data Analysis – TDA) αναδύεται ακριβώς ως η συστηματική αξιοποίηση αυτής της τοπολογικής οπτικής στη μοντελοποίηση δεδομένων. Η κεντρική ιδέα του TDA είναι ότι ακόμη και αν τα δεδομένα παρατηρούνται ως πεπερασμένα σύνολα σημείων, προέρχονται συχνά από κάποιον υποκείμενο γεωμετρικό ή τοπολογικό χώρο. Ο χώρος αυτός δεν είναι άμεσα προσβάσιμος, αλλά η δομή του μπορεί να ανιχνευθεί έμμεσα μέσω κατάλληλων τοπολογικών κατασκευών. Στόχος του TDA είναι η ανάκτηση και ποσοτικοποίηση αυτής της υποκείμενης δομής, με τρόπο ανθεκτικό στον θόρυβο και στις ατέλειες των δεδομένων.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό της τοπολογικής προσέγγισης είναι η πολυκλιμακωτή ανάλυση. Αντί να εξετάζει τα δεδομένα σε μία μοναδική κλίμακα, το TDA μελετά πώς μεταβάλλονται οι τοπολογικές ιδιότητες καθώς αλλάζει η κλίμακα παρατήρησης. Η ιδέα αυτή αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα πολλών εφαρμογών, όπου η δομή των δεδομένων εξαρτάται ουσιωδώς από το επίπεδο λεπτομέρειας. Η έννοια της επίμονης ομολογίας αποτελεί το κατεξοχήν παράδειγμα αυτής της φιλοσοφίας, καθώς επιτρέπει την καταγραφή της «διάρκειας ζωής» τοπολογικών χαρακτηριστικών κατά τη μεταβολή μιας παραμέτρου.

Από τη σκοπιά της μοντελοποίησης, τα αποτελέσματα του TDA δεν είναι ούτε απλοί αριθμοί ούτε διακριτοί διαμερισμοί, αλλά πιο σύνθετες μαθηματικές δομές, όπως γράφοι, απλοϊκά σύμπλοκα και σύνολα τοπολογικών αναλλοίωτων. Οι δομές αυτές λειτουργούν ως ενδιάμεσα μοντέλα, τα οποία συμπυκνώνουν τη γεωμετρική και τοπολογική πληροφορία των δεδομένων, διατηρώντας ταυτόχρονα ερμηνευσιμότητα. Επιπλέον, τα μοντέλα αυτά μπορούν να συνδυαστούν με κλασικές μεθόδους μηχανικής μάθησης, είτε μέσω εξαγωγής χαρακτηριστικών είτε μέσω άμεσης ανάλυσης της δομής τους.

Η μετάβαση από την παραδοσιακή μοντελοποίηση στην Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων δεν συνιστά απόρριψη των καθιερωμένων μεθόδων, αλλά επέκταση και συμπλήρωσή τους. Το TDA δεν αντικαθιστά τη στατιστική ή τη μηχανική μάθηση, αλλά εισάγει μια επιπλέον διάσταση ανάλυσης, η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν η δομή των δεδομένων παίζει καθοριστικό ρόλο. Σε προβλήματα όπου η πληροφορία δεν έγκειται μόνο στις τιμές των δεδομένων αλλά και στον τρόπο με τον οποίο αυτές οργανώνονται, η τοπολογική προσέγγιση προσφέρει εργαλεία μοναδικής εκφραστικής ισχύος.

Συνοψίζοντας, η Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων μπορεί να ιδωθεί ως το φυσικό αποτέλεσμα της εξέλιξης της μαθηματικής μοντελοποίησης σε έναν κόσμο δεδομένων αυξανόμενης πολυπλοκότητας. Ενσωματώνοντας τοπολογικές έννοιες στη μελέτη σύγχρονων συνόλων δεδομένων, επιτρέπει την ανίχνευση δομών που παραμένουν αόρατες στις κλασικές προσεγγίσεις. Η κατανόηση αυτής της μετάβασης αποτελεί αναγκαίο βήμα για την εμβάθυνση στις τεχνικές και τα εργαλεία που θα παρουσιαστούν στα επόμενα κεφάλαια.

1.4 Βασικές Ιδέες και Κεντρικές Έννοιες της Τοπολογικής Ανάλυσης Δεδομένων

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται οι βασικές ιδέες που βρίσκονται στον πυρήνα της Τοπολογικής Ανάλυσης Δεδομένων (Topological Data Analysis – TDA). Στόχος δεν είναι η αυστηρή μαθηματική διατύπωση, αλλά η εννοιολογική κατανόηση του *τι μελετά* το TDA και *γιατί* αποτελεί ένα ιδιαίτερα ισχυρό εργαλείο για την ανάλυση σύγχρονων δεδομένων.

1.4.1 Δεδομένα ως σημεία στον χώρο

Σε πολλές εφαρμογές, κάθε παρατήρηση ενός συνόλου δεδομένων μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σημείο σε έναν χώρο. Κάθε συνιστώσα του σημείου αντιστοιχεί σε μία μεταβλητή ή χαρακτηριστικό, με αποτέλεσμα τα δεδομένα να σχηματίζουν ένα σύνολο σημείων σε έναν, συχνά υψηλών διαστάσεων, χώρο.

Από αυτή την οπτική γωνία, ένα σύνολο δεδομένων δεν αντιμετωπίζεται απλώς ως ένας πίνακας αριθμών, αλλά ως ένα *γεωμετρικό αντικείμενο*, δηλαδή ως ένα σύννεφο σημείων του οποίου η δομή και η μορφή περιέχουν χρήσιμη πληροφορία.

1.4.2 Το σχήμα των δεδομένων

Η Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων δεν εστιάζει στα μεμονωμένα σημεία, αλλά στη συνολική *μορφή* που αυτά σχηματίζουν. Δύο σύνολα δεδομένων μπορεί να έχουν παρόμοιες στατιστικές ιδιότητες, όπως μέσους όρους ή διασπορές, και ωστόσο να παρουσιάζουν εντελώς διαφορετική δομή.

Για παράδειγμα, σημεία που βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο έχουν διαφορετική μορφή από σημεία που κατανέμονται κατά μήκος μιας ευθείας, ακόμη και αν οι αριθμητικές τους περιγραφές είναι παρόμοιες. Η τοπολογική προσέγγιση στοχεύει στην ανίχνευση τέτοιων δομικών χαρακτηριστικών, όπως συστάδες, κενά, βρόχοι ή διακλαδώσεις.

1.4.3 Τοπολογικά χαρακτηριστικά και αναλλοίωτες ιδιότητες

Κεντρική έννοια της τοπολογίας είναι η έννοια της *αναλλοίωτης ιδιότητας*. Τοπολογικές ιδιότητες είναι εκείνες που παραμένουν αμετάβλητες υπό συνεχείς παραμορφώσεις, όπως τέντωμα ή συστροφή, χωρίς σχίσιμο ή συγκόλληση.

Η Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων αξιοποιεί αυτή τη φιλοσοφία, επιδιώκοντας να εντοπίσει χαρακτηριστικά της μορφής των δεδομένων που δεν επηρεάζονται από μικρές παραμορφώσεις ή θόρυβο. Με τον τρόπο αυτό, η ανάλυση εστιάζει σε δομικά στοιχεία που είναι πιο σταθερά και αξιόπιστα.

1.4.4 Κλίμακα, γειτνίαση και πολυπλοκότητα

Ένα από τα βασικά ζητήματα στην ανάλυση δεδομένων είναι η έννοια της κλίμακας. Σε μικρές κλίμακες, τα δεδομένα μπορεί να εμφανίζονται αποσπασματικά και να επηρεάζονται έντονα από θόρυβο. Σε μεγαλύτερες κλίμακες, η συνολική δομή γίνεται πιο εμφανής, αλλά ενδέχεται να χαθούν λεπτομέρειες.

Η Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων εξετάζει τη δομή των δεδομένων σε πολλαπλές κλίμακες, μελετώντας πώς αλλάζει η έννοια της γειτνίασης καθώς μεταβάλλεται το επίπεδο ανάλυσης. Αυτή η πολυκλιμακωτή προσέγγιση επιτρέπει την κατανόηση της πολυπλοκότητας των δεδομένων με συστηματικό τρόπο.

1.4.5 Η έννοια της εμμένουσας ομολογίας

Καθώς μεταβάλλεται η κλίμακα παρατήρησης, ορισμένα δομικά χαρακτηριστικά εμφανίζονται και εξαφανίζονται. Η βασική ιδέα της *εμμένουσας ομολογίας* έγκειται στο ότι τα χαρακτηριστικά που παραμένουν παρόντα σε ένα ευρύ φάσμα κλιμάκων θεωρούνται πιο σημαντικά από εκείνα που εμφανίζονται παροδικά.

Η έννοια αυτή αποτελεί θεμέλιο της Τοπολογικής Ανάλυσης Δεδομένων και παρέχει έναν φυσικό μηχανισμό διάκρισης μεταξύ ουσιαστικής δομής και θορύβου, χωρίς την ανάγκη αυθαίρετων παραμέτρων.

1.4.6 Προοπτική και συνέχεια

Οι έννοιες που παρουσιάστηκαν στην ενότητα αυτή αποτελούν το εννοιολογικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο θα οικοδομηθούν τα μαθηματικά εργαλεία της Τοπολογικής Ανάλυσης Δεδομένων. Στα επόμενα κεφάλαια, οι ιδέες αυτές θα διατυπωθούν με μεγαλύτερη ακρίβεια και θα συνδεθούν με συγκεκριμένες μεθόδους και εφαρμογές.

1.5 Πλεονεκτήματα της Τοπολογικής Ανάλυσης Δεδομένων

Η Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων (Topological Data Analysis – TDA) έχει αναδειχθεί ως ένα ισχυρό και ευέλικτο πλαίσιο για τη μελέτη σύγχρονων συνόλων δεδομένων, ακριβώς επειδή εστιάζει σε χαρακτηριστικά τα οποία συχνά παραμένουν αόρατα στις κλασικές μεθόδους ανάλυσης. Τα πλεονεκτήματά της δεν περιορίζονται σε ένα μεμονωμένο μαθηματικό εργαλείο, αλλά απορρέουν από τη συνολική φιλοσοφία της τοπολογικής προσέγγισης, η οποία αντιμετωπίζει τα δεδομένα ως φορείς μορφής και δομής, και όχι απλώς ως συλλογές αριθμών.

Ένα από τα σημαντικότερα πλεονεκτήματα της TDA είναι η ικανότητά της να αποτυπώνει ολιστικές ιδιότητες της δομής των δεδομένων. Σε πολλές εφαρμογές, η πληροφορία δεν βρίσκεται σε τοπικά χαρακτηριστικά ή σε μεμονωμένες τιμές, αλλά στη συνολική οργάνωση των δεδομένων στον χώρο. Κλασικές στατιστικές μέθοδοι ή μέθοδοι μηχανικής μάθησης συχνά επικεντρώνονται σε τοπικές συσχετίσεις ή σε μέσες συμπεριφορές, αγνοώντας τη συνολική μορφολογία. Αντιθέτως, η τοπολογική ανάλυση στοχεύει στην αναγνώριση δομικών χαρακτηριστικών, όπως η συνδεσιμότητα, η ύπαρξη βρόχων, κοιλοτήτων ή άλλων πολυδιάστατων σχηματισμών, τα οποία μπορεί να είναι κρίσιμα για την κατανόηση του φαινομένου που παράγει τα δεδομένα. Ένα δεύτερο καθοριστικό πλεονέκτημα είναι η ανθεκτικότητα στον θόρυβο και στις ατέλειες των δεδομένων. Στα περισσότερα σύγχρονα προβλήματα, τα δεδομένα είναι θορυβώδη, ελλιπή ή προέρχονται από ατελή δειγματοληψία. Η τοπολογική προσέγγιση βασίζεται σε αναλλοίωτες ιδιότητες, οι οποίες παραμένουν σταθερές υπό μικρές ή και μέτριες διαταραχές. Ως αποτέλεσμα, τα τοπολογικά χαρακτηριστικά που ανιχνεύονται συχνά αντανακλούν ουσιώδη στοιχεία της υπο- κείμενης δομής και όχι τυχαίες διακυμάνσεις. Η ιδιότητα αυτή καθιστά την TDA ιδιαίτερα κατάλληλη για εφαρμογές όπου η ποιότητα των δεδομένων δεν μπορεί να θεωρηθεί δεδομένη. Ιδιαίτερη σημασία έχει επίσης η πολυκλιμακωτή φύση της Τοπολογικής Ανάλυσης Δεδομένων. Πολλά σύνολα δεδομένων παρουσιάζουν διαφορετικές δομές σε διαφορετικές κλίμακες παρατήρησης. Μία ανάλυση σε μία μόνο κλίμακα ενδέχεται να αποκρύπτει σημαντικές πληροφορίες ή να αναδεικνύει τεχνητά μοτίβα. Η TDA επιτρέπει τη μελέτη της εξέλιξης των τοπολογικών χαρακτηριστικών καθώς μεταβάλλεται η κλίμακα, προσφέροντας έτσι μια πιο πλήρη και ρεαλιστική εικόνα της δομής των δεδομένων. Η πολυκλιμακωτή αυτή οπτική αποτελεί βασικό πλεονέκτημα έναντι μεθόδων που λειτουργούν αποκλειστικά σε προκαθορισμένα επίπεδα ανάλυσης. Ένα ακόμη πλεονέκτημα της TDA είναι η ικανότητά της να γεφυρώνει το διακριτό με το συνεχές. Τα δεδομένα παρατηρούνται συνήθως ως πεπερασμένα σύνολα σημείων, ωστόσο συχνά προέρχονται από συνεχείς διεργασίες ή υποκείμενους χώρους. Η τοπολογική ανάλυση επιτρέπει την εξαγωγή πληροφοριών που σχετίζονται με αυτή τη συνεχή δομή, χωρίς να απαιτείται ρητή γνώση ή παραμετρική περιγραφή της. Με τον τρόπο αυτό, λειτουργεί ως ενδιάμεσο επίπεδο ανάμεσα στη γεωμετρική μοντελοποίηση και στις καθαρά διακριτές ή στατιστικές προσεγγίσεις. Από τη σκοπιά της ερμηνευσιμότητας, η Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων προσφέρει μοντέλα και αναπαραστάσεις με υψηλή εννοιολογική διαφάνεια. Τα αποτελέσματά της εκφράζονται συχνά μέσω μαθηματικών δομών, όπως γράφοι ή απλοϊκά σύμπλοκα, τα οποία μπορούν να ερμηνευθούν άμεσα ως αναπαραστάσεις σχέσεων και συνδέσεων μεταξύ δεδομένων. Σε αντίθεση με ορισμένες «μαύρου κουτιού» μεθόδους μηχανικής μάθησης, τα τοπολογικά μοντέλα επιτρέπουν στον αναλυτή να συσχετίσει τα μαθηματικά ευρήματα με συγκεκριμένες δομικές ιδιότητες του προβλήματος, διευκολύνοντας την κατανόηση και την αιτιολόγηση των αποτελεσμάτων. Σημαντικό πλεονέκτημα αποτελεί επίσης η συμπληρωματικότητα της TDA με άλλες μεθόδους ανάλυσης δεδομένων. Η Τοπολογική Ανάλυση Δεδομένων δεν λειτουργεί ανταγωνιστικά προς τη στατιστική ή τη μηχανική μάθηση, αλλά μπορεί να ενσωματωθεί αρμονικά σε υπάρχοντα υπολογιστικά πλαίσια. Τα τοπολογικά χαρακτηριστικά που εξάγονται μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως είσοδοι σε αλγορίθμους μάθησης, να συνδυαστούν με στατιστικά μεγέθη ή να αξιοποιηθούν για την κατανόηση και επικύρωση αποτελεσμάτων. Με τον τρόπο αυτό, η TDA εμπλουτίζει το οπλοστάσιο της ανάλυσης δεδομένων χωρίς να απαιτεί την αντικατάσταση καθιερωμένων τεχνικών.

Τέλος, ένα λιγότερο προφανές αλλά εξίσου σημαντικό πλεονέκτημα της Τοπολογικής Ανάλυσης Δεδομένων είναι η ευρεία εγγύτητά της. Οι βασικές έννοιες της Τοπολογίας δεν εξαρτώνται από τη φύση των δεδομένων, αλλά από τις σχέσεις και τη δομή τους. Ως εκ τούτου, η ίδια τοπολογική μεθοδολογία μπορεί να εφαρμοστεί σε δεδομένα προερχόμενα από εντελώς διαφορε- τικά πεδία, χωρίς ουσιώδεις τροποποιήσεις στο θεωρητικό πλαίσιο. Αυτή η γενικότητα καθιστά την TDA ιδιαίτερα ελκυστική σε διεπιστημονικά περιβάλλοντα, όπου απαιτούνται ενιαία εργαλεία για την ανάλυση ετερογενών προβλημάτων.

Συνολικά, τα πλεονεκτήματα της Τοπολογικής Ανάλυσης Δεδομένων έγκεινται στην ικανότητά της να αποτυπώνει τη μορφή και τη δομή των δεδομένων με τρόπο ανθεκτικό, ερμηνεύσιμο και πολυκλιμακωτό. Συνδυάζοντας αφαιρετική μαθηματική σκέψη με υπολογιστική πρακτικότητα, η TDA προσφέρει ένα ισχυρό εννοιολογικό και μεθοδολογικό πλαίσιο, το οποίο συμπληρώνει τις κλασικές προσεγγίσεις και ανοίγει νέους δρόμους για την κατανόηση πολύπλοκων συνόλων δεδομένων

2 Θεμελιώδεις Έννοιες στην Τοπολογία

2.1 Μαθηματική Λογική και Θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων

Η μαθηματική λογική αποτελεί τον κλάδο των Μαθηματικών που μελετά τις αρχές, τις μορφές και τους κανόνες του έγκυρου συλλογισμού. Δεν ενδιαφέρεται για το περιεχόμενο των μαθηματικών προτάσεων, αλλά για τη δομή τους και για τους τρόπους με τους οποίους από αληθείς προκείμενες προκύπτουν έγκυρα συμπεράσματα. Η ιστορική εξέλιξη της λογικής, από τον Ευκλείδη και τον Αριστοτέλη έως τη σύγχρονη αξιωματική θεώρηση, κατέδειξε ότι τα Μαθηματικά δεν μπορούν να στηριχθούν αποκλειστικά στη γεωμετρική εποπτεία ή στην εμπειρική επαλήθευση. Η ανάγκη για αυστηρή θεμελίωση οδήγησε στην ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων, η οποία παρέχει ένα ενιαίο πλαίσιο ορισμών, αξιωμάτων και αποδεικτικών μεθόδων. Στην ενότητα αυτή μελετούμε τη Λογική όχι μόνο ως φιλοσοφικό στοχασμό, αλλά ως τυπικό σύστημα που καθιστά δυνατή τη διατύπωση και τη θεμελίωση της θεωρίας συνόλων και, κατ' επέκταση, ολόκληρης της σύγχρονης μαθηματικής ανάλυσης.

2.2 Προτασιακή και Κατηγορηματική Λογική

2.2.1 Προτασιακή λογική

Η προτασιακή και η κατηγορηματική λογική αποτελούν τα δύο βασικά επίπεδα ανάλυσης της λογικής δομής των μαθηματικών προτάσεων. Η προτασιακή λογική εξε- τάζει τις σχέσεις μεταξύ προτάσεων ως αδιαίρετων όλων, εστιάζοντας στους λογικούς συνδέσμους και στους κανόνες συμπερασμού. Αντίθετα, η κατηγορηματική λογική διεισδύει στην εσωτερική δομή των προτάσεων, εισάγοντας μεταβλητές, κατηγορήματα και ποσοδείκτες. Η μετάβαση από την προτασιακή στην κατηγορηματική λογική σηματοδοτεί μια ουσιώδη διεύρυνση της εκφρα- στικής δύναμης της λογικής. Καθιστά δυνατή τη διατύπωση γενικών μαθηματικών ισχυρισμών, όπως «για κάθε» ή «υπάρχει», οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την αξιωματική θεμελίωση των μαθηματικών δομών. Η ενότητα αυτή θέτει τα λογικά εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν σε όλο το βιβλίο και λειτουργεί ως αναγκαία προετοιμασία για τη θεωρία συνόλων και τη μαθηματική ανάλυση που ακολουθεί. Σημαντικό εργαλείο τόσο της Προτασιακής όσο και της Κατηγορημα- τικής Λογικής αποτελούν οι *αληθοπίνακες*. Οι αληθοπίνακες επιτρέπουν την πλήρη και συστη- ματική ανάλυση της λογικής συμπεριφοράς μιας πρότασης, καθώς παρέχουν έναν ακριβή και τυπικό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να μελετήσουμε πώς η τιμή αλήθειας μιας σύνθετης λογικής έκφρασης εξαρτάται από τις τιμές αλήθειας των επιμέρους προτασιακών μεταβλητών της. Μέσω των αληθοπινάκων καθίσταται δυνατός ο χαρακτηρισμός ενός λογικού τύπου ως ταυτολογίας, ικανοποιήσιμου ή μη ικανοποιήσιμου, ενώ παράλληλα προσφέρεται ένα σαφές και καθολικό κριτήριο εγκυρότητας λογικών συλλογισμών. Ιδιαίτερα στην Προτασιακή Λογική, οι αληθοπί- νακες λειτουργούν ως βασικό

αποδεικτικό εργαλείο, ενώ στη συνέχεια, σε πιο προχωρημένα λογικά συστήματα, η ιδέα τους επεκτείνεται και προσαρμόζεται σε πιο εκφραστικά πλαίσια.
Ο κύριος σκοπός ενός αληθοπίνακα είναι να προσδιορίσει αν ένας λογικός τύπος είναι:

- *ταυτολογία*, δηλαδή αληθής για κάθε δυνατό συνδυασμό τιμών αλήθειας που μπορούν να λάβουν οι μεταβλητές του,

- *ικανοποιήσιμος*, δηλαδή αληθής για τουλάχιστον έναν δυνατό συνδυασμό τιμών αλήθειας,

- ή *μη ικανοποιήσιμος*.

Στην περίπτωση μιας ταυτολογίας, ο αληθοπίνακας μπορεί να λειτουργήσει ως πλήρης απόδειξη της καθολικής ισχύος του τύπου. Η κατασκευή ενός αληθοπίνακα ακολουθεί μια απλή αλλά απολύτως αυστηρή αλγοριθμική διαδικασία. Δοθέντος ενός λογικού τύπου A, προσδιορίζονται αρχικά οι διακριτές προτασιακές μεταβλητές που εμφανίζονται σε αυτόν. Αν ο αριθμός των μεταβλητών είναι k, τότε υπάρχουν 2^k δυνατοί συνδυασμοί τιμών αλήθειας και, συνεπώς, ο αληθοπίνακας του τύπου A περιέχει 2^k γραμμές. Για κάθε μία από αυτές τις αναθέσεις, υπολογίζονται διαδοχικά οι τιμές αλήθειας όλων των υποτύπων του A, ξεκινώντας από τις βασικές μεταβλητές και καταλήγοντας στην τιμή αλήθειας ολόκληρου του τύπου. Αν ο τύπος A είναι αληθής για κάθε δυνατό συνδυασμό τιμών αλήθειας, τότε είναι ταυτολογία· αν είναι αληθής για τουλάχιστον έναν από αυτούς, τότε είναι ικανοποιήσιμος. Η διαδικασία αυτή αποτελεί παράδειγμα *αποτελεσματικού αλγορίθμου*, με την έννοια ότι για κάθε λογικό τύπο παράγει πάντοτε ένα σαφές και ορθό αποτέλεσμα. Ωστόσο, η υπολογιστική της πολυπλοκότητα είναι εκθετική ως προς τον αριθμό των μεταβλητών, καθώς ο αριθμός των γραμμών του αληθοπίνακα αυξάνεται ως 2^k. Για μεγάλες τιμές του k, η μέθοδος καθίσταται πρακτικά ανεφάρμοστη. Επομένως, αν και οι αληθοπίνακες αποτελούν θεμελιώδες θεωρητικό εργαλείο, η χρήση τους περιορίζεται σε τύπους μικρού μεγέθους. Για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε και να μελετήσουμε αληθοπίνακες, είναι απαραίτητο να εξετάσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι απλές προτασιακές μεταβλητές συνδυάζονται ώστε να σχηματίσουν σύνθετες λογικές εκφράσεις. Ο συνδυασμός αυτός πραγματοποιείται μέσω των λεγόμενων *λογικών συνδέσμων*, οι οποίοι καθορίζουν πώς οι τιμές αλήθειας των επιμέρους προτάσεων επηρεάζουν την τιμή αλήθειας της σύνθετης πρότασης.

Στην Προτασιακή Λογική, οι βασικότεροι λογικοί σύνδεσμοι είναι η *άρνηση*, η *σύζευξη*, η *διάζευξη* και η *συνεπαγωγή*, οι οποίοι συμβολίζονται αντίστοιχα με

$$\neg, \wedge, \vee \text{ και } \rightarrow .$$

Η σημασία των συνδέσμων αυτών καθορίζεται αποκλειστικά από τον τρόπο με τον οποίο ορίζουν την τιμή αλήθειας της σύνθετης πρότασης για κάθε δυνατό συνδυασμό τιμών αλήθειας των επιμέρους προτάσεων, γεγονός που αποτυπώνεται με ακρίβεια μέσω των αληθοπινάκων.

Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται οι βασικοί αληθοπίνακες των λογικών συνδέσμων, όπου T δηλώνει το *αληθές* και F το *ψευδές*.

p	$\neg p$
T	F
F	T

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

Πίνακας 2.1

Αφού ορίσαμε τη σύνταξη των προτασιακών τύπων, ορίζουμε τώρα τη σημασιολογία τους, δηλαδή το τι σημαίνει ένας προτασιακός τύπος να είναι αληθής ή ψευδής. Η αλήθεια ή το ψεύδος ενός τύπου εξαρτάται από τις τιμές αλήθειας των προτασιακών μεταβλητών που εμφανίζονται σε αυτόν. Για παράδειγμα, ο τύπος $p_1 \to p_2$ μπορεί να είναι είτε αληθής είτε ψευδής, ανάλογα με τις τιμές αλήθειας των p_1 και p_2. Για τον λόγο αυτό, ξεκινούμε με τον ορισμό μιας αντιστοίχισης τιμών αλήθειας φ στις προτασιακές μεταβλητές.

Ορισμός 2.2.1 Μια *αντιστοίχιση τιμών αλήθειας* φ είναι μια απεικόνιση

$$\varphi : \{p_1, p_2, p_3, \ldots\} \longrightarrow \{T, F\},$$

η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε προτασιακή μεταβλητή μια τιμή αλήθειας, T ή F.

Ορισμός 2.2.2 Ορισμός της αλήθειας προτασιακών τύπων Έστω φ μια αντιστοίχιση τιμών αλήθειας στις προτασιακές μεταβλητές. Η απεικόνιση φ επεκτείνεται ώστε να έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των προτασιακών τύπων, οριζόμενη αναδρομικά ως εξής:

1. Αν $A = \neg B$, τότε

$$\varphi(A) = \begin{cases} F, & \text{αν } \varphi(B) = T, \\ T, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

2. Αν $A = (B \vee C)$, τότε

$$\varphi(A) = \begin{cases} T, & \text{αν } \varphi(B) = T \text{ ή } \varphi(C) = T, \\ F, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

3. Αν $A = (B \wedge C)$, τότε

$$\varphi(A) = \begin{cases} T, & \text{αν } \varphi(B) = T \text{ και } \varphi(C) = T, \\ F, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

4. Αν $A = (B \to C)$, τότε

$$\varphi(A) = \begin{cases} T, & \text{αν } \varphi(B) = F \text{ ή } \varphi(C) = T, \\ F, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

5. Αν $A = (B \leftrightarrow C)$, τότε

$$\varphi(A) = \begin{cases} T, & \text{αν } \varphi(B) = \varphi(C), \\ F, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Παράδειγμα 2.2.3 Έστω A ο λογικός τύπος $(p \vee q) \to (q \wedge p)$. Στον τύπο αυτό εμφανίζονται μόνο οι προτασιακές μεταβλητές p και q, οπότε η τιμή αλήθειας $\varphi(A)$ του A εξαρτάται αποκλειστικά από τις τιμές αλήθειας $\varphi(p)$ και $\varphi(q)$, ενώ δεν εξαρτάται από την τιμή αλήθειας οποιασδήποτε άλλης μεταβλητής r. Εφόσον οι $\varphi(p)$ και $\varphi(q)$ μπορούν να λάβουν μόνο τις τιμές *Αληθές* (T) ή *Ψευδές* (F), υπάρχουν ακριβώς τέσσερις δυνατοί συνδυασμοί τιμών αλήθειας για τις μεταβλητές p και q. Οι συνδυασμοί αυτοί παρουσιάζονται στις δύο πρώτες στήλες του αληθοπίνακα του Σχήματος 2.2. Η προτελευταία στήλη του ίδιου πίνακα δίνει τις αντίστοιχες

τιμές της $\varphi\big((p \vee q) \to (q \wedge p)\big)$.
Στη δεύτερη γραμμή του Σχήματος 2.2 ισχύει $\varphi(p) = T$ και $\varphi(q) = F$. Σύμφωνα με τον ορισμό των λογικών συνδέσμων, έχουμε $\varphi(p \vee q) = T$ και $\varphi(p \wedge q) = F$. Εφαρμόζοντας εκ νέου τον ορισμό της συνεπαγωγής, προκύπτει ότι

$$\varphi\big((p \vee q) \to (q \wedge p)\big) = F.$$

Δηλαδή, ο τύπος A είναι ψευδής όταν το p είναι αληθές και το q ψευδές.
Έστω τώρα B ο λογικός τύπος $(p \wedge q) \to (q \vee p)$. Η τελευταία στήλη του Σχήματος I.3 παρουσιάζει τις τιμές της $\varphi(B)$ για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών αλήθειας των p και q. Παρατηρούμε ότι $\varphi(B) = T$ σε όλες τις περιπτώσεις· κατά συνέπεια, ο τύπος B είναι *ταυτολογία*, ή ισοδύναμα λέμε ότι είναι *ταυτολογικά έγκυρος*.
Αντίθετα, ο τύπος A είναι αληθής για ορισμένους συνδυασμούς τιμών αλήθειας και ψευδής για άλλους. Επομένως, ο A δεν είναι ταυτολογία· είναι όμως *ικανοποιήσιμος*, αφού υπάρχει τουλάχιστον ένας συνδυασμός τιμών αλήθειας για τον οποίο ο τύπος A είναι αληθής.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \vee q \to p \wedge q$	$p \wedge q \to p \vee q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	T
F	F	F	F	T	T

Πίνακας 2.2 Οι αληθοπίνακες των τύπων $(p \vee q) \to (p \wedge q)$ και $(p \wedge q) \to (p \vee q)$.

Στην ενότητα αυτή παραθέτουμε ορισμένες από τις συνηθέστερες ταυτολογίες και ταυτολογικές ισοδυναμίες. Όλες αυτές μπορούν να αποδειχθούν με τη μέθοδο των αληθοπινάκων.

Απλές ταυτολογίες σε μία μεταβλητή.

$p \vee \neg p$	— Αρχή του αποκλειόμενου τρίτου
$\neg(p \wedge \neg p)$	— Αρχή της μη αντίφασης
$p \to p$	— Αυτοσυνεπαγωγή
$p \leftrightarrow p$	— Αυτοϊσοδυναμία
$\neg\neg p \leftrightarrow p$	— Διπλή άρνηση
$(\neg p \to p) \leftrightarrow p$	— Ισοδυναμία με συνεπαγωγή από άρνηση

Απλές ταυτολογικές ισοδυναμίες.

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	– Νόμοι De Morgan
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	– Νόμοι De Morgan
$p \vee p \Leftrightarrow p$	– Ιδιοδυναμία της $\vee$
$p \wedge p \Leftrightarrow p$	– Ιδιοδυναμία της $\wedge$
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	– Αντιμεταθετικότητα της $\wedge$
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	– Αντιμεταθετικότητα της $\vee$
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$	– Αντιμεταθετικότητα του $\leftrightarrow$
$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	– Προσεταιριστικότητα της $\wedge$
$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	– Προσεταιριστικότητα της $\vee$
$p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$	– Προσεταιριστικότητα του $\leftrightarrow$
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	– Επιμεριστικότητα της $\wedge$ ως προς $\vee$
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	– Επιμεριστικότητα της $\vee$ ως προς $\wedge$
$p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$	– Αντιστροφή (ή Αντιθετοαντιστροφή)
$p \to (q \to r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \to r$	– Εξαγωγή (Exportation)

Ορισμένες ταυτολογίες που χρησιμοποιούνται συχνά ως αξιώματα. Εδώ παραθέτουμε ορισμένες ταυτολογίες οι οποίες χρησιμοποιούνται επίσης ως αξιώματα σε προτασιακά συστήματα αποδείξεων. Διατυπώνονται με ρητές μεταβλητές p, q, r, ωστόσο, γενικά ένα τέτοιο σύστημα επιτρέπει οποιαδήποτε περίπτωση αντικατάστασης ενός αξιώματος να αποτελεί και πάλι αξίωμα. Υπάρχουν πολλές άλλες δυνατές επιλογές αξιωμάτων που έχουν χρησιμοποιηθεί σε προτασιακά συστήματα αποδείξεων. Παρακάτω παρατίθενται ορισμένες από αυτές.

$p \to (q \to p)$	– Αξίωμα για το $\to$.
$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	– Αξίωμα για το $\to$.
$\neg p \to (p \to q)$	– Αξίωμα για το $\neg$.
$(\neg p \to p) \to p$	– Αξίωμα για το $\neg$.
$(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$	– Αξίωμα για το $\neg$.
$p \wedge q \to p$	– Αξίωμα για το $\wedge$.
$p \wedge q \to q$	– Αξίωμα για το $\wedge$.
$p \to (q \to p \wedge q)$	– Αξίωμα για το $\wedge$.
$p \to p \vee q$	– Αξίωμα για το $\vee$.
$q \to p \vee q$	– Αξίωμα για το $\vee$.
$(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r))$	– Αξίωμα για το $\vee$.
$(p \to q) \to ((r \vee p) \to (r \vee q))$	– Αρχή της Προσθετικότητας.
$((p \to q) \to p) \to p$	– Νόμος του Pierce.

Ταυτολογικές ισοδυναμίες που ορίζουν τα $\vee$, $\wedge$ και $\leftrightarrow$. Οι ακόλουθες τρεις ταυτολογικές συνεπαγωγές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον ορισμό των συνδετικών $\vee$, $\wedge$ και $\leftrightarrow$ με όρους των $\neg$ και $\to$. Αυτό αντιστοιχεί στο γεγονός ότι το σύνολο συνδετικών $\{\neg, \to\}$ είναι επαρκές.

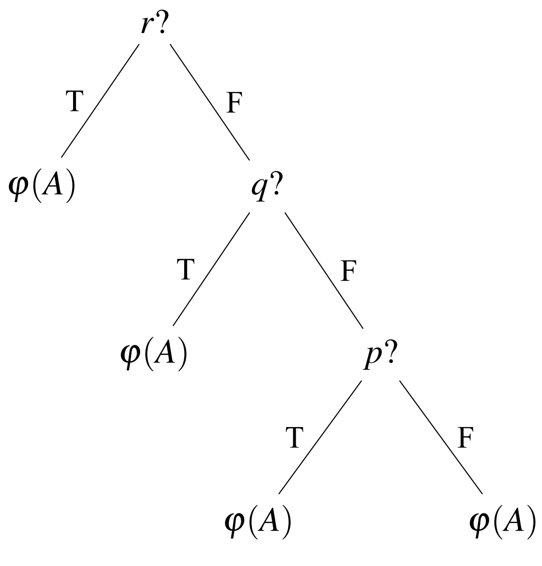
Σχόλιο 2.2.4 Ένα σύνολο λογικών συνδετικών λέγεται *επαρκές* όταν κάθε προτασιακός τύπος μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα χρησιμοποιώντας μόνο λογικούς λογικοί σύνδεσμοισυνδέσμους από το σύνολο αυτό. Στο παρόν πλαίσιο, το σύνολο $\{\neg, \rightarrow\}$ είναι επαρκές, διότι τα λογικοί σύνδεσμοι $\vee$, $\wedge$ και $\leftrightarrow$ μπορούν να οριστούν με όρους της άρνησης και της συνεπαγωγής. Για παράδειγμα,

$$p \vee q \;\Leftrightarrow\; (\neg p \rightarrow q), \qquad p \wedge q \;\Leftrightarrow\; \neg(p \rightarrow \neg q).$$

$$\begin{aligned} p \vee q &\;\Leftrightarrow\; \neg p \rightarrow q && \text{– Ορισμός του } \vee.\\ p \wedge q &\;\Leftrightarrow\; \neg(p \rightarrow \neg q) && \text{– Ορισμός του } \wedge.\\ p \leftrightarrow q &\;\Leftrightarrow\; (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) && \text{– Ορισμός του } \leftrightarrow. \end{aligned}$$

Μειωμένοι πίνακες αληθείας και δέντρα απόφασης. Ένας *μειωμένος πίνακας αληθείας* για έναν προτασιακό τύπο A δεν περιλαμβάνει όλες τις δυνατές τιμές αληθείας των μεταβλητών, αλλά μόνο επιλεγμένους συνδυασμούς τιμών που επαρκούν για να καθοριστεί η τιμή αληθείας του A. Κάθε γραμμή ενός τέτοιου πίνακα προσδιορίζει τις τιμές αληθείας ορισμένων από τις μεταβλητές του τύπου, ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν απροσδιόριστες. Η βασική απαίτηση από έναν μειωμένο πίνακα αληθείας είναι οι γραμμές του να καλύπτουν όλες τις δυνατές πλήρεις περιπτώσεις τιμών αληθείας, με την έννοια ότι κάθε πλήρης συνδυασμός τιμών συμφωνεί με τουλάχιστον μία γραμμή του πίνακα. Για να διασφαλιστεί αυτή η ιδιότητα, οι γραμμές του μειωμένου πίνακα αληθείας οργανώνονται συχνά σύμφωνα με τη δομή ενός *δυαδικού δέντρου απόφασης*.

Ένα δυαδικό δέντρο απόφασης περιγράφει μία διαδικασία κατά την οποία οι μεταβλητές εξετάζονται διαδοχικά, μία κάθε φορά. Σε κάθε εσωτερικό κόμβο του δέντρου ελέγχεται η τιμή αληθείας μίας μεταβλητής και η πορεία συνεχίζεται κατά μήκος του αντίστοιχου κλάδου. Όταν καταλήξουμε σε έναν κόμβο-φύλλο, η τιμή αληθείας του τύπου A καθορίζεται πλήρως. Με αυτόν τον τρόπο, τα δυαδικά δέντρα απόφασης παρέχουν μία συστηματική και δομικά σαφή ερμηνεία των μειωμένων πινάκων αληθείας και εξηγούν γιατί αυτοί επαρκούν για την ανάλυση της λογικής συμπεριφοράς ενός προτασιακού τύπου.



Σχήμα 2.1 *Απεικόνιση του δέντρου απόφασης για την πρόταση A.*

Το δέντρο απόφασης του Σχήματος 2.1 έχει ως ετικέτα της ρίζας τη μεταβλητή r· αυτή είναι η πρώτη μεταβλητή που εξετάζεται. Υπάρχουν δύο ακμές που ξεκινούν από το r, επομένως το r έχει δύο παιδιά. Η πρώτη ακμή φέρει την ετικέτα T, πράγμα που σημαίνει ότι ακολουθείται όταν $\varphi(r) = \mathrm{T}$. Η δεύτερη ακμή φέρει την ετικέτα F και ακολουθείται όταν $\varphi(r) = \mathrm{F}$. Ένας από τους επιγόνους του του r είναι κόμβος–φύλλο με ετικέτα $\varphi(A) = \mathrm{T}$. Αυτό υποδηλώνει ότι, μόλις φτάσουμε σε αυτό το φύλλο, απλοί υπολογισμοί δείχνουν ότι ολόκληρος ο τύπος A έχει τιμή αληθείας T.

Boolean συναρτήσεις. Οι Boolean συναρτήσεις αποτελούν το θεμελιώδες αντικείμενο μελέτης στην προτασιακή λογική και στην άλγεβρα Boole. Διαισθητικά, μία Boolean συνάρτηση περιγράφει έναν κανόνα που, για κάθε συνδυασμό τιμών αληθείας των μεταβλητών της, επιστρέφει μία τιμή αληθείας. Οι προτασιακοί τύποι μπορούν να θεωρηθούν ως συντακτικές αναπαραστάσεις Boolean συναρτήσεων μέσω λογικών συνδέσμων.

Ορισμός 2.2.5 Boolean συνάρτηση Έστω $k \geq 1$. Μία *k-αδική Boolean συνάρτηση* είναι μία απεικόνιση

$$f : \{\mathrm{T},\mathrm{F}\}^k \longrightarrow \{\mathrm{T},\mathrm{F}\}.$$

Δηλαδή, σε κάθε k το πλήθος τιμών αληθείας αντιστοιχίζει μία τιμή αληθείας.

Κάθε προτασιακός τύπος με k μεταβλητές ορίζει μία k-αδική Boolean συνάρτηση μέσω της συνήθους σημασιολογικής ερμηνείας. Αντίστροφα, κάθε Boolean συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί από έναν προτασιακό τύπο.

Παράδειγμα 2.2.6 Τα ακόλουθα ορίζουν δύο Boolean συναρτήσεις $f_{\neg p_1}$ και $f_{p_1 \wedge p_2}$:

$$f_{\neg p_1}(x) = \begin{cases} \mathrm{T} & \text{if } x \text{ equals F} \\ \mathrm{F} & \text{if } x \text{ equal T.} \end{cases}$$

$$f_{p_1 \wedge p_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \mathrm{T} & \text{if } x_1 \text{ and } x_2 \text{ both equal T} \\ \mathrm{F} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Γλώσσες και επάρκεια. Ένα σύνολο L προτασιακών *λογικών συνδέσμων* ονομάζεται *γλώσσα*. Μέχρι τώρα έχουμε εργαστεί με τη γλώσσα

$$L = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\},$$

ωστόσο υπάρχουν και άλλοι λογικοί σύνδεσμοι, όπως για παράδειγμα ο $\oplus$ (ισοτιμία), ο $\top$ (η σταθερά T) και ο $\perp$ (η σταθερά F).

Θεώρημα 2.2.7 Έστω L μία (προτασιακή) γλώσσα. Ένας *L-τύπος* είναι ένας προτασιακός τύπος που χρησιμοποιεί μόνο προτασιακούς λογικούς συνδέσμους από το L.

Μέχρι τώρα στο παρόν κεφάλαιο ο όρος “τύπος” σήμαινε πάντοτε “$\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$-τύπος”.

Θεώρημα 2.2.8 Μία γλώσσα L λέγεται *επαρκής* αν κάθε Boolean συνάρτηση αναπαρίσταται από κάποιον L-τύπο.

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι ορισμένες γλώσσες είναι επαρκείς.

Θεώρημα 2.2.9 Οι γλώσσες $\{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ και $\{\neg, \vee, \wedge\}$ είναι και οι δύο επαρκείς.

Παρατηρούμε ότι αν $L_1 \subseteq L_2$ και η L_1 είναι επαρκής, τότε και η L_2 είναι επαρκής. Αυτό προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι κάθε L_1-τύπος είναι και L_2-τύπος.

Το προηγούμενο θεώρημα μπορεί να ενισχυθεί ως εξής.

Θεώρημα 2.2.10 Οι γλώσσες $\{\neg, \vee\}$ και $\{\neg, \wedge\}$ είναι και οι δύο επαρκείς.

Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της Προτασιακής Λογικής

Η προτασιακή λογική αποτελεί το απλούστερο και πιο θεμελιώδες σύστημα τυπικής λογικής. Παρά την περιορισμένη εκφραστική της ισχύ, διαθέτει σημαντικά θεωρητικά και υπολογιστικά πλεονεκτήματα, τα οποία την καθιστούν ιδιαίτερα χρήσιμη σε πλήθος εφαρμογών.

Πλεονεκτήματα

- *Απλότητα σύνταξης.* Οι προτάσεις της προτασιακής λογικής αποτελούνται από ατομικές προτάσεις και λογικά λογικοί σύνδεσμοι, χωρίς αναφορά σε αντικείμενα ή σχέσεις. Η απλότητα αυτή διευκολύνει τόσο την κατανόηση όσο και την τυπική επεξεργασία.
- *Απλός μηχανισμός συμπερασμού.* Ένα μικρό και πεπερασμένο σύνολο κανόνων συμπερασμού (π.χ. Modus Ponens) επαρκεί για την απόδειξη της εγκυρότητας οποιασδήποτε προτασιακής συνέπειας.
- *Αποφασισιμότητα (decidability).* Για κάθε προτασιακή πρόταση υπάρχει αλγοριθμική διαδικασία που αποφασίζει σε πεπερασμένο χρόνο αν είναι ταυτολογία, αντιφατική ή ικανο- ποιήσιμη, π.χ. μέσω πινάκων αλήθειας.

Μειονεκτήματα

- *Έλλειψη γενικότητας.* Η προτασιακή λογική δεν επιτρέπει τη διατύπωση γενικών ισχυρισμών, όπως προτάσεις που ισχύουν για όλα ή για ορισμένα αντικείμενα ενός κόσμου.
- *Απουσία αντικειμένων και σχέσεων.* Το σύστημα αγνοεί τη δομή της πραγματικότητας και αντιμετωπίζει τον κόσμο αποκλειστικά ως σύνολο ανεξάρτητων γεγονότων που είναι είτε αληθή είτε ψευδή.
- *Αδυναμία αναπαράστασης οντοτήτων.* Δεν υπάρχει δυνατότητα διάκρισης, αναφοράς ή πρόσβασης σε επιμέρους οντότητες του κόσμου, ούτε έκφρασης σχέσεων μεταξύ τους.

Σχόλιο 2.2.11 Οι παραπάνω περιορισμοί καθιστούν την προτασιακή λογική ανεπαρκή για την τυπική περιγραφή σύνθετων μαθηματικών ή πραγματικών δομών. Η ανάγκη αναφοράς σε αντικείμενα, σχέσεις και γενικούς κανόνες οδηγεί φυσικά στη λογική πρώτης τάξης, η οποία επεκτείνει την προτασιακή λογική διατηρώντας παράλληλα τη θεμελιώδη λογική της δομή.

2.2.2 Κατηγορηματική Λογική

Η κατηγορηματική λογική αποτελεί φυσική και ουσιώδη επέκταση της προτασιακής λογικής. Ενώ η προτασιακή λογική περιορίζεται στη μελέτη ατομικών γεγονότων που είναι είτε αληθή είτε ψευδή, η κατηγορηματική λογική εισάγει έναν πλουσιότερο μηχανισμό περιγραφής της πραγματικότητας, επιτρέποντας την αναφορά σε αντικείμενα, ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ αντικειμένων. Στο πλαίσιο της κατηγορηματικής λογικής, ο κόσμος δεν αντιμετωπίζεται ως ένα απλό σύνολο ανεξάρτητων γεγονότων, αλλά ως μία δομημένη συλλογή οντοτήτων. Κάθε οντότητα μπορεί να διαθέτει ιδιότητες και να συμμετέχει σε σχέσεις με άλλες οντότητες. Με τον τρόπο αυτό, καθίσταται δυνατή η αναπαράσταση της εσωτερικής δομής της πραγματικότητας, κάτι που δεν είναι εφικτό στην προτασιακή λογική. Ένα από τα βασικά προβλήματα της προτασιακής λογικής είναι η αδυναμία πρόσβασης στα επιμέρους στοιχεία που συνθέτουν ένα γεγονός. Για παράδειγμα, μια πρόταση της προτασιακής λογικής καταγράφει απλώς την ισχύ ενός γεγονότος, χωρίς να περιέχει πληροφορία σχετικά με τα αντικείμενα που εμπλέκονται ή τις ιδιότητες και τις σχέσεις που τα χαρακτηρίζουν. Η κατηγορη- ματική λογική αντιμετωπίζει το πρόβλημα αυτό εισάγοντας κατηγορήματα, τα οποία εφαρμό- ζονται σε όρους και εκφράζουν ρητά ιδιότητες ή σχέσεις αντικειμένων. Ιδιαίτερη σημασία έχει η εισαγωγή μεταβλητών, οι οποίες αυξάνουν δραστικά την εκφραστική ικανότητα του συστήματος. Οι μεταβλητές επιτρέπουν τη διατύπωση γενικών ισχυρισμών και τη μοντελοποίηση "γενικής" γνώσης, δηλαδή προτάσεων που δεν αναφέρονται σε συγκεκριμένα αντικείμενα αλλά σε ολό- κληρες κατηγορίες αντικειμένων. Η γενικότητα αυτή αποτελεί θεμελιώδες χαρακτηριστικό της μαθηματικής και λογικής σκέψης.

Συνοψίζοντας, η κατηγορηματική λογική επεκτείνει την προτασιακή λογική εισάγοντας:

- *όρους* (terms), οι οποίοι παριστάνουν αντικείμενα,
- *κατηγορήματα* (predicates), τα οποία εκφράζουν ιδιότητες και σχέσεις αντικειμένων,
- *ποσοδείκτες* (quantifiers), οι οποίοι επιτρέπουν τη διατύπωση καθολικών και υπαρξιακών ισχυρισμών.

Η επέκταση αυτή καθιστά την κατηγορηματική λογική κατάλληλο εργαλείο για την τυπική περιγραφή σύνθετων δομών και αποτελεί τη βάση για τη μελέτη της σημασιολογίας, των μοντέλων και, γενικότερα, της θεμελίωσης των μαθηματικών.

2.2.2.1 Αλφάβητο και Σύμβολα της Κατηγορηματικής Λογικής Πρώτης Τάξης

Μία γλώσσα κατηγορηματικής λογικής πρώτης τάξης L καθορίζεται, σε *συντακτικό επίπεδο*, από το *αλφάβητό* της, δηλαδή από το σύνολο των συμβόλων που επιτρέπεται να χρησιμοποιούνται για τη συγγραφή όρων και λογικών εκφράσεων. Η γλώσσα L αποτελείται αποκλειστικά από σύμβολα και κανόνες σύνθεσής τους. Στο παρόν στάδιο, τα σύμβολα αυτά δεν φέρουν κανένα εγγενές νόημα και δεν αναφέρονται σε συγκεκριμένα αντικείμενα ή γεγονότα. Ο ρόλος της γλώσσας είναι να καθορίζει *πώς* επιτρέπεται να διατυπώνονται εκφράσεις, και όχι *τι* αυτές σημαίνουν. Η απόδοση σημασιολογικού περιεχομένου στα σύμβολα της γλώσσας εισάγεται αργότερα, στο πλαίσιο της σημασιολογίας, μέσω της έννοιας της ερμηνείας και της δομής. Προς το παρόν, η ανάλυση περιορίζεται αποκλειστικά στο συντακτικό επίπεδο. Με βάση τα παραπάνω, σε μία γλώσσα κατηγορηματικής λογικής πρώτης τάξης L διακρίνουμε τα εξής βασικά είδη συμβόλων.

Σύμβολα σταθερών (constants) Τα *σύμβολα σταθερών* παριστάνουν συγκεκριμένα αντικείμενα. Δηλαδή, είναι "ονόματα" αντικειμένων του κόσμου που περιγράφουμε. Τυπικά τα συμβολίζουμε με

$$c, d, e, \ldots.$$

- Παραδείγματα: *Μαρία*, *Πέτρος*, a, b.
- Σε αριθμητικά παραδείγματα μπορεί να εμφανιστούν και σύμβολα όπως $0, 1, 3$ κ.ο.κ.

Σχόλιο 2.2.12 Το ότι γράφουμε *Μαρία* δεν σημαίνει ακόμη ότι "είναι" η *Μαρία*. Αυτό θα καθοριστεί μόνο όταν δώσουμε μία *ερμηνεία* (μία L-δομή $\mathscr{A}$), όπου θα αντιστοιχηθεί σε ένα στοιχείο $\textit{Μαρία}^{\mathscr{A}} \in |\mathscr{A}|$.

Σύμβολα μεταβλητών (variables) Τα *σύμβολα μεταβλητών* παριστάνουν αντικείμενα που δεν έχουν κατονομαστεί ρητά. Είναι "θέσεις" που μπορούν να πάρουν τιμές από το σύμπαν μιας δομής. Συνήθως συμβολίζονται με

$$x, y, z, \ldots \text{ ή } X, Y, Z, \ldots.$$

- Παραδείγματα: x, y, z, X, Y, Z.

Οι μεταβλητές αποκτούν συγκεκριμένη τιμή μόνο όταν τις συνοδεύει κάποια *ανάθεση* (assignment), π.χ. $x \mapsto a$, ή όταν εμφανίζονται κάτω από ποσοδείκτες όπως $\forall x$ και $\exists x$.

Σύμβολα συναρτήσεων (function symbols) Τα *σύμβολα συναρτήσεων* παριστάνουν συναρτήσεις. Κάθε σύμβολο συνάρτησης έχει μία *τάξη* (ή *αριότητα*), δηλαδή τον αριθμό των ορισμάτων που δέχεται. Τυπικά τα συμβολίζουμε με $f, g, h, \ldots$.

- Μια *μοναδιαία* (1-αδική) συνάρτηση f δέχεται ένα όρισμα: $f(t)$.
- Μια *δυαδική* (2-αδική) συνάρτηση g δέχεται δύο ορίσματα: $g(t_1, t_2)$.
- Γενικά, μια k-αδική συνάρτηση γράφεται $f(t_1, \ldots, t_k)$.

Όταν δώσουμε μία L-δομή $\mathscr{A}$, κάθε k-αδικό σύμβολο συνάρτησης f θα ερμηνευθεί ως πραγματική συνάρτηση

$$f^{\mathscr{A}} : |\mathscr{A}|^k \longrightarrow |\mathscr{A}|.$$

Παράδειγμα 2.2.13 (Οικογενειακές σχέσεις). Έστω ότι θέλουμε να περιγράψουμε ανθρώπους και βασικές οικογενειακές σχέσεις. Επιλέγουμε σύμβολα:

- σταθερές: $\text{Πέτρος}, \text{Μαρία}, \text{Γιώργος}$,
- 1-αδική συνάρτηση: $\text{Πατέρας}(\cdot)$ (“ο πατέρας του $\cdot$”),
- 2-αδική συνάρτηση: $(\cdot,\cdot)$ (“το παιδί των $\cdot,\cdot$”).

Τότε συντακτικά μπορούμε να γράψουμε όρους όπως:

$$\textit{Πατέρας}, (\textit{Πέτρος}), \qquad \textit{Πατέρας}(\textit{Πατέρας}(\textit{Πέτρος})), \qquad \textit{Παιδί}(\textit{Γιώργος}, \textit{Μαρία}).$$

Η έκφραση $\textit{Πατέρας}(\textit{Πέτρος})$ είναι *όρος* που παριστάνει “τον πατέρα του Πέτρου”. Ομοίως, ο όρος $\textit{Πατέρας}(\textit{Πατέρας}(\textit{Πέτρος}))$ παριστάνει “τον πατέρα του πατέρα του Πέτρου” (δηλαδή τον παππού του Πέτρου από την πλευρά του πατέρα). Αντίστοιχα, ο όρος $\textit{Παιδί}(\textit{Γιώργος}, \textit{Μαρία})$ παριστάνει “το παιδί του Γιώργου και της Μαρίας”.

Όροι με μεταβλητές. Οι μεταβλητές επιτρέπουν να εκφράζουμε γενικότερα “ερωτήματα” ή περιγραφές. Για παράδειγμα, ο όρος $\textit{Γιώργος}(\textit{Παιδί}, X)$ δεν είναι συγκεκριμένο αντικείμενο, αλλά *εξαρτάται* από την τιμή της μεταβλητής X. Αφού οριστεί μία δομή $\mathscr{A}$ και δοθεί τιμή στο X, ο όρος αποκτά συγκεκριμένη ερμηνεία ως στοιχείο του $|\mathscr{A}|$.
Σύμβολα κατηγορημάτων (predicate symbols) *(για πληρότητα)* Συχνά, μαζί με τα παραπάνω, χρησιμοποιούμε και *σύμβολα κατηγορημάτων* (ή *σχέσεων*). Κάθε k-αδικό κατηγόρημα P παριστάνει μία σχέση μεταξύ k αντικειμένων και σε μια δομή $\mathscr{A}$ ερμηνεύεται ως υποσύνολο $P^{\mathscr{A}} \subseteq |\mathscr{A}|^k$. Για παράδειγμα, ένα 2-αδικό κατηγόρημα $\textit{Γονέας}(x, y)$ μπορεί να σημαίνει “ο x είναι γονέας του y”, ενώ ένα 1-αδικό κατηγόρημα (x) μπορεί να σημαίνει “ο x είναι άνθρωπος”.

Στο παρόν σημείο η ανάλυση παραμένει αυστηρά *συντακτική*. Οι όροι και τα κατηγορήματα αντιμετωπίζονται ως τυπικές εκφράσεις της γλώσσας, χωρίς καμία αναφορά στο τι *σημαίνουν* ή σε ποια αντικείμενα ενδέχεται να αντιστοιχούν. Η ερμηνεία τους θα εισαχθεί σε μεταγενέστερο στάδιο, στο πλαίσιο της σημασιολογίας της κατηγορηματικής λογικής.

2.2.3 Όροι και Κατηγορήματα

Στην κατηγορηματική λογική η διάκριση μεταξύ όρων και κατηγορημάτων αποτελεί βασικό δομικό στοιχείο της γλώσσας. Οι όροι χρησιμοποιούνται για την αναφορά σε αντικείμενα, ενώ τα κατηγορήματα εκφράζουν ιδιότητες αντικειμένων ή σχέσεις μεταξύ αντικειμένων.
Όροι Οι *όροι* είναι συντακτικές εκφράσεις που παριστάνουν αντικείμενα. Αποτελούν τον βασικό μηχανισμό με τον οποίο η γλώσσα αναφέρεται στα στοιχεία του κόσμου που περιγράφουμε. Οι επιτρεπτοί όροι ορίζονται επαγωγικά ως εξής:

- κάθε σύμβολο σταθεράς είναι όρος,
- κάθε μεταβλητή είναι όρος,
- αν f είναι k-αδικό σύμβολο συνάρτησης και $t_1, \ldots, t_k$ είναι όροι, τότε και η έκφραση

$$f(t_1, \ldots, t_k)$$

είναι όρος.

Η τελευταία περίπτωση επιτρέπει τη *σύνθεση όρων*, δηλαδή τη δημιουργία πιο σύνθετων όρων από απλούστερους. Για παράδειγμα, αν το *Μάνα* είναι 1-αδικό σύμβολο συνάρτησης και το *Πέτρος* σύμβολο σταθεράς, τότε ο όρος

$$\textit{Μάνα}(\textit{Πέτρος})$$

παριστάνει ένα αντικείμενο, ενώ ο όρος

$$\textit{Μάνα}(\textit{Μάνα}(\textit{Πέτρος}))$$

παριστάνει ένα διαφορετικό αντικείμενο, το οποίο προκύπτει μέσω διαδοχικής εφαρμογής της ίδιας συνάρτησης. Σημαντικό είναι ότι οι όροι, από μόνοι τους, δεν έχουν τιμή αλήθειας. Αποκτούν νόημα μόνο όταν ερμηνεύονται μέσα σε μία δομή, οπότε αντιστοιχίζονται σε συγκεκριμένα αντικείμενα του σύμπαντος.

Κατηγόρημα Με βάση την προηγούμενη ανάλυση και τη διάκριση μεταξύ όρων και εκφράσεων με τιμή αλήθειας, προχωρούμε τώρα στον αυστηρό μαθηματικό ορισμό της έννοιας του κατηγορήματος στην κατηγορηματική λογική.

Ορισμός 2.2.14 Κατηγόρημα ονομάζεται μία λογική έκφραση που περιέχει πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών και δεν έχει καθορισμένη τιμή αλήθειας. Η έκφραση αυτή μετατρέπε- ται σε λογική πρόταση όταν οι μεταβλητές της αντικαθίστανται από συγκεκριμένους όρους ή, ισοδύναμα, όταν δεσμεύονται μέσω ποσοδεικτών.

Τα *κατηγορήματα* παριστάνουν σχέσεις ή ιδιότητες αντικειμένων. Κάθε κατηγόρημα έχει μία *τάξη* (αριθμός ορισμάτων), η οποία καθορίζει το πλήθος των ορισμάτων που δέχεται. Αν P είναι k-αδικό κατηγόρημα και $t_1, \ldots, t_k$ είναι όροι, τότε η έκφραση

$$P(t_1, \ldots, t_k)$$

είναι μία *ατομική πρόταση*.

Σε αντίθεση με τους όρους, οι ατομικές προτάσεις έχουν τιμή αλήθειας (αληθής ή ψευδής), η οποία καθορίζεται από την ερμηνεία του κατηγορήματος στη δομή.

Παράδειγμα 2.2.15 Έστω ότι χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα σύμβολα:

- σταθερές: *Γιώργος*, *Μαρία*, *Πέτρος*,
- σύμβολο συνάρτησης: $\textit{Μάνα}(\cdot)$,
- κατηγορήματα: $\textit{Αγαπά}(\cdot,\cdot)$, $\textit{Οικογένεια}(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\textit{Ψηλός}(\cdot)$.

Τότε οι ακόλουθες εκφράσεις είναι ατομικές προτάσεις:

$$\textit{Αγαπά}(\textit{Γιώργος}, \textit{Μαρία}), \qquad \textit{Αγαπά}(\textit{Γιώργος}, \textit{Μάνα}(\textit{Πέτρος})),$$

$$\textit{Οικογένεια}(\textit{Γιώργος}, \textit{Μαρία}, \textit{Πέτρος}), \qquad \textit{Ψηλός}(\textit{Γιώργος}).$$

Επιπλέον, η χρήση μεταβλητών επιτρέπει τη διατύπωση γενικότερων μορφών:

$$\textit{Οικογένεια}(X, Y, \textit{Παιδί}(X, Y)).$$

Η παραπάνω έκφραση δεν δηλώνει ένα συγκεκριμένο γεγονός, αλλά μία συντακτική μορφή η οποία αποκτά τιμή αλήθειας μόνο αφού δοθεί ερμηνεία στα σύμβολα και τιμές στις μεταβλητές.

Συνοψίζοντας, οι όροι παριστάνουν αντικείμενα, ενώ τα κατηγορήματα εκφράζουν ιδιότητες και σχέσεις μεταξύ αντικειμένων. Η διάκριση αυτή αποτελεί τον πυρήνα της κατηγορηματικής λογικής και καθιστά δυνατή τη μετάβαση από απλές προτάσεις αλήθειας στη μελέτη δομημένων μαθηματικών κόσμων.

2.2.4 Ποσοδείκτες

Οι ποσοδείκτες επιτρέπουν τη διατύπωση προτάσεων που αναφέρονται σε όλα ή σε ορισμένα αντικείμενα του σύμπαντος μιας δομής. Οι βασικοί ποσοδείκτες είναι:

- ο *καθολικός ποσοδείκτης* $\forall$ («για κάθε»),
- ο *υπαρξιακός ποσοδείκτης* $\exists$ («υπάρχει τουλάχιστον ένα»).

Οι ποσοδείκτες εφαρμόζονται σε μεταβλητές και δεσμεύουν τις εμφανίσεις τους μέσα σε μία πρόταση.

Σημεία στίξης και σύμβολα αλήθειας Για τη σωστή σύνταξη των εκφράσεων χρησιμοποιούνται παρενθέσεις και κόμματα, δηλαδή τα σύμβολα $(\ )$ και ,. Για λόγους αναγνωσιμότητας, και όπου αυτό δεν δημιουργεί ασάφεια, χρησιμοποιούνται επίσης τετράγωνες παρενθέσεις $[]$. Επιπλέον, χρησιμοποιούνται δύο σύμβολα αλήθειας:

$$\mathsf{T}\ (\text{αληθές}), \qquad \mathsf{F}\ (\text{ψευδές}).$$

Όροι Ένας *όρος* της κατηγορηματικής λογικής ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

- κάθε σύμβολο σταθεράς είναι όρος,
- κάθε μεταβλητή είναι όρος,
- αν f είναι συναρτησιακό σύμβολο τάξης n και $t_1, \ldots, t_n$ είναι όροι, τότε και η έκφραση $f(t_1, \ldots, t_n)$ είναι όρος.

Σημαντικό είναι ότι οι όροι, από μόνοι τους, δεν έχουν τιμή αλήθειας. Αποκτούν νόημα μόνο όταν ερμηνεύονται μέσα σε μία δομή, οπότε αντιστοιχίζονται σε συγκεκριμένα αντικείμενα του σύμπαντος αναφοράς.

Ατομικοί τύποι Ένας *ατομικός τύπος* έχει τη μορφή

$$p(a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

όπου p είναι σύμβολο κατηγορήματος τάξης n και $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι όροι. Κάθε όρισμα ενός κατηγορήματος είναι πάντοτε όρος.

Ορθά δομημένοι τύποι Οι *ορθά δομημένοι τύποι* (well-formed formulas) προκύπτουν από ατομικούς τύπους μέσω της χρήσης λογικών συνδετικών και ποσοδεικτών. Σε αντίθεση με την προτασιακή λογική, οι ορθά δομημένοι τύποι της κατηγορηματικής λογικής περιέχουν μεταβλητές, οι οποίες μπορεί να είναι ελεύθερες ή δεσμευμένες.

Παράδειγμα ορθά δομημένου τύπου είναι:

$$\forall X \big(\text{Θηλαστικό}(X) \to \text{Αναπνέει}(X)\big).$$

Επιτρεπτές προτάσεις (τύποι) Οι επιτρεπτές προτάσεις, ή απλώς τύποι, ορίζονται επαγωγικά ως εξής:

1. **Ατομικές προτάσεις.** Αν P είναι k-αδικό κατηγόρημα και $t_1, \ldots, t_k$ είναι όροι, τότε η έκφραση

$$P(t_1, \ldots, t_k)$$

είναι επιτρεπτή πρόταση (ατομικός τύπος).

2. **Σύνθετες προτάσεις.** Αν P και Q είναι επιτρεπτές προτάσεις, τότε επιτρεπτές είναι και οι εκφράσεις

$$\neg P, \quad (P \wedge Q), \quad (P \vee Q), \quad (P \to Q), \quad (P \leftrightarrow Q).$$

3. **Ποσοδεικτούμενες προτάσεις.** Αν P είναι επιτρεπτή πρόταση και X μεταβλητή, τότε επιτρεπτές είναι και οι προτάσεις

$$\forall X(P), \qquad \exists X(P).$$

Σχόλιο 2.2.16 Η επαγωγική αυτή κατασκευή διασφαλίζει ότι κάθε επιτρεπτή πρόταση έχει καλά ορισμένη συντακτική δομή. Η έννοια της αλήθειας ή του ψεύδους εισάγεται σε επόμενο στάδιο, μέσω της σημασιολογικής ερμηνείας των τύπων σε μία δομή. Μέχρι το σημείο αυτό, η ανάλυση είναι αποκλειστικά συντακτική: εξετάστηκαν οι όροι, τα κατηγορήματα, οι μεταβλητές και οι ποσοδείκτες, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο συνδυάζονται ώστε να σχηματίζουν καλά ορισμένες λογικές εκφράσεις. Η σύνδεση των τύπων με το νόημά τους πραγματοποιείται στη συνέχεια, στο πλαίσιο της σημασιολογίας της κατηγορηματικής λογικής.

2.2.4.1 Σημασιολογία της Κατηγορηματικής Λογικής

Για την ερμηνεία των παραπάνω τύπων και την απόδοση τιμών αλήθειας απαιτείται ο ορισμός της σημασιολογίας, η οποία εισάγεται στην επόμενη ενότητα. Μέχρι το σημείο αυτό, η ανάλυση επικεντρώθηκε αποκλειστικά στη συντακτική δομή της κατηγορηματικής λογικής πρώτης τάξης. Εξετάστηκαν οι όροι, τα κατηγορήματα, οι μεταβλητές και οι ποσοδείκτες, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο αυτοί συνδυάζονται ώστε να σχηματίζουν καλά ορισμένες λογικές εκφράσεις. Η προσέγγιση αυτή καθορίζει πώς γράφονται σωστά οι τύποι, χωρίς όμως να απαντά στο ερώτημα τι σημαίνουν. Στη συνέχεια, στρεφόμαστε στη σημασιολογία της κατηγορηματικής λογικής πρώτης τάξης. Στόχος είναι να προσδιοριστεί με ακρίβεια πότε μία λογική πρόταση θεωρείται αληθής ή ψευδής, σε σχέση με έναν συγκεκριμένο κόσμο αναφοράς. Η σημασιολογική θεώρηση εισάγει έννοιες όπως οι δομές, οι ερμηνείες και οι αναθέσεις τιμών στις μεταβλητές, παρέχοντας το απαραίτητο πλαίσιο για τη σύνδεση των συντακτικών τύπων με το νόημά τους. Προκειμένου να αποδώσουμε ση- μασιολογικό περιεχόμενο στους συντακτικά ορθούς τύπους που έχουν ήδη εισαχθεί, ξεκινάμε εισάγοντας την έννοια ενός *αφηρημένου κόσμου* ή *πεδίου* (*domain*), το οποίο λειτουργεί ως το σύμπαν αναφοράς της λογικής.

Αφηρημένος κόσμος (πεδίο) Ο *αφηρημένος κόσμος* αποτελείται από ένα σύνολο αντικειμένων και από σχέσεις που ορίζονται πάνω σε αυτά. Οι σχέσεις αυτές μπορεί να αφορούν ένα μόνο αντικείμενο, οπότε εκφράζουν *ιδιότητες*, ή περισσότερα αντικείμενα, οπότε εκφράζουν *σχέσεις* μεταξύ τους. Με τον τρόπο αυτό, ο κόσμος περιγράφεται ως μία δομημένη συλλογή οντοτήτων και σχέσεων.

Ερμηνεία Μία *ερμηνεία* αντιστοιχίζει τα σύμβολα της κατηγορηματικής λογικής σε στοιχεία του αφηρημένου κόσμου. Συγκεκριμένα, η ερμηνεία αποδίδει:

- σε κάθε σύμβολο σταθεράς ένα συγκεκριμένο αντικείμενο του πεδίου,
- σε κάθε συναρτησιακό σύμβολο μία συνάρτηση επί του πεδίου,
- σε κάθε σύμβολο κατηγορήματος μία σχέση πάνω στο πεδίο.

Με τον τρόπο αυτό, οι όροι και οι ατομικοί τύποι της λογικής συνδέονται άμεσα με αντικείμενα και σχέσεις του κόσμου. Αξίζει να τονιστεί ότι η ερμηνεία δεν αποτελεί μέρος της ίδιας της γλώσσας, αλλά εξωτερική δομή που της αποδίδει νόημα. Η ίδια συντακτική έκφραση μπορεί να έχει διαφορετική τιμή αλήθειας σε διαφορετικούς αφηρημένους κόσμους, ανάλογα με την ερμηνεία που επιλέγεται.

Ανάθεση όρων Η διαδικασία με την οποία οι όροι της γλώσσας αντιστοιχίζονται σε αντικείμενα του πεδίου ονομάζεται *ανάθεση όρων* (term assignment). Οι σταθερές αναφέρονται άμεσα σε συγκεκριμένα αντικείμενα, ενώ οι συναρτησιακοί όροι αντιπροσωπεύουν αντικείμενα τα οποία περιγράφονται έμμεσα, μέσω της εφαρμογής συναρτήσεων σε άλλα αντικείμενα. Η ανάθεση όρων είναι απαραί- τητη για την αξιολόγηση τύπων που περιέχουν ελεύθερες μεταβλητές και προηγείται λογικά της ποσοδεικτοποίησής τους.

Ατομικοί τύποι Ένας *ατομικός τύπος* απεικονίζει μία σχέση μεταξύ μιας διατεταγμένης πλειάδας αντικειμένων του κόσμου. Αφού δοθεί ερμηνεία και ανάθεση όρων, ο ατομικός τύπος μπορεί να αξιολογηθεί ως *αληθής* ή *ψευδής*, ανάλογα με το αν η αντίστοιχη πλειάδα αντικειμένων ανήκει ή όχι στη σχέση που ερμηνεύει το κατηγόρημα.

Σχόλιο 2.2.17 Η διάκριση μεταξύ του συντακτικού της γλώσσας και της σημασιολογίας της είναι θεμελιώδης. Το συντακτικό καθορίζει ποιες εκφράσεις είναι ορθά δομημένες, ενώ η σημασιολογία καθορίζει πώς αυτές οι εκφράσεις αναφέρονται σε έναν αφηρημένο κόσμο και πότε είναι αληθείς ή ψευδείς. Η έννοια της ερμηνείας επιτρέπει έτσι τη μελέτη της αλήθειας με τρόπο αυστηρό και ανεξάρτητο από τη συγκεκριμένη μορφή της γλώσσας.

Δομές και ο Ορισμός της Αλήθειας στη κατηγορηματική λογική. Ο ορισμός της αλήθειας είναι αισθητά πιο σύνθετος στη λογική πρώτης τάξης απ' ό,τι στην προτασιακή λογική. Στην προτασιακή λογική, οι τύποι περιέχουν τους λογικούς συνδέσμους

$$\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow,$$

οι οποίοι έχουν σταθερά σημασιολογικά νοήματα, καθώς και προτασιακές μεταβλητές p_i που λαμβάνουν μόνο δύο δυνατές τιμές. Για να οριστεί η τιμή αληθείας ενός προτασιακού τύπου, αρκεί να ξεκινήσει κανείς από μία συνάρτηση τιμών αληθείας φ που αντιστοιχίζει τιμές αληθείας στις μεταβλητές. Αντίθετα, οι τύποι της κατηγορηματικής λογικής χρησιμοποιούν τους λογικούς συνδέσμους

$$\neg, \vee, \wedge, \to, \leftrightarrow, \forall, \exists$$

καθώς και το σύμβολο ισότητας $=$, τα οποία έχουν σταθερά νοήματα. Επιπλέον, χρησιμοποιούν μεταβλητές x_i που κυμαίνονται σε κάποιο σύνολο αντικειμένων (πεδίο αναφοράς), καθώς και σύμβολα σταθερών, συναρτήσεων και κατηγορημάτων. Πριν μπορέσει να αποδοθεί τιμή αληθείας σε έναν τύπο κατηγορηματικής λογικής πρώτης τάξης, είναι αναγκαίο να καθοριστεί ένα πεδίο αντικειμένων, να προσδιορι- στεί ποια αντικείμενα αντιστοιχούν στα σύμβολα σταθερών, και να δοθούν οι τιμές όλων των συναρτήσεων και κατηγορημάτων για κάθε δυνατή είσοδο από το πεδίο. Όλες αυτές οι πληροφο- ρίες ονομάζονται μία *ερμηνεία* ή μία *δομή*. Αν ο τύπος περιέχει ελεύθερες μεταβλητές, είναι επιπλέον αναγκαίο να καθοριστεί ποια αντικείμενα αντιστοιχούν στις ελεύθερες μεταβλητές. Η πληροφορία αυτή ονομάζεται *αντιστοίχιση αντικειμένων*.

Ορισμός 2.2.18 Έστω μία γλώσσα κατηγορηματικής λογικής πρώτης τάξης L. Μία *L-δομή* $\mathscr{A}$ αποτελείται από τα ακόλουθα:

1. Ένα μη κενό σύνολο, το οποίο ονομάζεται *πεδίο* ή *σύμπαν* της $\mathscr{A}$. Το σύνολο αυτό συμβολίζεται με $|\mathscr{A}|$ και αποτελεί το σύνολο των αντικειμένων στα οποία μπορούν να κυμαίνονται οι μεταβλητές.

2. Για κάθε σύμβολο σταθεράς c της γλώσσας L, υπάρχει ένα στοιχείο $c^{\mathscr{A}} \in |\mathscr{A}|$, το οποίο αποτελεί την ερμηνεία του c στη δομή $\mathscr{A}$.

3. Για κάθε k-αδικό σύμβολο κατηγορήματος P της γλώσσας L, η δομή $\mathscr{A}$ του αντιστοιχίζει ένα υποσύνολο του $|\mathscr{A}|^k$, δηλαδή ένα σύνολο k-πλειάδων στοιχείων του $|\mathscr{A}|$. Το υποσύνολο αυτό συμβολίζεται με $P^{\mathscr{A}}$ και ονομάζεται η *ερμηνεία* του P στη δομή $\mathscr{A}$.

4. Για κάθε k-αδικό σύμβολο συνάρτησης f της γλώσσας L, η δομή $\mathscr{A}$ του αντιστοιχίζει μία συνάρτηση

$$f : |\mathscr{A}|^k \longrightarrow |\mathscr{A}|.$$

Η συνάρτηση αυτή παριστάνεται από το γράφημά της, το οποίο είναι υποσύνολο του $|\mathscr{A}|^{k+1}$. Το γράφημα αυτό συμβολίζεται με $f^{\mathscr{A}}$ και ονομάζεται η *ερμηνεία* του f στη δομή $\mathscr{A}$.
Το ότι το $f^{\mathscr{A}}$ είναι «γράφημα συνάρτησης» σημαίνει ότι το $f^{\mathscr{A}}$ είναι ένα σύνολο $(k+1)$-πλειάδων και ότι για κάθε ακολουθία $a_1, \ldots, a_k$ στοιχείων του $|\mathscr{A}|$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο a_{k+1} τέτοιο ώστε

$$\langle a_1, \ldots, a_k, a_{k+1} \rangle \in f^{\mathscr{A}}.$$

Η σημειογραφία $f^{\mathscr{A}}$ χρησιμοποιείται τόσο για το γράφημα της συνάρτησης όσο και για την ίδια τη συνάρτηση. Ειδικότερα, γράφουμε

$$f^{\mathscr{A}}(a_1, \ldots, a_k)$$

για να δηλώσουμε το μοναδικό στοιχείο a_{k+1} τέτοιο ώστε

$$\langle a_1, \ldots, a_k, a_{k+1} \rangle \in f^{\mathscr{A}}.$$

Η L-δομή συνεπώς αποτελείται από τον προσδιορισμό του συνόλου $|\mathscr{A}|$ καθώς και από όλες τις τιμές των $c^{\mathscr{A}}$, $P^{\mathscr{A}}$ και $f^{\mathscr{A}}$. Η διαισθητική ερμηνεία είναι ότι το σύμβολο σταθεράς c δηλώνει το αντικείμενο $c^{\mathscr{A}}$ του $|\mathscr{A}|$. Ομοίως, η διαισθητική σημασία του $P^{\mathscr{A}}$ είναι ότι αποτελεί το σύνολο των k-πλειάδων για τις οποίες το $P(a_1, \ldots, a_k)$ είναι αληθές στη δομή $\mathscr{A}$. Δηλαδή, άτυπα,

$$P(a_1, \ldots, a_k) \text{ είναι αληθές στη } \mathscr{A} \quad \text{αν και μόνον αν} \quad \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \in P^{\mathscr{A}}.$$

Τέλος, διαισθητικά,

$$a_{k+1} = f(a_1, \ldots, a_k) \text{ είναι αληθές στη } \mathscr{A} \quad \text{αν και μόνον αν} \quad \langle a_1, \ldots, a_k, a_{k+1} \rangle \in f^{\mathscr{A}},$$

δηλαδή αν και μόνον αν

$$f(a_1, \ldots, a_k) = f^{\mathscr{A}}(a_1, \ldots, a_k).$$

Παράδειγμα 2.2.19 1. Να αποτιμηθεί ο όρος:

$$f(c_1, c_2)$$

δεδομένης της ερμηνείας:

- Το σύμπαν είναι $|\mathscr{A}| = \mathbb{N}$
- Η ερμηνεία της f είναι $f^{\mathscr{A}}(x, y) = x + y$

- Η ερμηνεία της c_1 είναι $c_1^{\mathscr{A}} = 9$
- Η ερμηνεία της c_2 είναι $c_2^{\mathscr{A}} = 4$

Λύση. Η αποτίμηση του όρου είναι $9+4 = 13$.

2. Να αποτιμηθεί ο τύπος: $c_3 \approx f(c_1, c_2)$
δεδομένης της ερμηνείας:
   - Το σύμπαν είναι $|\mathscr{A}| = \mathbb{N}$
   - $f^{\mathscr{A}}(x,y) = x+y$
   - $c_1^{\mathscr{A}} = 9, \quad c_2^{\mathscr{A}} = 4, \quad c_3^{\mathscr{A}} = 11$

   Λύση. Η αποτίμηση είναι $11 = 13$, άρα είναι ψευδής.

3. Να αποτιμηθεί ο τύπος: $\forall x Q(x, c_1)$
δεδομένης της ερμηνείας
   - $|\mathscr{A}| = \mathbb{N}$,
   - Η ερμηνεία της Q είναι $Q^{\mathscr{A}}(x,y)$ αληθεύει αν $x < y$.
   - Η ερμηνεία της c_1 είναι $c_1^{\mathscr{A}} = 5$.

   Λύση. Ο τύπος γράφεται $\forall x[x < 5]$ άρα ερμηνεύεται ως "Κάθε φυσικός είναι μικρότερος του 5" άρα είναι ψευδής (π.χ. δεν ισχύει για $x = 6$).

2.2.5 Μεταβλητές και Ποσοδείκτες

Στην κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης (first-order predicate logic) οι μεταβλητές αναφέρονται αποκλειστικά σε *αντικείμενα* του κόσμου και όχι σε συναρτησιακά σύμβολα ή κατηγορήματα. Η διάκριση αυτή είναι θεμελιώδης και χαρακτηρίζει την εκφραστική ισχύ της κατηγορηματικής λογικής πρώτης τάξης σε αντιδιαστολή με λογικές ανώτερης τάξης.

Ελεύθερες μεταβλητές Εκφράσεις όπως

$$\text{Άνθρωπος}(X) \to \text{Θνητός}(X), \qquad \text{Άνθρωπος}(X) \land \text{Μαθηματικός}(X)$$

περιέχουν τη μεταβλητή X χωρίς αυτή να δεσμεύεται από κάποιον ποσοδείκτη. Τέτοιες εκφράσεις δεν αποτελούν πλήρεις λογικές προτάσεις, καθώς δεν έχουν καθορισμένη τιμή αλήθειας ανεξάρτητα από κάποια ανάθεση τιμής στη μεταβλητή X. Το ερώτημα "τι ακριβώς αναπαριστούν οι παραπάνω τύποι;" δεν μπορεί να απαντηθεί χωρίς περαιτέρω πληροφορία, καθώς η αλήθεια τους εξαρτάται από την τιμή που αποδίδεται στη μεταβλητή. Για τον λόγο αυτό, οι ανοικτοί τύποι συχνά ερμηνεύονται ως προτασιακές συναρτήσεις, δηλαδή ως εκφράσεις που καθορίζουν σύνολα αντικειμένων του πεδίου.

Ποσοδείκτωση μεταβλητών Η αποσαφήνιση της σημασίας τέτοιων εκφράσεων επιτυγχάνεται μέσω της ποσοδεικτωσης των μεταβλητών, δηλαδή της χρήσης ποσοδεικτών που δεσμεύουν τις εμφανίσεις τους. Ο *υπαρξιακός ποσοδείκτης* $\exists$ εκφράζει την ύπαρξη τουλάχιστον ενός αντικειμένου για το οποίο ισχύει ένας δεδομένος τύπος. Μία πρόταση της μορφής

$$\exists X \, \varphi(X)$$

διαβάζεται ως «υπάρχει X τέτοιο ώστε η $\varphi(X)$ να είναι αληθής».
Ο *καθολικός ποσοδείκτης* $\forall$ εκφράζει την καθολική ισχύ ενός τύπου για όλα τα αντικείμενα του πεδίου. Μία πρόταση της μορφής

$$\forall X\, \varphi(X)$$

διαβάζεται ως " για κάθε X, η $\varphi(X)$ είναι αληθής".

Παράδειγμα 2.2.20 Με τη χρήση ποσοδεικτών, οι προηγούμενες εκφράσεις αποκτούν σαφή και αυστηρά καθορισμένη σημασία. Συγκεκριμένα:

$$\forall X\, \big((X) \to (X)\big)$$

εκφράζει την πρόταση «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί», ενώ

$$\exists X\, \big((X) \wedge (X)\big)$$

εκφράζει την πρόταση " υπάρχει κάποιος άνθρωπος που είναι μαθηματικός". Παρατηρούμε ότι η αλλαγή της σειράς των ποσοδεικτών μπορεί να μεταβάλει ριζικά το νόημα ενός τύπου, γεγονός που καθιστά την εμβέλειά τους κρίσιμο σημασιολογικό στοιχείο.

Σχόλιο 2.2.21 Οι ποσοδείκτες μετατρέπουν τύπους με ελεύθερες μεταβλητές σε *κλειστές προτάσεις*, οι οποίες διαθέτουν καθορισμένη τιμή αλήθειας σε κάθε δομή. Η εισαγωγή των ποσοδεικτών αποτελεί καθοριστικό βήμα για την έκφραση γενικής γνώσης και συνιστά μία από τις σημαντικότερες διαφορές μεταξύ προτασιακής και κατηγορηματικής λογικής.

Η διαδικασία της ποσοδείκτωσης δεν επηρεάζει μόνο το αν μία έκφραση είναι κλειστή ή ανοικτή, αλλά και τη δομή του τύπου στον οποίο εφαρμόζεται. Ο ποσοδείκτης δεσμεύει τη μεταβλητή X μόνο μέσα σε ένα συγκεκριμένο τμήμα της λογικής έκφρασης, το οποίο ονομάζεται εμβέλειά του. Η ακριβής θέση του ποσοδείκτη και το εύρος της έκφρασης που ακολουθεί καθορίζουν ποιες εμφανίσεις της μεταβλητής θεωρούνται δεσμευμένες και, κατ' επέκταση, ποια είναι η συντακτική μορφή του προκύπτοντος τύπου. Η έννοια αυτή θα αποσαφηνιστεί στη συνέχεια με τον τυπικό ορισμό της εμβέλειας ποσοδείκτη και τη διάκριση μεταξύ ελεύθερων και δεσμευμένων μεταβλητών.

Εμβέλεια Ποσοδεικτών και Ελεύθερες Μεταβλητές Στην κατηγορηματική λογική, η θέση και η εμβέλεια των ποσοδεικτών παίζουν καθοριστικό ρόλο στον προσδιορισμό της σημασίας ενός λογικού τύπου. Για τον λόγο αυτό, εισάγουμε τις έννοιες της *εμβέλειας*, της *δεσμευμένης* και της *ελεύθερης* μεταβλητής.

Εμβέλεια ποσοδείκτη Έστω ένας τύπος της μορφής

$$(\exists X)\,\varphi(X) \quad \text{ή} \quad (\forall X)\,\varphi(X).$$

Ο τύπος $\varphi(X)$ ονομάζεται *εμβέλεια* (scope) του αντίστοιχου ποσοδείκτη $\exists X$ ή $\forall X$. Για παράδειγμα, στον τύπο

$$(\forall X)\big(\textit{Άνθρωπος}(X) \to \textit{Θνητός}(X)\big),$$

η εμβέλεια του ποσοδείκτη $\forall X$ είναι ο τύπος

$$\textit{Άνθρωπος}(X) \to \textit{Θνητός}(X).$$

Εμφανίσεις μεταβλητών Κάθε εμφάνιση (occurrence) μιας μεταβλητής σε έναν τύπο μπορεί να είναι είτε *δεσμευμένη* είτε *ελεύθερη*.

- Μία εμφάνιση μιας μεταβλητής X λέγεται *δεσμευμένη* (bound), αν βρίσκεται εντός της εμβέλειας ενός ποσοδείκτη που δεσμεύει τη μεταβλητή X.

- Μία εμφάνιση μιας μεταβλητής λέγεται *ελεύθερη* (free), αν δεν δεσμεύεται από κανέναν ποσοδείκτη.

Για παράδειγμα, στον τύπο

$$(\forall X)\,\varphi(X,Y),$$

η εμφάνιση της μεταβλητής X είναι δεσμευμένη, ενώ η εμφάνιση της μεταβλητής Y είναι ελεύθερη.

Σχόλιο 2.2.22 Η διάκριση μεταξύ ελεύθερων και δεσμευμένων μεταβλητών, καθώς και η έννοια της εμβέλειας των ποσοδεικτών, είναι ουσιώδεις για την κατανόηση της σημασιολογίας της κατηγορηματικής λογικής. Οι έννοιες αυτές καθορίζουν πότε ένας τύπος αποτελεί πλήρη λογική πρόταση και πότε η αλήθειά του εξαρτάται από την ανάθεση τιμών σε μεταβλητές.

Κλειστοί τύποι Ένας τύπος ονομάζεται *κλειστός τύπος* (closed formula) αν δεν περιέχει καμία ελεύθερη μεταβλητή. Οι κλειστοί τύποι είναι εκείνοι που μπορούν να αξιολογηθούν ως αληθείς ή ψευδείς σε μία δομή, χωρίς να απαιτείται ανάθεση τιμών σε μεταβλητές.

Βασικοί όροι και βασικοί τύποι Ένας *βασικός όρος* ή *βασικός τύπος* (ground term / ground formula) είναι ένας όρος ή τύπος που δεν περιέχει καμία μεταβλητή. Για παράδειγμα, αν τα σύμβολα $profession$ και $taxpayer$ είναι συναρτησιακά ή κατηγορηματικά σύμβολα, τότε εκφράσεις όπως

$$profession(programmer), \qquad taxpayer(nikos, profession(programmer))$$

είναι βασικοί όροι ή βασικοί τύποι, αντίστοιχα, καθώς δεν περιέχουν μεταβλητές. Τα σύμβολα profession και taxpayer αποτελούν κατηγορηματικά σύμβολα ($predicate symbols$) της κατηγορηματικής λογικής πρώτης τάξης. Ο ρόλος τους είναι να αποδίδουν ιδιότητες ή χαρακτηριστικά στα αντικείμενα του πεδίου αναφοράς. Όταν εμφανίζονται σε εκφράσεις της μορφής $profession(X)$ ή $taxpayer(X)$, δεν αναφέρονται σε συγκεκριμένες τιμές ή αντικείμενα, αλλά δηλώνουν αν το αντικείμενο που αντιστοιχεί στη μεταβλητή X ικανοποιεί την αντίστοιχη ιδιότητα. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι τα κατηγορηματικά σύμβολα δεν είναι συναρτήσεις: δεν επιστρέ- φουν αντικείμενα του κόσμου, αλλά τιμές αλήθειας. Επίσης, δεν διαθέτουν εγγενές ή προκαθορισμένο νόημα από τη λογική καθαυτή. Το περιεχόμενό τους καθορίζεται αποκλειστικά από την ερμηνεία μέσα σε έναν συγκεκριμένο αφηρημένο κόσμο. Σε διαφορετικές ερμηνείες, το ίδιο κατηγορηματικό σύμβολο μπορεί να αντιστοιχεί σε διαφορετική ιδιότητα ή σχέση. Συνεπώς, σύμβολα όπως profession και taxpayer πρέπει να γίνονται αντιληπτά ως αφηρημένες ετικέτες της γλώσσας, οι οποίες αποκτούν σημασιολογικό περιεχόμενο μόνο στο πλαίσιο ενός μοντέλου. Η διάκριση αυτή είναι θεμελιώδης για την κατανόηση της διαφοράς μεταξύ της συντακτικής μορφής μιας λογικής έκφρασης και της σημασιολογικής της ερμηνείας.

Παράδειγμα 2.2.23 Θεωρούμε έναν αφηρημένο κόσμο του οποίου το πεδίο αποτελείται από ένα σύνολο ανθρώπων. Εισάγουμε δύο μονομελή κατηγορηματικά σύμβολα της γλώσσας: $profession$ και $taxpayer$. Ορίζουμε μία ερμηνεία ως εξής: το κατηγορηματικό σύμβολο $profession$ αντιστοιχίζεται στο σύνολο όλων των αντικειμένων του πεδίου που έχουν κάποιο επάγγελμα, ενώ το κατηγορηματικό σύμβολο $taxpayer$ αντιστοιχίζεται στο σύνολο όλων των αντικειμένων που είναι φορολογούμενοι. Υπό αυτή την ερμηνεία, ο ατομικός τύπος $profession(X)$ είναι αληθής ακριβώς για εκείνες τις τιμές της μεταβλητής X που αντιστοιχούν σε άτομα με επάγγελμα, ενώ ο τύπος $taxpayer(X)$ είναι αληθής για τα άτομα που ανήκουν στο σύνολο των φορολογουμένων. Η σύνθετη έκφραση

$$profession(X) \bigwedge taxpayer(X)$$

αποτελεί ανοικτό τύπο και εκφράζει την ιδιότητα “είναι άτομο που έχει επάγγελμα και είναι φορολογούμενο”. Η τιμή αλήθειας της έκφρασης αυτής δεν μπορεί να προσδιοριστεί χωρίς να αποδοθεί συγκεκριμένη τιμή στη μεταβλητή X.
Αν εισάγουμε τον καθολικό ποσοδείκτη και σχηματίσουμε τον τύπο

$$\forall X(profession(X) \to taxpayer(X)),$$

τότε προκύπτει πλήρης λογική πρόταση, η οποία δηλώνει ότι κάθε άτομο που έχει επάγγελμα είναι φορολογούμενο. Η πρόταση αυτή είναι αληθής στο δεδομένο μοντέλο αν και μόνο αν το σύνολο των αντικειμένων που ικανοποιούν το profession είναι υποσύνολο του συνόλου των αντικειμένων που ικανοποιούν το $taxpayer$. Το παράδειγμα αυτό αναδεικνύει ότι τα κατηγορηματικά σύμβολα δεν διαθέτουν νόημα ανεξάρτητα από την ερμηνεία. Η σημασία των τύπων καθορίζεται από τον αφηρημένο κόσμο και την αντιστοίχιση των κατηγορημάτων σε συγκεκριμένες ιδιότητες του πεδίου.

Αντιπαράδειγμα 2.2.24 Θεωρούμε τον ίδιο αφηρημένο κόσμο, με πεδίο ένα σύνολο ανθρώπων, και τα ίδια κατηγορηματικά σύμβολα $profession$ και $taxpayer$. Ορίζουμε τώρα μία διαφορετική ερμηνεία ή, ισοδύναμα, μία διαφορετική κατάσταση στον ίδιο κόσμο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα αντικείμενο του πεδίου, το οποίο αντιστοιχεί σε ένα άτομο με επάγγελμα, αλλά το οποίο δεν είναι φορολογούμενο. Με άλλα λόγια, το άτομο αυτό ανήκει στο σύνολο που ερμηνεύει το κατηγορηματικό σύμβολο profession, αλλά δεν ανήκει στο σύνολο που ερμηνεύει το $taxpayer$. Σε αυτή την περίπτωση, για τη συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής X, ο ατομικός τύπος $profes$- $sion(X)$ είναι αληθής, ενώ ο τύπος $taxpayer(X)$ είναι ψευδής. Συνεπώς, η συνεπαγωγή

$$profession(X) \to taxpayer(X)$$

είναι ψευδής για τη συγκεκριμένη ανάθεση της μεταβλητής. Επομένως, ο καθολικά ποσοδεικτοποιημένος τύπος

$$\forall X(profession(X) \to taxpayer(X))$$

είναι ψευδής στο συγκεκριμένο μοντέλο, καθώς δεν ισχύει για όλα τα αντικείμενα του πεδίου. Η ύπαρξη και μόνο ενός τέτοιου αντικειμένου αρκεί για να καταρρίψει την καθολική πρόταση. Το αντιπαράδειγμα αυτό καταδεικνύει ότι η αλήθεια μιας καθολικής πρότασης δεν εξαρτάται από τον αριθμό των αντικειμένων που την ικανοποιούν, αλλά από την απουσία έστω και ενός αντικειμένου που την παραβιάζει.

2.2.6 Σειρά Ποσοδεικτών

Η ταυτόχρονη χρήση περισσότερων ποσοδεικτών σε έναν λογικό τύπο απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή, καθώς η *σειρά* με την οποία εμφανίζονται οι ποσοδείκτες επηρεάζει άμεσα τη σημασία του τύπου. Σε αντίθεση με ορισμένους λογικούς συνδέσμους, οι ποσοδείκτες δεν είναι γενικά εναλλάξιμοι.
Επίδραση της σειράς Έστω ένα δυαδικό κατηγόρημα $\mathsf{Connected}(X,Y)$, το οποίο εκφράζει ότι ο κόμβος X συνδέεται με τον κόμβο Y σε έναν γράφο. Τότε οι ακόλουθοι δύο τύποι, αν και συντακτικά παρόμοιοι, έχουν διαφορετική σημασία:

$$(\forall X)(\exists Y)\,\mathsf{Connected}(X,Y),$$

$$(\exists Y)(\forall X)\,\mathsf{Connected}(X,Y).$$

Ερμηνεία των τύπων Ο πρώτος τύπος

$$(\forall X)(\exists Y)\,\mathsf{Connected}(X,Y)$$

σημαίνει ότι *για κάθε* κόμβο X του γράφου υπάρχει *τουλάχιστον ένας* κόμβος Y τέτοιος ώστε να ισχύει η σχέση $Connected(X,Y)$. Με άλλα λόγια, κάθε κόμβος έχει κάποιον συνδεδεμένο κόμβο, ο οποίος μπορεί να εξαρτάται από τον X.

Αντίθετα, ο δεύτερος τύπος

$$(\exists Y)(\forall X)\,Connected(X,Y)$$

σημαίνει ότι υπάρχει *ένας συγκεκριμένος* κόμβος Y τέτοιος ώστε *για κάθε* κόμβο X του γράφου να ισχύει η σχέση $Connected(X,Y)$. Δηλαδή, υπάρχει ένας “καθολικός” κόμβος που συνδέεται με όλους τους υπόλοιπους.

Περίληψη 2.2.25

- Η προτασιακή λογική αποτελεί το απλούστερο τυπικό πλαίσιο για την αναπαράσταση και ανάλυση λογικών συλλογισμών. Στο πλαίσιο αυτό, ο κόσμος περιγράφεται μέσω προτάσεων οι οποίες εκφράζουν γεγονότα και αξιολογούνται αποκλειστικά ως αληθείς ή ψευδείς. Κάθε πρόταση θεωρείται αδιαίρετη μονάδα, χωρίς εσωτερική δομή, και η λογική επεξεργασία περιορίζεται στον τρόπο με τον οποίο οι τιμές αλήθειας συνδυάζονται μέσω λογικών συνδέσμων. Αν και θεμελιώδης για τη μελέτη της τυπικής συνέπειας, η προτασιακή λογική αδυνατεί να αποτυπώσει πληροφορίες σχετικά με τα αντικείμενα στα οποία αναφέρονται τα γεγονότα, καθώς και τις σχέσεις που ενδέχεται να υφίστανται μεταξύ τους. Η ανάγκη για μεγαλύτερη εκφραστική δύναμη οδηγεί στη κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης, η οποία επεκτείνει την προτασιακή λογική εισάγοντας μεταβλητές, κατηγορήματα, συναρτήσεις και ποσοδείκτες. Με τη διεύρυνση αυτή, καθίσταται δυνατή όχι μόνο η περιγραφή του ποια γεγονότα ισχύουν, αλλά και η τυπική αναπαράσταση της δομής του κόσμου μέσα στον οποίο αυτά τα γεγονότα λαμβάνουν χώρα. Η κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης επιτρέπει τη ρητή αναφορά σε αντικείμενα και την έκφραση σχέσεων μεταξύ τους, προσδίδοντας στους λογικούς τύπους εσωτερική μαθηματική δομή. Ιδιαίτερη σημασία στη κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης έχει η δυνατότητα διατύπωσης γενικών και υπαρξιακών ισχυρισμών μέσω των ποσοδεικτών. Με τον τρόπο αυτό, μπορούν να εκφραστούν κανόνες που ισχύουν για όλα τα αντικείμενα ενός κόσμου ή για ορισμένα από αυτά, επιτρέποντας τη διατύπωση αξιωμάτων, ορισμών και καθολικών ιδιοτήτων. Οι λογικές προτάσεις παύουν να αναφέρονται σε μεμονωμένα γεγονότα και αποκτούν χαρακτήρα γενικών κανονικοτήτων που περιγράφουν τη συμπεριφορά και τη δομή ενός συστήματος στο σύνολό του.
- Η σημασιολογία της κατηγορηματικής λογικής πρώτης τάξης βασίζεται στην έννοια της ερμηνείας ή δομής, μέσω της οποίας τα σύμβολα μιας γλώσσας αποκτούν νόημα πάνω σε ένα μη κενό σύνολο αντικειμένων. Το σύνολο αυτό λειτουργεί ως σύμπαν αναφοράς, ενώ τα κατηγορήματα και οι συναρτήσεις ερμηνεύονται ως σχέσεις και απεικονίσεις επί του συνόλου αυτού. Υπό αυτήν την έννοια, η θεωρία συνόλων αναδεικνύεται ως το φυσικό σημασιολογικό υπόβαθρο της κατηγορηματικής λογικής πρώτης τάξης, παρέχοντας το μαθηματικό πλαίσιο εντός του οποίου οι λογικές εκφράσεις αποκτούν ακρίβεια και σαφήνεια. Η μετάβαση από την προτασιακή στη κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης δεν συνιστά απλώς ποσοτική αύξηση της εκφραστικής ισχύος, αλλά ποιοτική αλλαγή στον τρόπο περιγραφής της πραγματικότητας. Ενώ η προτασιακή λογική προσεγγίζει τον κόσμο ως σύνολο ανεξάρτητων γεγονότων, η κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης τον αντιλαμβάνεται ως δομημένο σύνολο αντικειμένων και σχέσεων, το οποίο διέπεται από γενικούς κανόνες. Η θεώρηση αυτή αποτελεί θεμελιώδη προϋπόθεση για τη μελέτη πιο σύνθετων μαθηματικών εννοιών, όπως οι δομές, οι σχέσεις και, στη συνέχεια, οι τοπολογικοί χώροι.
- Η προτεραιότητα των τελεστών στην κατηγορηματική λογική είναι η εξής, από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη:

  1. Υψηλότερη προτεραιότητα έχουν:

  $$\neg,\ \forall,\ \exists$$

  2. Ακολουθούν με ίση προτεραιότητα:

$\wedge, \vee$

3. Χαμηλότερη προτεραιότητα έχουν:

$\rightarrow, \leftrightarrow$

2.3 Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

Η θεωρία συνόλων αναπτύχθηκε ως απάντηση στην ανάγκη για αυστηρή θεμελίωση των Μαθηματικών. Στις αρχές του 20ού αιώνα έγινε σαφές ότι η άτυπη χρήση της έννοιας του συνόλου οδηγούσε σε παραδοξότητες, γεγονός που καθιστούσε αναγκαία την αξιωματική της θεμελίωση. Το αξιωματικό σύστημα Zermelo–Fraenkel (ZF) παρέχει ένα συνεπές και επαρκές πλαίσιο για τη μελέτη των συνόλων, θέτοντας ρητά τους κανόνες σύμφωνα με τους οποίους επιτρέπεται η κατασκευή και η συσχέτισή τους. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο μπορούν να οριστούν με ακρίβεια οι αριθμοί, οι συναρτήσεις, οι σχέσεις και οι δομές που αποτελούν τη βάση όλων των μαθηματικών κλάδων. Η παρουσίαση των αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων στην παρούσα ενότητα δεν αποσκοπεί μόνο στη γνώση των ίδιων των αξιωμάτων, αλλά κυρίως στην κατανόηση του ρόλου τους ως θεμελίου για τη μαθηματική αυστηρότητα και τη λογική συνοχή. Η θεωρία συνόλων είναι το πιο διαδεδομένο θεμελιώδες σύστημα των μαθηματικών που μελετάει τα σύνολα, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες μαθηματικές θεωρίες που εξετάζουν δομές, δηλαδή σύνολα εφοδιασμένα με πράξεις, σχέσεις (διατάξεις, συναρτήσεις), τελεστές των οποίων οι ιδιό- τητες απορρέουν από αξιώματα, τοπολογίες, κ.α.λ. Η θεωρία συνόλων γεννήθηκε στα τέλη του 1873, όταν ο Georg Cantor έκανε την καταπληκτική ανακάλυψη ότι η ευθεία των πραγματικών αριθμών δεν είναι μετρήσιμη, πράγμα που σημαίνει ότι τα σημεία της δεν μπορούν να μετρηθούν με τη χρήση των φυσικών αριθμών. ’Ετσι, αν και το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι και τα δύο άπειρα, υπάρχουν περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί απο τους φυσικούς αριθμούς, και με αφορμή αυτό το γεγονός άνοιξε ο δρόμος για τη διερεύνηση των διαφόρων μεγεθών του απείρου. Σύμφωνα με τον Cantor, δύο σύνολα A και B έχουν την ίδια *πληθικότητα*, αν είναι αμφιμονοσήμαντα, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει μία προς μία και επί αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων. Στην περίπτωση των πεπερασμένων συνόλων, αυτό συμφωνεί με τη διαισθητική έννοια του μεγέθους. Στην περίπτωση άπειρων συνόλων, η συμπεριφορά είναι πιο περίπλοκη, είναι δηλαδή δυνατό ένα υποσύνολο ενός απείρου συνόλου να έχει την ίδια πληθικότητα με το αρχικό σύνολο, κάτι που δεν μπορεί να συμβεί με τα υποσύνολα των πεπερασμένων συνόλων. Το 1878 ο Cantor διατύπωσε την περίφημη *υπόθεση του συνεχούς* (*Continuum Hypothesis*), η οποία υποστηρίζει ότι κάθε άπειρο υπο- σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι είτε μετρήσιμο ή έχει το ίδιο πληθος στοιχείων με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. με άλλα λόγια, προβλέπει ότι δεν υπάρχει ενδιάμεσο επίπεδο απειρίας ανάμεσα στην αριθμήσιμη απειρία των φυσικών αριθμών (κατά την απαρίθ- μησή τους) και στην απειρία των πραγματικών αριθμών, αυτή δηλαδή που απεικονίζεται, π.χ., ως μια ευθεία ή ως οποιαδήποτε συνεχής γραμμή του επιπέδου. Η υπόθεση του συνεχούς είναι το πιο διάσημο πρόβλημα της θεωρίας συνόλων. Ο ίδιος ο Cantor αφιέρωσε πολλή προσπάθεια σε αυτό, και το ίδιο έκαναν και πολλοί άλλοι σπουδαίοι μαθηματικοί στα μέσα του εικοστού αιώνα, όπως ο Hilbert ο οποίος απέδειξε ότι μπορεί να αποδειχθεί η λογική συνέπεια της υπόθεσης του συνεχούς τόσο της κατάφασής της όσο και της άρνησής της μέσα στο αξιωματικό σύστημα των Zermelo – Fraenkel. Το σύστημα αυτό, γνωστό και ως θεωρία συνόλων Zermelo και Fraenkel, είναι, τουλάχιστον ως σήμερα, η κοινώς αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα θεμελιακή αξιωματική θεωρία περιγραφής και κατασκευής των μαθηματικών συνόλων. Η πρώτη ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων ήταν μία αφελής συνολοθεωρία, δηλαδή μία άτυπη θεωρία που χρησιμοποιεί φυσική γλώσσα για να περιγρά- ψει συνολα και πράξεις στα σύνολα όπου λέξεις όπως:*και, ή, αν ... τότε, οχι, για κάποιο, για κάθε*, δεν υπάγονται σε αυστηρό ορισμό. Εξαιτίας της άτυπης αυτής χρήσης της έννοιας του συνόλου προέκυψαν, αρχικά, ορισμένες ασυνέπειες ή παράδοξα ιδίως απο την φαινομενικά φυσική υπόθεση ότι: *κάθε ιδιότητα καθορίζει ένα σύνολο*, δηλαδή το σύνολο των αντικει- μένων που έχουν την ιδιότητα. Ένα παράδειγμα είναι το *παράδοξο του Russell*. Αυτό που λέει αυτό το παράδοξο του Russell, είναι ότι είναι προβληματικό να μιλάμε για σύνολα πραγμάτων που περιέχουν τον ευατό τους, δηλαδή την αυτοαναφορικότητα. Για παράδειγμα ας πάρουμε το βιβλίο που αναφέρεται στα βιβλία που δεν έχουν αναφορά προς τον ευατό τους. Αυτό το βιβλίο θα συμπεριελάμβανε τον εαυτό του; Αν τον συμπεριελάμβανε, θα δημιουργούσε παράδοξο, όπως επίσης και αν δεν τον συμπεριελάμβανε. μια βασική απόρ- ροια του παραδόξου του Rassel είναι ότι δεν μπορούμε να μιλήσουμε για το σύνολο όλων των συνόλων, τουτέστιν για το άπειρο. Επομένως, μερικές συλλογές, όπως η συλλογή όλων των συνόλων, η συλλογή όλων των πληθικών αριθμών, δεν είναι σύνολα. Τέτοιες συλλογές ονομάζονται *αρμόζουσες τάξεις*. Το παράδοξο του Rassel βάζει ένα σαφές όριο, σε αυτό που καλούμε ανθρώπινη λογική, κάτι που είναι συμβατό άλλωστε με τα δύο θεωρήματα της μη πληρότητας του Kurt Friedrich Gödel που υποδεικνύουν έμφυτους περιορισμούς σε όλα τα (πλην των τετριμμένων) τυπικά συστήματα των μαθηματικών. με αυτά ο Gödel αποδεικνύει με απλά λόγια, ότι, σε οποιοδήποτε λογικό οικοδόμημα που πάμε να χτίσουμε, πρέπει πάντα να πάρουμε κάποιες προτάσεις σαν αξιώματα, δηλαδή αναπόδεικτες, και εκεί πάνω να θεμελιώσουμε. Και αντίστροφα αν τα αξιώματα αποδεικνύονται εντός του συστήμα- τος, τότε υπάρχουν προτάσεις οι οποίες δεν μπορούν να αποδειχθούν. Τα πρώτα βασικά αποτελέσματα της συνολοθεωρίας όπως την δημιούργησε ο Cantor αναφέρονται σε πολλές και σημαντικές εφαρμογές ιδιαίτερα στην ανάλυση. Για παράδειγμα ένα σημαντικό αποτέλεσμα είναι η θεωρία της *υπερπεπερασμένης αριθμητικής*, δηλαδή της μελέτης των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης του πολλαπλασιασμού και της δύναμης σε άπειρα μεγέθη. Στην φάση που η θεωρία συνόλων αναπτύχθηκε με βάση την έννοία του συνόλου που έδωσε ο Cantor, όλες οι αποδείξεις στηρίζονται: (a) Στην *ιδιότητα της έκτασης*, δηλαδή αν A και B είναι σύνολα, τότε $A = B$ αν και μόνον αν τα A και B έχουν τα ίδια μέλη, και (b) στην παραδοχή της *Γενικής Αρχής της Συμπερίληψης* (*General Comprehension Principle*), δηλαδή, αν P είναι μια συνθήκη που ορίζει κάποια ιδιότητα των αντικειμένων, τότε $\Omega = \{x|P(x)\}$ είναι το σύνολο όλων των αντικειμένων που ικανοποιούν την συνθήκη P, έτσι ώστε για κάθε x, $(\star)$ *το* x *ανήκει στο* Ω *αν και μόνο αν ικανοποιεί την* P. Η (a) συνεπάγεται ότι το πολύ ένα σύνολο Ω ικανοποιεί την $(\star)$, και καλούμε αυτό το Ω *έκταση* (*extension*) ή *συμπερίληψη* (*comprehennsion*) της συνθήκης P. Οπως αναφέραμε και παραπάνω αυτή η αρχή ήταν εσφαλμένη και διαψεύστηκε απο τον Rassel. Το παράδοξο του Rassel έφερε μια *κρίση αμφιβολίας* πρώτα στην συνολοθεωρία και αργότερα σε όλα τα μαθηματικά που έκανε να ξεπεραστεί για περίπου τριάντα χρόνια. Πολλοί μαθημαικοι και φιλόσοφοι στα τέλη του δεκάτου ενάτου και τις αρχές του εικοστού αιώνα, όπως ο Γάλλος γεωμέτρης poincaré και ο Ολλανδός τοπολόγος και φιλόσοφος Brouwer, πρότειναν να εγκαταληφθεί η συνολοθεωρία και πολλά κλασικά μαθηματικά μαζί της διότι κατα την γνώμη τους δεν είχαν περιεχόμενο. Αυτός που αρχικά προσπάθησε να σώσει την κατάσταση με την μή απόρριψη της συνολοθεωρίας ήταν ο Rassel με την περιώνυμή του *θεωρία των τύπων* (*theory of types*), η οποία δεν ήταν αποδεκτή απο τους μαθηματικούς διότι ήταν δύσχρηστη. Σχεδόν την ίδια εποχή με τον Russel ο Zermelo το 1908 πρότεινε μία διαφορετι- κή λύση παρουσιάζοντας το πρώτο σύστημα αξιωμάτων για την θεμελίωση της θεωρίας συνόλων. Αργότερα ο Fraenkel πρόσθεσε ένα ακόμη αξίωμα στο σύστημα αξιωμάτων που είχε προτείνει ο Zermelo δημιουργώντας έτσι το σύστημα αξιωμάτων Zermelo-Fraenkel που αποτελεί την βάση για την Θεωρία Συνόλων με την σημερινή της μορφή. Στην πράξη ο Zermelo πρότεινε να αντικατασταθούν οι παραδοχές του Cantor για τα σύνολα οι οποίες μας οδήγησαν στην εσφαλμένη Γενική Αρχή Συμπερίληψης με μερικά αξιώματα τα οποία επιπροσθέτως θα εξασφάλιζαν τις αποδείξεις των βασικών αποτελε- σμάτων της υπάρχουσας θεωρίας. Σε αυτή την βάση ξεκίνησε η *αξιωματική συνολοθεωρία*, κατά πολλούς ένα από τα πιο σημαντικά επιτευγματα της επιστήμης του εικοστού αιώνα.

2.3.1 Τα αξιώματα της Θεωρίας συνόλων

Πριν αναφερθούμε πιο διεξοδικά σε βασικά στοιχεία της μαθηματικής Λογικής που θα μας επιτρέψουν να καταννοήσουμε τις εφαρμογές της στην πληροφορική, θα πούμε δύο λόγια για την *Λογική πρώτου βαθμού* (*first-order logic*) που έχει ικανή εκφραστική ισχύ ώστε να μπορεί να διατυπώσει το σύστημα αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων όπως την μελετάμε και την εφαρμόζουμε σήμερα. Οπως η γεωμετρία ξεκινάει με κάποιες έννοιες των οποίων δέχεται την ύπαρξη χωρίς να τις ορίζει (π.χ. σημείο, ευθεία), έτσι και η Λογική πρώτου βαθμού στηρίζεται σε έννοιες χωρίς ορισμό, μία εκ των οποίων είναι η έννοια *σύμβολο*, και ορίζεται από ένα σύνολο συμβολοσειρών από το ίδιο αλφάβητο όπου ως *αλφάβητο* (*alphabet*) ορίζουμε ένα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων και ως συμβολοσειρά (string) μια ακολουθία συμβόλων που ανήκουν στο αλφάβητο. Η λογική πρώτης τάξης επεκτείνει την Προτασιακή Λογική εισάγοντας επιπρόσθετες έννοιες όπως τους *όρους* (*terms*), τα *κατηγο- ρήματα* (*predicates*) και τους *ποσοδείκτες* (*quantifiers*) και συνεπώς θεωρείται ως μια γενίκευ- ση αυτής. Η Προτασιακή Λογικη ως γνωστόν είναι μια γλώσσα που έχει ως βασικό στοιχείο της δηλωτικές προτάσεις οι οποίες μπορεί να είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς. Στην Πληροφο- ρική η Προτασιακή Λογική επεξεργάζεται δηλωτικές προτάσεις που αφορούν τη συμπεριφο- ρά υπολογιστικών συστημάτων ή προγραμμάτων, καθώς επίσης βοηθά στον έλεγχο κατά πόσο ένα πρόγραμμα ή ένα σύστημα ικανοποιεί την πρόταση που μελετάμε. Η γλώσσα της Προτασιακής Λογικής αποτελείται από ατομικές προτασεις, τελεστές και παρενθέσεις. Οι τελεστές είναι: *Η άρνηση* $\neg$, η *σύζευξη* $\wedge$, η *διάζευξη* $\vee$ και η *συνεπαγωγή* $\rightarrow$. Οι ποσοδείκτες που εισάγονται επιπρόσθετα στην Λογική Πρώτης Τάξης από την υπάρχουσα Προτασιακή Λογική είναι: Ο υπαρξιακός ποσοδείκτης $\exists$ (*υπάρχει*) και ο *καθολικός ποσοδείκ- της* $\forall$ (*για όλα*). Η περιγραφή του συστήματος των αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων, πέραν της γλώσσας της Λογικής πρώτης τάξης που χρησιμοποιεί, για να εκφραστεί πλήρως χρειά- ζεται και τα σύμβολα $\equiv$ (*ισοδύ- ναμο με*) και $\in$ (*ανήκει*) καθώς και το αξίωμα επιλογής. Το αξιώμα της επιλογής (AC) μας λέει ότι:

> *Αν έχουμε μία συλλογή $\mathscr{C}$ από μή κενά σύνολα, τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα μέλος από κάθε σύνολο σε αυτή την συλλογή. Με άλλα λόγια, υπάρχει μία συνάρτηση f στην $\mathscr{C}$ με την ιδιότητα ότι για κάθε σύνολο S στην συλλογή το $f(S)$ είναι ένα μέλος της $\mathscr{C}$.*

Η *αξιωματική θεωρία συνόλων* Zermelo-Fraenkel που έχει σαν βάση τα αξιώματα των Zer- melo-Fraenkel μαζί με το αξίωμα επιλογής ή ZFC, αποτελούν ένα από τα βασικά θεμέλια όλων των κλασικών μαθηματικών. Τα αξιώματα των Zermelo-Fraenkel είναι τα ακόλουθα:

Αξίωμα 2.3.1 *Αξίωμα επεκτασιμότητας:* Αν δύο σύνολα A και B έχουν τα ίδια στοιχεία, τότε είναι ίσα. Συμβολικά:

$$(\forall x)[x \in A \leftrightarrow x \in B] \rightarrow (A = B).$$

Το αντίστροφο, δηλαδή, αν $A = B$ τότε $x \in A \leftrightarrow x \in B$. Επομένως έχουμε

$$(A = B) \leftrightarrow (\forall x)[x \in A \leftrightarrow x \in B].$$

Το αξίωμα της επεκτασιμότητας λέει απλά ότι ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του. Αυτό μπορεί να φαίνεται προφανές, αλλά υπάρχουν ενδιαφέρουσες συνολοθεωρίες που απορ- ρίπτουν το αξίωμα αυτό. Το αξίωμα της επεκτασιμότητας είναι αυτό που κωδικοποιεί αυτό το «προφανές» γεγονός.

Αξίωμα 2.3.2 *Αξίωμα ζεύγους:* Δοθέντων συνόλων Aκαι B, υπάρχει σύνολο που συμβολίζε- ται $\{A, B\}$, το οποίο περιέχει τα A και B ως μοναδικά στοιχεία. Συμβολικά:

$$(\forall A)(\forall B)(\exists C)[(\forall x)(x \in C \leftrightarrow (x = A \vee x = B))].$$

Το σύνολο C καλείται *μη διατεταγμένο ζεύγος* των A και B και συμβολίζεται με $\{A, B\}$. Αν $A = B$, τότε $\{A, A\} = \{A\}$ είναι το *μονοσύνολο* του αντικειμένου A. Χρησιμοποι- ώντας αυτό το αξίωμα μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλά απλά σύνολα, π.χ. τα

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \ldots,$$

όπου καθένα από αυτά έχει το πολυ δύο μέλη.

Αξίωμα 2.3.3 *Αξίωμα κενού συνόλου:* Υπάρχει σύνολο που δεν περιέχει καθόλου στοιχεία το οποίο κα- λείται *κενό σύνολο* και συμβολίζεται με $\emptyset$. Συμβολικά:

$$(\exists A)(\forall x)\neg(x \in A).$$

Το αξίωμα της επεκτασιμότητας εξασφαλίζει την μοναδικότητα του κενού συνόλου. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο σύνολα τα οποία δεν έχουν κανένα στοιχείο, τοτε $x \in A \to x \in B$ και $y \in B \to y \in A$ που συνεπάγεται ότι $A = B$. Εξ ορισμού, το κενό σύνολο περιέχεται (ανήκει) σε κάθε σύνολο.

Αξίωμα 2.3.4 *Αξίωμα της ένωσης:* Αν ένα σύνολο A έχει ως στοιχεία σύνολα B, τότε υπάρχει το σύνολο, το οποίο θα έχει στοιχεία τα στοιχεία των B και μόνον αυτά. Συμβολικά:

$$(\forall A)(\exists C)[(\forall x)(x \in C \leftrightarrow (\exists B)(x \in B \wedge B \in A))].$$

Απο το αξίωμα της επεκτασιμότητας εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι για κάθε συλλογή συνόλων $\mathscr{A}$, μόνο ένα σύνολο ικανοποιεί το αξίωμα της ένωσης το οποίον και το ονομάζουμε *ένωση* του $\mathscr{A}$ και το συμβολίζουμε με $\bigcup\mathscr{A}$ ή $\bigcup\limits_{A\in\mathscr{A}} A$. Συμβολικά:

$$\bigcup\mathscr{A} = \{x|(\exists A \in \mathscr{A})[x \in A]\}.$$

Αξίωμα 2.3.5 *Αξίωμα του απείρου:* Υπάρχει ένα σύνολο που έχει απείρως πολλά στοιχεία, δηλαδή σύνολο το οποίο περιέχει το κενό σύνολο καθώς και μαζί με κάθε στοιχείο A περιέχεται σε αυτό και ο $A \cup \{A\}$, δηλαδή ο επόμενός του. Συμβολικά:

$$(\exists A)[\emptyset \in A \wedge (\forall B)(B \in A \to B \cup \{B\} \in A)].$$

Αν πάρουμε τον ελάχιστο A με αυτές τις ιδιότητες τότε παίρνουμε τους φυσικούς αριθμούς. Κατά τον ορισμό των *φυσικών αριθμών* αρχίζουμε με το πιο θεμελιώδες σύνολο, το κενό σύνολο ως εξής:
(i) Το $\emptyset$ δεν έχει στοιχεία.
(ii) Το $\{\emptyset\}$ έχει ένα στοιχείο, το κενό σύνολο.
(iii) Το $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ έχει δύο στοιχεία, το κενό σύνολο και το σύνολο που περιέχει το κενό σύνολο.
Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναλαμβάνεται απείρως έως ότου οριστούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί, δηλαδή:
$0 = \emptyset$
$1 = \{0\} = 0 \cup \{0\} = \{\emptyset\}$
$2 = \{0, 1\} = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$3 = \{0, 1, 2\} = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, κ.α.λ.
Προφανώς αυτή η αλληλουχία ξεκινάει από το 0 και όταν αυτό οριστεί τότε ορίζεται και το 1, και όταν το 1 οριστεί τότε ορίζεται και το 2, και ούτω καθεξής. Αυτή η διαδικασία μας φέρνει στην έννοια της επαγωγής για την οποία θα μιλήσουμε λεπτομε- ρώς αργότερα.
Προτού προχωρήσουμε στο επόμενο αξίωμα να υπενθυμίσουμε ότι: Ενα σύνολο A είναι υποσύνολο ενός συνόλου B αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B, δηλαδή

$$(A \subseteq B) \leftrightarrow [(\forall x)(x \in A \to x \in B)].$$

Ο συμβολισμός $\subseteq$ δίνει έμφαση στο ότι το A μπορεί να είναι ίσον με το B, ενώ ο συμβο- λισμός $\subset$ μας λέει ότι το A είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του B εκτός τουιδίου του B. Στην δεύτερη περίπτωση λέμε ότι τοA είναι γνήσιο υποσύνολο του B.

Αξίωμα 2.3.6 *Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:* Για κάθε σύνολο A υπάρχει ένα σύνολο, που συμβολίζεται με $\mathscr{P}(A)$ και καλείται το *δυναμοσύνολο* του A, και έχει σαν στοιχεία όλα τα υποσύνολα του A. Συμβολικά:

$$(\forall A)(\exists B)(\forall C)(C \subseteq A \to C \in B).$$

Το επόμενο αξίωμα προστέθηκε στα αξιώματα του Zermelo απο τον A. Fraenkel και διατυπώθηκε από τον T. Skolem το 1922.

Αξίωμα 2.3.7 *Αξιωματικό σχήμα της αντικατάστασης*: Εστω $P(x,y)$ είναι μία ιδιότητα τέτοια ώστε, για κάθε x υπάρχει ένα μοναδικό y για το οποίο η $P(x,y)$ ισχύει. Τότε για κάθε σύνολο A υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο B, του οποίου τα στοιχεία είναι όλα τα y και μόνον αυτά για τα οποία υπάρχει x στο A έτσι ώστε να επαληθεύεται ο τύπος $P(x,y)$. Συμβολικά:

$$(\forall A)(\exists B)[(\forall y)(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)P(x,y))].$$

Σαν πόρισμα του αξιωματικού σχήματος της αντικατάστασης προκύπτει η αρχή της *εξειδίκευσης* ή *διαχωρισμού*, σύμφωνα με την οποία: Για κάθε υποσύνολο A και κάθε ιδιότητα φ, υπάρχει ένα υποσύνολο B του A που αποτελείται από αυτά τα στοιχεία του A που ικανοποιούν την φ και μόνον αυτά.
Το επόμενο αξίωμα προστέθηκε το 1925 από τον von Neumann. Για το αξίωμα αυτό χρειαζόμαστε τον ακόλουθο στοιχειώδη ορισμό:

Αξίωμα 2.3.8 *Αξίωμα της θεμελίωσης ή κανονικότητας:* Κάθε μη κενό σύνολο A περιέχει ένα στοιχείο το οποίο είναι ξένο πρός το A. Συμβολικά:

$$(\forall A)[A \neq \emptyset) \to (\exists B \in A)(B \cap A = \emptyset)].$$

μία συνέπεια του αξιώματος της θεμελίωσης είναι ότι δεν υπάρχει σύνολο A για το οποίο $A \in A$. Με άλλα λόγια, κανένα σύνολο δεν είναι στοιχείο του εαυτού του. με το αξίωμα αυτό αποκλείεται η ύπαρξη του συνόλου Russell και συνεπώς αίρεται και η αντίφαση που αυτό δημιούργησε. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο A τέτοιο ώστε $A \in A$, τότε $A \in A \cap \{A\}$ και άρα το $\{A\}$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο ξένο πρός το A. Αυτό όμως αντιβαίνει στο αξίωμα της θεμελίωσης.

2.3.2 Αξίωμα Επιλογής στη Θεωρία Συνόλων ZF

Αυτά είναι τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων Zermelo-Fraenkel, ή ZF. Τα αξιώματα του Κενού Συνόλου και του Ζεύγους προκύπτουν από τα υπόλοιπα αξιώματα της ZF, επομένως μπορεί να παραληφθούν. Επίσης, το αξίωμα της Αντικατάστασης συνεπάγεται το αξίωμα του Διαχωρισμού.

Τέλος, έχουμε το Αξίωμα της Επιλογής (AC):

Αξίωμα 2.3.9 Για κάθε σύνολο A από ξένα κατά ζεύγη και μη κενά σύνολα, υπάρχει ένα σύνολο που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε σύνολο του A.

Το AC αποτέλεσε, για μεγάλο χρονικό διάστημα, ένα αμφιλεγόμενο αξίωμα. Από τη μία πλευρά, είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και έχει ευρεία χρήση στα μαθηματικά. Από την άλλη, έχει μάλλον μη διαισθητικές συνέπειες, όπως το Παράδοξο των Tarski, το οποίο δηλώνει ότι η μοναδιαία σφαίρα μπορεί να διαμεριστεί σε πεπερασμένα υποσύνολα, τα οποία αναδιατάσσονται ώστε να σχηματίσουν δύο σφαίρες ίδιου μεγέθους. Οι αντιρρήσεις στο αξίωμα προέρχονται από το γεγονός ότι υποστηρίζει την ύπαρξη συνόλων που δεν μπορούν να οριστούν επακριβώς. Ωστόσο, η απόδειξη συνέπειάς του από τον Gödel το 1938, σε σχέση με τη συνέπεια της ZF, έδιωξε κάθε σχετική επιφύλαξη. Το Αξίωμα της Επιλογής είναι ισοδύναμο, υπό τα υπόλοιπα αξιώματα της ZF, με την *Αρχή της καλής διάταξης*, η οποία δηλώνει ότι κάθε σύνολο μπορεί να διαταχθεί γραμμικά με τέτοιον τρόπο ώστε κάθε μη κενό υποσύνολό του να έχει ελάχιστο στοιχείο. Αν και όχι τυπικά αναγκαία, εκτός από το σύμβολο $\in$, χρησιμοποιούνται και άλλα βοηθητικά σύμβολα. Για παράδειγμα, $A \subseteq B$ δηλώνει ότι A είναι *υποσύνολο* του B, δηλαδή κάθε στοιχείο του A είναι στοιχείο του B. Άλλα σύμβολα χρησιμοποιούνται για την κατασκευή νέων συνόλων μέσω βασικών πράξεων, όπως η ένωση $A \cup B$ (τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο A είτε στο B) και η τομή $A \cap B$ (τα στοιχεία που ανήκουν και στα δύο).

Το *διατεταγμένο ζεύγος* (A,B) ορίζεται ως το σύνολο $\{\{A\},\{A,B\}\}$. Δύο τέτοια ζεύγη (A,B) και (C,D) είναι ίσα αν και μόνο αν $A = C$ και $B = D$.

Το *καρτεσιανό γινόμενο* $A \times B$ ορίζεται ως το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (C,D) για τα οποία $C \in A$ και $D \in B$.

Για κάθε λογικό τύπο $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ και σύνολα $A, B_1, \ldots, B_n$, με βάση το αξίωμα του Διαχωρισμού, μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο όλων των στοιχείων $x \in A$ που ικανοποιούν τη συνθήκη $\varphi(x, B_1, \ldots, B_n)$.

Το σύνολο αυτό γράφεται ως:

$$\{x \in A \mid \varphi(x, B_1, \ldots, B_n)\}$$

Στο πλαίσιο της ZF, μπορεί κανείς να αποδείξει την ύπαρξη όλων αυτών των συνόλων.

Ορισμός 2.3.10 Ένα σύνολο S λέγεται *αριθμήσιμο* ή *μετρήσιμο* αν είναι είτε πεπερασμένο είτε άπειρο και υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη (1-1) απεικόνιση των στοιχείων του στους φυσικούς αριθμούς.

Θεώρημα 2.3.11 Το σύνολο των ρητών αριθμών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των ακεραίων, και το ανοικτό διάστημα $(0,1) \subset \mathbb{R}$ δεν είναι αριθμήσιμο. Η τελευταία απόδειξη έχει μείνει στην ιστορία των μαθηματικών ως η “διαγώνιος μέθοδος του Cantor”. Ονομάζεται και επιχείρημα της Διαγωνοποίησης και δημοσιεύτηκε το 1891 από τον Cantor. Το Διαγώνιο Επιχείρημα είναι μια απόδειξη για τη μη μετρησιμότητα των πραγματικών αριθμών.

2.4 Πράξεις των Συνόλων

Μια από τις βασικές δυσκολίες κατά τη μελέτη των συνόλων είναι η κατανόηση των σχέσεων που μπορούν να έχουν μεταξύ τους. Για τον λόγο αυτό, στην πράξη χρησιμοποιούμε συχνά γραφικά εργαλεία, τα οποία επιτρέπουν μια πιο άμεση και εποπτική προσέγγιση. Τα πιο γνωστά από αυτά είναι τα *διαγράμματα Venn*, τα οποία απεικονίζουν με απλό τρόπο τα σύνολα και τις μεταξύ τους σχέσεις. Στην Άλγεβρα των Συνόλων, πέρα από τη μελέτη των ίδιων των συνόλων, ενδιαφερόμαστε κυρίως για τις πράξεις που μπορούμε να ορίσουμε πάνω σε αυτά. Οι πράξεις αυτές μας επιτρέπουν να κατασκευάζουμε νέα σύνολα από ήδη γνωστά, με βάση συγκεκριμένους κανόνες. Οι δύο θεμελιώδεις πράξεις που θα μας απασχολήσουν αρχικά είναι η *ένωση* και η *τομή* συνόλων.

Ορισμός 2.4.1 Βασικό ή Καθολικό Σύνολο U (*Universal Set) καλείται το σύνολο στο οποίο ανήκει ένα πλήθος υποσυνόλων τα οποία είναι παράγοντες στις πράξεις της άλγεβρας των συνόλων.*

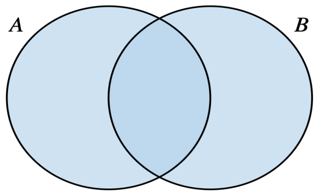
Το καθολικό σύνολο λειτουργεί ως το "πλαίσιο αναφοράς" μέσα στο οποίο μελετώνται όλα τα υπόλοιπα σύνολα. Κάθε σύνολο που εμφανίζεται σε μια συγκεκριμένη συζήτηση θεωρείται υποσύνολο του καθολικού συνόλου, ακόμη και αν αυτό δεν αναφέρεται ρητά.

Παράδειγμα 2.4.2 Έστω $U = \{1,2,3,\ldots,10\}$ ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολά του $A = \{1,2,3,4\}$ και $B = \{3,4,5,6\}$. Τα στοιχεία που ανήκουν στο U και βρίσκονται σε τουλάχιστον ένα από τα σύνολα A ή B σχηματίζουν ένα νέο σύνολο. Η διαδικασία αυτή αποτελεί την έννοια της ένωσης των συνόλων A και B.

Θεώρημα 2.4.3 Η *Ένωση συνόλων* $(\cup)$ ορίζεται ως

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ή } x \in B\}.$$

Το αποτέλεσμα της πράξης είναι ένα νέο σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία των A και B.



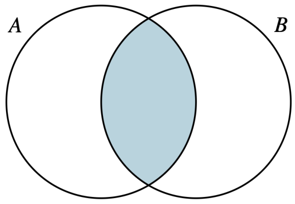
Σχήμα 2.2 *Αναπαράσταση Venn της πράξης της ένωσης δύο συνόλων $A \cup B$.*

Η τομή δύο συνόλων περιγράφει την κοινή περιοχή τους. Με άλλα λόγια, περιλαμβάνει μόνο τα στοιχεία που ανήκουν ταυτόχρονα και στα δύο σύνολα. Η πράξη αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν μας ενδιαφέρουν οι κοινές ιδιότητες ή τα κοινά χαρακτηριστικά δύο συλλογών αντικειμένων. Στο παραπάνω διάγραμμα Venn απεικονίζεται γραφικά η έννοια της τομής: χρωματισμένο εμφανίζεται αποκλειστικά το τμήμα στο οποίο τα σύνολα επικαλύπτονται, δηλαδή το σύνολο $A \cap B$. Αν δύο σύνολα δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο, τότε η τομή τους είναι το κενό σύνολο. Στην περίπτωση αυτή τα σύνολα λέγονται *ξένα μεταξύ τους*, γεγονός που σημαίνει ότι δεν παρουσιάζουν καμία κοινή ιδιότητα. Η έννοια της τομής μάς επιτρέπει να εκφράσουμε με ακρίβεια καταστάσεις όπου απαιτείται η ταυτόχρονη ικανοποίηση περισσότερων από ενός κριτηρίων. Για τον λόγο αυτό εμφανίζεται συχνά τόσο στη θεωρία των συνόλων όσο και σε εφαρμογές της, όπως στην πιθανοθεωρία και τη λογική.

Ορισμός 2.4.4 Η *τομή συνόλων* $(\cap)$ ορίζεται ως

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Η πράξη της τομής παράγει ένα σύνολο που περιέχει μόνο τα στοιχεία των δύο συνόλων που είναι κοινά σε αυτά.



Σχήμα 2.3 *Αναπαράσταση Venn της πράξης της ένωσης δύο συνόλων* $A \cup B$.

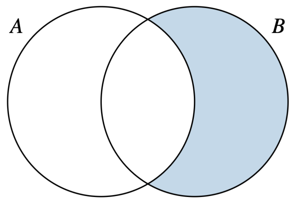
Η διαφορά δύο συνόλων απομονώνει το τμήμα του πρώτου συνόλου που δεν επικαλύπτεται με το δεύτερο. Η πράξη αυτή μας επιτρέπει να μελετήσουμε τα στοιχεία που ανήκουν αποκλειστικά στο B, αγνοώντας όσα είναι κοινά με το A. Αν το σύνολο B ταυτίζεται με το καθολικό σύνολο, τότε η διαφορά $B - A$ συμπίπτει με το συμπλήρωμα του A. Ισοδύναμα, η διαφορά μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση της τομής και του συμπληρώματος ως

$$B - A = B \cap A^c.$$

Ορισμός 2.4.5 Η *διαφορά συνόλων* $(-)$ ορίζεται ως

$$B - A = \{x \mid x \in B \wedge x \notin A\}.$$

Το σύνολο $B - A$ περιλαμβάνει όλα τα στοιχεία του B που δεν ανήκουν στο σύνολο A.



Σχήμα 2.4 *Αναπαράσταση Venn της πράξης της διαφοράς δύο συνόλων* A *και* B.

2.4.1 Δυναμοσύνολα

Δοθέντος ενός συνόλου X, επιδιώκουμε να συλλέξουμε όλα τα υποσύνολά του. Η συλλογή αυτή ονομάζεται *δυναμοσύνολο* του X και συμβολίζεται με

$$\mathscr{P}(X) = \{S \mid S \subseteq X\}.$$

Ανακύπτει το φυσικό ερώτημα: Είναι το $\mathscr{P}(X)$ μη κενό για κάθε σύνολο X; Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι πράγματι είναι, αφού $X \in \mathscr{P}(X)$. Επιπλέον, ισχύει και $\varnothing \in \mathscr{P}(X)$.

Ιδιότητες του δυναμοσυνόλου

Το δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(X)$ αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη εργαλεία της θεωρίας συνόλων. Κάθε στοιχείο του $\mathscr{P}(X)$ είναι υποσύνολο του X, δηλαδή το $\mathscr{P}(X)$ δεν περιέχει στοιχεία του X, αλλά σύνολα που αποτελούνται από στοιχεία του X. Έτσι, τα X και $\mathscr{P}(X)$ είναι σύνολα διαφορετικής τάξης. Θυμίζουμε ότι για ένα σύνολο X το σύμβολο $|X|$ δηλώνει την πληθικότητά του (δηλαδή τον αριθμό των στοιχείων του, στην περίπτωση που το X είναι πεπερασμένο). Αν το X είναι πεπερασμένο σύνολο με $|X| = n$ στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολό του έχει

$$|\mathscr{P}(X)| = 2^n.$$

Πράγματι, κάθε στοιχείο του X είτε ανήκει είτε δεν ανήκει σε ένα υποσύνολο του X, οπότε για καθένα από τα n στοιχεία υπάρχουν δύο δυνατές επιλογές. Κατά συνέπεια, το πλήθος όλων των υποσυνόλων είναι ίσο με 2^n. Για παράδειγμα, αν $X = \{a,b\}$, τότε

$$\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}.$$

Σημαντική είναι και η σχέση εγκλεισμού: αν $A \subseteq B$, τότε

$$\mathscr{P}(A) \subseteq \mathscr{P}(B).$$

Το δυναμοσύνολο ενός συνόλου είναι πάντοτε αυστηρά «μεγαλύτερο» από το ίδιο το σύνολο. Ακόμη και αν το X είναι άπειρο, ισχύει

$$|X| < |\mathscr{P}(X)|.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι γνωστό ως Θεώρημα του Cantor και δείχνει ότι δεν υπάρχει σύνολο που να έχει την ίδια πληθικότητα με το δυναμοσύνολό του. Το δυναμοσύνολο παίζει κεντρικό ρόλο στην κατασκευή δομών. Για παράδειγμα:

- Κάθε τοπολογία σε ένα σύνολο X είναι υποσύνολο του $\mathscr{P}(X)$.
- Κάθε σ-άλγεβρα είναι επίσης υποσύνολο του $\mathscr{P}(X)$.
- Οι οικογένειες υποσυνόλων, οι διαμερίσεις και οι καλύψεις είναι στοιχεία του $\mathscr{P}(\mathscr{P}(X))$.

Έτσι, το δυναμοσύνολο δεν είναι απλώς μια συλλογή υποσυνόλων, αλλά το θεμελιώδες περιβάλλον μέσα στο οποίο ορίζονται οι περισσότερες δομές της σύγχρονης ανάλυσης.

2.5 Άλγεβρα Συνόλων

Ένα σύνολο περιγράφεται δια των στοιχείων του. Συνήθως τα στοιχεία ενός συνόλου είναι ομοειδή, αλλά αυτό δεν είναι απαίτηση, καθώς είναι δυνατό σε ένα σύνολο να περιλαμβάνονται και μη ομοειδή στοιχεία. Για παράδειγμα, το σύνολο της γραφικής ύλης που βρίσκεται στο γραφείο σας μπορεί να αποτελείται από διαφορετικά είδη (στυλό, τετράδια, συνδετήρες κ. λπ.). Στη βιβλιογραφία η αναφορά σε ένα σύνολο γίνεται με δύο τρόπους:

- Με αναγραφή των στοιχείων μέσα σε άγκιστρα $\{\ \}$, όπως για παράδειγμα $\{1,2,3,4\}$.

- Με περιγραφή των στοιχείων του συνόλου μέσα σε άγκιστρα, όπως για παράδειγμα $\{2x | x \in \mathbb{N}\}$.

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1. Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντάς τα με κόμμα. Έτσι, αν το σύνολο A έχει ως στοιχεία τους αριθμούς $2,4,6$, γράφουμε $A = \{2,4,6\}$. Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι, για παράδειγμα, το σύνολο B των ακεραίων από το 1 μέχρι το 100 συμβολίζεται ως $B = \{1,2,3,\ldots,100\}$, ενώ το σύνολο των κλασμάτων της μορφής $\frac{1}{n}$, όπου n θετικός ακέραιος, συμβολίζεται αναλόγως. Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται *παράσταση του συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του.*

2. Αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών επιλέξουμε εκείνους που έχουν την ιδιότητα να είναι θετικοί, τότε σχηματίζουμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται ως $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ και διαβάζεται «το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$, όπου $x > 0$». Ομοίως, το σύνολο των άρτιων ακεραίων συμβολίζεται ως $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ άρτιος}\}$.

Γενικά, αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα I, τότε σχηματίζουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται ως $\{x \in \Omega \mid x \text{ έχει την ιδιότητα } I\}$ και διαβάζεται «το σύνολο των $x \in \Omega$ που έχουν την ιδιότητα I». Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται *παράσταση του συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του*. Ας θεωρήσουμε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ και $B = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου A είναι και στοιχείο του συνόλου B. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B.

Η μελέτη των πράξεων της ένωσης $(\bigcup)$, της τομής $(\bigcap)$ και του σχετικού συμπληρώματος $(-)$, μαζί με τη σχέση ένταξης $(\subseteq)$, είναι γνωστή ως *άλγεβρα συνόλων*. Κατά κάποιον τρόπο, η άλγεβρα συνόλων υπακούει σε νόμους που θυμίζουν την άλγεβρα των πραγματικών αριθμών (με τις πράξεις $+$, $\cdot$, $-$ και τη σχέση $\leq$), ωστόσο υπάρχουν και σημαντικές διαφορές.
Οι παρακάτω ταυτότητες, οι οποίες ισχύουν για οποιαδήποτε σύνολα, αποτελούν μερικά από τα στοιχειώδη γεγονότα της άλγεβρας συνόλων.

2.6 Νόμοι της Άλγεβρας των Συνόλων

Νόμοι της Άλγεβρας των Συνόλων

Για οποιαδήποτε σύνολα $A, B, C \subseteq U$ ισχύουν οι ακόλουθοι νόμοι:

(1) Νόμος της ενέλιξης

$$(A^c)^c = A.$$

(2) Νόμοι De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

(3) Νόμοι αντιμεταθετικότητας

$$A \cup B = B \cup A, \qquad A \cap B = B \cap A.$$

(4) Νόμοι προσεταιριστικότητας

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

(5) Νόμοι επιμεριστικότητας

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

(6) Νόμοι ταυτοδυναμίας

$$A \cup \varnothing = A, \qquad A \cap U = A.$$

(7) Νόμοι κυριαρχίας

$$A \cup U = U, \qquad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

(8) Νόμοι συμπληρώματος

$$A \cup A^c = U, \qquad A \cap A^c = \varnothing.$$

(9) Νόμοι ιδempotency

$$A \cup A = A, \qquad A \cap A = A.$$

(10) Νόμοι απορρόφησης

$$A \cup (A \cap B) = A, \qquad A \cap (A \cup B) = A.$$

2.6.1 Οικογένειες Συνόλων και η Άλγεβρά τους

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάστηκαν τα σύνολα ως βασικά μαθηματικά αντικείμενα και εξετάστηκαν οι θεμελιώδεις ιδιότητές τους. Στη μαθηματική πράξη, ωστόσο, το ενδιαφέρον δεν περιορίζεται σε μεμονωμένα σύνολα, αλλά επεκτείνεται στις συλλογές τους και στις πράξεις που μπορούν να οριστούν πάνω σε αυτές. Οι πράξεις της ένωσης, της τομής, της διαφοράς και του συμπληρώματος δεν αποτελούν απλώς τεχνικές κατασκευές, αλλά εκφράζουν μια εσωτερική αλγεβρική οργάνωση των οικογενειών συνόλων. Με την έννοια αυτή, οι οικογένειες συνόλων φέρουν φυσικά μια αλγεβρική δομή, η οποία επιτρέπει τη συστηματική μελέτη και σύγκριση συνόλων και προετοιμάζει το έδαφος για πιο σύνθετες δομές που θα εμφανιστούν στη συνέχεια. Υπό το πρίσμα αυτό, καθίσταται σαφές ότι η έννοια του συνόλου, αν και θεμελιώδης, δεν επαρκεί από μόνη της για την περιγραφή των δομών της σύγχρονης μαθηματικής ανάλυσης.

2.6.1.1 Ορισμός και βασικά παραδείγματα

Έστω X ένα σύνολο. Μια *οικογένεια συνόλων* πάνω στο X είναι οποιοδήποτε σύνολο $\mathscr{F}$ του οποίου τα στοιχεία είναι υποσύνολα του X, δηλαδή

$$\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X),$$

όπου $\mathscr{P}(X)$ δηλώνει το δυναμοσύνολο του X. Παραδείγματα οικογενειών συνόλων είναι:

- το δυναμοσύνολο $\mathscr{P}(X)$,
- η οικογένεια όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του X,
- η οικογένεια όλων των διαστημάτων της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$,
- κάθε οικογένεια υποσυνόλων που ορίζεται μέσω μιας ιδιότητας ή ενός κριτηρίου επιλογής.

2.6.1.2 Κλειστότητα οικογενειών

Στο σημείο αυτό είναι χρήσιμο να γίνει μια βασική διάκριση. Μια οικογένεια συνόλων είναι απλώς ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία είναι σύνολα και, από μόνη της, δεν συνεπάγεται καμία επιπλέον δομή. Αντίθετα, όταν μια οικογένεια συνόλων είναι *κλειστή* ως προς μια πράξη, η εφαρμογή της πράξης αυτής σε στοιχεία της οικογένειας παράγει και πάλι σύνολα που ανήκουν στην ίδια οικογένεια.

Για παράδειγμα, μια οικογένεια $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(X)$ μπορεί να είναι:

- κλειστή ως προς την ένωση,
- κλειστή ως προς την τομή,
- κλειστή ως προς το συμπλήρωμα,
- κλειστή ως προς πεπερασμένες ή άπειρες πράξεις.

Οι ιδιότητες κλειστότητας καθορίζουν τη δομή της οικογένειας και αποτελούν τη βάση για την εισαγωγή πιο εξειδικευμένων αντικειμένων, όπως οι άλγεβρες συνόλων, οι σ-άλγεβρες και, αργότερα, οι τοπολογίες.

2.6.1.3 Καλύψεις και υποκαλύψεις

Μια οικογένεια συνόλων $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(X)$ λέγεται *κάλυψη* του συνόλου X αν

$$X = \bigcup_{U \in \mathscr{U}} U.$$

Αν μια υποοικογένεια $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$ είναι επίσης κάλυψη του X, τότε η $\mathscr{V}$ ονομάζεται *υποκάλυψη*.

Η έννοια της κάλυψης επιτρέπει την περιγραφή ενός συνόλου μέσω τοπικών υποσυνόλων και αποτελεί κεντρικό εργαλείο της τοπολογίας και της τοπολογικής ανάλυσης δεδομένων.

2.6.1.4 Ο ρόλος των οικογενειών στην Μαθηματική Ανάλυση

Η μετάβαση από μεμονωμένα σύνολα σε οικογένειες συνόλων σηματοδοτεί μια ουσιαστική αλλαγή οπτικής στη μαθηματική ανάλυση. Το ενδιαφέρον μετατοπίζεται από τα μεμονωμένα στοιχεία στα σχήματα οργάνωσης των συνόλων και στις σχέσεις που αναπτύσσονται μεταξύ τους. Στο πλαίσιο αυτό, οι οικογένειες συνόλων λειτουργούν ως φορείς δομής και αποτελούν το κατάλληλο επίπεδο αφαίρεσης για τη μελέτη εννοιών όπως η συνέχεια, η σύγκλιση και η συνδεσιμότητα, οι οποίες δεν μπορούν να περιγραφούν επαρκώς στο επίπεδο ενός μόνο συνόλου. Η εισαγωγή των οικογενειών συνόλων προετοιμάζει άμεσα το έδαφος για τον ορισμό της τοπολογίας. Μια τοπολογία δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια ειδική οικογένεια υποσυνόλων του X που ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες κλειστότητας. Με τον τρόπο αυτό, η τοπολογία αναδύεται φυσικά ως δομή πάνω σε σύνολα και όχι ως απομονωμένη έννοια, γεφυρώνοντας τη θεωρία συνόλων με τη μελέτη των τοπολογικών δομών.

Στην ενότητα που ακολουθεί, εισάγουμε τους αυστηρούς ορισμούς της ένωσης και της τομής, τόσο για πεπερασμένες όσο και για άπειρες οικογένειες συνόλων, και εξετάζουμε τους θεμελιώδεις νόμους που τις διέπουν, όπως οι νόμοι αντιμεταθετικότητας, προσεταιριστικότητας και επιμεριστικότητας. Οι νόμοι αυτοί συγκροτούν την άλγεβρα των συνόλων και αποτελούν το τυπικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο θα στηριχθούν οι τοπολογικές δομές που θα αναπτυχθούν στη συνέχεια. Έστω λοιπόν ότι διαθέτουμε μια άπειρη συλλογή συνόλων

$$\mathscr{A} = \{B_0, B_1, B_2, \ldots\}$$

και επιθυμούμε να σχηματίσουμε την ένωση όλων των $\{B_i\}_{i \in I}$.

Σημείωση 2.6.1 Το σύμβολο i χρησιμοποιείται αποκλειστικά ως δείκτης. Συγκεκριμένα, το $\{B_i\}_{i \in I}$ δηλώνει μια οικογένεια συνόλων με δείκτη ένα σύνολο I, χωρίς το i να φέρει καμία αριθμητική ή αλγεβρική σημασία πέραν της απλής απαρίθμησης.

Για τον σκοπό αυτό χρειαζόμαστε μια πιο γενική πράξη ένωσης:

$$\bigcup \mathscr{A} = \bigcup_{i \in I} B_i = \{x \mid x \text{ ανήκει σε κάποιο μέλος } B_i \text{ της } \mathscr{A}\}.$$

Αυτό μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό. Για οποιοδήποτε σύνολο $\mathscr{A}$, η *ένωση* $\bigcup \mathscr{A}$ είναι το σύνολο που ορίζεται ως

$$\bigcup \mathscr{A} = \{x \mid x \text{ ανήκει σε κάποιο μέλος του } \mathscr{A}\} = \{x \mid (\exists i \in I)\, x \in B_i\}.$$

Έτσι, η $\bigcup \mathscr{A}$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα "χωνευτήρι" στο οποίο συγκεντρώνονται όλα τα μέλη των μελών του A. Χρειαζόμαστε μια ενισχυμένη μορφή του αξιώματος της ένωσης, προκειμένου να γνωρίζουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο το οποίο περιέχει τα στοιχεία των στοιχείων του $\mathscr{A}$.

Αξίωμα 2.6.2 Αξίωμα της Ένωσης Για κάθε σύνολο $\mathscr{A}$, του οποίου τα στοιχεία είναι σύνολα, υπάρχει σύνολο C τέτοιο ώστε, για κάθε στοιχείο x, να ισχύει

$$x \in C \iff (\exists A \in \mathscr{A})\, x \in A.$$

Μπορούμε να διατυπώσουμε τον ορισμό της $\bigcup \mathscr{A}$ με την ακόλουθη μορφή:

$$x \in \bigcup \mathscr{A} \iff \{\exists A \in \mathscr{A})|x \in A\}.$$

Για παράδειγμα,

$$\bigcup\{A,B\} = \{x \mid x \text{ ανήκει σε κάποιο μέλος του } \{A,B\}\}$$

$$= \{x \mid x \text{ ανήκει στο } A \text{ ή στο } B\}.$$

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι η αρχική μορφή του αξιώματος της ένωσης μπορεί να εγκαταλειφθεί υπέρ της νέας μορφής. Δηλαδή, το σύνολο $a \cup b$ που παράγεται από την αρχική διατύπωση μπορεί επίσης να προκύψει με τη βοήθεια του αξιώματος του ζεύγους και της αναθεωρημένης μορφής του αξιώματος της ένωσης.
Ανάλογα, έχουμε

$$\bigcup\{A,B,C,D\} = A \cup B \cup C \cup D \quad \text{και} \quad \bigcup\{A\} = A.$$

Μια ακραία περίπτωση είναι

$$\bigcup \varnothing = \varnothing.$$

Θέλουμε επίσης μια αντίστοιχη γενίκευση της πράξης της τομής. Έστω ότι επιθυμούμε να λάβουμε την τομή απείρως πολλών συνόλων $B_0, B_1, \ldots$. Τότε, αν

$$\mathscr{A} = \{B_0, B_1, \ldots\},$$

η επιθυμητή τομή μπορεί να χαρακτηριστεί άτυπα ως

$$\bigcap \mathscr{A} = \bigcap_{i \in I} B_i = \{x \mid x \text{ ανήκει σε κάθε } B_i \text{ της } \bigcap\}.$$

Γενικά, για κάθε μη κενό σύνολο A, ορίζουμε την *τομή* $\bigcap \mathscr{A}$ του A μέσω της συνθήκης

$$x \in \bigcap A \iff x \text{ ανήκει σε κάθε μέλος του } A.$$

Σε αντίθεση με την πράξη της ένωσης, δεν απαιτείται κάποιο ειδικό αξίωμα για να δικαιολογηθεί η πράξη της τομής. Αντίθετα, ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Αξίωμα 2.6.3 Αξίωμα της Τομής Για κάθε σύνολο $\mathscr{A}$, του οποίου τα στοιχεία είναι σύνολα, υπάρχει σύνολο C τέτοιο ώστε, για κάθε στοιχείο x, να ισχύει

$$x \in C \iff (\forall A \in \mathscr{A})\, x \in A.$$

Η μελέτη των πράξεων ένωσης και τομής δεν περιορίζεται στις πεπερασμένες περιπτώσεις. Στην πράξη, ιδιαίτερα στο πλαίσιο της τοπολογίας, είναι απαραίτητο να εξετάζονται ενώσεις και τομές αυθαίρετων (ενδεχομένως άπειρων) οικογενειών συνόλων. Οι πράξεις αυτές δεν ορίζονται απλώς κατ' επανάληψη των πεπερασμένων, αλλά εισάγονται ως θεμελιώδεις έννοιες μέσω της σημειογραφίας $\bigcup \mathscr{A}$ και $\bigcap \mathscr{A}$, όπου $\mathscr{A}$ είναι οικογένεια υποσυνόλων ενός καθολικού συνόλου X. Σημειώνεται ότι έννοιες όπως η αντιμεταθετικότητα και η προσεταιριστικότητα αφορούν αποκλειστικά πεπερασμένες πράξεις ένωσης και τομής. Για άπειρες οικογένειες συνόλων, οι πράξεις $\bigcup \mathscr{A}$ και $\bigcap \mathscr{A}$ δεν ορίζονται μέσω διαδοχικής σύνθεσης, αλλά άμεσα μέσω της σημειογραφίας κατανόησης συνόλων.

Άπειρες Πράξεις και Νόμοι για Οικογένειες Συνόλων

Έστω X ένα σύνολο και $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subseteq \mathscr{P}(X)$ οικογένειες συνόλων, με $\mathscr{A} \neq \varnothing$. Για κάθε σύνολο $A \subseteq X$ ισχύουν τα ακόλουθα.

(1) Ορισμοί άπειρης ένωσης και τομής

$$x \in \bigcup \mathscr{A} \iff \exists P \in \mathscr{A} \ \text{τέτοιο ώστε} \ x \in P,$$

$$x \in \bigcap \mathscr{A} \iff \forall P \in \mathscr{A}, x \in P.$$

(2) Μονοτονία Αν $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, τότε

$$\bigcup \mathscr{A} \subseteq \bigcup \mathscr{B}, \qquad \bigcap \mathscr{B} \subseteq \bigcap \mathscr{A}.$$

(3) Επιμεριστικότητα ως προς άπειρες πράξεις

$$A \cup \left(\bigcap \mathscr{A}\right) = \bigcap \{A \cup P \mid P \in \mathscr{A}\},$$

$$A \cap \left(\bigcup \mathscr{A}\right) = \bigcup \{A \cap P \mid P \in \mathscr{A}\}.$$

(4) Νόμοι De Morgan για άπειρες οικογένειες

$$\left(\bigcup \mathscr{A}\right)^c = \bigcap \{P^c \mid P \in \mathscr{A}\}, \qquad \left(\bigcap \mathscr{A}\right)^c = \bigcup \{P^c \mid P \in \mathscr{A}\}.$$

(5) Ουδέτερα στοιχεία

$$\bigcup \varnothing = \varnothing, \qquad \bigcap \varnothing = X.$$

(6) Ιδιότητες απορρόφησης (πεπερασμένη μορφή)

$$A \cup (A \cap B) = A, \qquad A \cap (A \cup B) = A.$$

2.7 Κατηγορίες

Η *Θεωρία Κατηγοριών* είναι ένας αφηρημένος κλάδος των μαθηματικών που μελετά μαθηματικές δομές μέσω των σχέσεων μεταξύ τους. Αντικείμενα και μορφισμοί είναι τα θεμελιώδη στοιχεία.

Ορισμός 2.7.1 Μία **κατηγορία** $\mathscr{C}$ αποτελείται από τα εξής:

- Ένα σύνολο $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ των *αντικειμένων*.
- Για κάθε ζεύγος αντικειμένων $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, ένα σύνολο $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B)$ των *μορφισμών* (ή *βελών*) από το A στο B.
- Για κάθε A, ένας *ταυτοτικός μορφισμός* $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,A)$.
- Μια πράξη *σύνθεσης μορφισμών*

$$\circ : \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B,C) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A,C)$$

  που ικανοποιεί:
  1. **Συνδετικότητα:** Αν $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$, τότε
  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
  2. **Ουδετερότητα:** Αν $f : A \to B$, τότε
  $$f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f.$$

Παράδειγμα 2.7.2 Η κατηγορία **Set** έχει αντικείμενα όλα τα σύνολα και μορφισμούς όλες τις συναρτήσεις μεταξύ συνόλων.

2.8 Σχέσεις

Στα μαθηματικά μελετάμε συχνά σχέσεις μεταξύ μαθηματικών αντικειμένων. Οι σχέσεις μεταξύ αντικειμένων δύο διαφορετικών ειδών εμφανίζονται ονομάζονται *διμελείς σχέσεις*. Για παράδειγμα, ας πούμε ότι μια ευθεία l βρίσκεται σε σχέση R_1 με ένα σημείο P αν η l διέρχεται από το P. Τότε η R_1 είναι μια διμελής σχέση μεταξύ αντικειμένων που ονομάζονται ευθείες και αντικειμένων που ονομάζονται σημεία. Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε μια διμελή σχέση R_2 μεταξύ θετικών ακεραίων λέγοντας ότι ένας θετικός ακέραιος m βρίσκεται σε σχέση R_2 με έναν θετικό ακέραιο n αν ο m διαιρεί τον n χωρίς υπόλοιπο. Ας εξετάσουμε τώρα τη σχέση R_1' μεταξύ ευθειών και σημείων, όπου μια ευθεία l βρίσκεται σε σχέση R_1' με ένα σημείο P αν το σημείο P ανήκει στην ευθεία l. Προφανώς, μια ευθεία l βρίσκεται σε σχέση R_1 με ένα σημείο P αν και μόνο αν βρίσκεται σε σχέση R_1' με το P. Παρότι χρησιμοποιούνται διαφορετικές περιγραφές για τις σχέσεις R_1 και R_1', συνήθως τις θεωρούμε ως την ίδια σχέση, δηλαδή $R_1 = R_1'$. Αντίστοιχα, έστω ότι ένας θετικός ακέραιος m βρίσκεται σε σχέση R_2' με έναν θετικό ακέραιο n αν ο n είναι πολλαπλάσιο του m. Και σε αυτή την περίπτωση, τα ίδια διατεταγμένα ζεύγη (m,n) ανήκουν τόσο στη σχέση R_2 όσο και στη σχέση R_2', οπότε θεωρούμε ότι $R_2 = R_2'$. Συνεπώς, μια διμελής σχέση καθορίζεται πλήρως από το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών που την αποτελούν και δεν έχει σημασία με ποια ιδιότητα περιγράφεται αυτό το σύνολο. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.8.1 Ένα σύνολο R ονομάζεται *διμελής σχέση* αν όλα τα στοιχεία του είναι διατεταγμένα ζεύγη, δηλαδή αν για κάθε $\mathfrak{r} \in R$ υπάρχουν στοιχεία x και y τέτοια ώστε

$$\mathfrak{r} = (x, y).$$

Είναι σύνηθες, αντί να γράφουμε $(x, y) \in R$, να χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία

$$xRy.$$

Λέμε τότε ότι το x βρίσκεται σε διμελή σχέση R με το y, όταν ισχύει xRy.

Ορισμός 2.8.2 Διμελής σχέση Έστω R μία *διμελής σχέση*, δηλαδή ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών.

(a) Το σύνολο όλων των στοιχείων x για τα οποία υπάρχει στοιχείο y τέτοιο ώστε $(x, y) \in R$, ονομάζεται *πεδίο ορισμού* της R και συμβολίζεται με

$$\operatorname{dom} R = \{\, x \mid \exists y \text{ τέτοιο ώστε } xRy \,\}.$$

Ισοδύναμα, το $\operatorname{dom} R$ είναι το σύνολο όλων των πρώτων συντεταγμένων των διατεταγμένων ζευγών της R.

(b) Το σύνολο όλων των στοιχείων y για τα οποία υπάρχει στοιχείο x τέτοιο ώστε $(x, y) \in R$, ονομάζεται *σύνολο τιμών* (ή *εικόνα*) της R και συμβολίζεται με

$$\operatorname{ran} R = \{\, y \mid \exists x \text{ τέτοιο ώστε } xRy \,\}.$$

Ισοδύναμα, το $\operatorname{ran} R$ είναι το σύνολο όλων των δεύτερων συντεταγμένων των διατεταγμένων ζευγών της R.

(c) Το σύνολο

$$\operatorname{field} R = \operatorname{dom} R \cup \operatorname{ran} R$$

ονομάζεται *πεδίο αναφοράς* της διμελούς σχέσης R.

(d) Αν $\operatorname{field} R \subseteq X$, τότε λέμε ότι η R είναι *διμελής σχέση στο* X ή ότι η R είναι *διμελής σχέση μεταξύ στοιχείων του* X.

Παράδειγμα 2.8.3 Έστω η διμελής σχέση R_2 που ορίζεται ως το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών

$$\mathfrak{r} = (m, n),$$

όπου m και n είναι θετικοί ακέραιοι και ο m διαιρεί τον n.

Δηλαδή,

$$R_2 = \{\, (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mid m \text{ διαιρεί το } n \,\}.$$

Στοιχεία της R_2 είναι, ενδεικτικά, τα διατεταγμένα ζεύγη

$$(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ \ldots$$

$$(2,2),\ (2,4),\ (2,6),\ \ldots$$

$$(3,3),\ (3,6),\ (3,9),\ \ldots$$

και γενικά όλα τα ζεύγη της μορφής (m,n) με $m \mid n$.

Στη συνέχεια εισάγουμε βασική ορολογία που σχετίζεται με τις διμελείς σχέσεις.

Το *πεδίο ορισμού* της R_2 είναι

$$\operatorname{dom} R_2 = \{\, m \mid \exists n \text{ τέτοιο ώστε } m \text{ να διαιρεί το } n \,\}.$$

Επομένως,

$$\operatorname{dom} R_2 = \{\text{όλοι οι θετικοί ακέραιοι}\},$$

διότι κάθε θετικός ακέραιος m διαιρεί κάποιον αριθμό, για παράδειγμα τον εαυτό του ($n = m$).
Αντίστοιχα, το *σύνολο τιμών* της R_2 είναι

$$\operatorname{ran} R_2 = \{\, n \mid \exists m \text{ τέτοιο ώστε } m \text{ να διαιρεί το } n \,\}.$$

Άρα,

$$\operatorname{ran} R_2 = \{\text{όλοι οι θετικοί ακέραιοι}\},$$

εφόσον κάθε θετικός ακέραιος n διαιρείται από κάποιον αριθμό, για παράδειγμα από τον ίδιο τον n.
Το *σύνολο αναφοράς* (field) της σχέσης R_2 είναι

$$\operatorname{field} R_2 = \operatorname{dom} R_2 \cup \operatorname{ran} R_2 = \{\text{όλοι οι θετικοί ακέραιοι}\}.$$

Συνεπώς, η R_2 είναι διμελής σχέση μεταξύ θετικών ακεραίων.

Ορισμός 2.8.4 Εικόνα και αντίστροφη εικόνα διμελούς σχέσης Έστω R μια διμελής σχέση.

(a) Η *εικόνα* ενός συνόλου A μέσω της σχέσης R ορίζεται ως το σύνολο όλων των στοιχείων y του συνόλου τιμών της R τα οποία βρίσκονται σε σχέση R με κάποιο στοιχείο του A.

Συμβολίζεται με $R[A]$ και ισχύει

$$R[A] = \{\, y \in \operatorname{ran} R \mid \exists x \in A \text{ τέτοιο ώστε } xRy \,\}.$$

(b) Η *αντίστροφη εικόνα* ενός συνόλου B μέσω της σχέσης R ορίζεται ως το σύνολο όλων των στοιχείων x του πεδίου ορισμού της R τα οποία βρίσκονται σε σχέση R με κάποιο στοιχείο του B. Συμβολίζεται με $R^{-1}[B]$ και ισχύει

$$R^{-1}[B] = \{\, x \in \operatorname{dom} R \mid \exists y \in B \text{ τέτοιο ώστε } xRy \,\}.$$

Ορισμός 2.8.5 Αντίστροφη διμελής σχέση Έστω R μια διμελής σχέση. Η *αντίστροφη* της R ορίζεται ως το σύνολο

$$R^{-1} = \{\, \mathfrak{r} \mid \mathfrak{r} = (x,y) \text{ για κάποια } x,y \text{ τέτοια ώστε } (y,x) \in R \,\}.$$

Παράδειγμα 2.8.6 Θεωρούμε τη διμελή σχέση

$$R = \{\, \mathfrak{r} \mid \mathfrak{r} = (m,n),\ m \text{ και } n \text{ είναι θετικοί ακέραιοι και } m \mid n \,\}.$$

Τότε η αντίστροφη σχέση R^{-1} ορίζεται ως

$$R^{-1} = \{\, \mathfrak{w} \mid \mathfrak{w} = (n,m) \text{ και } (m,n) \in R \,\} = \{\, \mathfrak{w} \mid \mathfrak{w} = (n,m),\ m \text{ και } n \text{ είναι θετικοί ακέραιοι και } m \mid n \,\}.$$

Ορισμός 2.8.7 Έστω R και S δύο διμελείς σχέσεις. Η *σύνθεση* των R και S είναι η διμελής σχέση

$$S \circ R = \{\, (x,z) \mid \text{υπάρχει } y \text{ τέτοιο ώστε } (x,y) \in R \text{ και } (y,z) \in S \,\}.$$

Δηλαδή, $(x,z) \in S \circ R$ αν και μόνο αν υπάρχει κάποιο στοιχείο y με τέτοιο τρόπο ώστε xRy και ySz. Για να βρούμε τα στοιχεία που σχετίζονται με ένα x μέσω της $S \circ R$, αρχικά βρίσκουμε τα στοιχεία y που σχετίζονται με το x μέσω της R και στη συνέχεια τα στοιχεία z που σχετίζονται με τα y μέσω της S. Παρατηρούμε ότι πρώτα εφαρμόζεται η σχέση R και έπειτα η σχέση S, αν και συμβατικά η σύνθεση γράφεται ως $S \circ R$.

Ορισμός 2.8.8 Η *ταυτοτική σχέση* στο σύνολο A ορίζεται ως

$$\tau_A = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in A, \text{ και } a = b\}.$$

2.9 Ισοδυναμίες και Διαμερίσεις

Οι διμελείς σχέσεις ορισμένων ειδικών τύπων εμφανίζονται συχνότερα στη μελέτη μας.

Ορισμός 2.9.1 Έστω R μια διμελής σχέση στο σύνολο A.

(a) Η σχέση R λέγεται *ανακλαστική* στο A, αν για κάθε $a \in A$ ισχύει aRa.

(b) Η σχέση R λέγεται *συμμετρική* στο A, αν για κάθε $a,b \in A$, από το aRb έπεται το bRa.

(c) Η σχέση R λέγεται *μεταβατική* στο A, αν για κάθε $a,b,c \in A$, από τα aRb και bRc έπεται το aRc.

(d) Η σχέση R λέγεται *σχέση ισοδυναμίας* στο A, αν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική στο A.

Παράδειγμα 2.9.2 (a) Έστω P το σύνολο όλων των ανθρώπων που ζουν στη Γη. Λέμε ότι ένα άτομο p είναι *ισοδύναμο* με ένα άτομο q (και γράφουμε $p \equiv q$), αν τα p και q κατοικούν στην ίδια χώρα. Προφανώς, η σχέση $\equiv$ είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική στο P. Παρατηρούμε ότι το σύνολο P μπορεί να διαμεριστεί σε κλάσεις αμοιβαία ισοδύναμων στοιχείων: όλοι οι άνθρωποι που ζουν στις Ηνωμένες Πολιτείες σχηματίζουν μία κλάση, όλοι οι άνθρωποι που ζουν στη Γαλλία σχηματίζουν μία άλλη κλάση, κ.ο.κ. Όλα τα στοιχεία της ίδιας κλάσης είναι αμοιβαία ισοδύναμα, ενώ στοιχεία που ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις δεν είναι ποτέ ισοδύναμα. Οι κλάσεις ισοδυναμίας αντιστοιχούν ακριβώς στις διαφορετικές χώρες.

(b) Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας R στο σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων ως εξής:

$$xRy \quad \text{αν και μόνο αν} \quad x - y \text{ διαιρείται με το } 2.$$

(Δύο αριθμοί είναι ισοδύναμοι αν η διαφορά τους είναι άρτιος αριθμός.) Οι ιδιότητες (α) - (γ) επαληθεύονται εύκολα. Και πάλι, το σύνολο $\mathbb{Z}$ μπορεί να διαμεριστεί σε κλάσεις ισοδυναμίας ως προς (ή, όπως συνηθίζεται να λέγεται, *modulo*) τη σχέση R. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν δύο κλάσεις ισοδυναμίας: το σύνολο των άρτιων ακεραίων και το σύνολο των περιττών ακεραίων. Οποιοιδήποτε δύο άρτιοι ακέραιοι είναι ισοδύναμοι, όπως επίσης και οποιοιδήποτε δύο περιττοί ακέραιοι. Όμως, ένας άρτιος ακέραιος δεν μπορεί να είναι ισοδύναμος με έναν περιττό.

Η κατάσταση που συναντήσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα είναι αρκετά γενική. Κάθε σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A διαμερίζει το A σε κλάσεις ισοδυναμίας· αντιστρόφως, αν δοθεί μια κατάλληλη διαμέριση του A, τότε αυτή καθορίζει μια σχέση ισοδυναμίας στο A. Οι ακόλουθοι ορισμοί και θεωρήματα θεμελιώνουν αυτή την αντιστοιχία.

Ορισμός 2.9.3 Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A και έστω $a \in A$. Η *κλάση ισοδυναμίας* του a ως προς (ή, όπως λέγεται, *modulo*) τη σχέση R ορίζεται ως το σύνολο

$$[a]_R = \{x \in A \mid xRa\}.$$

Λήμμα 2.9.4 Έστω $a, b \in A$.

(a) Το a είναι ισοδύναμο με το b modulo E αν και μόνο αν

$$[a]_R = [b]_R.$$

(b) Το a δεν είναι ισοδύναμο με το b modulo R αν και μόνο αν

$$[a]_R \cap [b]_R = \varnothing.$$

Ορισμός 2.9.5 Ένα σύστημα S μη κενών υποσυνόλων του A λέγεται *διαμέριση* του A αν ισχύουν τα εξής:

(a) Το S αποτελείται από αμοιβαία ξένα σύνολα, δηλαδή αν $C, D \in S$ και $C \neq D$, τότε

$$C \cap D = \emptyset.$$

(b) Η ένωση όλων των συνόλων του S είναι ολόκληρο το σύνολο A, δηλαδή

$$\bigcup S = A.$$

Ορισμός 2.9.6 Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A. Το σύστημα όλων των κλάσεων ισοδυναμίας modulo τη σχέση E συμβολίζεται με A/E, δηλαδή

$$A/R = \{\, [a]_R \mid a \in A \,\}.$$

Θεώρημα 2.9.7 Έστω R μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο A. Τότε το σύστημα A/R αποτελεί διαμέριση του A.

Ορισμός 2.9.8 Έστω S μια διαμέριση του συνόλου A. Ορίζουμε τη διμελή σχέση E_S στο A ως εξής:

$$R_S = \{\, (a,b) \in A \times A \mid \text{υπάρχει } C \in S \text{ τέτοιο ώστε } a \in C \text{ και } b \in C \,\}.$$

Δύο στοιχεία $a, b \in A$ σχετίζονται μέσω της σχέσης E_S αν και μόνο αν ανήκουν στο ίδιο σύνολο της διαμέρισης S.

Ορισμός 2.9.9 Ένα σύνολο $X \subseteq A$ λέγεται *σύνολο εκπροσώπων* για τη σχέση ισοδυναμίας E_R (ή ισοδύναμα για τη διαμέριση S του A), αν για κάθε $C \in S$ ισχύει

$$X \cap C = \{a\} \quad \text{για κάποιο } a \in C.$$

2.10 Διατάξεις

Οι διατάξεις αποτελούν έναν ακόμη τύπο διμελούς σχέσης που εμφανίζεται συχνά στα μαθηματικά.

Ορισμός 2.10.1 Μια διμελής σχέση R στο σύνολο A λέγεται *αντισυμμετρική* αν για κάθε $a, b \in A$,

$$aRb \text{ και } bRa \;\Rightarrow\; a = b.$$

Ορισμός 2.10.2 Μια διμελής σχέση R στο σύνολο A που είναι ανακλαστική, αντισυμμετρική και μεταβατική λέγεται *(μερική) διάταξη* στο A. Το ζεύγος (A, R) λέγεται *διατεταγμένο σύνολο*.

Η σχέση aRb μπορεί να διαβαστεί ως «το a είναι μικρότερο ή ίσο του b» ή ισοδύναμα «το b είναι μεγαλύτερο ή ίσο του a» (ως προς τη διάταξη R). Έτσι, κάθε στοιχείο του A είναι μικρότερο ή ίσο του εαυτού του. Αν το a είναι μικρότερο ή ίσο του b και ταυτόχρονα το b είναι μικρότερο ή ίσο του a, τότε $a = b$. Τέλος, αν το a είναι μικρότερο ή ίσο του b και το b είναι μικρότερο ή ίσο του c, τότε το a είναι μικρότερο ή ίσο του c.

Παράδειγμα 2.10.3 (a) Το σύμβολο $\leq$ ορίζει μια διάταξη στο σύνολο όλων των (φυσικών, ρητών, πραγματικών) αριθμών.

(b) Ορίζουμε τη σχέση $\subseteq_A$ στο σύνολο A ως εξής:

$$x \subseteq_A y \quad \text{αν και μόνο αν} \quad x \subseteq y \text{ και } x, y \in A.$$

Τότε η σχέση $\subseteq_A$ αποτελεί διάταξη του συνόλου A.

(c) Ορίζουμε τη σχέση $\supseteq_A$ στο σύνολο A ως εξής:

$$x \supseteq_A y \quad \text{αν και μόνο αν} \quad x \supseteq y \text{ και } x, y \in A.$$

Τότε και η σχέση $\supseteq_A$ αποτελεί διάταξη του συνόλου A.

(d) Η σχέση $|$, που ορίζεται ως εξής:

$$n \mid m \quad \text{αν και μόνο αν} \quad n \text{ διαιρεί το } m,$$

αποτελεί διάταξη στο σύνολο των θετικών ακεραίων.

(e) Η σχέση Id_A αποτελεί διάταξη του συνόλου A.

Τα σύμβολα $\leq$ ή $\preceq$ χρησιμοποιούνται συχνά για να δηλώσουν διατάξεις. Μια εναλλακτική περιγραφή των διατάξεων είναι μερικές φορές πιο βολική. Για παράδειγμα, αντί για τη σχέση $\leq$ μεταξύ αριθμών, μπορεί να προτιμήσουμε τη σχέση $<$ (αυστηρό μικρότερο). Ομοίως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\subset_A$ (γνήσιο υποσύνολο) αντί της $\subseteq_A$. Κάθε διάταξη μπορεί να περιγραφεί με οποιονδήποτε από αυτούς τους δύο αμοιβαία ισοδύναμους τρόπους.

Ορισμός 2.10.4 Μια διμελής σχέση S στο σύνολο A λέγεται *ασύμμετρη* αν από το aSb έπεται ότι το bSa δεν ισχύει (για οποιαδήποτε $a, b \in A$). Δηλαδή, οι προτάσεις aSb και bSa δεν μπορούν ποτέ να ισχύουν ταυτόχρονα.

Ορισμός 2.10.5 Μια διμελής σχέση S στο σύνολο A λέγεται *αυστηρή διάταξη* αν είναι ασύμμετρη και μεταβατική.

Ορισμός 2.10.6 Έστω $a, b \in A$ και έστω $\leq$ μια διάταξη στο A. Λέμε ότι τα στοιχεία a και b είναι *συγκρίσιμα* ως προς τη διάταξη $\leq$ αν ισχύει

$$a \leq b \quad \text{ή} \quad b \leq a.$$

Λέμε ότι τα a και b είναι *ασύγκριτα* αν δεν είναι συγκρίσιμα, δηλαδή αν δεν ισχύει ούτε $a \leq b$ ούτε $b \leq a$.

Και οι δύο ορισμοί μπορούν να διατυπωθούν ισοδύναμα με όρους της αντίστοιχης αυστηρής διάταξης $<$. Για παράδειγμα, τα a και b είναι ασύγκριτα ως προς το $<$ αν $a \neq b$ και δεν ισχύει ούτε $a < b$ ούτε $b < a$.

Παράδειγμα 2.10.7 (a) Οποιοιδήποτε δύο πραγματικοί αριθμοί είναι συγκρίσιμοι ως προς τη διάταξη $\leq$.

(b) Οι αριθμοί 2 και 3 είναι ασύγκριτοι ως προς τη διάταξη $|$.

(c) Οποιαδήποτε δύο διαφορετικά στοιχεία $a, b \in A$ είναι ασύγκριτα ως προς τη διάταξη Id_A.

(d) Αν το σύνολο A έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία, τότε υπάρχουν ασύγκριτα στοιχεία στο διατεταγμένο σύνολο

$$\left(\mathscr{P}(A), \subseteq_{\mathscr{P}(A)}\right).$$

Ορισμός 2.10.8 Μια διάταξη $\leq$ (ή $<$) στο σύνολο A λέγεται *γραμμική* ή *ολική*, αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του A είναι συγκρίσιμα. Στην περίπτωση αυτή, το ζεύγος $(A, \leq)$ λέγεται *γραμμικά (ή ολικά) διατεταγμένο σύνολο*. Έτσι, η διάταξη $\leq$ στο σύνολο των θετικών ακεραίων είναι ολική, ενώ η διάταξη $|$ δεν είναι.

Ορισμός 2.10.9 Έστω $B \subseteq A$, όπου το A είναι διατεταγμένο ως προς $\leq$. Το σύνολο B λέγεται *αλυσίδα* στο A αν οποιαδήποτε δύο στοιχεία του B είναι συγκρίσιμα. Για παράδειγμα, το σύνολο όλων των δυνάμεων του 2 (δηλαδή $\{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \ldots\}$) αποτελεί αλυσίδα στο σύνολο των θετικών ακεραίων με διάταξη τη σχέση διαιρετότητας $|$. Ένα πρόβλημα που εμφανίζεται αρκετά συχνά είναι ο εντοπισμός ενός ελάχιστου ή μέγιστου στοιχείου μεταξύ ορισμένων στοιχείων ενός διατεταγμένου συνόλου. Η προσεκτικότερη μελέτη δείχνει ότι υπάρχουν διάφορες διαφορετικές έννοιες του «ελάχιστου» και του «μέγιστου».

Ορισμός 2.10.10 Έστω $\leq$ μια διάταξη στο σύνολο A και έστω $B \subseteq A$.

(a) Ένα στοιχείο $b \in B$ λέγεται *ελάχιστο στοιχείο* του B ως προς τη διάταξη $\leq$, αν

$$b \leq x \quad \text{για κάθε } x \in B.$$

(b) Ένα στοιχείο $b \in B$ λέγεται *ελαχιστικό στοιχείο* του B ως προς τη διάταξη $\leq$, αν δεν υπάρχει στοιχείο $x \in B$ τέτοιο ώστε

$$x \leq b \quad \text{και} \quad x \neq b.$$

(c) Ομοίως, ένα στοιχείο $b \in B$ λέγεται *μέγιστο στοιχείο* του B ως προς τη διάταξη $\leq$, αν

$$x \leq b \quad \text{για κάθε } x \in B.$$

(d) Ένα στοιχείο $b \in B$ λέγεται *μεγιστικό στοιχείο* του B ως προς τη διάταξη $\leq$, αν δεν υπάρχει στοιχείο $x \in B$ τέτοιο ώστε

$$b \leq x \quad \text{και} \quad x \neq b.$$

Παράδειγμα 2.10.11 Έστω $\mathbb{N}$ το σύνολο των θετικών ακεραίων, διατεταγμένο ως προς τη σχέση διαιρετότητας $|$. Τότε το 1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\mathbb{N}$, όμως το $\mathbb{N}$ δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Έστω τώρα B το σύνολο όλων των θετικών ακεραίων μεγαλύτερων (κατά απόλυτη τιμή) του 1, δηλαδή

$$B = \{2, 3, 4, \ldots\}.$$

Τότε το B δεν έχει ελάχιστο στοιχείο ως προς τη σχέση $|$ (π.χ. το 2 δεν είναι ελάχιστο, αφού δεν ισχύει $2 \mid 3$), όμως διαθέτει (άπειρα) ελαχιστικά στοιχεία: οι αριθμοί $2, 3, 5, \ldots$ (δηλαδή ακριβώς όλοι οι πρώτοι αριθμοί) είναι ελαχιστικοί. Το σύνολο B δεν έχει ούτε μέγιστο ούτε μεγιστικό στοιχείο. Παραθέτουμε ορισμένες ιδιότητες των ελαχίστων και ελαχιστικών στοιχείων.

Ορισμός 2.10.12 Έστω $\leq$ μια διάταξη στο σύνολο A και έστω $B \subseteq A$.

(a) Ένα στοιχείο $a \in A$ λέγεται *κάτω φράγμα* του B στο διατεταγμένο σύνολο $(A, \leq)$, αν

$$a \leq x \quad \text{για κάθε } x \in B.$$

(b) Ένα στοιχείο $a \in A$ λέγεται *κατώτατο φράγμα* (*infimum*) του B στο $(A, \leq)$ [ή *μέγιστο κάτω φράγμα* του B στο $(A, \leq)$], αν είναι το μέγιστο στοιχείο του συνόλου όλων των κάτω φραγμάτων του B στο $(A, \leq)$.

Ομοίως,

(a) Ένα στοιχείο $a \in A$ λέγεται *άνω φράγμα* του B στο διατεταγμένο σύνολο $(A, \leq)$, αν

$$x \leq a \quad \text{για κάθε } x \in B.$$

(b) Ένα στοιχείο $a \in A$ λέγεται *ανώτατο φράγμα* (*supremum*) του B στο $(A, \leq)$ [ή *ελάχιστο άνω φράγμα* του B στο $(A, \leq)$], αν είναι το ελάχιστο στοιχείο του συνόλου όλων των άνω φραγμάτων του B στο $(A, \leq)$.

Σημειώνουμε ότι η διαφορά μεταξύ του ελάχιστου στοιχείου του B και ενός κάτω φράγματος του B είναι ότι η δεύτερη έννοια δεν απαιτεί το στοιχείο να ανήκει στο B. Ένα σύνολο μπορεί να έχει πολλά κάτω φράγματα. Όμως, το σύνολο όλων των κάτω φραγμάτων του B μπορεί να έχει το πολύ ένα μέγιστο στοιχείο, και επομένως το B μπορεί να έχει το πολύ ένα κατώτατο φράγμα.

Παράδειγμα 2.10.13 Έστω $\leq$ η συνήθης διάταξη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών και έστω

$$B_1 = \{x \mid 0 < x < 1\}, \quad B_2 = \{x \mid 0 \leq x < 1\}, \quad B_3 = \{x \mid x > 0\}, \quad B_4 = \{x \mid x < 0\}.$$

Τότε το σύνολο B_1 δεν έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο στοιχείο, όμως κάθε $b \leq 0$ αποτελεί κάτω φράγμα του B_1, οπότε το 0 είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του B_1, δηλαδή

$$0 = \inf(B_1).$$

Ομοίως, κάθε $b \geq 1$ είναι άνω φράγμα του B_1, οπότε

$$1 = \sup(B_1).$$

Το σύνολο B_2 έχει ελάχιστο στοιχείο· συνεπώς

$$0 = \min(B_2) = \inf(B_2),$$

αλλά δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Ωστόσο,

$$\sup(B_2) = 1.$$

Το σύνολο B_3 δεν έχει ούτε μέγιστο στοιχείο ούτε ανώτατο φράγμα (στην πραγματικότητα, το B_3 δεν έχει άνω φράγματα ως προς $\leq$). Βεβαίως,

$$\inf(B_3) = 0.$$

Αντίστοιχα, το σύνολο B_4 δεν έχει κάτω φράγματα, και επομένως δεν έχει κατώτατο φράγμα (infimum).

Ορισμός 2.10.14 Ένας *ισομορφισμός* μεταξύ δύο διατεταγμένων συνόλων $(P,<)$ και $(Q,\prec)$ είναι μια ένα προς ένα συνάρτηση

$$h\colon P \to Q$$

με πεδίο ορισμού το P και σύνολο τιμών το Q, τέτοια ώστε για όλα $p_1, p_2 \in P$ να ισχύει

$$p_1 < p_2 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad h(p_1) \prec h(p_2).$$

Αν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των $(P,<)$ και $(Q,\prec)$, τότε τα διατεταγμένα σύνολα $(P,<)$ και $(Q,\prec)$ λέγονται *ισομορφικά*.

2.11 Μαθηματική θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών

Η αξιωματική θεμελίωση των φυσικών αριθμών βασίζεται στα αξιώματα Peano, τα οποία διατυπώθηκαν από τον Ιταλό μαθηματικό Giuseppe Peano. Συγκεκριμένα, υπάρχουν πέντε βασικά αξιώματα που παρέχουν έναν τυπικό ορισμό για τους φυσικούς αριθμούς και περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες που τους διέπουν. Είναι τα ακόλουθα:

Τα Αξιώματα Peano για τους Φυσικούς Αριθμούς

Τα αξιώματα Peano ορίζουν τις θεμελιώδεις ιδιότητες του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Ας τα δούμε αναλυτικά: 1. *Αξίωμα της Ύπαρξης του μηδενός*:

$$0 \in \mathbb{N}$$

Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός που ονομάζεται 0 και ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.

2. *Αξίωμα της Διαδοχής*:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S(n) \in \mathbb{N}$$

Κάθε φυσικός αριθμός n έχει έναν μοναδικό διάδοχο $S(n)$, ο οποίος επίσης ανήκει στο σύνολο $\mathbb{N}$.

3. *Αξίωμα της μη Ισότητας του μηδενός*:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S(n) \neq 0$$

Ο 0 δεν είναι διάδοχος κανενός φυσικού αριθμού.

4. *Αξίωμα της μοναδικότητας του Διαδόχου*:

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$$

Αν δύο φυσικοί αριθμοί έχουν τον ίδιο διάδοχο, τότε οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι.

5. *Αξίωμα της μαθηματικής Επαγωγής*:

$$\forall A \subseteq \mathbb{N},\ [0 \in A \wedge (\forall n \in A \Rightarrow S(n) \in A)] \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

Εάν ένα υποσύνολο A των φυσικών αριθμών περιέχει το 0 και είναι κλειστό ως προς τον διάδοχο, τότε A περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή $A = \mathbb{N}$.

Τα παραπάνω αξιώματα παρέχουν τη θεμελιώδη βάση για τον ορισμό των φυσικών αριθμών και καθορίζουν τις ιδιότητές τους.

Πιο απλά, το σύνολο των φυσικών αριθμών ορίζεται ως:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

και χαρακτηρίζεται από δύο ιδιότητες:

- Έχει αρχή, δηλαδή τον αριθμό 1.
- Αν n είναι στοιχείο του N, τότε και $n+1$ είναι στοιχείο του N.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι γνωστή ως **ιδιότητα της διαδοχής** και δηλώνει ότι το σύνολο N είναι κλειστό στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Το αν το 0 ανήκει στους φυσικούς αριθμούς εξαρτάται από τη σύμβαση. Σε πολλά πλαίσια, οι φυσικοί αριθμοί περιλαμβάνουν το 0 και συμβολίζονται ως:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Εδώ, το 0 θεωρείται σημείο εκκίνησης, ιδιαίτερα χρήσιμο σε αξιωματικά συστήματα όπως τα αξιώματα Peano.

Αλλού, οι φυσικοί αριθμοί θεωρούνται ότι ξεκινούν από το 1, με τον συμβολισμό:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}\ (\mathbb{N}^+),$$

όπου το 0 αποκλείεται, π.χ., στη θεωρία αριθμών. Η επιλογή της σύμβασης εξαρτάται από το μαθηματικό πλαίσιο και το σκοπό της μελέτης.

2.11.1 Το σύνολο των Ακεραίων Αριθμών

Το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

το οποίο χάνει την ιδιότητα της αρχής αλλά διατηρεί την ιδιότητα της διαδοχής. Είναι κλειστό στις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, και του πολλαπλασιασμού.

2.11.2 Το Σύνολο των Ρητών Αριθμών

Αν επεκτείνουμε τους ακεραίους με την πράξη της διαίρεσης (εκτός της διαίρεσης με το μηδέν), δημιουργούμε το σύνολο των ρητών αριθμών

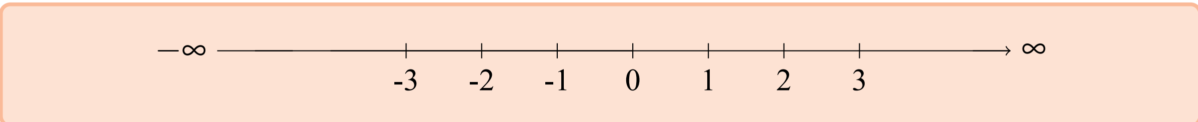
$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0\}$$

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ δεν έχει την ιδιότητα της διαδοχής. Οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, και της διαίρεσης (εκτός της διαίρεσης με μηδέν) δίνουν αποτελέσμα- τα μέσα στο $\mathbb{Q}$.

2.11.3 Το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών

Το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών $\mathbb{R}$ αποτελεί θεμέλιο για τον Λογισμό. Το κύριο χαρακτηριστικό του είναι ότι περιέχει όλους τους αριθμούς που αντιστοιχούν σε κάθε σημείο μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων πάνω στην ευθεία. Στη ευθεία αυτή, οι αριθμοί είναι τοποθετημένοι έτσι ώστε, αν κινηθούμε από τα αριστερά προς τα δεξιά, οι τιμές των αριθμών να αυξάνονται. Για παράδειγμα, αν πάρουμε ένα σημείο x πάνω στη γραμμή, τότε όλα τα σημεία που βρίσκονται αριστερά του αντι- στοιχούν σε αριθμούς μικρότερους από x, ενώ όσα βρίσκονται δεξιά του αντιστοιχούν σε μεγαλύτερους αριθμούς. Ειδικότερα, αν $x = 0$, τα σημεία στα αριστερά του 0 αντιστοιχούν στους αρνητικούς αριθμούς, ενώ στα δεξιά του βρίσκονται οι θετικοί αριθμοί. Αυτή η μοναδική ιδιότητα του $\mathbb{R}$, που απουσιάζει από τα υποσύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$, ονομάζεται *πληρότητα*. Η πληρότητα διασφαλίζει πως δεν υπάρχουν «κενά» μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών και κάθε θετικός πραγματικός αριθμός μπορεί να έχει ρίζα οποιουδήποτε τάξης. Αν αφαιρέσουμε τους ρητούς αριθμούς $\mathbb{Q}$ από το $\mathbb{R}$, απομένει το σύνολο των αρρήτων αριθμών, το οποίο συμβολίζεται ως $\mathbb{Q}^c$. Οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να γραφούν ως λόγος δύο ακεραίων και, αν εκφραστούν δεκαδικά, περιέχουν άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία. Είναι σχετικά εύκολο να κατανοήσει κανείς τη διαφορά ανάμεσα σε ένα σύνολο με πεπερασμένο αριθμό στοιχείων και ένα σύνολο με άπειρα στοιχεία. Ωστόσο, είναι πιο δύσκολο να αντιληφθούμε ότι κάποια άπειρα σύνολα έχουν περισσότερα στοιχεία από άλλα επίσης άπειρα σύνολα. Στα μαθηματικά, υπάρχουν πολλοί τύποι άπειρων συνόλων. Για τον Λογισμό, όμως, χρειαζόμαστε δύο βασικά είδη: το άπειρο των φυσικών αριθμών, το οποίο είναι μετρήσιμο, και το άπειρο των πραγματικών αριθμών, που είναι μεγαλύτερο, επειδή περιλαμβάνει περισσότερα στοιχεία από το πρώτο και καλείται υπεραριθμήσιμο. Σύνολα με ίδιο πλήθος στοιχείων με το $\mathbb{N}$ λέγονται αριθμή- σιμα, ενώ σύνολα όπως το $\mathbb{R}$, με περισσότερα στοιχεία, είναι μη αριθμήσιμα. Δύο σύνολα A και B θεωρούνται ότι έχουν ίσο πλήθος στοιχείων αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε στοιχείο του A με ένα μοναδικό στοιχείο του B, με τέτοιο τρόπο ώστε: (1) Κάθε στοιχείο του A να συνδέεται με ακριβώς ένα στοιχείο του B, και αντίστροφα. (2) Όλα τα στοιχεία και των δύο συνόλων να συμμετέχουν στην αντιστοίχηση, χωρίς να περισσεύει κανένα στοιχείο σε κανένα από τα δύο σύνολα. Έτσι, τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμα, ενώ τα $\mathbb{Q}^c$ και $\mathbb{R}$ δεν είναι. Η μετάβαση από το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ γίνεται μέσω της έννοιας της πραγματικής ευθείας. Το σύνολο $\mathbb{R}$ απεικονίζεται ως μια ευθεία γραμμή, όπου:

- Το σημείο 0 είναι η *αρχή του άξονα*[1].
- Το σημείο 1 ορίζεται ως η *μονάδα του άξονα*.



Σχήμα 2.5 *Η πραγματική ευθεία*

Η πραγματική ευθεία χωρίζεται σε δύο ημιάξονες: στον θετικό ημιάξονα βρίσκονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ενώ στον αρνητικό ημιάξονα βρίσκονται οι αρνητικοί πραγμα- τικοί αριθμοί. Κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο πάνω στην ευθεία, και κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό. Η συνέχεια της ευθείας

[1] Κάθε προσανατολισμένη ευθεία ε στην οποία έχουμε καθορίσει:

1. Ένα σημείο O σαν **αρχή**.
2. Ένα διάνυσμα $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ σαν μοναδιαίο, δηλαδή $\left|\overrightarrow{OI}\right| = \left|\vec{i}\right| = 1$

την καλούμε **άξονα** με αρχή το O και μοναδιαίο διάνυσμα το $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$. Τα άκρα του άξονα αντιστοιχούν στις τιμές $-\infty$ και $+\infty$, υποδηλώνοντας ότι ο άξονας εκτείνεται απεριόριστα προς δύο κατευθύνσεις του που συμβολίζονται με τα σύμβολα x' για την αρνητική κατεύθυνση και x για τη θετική κατεύθυνση. (i) Η ημιευθεία Ox λέγεται **θετικός ημιάξονας** Ox. (ii) Η ημιευθεία Ox' λέγεται **αρνητικός ημιάξονας** Ox'.

εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχουν κενά ή διακοπές, επιτρέποντας έτσι την άμεση σύνδεση κάθε τιμής με την επόμενη. Αυτή η συνεχής και αδιάσπαστη γραμμή, που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς, είναι γνωστή ως πραγματική ευθεία και συμβολίζεται με $\mathbb{R}$. Στο θετικό ημιάξονα βρίσκονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και στο αρνητικό ημιάξονα οι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Η **συνέχεια** της ευθείας εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχουν κενά ή διακοπές. Έτσι, μπορούμε να αναφερόμαστε στην **πραγματική ευθεία** $\mathbb{R}$, η οποία περιέχει το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών.

2.12 Πράξεις στους Πραγματικούς Αριθμούς

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, μπορούμε να εκτελούμε τις βασικές αριθμητικές πράξεις:

- Πρόσθεση,
- Αφαίρεση, η οποία περιγράφεται ως "αντίστροφη πρόσθεση",
- Πολλαπλασιασμός, και
- Διαίρεση, η οποία περιγράφεται ως "αντίστροφος πολλαπλασιασμός".

Οι πράξεις αυτές μπορούν να εκτελούνται χωρίς προβλήματα όσο βρισκόμαστε στο πεδίο των πραγματικών αριθμών.

Περιορισμοί των Πραγματικών Αριθμών

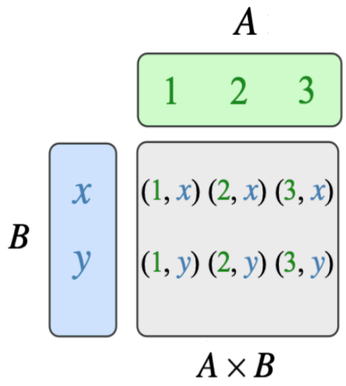
Είναι επίσης δυνατό να εξάγουμε ρίζες στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$, αλλά ο περιορισμός προκύπτει όταν ασχολούμαστε με άρτιες τάξεις ριζών (όπως τετραγωνικές ρίζες) από αρνητικούς αριθμούς. Αυτό συμβαίνει γιατί δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο να είναι αρνητικό. Οι παραπάνω περιορισμοί των πραγματικών αριθμών οδηγούν φυσικά στην ανάγκη διεύρυνσης του αριθμητικού μας πλαισίου. Η εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών επιτρέπει την επίλυση εξισώσεων που δεν έχουν λύση στο $\mathbb{R}$ και οδηγεί σε ένα πληρέστερο και αλγεβρικά κλειστό σύστημα αριθμών.

2.12.1 Ιστορικό Σχόλιο

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι τα μεγέθη είναι συμμετρικά, δηλαδή μπορεί να βρεθεί κοινό μέτρο μεταξύ αυτών, μέχρι που ανακάλυψαν την ύπαρξη ασυμμετρίας. Αυτή η κρίση ήρθε με την παρατήρηση ότι δεν υπάρχει κοινό μέτρο για τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, δηλαδή η διαγώνιος δεν μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Η λύση του προβλήματος της αξιωματικής θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών δόθηκε από τον Εύδοξο και βρίσκεται στο βιβλίο V, ορισμός 5, των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Η κατασκευή των άρρητων (ασύμμετρων) αριθμών, η οποία βασίζεται στη θεωρία του Εύδοξου, δημοσιεύτηκε το 1872 από τον Dedekind και είναι γνωστή ως κατασκευή των πραγματικών αριθμών μέσω τομών (*Dedekind cuts*). Η θεωρία των Ευδόξου και Dedekind συνιστά ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά επιτεύγματα της θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών.

2.13 Καρτεσιανό Γινόμενο

Αν A και B είναι δύο μη κενά σύνολα, τότε το καρτεσιανό γινόμενο, $A \times B$, είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (a, b) με το πρώτο στοιχείο από το A και το δεύτερο από το B. Όπως και με τις άλλες πράξεις γινομένου, χρησιμοποιούμε το σύμβολο πολλαπλασιασμού $\times$ για να αναπαραστήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο μεταξύ δύο συνόλων. Εδώ, χρησιμοποιούμε τη σημειογραφία $A \times B$ για το καρτεσιανό γινόμενο των A και B. Χρησιμοποιώντας τη σημειογραφία συνόλου, μπορούμε να γράψουμε το καρτεσιανό γινόμενο ως: $A \times B = \{(a,b) | a \in A, b \in B\}$. Αν τα δύο σύνολα είναι ίδια, δηλαδή αν $A = B$, τότε το $A \times B$ ονομάζεται το καρτεσιανό τετράγωνο του συνόλου A και σημιώνεται ως A^2: $A^2 = A \times A = \{(a,b) | a \in A, b \in A\}$



Σχήμα 2.6 *Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B.*

Είναι χρήσιμο να ορίσουμε μια πιο γενική έννοια του γινομένου συνόλων μέσω συναρτήσεων.

Ορισμός 2.13.1 Έστω I ένα σύνολο δεικτών και X ένα σύνολο. Μια *συνάρτηση δεικτών* είναι μια συνάρτηση

$$F : I \to \mathscr{P}(X),$$

η οποία σε κάθε δείκτη $i \in I$ αντιστοιχίζει ένα σύνολο F_i, δηλαδή

$$F(i) = F_i.$$

Τη συνάρτηση αυτή τη συμβολίζουμε συχνά με $(F_i \mid i \in I)$.

Απο τον ορισμό έχουμε ότι Δοθείσας μιας συλλογής αντικειμένων $\{F_i\}_{i \in I}$, το σύνολο I ονομάζεται *σύνολο δεικτών*, και κάθε στοιχείο $i \in I$ αποτελεί δείκτη που προσδιορίζει ένα συγκεκριμένο αντικείμενο F_i. Τώρα έστω $\mathscr{F} = \{F_i \mid i \in I\}$ ένα δεικτοδοτημένο σύστημα συνόλων. Ορίζουμε το *γινόμενο* του δεικτοδοτημένου συστήματος $\mathscr{F}$ ως το σύνολο

$$\prod \mathscr{F} = \{ f \mid f \text{ είναι συνάρτηση στο } I \text{ και } f(i) \in F_i \text{ για κάθε } i \in I \}.$$

Άλλες σημειογραφίες που χρησιμοποιούμε κατά περίπτωση είναι

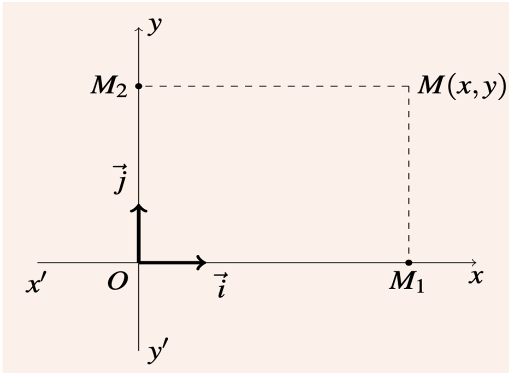
$$\prod \{F(i) \mid i \in I\}, \ \prod_{i \in I} F(i), \ \prod_{i \in I} F_i.$$

Το καρτεσιανό γινόμενο αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο στη μαθηματική ανάλυση και βρίσκει εφαρμογές σε πολλούς τομείς, όπως στην αναπαράσταση εικόνων, τη δομή της σκακιέρας, τον σχεδιασμό δεδομένων και άλλα πολλά. Προσφέρει έναν συστηματικό τρόπο να συσχετίζουμε στοιχεία από διαφορετικά σύνολα, σχηματίζοντας διατεταγμένα ζεύγη ή ν-πλέγματα, τα οποία διατηρούν τη σειρά των στοιχείων από τα αρχικά σύνολα. Αυτή η συσχέτιση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν θέλουμε να απεικονίσουμε πολύπλοκες σχέσεις και δομές. Για παράδειγμα, στην αναπαράσταση μιας ψηφιακής εικόνας, κάθε εικονοστοιχείο (pixel) μπορεί να περιγραφεί ως ένα διατεταγμένο ζεύγος συντεταγμένων που αντιστοιχεί στη θέση του στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα. Έτσι, το καρτεσιανό γινόμενο μας επιτρέπει να ορίσουμε την εικόνα ως ένα σύνολο ζευγών συντεταγμένων που αντιστοιχούν στα σημεία της.

2.14 Καρτεσιανό Επίπεδο

Σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$ με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα αντίστοιχα τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$, οπότε έχουμε ένα *ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο* ή ένα *σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο* ή ένα *καρτεσιανό επίπεδο* και το συμβολίζουμε με Oxy. Το σύστημα Oxy λέγεται ορθοκανονικό, γιατί:

1. Είναι *ορθογώνιο* γιατί οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι κάθετοι.
2. Είναι *κανονικό* γιατί τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι ισομήκη.

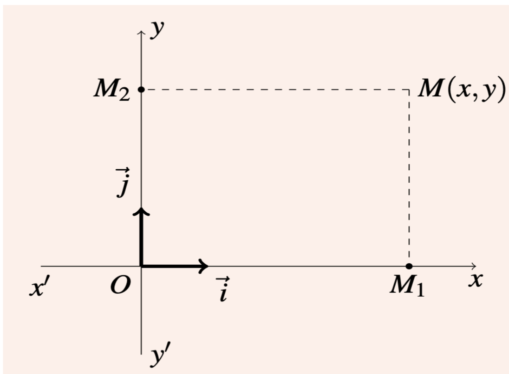


Σχήμα 2.7 *Καρτεσιανό επίπεδο*

2.15 Συντεταγμένες σημείου στο επίπεδο

Έστω M τυχαίο σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy. Από το M φέρνουμε $MM_1 \parallel y'y$ και $MM_2 \parallel x'x$. Αν x είναι η τετμημένη του M_1 ως προς τον άξονα $x'x$, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM_1} = x \cdot \vec{i}$.

Τότε ο $x \in \mathbb{R}$ καλείται *τετμημένη* του M. ’Ομοια, αν y είναι η τετμημένη του M_2 ως προς τον άξονα $y'y$, υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM_2} = y \cdot \vec{j}$. Τότε ο $y \in \mathbb{R}$ καλείται *τεταγμένη* του M. Η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου M λέγονται *συντεταγμένες του* M. Έτσι σε κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος συντεταγμένων, δηλαδή ένα ζευγάρι (x,y) πραγματικών αριθμών. Ένα σημείο M με τετμημένη x και τεταγμένη y συμβολίζεται και με $M(x,y)$ ή απλά με (x,y).



Σχήμα 2.8 *Καρτεσιανό επίπεδο*

Αντίστροφα, σε κάθε ζεύγος (x,y) πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο M του επιπέδου, το οποίο βρίσκουμε με τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω.

2.16 Εισαγωγή των μιγαδικών Αριθμών

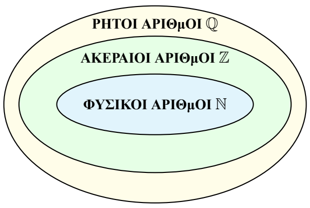
Γνωρίζουμε ότι μια δευτεροβάθμια εξίσωση με αρνητική διακρίνουσα δεν έχει λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα, η εξίσωση $x^2 = -1$ δεν μπορεί να λυθεί μέσα στο σύνολο $\mathbb{R}$, αφού το τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού είναι πάντα μη αρνητικό. Για να ξεπεράσουμε αυτόν τον περιορισμό, επεκτείνουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ σε ένα νέο σύνολο, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Το σύνολο $\mathbb{C}$ διατηρεί όλες τις πράξεις και ιδιότητες του $\mathbb{R}$ αλλά, επιπλέον, περιέχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 = -1$. Συγκεκριμένα, υπάρχει ένα στοιχείο i στο $\mathbb{C}$, για το οποίο ισχύει $i^2 = -1$. με βάση αυτές τις παραδοχές, το διευρυμένο σύνολο $\mathbb{C}$ περιλαμβάνει τα εξής στοιχεία:

- Όλους τους πραγματικούς αριθμούς.

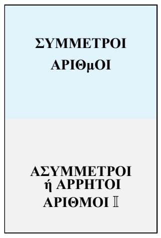
- Όλα τα στοιχεία της μορφής yi, όπου y είναι πραγματικός αριθμός και το στοιχείο είναι το γινόμενο του b με το i.

- Όλα τα αθροίσματα της μορφής $x+yi$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{C}=\{z=x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ ονομάζονται *μιγαδικοί αριθμοί*, και το $\mathbb{C}$ αναφέρεται ως το *σύνολο των μιγαδικών αριθμών*.



ΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ



ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ℝ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ℂ

2.16.1 Ιστορικό Σχόλιο

Οι απαρχές για τη δημιουργία των μιγαδικών αριθμών ανάγονται στις προσπάθειες πολλών μαθηματικών να επιλύσουν εξισώσεις 3ου βαθμού. Αν στην εξίσωση

$$ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$$

θέσουμε

$$x=y-\frac{\beta}{3a}$$

και εκτελέσουμε τις πράξεις, τότε προκύπτει μια εξίσωση της μορφής

$$x^3=px+q.$$

Στις αρχές του 16ου αιώνα, οι Ιταλοί αλγεβριστές S. del Ferro και N. Tartaglia ανακάλυψαν μια μέθοδο επίλυσης τέτοιων εξισώσεων, που με σημερινό συμβολισμό ισοδυναμεί με τον τύπο:

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{2}-\frac{p^3}{3}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{2}-\frac{p^3}{3}}}$$

Υπάρχουν εξισώσεις με πραγματικές ρίζες, όπως για παράδειγμα, η

$$x^3=15x+4$$

που έχει μια προφανή ρίζα το 4 (οι άλλες δύο είναι οι $-2+\sqrt{3}$ και $-2-\sqrt{3}$), αλλά η διακρίνουσα D είναι αρνητική! Ο τύπος στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνει

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Στα μέσα του 16ου αιώνα, ο R. Bombelli, με καινοτόμες για την εποχή του υποθέσεις, κατόρθωσε να δείξει ότι

$$(2+\sqrt{-1})^3=2+\sqrt{-121} \quad \text{και} \quad (2-\sqrt{-1})^3=2-\sqrt{-121}.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις ισότητες στην (6.1), προκύπτει άμεσα ότι $x = 4$, αποδεικνύοντας πως το αδιανόητο μπορεί να γίνει πραγματικότητα. Οι αριθμοί της μορφής $z = a + \beta i$, όπου $i = \sqrt{-1}$, που αρχικά ονομάστηκαν φανταστικοί και αργότερα μιγαδικοί, έγιναν από τότε ένα αναπόσπαστο εργαλείο των μαθηματικών και των εφαρμογών τους σε άλλες επιστήμες.

2.17 Η άλγεβρα και η γεωμετρία των μιγαδικών αριθμών

Βασικές πράξεις στο μιγαδικό επίπεδο

- Πρόσθεση:
$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$
- Αφαίρεση:
$$(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$
- Πολλαπλασιασμός:
$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
- Διαίρεση:
$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad x_2 + iy_2 \neq 0$$
- Ισότητα:
$$(x_1 + iy_1) = (x_2 + iy_2) \iff x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$$

Επειδή ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να θεωρηθεί, όπως είδαμε παραπάνω, σαν ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y), μπορούμε να παραστήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με σημεία σ' ένα επίπεδο Oxy. Το επίπεδο αυτό ονομάζεται *μιγαδικό επίπεδο* ή *επίπεδο του Gauss* ή *επίπεδο του Argand*.

Μιγαδικό επίπεδο

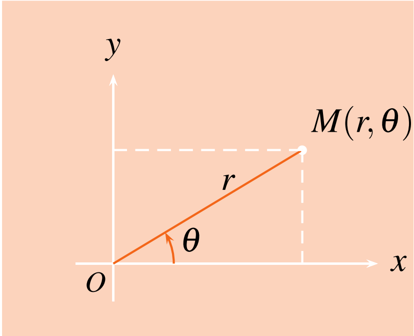
Ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ παριστάνεται από ένα σημείο P με τετμημένη x και τεταγμένη y. Ο άξονας Ox λέγεται *πραγματικός άξονας* και ο άξονας Oy *φανταστικός*. Επίσης μπορούμε να έχουμε και την εξής *πολική μορφή* για τον μιγαδικό αριθμό z:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
όπου
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Σ' αυτήν την παράσταση το r είναι μοναδικό αλλά όχι και το θ. Συνήθως θεωρούμε ότι το θ μεταβάλλεται σ' ένα διάστημα εύρους 2π και σαν τέτοιο χρησιμοποιούμε το $I = [0, 2\pi)$, δηλαδή $0 \leq \theta < 2\pi$.

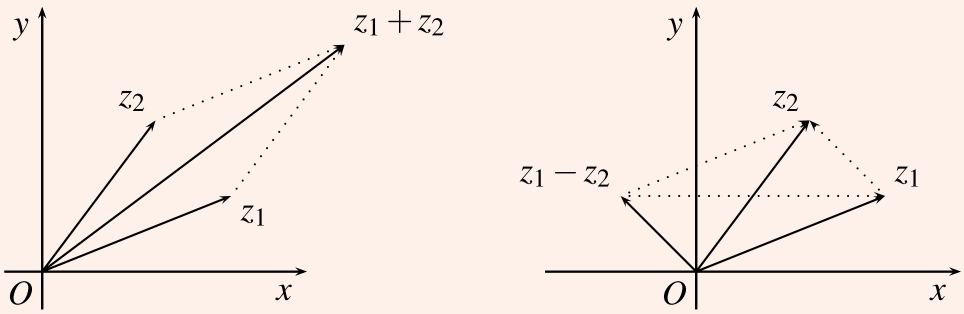
Το r λέγεται *μέτρο* ή *απόλυτη τιμή* του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζεται με $r = |z|$ και το θ *όρισμα* ή *πολική γωνία* ή *φάση* του z και συμβολίζεται με $\theta = \arg z$. Ο αριθμός $x - iy$ λέγεται *συζυγής μιγαδικός* ή απλά *συζυγής* του z και θα συμβολίζεται με $\bar{z}$ ή z^*. Οι μιγαδικοί αριθμοί z και $\bar{z}$ παριστάνουν στο μιγαδικό επίπεδο σημεία, που είναι συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα OX.
Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

- $z\bar{z} = |z|^2 = r^2$
- $z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = 2iy$
- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$



Σχήμα 2.9 *Πολικές συντεταγμένες*

Οι μιγαδικοί αριθμοί ακολουθούν τον ίδιο κανόνα πρόσθεσης που ισχύει και για τα διανύσματα σε ένα επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να τους προσθέσουμε (ή να τους αφαιρέσουμε) χρησιμοποιώντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αντίστροφα, οποιοδήποτε διάνυσμα σε ένα επίπεδο μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν μιγαδικό αριθμό.



Σχήμα 2.10 *Κανόνας του παραλληλογράμμου*

Κατ' αναλογία προς τα διανύσματα, μπορούμε να ορίσουμε και για τους μιγαδικούς αριθμούς ένα εσωτερικό και ένα εξωτερικό γινόμενο. Έστω ότι έχουμε δύο μιγαδικούς αριθμούς $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$. Τότε, ορίζουμε τα εξής:

- *Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο*: Το εσωτερικό γινόμενο των δύο αριθμών ορίζεται ως

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 = \mathrm{Re}(\overline{z_1}z_2) = \frac{\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}}{2},$$

  όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των z_1 και z_2, η οποία κυμαίνεται από 0 έως π. Αυτό το γινόμενο είναι ένας πραγματικός αριθμός και μοιάζει με το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων.

- *Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο*: Το εξωτερικό γινόμενο των δύο αριθμών δίνεται από τη σχέση

$$z_1 \times z_2 = |z_1||z_2|\sin\theta = x_1y_2 - x_2y_1 = \mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2) = \frac{\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}}{2i}.$$

Αυτή η ποσότητα είναι επίσης ένας πραγματικός αριθμός και είναι ανάλογη με το διανυσματικό γινόμενο των διανυσμάτων. Εάν οι z_1 και z_2 είναι διαφορετικοί από το μηδέν, τότε ισχύουν οι εξής προτάσεις:

1. μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι οι z_1 και z_2 κάθετοι είναι το εσωτερικό γινόμενο $z_1 \cdot z_2 = 0$.
2. μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι οι z_1 και z_2 παράλληλοι είναι το εξωτερικό γινόμενο $z_1 \times z_2 = 0$.

με άλλα λόγια, το εσωτερικό γινόμενο δείχνει τη σχέση των γωνιών μεταξύ των μιγαδικών αριθμών, ενώ το εξωτερικό γινόμενο υποδεικνύει αν οι αριθμοί είναι παράλληλοι ή κάθετοι.

2.18 Ο τύπος του De Moivre και οι ρίζες των μιγαδικών αριθμών

Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των μιγαδικών αριθμών είναι σχετικά εύκολες στην καρτεσιανή τους μορφή, δηλαδή όταν οι αριθμοί εκφράζονται ως $z = x + iy$. Ωστόσο, οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι ακόμη πιο εύκολες όταν οι αριθμοί εκφράζονται στην πολική τους μορφή. Συγκεκριμένα, αν:

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{και} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

τότε μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

με τον όρο ότι αν $\theta_1 + \theta_2 \geq 2\pi$, τότε πρέπει να αφαιρέσουμε 2π, και αν $\theta_1 - \theta_2 < 0$, τότε πρέπει να προσθέσουμε 2π, έτσι ώστε και στις δύο περιπτώσεις οι γωνίες να ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$0 \leq \theta_1 + \theta_2 < 2\pi \quad \text{και} \quad 0 \leq \theta_1 - \theta_2 < 2\pi$$

μια γενίκευση της σχέσης του πολλαπλασιασμού είναι η εξής:

$$z_1z_2\cdots z_n = r_1r_2\cdots r_n[\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)]$$

Αν θέσουμε $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, τότε η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$z^n = r^n \left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$$

Αυτή η σχέση ονομάζεται *τύπος του De Moivre* και μας δίνει την n-οστή δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού.

Υπολογισμός n-οστής ρίζας

Η n-οστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού z ορίζεται ως ο μιγαδικός αριθμός w, έτσι ώστε να ισχύει:

$$w^n = z$$

Έστω $w = r_w \left[\cos\theta_w + i\sin\theta_w\right]$ και $z = r\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$. Η σχέση $w^n = z$ γράφεται με τη χρήση του τύπου του De Moivre:

$$r_w^n \left[\cos(n\theta_w) + i\sin(n\theta_w)\right] = r\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$$

Από τον ορισμό της ισότητας δύο μιγαδικών αριθμών, προκύπτει:

$$r_w^n = r \quad \text{και} \quad n\theta_w = \theta + 2k\pi, \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

Αν τις δύο τελευταίες σχέσεις τις υψώσουμε στο τετράγωνο και τις προσθέσουμε, τότε:

$$r_w = \sqrt[n]{r}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση του (1.8), έχουμε:

$$\cos n\theta_w = \cos\theta \quad \text{και} \quad \sin n\theta_w = \sin\theta$$

Άρα:

$$n\theta_w = \theta + 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad \theta_w = \tfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Τελικά, η n-οστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι:

$$w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

2.19 Ο τύπος του Euler

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι n-οστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου n πλευρών, που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = \sqrt[n]{r}$ και κέντρο την αρχή των αξόνων.
Αν στο ανάπτυγμα MacLaurin της εκθετικής συνάρτησης

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^3}{3!} + \cdots$$

θέσουμε $x = i\theta$, τότε έχουμε:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots$$

Ομαδοποιώντας τους πραγματικούς και τους φανταστικούς όρους, καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$e^{i\theta} = \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right] + i\left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right] = \cos\theta + i\sin\theta$$

Η σχέση:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ονομάζεται *τύπος του Euler*. Έτσι, ένας μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γραφεί υπό την εκθετική μορφή:

$$z = re^{i\theta}$$