

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

“Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’αυτό μένειν”

Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Copyright © 2024 Αθανάσιος Ανδρικόπουλος

Το παρόν ηλεκτρονικό υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών, ως υποστηρικτικό εγχειρίδιο για τα φροντιστηριακά μαθήματα του προγράμματος τους. Το υλικό δεν προορίζεται για εμπορική χρήση ή διάθεση εκτός του επίσημου περιβάλλοντος διδασκαλίας του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Παρόλη την προσεκτική επιμέλεια και συνεχή προσπάθεια ενημέρωσης και βελτίωσης, ενδέχεται να περιέχει λάθη ή παραλείψεις, καθώς βρίσκεται σε αρχικό στάδιο ανάπτυξης. Η συνεργασία και τα σχόλια των φοιτητών στο πλαίσιο της κοινής μας προσπάθειας εκτιμώνται ιδιαίτερα και συμβάλλουν στην καλύτερη ποιότητα και πληρότητα του υλικού.

Δεκέμβρης 2025



Περιεχόμενα

I	Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά	5
1	Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά	7
II	Λογισμός των Διανυσματικών Συναρτήσεων	9
2	Λογισμός των Διανυσματικών Συναρτήσεων	11
2.1	Διανυσματικά Πεδία και Διανυσματικές Συναρτήσεις	11
2.1.1	Διανυσματικά πεδία	13
2.2	Τελεστές που δρουν σε διανυσματικά πεδία	18
2.2.1	Διανυσματικές συναρτήσεις	18
2.2.2	Σύγκριση και γεωμετρική ερμηνεία Διανυσματικού πεδίου και Διανυσματικής συνάρτησης	19
2.2.3	Η κλίση και οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση	20
2.3	Εισαγωγή στον κανόνα της αλυσίδας για τροχιές	22
2.4	Παράγωγοι κατά κατεύθυνση	24
2.5	Ιδιότητες της κλίσης	28
2.5.1	Εξίσωση επιπέδου με γνωστή κάθετη διεύθυνση	31

I

Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά

1	Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά	7
---	-------------------------------------	---



1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

2	Λογισμός των Διανυσματικών	
	Συναρτήσεις	11
2.1	Διανυσματικά Πεδία και Διανυσματικές Συναρτήσεις . .	11
2.1.1	Διανυσματικά πεδία	13
2.2	Τελεστές που δρουν σε διανυσματικά πεδία	18
2.2.1	Διανυσματικές συναρτήσεις	18
2.2.2	Σύγκριση και γεωμετρική ερμηνεία Διανυσματικού πεδίου και Διανυσματικής συνάρτησης	19
2.2.3	Η κλίση και οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση	20
2.3	Εισαγωγή συναρτήσεων ως σύνολα τροχιών	22
2.4	Παράγωγοι κατά κατεύθυνση	24
2.5	Ιδιότητες της κλίσης	28
2.5.1	Εξίσωση επιπέδου με γνωστή κάθετη διεύθυνση . .	31



2 Λογισμός των Διανυσματικών Συναρτήσεων

2.1 Διανυσματικά Πεδία και Διανυσματικές Συναρτήσεις

Στο προηγούμενο κεφάλαιο γενικεύσαμε την έννοια της ολοκλήρωσης περνώντας από την περίπτωση της μίας σε αυτήν των πολλών μεταβλητών. Στο παρόν κεφάλαιο θα γενικεύσουμε ακόμα περισσότερο την έννοια της ολοκλήρωσης ώστε να μάθουμε να ολοκληρώνουμε πάνω σε καμπύλες και επιφάνειες, ενώ επιπλέον οι ολοκληρωτέες ποσότητες δεν θα είναι μόνο βαθμωτές συναρτήσεις αλλά και διανυσματικά πεδία. Τα ολοκληρώματα των διανυσματικών πεδίων χρησιμοποιούνται ευρέως στη μελέτη των φαινομένων του ηλεκτρομαγνητισμού, της δυναμικής των ρευστών αλλά και της μεταφοράς θερμότητας. Προκειμένου να θέσουμε το πλαίσιο για τον ορισμό και την ανάλυση των ολοκληρωμάτων αυτού του είδους, θα ξεκινήσουμε το κεφάλαιο με τη μελέτη των διανυσματικών πεδίων.

Υπενθύμιση 2.1.1

Διανύσματα

Θυμηθείτε ότι το επίπεδο είναι το σύνολο των σημείων $\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Συχνά συμβολίζουμε το επίπεδο με $\mathbb{R}^2$. Ο συμβολισμός αυτός αντικατοπτρίζει την ιδέα ότι το επίπεδο είναι ένα «γινόμενο» δύο αντιγράφων της γραμμής των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, όπου το ένα από αυτά αναπαριστά τα σημεία της x -συντεταγμένης, ενώ το άλλο τα σημεία της y -συντεταγμένης. Ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$, στις δύο διαστάσεις, προσδιορίζεται από μέτρο, διεύθυνση και φορά. Αντιπροσωπεύει μεγέθη που δεν περιγράφονται μόνο από έναν αριθμό, αλλά απαιτούν και πληροφορία για το «προς τα πού» εφαρμόζονται, όπως η δύναμη, η ταχύτητα ή η μετατόπιση. Δηλαδή έχουμε:

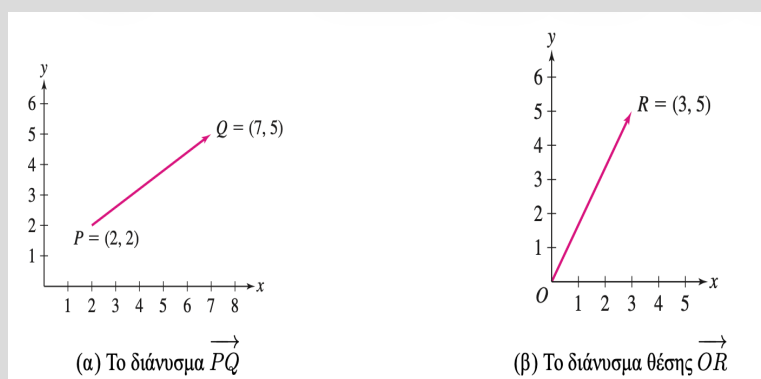
- **Διεύθυνση:** Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα. Όλα τα παράλληλα ή συνενυθιακά διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση.
- **Φορά:** Δείχνει προς ποιο άκρο της ευθείας κατευθύνεται το διάνυσμα. Δύο διανύσματα με ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά είναι αντίθετα διανύσματα.
- **Κατεύθυνση:** Ο όρος χρησιμοποιείται για να εκφράσει συνολικά τη διεύθυνση και τη φορά ενός διανύσματος. Δύο διανύσματα έχουν ίδια κατεύθυνση όταν είναι παράλληλα και ομόρροπα.

Έτσι, ένα διάνυσμα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα *προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα*, του οποίου το αρχικό σημείο (*ουρά*) δείχνει το σημείο εφαρμογής και το τελικό σημείο (*αιχμή*) δηλώνει τη φορά του. Με βάση αυτά τα δύο σημεία γράφουμε

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$$

και σχεδιάζουμε το $\mathbf{v}$ ως ένα βέλος με κατεύθυνση από το P προς το Q . Το διάνυσμα αυτό θα λέμε ότι έχει ως *βάση* του το σημείο P . Στο Σχήμα 2.1(α) απεικονίζεται το διάνυσμα με αφετηρία το σημείο $P = (2, 2)$ και πέρας σημείο το $Q = (7, 5)$. Το μήκος ή *μέτρο* του διανύσματος $\mathbf{v}$, που σημειώνεται με $\|\mathbf{v}\|$, είναι η απόσταση από το σημείο P μέχρι το σημείο Q . Το διάνυσμα $\mathbf{v} = \overrightarrow{OR}$ με κατεύθυνση από την αρχή των αξόνων O προς ένα σημείο R αποκαλείται *διάνυσμα θέσης* του R .

Στο Σχήμα 2.1(β) φαίνεται το διάνυσμα θέσης του σημείου $R = (3, 5)$.



Σχήμα 2.1

Ορισμός 2.1.2 Συνιστώσες ενός διανύσματος Οι συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, όπου $P = (a_1, b_1)$ και $Q = (a_2, b_2)$, είναι οι ποσότητες

$$a = a_2 - a_1 \quad (x\text{-συνιστώσα}), \quad b = b_2 - b_1 \quad (y\text{-συνιστώσα})$$

Το ζεύγος των συνιστωσών συμβολίζεται με $\langle a, b \rangle$.

Ορισμός 2.1.3 Το μήκος του διανύσματος $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$, σε συνάρτηση με τις συνιστώσες του (σύμφωνα με τον τύπο που δίνει την απόσταση), θα είναι:

$$\|\mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Το *μηδενικό διάνυσμα* (στο οποίο η αρχή και το πέρας συμπίπτουν) είναι το διάνυσμα $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$ με μήκος ίσο με μηδέν. Πρόκειται για το μοναδικό διάνυσμα που δεν έχει κατεύθυνση.
- Για ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$, το $-\mathbf{v}$ είναι το διάνυσμα με το ίδιο μήκος με το $\mathbf{v}$, αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση από αυτό. Έτσι, αν $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$, τότε $-\mathbf{v} = \langle -a, -b \rangle$.

Ξεκινάμε με την γενίκευση της έννοιας του μεμονωμένου διανύσματος, περιγράφοντας πώς αυτό μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο μέσα σε μια περιοχή και δημιουργείται ένα πεδίο από

διανύσματα που καλύπτουν μια περιοχή, έτσι ώστε κάθε σημείο να έχει το δικό του διάνυσμα που δείχνει τη φορά και το μέγεθος κάποιας φυσικής ποσότητας. Τέτοια πεδία εμφανίζονται σε πολλές εφαρμογές της Φυσικής και των Μαθηματικών, όπως:

- στο βαρυτικό πεδίο, όπου κάθε σημείο του χώρου έχει ένα διάνυσμα δύναμης,
- στο ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο, όπου τα διανύσματα δείχνουν την κατεύθυνση και την ένταση της δύναμης,
- στο πεδίο ταχυτήτων ενός ρευστού, όπου τα διανύσματα δείχνουν την κατεύθυνση και το μέγεθος της ταχύτητας σε κάθε σημείο.

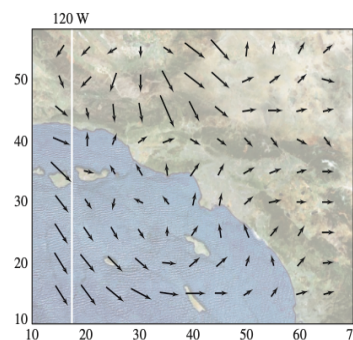
2.1.1 Διανυσματικά πεδία

Με ποιον τρόπο μπορούμε να περιγράψουμε ένα φυσικό μέγεθος, όπως ο άνεμος, που απαρτίζεται από ένα τεράστιο πλήθος μορίων τα οποία κινούνται σε μια περιοχή του χώρου; Αυτό που χρειαζόμαστε είναι ένα νέο είδος συνάρτησης, που είναι γνωστή ως *διανυσματικό πεδίο*. Στην περίπτωση του ανέμου, ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο του χώρου

$$P = (x, y, z)$$

ένα διάνυσμα

$$\mathbf{F}(x, y, z),$$



Σχήμα 2.2 Το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας του ανέμου στην περιοχή της παραλίας του Λος Άντζελες

το οποίο αναπαριστά το διάνυσμα της ταχύτητας (μέτρο και κατεύθυνση) του ανέμου στο συγκεκριμένο σημείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Τα διανυσματικά πεδία μπορούν να περιγράψουν διάφορα φυσικά μεγέθη στα οποία αποδίδουμε μέτρο και κατεύθυνση, όπως πεδία δυνάμεων, ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Από μαθηματικής σκοπιάς, ένα διανυσματικό πεδίο στον χώρο $\mathbb{R}^3$ παριστάνεται με τη βοήθεια ενός διανύσματος οι συνιστώσες του οποίου είναι συναρτήσεις, δηλαδή:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z) \rangle.$$

Κάθε σημείο

$$P = (a, b, c)$$

συνδέεται με το διάνυσμα $\mathbf{F}(a, b, c)$, το οποίο συμβολίζεται επίσης και ως $\mathbf{F}(P)$. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό:

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}.$$

Όταν σχεδιάζουμε ένα διανυσματικό πεδίο, θα σχεδιάζουμε το

$$\mathbf{F}(P)$$

ως ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο P . Το πεδίο ορισμού του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ είναι το σύνολο των σημείων P για τα οποία ορίζεται το $\mathbf{F}(P)$. Τα διανυσματικά πεδία στο επίπεδο συμβολίζονται με παρόμοιο τρόπο ως:

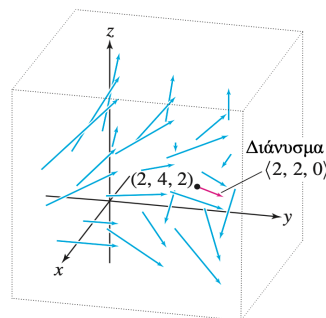
$$\mathbf{F}(x, y) = \langle F_1(x, y), F_2(x, y) \rangle = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j}.$$

Στο παρόν κεφάλαιο θα υποθέσουμε ότι οι συνιστώσες συναρτήσεις F_j είναι λείες, διαθέτουν δηλαδή μερικές παραγώγους όλων των τάξεων στο πεδίο ορισμού τους.

Παράδειγμα 2.1.4

Ποιο είναι το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο σημείο $P = (2, 4, 2)$ του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y - z, x, z - \sqrt{y} \rangle;$$



Σχήμα 2.3

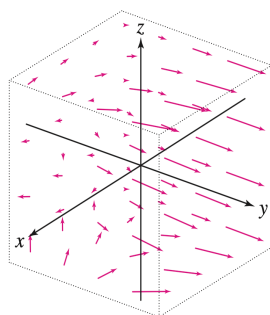
Λύση. Το ζητούμενο διάνυσμα που συνδέεται με το σημείο P είναι:

$$\mathbf{F}(2, 4, 2) = \langle 4 - 2, 2, 2 - \sqrt{4} \rangle = \langle 2, 2, 0 \rangle.$$

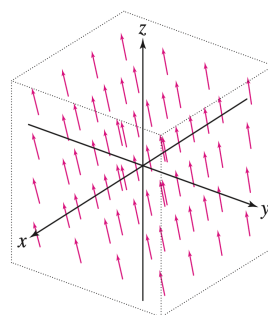
Ορισμένα από τα διάνυσματα του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ απεικονίζονται στο Σχήμα 2.3, με το διάνυσμα $\mathbf{F}(2, 4, 2)$ να σημειώνεται με κόκκινο χρώμα.

Διαίσθητικά: Το πεδίο «σπρώχνει» ή «κατευθύνει» ένα σημείο του χώρου με φορά διαγώνια στο επίπεδο xy , χωρίς καθόλου ανύψωση ή βύθιση στον άξονα z .

Αν και δεν είναι καθόλου πρακτικό να σχεδιάζουμε με το χέρι πολύπλοκα διανυσματικά πεδία στις τρεις διαστάσεις, τα λογισμικά εργαλεία γραφικών που χρησιμοποιούν οι σύγχρονοι υπολογιστές μπορούν να παράγουν πολύ χρήσιμες οπτικές αναπαραστάσεις των διανυσματικών πεδίων, όπως αυτές που φαίνονται στο Σχήμα 2.4. Το διανυσματικό πεδίο του Σχήματος 2.4(β) αποτελεί παράδειγμα ενός σταθερού διανυσματικού πεδίου, ενός πεδίου δηλαδή το οποίο αντιστοιχεί το ίδιο διάνυσμα, στην περίπτωση μας το $\langle 1, -1, 3 \rangle$, σε κάθε σημείο του χώρου $\mathbb{R}^3$.



(α) $\mathbf{F} = \langle x \sin z, y^2, x/(z^2 + 1) \rangle$



(β) Το σταθερό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \langle 1, -1, 3 \rangle$

Σχήμα 2.4

Παράδειγμα 2.1.5

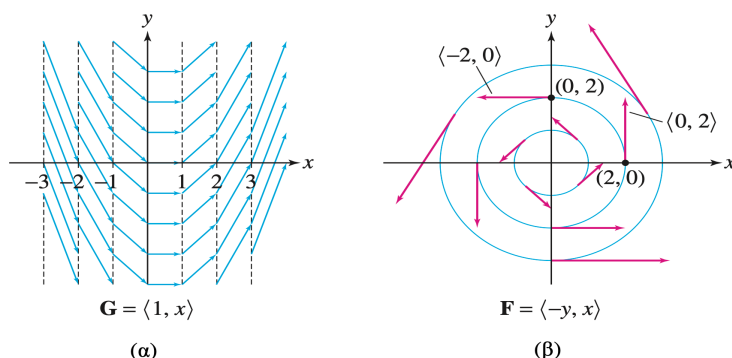
Να περιγράψετε τα ακόλουθα δύο διανυσματικά πεδία του χώρου $\mathbb{R}^2$:

$$(a) \mathbf{G} = i + xj \quad (b) \mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$$

Λύση.

(α) Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G} = i + xj$ αντιστοιχίζει το διάνυσμα $\langle 1, a \rangle$ στο σημείο (a, b) . Πιο συγκεκριμένα, αντιστοιχίζει το ίδιο διάνυσμα σε όλα τα σημεία με την ίδια x -συντεταγμένη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5(α). Παρατηρήστε ότι το διάνυσμα $\langle 1, a \rangle$ έχει κλίση a και μέτρο $\sqrt{1 + a^2}$. Μπορούμε επομένως να περιγράψουμε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G}$ ως εκείνο το πεδίο που αντιστοιχίζει ένα διάνυσμα με κλίση a και μέτρο $\langle 1, a \rangle$ σε όλα τα σημεία με $x = a$.

(β) Προκειμένου να αποκτήσουμε μια εικόνα για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\mathbf{F}(a, b) = \langle -b, a \rangle$ έχει μέτρο $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Είναι κάθετο στο ακτινικό διάνυσμα $\langle a, b \rangle$, ενώ κατευθύνεται αντι-ωρολογιακά. Επομένως, μπορούμε να περιγράψουμε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ ως εξής: Τα διανύσματα του πεδίου αυτού κατά μήκος ενός κύκλου ακτίνας r έχουν όλα μήκος r , εφάπτονται στον κύκλο και έχουν κατεύθυνση αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5(β).



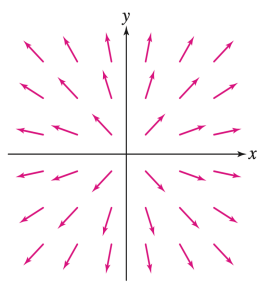
Σχήμα 2.5

Ένα μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο είναι ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{F}(P)\| = 1$ για όλα τα σημεία P . Ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ αποκαλείται ακτινικό διανυσματικό πεδίο αν το διάνυσμα $\mathbf{F}(P)$ είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ και το μέτρο του διανύσματος $\|\mathbf{F}(P)\|$ εξαρτάται μόνο από την απόσταση r του σημείου P από την αρχή των αξόνων (όπου $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ για τον χώρο $\mathbb{R}^2$ και $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ για τον χώρο $\mathbb{R}^3$).

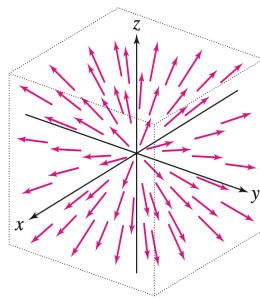
Δύο σημαντικά διανυσματικά πεδία είναι τα μοναδιαία ακτινικά διανυσματικά πεδία στις δύο και τρεις διαστάσεις, τα οποία απεικονίζονται στα Σχήματα 2.6(α) και 2.6(β), αντίστοιχα, και τα οποία έχουν τη μορφή:

$$\mathbf{e}_r = \left\langle \frac{x}{r}, \frac{y}{r} \right\rangle = \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\rangle$$

$$\mathbf{e}_r = \left\langle \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\rangle = \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\rangle$$



(α) Το μοναδιαίο ακτινικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{e}_r = \langle x/r, y/r \rangle$ στο επίπεδο



(β) Το μοναδιαίο ακτινικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{e}_r = \langle x/r, y/r, z/r \rangle$ στον τρισδιάστατο χώρο

Σχήμα 2.6

Υπενθύμιση 2.1.6

Ξεκινάμε με δύο μη μηδενικά διανύσματα u και v στον χώρο. Αν τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα, τότε το ένα είναι μη μηδενικό πολλαπλάσιο του άλλου. Αν δεν είναι παράλληλα, τότε καθορίζουν ένα επίπεδο - κάθε διάνυσμα του οποίου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των u και v , δηλαδή στη μορφή $au + bv$.

Ορισμός 2.1.7 Ονομάζουμε *εσωτερικό (ή βαθμωτό) γινόμενο* $u \cdot v$ των διανυσμάτων $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ και $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ το βαθμωτό μέγεθος:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Παράδειγμα 2.1.8

Εφαρμόζουμε τον ορισμό.

$$(α) \langle 1, -2, -1 \rangle \cdot \langle -6, 2, -3 \rangle = (1)(-6) + (-2)(2) + (-1)(-3) = -6 - 4 + 3 = -7.$$

$$(β) \left(\frac{1}{2} \mathbf{i} + 3 \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) \cdot (4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2} \right) (4) + (3)(-1) + (1)(2) = 1.$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διδιάστατων διανυσμάτων ορίζεται με όμοιο τρόπο:

$$\langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Θεωρούμε τώρα ένα μοναδιαίο διάνυσμα n κάθετο σε αυτό το επίπεδο, του οποίου η φορά καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού: ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του n όταν τα υπόλοιπα δάχτυλα κάμπτονται από τη u προς τη v .

Ορισμός 2.1.9 Το *εξωτερικό γινόμενο* δύο διανυσμάτων u και v ορίζεται ως το διάνυσμα

$$u \times v = |u||v| \sin \theta n,$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των u και v και n το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο και στα δύο.

Αντίθετα με το εσωτερικό γινόμενο, το εξωτερικό γινόμενο είναι *διάνυσμα*. Για τον λόγο αυτό ονομάζεται και *διανυσματικό γινόμενο*. Το μήκος του $u \times v$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα u και v , ενώ η κατεύθυνσή του είναι κάθετη και στα δύο. Αν ένα από τα δύο διανύσματα είναι μηδενικό ή αν τα u και v είναι παράλληλα, τότε το εξωτερικό τους γινόμενο είναι το μηδενικό διάνυσμα:

$$u \times v = 0.$$

Υπολογισμός εξωτερικού γινομένου ως ορίζουσα Αν

$$u = u_1i + u_2j + u_3k \text{ και } v = v_1i + v_2j + v_3k,$$

τότε

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Παράδειγμα 2.1.10

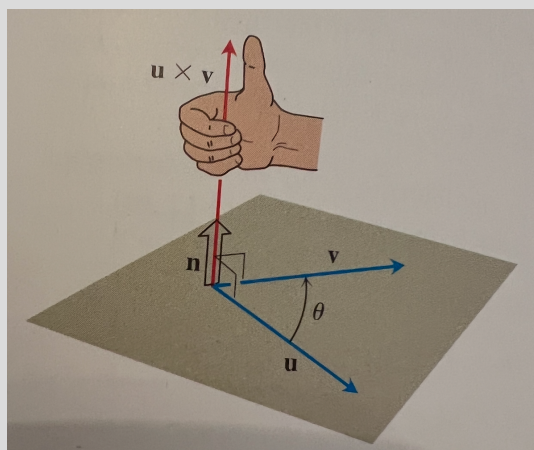
Βρείτε τα $u \times v$ και $v \times u$ αν $u = 2i + j + k$ και $v = -4i + 3j + k$.

Λύση. Αναπτύσσουμε την ορίζουσα:

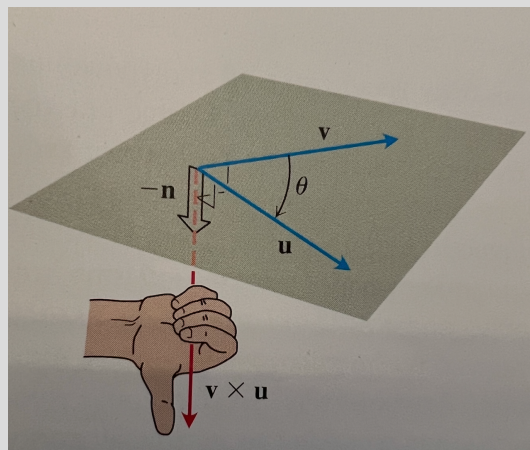
$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Υπολογίζουμε:

$$u \times v = (-2)i - 6j + 10k, \quad v \times u = -(u \times v) = 2i + 6j - 10k.$$



(a)



(b)

Σχήμα 2.7

Τελεστές

Τελεστής ονομάζεται κάθε κανόνας ή πράξη που εφαρμόζεται σε μια συνάρτηση (ή σε ένα σύνολο συναρτήσεων) και παράγει ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο - το οποίο μπορεί να είναι αριθμός, συνάρτηση ή διάνυσμα. Για παράδειγμα, ο τελεστής της παραγώγισης $\frac{d}{dx}$ εφαρμόζεται σε μια συνάρτηση $f(x)$ και δίνει τη νέα συνάρτηση $f'(x)$.

2.2 Τελεστές που δρουν σε διανυσματικά πεδία

Στον Λογισμό πολλών μεταβλητών ορίζονται τρεις εξαιρετικά σημαντικές πράξεις παραγωγίσης: η κλίση, η απόκλιση και ο στροβιλισμός. Στην παρούσα ενότητα, θα εισαγάγουμε τις πράξεις της κλίσης της απόκλισης και του στροβιλισμού. Καθεμία από αυτές τις τρεις πράξεις παραγωγίσης ορίζεται με τη χρήση του *τελεστή ανάδελτα* ∇ , που είναι ένα διάνυσμα αποτελούμενο από τελεστές παραγωγίσης, ως εξής:

$$\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

Όταν ο τελεστής ∇ δρα σε μια βαθμωτή συνάρτηση f , τότε προκύπτει η κλίση της f . Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι μπορούμε να χειριζόμαστε την προηγούμενη πράξη ως έναν «πολλαπλασιασμό» ενός διανύσματος με ένα βαθμωτό, με τις συνιστώσες του διανύσματος που προκύπτει να είναι πράξεις παραγωγίσης πάνω σε συναρτήσεις αντί για γινόμενα. Δηλαδή:

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$

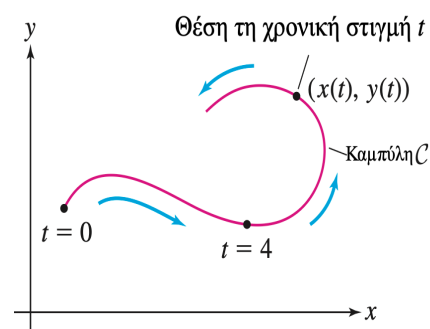
Οι δράσεις του τελεστή ∇ πάνω σε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ εκφράζονται είτε μέσω του εσωτερικού γινομένου (οδηγώντας στον ορισμό της *απόκλισης*) είτε μέσω του εξωτερικού γινομένου (οδηγώντας στον ορισμό του *στροβιλισμού*).

2.2.1 Διανυσματικές συναρτήσεις

Είναι γνωστό ότι για να εκφράσουμε την κίνηση με μαθηματικούς όρους ενός σωματιδίου το οποίο κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης C που βρίσκεται στο επίπεδο, μελετούμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται με τον χρόνο οι συντεταγμένες x και y της θέσης του σωματιδίου, πώς εξαρτώνται δηλαδή από τη μεταβλητή του χρόνου t (βλ. Σχήμα 2.8). Καθώς και οι δύο συντεταγμένες x και y είναι συναρτήσεις του χρόνου t , η θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από την

$$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$$

Αυτή η αναπαράσταση της καμπύλης αποκαλείται *παραμέτρηση* με παράμετρο t και η καμπύλη αποκαλείται *παραμετρική καμπύλη*.



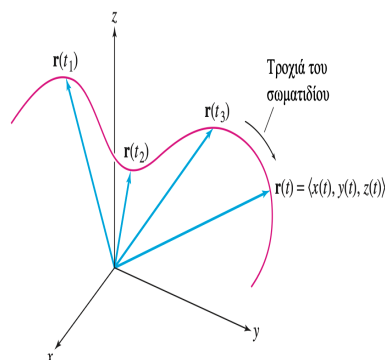
Σχήμα 2.8

Σε μια παραμέτρηση χρησιμοποιούμε συχνά το σύμβολο t για να δηλώσουμε την παράμετρο, θεωρώντας ότι οι εξαρτημένες μεταβλητές μεταβάλλονται με τον χρόνο. Ωστόσο, είμαστε ελεύθεροι να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή (όπως, για παράδειγμα, την s ή τη θ). Στις αναπαραστάσεις των παραμετρικών καμπυλών, με τη βοήθεια των γραφικών τους παραστάσεων, η κατεύθυνση της κίνησης συχνά υποδηλώνεται από ένα βέλος, όπως στο Σχήμα 2.8.

Φανταστείτε τώρα ένα σωματίδιο το οποίο κινείται στον χώρο $\mathbb{R}^3$, με τις συντεταγμένες του τη χρονική στιγμή t να είναι οι $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$. Είναι βολικό να αναπαραστήσουμε την τροχιά του σωματιδίου με τη βοήθεια της διανυσματικής συνάρτησης:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \langle x(t), y(t), z(t) \rangle \\ &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Μπορείτε να σκεφτείτε την $\mathbf{r}(t)$ ως ένα κινούμενο διάνυσμα που έχει κατεύθυνση από την αρχή των αξόνων προς το σημείο όπου βρίσκεται το σωματίδιο τη χρονική στιγμή t (βλ. Σχήμα 2.9).



Σχήμα 2.9

Γενικά, μια διανυσματική συνάρτηση είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ με την παραπάνω μορφή, το πεδίο ορισμού D της οποίας είναι ένα σύνολο από πραγματικούς αριθμούς, ενώ οι τιμές της είναι ένα σύνολο από διανύσματα θέσης. Η μεταβλητή t αποκαλείται παράμετρος, ενώ οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ είναι γνωστές ως **συνιστώσες** ή **συντεταγμένες συναρτήσεις**. Συνήθως θεωρούμε ως πεδίο ορισμού μιας διανυσματικής συνάρτησης το σύνολο όλων των τιμών της παραμέτρου t για τις οποίες ορίζεται η $\mathbf{r}(t)$, δηλαδή το σύνολο των τιμών της t που ανήκουν στα πεδία ορισμών και των τριών συντεταγμένων συναρτήσεων $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

2.2.2 Σύγκριση και γεωμετρική ερμηνεία Διανυσματικού πεδίου και Διανυσματικής συνάρτησης

Η βασική διαφορά ανάμεσα στις δύο έννοιες έγκειται στο εξής:

- Μια διανυσματική συνάρτηση εξαρτάται από μία μεταβλητή (π.χ. τον χρόνο t) και παράγει μια καμπύλη ή τροχιά στο χώρο.
- Ένα διανυσματικό πεδίο εξαρτάται από δύο ή τρεις μεταβλητές (π.χ. x, y, z) και παράγει ένα διάνυσμα σε κάθε σημείο του επιπέδου ή του χώρου.

Συνοπτικά, μπορούμε να διακρίνουμε τις δύο έννοιες ως εξής:

Χαρακτηριστικό	Διανυσματικό πεδίο	Διανυσματική συνάρτηση
Μεταβλητές	Δύο ή τρεις (x, y, z)	Μία (π.χ. t)
Απεικόνιση	$(x, y, z) \mapsto \mathbf{F}(x, y, z)$	$t \mapsto \mathbf{r}(t)$
Αντιπροσωπεύει	Πεδίο δυνάμεων ή ροής	Καμπύλη ή τροχιά
Γεωμετρική έννοια	Διάνυσμα σε κάθε σημείο του χώρου	Θέση στο χρόνο
Παράδειγμα	$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y + z, x, z - \sqrt{y} \rangle$	$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$

Επομένως, μπορούμε να πούμε πως οι διανυσματικές συναρτήσεις περιγράφουν μονοδιάστατες κινήσεις μέσα στον χώρο, ενώ τα διανυσματικά πεδία αποδίδουν την κατανομή μιας διανυσματικής ποσότητας σε όλο τον χώρο. Και οι δύο έννοιες αποτελούν το θεμέλιο για τη μελέτη πιο σύνθετων εννοιών όπως η κλίση, η απόκλιση και ο στροβιλισμός.

2.2.3 Η κλίση και οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση

Για μια συνάρτηση $f(x, y)$, ο ρυθμός μεταβολής στην κατεύθυνση x δίνεται από τη μερική παράγωγο f_x , ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός στην κατεύθυνση y υπολογίζεται με τη βοήθεια της f_y . Αυτές οι μερικές παράγωγοι μας δίνουν τους ρυθμούς μεταβολής στις κατευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων i και j , αντίστοιχα. Τι θα κάνουμε όμως αν θελήσουμε να προσδιορίσουμε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η f σε κάποια άλλη κατεύθυνση, για παράδειγμα στην κατεύθυνση του διανύσματος $\langle 2, -1 \rangle$; Προκειμένου να εκφράσουμε τυπικά έναν ρυθμό μεταβολής σε οποιαδήποτε κατεύθυνση, θα ορίσουμε την *παράγωγο κατά κατεύθυνση*. Πριν προχωρήσουμε όμως στον ορισμό αυτό, θα εισαγάγουμε το *διάνυσμα της κλίσης* (ή *διάνυσμα βαθμίδας*), που είναι ένα σημαντικό διάνυσμα το οποίο χρησιμοποιείται σε πολλές περιπτώσεις, συμπεριλαμβανομένης και της περίπτωσης του υπολογισμού των παραγώγων κατά κατεύθυνση. Οι συνιστώσες του διανύσματος της κλίσης μιας συνάρτησης f είναι οι μερικές παράγωγοι της f .

Ορισμός 2.2.1 Η κλίση (βαθμίδα) Η κλίση μιας συνάρτησης $f(x, y)$ σε ένα σημείο $P = (a, b)$ είναι το διάνυσμα

$$\nabla f_P = \langle f_x(a, b), f_y(a, b) \rangle$$

Στην περίπτωση των συναρτήσεων με τρεις μεταβλητές, για την $f(x, y, z)$ σε ένα σημείο $P = (a, b, c)$, ισχύει:

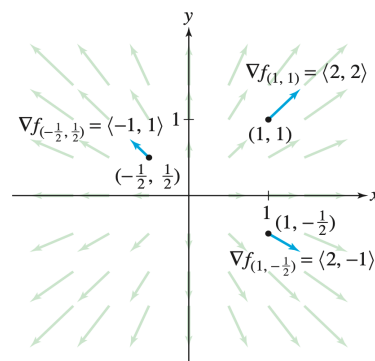
$$\nabla f_P = \langle f_x(a, b, c), f_y(a, b, c), f_z(a, b, c) \rangle$$

Συμβολίζουμε, επίσης, την κλίση της συνάρτησης f στο σημείο $P = (a, b)$ ως $\nabla f_{(a,b)}$ ή $\nabla f(a, b)$. Ορισμένες φορές θα παραλείπουμε την αναφορά στο σημείο P , γράφοντας απλώς

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \quad \text{ή}$$

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$

Η κλίση ∇f αντιστοιχεί ένα διάνυσμα ∇f_P σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10.



Σχήμα 2.10 Τα διανύσματα της κλίσης για τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ σε διάφορα σημεία (τα διανύσματα δεν είναι σχεδιασμένα έτσι ώστε να διατηρούν την κλίμακα).

Σχόλιο 2.2.2 Το σύμβολο ∇ , που είναι το κεφαλαίο δέλτα του αλφαβήτου γυρισμένο ανάποδα, αποκαλείται «ανάδελτα». Ξεκίνησε να χρησιμοποιείται ευρέως χάρη στον Σκωτσέζο φυσικό P. G. Tait (1831–1901), ο οποίος αποκαλούσε το συγκεκριμένο σύμβολο με την ονομασία «νάμπλα» εξαιτίας της ομοιότητάς του με την αρχαία άρπα των Ασσυρίων. Ο μεγάλος φυσικός James Clerk Maxwell ήταν απρόθυμος να υιοθετήσει αυτόν τον όρο και προτιμούσε για τη βαθμίδα τον όρο «κλίση». Αστεειευόμενος, έγραψε το 1871 στον φίλο του Tait: «*Still harping on that nabra?*» (λογοπαιγνίο που σημαίνει «Ακόμα ασχολείσαι με αυτό το νάμπλα;»).

Παράδειγμα 2.2.3

Κλίση στις τρεις διαστάσεις Υπολογίστε το διάνυσμα $\nabla f(3, -2, 4)$ για την

$$f(x, y, z) = ze^{2x+3y}.$$

Λύση. Οι μερικές παράγωγοι και η κλίση θα είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ze^{2x+3y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3ze^{2x+3y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{2x+3y}.$$

Άρα,

$$\nabla f = \langle 2ze^{2x+3y}, 3ze^{2x+3y}, e^{2x+3y} \rangle.$$

Επομένως, τελικά θα προκύψει:

$$\nabla f(3, -2, 4) = \langle 2 \cdot 4e^0, 3 \cdot 4e^0, e^0 \rangle = \langle 8, 12, 1 \rangle.$$

Θεώρημα 2.2.4 Ιδιότητες της κλίσης Αν οι συναρτήσεις $f(x, y, z)$ και $g(x, y, z)$ είναι διαφορίσιμες και c είναι μια σταθερά, τότε:

1. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$
3. *Κανόνας γινομένου για τις κλίσεις:* $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
4. *Κανόνας της αλυσίδας για τις κλίσεις:* Αν η $F(t)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση μιας μεταβλητής, τότε

$$\nabla(F(f(x, y, z))) = F'(f(x, y, z))\nabla f$$

Παράδειγμα 2.2.5

Χρήση του κανόνα της αλυσίδας για τις κλίσεις Υπολογίστε την κλίση της συνάρτησης

$$g(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^8.$$

Λύση. Η συνάρτηση g αποτελεί σύνθεση συναρτήσεων αφού

$$g(x, y, z) = F(f(x, y, z)) \quad \text{με} \quad F(t) = t^8 \quad \text{και} \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν τον κανόνα αλυσίδας, έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla g &= \nabla((x^2 + y^2 + z^2)^8) = 8(x^2 + y^2 + z^2)^7 \nabla(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= 8(x^2 + y^2 + z^2)^7 \langle 2x, 2y, 2z \rangle = 16(x^2 + y^2 + z^2)^7 \langle x, y, z \rangle. \end{aligned}$$

2.3 Εισαγωγή στον κανόνα της αλυσίδας για τροχιές

Υπάρχει ένας αριθμός από διαφορετικούς κανόνες αλυσίδας, καθώς υπάρχει ένα διαφορετικό πλήθος τρόπων με τους οποίους μπορούμε να συνθέσουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Θα μελετήσουμε στο σημείο αυτό έναν συγκεκριμένο τρόπο σύνθεσης, καθώς με αφορμή αυτόν θα εισαγάγουμε μια σημαντική εφαρμογή του διανύσματος της κλίσης, την οποία θα χρειαστούμε αργότερα στην παρούσα ενότητα όταν θα εργαζόμαστε με τις παραγώγους κατά κατεύθυνση.

Θα χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας για τροχιές όταν μας δίνεται μια συνάρτηση f κατά μήκος μιας παραμετρικής τροχιάς που ορίζεται από τις $x(t)$ και $y(t)$ στο επίπεδο ή από τις $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ στον τρισδιάστατο χώρο. Για λόγους απλότητας του συμβολισμού, θα υποθέσουμε ότι η $\mathbf{r}(t)$ παριστάνει τόσο το διάνυσμα $\langle x(t), y(t) \rangle$ όσο και το σημείο $(x(t), y(t))$, οπότε στην πρώτη από τις περιπτώσεις θεωρούμε ότι η τροχιά διαγράφεται από τα άκρα των διανυσμάτων ενώ στη δεύτερη από τα σημεία. Ακολουθούμε παρόμοια σύμβαση στον συμβολισμό με τις συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$ στον τρισδιάστατο χώρο. Μια συνάρτηση f η οποία ορίζεται κατά μήκος μιας τροχιάς $\mathbf{r}(t)$ είναι το αποτέλεσμα της σύνθεσης $f(\mathbf{r}(t))$. Ο κανόνας της αλυσίδας για τις τροχιές χρησιμοποιείται για να προσδιορίσουμε την παράγωγο αυτών των σύνθετων συναρτήσεων.

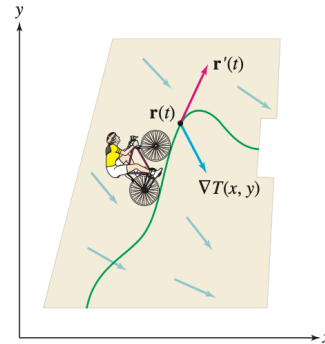
Ως παράδειγμα, υποθέστε ότι η $T(x, y)$ είναι η θερμοκρασία στη θέση (x, y) . Φανταστείτε τώρα ότι η Αλεξία κινείται με ένα ποδήλατο κατά μήκος της τροχιάς $\mathbf{r}(t)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.11. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η Αλεξία μεταφέρει μαζί της ένα θερμόμετρο, το οποίο ελέγχει καθώς ποδηλατεί. Η θέση της τη χρονική στιγμή t είναι η $\mathbf{r}(t)$, επομένως η θερμοκρασία που θα καταγράψει το θερμόμετρο τη χρονική στιγμή t θα είναι η σύνθετη συνάρτηση

$T(\mathbf{r}(t)) =$ Θερμοκρασία που καταγράφει
το θερμόμετρο
της Αλεξίας τη χρονική στιγμή t .

Οι ενδείξεις του θερμομέτρου μεταβάλλονται καθώς η θέση της Αλεξίας αλλάζει και ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλονται είναι η παράγωγος

$$\frac{d}{dt}T(\mathbf{r}(t))$$

Ο κανόνας της αλυσίδας για τις τροχιές αναφέρει ότι η παράγωγος αυτή είναι το εσωτερικό γινόμενο της κλίσης της θερμοκρασίας ∇T , υπολογισμένης στη θέση $\mathbf{r}(t)$ και του διανύσματος της ταχύτητας $\mathbf{r}'(t)$ της Αλεξίας.



Σχήμα 2.11 Το διάνυσμα $\text{curl } \mathbf{F}(P)$ σχετίζεται με την περιστροφή ενός ρευστού.

Θεώρημα 2.3.1 Κανόνας της αλυσίδας για τις τροχιές

Αν οι συναρτήσεις f και $\mathbf{r}(t)$ είναι διαφορίσιμες, τότε

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f_{\mathbf{r}(t)} \cdot \mathbf{r}'(t)$$

Στις περιπτώσεις των συναρτήσεων με δύο και τρεις μεταβλητές, με τις οποίες θα ασχοληθούμε, αυτή η μορφή του κανόνα της αλυσίδας «υλοποιείται» ως εξής:

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle \cdot \langle x'(t), y'(t) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Παράδειγμα 2.3.2

Υπολογίστε την

$$\left. \frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) \right|_{t=\pi/2}$$

όπου

$$f(x, y, z) = xy + z^2 \quad \text{και} \quad \mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t \rangle$$

Λύση. Έχουμε

$$\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle = \left\langle 0, 1, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Η κλίση της συνάρτησης υπολογίζεται ως εξής:

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle = \langle y, x, 2z \rangle, \quad \nabla f_{\mathbf{r}(\pi/2)} = \nabla f\left(0, 1, \frac{\pi}{2}\right) = \langle 1, 0, \pi \rangle.$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το εφαπτόμενο διάνυσμα:

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin t, \cos t, 1 \rangle, \quad \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle -\sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}, 1 \right\rangle = \langle -1, 0, 1 \rangle.$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει:

$$\left. \frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) \right|_{t=\pi/2} = \nabla f_{\mathbf{r}(\pi/2)} \cdot \mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle 1, 0, \pi \rangle \cdot \langle -1, 0, 1 \rangle = \pi - 1.$$

Σημείωση 2.3.3 Δεν θα πρέπει να συγχέετε τον κανόνα της αλυσίδας για τις τροχιές με τον κανόνα της αλυσίδας για τις κλίσεις, όπως διατυπώθηκε στο Θεώρημα 2.2.4 που προηγήθηκε. Πρόκειται για διαφορετικούς κανόνες που αναφέρονται σε διαφορετικά είδη συνθέσεων.

Παράδειγμα 2.3.4

Η θερμοκρασία στη θέση (x, y) δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x, y) = 20 + 10e^{-0.3(x^2+y^2)}$$

σε $\mathbb{C}^\circ$. Ένα έντομο ακολουθεί τη διαδρομή

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos(t-2), \sin(2t) \rangle$$

(το t σε s), η οποία απεικονίζεται στο Σχήμα 2.12. Ποιος είναι ο ρυθμός με τον οποίο μεταβάλλεται η θερμοκρασία, ως προς τον χρόνο, την οποία βιώνει το έντομο τη χρονική στιγμή $t = 0.6$ s;

Λύση. Τη χρονική στιγμή $t = 0.6$ s το έντομο βρίσκεται στη θέση

$$\mathbf{r}(0.6) = \langle \cos(-1.4), \sin(1.2) \rangle \approx \langle 0.170, 0.932 \rangle$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας για τις τροχιές, ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας είναι το εσωτερικό γινόμενο

$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=0.6} = \nabla T_{\mathbf{r}(0.6)} \cdot \mathbf{r}'(0.6)$$

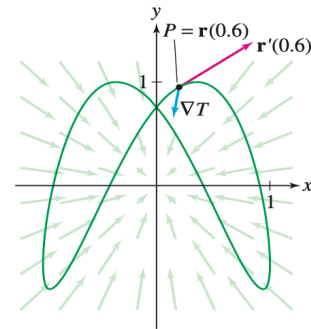
$$\nabla T = \langle -6xe^{-0.3(x^2+y^2)}, -6ye^{-0.3(x^2+y^2)} \rangle$$

$$\mathbf{r}'(t) = \langle -\sin(t-2), 2\cos(2t) \rangle$$

και να τα εκτιμήσουμε στη θέση $\mathbf{r}(0.6) = \langle 0.170, 0.932 \rangle$:

$$\nabla T_{\mathbf{r}(0.6)} \approx \langle -0.779, -4.272 \rangle$$

$$\mathbf{r}'(0.6) \approx \langle 0.985, 0.725 \rangle$$



Σχήμα 2.12 Το διάνυσμα $\text{curl } \mathbf{F}(P)$ σχετίζεται με την περιστροφή ενός ρευστού.

Έτσι, τελικά, ο ζητούμενος ρυθμός μεταβολής προκύπτει να είναι:

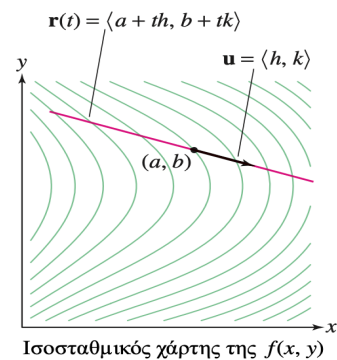
$$\left. \frac{dT}{dt} \right|_{t=0.6} = \nabla T_{\mathbf{r}(0.6)} \cdot \mathbf{r}'(t) \approx \langle -0.779, -4.272 \rangle \cdot \langle 0.985, 0.725 \rangle \approx -3.87^\circ \text{C/s}$$

2.4 Παράγωγοι κατά κατεύθυνση

Είμαστε τώρα σε θέση να παρουσιάσουμε τις μεθόδους που θα μας βοηθήσουν να υπολογίσουμε τους ρυθμούς μεταβολής μιας συνάρτησης $f(x, y)$ σε κατευθύνσεις διαφορετικές από τις θετικές κατευθύνσεις των αξόνων x και y .

Θεωρήστε, για παράδειγμα, την ευθεία γραμμή που διέρχεται από το σημείο $P = (a, b)$ στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$ (βλ. Σχήμα 2.13), η οποία περιγράφεται από την:

$$\mathbf{r}(t) = \langle a + th, b + tk \rangle$$



Σχήμα 2.13 Η παράγωγος κατά κατεύθυνση $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ δείχνει τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f κατά μήκος της ευθείας που διέρχεται από το σημείο P έχοντας διάνυσμα κατεύθυνσης $\mathbf{u}$.

Η παράγωγος ως προς t της $f(\mathbf{r}(t))$, για $t = 0$, είναι γνωστή με την ονομασία *παράγωγος κατά κατεύθυνση* της f ως προς την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο P και συμβολίζεται ως $D_{\mathbf{u}}f(P)$ ή $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$:

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th, b + tk) - f(a, b)}{t}$$

Οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση των συναρτήσεων με τρεις ή περισσότερες μεταβλητές ορίζονται με παρόμοιο τρόπο.

Θεώρημα 2.4.1 παράγωγος κατά κατεύθυνση Η παράγωγος κατά κατεύθυνση της συνάρτησης f στο σημείο $P = (a, b)$ και στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$ είναι το όριο (υποθέτοντας ότι υπάρχει):

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + th, b + tk) - f(a, b)}{t}$$

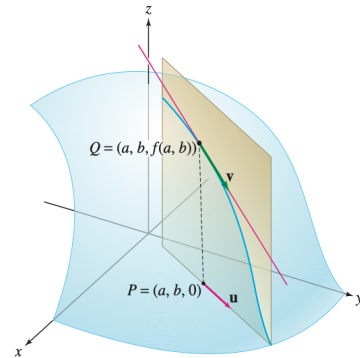
Σχόλιο 2.4.2 Παρατηρούμε ότι οι μερικές παράγωγοι είναι οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση ως προς τα θεμελιώδη μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ και $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$. Για παράδειγμα,

$$D_{\mathbf{i}}f(a, b) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t \cdot 1, b + t \cdot 0) - f(a, b)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t, b) - f(a, b)}{t} = f_x(a, b)$$

Επομένως, θα ισχύει:

$$f_x(a, b) = D_{\mathbf{i}}f(a, b), \quad f_y(a, b) = D_{\mathbf{j}}f(a, b)$$

Σημείωση 2.4.3 Εναλλακτική Η παράγωγος κατά κατεύθυνση $D_{\mathbf{u}}f(P)$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f ανά μονάδα μεταβολής που συντελείται στην οριζόντια κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $P = (a, b)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.14. Πρόκειται για την κλίση της εφαπτόμενης ευθείας γραμμής στο σημείο $Q = (a, b, f(a, b))$ και στην καμπύλη-ίχνος που προκύπτει όταν τμήσουμε το γράφημα με το κατακόρυφο επίπεδο που διέρχεται από το P στην κατεύθυνση $\mathbf{u}$. Αν $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$, το διάνυσμα $\mathbf{v} = \langle h, k, D_{\mathbf{u}}f(P) \rangle$ κατευθύνεται κατά μήκος αυτής της ευθείας έχοντας ως αφετηρία το σημείο Q .



Σχήμα 2.14 Η παράγωγος κατά κατεύθυνση $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ είναι η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη-ίχνος στο σημείο Q στο κατακόρυφο επίπεδο που διέρχεται από το σημείο P στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u}$. Το διάνυσμα $\mathbf{v} = \langle h, k, D_{\mathbf{u}}f(P) \rangle$ είναι παράλληλο σε αυτή την εφαπτόμενη ευθεία.

Σχόλιο 2.4.4 Γιατί το διάνυσμα $\mathbf{v} = \langle h, k, D_{\mathbf{u}}f(P) \rangle$ έχει τρίτη συντεταγμένη $D_{\mathbf{u}}f(P)$

Έστω ότι δίνεται μια επιφάνεια

$$z = f(x, y),$$

και ένα σημείο

$$P = (a, b, f(a, b)).$$

Θεωρούμε μια οριζόντια διεύθυνση

$$\mathbf{u} = \langle h, k \rangle.$$

Παραμετροποίηση της καμπύλης τομής.

Παίρνουμε το κατακόρυφο επίπεδο που περνά από το σημείο P και είναι παράλληλο προς τη διεύθυνση $\mathbf{u}$. Το ίχνος της επιφάνειας στο επίπεδο αυτό είναι μια χωρική καμπύλη, την οποία μπορούμε να παραμετροποιήσουμε ως εξής:

$$\mathbf{r}(t) = (a + ht, b + kt, f(a + ht, b + kt)).$$

Το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης.

Το εφαπτόμενο διάνυσμα δίνεται από την παράγωγο:

$$\mathbf{r}'(t) = \left\langle h, k, \frac{d}{dt}f(a + ht, b + kt) \right\rangle.$$

Με τον κανόνα αλυσίδας:

$$\frac{d}{dt}f(a + ht, b + kt) = f_x(a + ht, b + kt)h + f_y(a + ht, b + kt)k.$$

Στο σημείο $t = 0$ (δηλαδή στο σημείο P) έχουμε:

$$\mathbf{r}'(0) = \langle h, k, f_x(a, b)h + f_y(a, b)k \rangle.$$

Ορισμός της παραγώγου κατά διεύθυνση

Η παράγωγος κατά διεύθυνση της f στο σημείο P προς τη διεύθυνση $\mathbf{u}$ είναι:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k = D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f_P \cdot \mathbf{u}.$$

Άρα η τρίτη συνιστώσα του εφαπτόμενου διανύσματος είναι

$$\left. \frac{d}{dt}f(a + ht, b + kt) \right|_{t=0} = D_{\mathbf{u}}f(P).$$

Συνεπώς, το εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο P της καμπύλης τομής είναι

$$\mathbf{v} = \mathbf{r}'(0) = \langle h, k, D_{\mathbf{u}}f(P) \rangle.$$

Η τρίτη συντεταγμένη είναι το $D_{\mathbf{u}}f(P)$ επειδή εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του ύψους z της επιφάνειας όταν το σημείο κινείται, πάνω στο επίπεδο $z = f(x, y)$, προς τη διεύθυνση $\mathbf{u}$.

Ο τυπικός τρόπος υπολογισμού των παραγώγων κατά κατεύθυνση δεν είναι βέβαια ο ορισμός. Για διαφορίσιμες συναρτήσεις, το ακόλουθο θεώρημα παρέχει μια πολύ πιο βολική προσέγγιση με τη χρήση του διανύσματος της κλίσης. Το θεώρημα αποδεικνύεται με τη βοήθεια του κανόνα της αλυσίδας για τις τροχιές.

Θεώρημα 2.4.5 Αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο P και το $\mathbf{u}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, τότε η παράγωγος κατά κατεύθυνση στην κατεύθυνση του $\mathbf{u}$ υπολογίζεται ως:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f_P \cdot \mathbf{u}$$

Για μια συνάρτηση $f(x, y)$ και για το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$, ο υπολογισμός του εσωτερικού γινομένου που σημειώνεται στην εξίσωση του θεωρήματος μπορεί να αναπτυχθεί, οπότε προκύπτει ότι:

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b) = \nabla f_{(a,b)} \cdot \mathbf{u} = f_x(a, b)h + f_y(a, b)k$$

Το Θεώρημα 2.4.5 ισχύει για συναρτήσεις με οποιοδήποτε πλήθος μεταβλητών. Πιο συγκεκριμένα, για τη συνάρτηση $f(x, y, z)$ και για το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = \langle h, k, m \rangle$ θα ισχύει:

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b, c) = \nabla f_{(a,b,c)} \cdot \mathbf{u} = f_x(a, b, c)h + f_y(a, b, c)k + f_z(a, b, c)m$$

$$D_{\mathbf{u}}f(a, b, c) = \nabla f_{(a,b,c)} \cdot \mathbf{u} = f_x(a, b, c)h + f_y(a, b, c)k + f_z(a, b, c)m$$

Παράδειγμα 2.4.6

Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = xe^y$, το σημείο $P = (2, -1)$ και το διάνυσμα $\mathbf{v} = \langle 2, 3 \rangle$. Υπολογίστε την παράγωγο κατά κατεύθυνση της συνάρτησης f στο σημείο P και στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}$.

Λύση. Αρχικά θα πρέπει να παρατηρήσετε ότι το διάνυσμα $\mathbf{v}$ δεν είναι μοναδιαίο. Έτσι, λοιπόν, θα το αντικαταστήσουμε με το διάνυσμα

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle 2, 3 \rangle}{\sqrt{13}} = \left\langle \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε την κλίση της συνάρτησης στο σημείο $P = (2, -1)$:

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle = \langle e^y, xe^y \rangle \Rightarrow \nabla f_P = \nabla f_{(2,-1)} = \langle e^{-1}, 2e^{-1} \rangle$$

Τέλος, από το Θεώρημα 2.4.5 προκύπτει:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f_P \cdot \mathbf{u} = \langle e^{-1}, 2e^{-1} \rangle \cdot \left\langle \frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right\rangle = \frac{8e^{-1}}{\sqrt{13}} \approx 0.82$$

Το αποτέλεσμα αυτό ερμηνεύεται ως εξής: Αν φανταστούμε ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση παριστάνει το περίγραμμα ενός βουνού, τότε στη θέση που ορίζεται από τις συντεταγμένες $(x, y) = (2, -1)$ περιμένουμε ότι για μετατόπιση μιας μονάδας στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}$, θα πρέπει να ανέβουμε στην κατακόρυφη κατεύθυνση περίπου κατά 0.82 μονάδες.

Παράδειγμα 2.4.7

Προσδιορίστε τον ρυθμό μεταβολής της πίεσης σε ένα σημείο $Q = (1, 2, 1)$ και στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v} = \langle 0, 1, 1 \rangle$, υποθέτοντας ότι η πίεση (σε millibars) δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(x, y, z) = 1000 + 0.01(yz^2 + x^2z - xy^2), \quad (x, y, z \text{ σε km}).$$

Λύση. Θα υπολογίσουμε αρχικά την κλίση στο σημείο $Q = (1, 2, 1)$:

$$\nabla f = 0.01 \langle 2xz - y^2, z^2 - 2xy, 2yz + x^2 \rangle \Rightarrow \nabla f_Q = \nabla f_{(1,2,1)} = \langle -0.02, -0.03, 0.05 \rangle$$

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ στην κατεύθυνση του $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle 0, 1, 1 \rangle}{\sqrt{2}} = \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

Τέλος, θα έχουμε:

$$D_{\mathbf{u}}f(Q) = \nabla f_Q \cdot \mathbf{u} = \langle -0.02, -0.03, 0.05 \rangle \cdot \left\langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle \approx 0.014 \text{ millibars/km}$$

Αυτό σημαίνει ότι καθώς θα κινούμαστε στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}$, ξεκινώντας από το σημείο Q , η πίεση θα αυξάνεται περίπου κατά 0.014 millibars/km.

Σημείωση 2.4.8 Εμβάθυνση στα σχήματα

Με δεδομένη μια συνάρτηση $f(x, y)$ που είναι διαφορίσιμη στο $P = (a, b)$, το Θεώρημα 2.4.5 μας εγγυάται ότι το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της f στο σημείο $Q = (a, b, f(a, b))$ θα είναι εφαπτόμενο στο γράφημα σε όλες τις κατευθύνσεις και όχι μόνο στις κατευθύνσεις εκείνες που ορίζονται από τις μερικές παραγώγους. Θυμηθείτε ότι το επίπεδο που προσδιορίζεται από τις f_x και f_y ορίζεται ως εκείνο το επίπεδο που διέρχεται από το σημείο Q και προσδιορίζεται από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle$ και $\mathbf{v}_2 = \langle 0, 1, f_y(a, b) \rangle$. Με δεδομένο ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u} = \langle h, k \rangle$, το διάνυσμα $\mathbf{v} = \langle h, k, D_{\mathbf{u}}f(P) \rangle$, με αρχή το σημείο Q , είναι εφαπτόμενο στο γράφημα όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.14 και εξηγήσαμε στο αντίστοιχο ένθετο της Εναλλακτικής. Γενικά, δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι το $\mathbf{v}$ βρίσκεται στο επίπεδο που προσδιορίζουν οι f_x και f_y . Αν όμως η f είναι διαφορίσιμη στο (a, b) , τότε μπορούμε να δείξουμε ότι αυτό πράγματι συμβαίνει. Αρχικά, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.4.5 και υποθέτοντας ότι η f είναι διαφορίσιμη στο (a, b) , μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\mathbf{v} = h\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2 : \quad \mathbf{v} = \langle h, k, D_{\mathbf{u}}f(a, b) \rangle = \langle h, k, hf_x(a, b) + kf_y(a, b) \rangle \quad (\text{από το Θεώρημα 3})$$

$$\mathbf{v} = h\langle 1, 0, f_x(a, b) \rangle + k\langle 0, 1, f_y(a, b) \rangle = h\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2$$

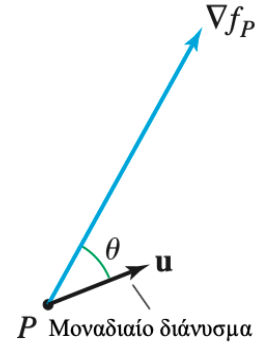
Αφού $\mathbf{v} = h\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2$, το $\mathbf{v}$ αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των $\mathbf{v}_1$ και $\mathbf{v}_2$, γεγονός που συνεπάγεται ότι όλα αυτά τα διανύσματα, με αρχή το σημείο Q , κείτονται στο ίδιο επίπεδο. Όταν λοιπόν η f είναι διαφορίσιμη στο (a, b) , το εφαπτόμενο επίπεδο εφάπτεται στο γράφημα της συνάρτησης σε όλες τις κατευθύνσεις, γεγονός που δικαιολογεί την ονομασία του.

2.5 Ιδιότητες της κλίσης

Στο σημείο αυτό θα μελετήσουμε ορισμένες από τις ιδιότητες του διανύσματος της κλίσης. Πιο συγκεκριμένα, θα δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο το συγκεκριμένο διάνυσμα μας παρέχει σημαντικές πληροφορίες σχετικά με τη συμπεριφορά των συναρτήσεων, αλλά και το πώς αναδύεται, με φυσιολογικό τρόπο, κατά τη μελέτη διαφορετικών μαθηματικών μοντέλων.

Θα υποθέσουμε αρχικά ότι $\nabla f_P \neq \mathbf{0}$ και ότι το $\mathbf{u}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα (βλ. Σχήμα 2.15). Σύμφωνα με τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, αλλά και με βάση το γεγονός ότι το $\mathbf{u}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, θα ισχύει:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f_P \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f_P\| \|\mathbf{u}\| \cos \theta = \|\nabla f_P\| \cos \theta$$



Σχήμα 2.15 $D_{\mathbf{u}}f(P) = \|\nabla f_P\| \cos \theta$

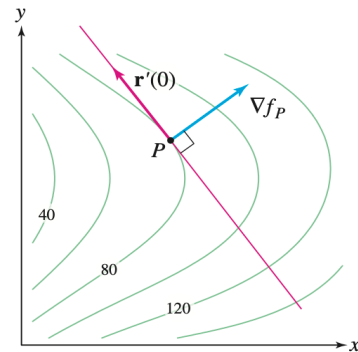
όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων ∇f_P και $\mathbf{u}$. Με άλλα λόγια, ο ρυθμός μεταβολής σε μια ορισμένη κατεύθυνση μεταβάλλεται με το συνημίτονο της γωνίας θ που σχηματίζεται μεταξύ των διανυσμάτων της κλίσης και της εν λόγω κατεύθυνσης.

$$-\|\nabla f_P\| \leq D_{\mathbf{u}}f(P) \leq \|\nabla f_P\|$$

Επειδή $\cos 0 = 1$, η μέγιστη τιμή του διανύσματος $D_{\mathbf{u}}f(P)$ παρατηρείται για $\theta = 0$ – όταν δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{u}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το ∇f_P . Με άλλα λόγια, το διάνυσμα της κλίσης έχει την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού αύξησης, το μέτρο του οποίου είναι ίσο με $\|\nabla f_P\|$. Παρομοίως, η συνάρτηση f μειώνεται ταχύτερα στην αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή στην κατεύθυνση $-\nabla f_P$, επειδή $\cos \theta = -1$ για $\theta = \pi$. Ο ρυθμός της ταχύτερης μείωσης, λοιπόν, είναι ίσος με $-\|\nabla f_P\|$. Η παράγωγος κατά κατεύθυνση είναι ίση με το μηδέν στις κατευθύνσεις που είναι ορθογώνιες στην κλίση, καθώς $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

Μια ακόμα βασική ιδιότητα είναι ότι τα διανύσματα της κλίσης είναι κάθετα στις ισοσταθμικές καμπύλες (βλ. Σχήμα 2.16). Για να αποδείξουμε την ιδιότητα αυτή, θα υποθέσουμε ότι ένα σημείο P βρίσκεται πάνω στην ισοσταθμική καμπύλη $f(x, y) = k$. Θα παραμετρήσουμε αυτή την ισοσταθμική καμπύλη με τη βοήθεια μιας τροχιάς $\mathbf{r}(t)$ τέτοιας ώστε $\mathbf{r}(0) = P$ και $\mathbf{r}'(0) \neq \mathbf{0}$ (παραμετρική αναπαράσταση που είναι εφικτή κάθε φορά που $\nabla f_P \neq \mathbf{0}$). Τότε θα ισχύει $f(\mathbf{r}(t)) = k$ για όλες τις τιμές της παραμέτρου t , οπότε από τον κανόνα της αλυσίδας θα έχουμε:

$$\nabla f_P \cdot \mathbf{r}'(0) = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{r}(t)) \right|_{t=0} = \frac{d}{dt} k = 0$$



Σχήμα 2.16 Ισοσταθμικός χάρτης μιας συνάρτησης $f(x, y)$. Η κλίση της συνάρτησης στο σημείο P είναι ορθογώνια στην ισοσταθμική καμπύλη που διέρχεται από το P και «δείχνει» προς την κατεύθυνση της μέγιστης αύξησης της $f(x, y)$.

Το αποτέλεσμα αυτό αποδεικνύει ότι το διάνυσμα ∇f_P είναι ορθογώνιο με το $\mathbf{r}'(0)$, και αφού το $\mathbf{r}'(0)$ είναι εφαπτόμενο στην ισοσταθμική καμπύλη, συμπεραίνουμε ότι το ∇f_P είναι κάθετο στην ισοσταθμική καμπύλη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.16. Όλες αυτές οι παρατηρήσεις συνοψίζονται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.5.1 Ερμηνεία της κλίσης Υποθέστε ότι $\nabla f_P \neq \mathbf{0}$, ενώ $\mathbf{u}$ είναι ένα μοναδιαίο

διάνυσμα που σχηματίζει γωνία θ με το ∇f_P . Τότε

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \|\nabla f_P\| \cos \theta$$

- Το διάνυσμα ∇f_P έχει την κατεύθυνση προς την οποία ο ρυθμός αύξησης της συνάρτησης f στο σημείο P είναι μέγιστος και ίσος με $\|\nabla f_P\|$.
- Το διάνυσμα $-\nabla f_P$ έχει την κατεύθυνση προς την οποία ο ρυθμός μείωσης της συνάρτησης f στο σημείο P

Παράδειγμα 2.5.2

Έστω η συνάρτηση $f(x, y) = x^4 y^{-2}$ και το σημείο $P = (2, 1)$. Προσδιορίστε το μοναδιαίο διάνυσμα που ορίζει την κατεύθυνση του μέγιστου ρυθμού αύξησης της συνάρτησης στο σημείο P και προσδιορίστε το μέτρο αυτού του μέγιστου ρυθμού.

Λύση. Η κλίση ορίζει την κατεύθυνση προς την οποία η συνάρτηση εμφανίζει τον μέγιστο ρυθμό αύξησης, επομένως θα υπολογίσουμε την κλίση στο σημείο P :

$$\nabla f = \langle 4x^3 y^{-2}, -2x^4 y^{-3} \rangle, \quad \nabla f_{(2,1)} = \langle 32, -32 \rangle$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα σε αυτή την κατεύθυνση είναι το:

$$\mathbf{u} = \frac{\langle 32, -32 \rangle}{\|\langle 32, -32 \rangle\|} = \frac{\langle 32, -32 \rangle}{32\sqrt{2}} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$$

Ο μέγιστος ρυθμός αύξησης, που είναι ο ρυθμός σε αυτή την κατεύθυνση, είναι ίσος με:

$$\|\nabla f_{(2,1)}\| = \sqrt{32^2 + (-32)^2} = 32\sqrt{2}$$

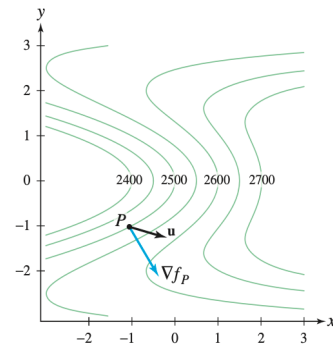
Παράδειγμα 2.5.3

Το ύψος ενός βουνού στο (x, y) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x, y) = 2500 + 100(x + y^2)e^{-0.3y^2}$$

όπου τα x και y εκφράζονται σε μονάδες των 100 m.

1. Υπολογίστε την παράγωγο κατά κατεύθυνση της f στο σημείο $P = (-1, -1)$ και στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος $\mathbf{u}$ που σχηματίζει γωνία $\theta = \frac{\pi}{4}$ με την κλίση (βλ. Σχήμα 2.17).
2. Πώς ερμηνεύεται η παράγωγος που υπολογίσατε στο προηγούμενο ερώτημα;



Σχήμα 2.17 Ισοσταθμικός χάρτης της συνάρτησης $f(x, y)$ του Παραδείγματος 2.5.3.

Λύση.

Θα υπολογίσουμε αρχικά το μέτρο $\|\nabla f_P\|$:

$$f_x(x, y) = 100e^{-0.3y^2}, \quad f_y(x, y) = 100y(2 - 0.6x - 0.6y^2)e^{-0.3y^2}$$

$$f_x(-1, -1) = 100e^{-0.3} \approx 74, \quad f_y(-1, -1) = -200e^{-0.3} \approx -148$$

Επομένως, $\nabla f_P \approx \langle 74, -148 \rangle$, οπότε

$$\|\nabla f_P\| \approx \sqrt{74^2 + (-148)^2} \approx 165.5$$

Επομένως για $\theta = \frac{\pi}{4}$ έχουμε:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \|\nabla f_P\| \cos \theta \approx 165.5 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 116.7$$

Θυμηθείτε ότι τα x και y εκφράζονται σε μονάδες των 100 m. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να ερμηνεύσουμε το αποτέλεσμα ως εξής: Αν είστε σε ένα βουνό, σε σημείο που βρίσκεται πάνω στο $(-1, -1)$ και ξεκινήσετε να σκαρφαλώνετε με τρόπο ώστε η οριζόντια μετατόπισή σας να είναι κατά μήκος του διανύσματος $\mathbf{u}$, τότε το ύψος σας πάνω στο βουνό θα αυξάνεται με ρυθμό 116.7 m ανά 100 m οριζόντιας απόστασης, ή διαφορετικά 1.167 m ανά 1 m οριζόντιας μετατόπισης.

2.5.1 Εξίσωση επιπέδου με γνωστή κάθετη διεύθυνση

Έστω ότι η επιφάνεια ορίζεται εμμέσως από την εξίσωση

$$F(x, y, z) = 0.$$

Τότε η κλίση της συνάρτησης F στο σημείο (a, b, c) είναι:

$$\nabla F(a, b, c) = \langle F_x(a, b, c), F_y(a, b, c), F_z(a, b, c) \rangle.$$

Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στην επιφάνεια $F(x, y, z) = 0$ στο σημείο (a, b, c) . Πράγματι, καθώς κινούμαστε πάνω στην επιφάνεια, η τιμή της F παραμένει σταθερή, δηλαδή

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Παραγωγίζουμε ως προς t χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} F(x(t), y(t), z(t)) \\ &= F_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + F_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + F_z(x(t), y(t), z(t))z'(t). \end{aligned}$$

Επειδή $F(x(t), y(t), z(t)) = 0$ για όλα τα t , το παραπάνω είναι ίσο με 0:

$$F_x x' + F_y y' + F_z z' = 0.$$

Αυτό γράφεται ως εσωτερικό γινόμενο:

$$\nabla F \cdot \langle x', y', z' \rangle = 0.$$

Το διάνυσμα $\langle x', y', z' \rangle$ είναι εφαπτόμενο διάνυσμα μιας καμπύλης που βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια.

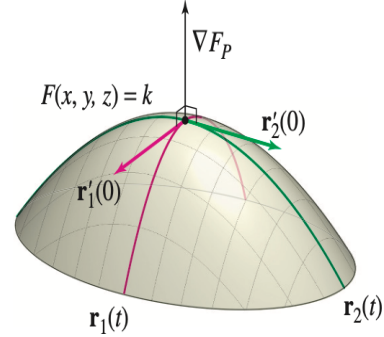
Αφού το εσωτερικό γινόμενο είναι μηδέν, τότε:

$$\nabla F(a, b, c) \perp \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle.$$

Επειδή κάθε τέτοιο εφαπτόμενο διάνυσμα ανήκει στο εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο (a, b, c) , συμπεραίνουμε ότι ο gradient είναι κάθετος σε όλο το εφαπτόμενο επίπεδο. Άρα το διάνυσμα $\nabla F(a, b, c)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $F(x, y, z) = 0$.

Θεώρημα 2.5.4 Η κλίση ως κάθετο διάνυσμα
Έστω ένα σημείο $P = (a, b, c)$ πάνω στην επιφάνεια που περιγράφεται από την $F(x, y, z) = k$. Υποθέτουμε ακόμη ότι $\nabla F_P \neq \mathbf{0}$. Τότε το ∇F_P είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που είναι εφαπτόμενο στην επιφάνεια στο σημείο P . Επιπλέον, το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια στο σημείο P έχει εξίσωση

$$F_x(a, b, c)(x - a) + F_y(a, b, c)(y - b) + F_z(a, b, c)(z - c) = 0.$$



Σχήμα 2.18 Το διάνυσμα ∇F_P είναι κάθετο στην επιφάνεια $F(x, y, z) = k$ στο σημείο P .