

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

“Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’αυτό μένειν”

Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Copyright © 2024 Αθανάσιος Ανδρικόπουλος

Το παρόν ηλεκτρονικό υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών, ως υποστηρικτικό εγχειρίδιο για τα φροντιστηριακά μαθήματα του προγράμματος τους. Το υλικό δεν προορίζεται για εμπορική χρήση ή διάθεση εκτός του επίσημου περιβάλλοντος διδασκαλίας του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Παρόλη την προσεκτική επιμέλεια και συνεχή προσπάθεια ενημέρωσης και βελτίωσης, ενδέχεται να περιέχει λάθη ή παραλείψεις, καθώς βρίσκεται σε αρχικό στάδιο ανάπτυξης. Η συνεργασία και τα σχόλια των φοιτητών στο πλαίσιο της κοινής μας προσπάθειας εκτιμώνται ιδιαίτερα και συμβάλλουν στην καλύτερη ποιότητα και πληρότητα του υλικού.

Δεκέμβρης 2025



Περιεχόμενα

I	Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά	7
1	Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά	9
1.1	Αρίθμηση και Αριθμοί	10
1.2	Η Λογική ως επιστήμη	13
1.2.1	Η Λογική ως σύστημα αξιωμάτων	15
1.2.2	Προτασιακή Λογική	18
1.2.3	Κατηγορηματική Λογική	21
1.3	Η Άλγεβρα ως επιστήμη	21
1.4	Απειροστικός λογισμός	25
1.5	Αλγόριθμοι – Κρυπτογραφία	28
1.5.1	Αλγόριθμοι	28
1.5.2	Κρυπτογραφία	31
II	Μαθηματικά Θεμέλια της Πληροφορικής	37
2	Γραμμική και Σύγχρονη Άλγεβρα	39
2.1	Εισαγωγή	39
III	Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων	41
3	Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων	43
3.1	Εισαγωγή	43
3.1.1	Τα αξιώματα της Θεωρίας συνόλων	45

4	Λογισμός μιας μεταβλητής: Θεωρία και Εφαρμογές	51
4.1	Εισαγωγή	51
4.2	Μαθηματική θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών	52
4.2.1	Το σύνολο των Φυσικών Αριθμών	52
4.2.2	Το σύνολο των Ακεραίων Αριθμών	53
4.2.3	Το Σύνολο των Ρητών Αριθμών	53
4.2.4	Το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών	53
4.2.5	Ιστορικό Σχόλιο	55
4.3	Καρτεσιανό Γινόμενο	55
4.4	Καρτεσιανό Επίπεδο	56
4.5	Συντεταγμένες σημείου στο επίπεδο	56
4.6	Η έννοια της απόστασης	56
4.6.1	Η έννοια της απόλυτης τιμής	57
4.7	Πράξεις στους Πραγματικούς Αριθμούς	59
4.8	Εισαγωγή των μιγαδικών Αριθμών	60
4.8.1	Ιστορικό Σχόλιο	61
4.9	Η άλγεβρα και η γεωμετρία των μιγαδικών αριθμών	61
4.10	Ο τύπος του De Moivre και οι ρίζες των μιγαδικών αριθμών	63
4.11	Ο τύπος του Euler	65
4.12	Η Έννοια της Συνάρτησης	65
4.13	Συνοπτική Παρουσίαση:	
	Γραμμικές και Τετραγωνικές Συναρτήσεις	71
4.14	Οι βασικές κατηγορίες συναρτήσεων	73
4.15	Πολύωνυμα, Ρητές και Αλγεβρικές Συναρτήσεις	73
4.15.1	Ρητές Συναρτήσεις	73
4.16	Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	75
4.17	Τριγωνομετρικές Ταυτότητες	80
4.18	Αντίστροφες συναρτήσεις	83
4.19	Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις	86
4.20	Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις	92
4.21	Κατασκευή νέων συναρτήσεων	98
4.21.1	Σύνθεση Συναρτήσεων	99
4.22	Ακολουθίες	101
4.22.1	Γενικός και αναγωγικός τύπος ακολουθίας	102
4.22.2	Γενικός τύπος ακολουθίας:	102
4.22.3	Αναδρομικός τύπος ακολουθίας	102
4.23	Μαθηματική Επαγωγή	105
4.23.1	Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy	114
4.23.2	Άλλα κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών	117

5	Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών: Θεωρία και Εφαρμογές	123
5.1	Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών	123
5.1.1	Εισαγωγή	123
5.2	Πεδία ορισμού και Πεδία Τιμών	125
5.2.1	Συναρτήσεις δύο μεταβλητών	125
5.2.2	Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων με δύο μεταβλητές	127
5.2.3	Ίχνη	129
5.3	Ισοσταθμικές καμπύλες και ισοσταθμικοί χάρτες	131
5.4	Συναρτήσεις με περισσότερες από δύο μεταβλητές	136

5.5	Όρια και συνέχεια στην περίπτωση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών . . .	139
5.5.1	Ιστορικό Σχόλιο	139

I

Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά

1	Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά	9
1.1	Αρίθμηση και Αριθμοί	10
1.2	Η Λογική ως επιστήμη	13
1.2.1	Η Λογική ως σύστημα αξιωμάτων	15
1.2.2	Προτασιακή Λογική	18
1.2.3	Κατηγορηματική Λογική	21
1.3	Η Αλγεβρα ως επιστήμη	21
1.4	Απειροστικός λογισμός	25
1.5	Αλγόριθμοι – Κρυπτογραφία	28
1.5.1	Αλγόριθμοι	28
1.5.2	Κρυπτογραφία	31



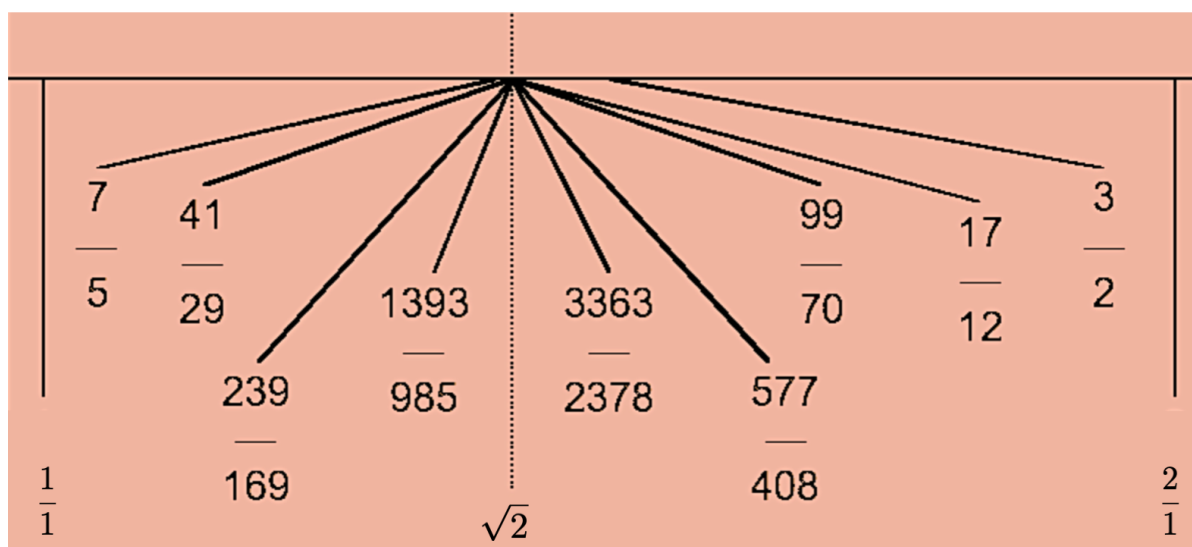
1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

Το φως αποτέλεσε για αιώνες ένα μυστήριο για τον άνθρωπο. Στα έργα των ανθρώπων, όπως στους μύθους, στις επιστήμες, ακόμη και στις θρησκείες, το φως έπαιζε πάντοτε ιδιαίτερο ρόλο. Οι πρώτες εικόνες που υπέπεσαν στην αντίληψη του ανθρώπου ήταν οι ευθύγραμμες ακτίνες του φωτός και ο κυκλικός δίσκος του Ήλιου και των πλανητών του. Ήταν φυσικό λοιπόν όταν η Γεωμετρία μπήκε στη ζωή των ανθρώπων με την εμπειρική της μορφή, τα πρώτα γεωμετρικά σχήματα που κατασκευάστηκαν να είναι η ευθεία και ο κύκλος. Έτσι φθάσαμε στο σημείο η ευθεία και ο κύκλος να αποκτήσουν ιδιαίτερη σημασία, ιδίως μετά την ανακάλυψη της απόδειξης όπου θεωρούνταν ανεπίτρεπτη η επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος χωρίς την χρήση του χάρακα και του διαβήτη. Η εισαγωγή της Γεωμετρίας άλλαξε την ποιότητα της ανθρώπινης σκέψης και την οδήγησε από την πρακτική στη θεωρητική αντιμετώπιση των πραγμάτων και στην παραγωγή της γνώσης. Η φύση λοιπόν σηματοδότησε την πρώτη μεγάλη ερευνητική διείσδυση της ανθρώπινης σκέψης για την ερμηνεία και την κατανόηση της φυσικής πραγματικότητας. Οι πραγματείες του Αριστοτέλη και η θεμελίωση της Γεωμετρίας από τον Ευκλείδη δημιούργησαν το υπόβαθρο στο οποίο βασίστηκαν μετά από πολλούς αιώνες ο Γαλιλαίος και ο Νεύτωνας, προκειμένου να διαμορφώσουν τη σύγχρονη αντίληψη της Φυσικής δίνοντας με αυτό τον τρόπο το έναυσμα στην εξέλιξη της μαθηματικής Επιστήμης, η οποία με αυτόν τον τρόπο εξελίσσεται μέσα από μια σειρά σκέψεων και πράξεων που κάθε μια οικοδομείται επάνω στις προηγούμενες. Πολλοί αρχαίοι λαοί όπως οι Σουμερίοι, οι Αιγύπτιοι, οι Κινέζοι και άλλοι χρησιμοποιούσαν άτυπες μαθηματικές πράξεις, όμως, τα μαθηματικά ως μια έννοια που δηλώνει επιστήμη εμφανίζονται για πρώτη φορά στην αρχαία Ελλάδα. Ο διακεκριμένος Γάλλος ιστορικός Αρνό Ρεϋμόν έγραψε: «Σε σύγκριση με τις εμπειρικές και σκόρπιες γνώσεις που οι λαοί της Ανατολής συγκέντρωσαν με τη δουλειά τους στη διάρκεια πολλών αιώνων, η ελληνική επιστήμη είναι ένα θαύμα. Εδώ για πρώτη φορά η ανθρώπινη σκέψη κατανόησε ότι πρέπει να καθορίσει έναν αριθμό γενικών αρχών και να βγάλει απ' αυτές ορισμένες αλήθειες που είναι τ' αναγκαίο αποτέλεσμά τους». Δυο είναι τα στοιχεία που υπονοεί ο Ρεϋμόν και έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην πορεία της εξέλιξης των μαθηματικών, η έννοια απόδειξης, και η ιδέα της αξιωματικής θεμελίωσης. Η έννοια της απόδειξης ξεκίνησε από τον Θαλή, αναπτύχθηκε από τον Πυθαγόρα και συστηματοποιήθηκε και τελειοποιήθηκε από τον Πλάτωνα, τον Αριστοτέλη, τον Ευκλείδη και τον Αρχιμήδη. Η σύλληψη της ιδέας της αξιωματικής θεμελίωσης οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες. Κλασικό παράδειγμα είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία, η αρχιτεκτονική της αποδεικτικής διαδικασίας από τον Αριστοτέλη και τον Πυθαγόρα και τους υποστηρικτές του που ονομάστηκαν Πυθαγόρειοι, κ.α.λ. Τα έργα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών έβαλαν τα θεμέλια και αποτέλεσαν την βάση για την πύο πέρα

εξέλιξη των μαθηματικών επιστημών, όπως Θεωρίας Αριθμών, μαθηματικής Λογικής, Αλγεβρας και Απειροστικού Λογισμού. Στο πλαίσιο μιας σφαιρικής πραγμάτευσης των μαθηματικών και με κίνητρο την κατανόησή τους, δίνουμε μερικά στοιχεία της κατηγοριοποίησης των μαθηματικών από το 3000 π.Χ μέχρι και τον Έκτο αιώνα μ.Χ, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν υπάρχουν αλληλεπικαλύψεις μεταξύ διαφορετικών κατηγοριών.

1.1 Αρίθμηση και Αριθμοί

Σήμερα, δεν υπάρχει αμφιβολία ότι όλοι οι αρχαίοι πολιτισμοί είχαν αναπτύξει κάποια μορφή αρίθμησης. Για παράδειγμα, στην Παλαιολιθική Εποχή είχαμε χάραξη εγκοπών σε ξύλο όπου για το ένα χρησιμοποιούνταν το το σύμβολο I και για το δυο το σύμβολο I I. Πολύ αργότερα, το ελληνικό σύστημα αρίθμησης χρησιμοποιεί γράμματα του αλφαβήτου αντί για αριθμούς, ενώ δεν είχαν διαμορφωθεί ακόμη τα αραβικά ψηφία 1, 2, 3, ... τα οποία χρησιμοποιούμε και σήμερα, καθώς και το σύστημα του δεκαδικού τρόπου αναγραφής σε στήλες μονάδων, δεκάδων κ.λ.π., το οποίο πρώτοι εφάρμοσαν οι Ινδοί. Είναι σχεδόν βέβαιο ότι η μέτρηση στα πρώτα της βήματα ήταν δυαδική, όμως αργότερα συναντάμε βάσεις αρίθμησης του πέντε του δέκα και του είκοσι, που υπαγορεύτηκαν ουσιαστικά από την χρήση του χεριού στην μέτρηση. Η εγγενής ανάγκη λοιπόν των ανθρώπων να εκτιμήσουν την διάρκεια της ημέρας ή το πλήθος διάφορων οντοτήτων, οδήγησε τους πρώτους μαθηματικούς στην ιστορία της ανθρωπότητας να δημιουργήσουν μία ομάδα συμβόλων που αποτέλεσε το αρχικό σύστημα αρίθμησης. Οι αριθμοί ξεκινούσαν από τη μονάδα, που αντιστοιχούσε στην ύπαρξη ενός αντικειμένου, και συνέχιζαν με ανάλογο τρόπο. Επομένως, το πρώτο σύστημα αρίθμησης ήταν αυτό που στη συνέχεια της μαθηματικής ιστορίας ονομάστηκε «Φυσικοί Αριθμοί». Η Θεωρία Αριθμών αποτελεί ακόμη έναν τομέα που η επινοήσή του οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες. Σημαντική είναι η συνεισφορά του Πυθαγόρα όπου τον έκτο αιώνα π.Χ. ιδρύει την ομώνυμη σχολή στον Κρότωνα της σημερινής Νότιας Ιταλίας στην οποία κυριάρχησε η ιδέα ότι «τα πάντα είναι αριθμοί». Οι Πυθαγόρειοι, αντιλαμβάνονταν τους αριθμούς ως πλήθος ορισμένων αντικειμένων που σχετίζονται με τα γεωμετρικά σχήματα. Έτσι η μονάδα σχετίζεται με το σημείο, η δυάδα με την γραμμή, η τριάδα με το τρίγωνο και η τετράδα ή τετρακτὺς με το τετράεδρο, κ.α.λ. με αυτό τον τρόπο αντιστοίχισης των αριθμών κατόρθωσαν μια πρώτη βασική ταξινόμηση των αριθμών σε άρτιους και περιττούς. Οι Πυθαγόρειοι παρίσταναν έναν άρτιο αριθμό με μια σειρά «ψήφων» η οποία μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη. Ένας περιττός αριθμός, αντίθετα, δεν μπορεί να χωριστεί σε δύο ίσα μέρη, γιατί πάντοτε περισσεύει μία ψήφος. Γενικότερα, οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι οι αριθμοί ήταν μεταφυσικές οντότητες, φορείς αλήθειας που μπορούσαν να καθορίσουν την μοίρα των ανθρώπων. Υποστηρίζεται από μερικούς ιστορικούς, ότι η αντίληψη του ίδιου του Πυθαγόρα ήταν ότι αν οι αριθμοί είχαν μορφές, τότε ίσως και αντίστροφα όλες οι μορφές θα μπορούσαν να συσχετιστούν με αριθμούς, και σαν παράδειγμα ενός τέτοιου συσχετισμού αριθμού από κουκίδες με ένα περίπλοκο σχήμα, θα μπορούσε να δει κανείς στους αστερισμούς. μεγάλο μέρος του έργου των Πειθαγορείων αποτέλεσε τη βάση για το μυστικισμό που αναπτύχθηκε αργότερα πάνω στους αριθμούς. Πολλοί αρχαίοι φιλόσοφοι, όπως ο νεοπλατωνικός φιλόσοφος ο Αμβλίκος (περίπου στα 320 μ.Χ.) που άσκησε μεγάλη επιρροή, αποδίδουν στον Πυθαγόρα την ανακάλυψη των φίλιων αριθμών 284 και 220. Δύο θετικοί ακέραιοι είναι *φίλιοι* αν ο καθένας ισούται με το άθροισμα των γνήσιων διαιρετών του άλλου. Έτσι οι αριθμοί 284 και 220 είναι φίλιοι αριθμοί αφού οι γνήσιοι διαιρέτες του 220, δηλαδή οι 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 και 110, δίνουν άθροισμα 284 και οι γνήσιοι διαιρέτες του 284, δηλαδή οι 1, 2, 4, 71 και 142, δίνουν άθροισμα 220. Το ζεύγος αυτών των αριθμών απέκτησε μια μυστικιστική αίγλη και δημιούργησε την προκατάληψη ότι δύο φυλακτά που έφεραν αυτούς τους αριθμούς επισφράγιζαν την τέλεια φιλία μεταξύ αυτών που τα φορούσαν. Οι αριθμοί άρχιζαν να παίζουν σημαντικό ρόλο στα μάγια, τα ξόρκια, την αστρολογία και την κατασκευή του ωροσκόπιου. Σε καθαρά επιστημονικό επίπεδο, οι αριθμοί από την εποχή του Πυθαγόρα και εντεύθεν ήταν ένα θέμα που συνάρπαζε τους μαθηματικούς της εποχής εκείνης. Σε ένα από τα πιο σημαντικά συγγράμματα όλων των εποχών, τα «Στοιχεία» που γράφτηκε στην Αλεξάνδρεια περί το 300 π.Χ, ο Ευκλείδης συνέλεξε τα σημαντικότερα μαθηματικά μέχρι εκείνη την εποχή. Τα βιβλία VII, VIII, IX από το συγκεκριμένο έργο του Ευκλείδη αποτελούν τα αρχαιότερα βιβλία θεωρίας αριθμών.



Σχήμα 1.1: Η ιδέα της κατασκευής των πραγματικών αριθμών από τον Εύδοξο.

Σε αυτά υπάρχουν σπουδαία συμπεράσματα που αφορούν τους πρώτους αριθμούς. Απο αυτά ξεχωρίζουμε το *Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής* που μας λέει ότι κάθε φυσικός γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν γινόμενο πρώτων παραγόντων. με λίγα λόγια, οι πρώτοι αριθμοί είναι η βάση κατασκευής όλων των αριθμών. Ένα άλλο σημαντικό αποτέλεσμα πάνω στους πρώτους αριθμούς έχουμε απο τον Ερατοσθένη ο οποίος ασχολήθηκε με τους αριθμούς και λέγεται πως επινόησε ένας απλό αλγόριθμο για την εύρεση όλων των πρώτων αριθμών μέχρι έναν συγκεκριμένο ακέραιο. Ο αλγόριθμος αυτός έμεινε στην ιστορία σαν το «κόσκινο του Ερατοσθένη». Αλλα σημαντικά θέματα που πραγματεύονται τα «Στοιχεία» στην θεωρία αριθμών είναι η διαιρετότητα, ο μέγιστος κοινός διαιρέτης (με τον περίφημο αναδρομικό «Ευκλείδειο αλγόριθμο»), το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, η παραγοντοποίηση σε πρώτους, η απόδειξη του απειράριθμου των πρώτων, οι τέλει αριθμοί, οι γεωμετρικές ακολουθίες, τα αθροίσματα γεωμετρικών σειρών και οι άρρητοι αριθμοί. Όμως αυτό που ξεχωρίζει και θεωρείται το σπουδαιότερο μαθηματικό επίτευγμα όλων των εποχών στην θεωρία αριθμών, είναι η κατασκευή των άρρητων αριθμών που βασίζεται στην θεωρία των λόγων του Εύδοξου και βρίσκεται στο βιβλίο V, ορισμός 5, των Στοιχείων του Ευκλείδη. Όπως είπαμε και πιο πριν, οι Πυθαγόρειοι είχαν στηρίξει όλη την κοσμοθεωρία τους στο ότι ο λόγος δύο οποιωνδήποτε μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών και προσπαθούσαν να επιλύσουν προβλήματα από τον πραγματικό κόσμο. Ο λόγος στους Πυθαγόρειους αναφέρεται σε μια κλασματική σχέση $\frac{\alpha}{\beta}$ δύο μεγεθών. Η γραφή $\frac{\alpha}{\beta}$ δεν σημαίνει διαίρεση αλλά είναι συμβολική γραφή της ισότητας $\alpha = q \beta$, όπου q τυχαίος ρητός αριθμός. Η σχέση αυτή προκύπτει όταν τα α και β είναι σύμμετρα, δηλαδή υπάρχουν φυσικοί αριθμοί μ και ν ώστε να ισχύει $\alpha = \mu \cdot \gamma$ και $\beta = \nu \cdot \gamma$ ($q = \frac{\mu}{\nu}$). Το γ λέγεται κοινό μέτρο των α και β . Η πρώτη κρίση ήρθε με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας, όταν δηλαδή δεν μπόρεσαν να βρουν ένα κοινό μέτρο που να μετράει την πλευρά α και την διαγώνιο δ ενός τετραγώνου. με λίγα λόγια, δεν υπάρχουν ακέραιοι θετικοί αριθμοί μ και ν τέτοιοι ώστε $\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\mu}{\nu}$. Ο Εύδοξος ο Κνίδιος (407 - 354 π.Χ.) ήταν αυτός που έβγαλε τους Πυθαγόρειους από την κρίση θεμελιώνοντας ένα μεγάλο μέρος της μελέτης των άρρητων αριθμών. Ας δούμε όμως πώς οδηγηθήκαμε στην ύπαρξη των αρρήτων. Παραθέτουμε τους πέντε πρώτους ορισμούς από το βιβλίο V των «Στοιχείων» του Ευκλείδη.

Η θεμελίωση των άρρητων αριθμών από τον Εύδοξο

(α) μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἔλασσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρηῇ τὸ μείζον. (β) Πολλαπλάσιον δ τὸ μείζον τοῦ ἐλάττονος, ὅταν καταμετρηθῇ ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος. (γ) Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἢ κατὰ πληκτικότητα ποια σχέσις. (δ) Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν. (ε) Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται ε ναι πρῶτον πρὸς δεῦτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων καθ' ὁποιοῦν πολλαπλασιασμόν ἑκάτερον ἑκατέρου ἢ ἅμα ὑπερέχη ἢ ἅμα ἴσα ἢ ἅμα ἐλλείπη ληφθέντα κατάλληλα.

Ο ορισμός (ε) μας λέει ότι α, β, γ, δ είναι φυσικοί αριθμοί, τότε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

αν και μόνον αν ισχύουν τα κάτωθι:

(1) Αν μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\mu < \nu\beta$, τότε $\mu\gamma < \nu\delta$.

(2) Αν μ και ν είναι θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $\mu > \nu\beta$, τότε $\mu\gamma > \nu\delta$.

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι οι λόγοι μεγεθών δεν είναι πάντα ίσοι με τους λόγους των ακεραίων, δηλαδή τους ρητούς. Για παράδειγμα, αν α και δ είναι η πλευρά και η διαγώνιος αντίστοιχα ενός τετραπλεύρου, τότε ο λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ είναι ίσος με $\sqrt{2}$ και είναι άρρητος.

Οι σχέσεις (1) και (2) είναι ισοδύναμες αντίστοιχα με τις παρακάτω σχέσεις (1') και (2'):

(1') Αν $\frac{\mu}{\nu}$ είναι θετικός ρητός τέτοιος ώστε $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\mu}{\nu}$, τότε $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{\mu}{\nu}$.

(2') Αν $\frac{\mu}{\nu}$ είναι θετικός ρητός τέτοιος ώστε $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\mu}{\nu}$, τότε $\frac{\gamma}{\delta} > \frac{\mu}{\nu}$.

Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι

(1'') Το σύνολο όλων των θετικών ρητών που είναι μεγαλύτεροι από το $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ακριβώς το ίδιο με το σύνολο όλων των θετικών ρητών που είναι μεγαλύτεροι από το $\frac{\gamma}{\delta}$.

(2'') Το σύνολο όλων των θετικών ρητών που είναι μικρότεροι από το $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι ακριβώς το ίδιο με το σύνολο όλων των θετικών ρητών που είναι μικρότεροι από το $\frac{\gamma}{\delta}$.

Συνεπώς με βάση τον ορισμό του Εύδοξου καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι σε κάθε λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$ αντιστοιχούν δυο κλάσεις συνόλων, η κλάση $\mathcal{A}_{\frac{\alpha}{\beta}}$ που περιέχει το σύνολο όλων των θετικών ρητών που είναι μικρότεροι από το $\frac{\alpha}{\beta}$ και την κλάση $\mathcal{B}_{\frac{\alpha}{\beta}}$ που περιέχει το σύνολο όλων των θετικών ρητών που είναι μεγαλύτεροι από το $\frac{\alpha}{\beta}$. Επομένως,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ αν και μόνον αν } \mathcal{A}_{\frac{\alpha}{\beta}} = \mathcal{A}_{\frac{\gamma}{\delta}} \text{ και } \mathcal{B}_{\frac{\alpha}{\beta}} = \mathcal{B}_{\frac{\gamma}{\delta}}.$$

Αν αγνοήσουμε το λόγο $\frac{\alpha}{\beta}$ και εστιάσουμε στο ζευγάρι $(\mathcal{A}_{\frac{\alpha}{\beta}}, \mathcal{B}_{\frac{\alpha}{\beta}})$ παρατηρούμε ότι ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

(3'') Για κάθε ρητό $q \in \mathcal{A}_{\frac{\alpha}{\beta}}$ και κάθε ρητό $p \in \mathcal{B}_{\frac{\alpha}{\beta}}$ ισχύει $q < p$.

Πολλά χρόνια αργότερα ο Dedekind ορίζει ως τομή, ένα ζευγάρι κλάσεων $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ που τα στοιχεία τους είναι ρητοί και το οποίο είναι το ευρύτερο δυνατό που έχει την ιδιότητα (3''), και απέδειξε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι ισοδύναμο με το σύνολο όλων των τομών. Χαρακτηριστική είναι η αλληλογραφία των Lipschitz και Dedekind για το συγκεκριμένο θέμα, την οποία λόγω της τεράστιας σπουδαιότητας του αποτελέσματος, για ιστορικούς λόγους παραθέτουμε παρακάτω:

Από το γράμμα του Lipschitz στον Dedekind

I cannot deny relevancy of your definition; I just think that it differs only in the form of expression from what the ancients ascertained, not in the essence. The only thing I can say, is that I believe the definition provided by Euclid (Book V, definition 4) and your definition are equally satisfactory.

Η απάντηση του Dedekind στον Lipschitz

The Euclidean principles alone—without inclusion of the principle of continuity, which they do not contain—are incapable of establishing a complete theory of real numbers as the proportions of the quantities. On the other hand, however, by means of his theory of irrational numbers, the perfect model of a continuous region would be created, which for just that reason would be capable of characterizing any proportion by a certain individual number contained in it (letter to Rudolph Lipschitz, 6 October 1876).

1.2 Η Λογική ως επιστήμη

Σύμφωνα με πολλούς ιστορικούς, από την εποχή της ανθρώπινης πολιτισμικής ανάπτυξης της Νεολιθικής περιόδου, όπου ο άνθρωπος δάμασε τη φωτιά, εγκατέλειψε τη νομαδική ζωή και επιλέγει να μείνει μόνιμα σε ένα τόπο, η λογική δομή της απόδειξης που εμφανίζεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη έχει επηρεάσει τον επιστημονικό τρόπο της ανθρώπινης σκέψης περισσότερο από οποιοδήποτε άλλο κείμενο στον κόσμο. Απο αρχαιολογικές και ιστορικές μαρτυρίες που έχουμε μέχρι και σήμερα, ενώ έχουν βρεθεί υπολογιστικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων σε αρχαίους πολιτισμούς όπως των Βαβυλωνίων, των Αιγυπτίων, των Ινδών και των Κινέζων, δεν έχουν βρεθεί αποδεικτικές διαδικασίες επίλυσης αυτών των προβλημάτων. με λίγα λόγια, οι λαοί αυτοί είχαν καλλιεργήσει αξιόλογα μαθηματικά, αλλά δεν τους απασχολούσε ή δεν μπορούσαν να δικαιολογήσουν το γιατί ένα πρόβλημα λύνεται με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο, και έτσι δεν επινόησαν μαθηματική απόδειξη που να στηρίζεται σε παραγωγικό κι επαγωγικό συλλογισμό. Αυτό έγινε αργότερα τον 6ο αιώνα π.Χ. όταν οι πόλεις της μεγάλης Ελλάδας, η Μικρά Ασία και το δυτικό τμήμα του ελληνικού κόσμου (Νότια Ιταλία και Σικελία) ανέπτυξαν έντονη πνευματική δραστηριότητα και έγιναν κέντρα κοινωνικοπολιτικών αντιπαραθέσεων. Ο ελληνικός φιλοσοφικός στοχασμός της εποχής εκείνης είχε λογοτεχνική και πολιτιστική παράδοση που έφτανε έως την εποχή του Ομήρου. Ακολουθώντας την ιστορική σειρά, δεδομένου ότι η επιστροφή στο παρελθόν είναι απαραίτητη να φωτίσουμε το παρόν, θα ξεκαθαρίσουμε από την αρχή ότι στην μακρόχρονη περίοδο που φθάνει μέχρι τον Έγελο (1770-1831) η έννοια της Λογικής θεωρείται ανάλογη με αυτήν της αρχαίας διαλεκτικής ή ακόμα ταυτίζεται με αυτήν. Στην ρίζα της λέξης *διαλεκτική* υπάρχει το ουσιαστικό *λόγος* που παράγεται από το *λέγω*, και οι κύριες σημασίες του είναι η *ομιλία* και το *λογικό*. μπορούμε να πούμε ότι η διαλεκτική και η λογική παρουσιάζουν πολύ στενή συγγένια, με την διαφορά ότι ο όρος λογική προσδιορίζει την θεωρία της λογικής σκέψης, ενώ η διαλεκτική είναι κυρίως η τέχνη της εφαρμογής στην συζήτηση των γνωστών κανόνων της λογικής. Θα μπορούσε να πει σήμερα κάποιος ότι ο θεωρητικός της λογικής με τον διαλεκτικό έχει την ίδια σχέση μ' αυτή που έχει ο νομικός συγγραφέας με τον δικηγόρο. Στην συνέχεια με τον όρο Λογική θα εννοούμε την μελέτη αποδείξεων όπου οι υποθέσεις που θεωρούμε είναι αληθείς και πρωταρχικές. Η Λογική σε πρώιμο στάδιο επικεντρώνεται στην ανάλυση επιχειρημάτων – και όχι στην ανάλυση της δομής μαθηματικών θεωριών. Η λογική απόδειξη πρωτοεμφανίστηκε και αναπτύχθηκε από τον Θαλή, τον κύριο εκπρόσωπο των Ιώνων φιλοσόφων (624 - 540 π.Χ.) σε μια εποχή ανάπτυξης και θεμελίωσης των μαθηματικών ως θεωρητικής επιστήμης, και συνεχίζεται μέχρι το Διόφαντο (γύρω στο 250 μ.Χ.). Πρώτος ο Θαλής εισήγαγε την λογική απόδειξη και χρησιμοποίησε πλήρη αποδεικτική διαδικασία για να δείξει την αλήθεια πολλών γεωμετρικών προτάσεων. Στην συνέχεια συστηματοποίησε αρκετές από τις προηγούμενες μαθηματικές γνώσεις των Αιγυπτίων και των Βαβυλωνίων και ανέπτυξε μια λογική

δομή για τη Γεωμετρία, δηλαδή για πρώτη φορά στην ιστορία το σχήμα γίνεται αντικείμενο μελέτης και μαθηματικού στοχασμού. Στη συνέχεια ο Πυθαγόρας (580 - 496 π.Χ.), η σχολή των Πυθαγορείων καθώς και όλοι οι μεγάλοι μαθηματικοί που ακολούθησαν μέχρι το 300 π.Χ. (Θεόδωρος, Θεαίτητος, Εύδοξος, κ.α.), το έργο των οποίων περιγράφεται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, χρησιμοποίησαν και βελτίωσαν την αποδεικτική διαδικασία που εισήγαγε ο Θαλής. Ο Ηράκλειτος που γεννήθηκε επίσης στο Ιωνικό τμήμα του ελληνικού κόσμου (544 - 484 π.χ.) και ήταν μεταγενέστερος του Πυθαγόρα, βρίσκει στον λόγο την ουσία του κόσμου σε μία νοητική αρχή. Η σχέση των αντιθέτων του δεν εκφράζεται μόνον μέσω του κοινού λόγου, αλλά και ως πόλεμος που παράγει διαρκώς μέσω συγκρούσεων νέες ισορροπίες. Η παροιμιώδης φράση που χαρακτηρίζει τη φιλοσοφία του Ηρακλείτου είναι: *Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ' αυτό μένειν*. μερικά χρόνια αργότερα μετά τον Ηράκλειτο, ένας άλλος Έλληνας φιλόσοφος, ο Παρμενίδης που γεννήθηκε στην Ελέα της μεγάλης Ελλάδας στα τέλη του 6ου αι. π.Χ. σε ένα περιβάλλον επηρεασμένο από τις απόψεις του Πυθαγόρα, υποστηρίζει ότι η Φιλοσοφία είναι μια εντελώς νέα μορφή γνώσης. Δεν συνδέεται δηλαδή ούτε με τη θρησκευτική πρακτική και την αρχαία σοφία αλλά και ούτε αποτελεί συνέχεια της Ιωνικής ιστορίας. Σύμφωνα με τις απόψεις του Παρμενίδη, η νόηση ταυτίζεται με το *είναι* και αυτό σημαίνει ότι το *ον* είναι αντικείμενο της νόησης, ενώ το *μη ον* δεν εκφράζεται με λέξεις και δεν μπορεί να γίνει αντιληπτό. Πέρα και πίσω από τον Κόσμο που μεταβάλλεται, υπάρχει μια σταθερότητα την οποία εξασφαλίζει η νόησή μας. Η φιλοσοφία του Παρμενίδη έχει μια καθαρά λογική δομή που αρνιέται την εποπτεία και την εμπειρία και θεωρεί μοναδικό κριτήριο της αλήθειας το λογικό και δέχεται τη λογική σκέψη ως μοναδική πηγή της γνώσεως. Ο Παρμενίδης θεωρείται από τον Αριστοτέλη, ο ιδρυτής και θεμελιωτής της ορθολογιστικής σκέψης και φιλοσοφίας. Ο όρος ορθολογισμός δημιουργήθηκε το 16ο αι. για να εκφράσει την τάση να εξηγούνται διάφορα θεολογικά ζητήματα με τη λογική. Βλέπουμε λοιπόν ότι όλοι οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι όπου ο στοχασμός τους είναι προδρομικός της σωκρατικής σκέψης και της ελληνικής φιλοσοφίας γενικότερα, θεωρούν ως την πεμπτούσια των μαθηματικών τη σύνδεσή τους με την λογική σκέψη. Ως λογική σκέψη εννοούν κατ' αρχήν τις αποδεικτικές διαδικασίες και στη συνέχεια την αξιωματική θεμελίωση με τους λογικούς κανόνες της, όπως αυτή παρουσιάστηκε ολοκληρωμένα στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Μιλώντας πιο γενικά, οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι ερμήνευσαν τα φυσικά φαινόμενα με την λογική και οδήγησαν τον άνθρωπο από τον μύθο στον λόγο, δηλαδή, από τις παλαιότερες μυθολογικές αφηγήσεις στη λογική εξήγηση του κόσμου. Και φτάνουμε χρονικά στον Σωκράτη (470– 399 π.Χ.), μία από τις σημαντικότερες φυσιογνωμίες του ελληνικού και παγκόσμιου πνεύματος και πολιτισμού. Αναρίθμητοι είναι οι μελετητές που έχουν ασχοληθεί με τον Σωκράτη, στους αιώνες που ακολούθησαν το θάνατό του. Κυριότερες πηγές για τη ζωή και το έργο του είναι ο μαθητής του Πλάτων, ο ιστορικός Ξενοφών, ο Αριστοτέλης και ο συγγραφέας κωμωδιών Αριστοφάνης. Ο Σωκράτης ήταν ο πρώτος που αντιλήφθηκε την αξία του ορισμού των εννοιών και πίστευε ότι η λογική και η αυτογνωσία ήταν αρκετές για να ζήσει κανείς μια καλή ζωή. Κατά την άποψή του, ο άνθρωπος στρέφεται από έξω προς τα μέσα, από την εξέταση της φύσης και του κόσμου προς την ψυχή και τον νου του. Παρότρυνε τους ανθρώπους να νοιαστούν για την ψυχή τους γιατί η ψυχή είναι ο χώρος των διανοητικών λειτουργιών καθώς και ο τόπος όπου έχει την έδρα της η ηθική συνείδηση. Από την άλλη μεριά, θεωρεί ότι το σώμα ως εργαλείο της ψυχής χρειάζεται προσοχή και φροντίδα. Για να φτάσει στην αρχή των ηθικών εννοιών χρησιμοποίησε την επαγωγική συλλογιστική μέθοδο, όπου μέσα από παραδείγματα παρμένα από την καθημερινότητα και την εμπειρία του αποσκοπούσε στην εξαγωγή καθολικών συμπερασμάτων τα οποία φτάνουν στην απόλυτη γνώση ενός θέματος. Όμως, ο Σωκράτης ήταν στραμμένος αποκλειστικά και μόνο στην εξέταση των ηθικών προβλημάτων και στην αναζήτηση μιας αξιόπιστης στάσης ζωής, και δεν ενδιαφέρθηκε για την λογική ανάλυση και επεξεργασία της μεθοδολογίας του - κάτι που όπως θα δούμε μετά θα επιχειρήσει συστηματικά ο Αριστοτέλης. Το 403 π.Χ. ο Σωκράτης οδηγήθηκε σε δίκη εξαιτίας της κατηγορίας εναντίον του ότι διαφθείρει με τις ιδέες του τους νέους. Ο φιλόσοφος καταδικάστηκε με βάση την κατηγορία σε θάνατο. Η *Απολογία*, έργο που έγραψε ο μαθητής του Πλάτων, δείχνει με ποιον τρόπο υπερασπίζεται ο Σωκράτης τον εαυτό του. Θα μπορούσε να σωθεί αν ήθελε αφού οι φίλοι του είχαν τη δυνατότητα να τον βοηθήσουν να αποδράσει, ο Σωκράτης όμως αρνήθηκε και ως νομοταγής πολίτης περίμενε τον θάνατο ειρηνικά και γαλήνια και ήπιε

το κώνειο όπως πρόσταζε ο νόμος. Ο Πλάτωνας μετά το θάνατο του δασκάλου του φρόντισε να διασώσει και να μεταδώσει τις διδασκαλίες και τη μεγαλειώδη φυσιογνωμία του, γράφοντας τους γνωστούς σωκρατικούς διαλόγους. Ίδρυσε το 387 π.Χ. στην Αθήνα μία φιλοσοφική Σχολή την οποία ονόμασε Ακαδημία προς τιμή του ήρωα Ακάδημου και δίδαξε για 40 ολόκληρα χρόνια σύμφωνα με τα ιδανικά του και με το σωκρατικό πνεύμα. Πολλές φορές στους διαλόγους του ο Πλάτων διατυπώνει λογικές αρχές. Για παράδειγμα, στην Πολιτεία αναφέρει τον αποκαλούμενο *Νόμο της Αντίφασης*, σύμφωνα με τον οποίο είναι αδύνατο κάτι να ισχύει και να μην ισχύει ταυτόχρονα.

Πλάτωνας - Νόμο της Αντίφασης - Πολιτεία 436B

Δήλον ὅτι ταὐτὸν τάναντία ποιεῖν ἢ πάσχειν κατὰ ταὐτόν γε καὶ πρὸς ταὐτόν οὐκ ἐθέλησει ἅμα,....

Όμως, παρ' όλο που και άλλες φορές ανακαλύπτει μέσα απο τα κείμενά του έγκυρες λογικές αρχές που αποτελούν παραδείγματα άτυπης λογικής, δεν έκανε καμία συστηματική προσπάθεια να δημιουργήσει ένα σύστημα τέτοιων αρχών. Το σύνολο του έργου του Πλάτω- να κατατάσσεται μεταξύ των κορυφαίων έργων όλων των εποχών με τη μεγαλύτερη επιρροή μαζί με τον δάσκαλο του Σωκράτη και τον μαθητή του Αριστοτέλη.

1.2.1 Η Λογική ως σύστημα αξιωμάτων

Η Λογική ως σύστημα αξιωμάτων που καθορίζει ένα σύνολο κανόνων με τον οποίο σκεφτόμαστε, συνεννοούμαστε και επιχειρηματολογούμε όταν εξετάζουμε οποιοδήποτε γνωστικό πεδίο, αποτελεί προσωπική ανακάλυψη του Αριστοτέλη. Επιπλέον, ο Αριστοτέλης πιστεύει ότι πέραν της ύπαρξης της Λογικής και της αξιωματικής θεμελίωσης των μαθηματικών, σπουδαίο ρόλο παίζει η σωστή χρήση της γλώσσας που αντανακλά κατά την γνώμη του την σωστή λειτουργία της σκέψης η οποία με την σειρά της αποκαλύπτει τα στοιχεία για την αντικειμενική δομή του κόσμου. Γι' αυτό τον λόγο η λογική του Αριστοτέλη ασχολείται σχεδόν εξ ολοκλήρου με τον κατηγορηματικό συλλογισμό. μία από τις μεγαλύτερες εφευρέσεις του Αριστοτέλη ήταν η εισαγωγή των μεταβλητών που χρησιμοποιούσε μεταβλητά γράμματα να παριστάνουν έγκυρα συμπεράσματα στα «Αναλυτικά Πρότερα».

Αριστοτέλης - Αναλυτικά Πρότερα 25α 14.

Πρώτον μὲν οὖν ἔστω στερητική καθόλου ἢ AB πρότασις.

Κάτι παρόμοιο έγινε όταν ο Αριστοτέλης χρησιμοποίησε δυο γράμματα για να ονομάσει μια ευθεία γραμμή στη Γεωμετρία:

Αριστοτέλης - Ηθικά Νικομάχεια ν ν 12.

ἴσαι αἰ ἐφ' ὧν AA BB ΓΓ ἀλλήλαις.

Στην ουσία τα έργα του Αριστοτέλη περιέχουν την αρχαιότερη γνωστή τυπική μελέτη της λογικής (δηλαδή έδωσε τις αρχές της συλλογιστικής που χρησιμοποιεί μεταβλητές για να δείξει την υποκείμενη λογική μορφή των επιχειρημάτων). Δεν μπορεί όμως κάποιος να παραβλέψει ότι η *Τυπική Λογική* είναι ο καρπός των πρώτων φάσεων της διανοητικής ανάπτυξης των ανθρώπων καί ικανοποιούσε απόλυτα τις ανάγκες του πνεύματός τους και της πρακτικής τους ζωής. Οι άνθρωποι της εποχής εκείνης για να γνωρίσουν τα πράγματα και τα φαινόμενα, έπρεπε να τα απομονώσουν απο τα άλλα και να τα μελετήσουν ένα - ένα ξεχωριστά για να έχουν καθαρότερη την εικόνα τους και να τα χωρίσουν στα συστατικά τους στοιχεία τα οποία τα έβλεπαν σαν αυθύπαρκτες, αμετάβλητες και ίδιες πάντα με τον ευατόν τους οντότητες, που συνδέονταν μεταξύ τους για να αποτελέσουν το όλον. Έτσι φυσιολογικά χωρίς να συνειδητοποιήσουν τι κάνουν,

δημιούργησαν μια σειρά λογικών κανόνων για την ερμηνεία των πραγμάτων. με αυτή την αφετηρία ο Αριστοτέλης εκθέτει στα “Αναλυτικά” το αυστηρό συλλογιστικό σύστημα της λογικής προσπαθώντας να καθορίσει τους νόμους και τους κανόνες με τους οποίους πρέπει να συλλογίζμαστε για την αναζήτηση της Αλήθειας. Βέβαια η υιοθέτηση της Τυπικής Λογικής δεν καθιστά την έννοια της Ἀτυπης Λογικής των προσωκρατικών κενή, διότι καμία τυπική λογική δεν μπορεί να αποτυπώσει όλες τις διαβαθμίσεις της φυσικής γλώσσας. Η σύγχρονη τυπική λογική αφορά την μελέτη των αποδείξεων και ακολουθεί και επεκτείνει αυτή του Αριστοτέλη. Δύο είναι τα βασικά χαρακτηριστικά μίας απόδειξης: Οι προκείμενες (προκείμενη είναι η παραδοχή πως κάτι είναι αλήθεια) και η έγκυρη εφαρμογή επιχειρηματολογικών αρχών. Σήμερα δεχόμαστε ότι αυτά τα ουσιώδη χαρακτηριστικά μιας απόδειξης είναι ανεξάρτητα. Παρόλα που δεν είναι σαφές αν οι προσωκρατικοί φιλόσοφοι είχαν συνείδηση αυτού του γεγονότος, ο Αριστοτέλης φαίνεται ότι γνώριζε το γεγονός αυτό, πράγμα που φαίνεται από την διάκριση που κάνει μεταξύ *αποδεικτικού* και *διαλεκτικού συλλογισμού* στο *Τοπικά* και *Αναλυτικά Πρότερα*.

Αριστοτέλης - Τοπικά Πρότερα 100α 25-30.

Εστι δὴ συλλογισμὸς λόγος ἐν ᾧ τεθέντων τινῶν ἕτερόν τι τῶν κειμένων ἐξ ἀνάγκης συμβαίνει διὰ τῶν κειμένων, ἀπόδειξις μὲν οὖν ἐστίν, ὅταν ἐξ ἀληθῶν καὶ πρώτων ὁ συλλογισμὸς ᾗ, ἢ ἐκ τοιούτων ἅ διὰ τινων πρώτων καὶ ἀληθῶν της περὶ αὐτὰ γνώσεως τὴν ἀρχὴν εἴληφεν. διαλεκτικὸς δὲ συλλογισμὸς ὁ ἐξ ἐνδόξων συλλογιζόμενος.

με λίγα λόγια ο Αριστοτέλης λέει ότι *συλλογισμός* είναι μια συζήτηση όπου έχοντας υποθέσει κάποια πράγματα, μέσω αυτών προκύπτει κατ’ ανάγκην κάτι διαφορετικό. Ο συλλογισμός είναι απόδειξη όταν οι υποθέσεις του είναι αληθείς ενώ διαλεκτικός είναι ο συλλογισμός που ξεκινά από γενικά αποδεκτές γνώμες. Με λίγα λόγια, με την απόδειξη καταλήγουμε στην αλήθεια με άμεσο τρόπο, ενώ ένα διαλεκτικό επιχείρημα μας οδηγεί στην αλήθεια με έμμεσο τρόπο και σε αυτή την περίπτωση δεν είναι κατ’ ανάγκην το συμπέρασμα αληθές. με βάση αυτό το συμπέρασμα, ο Αριστοτέλης συνέδεσε τις υποθετικές προτάσεις με τη μαθηματική αλήθεια και την αποδεικτική διαδικασία. Αυτό σημαίνει ότι αν αποδειχθεί η αλήθεια μιας υποθετικής πρότασης της μορφής

αν p τότε q

και η πρόταση p είναι αληθής, τότε και η πρόταση q θα είναι υποχρεωτικά αληθής. Βέβαια στις υποθετικές προτάσεις υπάρχει περίπτωση να μην ισχύει η υπόθεση και να ισχύει το συμπέρασμα. Για παράδειγμα, αν p είναι η πρόταση “τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα” και q είναι η πρόταση “τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ έχουν ίσες γωνίες”, τότε σε αυτήν την υποθετική πρόταση όταν τα τρίγωνα είναι όμοια δεν ισχύει η υπόθεση και ισχύει το συμπέρασμα. Στον Προτασιακό Λογισμό που χρησιμοποιούμε σήμερα ο τρόπος αυτός συμπερασμού είναι γνωστός ως αποδεικτικός κανόνας *Modus Ponens* (κανόνας επιβεβαίωσης) και σχηματικά αποδίδεται ως εξής:

Modus Ponens

$$\frac{\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ p \text{ αληθής} \end{array}}{q \text{ αληθής}}$$

Ενας άλλος τρόπος συμπερασμού που είναι γνωστός ως αποδεικτικός κανόνας *Modus Tollens* (κανόνας άρνησης) είναι ο εξής:

Modus Ponens

$$\begin{array}{l} p \longrightarrow q \\ p \text{ όχι αληθής} \\ \hline q \text{ όχι αληθής} \end{array}$$

Η χρήση της μεθόδου αυτής μάλλον υπεβλήθη στον Πλάτωνα από τον Σωκράτη και τον Ζήνωνα τον Ελεάτη. Ίσως αυτός είναι ο λόγος που ο Αριστοτέλης αναφέρεται στον Ζήνωνα ως εφευρέτη της μεθόδου της *απαγωγής στο άτοπο*.

μέσα από αυτά τα λογικά σχήματα ο Αριστοτέλης ασχολείται αναγκαστικά με το ερώτημα πότε μια πρόταση είναι η άρνηση κάποιας άλλης. Η κατάταξη που έκανε ήταν τέτοια που η άρνηση μιας πρότασης είναι αντιφατική με αυτή, με την έννοια ότι πρέπει η μια να είναι αληθής και η άλλη ψευδής. Δηλαδή έχουμε: Αν παραστήσουμε με 1 την τιμή αλήθειας μιας αληθούς πρότασης και με 0 μιας ψευδούς, τότε ο πίνακας αλήθειας της άρνησης μιας πρότασης, όπως αυτή περιγράφεται από τον Αριστοτέλη είναι η εξής:

Αληθοπίνακας άρνησης

P	$\neg P$
1	0
0	1

Όπως στα μαθηματικά έχουμε τα αξιώματα που είναι προτάσεις που γίνονται αποδεκτές ως καθολικά αληθείς, έτσι και στην Λογική έχουμε τις *Λογικές Αρχές* όπου χαρακτηρίζονται οι θεμελιώδεις αρχές βάσει των οποίων βασίζονται και διευθύνονται οι ορθές διανοητικές ενέργειες του ανθρώπου.

Η τυπική λογική κατά τον Αριστοτέλη περιγράφεται μέσα από τέσσερις θεμελιώδεις νόμους (λογικές αρχές):

1. *Η αρχή της ταυτότητας*. Κάθε έννοια είναι η ίδια με τον εαυτό της ή με το σύνολο των γνωρισμάτων της, δηλαδή, σε κάθε συλλογισμό η έννοια πρέπει να χρησιμοποιείται με μια μόνο και την ίδια πάντοτε σημασία (αντίστοιχη της ανακλαστικής ιδιότητας στα μαθηματικά, $A = A$). Την Αρχή αυτή όρισε ο Αριστοτέλης λέγοντας:

Αναλυτ. Προτ. Α' 32

Δει παν το αληθές αυτό εαυτό ομολογούμενον είναι πάντη

2. *Η αρχή της αντίφασης*. Σύμφωνα με αυτόν το νόμο, κάθε έννοια δεν μπορεί να αντιφάσκει με τον εαυτό της, να είναι δηλαδή συγχρόνως ίδιο και όχι ίδιο με τον εαυτό της (το A δεν μπορεί να είναι συγχρόνως A και όχι A). Βέβαια πρέπει στο σημείο αυτό να γίνει διάκριση ανάμεσα στις αντιφάσεις της αντικειμενικής πραγματικότητας, που έχουν διαλεκτικό χαρακτήρα και όχι σε αυτές που υπάρχουν εσφαλμένοι συλλογισμοί.

Αριστοτέλης - μεταφ. Γ' 3 - 1005 - β - 19

Το αυτό άμα υπάρχειν τε και μη υπάρχειν αδύνατον, τω αυτό και κατά το αυτόν

Επί της Αρχής αυτής βασίζονται οι κανόνες “η άρνηση επί άρνησης είναι άμεση κατάφαση” και “η διπλή άρνηση είναι κατάφαση”.

3. *Η αρχή του αποκλειόμενου τρίτου ή μέσου.* Δυο αντιφατικές έννοιες που αναφέρονται στο ίδιο πράγμα δεν μπορεί να είναι και οι δυο ψευδείς, δηλ. ανάμεσα στην απόδοση μιας ιδιότητας σε μια έννοια και στην ταυτόχρονη απόδοση μιας αντιφατικά αντίθετης ιδιότητας στην ίδια έννοια, δεν υπάρχει τρίτη λύση. Ορθή πρέπει να είναι είτε η μία είτε η άλλη, κάθε τρίτη έννοια αποκλείεται ως ορθή (ένα πράγμα θα είναι είτε A είτε όχι A και τίποτα άλλο από αυτά). Ο Αριστοτέλης διατύπωσε την Αρχή αυτή ως εξής:

Παν ή φάναι ή αποφάναι αναγκαίον, ανάγκη της αντιφάσεως θάτερον είναι μόριον αληθές, αδύνατον γαρ αμφοτέρα ψευδή είναι”

4. *Η αρχή του επαρκούς ή αποχρώντος λόγου.* Για κάθε διαβεβαίωση, για κάθε συμπέρασμα πρέπει να υπάρχει ένας επαρκής από λογική άποψη λόγος, ένας λόγος που να είναι από μόνος του ικανός, ώστε να οδηγήσει στο συμπέρασμα κατά τρόπο τυπικά έγκυρο και υποχρεω- τικό.

Παν ή φάναι ή αποφάναι αναγκαίον, ανάγκη της αντιφάσεως θάτερον είναι μόριον αληθές, αδύνατον γαρ αμφοτέρα ψευδή είναι”

1.2.2 Προτασιακή Λογική

Ο Αριστοτέλης έμεινε είκοσι χρόνια στην Ακαδημία και αφιερώθηκε στην έρευνα και στη διδασκαλία. μετά τον θάνατο του Πλάτωνα, το 348-347 π.Χ. ο Σπεύσιππος διαδέχεται τον Πλάτωνα στη διεύθυνση της Ακαδημίας και ο Αριστοτέλης αποχωρεί από τη Σχολή και αναχωρεί από την Αθήνα, στην οποία επιστρέφει δώδεκα χρόνια αργότερα όπου και ίδρυσε τη δική του σχολή, το περίφημο αριστοτελικό Λύκειο της Αθήνας. Ο Αριστοτέλης, με χρήματα που του έδωσε ο Αλέξανδρος, έχτισε μεγαλόπρεπα οικήματα και στοές, που ονομάζονταν “περίπατοι”. Ίσως γι’ αυτό η σχολή του ονομάστηκε Περιπατητική και οι μαθητές του περιπατητικοί φιλόσοφοι. Ο Αριστοτέλης πέρασε στην αθανασία τόσο από το διδασκαλικό του έργο όσο και από την ασύλληπτη συνθετική ικανότητα της διάνοιάς του. Ήταν αναμφίβολα ο συστηματικότερος και μεθοδικότερος νους της αρχαιότητας που έμελλε να μεταλαμπαδεύσει το φωτεινό του πνεύμα στον μαθητή του Αλέξανδρο τον μέγα όπου χρησιμοποιώντας ως εκπαιδευτικό μοχλό τα ομηρικά έπη, του εμφυσεί το ελληνικό πνεύμα και την οικουμενικότητά του. Εκτός από την Περιπατητική σχολή λογικής του Αριστοτέλη, υπήρξε στην αρχαιότητα και η Στωική σχολή λογικής. Η σχολή αυτή που ιδρύθηκε από τον Χρύσιππο έχει τις ρίζες της πίσω στα τέλη του 5ου αιώνα π.κ.ε. στον φιλόσοφο Ευκλείδη από τα μέγαρα, μαθητή του Σωκράτη, και στα πλαίσιά της συνεχίστηκαν και συστηματοποιήθηκαν οι λογικές μελέτες των μεγαρικών φιλοσόφων. Βέβαια η επιρροή της αριστοτελικής λογικής ήταν τόσο μεγάλη που οδήγησε στην υποτίμηση από πολλούς ιστορικούς της συνεισφοράς των Στωικών και αυτός ίσως ήταν ο λόγος που μόνο μικρό μέρος του έργου των Στωικών διασώθηκε. Το έργο των μεγαρικών και κατ’ επέκταση των Στωικών αφορά στην λογική των προτάσεων σε αντίθεση με αυτό των Περιπατικών που αφορά στη λογική των κατηγορημάτων. Και εδώ, όταν λέμε “λογική προτάσεων” εννοούμε τη μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων λαμβάνοντας κάθε πρόταση ως ένα ιδιαίτερο όλον, ενώ όταν λέμε “λογική κατηγορημάτων” εννοούμε τη μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων με έμφαση στην εσωτερική δομή των προτάσεων, δηλαδή στη μορφή “υποκείμε-”νο - κατηγορήμα”. Επομένως, θα λέγαμε ότι η πιο σημαντική και χαρακτηριστική διαφορά της μεγαρικής - Στωικής Λογικής με την Αριστοτελική Λογική είναι ότι αφορά προτάσεις και όχι ουσιαστικά, γεγονός που την κατατάσει πιο κοντά στην σύγχρονη προτασιακή λογική. Είναι γνωστό ότι μέλη της μεγαρικής Σχολής όπως ο Διόδωρος Κρόνος και ο Φίλωνας, μεταγενέστεροι του Αριστοτέλη, ήταν βαθείς γνώστες λογικών προβλημάτων πράγμα που δείχνει ότι πίσω τους υπήρχε μια παράδοση μελέτης τέτοιων προβλημάτων. Σύμφωνα με τα στοιχεία που υπάρχουν ο Διόδωρος Κρόνος και ο Φίλωνας είναι οι πρώτοι που ασχολήθηκαν με τη φύση των υποθετικών προτάσεων. Ίσως αυτό οφείλεται στην σχέση της μεγαρικής Σχολής με το Ζήνωνα τον Ελεάτη, του οποίου τα επιχειρήματα ήταν της μορφής “αν P τότε Q ” και “αν P τότε όχι Q ” συνεπάγεται ότι το P είναι αδύνατο. Όπως γίνεται σαφές από

αναφορά του Σέξτου (έλληνας γιατρός και φιλόσοφος που έζησε μάλλον μεταξύ 2ου και 3ου αιώνα μ.Χ.), η άποψη του Φίλωνα για τις υποθετικές προτάσεις ταυτίζεται με τη σημερινή:

Adv. Math. viii. 113

ο ὅν ὁ μὲν Φίλων ἔλεγεν ἀληθὲς γίνεσθαι τὸ συνημμένον ὅταν μὴ ἄρχηται ἀπ' ἀληθοῦς καὶ λήγῃ ἐπὶ ψεῦδος, ὥστε τριχῶς μὲν γίνεσθαι κατ' αὐτόν ἀληθὲς συνημμένον, καθ' ἓνα δὲ τρόπον ψεῦδος. καὶ γὰρ ὅταν ἀπ' ἀληθοῦς ἀρχόμενον ἐπ' ἀληθὲς λήγῃ ἀληθὲς ἐστίν, ὡς τὸ “εἰ ἡμέρα ἔστι, φῶς ἔστιν”. καὶ ὅταν ἀπὸ ψεύδους ἀρχόμενον ἐπὶ ψεῦδος λήγῃ, πάλιν ἀληθὲς, ο ὅν τὸ “εἰ πέταται ἡ γῆ, πτέρυγας ἔχει ἡ γῆ, ὡσαύτως δὲ καὶ τὸ ἀρχόμενον ἀπὸ ψεύδους ἐπ' ἀληθὲς δὲ λήγον ἐστίν ἀληθὲς, ὡς τὸ “εἰ πέταται ἡ γῆ, ἔστιν ἡ γῆ. μόνως δὲ γίνεται ψεῦδος ὅταν ἀρχόμενον ἀπὸ ἀληθοῦς λήγῃ ἐπὶ ψεῦδος, ὅποιον ἐστὶ τὸ “εἰ ἡμέρα ἔστι, νύξ ἔστιν”.

Δηλαδή, σύμφωνα με τον Φίλωνα υπάρχουν τρεις τρόποι ώστε μια υποθετική πρόταση να είναι αληθής και ένας κατά τον οποίο θα είναι ψευδής. Συγκεκριμένα μια συνεπαγωγή θα είναι αληθής όταν: (1) Αρχίζει με μια αλήθεια και τελειώνει με μια αλήθεια, (2) αρχίζει με ένα ψεύδος και τελειώνει με ένα ψεύδος, και (3) αρχίζει με ένα ψεύδος και τελειώνει με μια αλήθεια. Ενώ μια συνεπαγωγή θα είναι ψευδής μόνον όταν αρχίζει με μια αλήθεια και τελειώνει με ένα ψεύδος. Αυτό που έχει σημασία για την απόδειξη μιας υποθετικής πρότασης δεν είναι η αλήθεια ή το ψεύδος των μερών της υποθετικής πρότασης, αλλά η αλήθεια της υπόθεσης να συνεπάγεται την αλήθεια του συμπεράσματος. Αν παραστήσουμε με 1 την τιμή αλήθειας μιας αληθούς πρότασης και με 0 μιας ψευδούς, τότε ο πίνακας αλήθειας της συνεπαγωγής, όπως αυτή περιγράφεται απο τον Φίλωνα είναι η εξής:

Αληθοπίνακας συνεπαγωγής

P	$\neg P$	$P \rightarrow Q$
1	1	1
0	1	1
0	1	1
0	1	1

Πίνακας 1.1 Αληθοπίνακας συνεπαγωγής

Όπως είπαμε και παραπάνω, η λογική των μεγαρικών και κατ' επέκταση των Στωικών αφορά τη μελέτη των λογικών σχέσεων μεταξύ προτάσεων λαμβάνοντας κάθε πρόταση ως ένα ιδιαίτερο όλον, και έτσι διερευνήθηκαν οι λογικές προτάσεις (αν είναι αληθείς ή ψευδείς) που σχηματίζονται από άλλες προτάσεις με τη χρήση των λογικών συνδέσμων. Προς αυτή την κατεύθυνση λοιπόν ασχολήθηκαν με τους συνδέσμους της σύζευξης “και” και της διάζευξης “ή”. Οι Στωικοί θεωρούσαν μια συζευκτική πρόταση μια πρόταση που είναι αληθής αν και μόνον αν και οι δυο συνιστώσες της είναι αληθείς. Επίσης οι Στωικοί όρισαν αρχικά μια διαζευκτική πρόταση ως την πρόταση που οι συνιστώσες της βρίσκονται σε μάχη μεταξύ τους και συνεπώς δεν είναι δυνατό να αληθεύουν μαζί διότι είναι αντιφατικές, σχετικό είναι το παρακάτω:

Διεζευγμένον γάρ ἐστὶν ἐξ ἀντιχειμένων τοῦ τε εἶναι σημείον καὶ τοῦ μὴ εἶναι.

Δηλαδή, διότι είναι διαζευκτική πρόταση, η οποία αποτελείται από αντιφατικές προτάσεις, την ύπαρξη και την μη ύπαρξη του σημείου. Και βάσει αυτού του συλλογισμού μια διαζευκτική πρόταση είναι αληθής αν και μόνον αν ακριβώς μια από τις δύο συνιστώσες της είναι αληθής, ενώ είναι ψευδής, αν και μόνον αν ακριβώς μια από τις δύο συνιστώσες της είναι ψευδής. με βάση την άποψή τους για τη διάζευξη, οι Στωϊκοί οδηγήθηκαν φυσιολογικά στην αρχή της απόκλεισης του τρίτου και στην αρχή της διτιμίας.

Αληθοπίνακας σύζευξης

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Πίνακας 1.2 Σύζευξη προτάσεων

Αληθοπίνακας διάζευξης

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Πίνακας 1.3 διάζευξη προτάσεων

με βάση αυτούς τους αληθοπίνακες έχουμε την ακόλουθη ισοδυναμία στην οποία κάνει αναφορά ο Αριστοτέλης:

$$Q \rightarrow P \iff \neg P \rightarrow \neg Q.$$

Διεξυγμένον γάρ ἐστιν ἐξ ἀντιχειμένων τοῦ τε εἶναι σημείον καὶ τοῦ μὴ εἶναι.

με βάση αυτούς τους αληθοπίνακες έχουμε την ακόλουθη ισοδυναμία στην οποία κάνει αναφορά ο Αριστοτέλης:

$$Q \rightarrow P \iff \neg P \rightarrow \neg Q.$$

Διεξυγμένον γάρ ἐστιν ἐξ ἀντιχειμένων τοῦ τε εἶναι σημείον καὶ τοῦ μὴ εἶναι.

1.2.3 Κατηγορηματική Λογική

Η προτασιακή Λογική όπως παρουσιάστηκε από τους πρώιμους φιλόσοφους και αναπτύχθηκε σε επίσημη λογική από τον Χρύσιππο και τους Στωικούς αποτελεί την απλούστερη μορφή Λογικής. Ένα από τα πλεονεκτήματα της Προτασιακής Λογικής είναι η απλότητα στη σύνταξη των προτάσεων μέσω λογικών συνδέσμων και το γεγονός ότι μπορεί να καταλήξει πάντα σε συμπέρασμα. Όμως παρουσιάζει ένα σημαντικό μειονέκτημα που οφείλεται στην έλλειψη γενικότητας, που οδηγεί σε μεγάλες σε μέγεθος αναπαραστάσεις γνώσης καθώς κάθε γεγονός πρέπει να αναπαρίσταται με μια χωριστή λογική πρόταση. Το πρόβλημα αυτό όπως θα δούμε αργότερα λύνεται με την κατηγορική λογική που επεκτείνει την προτασιακή λογική: (1) με την εισαγωγή μεταβλητών, (2) με προτάσεις που περιέχουν μεταβλητές οι οποίες ονομάζονται κατηγορήματα και (3) με δύο σύμβολα που λέγονται ποσοδείκτες (quantifiers), το “για κάθε” και το “υπάρχει” όπου με σύγχρονο συμβολισμό αποδίδεται με $\forall$ και $\exists$ αντίστοιχα. Ο Αριστοτέλης ήταν ο πρώτος επιστήμονας της λογικής που επιχείρησε μια συστηματική ανάλυση της λογικής σύνταξης μιας πρότασης, σε ουσιαστικό και ρήμα. Στις Κατηγορίες αναφέρεται σε όλες τις ιδιότητες που αποδίδουμε (κατηγορούμε) στην ατομικότητα στην οποία αναφερόμαστε (το ουσιαστικό της πρότασης). Το μέρος της πρότασης δια του οποίου γίνεται η απόδοση των ιδιοτήτων στο ουσιαστικό καλείται *κατηγό- ρημα*. Από άποψη σύνταξης το κατηγόρημα εμφανίζεται με τη μορφή μιας διαδοχής ενός κενού και λέξεων έτσι ώστε, αν στη θέση του κενού τοποθετήσουμε το όνομα μιας ατομικότητας, τότε δημιουργείται μια πρόταση της φυσικής γλώσσας. Για παράδειγμα, το κατηγό- ρημα «είναι φιλόσοφος», εμφανίζεται συντακτικά ως διαδοχή «...είναι φιλόσοφος», και συνεπώς αν στην θέση του κενού τοποθετήσουμε τις ατομικότητες Σωκράτης, Πλάτων, Αριστοτέλης, παίρνουμε τις προτάσεις: «ο Σωκράτης είναι φιλόσοφος», «ο Πλάτων είναι φιλόσοφος», «ο Αριστοτέλης είναι φιλόσοφος». Αν επιχειρήσουμε να παρουσιάσουμε τον πυρήνα της Αριστοτελικής Συλλογιστικής που έχει σαν βάση τον «συλλογισμό», Βλέπουμε ότι η έμφαση στην ανάλυση των επιχειρημάτων δίνεται στην μορφή Υποκείμενο - Κατη- γόρημα. Η ιδέα για την κατασκευή ορθών συλλογισμών μέσω κατηγορημάτων και μεταβλη- τών που συναντάμε στο έργο του Αριστοτέλη, αποτελεί και τη βάση της καλούμενης παραδο- σιακής λογικής - πρόδρομο της κλασικής λογικής - που κυριάρχησε έως τα μέσα περίπου του 19ου αιώνα και είχε βαθιά επίδραση στη Δυτική σκέψη. Είναι φανερό ότι ο Αριστοτέλης σε αντιδιαστολή προς τους Στωικούς ακολούθησε μια διαφορετική λογική προσέγγιση. Οι Στωικοί χρησιμοποίησαν ως στοιχείο που αποτελεί βασική μονάδα της λογικής, την πρόταση (λεκτόν) που μπορεί να προσλάβει κάποια τιμή αλήθειας. Οι τις λογικές σχέσεις μεταξύ προτάσεων τις οποίες μελέτησαν οι Στωικοί αποτελούν τον πρόδρομο μεταγενέστερων λογι- κών τυπικών συστημάτων. Οι δύο πιο σημαντικές φιλοσοφικές σχολές του Αριστοτέλη και των Στωικών, αν και θεωρούνταν αντίπαλες αρχικά, έγινε σαφές αργότερα ότι επρόκειτο για συμπληρωματικές θεωρίες.

1.3 Η Αλγεβρα ως επιστήμη

Οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί και φιλόσοφοι μέσα από την εισαγωγή του παραγωγικού συλλογισμού και της ανάλυσης ως μέρους ευρέσης κατάλληλων αρχών, κανόνων και μέσων για την επίλυση αριθμητικών και γεωμετρικών προβλημάτων, βελτίωσαν σε μεγάλο βαθμό τις μεθόδους επίλυσης των Βαβυλωνίων, των Αιγυπτίων, των Κινέζων, κ.α., και επέκτειναν την ύλη των μαθηματικών. Τα μαθηματικά της ελληνικής περιόδου χωρίζονταν σε δύο μόνο υποπεδία, την Αριθμητική με την έννοια της θεωρίας αριθμών και τη Γεωμετρία (σημεία, ευθείες, επίπεδα κ.λπ.). Ορισμένες από τις μεθόδους, οι οποίες είχαν αναπτυχθεί μπορούν να θεωρηθούν στις μέρες μας, ως άλγεβρα, όχι με τη σημερινή συμβολική έννοια, αλλά με μία ισοδύναμη μορφή της εκφρασμένη γεωμετρικά. Τα πρώτα δείγματα αλγεβρικής σκέψης εμφανίστηκαν από Αιγύπτιους και Βαβυλώνιους μαθηματικούς, πριν από περίπου τέσσερις χιλιετίες. Αρχικά οι Βαβυλώνιοι και μετέπειτα οι Αιγύπτιοι επιστήμονες εργάζονταν πάνω στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Οι Αιγύπτιοι και σε μεγαλύτερο βαθμό οι Βαβυλώνιοι είχαν ένα ανεπτυγμένο σύστημα αρίθμησης, συμβολισμό για τους θετικούς ακεραίους και τα κλάσματα καθώς και πλήρη μεθοδολογία για να εκτελούν τις τέσσερις πράξεις της Αριθμητικής. μπορούσαν επίσης να κάνουν υπολογισμούς και να βρίσκουν προσεγγιστικές τιμές για τις τετραγωνικές ρίζες ή να βρίσκουν τις λύσεις διαφόρων

εξισώσεων. Εν τούτοις η άλγεβρά τους είναι εμπειρική, όταν λύνουν το πρόβλημα απλώς περιγράφουν τον τρόπο, δεν υπάρχει δηλαδή στην άλγεβρά τους η απόδειξη. Η κατασκευή της άλγεβρας με βάση τη γεωμετρία ξεκίνησε ήδη στα πλαίσια της Πυθαγόρειας Σχολής και συνεχίστηκε επί πολλούς αιώνες αργότερα. Όμως, το αριθμητικό ή γεωμετρικό περιεχόμενο μέσα στο οποίο λειτουργούσε η Άλγεβρα την εμπόδιζε να εμφανίζεται ευκρινής και καθαρή, διότι ήταν ενσωματωμένη στους αριθμούς και τα σχήματα. Στο πρώτο στάδιο της ανάπτυξης των μαθηματικών, η γλώσσα της γεωμετρίας φάνηκε να είναι πολύ φυσική και έδωσε την δυνατότητα να διατυπώνονται απλά και εποπτικά ορισμένες αλγεβρικές ταυτότητες. Για παράδειγμα, το έργο του Ευκλείδη που υπήρξε στην ουσία το προϊόν ερευνών και προβληματισμών των δύο αιώνων που προηγήθηκαν, αποτελεί την γεωμετρική άλγεβρα των αρχαίων ελλήνων μαθηματικών και φιλοσόφων που έπαιξε τον ίδιο ρόλο που έχει η σύγχρονη συμβολική άλγεβρα. Ας πάρουμε την Πρόταση 1 στο Βιβλίο II των Στοιχείων του Ευκλείδη που λέει ότι:

Αν δοθούν τμήματα α και β και το β διαιρεθεί σε οσαδήποτε τμήματα, τότε το εμβαδόν του ορθογωνίου που ορίζουν τα α , β είναι ίσον με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που ορίζουν το α με καθένα από τα τμήματα στα οποία έχει διαιρεθεί το β .

Η πρόταση αυτή θα μπορούσε να αποδοθεί από τον τύπο:

$$\alpha(\beta_1 + \beta_2 + \dots) = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2 + \dots$$

όπου $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \dots$.

Το θεώρημα αυτό δεν είναι τίποτα άλλο από μία γεωμετρική απόδειξη ενός από τους βασικούς νόμους της αριθμητικής που σήμερα αποκαλούμε ως επιμεριστική ιδιότητα. Ανάλογες προτάσεις που αποτελούν αποδείξεις της αντιμεταθετικής και της προσεταιριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού, σε γλώσσα Γεωμετρίας, συναντάμε στα άλλα βιβλία των Στοιχείων του Ευκλείδη. Από την άλλη μεριά, και οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις είναι στενά συνδεδεμένες με τη γεωμετρία του Ευκλείδη, αφού κάθε κατασκευή με τη βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη είναι ισοδύναμη αναλυτικά με τη λύση κάποιας αλυσίδας δευτεροβάθμιων εξισώσεων. Για παράδειγμα, στην πρόταση 6 στο Βιβλίο II των Στοιχείων του Ευκλείδη δίνεται η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $ax + x^2 = b^2$ και στην πρόταση 11 στο Βιβλίο II των Στοιχείων του Ευκλείδη δίνεται η λύση της εξίσωσης $ax + x^2 = a^2$. Στην εποχή του Ευκλείδη, τα a και b αντιστοιχούσαν σε μεγέθη ευθυγράμμων τμημάτων. μέσα από το έργο του Ευκλείδη όμως, πέραν των απλών νόμων της αριθμητικής, συναντάμε την γεωμετρική προσέγγιση των Αρχαίων Ελλήνων σε ανώτερου βαθμού εξισώσεις, όπως για παράδειγμα, τα περίφημα άλυτα προβλήματα της τριχοτόμησης της γωνίας, του διπλασιασμού του κύβου και του τετραγωνισμού του κύκλου. Τα προβλήματα ήταν ευρέως γνωστά, γινόνταν ήδη αναφορά από τον 5ο αιώνα π.Χ. σε θεατρικά έργα της εποχής από τον Ευριπίδη (485 π.Χ.-407 π.Χ.) και τον Αριστοφάνη (452-385 π.Χ.). Για τα προβλήματα αυτά διαπιστώθηκε ότι δεν μπορούσε να δοθεί λύση με την βοήθεια του κανόνα και του διαβήτη. Εξ αιτίας αυτού του γεγονότος, οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες στράφηκαν σε άλλες καμπύλες εκτός του κύκλου και σε άλλες μεθόδους. Έτσι, επινοήθηκαν νέες καμπύλες όπως, για παράδειγμα, η τετραγωνίζουσα του Ιππία, η έλικα (ή σπείρα) του Αρχιμήδη και η κογχοειδής καμπύλη του Νικομήδη. Το πιο σημαντικό όμως είναι ότι δόθηκε περαιτέρω ώθηση στη μελέτη των κωνικών τομών (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή).

μαθηματικά προβλήματα των μαθηματικών από την αρχαιότητα μέχρι τα τέλη του 19ου αιώνα. Είναι αξιοσημείωτο ότι ο κωμικός ποιητής Αριστοφάνης στο έργο του Όρνιθες, το οποίο χρονολογείται περίπου στο 414 π.Χ., φέρνει στη σκηνή τον αστρονόμο μέτωνα ο οποίος αστειευόμενος λέει:

Με το ορθό ραβδί αρχίζω να μετρώ ώστε να γίνει ο κύκλος τετράγωνος για χάρη σου.

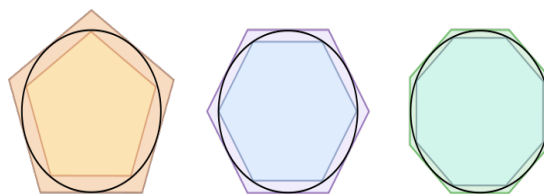
Ο Ιάμβλιχος (250-325 μ.Χ) αναφέρει ότι τον τετραγωνισμό του κύκλου κατόρθωσαν: ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ) με τη βοήθεια της έλικας, ο Νικομήδης (200 π.Χ) με την τετραγωνίζουσα και ο Απολλώνιος (265-170 π.Χ). Η κατασκευή τετραγώνου που να έχει το ίδιο εμβαδόν με δοθέντα κύκλο σημαίνει ότι, αν r είναι η ακτίνα του κύκλου και x είναι η ζητούμενη πλευρά του τετραγώνου, τότε ισχύει η σχέση $x^2 = \pi r^2$. Σήμερα ξέρουμε πως ο τετραγωνισμός του κύκλου, είναι ένα θεωρητικώς άλυτο πρόβλημα, αφού το μήκος της περιφέρειας και το εμβαδόν της επιφάνειας ενός κύκλου εξαρτώνται από την τιμή του π . Ο π όμως είναι ένας υπερβατικός αριθμός, δηλαδή δεν αποτελεί ρίζα ενός μη-μηδενικού πολυωνύμου με ρητούς συντελεστές. Αυτό έχει σαν συνέπεια ότι είναι αδύνατο να λυθεί το αρχαίο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη.

Ο Αρχιμήδης ήταν ο πρώτος που έδωσε μια μέθοδο υπολογισμού του π σε οποιοδήποτε βαθμό ακρίβειας. Η μεθοδός του έγκειται στο ότι η περίμετρος ενός κανονικού πολυγώνου η πλευρών εγγεγραμμένου σε κύκλο, είναι μικρότερη της περιφέρειας του κύκλου, και άρα και της περιμέτρου του περιγεγραμμένου πολυγώνου. Έτσι φτάνοντας σε πολύγωνο 96 πλευρών ο Αρχιμήδης περιόρισε την τιμή του π στο διάστημα

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε την προσέγγιση αυτή του π για να βρεί εμβαδά κυκλικών τμημάτων. Η μεγαλύτερη προσωπικότητα στην άλγεβρα που έπαιξε ρόλο στην ανάπτυξη αλγεβρικού λογισμού ανεξάρτητου της Γεωμετρίας ήταν αναμφίβολα ο Διόφαντος (250 μ.Χ), ο οποίος θεωρείται από πολλούς ο πατέρας της Άλγεβρας.

Στο βιβλίο του με όνομα “Αριθμητικά”, ένα από τα γνωστότερα επιστημονικά συγγράμματα, ο Διόφαντος παρουσιάζει μια σειρά προβλημάτων τα οποία και λύνει, με έναν τρόπο που παραπέμπει σε Άλγεβρα. Δηλαδή στα “Αριθμητικά” δεν συστηματοποίησε την υπάρχουσα γνώση, αλλά πρόσθεσε πολλά νέα στοιχεία που συνετέλεσαν στην απελευθέρωση της άλγεβρας από την Γεωμετρία. μία από τις σημαντικές συνεισφορές του Διόφαντου ήταν η μελέτη των εξισώσεων με περισσότερους από έναν αγνώστους, π.χ. $x^2 + y^2 = z^2$. Ο Διόφαντος πρώτος έθεσε το πρόβλημα να εξακριβωθεί αν μια τέτοια εξίσωση έχει κλασματικές λύσεις, δηλ. Ρητούς αριθμούς. Η δεύτερη μεγάλη πρόοδος στην Άλγεβρα που έγινε από τον Διόφαντο ήταν η ανακάλυψη του “αγνώστου x ” και η δημιουργία της εξίσωσης. Ο Διόφαντος στην θέση του x που χρησιμοποιούμε σήμερα, χρησιμοποιεί το σύμβολο s για να δηλώσει την άγνωστη ποσότητα. Τις διαδοχικές δυνάμεις του αγνώστου x που φτάνουν μέχρι και την έκτη δύναμη, τις ονομάζει “είδη”. Οι αριθμητικοί συντελεστές που δηλώνουν κάθε φορά το πλήθος των ειδών, γράφονται με το γνωστό αλφαβητικό αριθμητικό σύστημα και ακολουθούν την συντομογραφία του είδους. μερικοί από τους συμβολισμούς και τις συντομογραφίες του Διόφαντου είναι οι εξής: Το x^2 ονομάζεται και αναπαρίσταται με Δ^Y , το x^3 ονομάζεται κύβος και αναπαρίσταται με K^Y , το $\frac{1}{x}$ ονομάζεται αριθμόστον τετράγωνο και αναπαρίσταται με s^x , το $\frac{1}{x^2}$ ονομάζεται δυναμοστόν και αναπαρίσταται με Δ^{Yx} . Για παράδειγμα, όταν θέλει να συμβολίσει την παράσταση $3x^2 + 12$, την γράφει $\Delta^Y \gamma M \iota \beta$, όπου ο γ είναι ο 3, το $\iota \beta$ είναι ο 12 και το M δηλώνει ότι ακολουθεί καθαρός αριθμός που δεν περιέχει την άγνωστη μεταβλητή. Για την αφαίρεση χρησιμοποιεί το σύμβολο Λ , για το



Σχήμα 1.4: Η προσέγγιση του Αρχιμήδη στον υπολογισμό του π .

ίσον χρησιμοποιεί το σύμβολο $\iota\sigma$, ενώ για την πρόσθεση δεν χρησιμοποιεί σύμβολο, δηλώνει την πρόσθεση με απλή παράθεση των προσθετέων. Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι στην αρχαία Ελλάδα η Άλγεβρα πήρε την μορφή που την ξέρουμε σήμερα, λείπει όμως ο τελειοποιημένος αλγεβρικός συμβολισμός ικανού να εκφράσει αφηρημένες έννοιες καθώς και η ύπαρξη των αρνητικών αριθμών και του μηδενός.

1.4 Απειροστικός λογισμός

Με τον όρο *Λογισμό* εννοούμε την μαθηματική μελέτη των “αλλαγών” κατά τον ίδιο τρόπο που η γεωμετρία μελετά τα σχήματα και η άλγεβρα τις πράξεις και την εφαρμογή τους για την επίλυση των εξισώσεων. Ο Απειροστικός Λογισμός ασχολείται με τον λογισμό των απείρως μικρών αλλά και τον λογισμό των απείρως μεγάλων μαθηματικών αντικειμένων καθώς και με τα προβλήματα της συνέχειας και της ασυνέχειας. Αποτελεί έναν από τους πιο σημαντικούς κλάδους των μαθηματικών που όμως δύσκολα ανιχνεύονται οι ιστορικές του καταβολές. Τα πρώτα ίχνη του στην κλασσική εποχή ήταν άμεσα συνδεδεμένα με την Γεωμετρία (μήκος περιφέρειας, εμβαδά και όγκοι γεωμετρικών σχημάτων κ.λ.π). Σήμερα η αυστηρή θεμελίωση του απειροστικού λογισμού γίνεται με τα μαθηματικά του δυνητικού απείρου, δηλαδή άπειρες ολότητες αντικειμένων που μπορούν να εξετασθούν μόνο εσωτερικά μέσα από επιτρεπτές πράξεις του ορίου σαν κάτι που γεννιέται, που σχηματίζεται, με μια άπειρη διαδικασία χωρίς να επιτυγχάνεται ποτέ η ταύτιση. Ο Απειροστικός Λογισμός σήμερα αποτελείται από δύο κλάδους, τον διαφορικό λογισμό που ασχολείται με τη μελέτη των ρυθμών μεταβολής των ποσοτήτων και τον ολοκληρωτικό λογισμό που αποτελείται από μαθηματικές ενότητες, άρρηκτα συνδεδεμένες με τη μέτρηση του εμβαδού επιφανειών, τον υπολογισμό όγκων, την εύρεση εξισώσεων καμπυλών και την λύση διαφορικών εξισώσεων. Η έννοια του απείρου απασχολούσε και απασχολεί και σήμερα την ανθρώπινη νόηση. Η αδυναμία της ανθρώπινης διάνοιας να καθορίσει το άπειρο ποσοτικά και ποιοτικά οδήγησε σε εντυπωσιακά παράδοξα, η ανάλυση των οποίων συνέβαλε στην εξέλιξη και ανάπτυξη της επιστήμης των μαθηματικών. Η αρχαιότερη γνωστή αντίληψη του απείρου εμφανίζεται στην Yajur Veda, μια αρχαία ινδική γραφή σύμφωνα με την οποία, αν αφαιρέσουμε ένα μέρος από το άπειρο ή προσθέσουμε ένα μέρος στο άπειρο, αυτό που θα μείνει είναι πάλι το άπειρο. Η πρώτη καταγεγραμμένη ιδέα του απείρου από έλληνες φιλοσόφους και μαθηματικούς προέρχεται από τον Αναξίμανδρο (610-545 π.Χ.), μαθητή και διάδοχο του Θαλή στη σχολή της μιλήτου που υποστήριζε ότι η αρχή των όντων ήταν το άπειρο, το οποίο όριζε ως ουσία χωρίς όρια, μορφή ή ιδιότητες. Το αν υπάρχει το άπειρο ως πραγματικό μέγεθος ή όχι απασχόλησε έντονα και τους φιλόσοφους και μαθηματικούς την εποχή των Πυθαγορείων. Όταν οι Πυθαγόριοι (Ίππασος ο μεταπόντιος (450 π.Χ.)) ανακάλυψαν την ασυμμετρία, εισήγαγαν το άπειρο στα μαθηματικά θεωρώντας ότι υπάρχουν γεωμετρικά μεγέθη αποτελούμενα από απείρως μικρά τμήματα των οποίων ο αριθμός είναι άπειρος. Τα ερωτήματα που τους απασχολούσαν ήταν: Υπάρχει το υπέρτατο άπειρο πέραν του οποίου τίποτα μεγαλύτερο δεν μπορεί να υπάρξει ή μήπως τα άπειρα δεν τελειώνουν ποτέ; μπορούμε να τα ταξινομήσουμε, μπορούμε δηλαδή να κάνουμε λόγο για μικρότερα ή μεγαλύτερα άπειρα; Η έννοια του απείρου είναι συναφής προς τις έννοιες της συνέχειας και της ασυνέχειας. Στην Ελληνική αρχαιότητα είχαν αναπτυχθεί δύο σχολές σκέψης χρησιμοποιώντας μία από τις δύο αυτές υποθέσεις. Η έννοια του συνεχούς εμφανίζεται στα κείμενα του Παρμενίδη στα *Περί φύσεως* 8 1-6, 22-25 και του Αριστοτέλη στα *φυσικά*, 200b, 17-20. Είναι αξιοσημείωτο ότι για τον Αριστοτέλη το άπειρο και το συνεχές είναι ουσιαστικά συναρτημένα. Για τον Αναξαγόρα, το πιο ουσιαστικό χαρακτηριστικό του συνεχούς μπορεί να περιγραφεί με τον ακόλουθο τρόπο: “μεταξύ των μικρών, δεν υπάρχει το ελάχιστο, αλλά - πάντα - κάτι μικρότερο. Γιατί ό,τι είναι δεν παύει να είναι όσες φορές και αν υποδιαιρεθί” (H. Weyl, (1963)). Η άποψη αυτή του Αναξαγόρα υπονοεί την ιδιότητα της πυκνότητας που αποδίδεται στη σύγχρονη ιδέα για το συνεχές. Στα μοντέρνα μαθηματικά τα βασικά χαρακτηριστικά του συνεχούς είναι η ιδιότητα της πυκνότητας (μεταξύ δύο σημείων του συνεχούς υπάρχει μια πυκνή απειρία άλλων σημείων) και σε κάθε σημείο του συνεχούς δεν υπάρχει επόμενο σημείο. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε ένα διάστημα, η ιδιότητα της πυκνότητας μας επιτρέπει να πούμε ότι μία ακολουθία υποδιαστημάτων φθίνοντος μεγέθους, τείνει στο μηδέν. μια εφαρμογή της αρχής της συνέχειας

η οποία είναι μεγίστης σημασίας για την γένεση των άπειρων διαδικασιών είναι η μέθοδο της ανθυφαίρεσης του Θεαίτητου και οι θεωρίες των αναλογιών και της εξάντλησης του Εύδοξου. Ο Θεαίτητος εισήγαγε τη βασική μέθοδο της ανθυφαίρεσης και έκανε μεγάλες προόδους στη θεωρία των αριθμών και στη μελέτη των αρρήτων αναλογιών. Όμως αυτός που τελικά κατάφερε να ξεπεράσει την κρίση των «αρρήτων» αναλογιών που είχε φέρει πρόσκαιρα τα μαθηματικά σε τέλμα ήταν ο Εύδοξος. Γιατί όπως τονίσαμε και στην παράγραφο 1.2, αυτό που έκανε ουσιαστικά ο Εύδοξος ήταν να εισαγάγει την θεωρία των λόγων που συνδέεται άρρηκτα με την αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών με τις τομές Dedekind. Στον εύδοξο επίσης αποδίδεται η πρώτη χρήση της εξάντλησης που στηρίχτηκε στην αρχή που παρουσιάζεται στο βιβλίο Χ των στοιχείων του Ευκλείδη. Ας δούμε πως εφαρμόζονταν η μέθοδος της εξάντλησης για ένα από τα μαθηματικά προβλήματα που αντιμετώπιζαν οι μαθηματικοί στην αρχαία εποχή και ήταν το εξής: *Είναι δυνατόν να έχουμε άθροισμα με άπειρους προσθετέους και να πάρουμε αποτέλεσμα έναν πεπερασμένο πραγματικό αριθμό;* μερικές φορές αυτό είναι δυνατόν, για παράδειγμα έστω

$$\Sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots$$

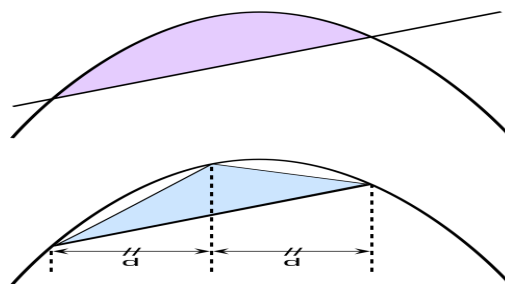
ένα άθροισμα με άπειρους προσθετέους. Ο Αρχιμήδης (287 - 212 π.Χ) , χρησιμοποιώντας την μέθοδο της εξάντλησης του Ευδόξου (περίπου το 400 π.Χ) έδωσε απάντηση ως εξής: 'Εστω AB ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους μιας μονάδας για το οποίο υποθέτουμε ότι θέλουμε να μοιράσουμε σε τρία άτομα. Κόβουμε το τμήμα AB σε τρία κομμάτια και δίνουμε σε κάθε έναν από ένα κομμάτι. Έτσι ο καθένας θα πάρει το 1/4 και θα περισσέψει και ένα κομμάτι από τα τέσσερα. Το κομμάτι που περισσεύει το κόβουμε πάλι σε τέσσερα κομμάτια, δίνουμε σε κάθε έναν από ένα δηλαδή δίνουμε το 1/4 του 1/4 άρα το 1/16 και περισσεύει το ένα κομμάτι, και συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να εξαντληθεί το ευθύγραμμο τμήμα. Με αυτό τον τρόπο κατασκευάζουμε το άπειρο άθροισμα προσθετέων Σ . Όμως επειδή το κάθε άτομο θα πάρει σαν μερίδιο το $\frac{1}{3}$ του

ευθύγραμμου τμήματος, συμπεραίνουμε $\Sigma = \frac{1}{3}$. με την μέθοδο της εξάντλησης ο Αρχιμήδης μπόρεσε να προσεγγίσει την τιμή του αριθμού π στο *Κύκλου μέτρησης* (βλ. Εικόνα 1.4). Αυτό το έκανε παίρνοντας ένα κανονικό εξάγωνο περιγεγραμμένο στον κύκλο και ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στο κύκλο και προοδευτικά διπλασιάζοντας τον αριθμό των πλευρών και στα δύο κανονικά πολύγωνα, υπολόγιζε το μήκος της πλευράς κάθε πολυγώνου σε κάθε βήμα. Καθώς ο αριθμός των πλευρών αυξάνεται, γίνεται μια πιο ακριβής προσέγγιση του κύκλου.

μετά από τέσσερα τέτοια βήματα, όταν τα πολύγωνα είχαν από 96 πλευρές το καθένα, ήταν σε θέση να προσδιορίσει ότι η τιμή του π βρισκόταν ανάμεσα στο 31/7(περίπου 3.1429) και 310/71(περίπου 3.1408) εντός των ορίων αφού η τιμή προσεγγιστικά είναι 3.1416. Ο Αρχιμήδης μπορούσε να χρησιμοποιήσει τα απειροελάχιστα με τρόπο παρόμοιο με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό, μπορούσε να δώσει απαντήσεις σε προβλήματα έως ένα αυθαίρετο βαθμό ακρίβειας, χρησιμοποιώντας την εις άτοπον απαγωγή.

Γενικότερα, ο Αρχιμήδης επεξεργάστηκε μεθόδους για την εύρεση εμβადών και όγκων, βελτιώνοντας την μέθοδο της εξάντλησης στην αυστηρή απόδειξη των αποτελεσμάτων του. Οι μέθοδοί του αποτελούν τα θεμέλια του ολοκληρωτικού λογισμού για τη δημιουργία του οποίου χρειάστηκαν να περάσουν είκοσι αιώνες.

μία άλλη σχολή σκέψης, πέραν της πλατωνικής σχολής η οποία δέχεται την ιδέα της συνεχείας, είναι η σχολή του Δημόκριτου του Αβδηρίτη (460-370 π.Χ) και των μαθητών του, που απορρίπτει την ιδέα της συνεχείας και βασίζεται στην περίφημη θεωρία των *ατιμήτων* (ατόμων). Ο



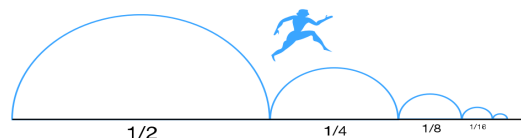
Σχήμα 1.5: Η προσέγγιση του Αρχιμήδη στον υπολογισμό του π .

Δημόκριτος (460-370 π.Χ) γεννήθηκε στα Άβδηρα της Θράκης και ήταν μαθη- τής του Λεύκιππου. Σύμφωνα με την θεωρία του η ύλη αποτελείτο από αδιάσπαστα και αόρατα στοιχεία, τα άτομα. Ήταν ανάμεσα στους πρώτους που είπαν ότι ο Γαλαξίας είναι το φως από μακρινά αστέρια και ότι το σύμπαν έχει και άλλους κόσμους. Ο Δημόκριτος ξεκαθάριζε ότι το κενό δεν ταυτίζεται με το τίποτα, είναι δηλαδή κάτι το υπαρκτό. Σύμφωνα με τον Σιμπλίκιο (Περί ούρανοῦ 242,18 (DK 67a 14)), ο Λεύκιππος, ο Δημόκριτος και ο Επίκουρος έλεγαν ότι οι πρώτες αρχές των όντων είναι άπειρες στο πλήθος, και πίστευαν ότι είναι άτομες, αδιαίρετες, συμπαγείς και ότι δεν έχουν καθόλου κενό μέσα τους. Από τα παραπάνω καταλήγουμε, στο ότι πραγματικό θεωρείται αυτό που είναι σωματικό ή στερεό και εξισώνεται με το πλήρες, αποκλείοντας έτσι το κενό ή τα οποιαδήποτε μεσοδιαστήματα. Σύμφωνα με αυτή την θεωρία, στην περίπτωση που ο χώρος και ο χρόνος είναι κβαντισμένα μεγέθη (δηλ. όταν δεχόμαστε ότι υπάρχουν ελάχιστα και αδιαίρετα στοιχεία, κβάντα του χώρου και του χρόνου), η διαδικασία των υποδιαίρεσεων ενός μεγέθους σύντομα φθάνει σε ένα τέλος με το φτάσιμο στο κβάντο αυτού του μεγέθους. Είναι φανερό ότι η θεωρία της σχολής του Δημόκριτου του Αβδηρίτη για το άτομο και το κενό αντιπαράτίθεται στο πραγματικό *ὄν* του Παρμενίδη και στην ιδέα της συνέχειας.

Ο Ζήνων ο Ελεάτης, ένας σημαντικός προσωκρατικός φιλόσοφος τον οποίο ο Αριστοτέλης αποκαλούσε εφευρέτη της διαλεκτικής μεθόδου, με τα περίφημα παράδοξα της Διχοτομίας, του Αχιλλέα με τη χελώνα, του Βέλους και του Σταδίου αποκάλυψε το χάσμα ανάμεσα στο συνεχές και το διακριτό, κάτι που θα γίνει κατανοητό και θα μελετηθεί απο τον Cantor πολλούς αιώνες αργότερα με την αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων. Ο μπέρτραντ Ράσελ πολλούς αιώνες αργότερα περιέγραψε τα τέσσερα παράδοξά του Ζήνωνα ως ασύγκριτα διακριτικά και βαθιά. Για παράδειγμα, το *παράδοξο της διχοτόμησης του Ζήνωνα* αναφέρεται σε ενα δρομέα που ξεκινά με σκοπό να φτάσει στο τέρμα του στίβου.

Όμως για να φτάσει στο τέρμα θα πρέπει να τρέξει άπειρο αριθμό από διαδρομές που προστίθενται η μία στην άλλη, και κάθε μια είναι το μισό της προηγούμενης. Και βάσει αυτού του παραδείγματος συμπέρανε ότι το άθροισμα ενός απείρου αριθμού ορισμένων χρονικών διαστημάτων οφείλει να είναι άπειρο. Αυτή η πρόταση βέβαια ισχύει σε πολλές περιπτώσεις, αλλά όχι πάντα. Ας υποθέσουμε για παράδειγμα στην Εικόνα ?? ότι η απόσταση που πρέπει να διανύσει ο δρομέας είναι δύο μονάδες μήκους και η ταχύτητά του είναι 1 μονάδα μήκους ανα λεπτό. Τότε το μισό της απόστασης θα διανυθεί σε χρόνο $t_1 = 1$ μονάδα μήκους, το μισό της υπόλοιπης απόστασης σε χρόνο $t_2 = \frac{1}{2}$ μονάδες μήκους, κ.τ.λ. Έτσι ο χρόνος T που απαιτείται να διανυθεί η συγκεκριμένη απόσταση απο τον δρομέα δίνεται απο την σειρά $T = t_1 + t_2 + \dots t_n + \dots$,

δηλαδή $T = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$. Έτσι παίρνουμε μια απλή γεωμετρική πρόοδο η οποία, αθροίζοντας τους όρους δίνει άθροισμα 2. Με αυτήν την έννοια, ο δρομέας θα διανύσει ακριβώς την απαιτούμενη απόσταση. Ωστόσο, και πάλι, δεν καταρρίψαμε το επιχείρημα του Ζήνωνα διότι αν και ο χρόνος δεν είναι άπειρος η ίδια η γεωμετρική πρόοδος είναι άπειρη. Με το παράδειγμα αυτό οδηγούμαστε στην έννοια της συγκλίνουσας άπειρης σειράς. Σύμφωνα με πολλούς ιστορικούς και μεταγενέστε- ρους φιλόσοφους τα επιχειρήματα του Ζήνωνα αποτελούν την απαρχή μιας διανοητικής πορείας που διαιωνίστηκε μέσα από την δύναμη του πλατωνικού λόγου και αποκάλυψε τη σύγκρουση και το χάσμα ανάμεσα στο συνεχές και το διακριτό που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά, τη φιλοσοφία, ακόμα και τη φυσική.



Σχήμα 1.6: Το παράδοξο της διχοτόμησης του Ζήνωνα .

και $\gamma_v = 2\gamma_{v+1} + \gamma_{v+2}$ με $\gamma_{v+2} < \gamma_{v+1}$.

Η $\text{Ανθ}(\delta, \alpha) = [1, 2, 2, 2, \dots]$ μεταφράζεται σε μορφή συνεχούς κλάσματος ως εξής:

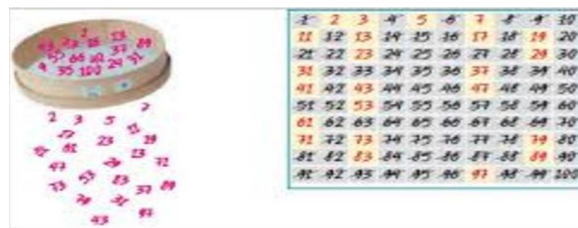
$$\sqrt{2} = \frac{\delta}{\alpha} = 1 + \frac{\gamma_1}{a} = 1 + \frac{1}{\frac{a}{\gamma_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_2}}} =$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + (\dots)}}}}$$

Δηλαδή το 2 επαναλαμβάνεται στο διηλεκές ήτοι $\text{ανθ}(\delta, \alpha) = [1, 2, 2, 2, \dots]$

Ένας άλλος από τους αρχαιότερους γνωστούς αλγορίθμους είναι το *κόσκινο του Ερατοσθένη*, που αποδίδεται στον Έλληνα φιλόσοφο και αστρονόμο Ερατοσθένη (276-194 π.Χ.) στην *Εισαγωγή στην Αριθμητική* του Νικόμαχου.

Το κόσκινο του Ερατοσθένη είναι ένας αλγόριθμος για την εύρεση όλων των πρώτων αριθμών (πρώτος λέγεται κάθε αριθμός που διαιρείται μόνο με τον εαυτό του και τη μονάδα) σε ένα εύρος τιμών από 2 έως N , όπου N φυσικός αριθμός. Πιο συγκεκριμένα, για την εύρεση όλων των πρώτων αριθμών μικρότερων ή ίσων του N , ξεκινάμε με τον μικρότερο θετικό ακέραιο (εκτός του 1) και κάθε φορά διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσιά του και επαναλαμβάνουμε με τον επόμενο μικρότερο θετικό ακέραιο. Για παράδειγμα, αν $N = 50$ τότε σε έναν πίνακα γράφουμε όλους τους ακέραιους αριθμούς από το 1 έως το 50.



Σχήμα 1.7: Το κόσκινο του Ερατοσθένη

Στη συνέχεια αφήνουμε τον αριθμό 2 και διαγράφουμε όλα τα πολλαπλάσια του το 2, το 4, το 6 κτλ, διότι όλοι αυτοί οι αριθμοί ως πολλαπλάσια του 2 δεν είναι πρώτοι. μετά επαναλαμβάνουμε το ίδιο με τον αριθμό 3, που είναι ο επόμενος μικρότερος αριθμός που δεν έχει διαγραφεί. Διαγράφουμε δηλαδή όλα τα πολλαπλάσια του 3. Συνεχίζουμε με αυτόν τον τρόπο το «κοσκίνισμα» διαγράφοντας κάθε φορά όλα τα πολλαπλάσια του μικρότερου αριθμού που δεν έχει διαγραφεί. Έτσι βρίσκουμε όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι του 50. Είναι προφανές ότι η παραπάνω διαδικασία δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε όλο το σύνολο των φυσικών αριθμών, αλλά σε ένα υποσύνολο της μορφής $\{2, 3, 4, 5, \dots, N\}$ όπου N οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός. Η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού αποτελεί την αντίστροφη πράξη του τετραγωνισμού του. Ο υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός ακεραίου απασχόλησε τους αρχαίους Έλληνες γεωμέτρες και η αναζήτηση λύσεων, οδήγησε σε ανάπτυξη αλγορίθμων για τον υπολογισμό τους. Ο πρώτος αριθμός που ανακαλύφθηκε χωρίς να είναι ρητός, πιθανότατα από τον Πυθαγόρειο φιλόσοφο Ίπασσο, είναι η τετραγωνική ρίζα του 2. Υπάρχουν δύο γνωστοί αλγόριθμοι από την αρχαιότητα για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός ακεραίου, του Θέωνος του Αλεξανδρέως (335-405) και του Ήρωνα του Αλεξανδρέως (300 - 230 π.Χ.). Ο Ήρων στα «Γεωμετρικά» προβλήματα 30, 31 και «Γεωδαισία» πρόβλημα 12 δίνει μία αλγοριθμική διαδικασία για τη μέτρηση του εμβαδού τριγώνου με πλευρές μήκους 7, 8, 9. Αυτό γίνεται ως εξής: (1) Χρησιμοποιεί τον ομώνυμο «Τύπου του Ήρωνα» για τη μέτρηση του εμβαδού τριγώνου από τις πλευρές του και βρίσκει ότι

$$E = \sqrt{\tau(\tau-7)(\tau-8)(\tau-9)} = \sqrt{720}, \quad \tau = \frac{7+8+9}{2} = 12.$$

(2) Προχωρά στην προσέγγιση της $\sqrt{720}$ αναπτύσσοντας έναν αλγόριθμο που βασίζεται στα ακόλουθα βήματα:

(i) Επειδή η τετραγωνική ρίζα του $N = 720$ είναι άρρητος επιλέγουμε τον πλησιέστερο τετράγωνο αριθμό προς το 720, ο οποίος είναι ο $729 = 27^2 = \alpha^2 > N = 720$.

(ii) Διαιρούμε τον 720 με το 27, από το οποίο προκύπτει $\frac{N}{\alpha} = 26 + \frac{2}{3}$.

(iii) Προσθέτουμε στο $\frac{720}{27}$ το 27 οπότε έχουμε $\frac{N}{\alpha} + \alpha = 26 + \frac{2}{3} + 27 = 53 + \frac{2}{3}$.

(iv) Στον αριθμό που προκύπτει παίρνουμε τον μισό, δηλαδή

$$\frac{1}{2}\left(\frac{N}{\alpha} + \alpha\right) = \frac{1}{2}\left(26 + \frac{2}{3} + 27\right) = \frac{1}{2}\left(53 + \frac{2}{3}\right) = 26 + \frac{5}{6} = \alpha_1 \cong \sqrt{N}.$$

Βλέπουμε ότι η διαφορά $a_1^2 - N = 720 + \frac{1}{36} - 720 = \frac{1}{36}$. Αν τώρα θέλουμε η διαφορά $\frac{1}{36}$ να γίνει ακόμη μικρότερη, τότε αντί του 729 στο βήμα (i) θα θεωρούμε την τιμή $720 + \frac{1}{36}$ και επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία θα βρούμε

$$\sqrt{N} = a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{\alpha_1} + \alpha_1\right)$$

με $\alpha_1 < \frac{1}{36}$.

με την σύγχρονη ορολογία, θα λέγαμε ότι η προσεγγιστική μέθοδος μέσω του αλγόριθμου του Ήρωνα δίνεται μέσω της ακολουθίας με αναδρομικό τύπο

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{N}{\alpha_n} + \alpha_n\right)$$

και $\alpha_1 = \alpha$. Η γενική μορφή του αλγόριθμου του Ήρωνα δόθηκε 1800 χρόνια αργότερα από τους Isaac Newton και Joseph Raphson και αποτελεί μία από τις καλύτερες μεθόδους διαδοχικών προσεγγίσεων για την προσεγγιστική εύρεση των ριζών μιας πραγματικής συνάρτησης.

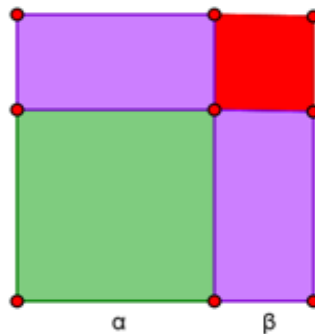
Ο αλγόριθμος του Θέωνος του Αλεξανδρέως, για τον υπολογισμό της τετραγωνικής ρίζας ενός ακεραίου, βασίζεται στο Θεώρημα 4 του Βιβλίου II των Στοιχείων του Ευκλείδη που λέει ότι: *Εάν ευθεία AB τμηθεί σε τυχαίο σημείο Γ, τότε το τετράγωνο πλευράς AB είναι ίσον με το άθροισμα των τετραγώνων πλευρών ΑΓ και ΓΒ και το διπλάσιον ορθογώνιον το περιεχόμενον υπό των αντιστοίχων τμημάτων.*

Το θεώρημα αυτό στην αλγεβρική του εκδοχή εκφράζει την γνωστή ταυτότητα

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta,$$

όπου α, β νοούνται μήκη ευθυγράμμων τμημάτων. Ο θέωνας ο Αλεξανδρέως φημίζεται για τα σχόλιά του σε πολλά έργα όπως το “*μαθηματική Σύνταξις*” (η διαδεδομένη μετάφραση του έργου αυτού στα αραβικά αναφέρεται ως *Almagest*) του Κλαύδιου Πτολεμαίου, ο οποίος αναφέρεται στο Θεώρημα 4 του Βιβλίου II των “Στοιχείων” και δίνει κατ’αρχήν έναν αλγόριθμο εύρεσης του $\sqrt{144} = S$, παρόλο που γνώριζε το αποτέλεσμα.

Τα βήματα που ακολούθησε ήταν τα εξής: (i) Επιλέγουμε έναν ακέραιο α του οποίου το τετράγωνο είναι μικρότερο του 144, έστω $\alpha = 10$. (ii) Αφαιρούμε το $\alpha^2 = 100$ από το $S^2 = 144$



Σχήμα 1.8: Θεώρημα 4 του Βιβλίου II των “Στοιχείων του Ευκλείδη”

και έχουμε $S^2 - \alpha^2 = 144 - 100 = 44$. (iii) Πολλαπλασιάζουμε το $\alpha = 10$ με το 2, διότι έχουμε δύο ορθογώνια. (iv) Διαιρούμε το 44 με το 20 και παίρνουμε 2 με υπόλοιπο 4. (v) Το 4 είναι το δεύτερο τετράγωνο του οποίου η ρίζα είναι το $2 = \beta$. (vi) Επομένως $\sqrt{144} = (10 + 2) = 12$, δηλαδή:

$$\frac{S^2 - \alpha^2}{2\alpha} = \beta + \frac{\beta^2}{2\alpha} \iff S^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 = (10 + 2)^2 \iff S = (10 + 2).$$

με την ίδια λογική ο θέωνας επεξεργάζεται στο εξηνταδικό σύστημα και την εύρεση μιας προσέγγισης του $\sqrt{4500}$ που είναι άρρητος. Η απόδειξη αυτή δίνεται αναλυτικά στο [Health, 51, pp. 60-63] ως εξής:

Επιλέγουμε το 67 για το οποίο έχουμε $67^2 = 4489 < 4500$ και θέτουμε

$$\sqrt{4500} = 67 + \frac{x}{60} + \frac{y}{60^2}.$$

Τότε

$$4500 = 4489 + \left(\frac{x}{60} + \frac{y}{60^2}\right)^2 + 2 \cdot 67 \cdot \left(\frac{x}{60} + \frac{y}{60^2}\right),$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$11 = \frac{x^2}{60^2} + \frac{y^2}{60^4} + \frac{8y}{60^3} + \frac{134y}{60^2}.$$

Επιλέγουμε ένα x έτσι ώστε $\frac{134y}{60^2} < 11$. Για $x = 4$ έχουμε

$$\frac{7424}{60^2} = \frac{16}{60^2} + \frac{y^2}{60^4} + \frac{8y}{60^3} + \frac{536}{60} + \frac{134y}{60^2}.$$

Αν επιλέξουμε y τέτοιο ώστε $\frac{y}{60^2} \cong 0$, τότε

$$7424 \cong y \frac{8 + 60 \cdot 134}{60} \text{ το οποίο συνεπάγεται ότι } y \cong 55 + \frac{165}{503}.$$

Επιλέγοντας $y \cong 55$ έχουμε

$$\sqrt{4500} \cong 67 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2}$$

που είναι και η προσέγγιση που εμφανίζεται στο Almagest I. 10.

1.5.2 Κρυπτογραφία

Η λέξη κρυπτογραφία (cryptography) προέρχεται από τις λέξεις *κρύπτω* και *γράφω*, που σημαίνουν «κρύβω αυτά που γράφω». Από τα αρχαία χρόνια, η ασφάλεια στη μεταφορά δεδομένων ήταν ένα από τα βασικά θέματα που απασχολούσαν τον άνθρωπο. Η προστασία των μηνυμάτων από μη εξουσιοδοτημένους παραλήπτες επιτυγχανόταν με την απόκρυψη των δεδομένων, καθιστώντας τα “μη-αναγνώσιμα” σε όποιον δεν έπρεπε να έχει πρόσβαση. Ωστόσο, ήταν εξίσου σημαντικό η κωδικοποίηση της πληροφορίας να είναι τέτοια που ο επιθυμητός παραλήπτης, για τον οποίο προορίζεται το μήνυμα, να μπορεί να το διαβάσει. Ο Πλούταρχος, στο έργο του Παράλληλοι Βίοι και συγκεκριμένα στο βιβλίο για τον Λύσανδρο (19.5), καταγράφει σημαντικές λεπτομέρειες σχετικά με τη χρήση αρχαίων τεχνολογιών επικοινωνίας και κρυπτογραφίας. Μέσα από αυτές τις περιγραφές, προσφέρει μια σαφή εικόνα του πώς οι αρχαίοι

Έλληνες αξιοποιούσαν διαθέσιμες τεχνικές για την ασφάλεια στρατιωτικών πληροφοριών και την ταχεία επικοινωνία σε μεγάλες αποστάσεις. Με τη μαρτυρία του Πλούταρχου, γίνεται φανερό ότι οι αρχαίοι Έλληνες είχαν αναπτύξει έναν προηγμένο τρόπο σκέψης σχετικά με την επικοινωνία και την κρυπτογράφηση, που αποτελεί τις βάσεις της σύγχρονης επιστημονικής κρυπτογραφίας. Οι στρατιωτικές αυτές τεχνικές επικοινωνίας εξελίχθηκαν με την πάροδο των αιώνων και δείχνουν τη μακρόχρονη πορεία των επικοινωνιακών στρατηγικών από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Στις μέρες μας, η Κρυπτογραφία αποτελεί έναν επιστημονικό κλάδο με τεράστια σημασία, ειδικά στους τομείς της ασφάλειας των υπολογιστικών συστημάτων και των επικοινωνιών. Η συνεισφορά της είναι εξαιρετικά σημαντική, καθώς παρέχει τα απαραίτητα εργαλεία για την προστασία των πληροφοριών από μη εξουσιοδοτημένη πρόσβαση. Γι' αυτόν τον λόγο, η κρυπτογραφία είναι κεντρικό αντικείμενο μελέτης στα εφαρμοσμένα μαθηματικά και στην επιστήμη των υπολογιστών. Ορίζεται ως η επιστήμη που ασχολείται με τη μελέτη, την ανάπτυξη και τη χρήση τεχνικών κρυπτογράφησης και αποκρυπτογράφησης, με σκοπό την προστασία και την αποκρυψη του περιεχομένου των μηνυμάτων. Η κρυπτογραφία έχει βαθιές ρίζες στην ιστορία και χρησιμοποιείται ως τεχνική ασφαλούς επικοινωνίας από την αρχαιότητα.

μια από τις πρώτες τεχνικές κρυπτογράφησης ήταν η *κρυπτεία σκυτάλη* και χρησιμοποιήθηκε από τους Λακεδαιμόνιους ήδη από τον 7ο αιώνα π.Χ. για την ασφαλή αποστολή στρατηγικών μηνυμάτων. Η πρώτη ιστορική αναφορά στη χρήση της σκυτάλης ως κρυπτογραφική μέθοδος εμφανίζεται στα έργα του αρχαίου Έλληνα λυρικού ποιητή Αρχίλοχου. Η σκυτάλη αποτελούνταν από μια λεπτή ταινία κατεργασμένου δέρματος, πλάτους περίπου 3 χιλιοστών, η οποία τυλιγόταν γύρω από έναν κυλινδρικό ξύλινο ράβδο συγκεκριμένης διαμέτρου. Ο αποστολέας έγραφε το μήνυμα κατά μήκος της ταινίας, ενώ αυτή ήταν τυλιγμένη στο ξύλο. Όταν η ταινία ξετυλιγόταν, τα γράμματα εμφανίζονταν διάσπαρτα και το μήνυμα γινόταν δυσανάγνωστο. Ο δέκτης μπορούσε να ανασυνθέσει το μήνυμα μόνο εάν είχε μια σκυτάλη της ίδιας διατομής, ώστε να τυλίξει ξανά την ταινία και να διαβάσει το κείμενο στην ορθή του διάταξη.



Σχήμα 1.9: Κρυπτεία σκυτάλη

Η πρώτη ιστορική αναφορά στην κρυπτογραφία της σκυτάλης εμφανίζεται στα γραπτά του αρχαίου Έλληνα λυρικού ποιητή Αρχίλοχου. Στο έργο του «Ποιήματα και θρύψαλα» εντοπίζεται μια περιγραφή της σκυτάλης ως μέσου επικοινωνίας, το οποίο χρησιμοποιούσαν οι Σπαρτιάτες για την ασφαλή αποστολή στρατιωτικών πληροφοριών. Η αναφορά αυτή υποδεικνύει ότι η σκυτάλη δεν ήταν απλώς ένα εργαλείο επικοινωνίας, αλλά μια από τις πρώτες γνωστές τεχνικές κρυπτογράφησης στην αρχαιότητα.

Αρχίλοχος - “Ποιήματα και θρύψαλα.”

Ἐρέω τιν' ὑμῖν αἶνον, ὦ Κηρυκίδη, ἀχνυμένη σκυτάλη· πίθηκος ἦι θηρίων ἀποκριθεὶς
μοῦνος ἂν' ἐσχάτην· τῷ δ' ἄρ' ἁλώπηξ κερδαλέη συνήντετο πυκνὸν ἔχουσα νόον.

Ένα από τα πιο γνωστά μηνύματα που στάλθηκαν μέσω σκυτάλης αναφέρεται στην απελπιστική κατάσταση των Σπαρτιατών μετά την ήττα τους στη ναυμαχία της Κυζίκου κατά τη διάρκεια του Πελοποννησιακού Πολέμου. Ο Λακεδαιμόνιος αντιναύαρχος Ιπποκράτης έστειλε ένα διάσημο μήνυμα στη Σπάρτη μετά από μια καταστροφική ήττα στη ναυμαχία της Κύζικου. Η κατάσταση των Σπαρτιατών ήταν απελπιστική, και η ανάγκη να ενημερωθεί άμεσα η Σπάρτη οδήγησε τον Λακεδαιμόνιο στρατηγό Ιπποκράτη να συντάξει ένα εξαιρετικά σύντομο και χαρακτηριστικά λιτό μήνυμα, που έγινε υπόδειγμα λακωνικής έκφρασης. Το περιεχόμενο της επιστολής ήταν:

Ιπποκράτης - Σπαρτιάτης στρατηγός

‘Έρρει τα καλά. Μίνδαρος απεσσύα. Πεινώντι τώνδρες. Απορίομες τι χρη δραν.

Το οποίο μεταφράζεται ως: Πάνε τα καράβια! Ο μίνδαρος πέθανε! Οι άνδρες πεινούν! Δεν ξέρουμε τι να κάνουμε! Η απλότητα αλλά και η αποτελεσματικότητά της σκυτάλης την καθιστούν ένα μοναδικό παράδειγμα αρχαίας τεχνολογίας κρυπτογράφησης, με χρήση τεχνικών που βρίσκουν αντιστοιχίες και στη σύγχρονη εποχή.

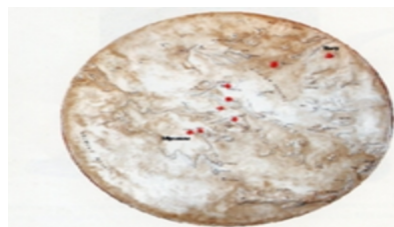
Ένας άλλος αξιοσημείωτος τρόπος γρήγορης και αποτελεσματικής αναμετάδοσης πληροφοριών στην αρχαιότητα ήταν ο ακουστικός τηλέγραφος του μεγάλου Αλεξάνδρου. Αυτό το εργαλείο χρησιμοποιούνταν για την ενίσχυση και μετάδοση ήχων σε μεγάλες αποστάσεις, επιτρέποντας τη γρήγορη και συντονισμένη επικοινωνία μέσα στον στρατό του Αλεξάνδρου. Ο ακουστικός τηλέγραφος είχε σχήμα παρόμοιο με κέρας ζώου ή με τρομπέτα και λειτουργούσε ως ενισχυτής της φωνής ή άλλων ηχητικών σημάτων. Το συγκεκριμένο σχήμα βοηθούσε στην κατεύθυνση και στην ενίσχυση του ήχου μέσω αντήχησης, με αποτέλεσμα την πολλαπλή αύξηση της έντασής του. Η κατασκευή του περιλάμβανε ένα μεγάλο, κυκλικό ηχητικό κέρας, το οποίο ήταν αναρτημένο σε τρίποδο ύψους περίπου τεσσάρων μέτρων. Το τρίποδο αυτό επέτρεπε στο κέρας να περιστρέφεται σε όλες τις κατευθύνσεις, διαδίδοντας το σήμα σε ακτίνα έως και 4 χιλιομέτρων. Η αντήχηση και η ανάλυση του ήχου στο εσωτερικό του κεράτος ενίσχυαν το σήμα, επιτρέποντας στο μήνυμα να φτάνει καθαρά και σε μεγάλες αποστάσεις.

Ο ακουστικός τηλέγραφος του Αλεξάνδρου ήταν ένα από τα πρώτα παραδείγματα τεχνολογίας ενίσχυσης ήχου για στρατιωτικούς σκοπούς και αποδείχθηκε εξαιρετικά χρήσιμο για τον συντονισμό των στρατευμάτων του. Αποτελεί μια καινοτομία της αρχαιότητας που δείχνει πώς οι αρχαίοι Έλληνες αξιοποιούσαν τις φυσικές ιδιότητες του ήχου για να εξυπηρετήσουν τις επικοινωνιακές και στρατηγικές ανάγκες τους.

μια άλλη μέθοδος επικοινωνίας που θυμίζει τον πρόγονο της κρυπτογραφίας ήταν οι φρυκτωρίες. Οι φρυκτωρίες, από τις λέξεις “φρυκτός = πυρσός” και “ώρα = φροντίδα”, αναφέρονται σε μια συστηματική μέθοδο αποστολής προσυμφωνημένων μηνυμάτων στην αρχαιότητα. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιούσε τη φωτιά για τη μετάδοση μηνυμάτων σε μεγάλες αποστάσεις σε σύντομο χρόνο, κατά τη διάρκεια στρατιωτικών επιχειρήσεων για τη μετάδοση διαταγών και κρίσιμων πληροφοριών. Το πλήθος των μηνυμάτων που μπορούσαν να μεταδοθούν μέσω των φωτεινών σημάτων επιβεβαιώνεται και από τον μύθο, όπου η μήδεια υψώνει πυρσό για να ειδοποιήσει τους Αργοναύτες να σπεύσουν στην Κολχίδα. Για τη μετάδοση των οπτικών σημάτων με πυκνούς καπνούς ή στήλες καπνού, ήταν απαραίτητη η κατασκευή ειδικών κτισμάτων σε υπερυψωμένα σημεία, που ονομάζονταν φρυκτωρίες. Τα φωτεινά σήματα ανταλλάσσονταν μέσω των φρυκτών (πυρσών) και είχαν συμφωνηθεί εκ των προτέρων μεταξύ των δύο πλευρών για τη μετάφραση των μηνυμάτων.



Σχήμα 1.10: Ακουστικός Τηλέγραφος



Σχήμα 1.11: Φρυκτωρίες

Σύμφωνα με τους μελετητές, ο πρώτος που χρησιμοποίησε τηλεπικοινωνιακούς πύργους για τη μετάδοση μηνυμάτων ήταν ο Ηρακλής, ο οποίος κατασκεύασε τις γνωστές Ηράκλειες Στήλες στις δύο κωμοπόλεις της Δυτικής μεσογείου, την Αβύλη και την Κάπλη, λειτούργώντας ως φάροι για τα διερχόμενα πλοία. Ένα από τα πιο γνωστά παραδείγματα μετάδοσης μηνυμάτων με φωτεινά σήματα είναι η είδηση της πτώσης της Τροίας, που μεταφέρθηκε στην υπόλοιπη Ελλάδα σε χρόνο ρεκόρ, μέσα σε μία μέρα. Για τη μετάδοση του μηνύματος, χρησιμοποιήθηκε το σύστημα της πυρσείας, δηλαδή η ανταλλαγή φωτεινών σημάτων από κορυφή σε κορυφή βουνού. Το μήνυμα ταξίδεψε από την Τροία στο Ερμαίο της Λήμνου, μετά στον Άθω, στις κορυφές του μακίστου στην Εύβοια και στην κορυφή του Κιθαιρώνα. Από εκεί μεταφέρθηκε στη λίμνη Γοργώπη, στο Αγίπλαγκτο (κοντά στα μέγαρα) και τελικά η φωτεινή λωρίδα πέρασε τον Σαρωνικό κόλπο και έφτασε στο Αραχναίον κοντά στις μυκήνες, απ' όπου ημεροδρόμοι μετέφεραν το μήνυμα στο ανάκτορο των Ατρειδών. Οι κορυφές των βουνών δεν επιλέχθηκαν τυχαία ακόμα και σήμερα διαπιστώνεται καλή ορατότητα μεταξύ τους. Είναι το πρώτο και αρχαιότερο οργανωμένο δίκτυο επικοινωνίας για το οποίο υπάρχει γραπτή μαρτυρία, όπως περιγράφεται στον “Αγαμέμνονα” του Αισχύλου (στ. 263-304).

Γύρω στο 330 π.Χ., ο Αρκάδας στρατηγός Αινείας ο Τακτικός ανέπτυξε ένα ευφύες σύστημα τηλεγραφίας για την αποστολή προσυμφωνημένων μηνυμάτων. Συνδύασε πυρσούς και μηχανικά μέσα ώστε η επικοινωνία μεταξύ αποστολέα και δέκτη να περιέχει σαφείς πληροφορίες. Χρησιμοποιούνταν δύο πανομοιότυποι κυλινδρικοί κάδοι, γνωστοί ως υδραυλικοί τηλεγράφοι, που ήταν τοποθετημένοι πάντα σε σηματοδοτικούς σταθμούς σε υψόμετρα, εξασφαλίζοντας καλύτερη οπτική επαφή. Οι υδραυλικοί τηλεγράφοι ήταν γεμάτοι με νερό ως το ίδιο επίπεδο και είχαν στη βάση τους μια βρύση ίδιου διαμετρήματος, ώστε η ροή του νερού να είναι ίδια και στους δύο κάδους όταν ανοίγουν.



Σχήμα 1.12: Υδραυλικός Τηλέγραφος

Πάνω στο νερό κάθε κάδου επέπλεε ένα ξύλινο ραβδί, κάθετα τοποθετημένο πάνω σε κυλινδρικό φελλό με διάμετρο ελαφρώς μικρότερη από τους κάδους. Το ραβδί ήταν χωρισμένο σε παράλληλους κύκλους με ίσες αποστάσεις μεταξύ τους, και στα κενά αυτών των κύκλων υπήρχαν σημειωμένα κωδικοποιημένα μηνύματα. Όταν ο αποστολέας σήκωνε έναν πυρσό για να ξεκινήσει η επικοινωνία και ο δέκτης απαντούσε με τον ίδιο τρόπο ως επιβεβαίωση, τα δοχεία άνοιγαν ταυτόχρονα, επιτρέποντας τη ροή του νερού. Όταν η στάθμη του νερού έφτανε στο σημείο του επιθυμητού μηνύματος, ο πομπός κατέβαζε τον πυρσό, και η ροή σταματούσε. Έτσι, το προσυμφωνημένο μήνυμα ήταν ταυτόσημο και στα δύο δοχεία.

Όταν οι χρήστες του υδραυλικού τηλεγράφου με την πάροδο του χρόνου διαπίστωσαν δυσκολίες στην ακριβή περιγραφή των πληροφοριών όπως αναφορά σε αριθμητικές δυνάμεις του εχθρού, ήρθε ή ώρα που οι Κλεόξενος και Δημόκλειτος παρουσίασαν την “Πυρσεία” ή αλλιώς “οπτικό τηλεγράφο”. Η Πυρσεία, δηλαδή η οπτική αναμετάδοση σημάτων με φωτιές, αποτελεί ουσιαστικά τον πρώτο οπτικό τηλεγράφο. Το σύστημα αυτό θεωρείται πρόδρομος των σύγχρονων ψηφιακών τεχνικών επικοινωνίας, καθώς κωδικοποιούσε τα γράμματα του αλφαβήτου με την καταχώρησή τους σε πίνακα με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε γράμμα να αντιστοιχεί σε μια σειρά και μια στήλη. Η λειτουργία της Πυρσείας βασιζόταν στο διαχωρισμό των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου σε πεντάδες, διαμορφώνοντας έτσι πέντε γραμμές και πέντε στήλες.

			(II)	Κάθετα			
			1	2	3	4	5
	1	A	B	C	D	E	
	2	F	G	H	I	J	
(I)	3	K	L	M	N	O	
Οριζόντια	4	P	Q	R	S	T	
	5	U	V	W	X	Y	
	6	Z					[R=4,3]

Σχήμα 1.13: Πυρσεία ή Οπτικός Τηλέγραφος

Ο συνδυασμός δύο πεντάδων μεγάλων πυρσών, που ήταν ορατοί από μεγάλες αποστάσεις με τη βοήθεια διόπτρων, αντιπροσώπευε κάθε γράμμα (η αριστερή ομάδα πυρσών καταδεικνύει τις σειρές και η δεξιά τις στήλες του πίνακα). Κατ' αυτό τον τρόπο, ένας συνδυασμός αναμμένων πυρσών όριζε ένα συγκεκριμένο γράμμα. Ήταν η πρώτη φορά που έγινε κωδικοποίηση του αλφαβήτου με συνδυασμό ανάμματος δαυλών. Η επόμενη κωδικοποίηση έγινε μετά 2000 χρόνια, από τον Samuel Morse.

Με αυτά τα παραδείγματα που αποτελούν ένα μικρό μέρος των μεθόδων κωδικοποίησης των αρχαίων Ελλήνων βλέπουμε ότι η κλασική κρυπτογραφία που ανέπτυξαν αποτελεί ένα συναρπαστικό κομμάτι ολόκληρης της ιστορίας της ασφάλειας των πληροφοριών. Παρά τις περιορισμένες τεχνολογικές δυνατότητες εκείνης της εποχής, οι Έλληνες ανέπτυξαν μεθόδους κωδικοποίησης που επέτρεπαν τη διασφάλιση της εμπιστευτικότητας των στρατηγικών πληροφοριών, κυρίως κατά τη διάρκεια των πολέμων.

II

Μαθηματικά Θεμέλια της Πληροφορικής

2	Γραμμική και Σύγχρονη Άλγεβρα	39
2.1	Εισαγωγή	39

2 Γραμμική και Σύγχρονη Άλγεβρα

2.1 Εισαγωγή

Η Άλγεβρα

III

Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

3	Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων	43
3.1	Εισαγωγή	43
3.1.1	Τα αξιώματα της Θεωρίας συνόλων	45



3 Στοιχεία Θεωρίας Συνόλων

3.1 Εισαγωγή

Η θεωρία συνόλων είναι το πιο διαδεδομένο θεμελιώδες σύστημα των μαθηματικών που μελετάει τα σύνολα, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες μαθηματικές θεωρίες που εξετάζουν δομές, δηλαδή σύνολα εφοδιασμένα με πράξεις, σχέσεις (διατάξεις, συναρτήσεις), τελεστές των οποίων οι ιδιότητες απορρέουν από αξιώματα, τοπολογίες, κ.α.λ. Η θεωρία συνόλων γεννήθηκε στα τέλη του 1873, όταν ο Georg Cantor έκανε την καταπληκτική ανακάλυψη ότι η ευθεία των πραγματικών αριθμών δεν είναι μετρήσιμη, πράγμα που σημαίνει ότι τα σημεία της δεν μπορούν να μετρηθούν με τη χρήση των φυσικών αριθμών. Έτσι, αν και το σύνολο των φυσικών αριθμών και το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι και τα δύο άπειρα, υπάρχουν περισσότεροι πραγματικοί αριθμοί από τους φυσικούς αριθμούς, και με αφορμή αυτό το γεγονός άνοιξε ο δρόμος για τη διερεύνηση των διαφόρων μεγεθών του απείρου. Σύμφωνα με τον Cantor, δύο σύνολα A και B έχουν την ίδια *πληθικότητα*, αν είναι αμφιμονοσήμαντα, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει μία προς μία και επί αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων. Στην περίπτωση των πεπερασμένων συνόλων, αυτό συμφωνεί με τη διαισθητική έννοια του μεγέθους. Στην περίπτωση άπειρων συνόλων, η συμπεριφορά είναι πιο περίπλοκη, είναι δηλαδή δυνατό ένα υποσύνολο ενός απείρου συνόλου να έχει την ίδια πληθικότητα με το αρχικό σύνολο, κάτι που δεν μπορεί να συμβεί με τα υποσύνολα των πεπερασμένων συνόλων. Το 1878 ο Cantor διατύπωσε την περίφημη *υπόθεση του συνεχούς* (*Continuum Hypothesis*), η οποία υποστηρίζει ότι κάθε άπειρο υπο- σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι είτε μετρήσιμο ή έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των πραγματικών αριθμών. με άλλα λόγια, προβλέπει ότι δεν υπάρχει ενδιάμεσο επίπεδο απειρίας ανάμεσα στην αριθμήσιμη απειρία των φυσικών αριθμών (κατά την απαρίθμηση τους) και στην απειρία των πραγματικών αριθμών, αυτή δηλαδή που απεικονίζεται, π.χ., ως μια ευθεία ή ως οποιαδήποτε συνεχής γραμμή του επιπέδου. Η υπόθεση του συνεχούς είναι το πιο διάσημο πρόβλημα της θεωρίας συνόλων. Ο ίδιος ο Cantor αφιέρωσε πολλή προσπάθεια σε αυτό, και το ίδιο έκαναν και πολλοί άλλοι σπουδαίοι μαθηματικοί στα μέσα του εικοστού αιώνα, όπως ο Hilbert ο οποίος απέδειξε ότι μπορεί να αποδειχθεί η λογική συνέπεια της υπόθεσης του συνεχούς τόσο της κατάφασής της όσο και της άρνησής της μέσα στο αξιωματικό σύστημα των Zermelo – Fraenkel. Το σύστημα αυτό, γνωστό και ως θεωρία συνόλων Zermelo και Fraenkel, είναι, τουλάχιστον ως σήμερα, η κοινώς αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα θεμελιακή αξιωματική θεωρία περιγραφής και κατασκευής των μαθηματικών συνόλων. Η πρώτη ανάπτυξη της θεωρίας συνόλων ήταν μία αφελής συνολοθεωρία, δηλαδή μία άτυπη θεωρία που χρησιμοποιεί φυσική

γλώσσα για να περιγράψει συνολα και πράξεις στα σύνολα όπου λέξεις όπως *και*, *ή*, *αν ... τότε*, *οχι*, *για κάποιο*, *για κάθε*, δεν υπάγονται σε αυστηρό ορισμό. Εξαιτίας της άτυπης αυτής χρήσης της έννοιας του συνόλου προέκυψαν, αρχικά, ορισμένες ασυνέπειες ή παράδοξα ιδίως από την φαινομενικά φυσική υπόθεση ότι: *κάθε ιδιότητα καθορίζει ένα σύνολο*, δηλαδή το σύνολο των αντικειμένων που έχουν την ιδιότητα. Ένα παράδειγμα είναι το *παράδοξο του Russell*. Αυτό που λέει αυτό το παράδοξο του Russell, είναι ότι είναι προβληματικό να μιλάμε για σύνολα πραγμάτων που περιέχουν τον εαυτό τους, δηλαδή την αυτοαναφορικότητα. Για παράδειγμα, ας πάρουμε το βιβλίο που αναφέρεται στα βιβλία που δεν έχουν αναφορά προς τον εαυτό τους. Αυτό το βιβλίο θα συμπεριελάμβανε τον εαυτό του; Αν τον συμπεριελάμβανε, θα δημιουργούσε παράδοξο, όπως επίσης και αν δεν τον συμπεριελάμβανε. μια βασική απόρριψη του παραδόξου του Russell είναι ότι δεν μπορούμε να μιλήσουμε για το σύνολο όλων των συνόλων, τουτέστιν για το άπειρο. Επομένως, μερικές συλλογές, όπως η συλλογή όλων των συνόλων, η συλλογή όλων των πληθικών αριθμών, δεν είναι σύνολα. Τέτοιες συλλογές ονομάζονται *αρμόζουσες τάξεις*. Το παράδοξο του Russell βάζει ένα σαφές όριο, σε αυτό που καλούμε ανθρώπινη λογική, κάτι που είναι συμβατό άλλωστε με τα δύο θεωρήματα της μη πληρότητας του Kurt Friedrich Gödel που υποδεικνύουν έμφυτους περιορισμούς σε όλα τα (πλην των τετριμμένων) τυπικά συστήματα των μαθηματικών. με αυτά ο Gödel αποδεικνύει με απλά λόγια, ότι, σε οποιοδήποτε λογικό οικοδόμημα που πάμε να χτίσουμε, πρέπει πάντα να πάρουμε κάποιες προτάσεις σαν αξιώματα, δηλαδή αναπόδεικτες, και εκεί πάνω να θεμελιώσουμε. Και αντίστροφα αν τα αξιώματα αποδεικνύονται εντός του συστήματος, τότε υπάρχουν προτάσεις οι οποίες δεν μπορούν να αποδειχθούν. Τα πρώτα βασικά αποτελέσματα της συνολοθεωρίας όπως την δημιούργησε ο Cantor αναφέρονται σε πολλές και σημαντικές εφαρμογές ιδιαίτερα στην ανάλυση. Για παράδειγμα ένα σημαντικό αποτέλεσμα είναι η θεωρία της *υπερπεπερασμένης αριθμητικής*, δηλαδή της μελέτης των αριθμητικών πράξεων της πρόσθεσης του πολλαπλασιασμού και της δύναμης σε άπειρα μεγέθη. Στην φάση που η θεωρία συνόλων αναπτύχθηκε με βάση την έννοια του συνόλου που έδωσε ο Cantor, όλες οι αποδείξεις στηρίζονται: (α) Στην *ιδιότητα της έκτασης*, δηλαδή αν A και B είναι σύνολα, τότε $A = B$ αν και μόνον αν τα A και B έχουν τα ίδια μέλη, και (β) στην παραδοχή της *Γενικής Αρχής της Συμπερίληψης* (*General Comprehension Principle*), δηλαδή, αν P είναι μια συνθήκη που ορίζει κάποια ιδιότητα των αντικειμένων, τότε $\Omega = \{x | P(x)\}$ είναι το σύνολο όλων των αντικειμένων που ικανοποιούν την συνθήκη P , έτσι ώστε για κάθε x , $(*)$ το x ανήκει στο Ω αν και μόνο αν ικανοποιεί την P . Η (α) συνεπάγεται ότι το πολύ ένα σύνολο Ω ικανοποιεί την $(*)$, και καλούμε αυτό το Ω *έκταση* (*extension*) ή *συμπερίληψη* (*comprehension*) της συνθήκης P . Όπως αναφέραμε και παραπάνω αυτή η αρχή ήταν εσφαλμένη και διαψεύστηκε από τον Russell. Το παράδοξο του Russell έφερε μια *κρίση αμφιβολίας* πρώτα στην συνολοθεωρία και αργότερα σε όλα τα μαθηματικά που έκανε να ξεπεραστεί για περίπου τριάντα χρόνια. Πολλοί μαθηματικοί και φιλόσοφοι στα τέλη του δεκάτου ενάτου και τις αρχές του εικοστού αιώνα, όπως ο Γάλλος γεωμέτρης Poincaré και ο Ολλανδός τοπολόγος και φιλόσοφος Brouwer, πρότειναν να εγκαταληφθεί η συνολοθεωρία και πολλά κλασικά μαθηματικά μαζί της διότι κατά την γνώμη τους δεν είχαν περιεχόμενο. Αυτός που αρχικά προσπάθησε να σώσει την κατάσταση με την μη απόρριψη της συνολοθεωρίας ήταν ο Russell με την περιώνυμή του *θεωρία των τύπων* (*theory of types*), η οποία δεν ήταν αποδεκτή από τους μαθηματικούς διότι ήταν δύσχρηστη. Σχεδόν την ίδια εποχή με τον Russell ο Zermelo το 1908 πρότεινε μία διαφορετική λύση παρουσιάζοντας το πρώτο σύστημα αξιωμάτων για την θεμελίωση της θεωρίας συνόλων. Αργότερα ο Fraenkel πρόσθεσε ένα ακόμη αξίωμα στο σύστημα αξιωμάτων που είχε προτείνει ο Zermelo δημιουργώντας έτσι το σύστημα αξιωμάτων Zermelo-Fraenkel που αποτελεί την βάση για την Θεωρία Συνόλων με την σημερινή της μορφή. Στην πράξη ο Zermelo πρότεινε να αντικατασταθούν οι παραδοχές του Cantor για τα σύνολα οι οποίες μας οδήγησαν στην εσφαλμένη Γενική Αρχή Συμπερίληψης με μερικά αξιώματα τα οποία επιπροσθέτως θα εξασφάλιζαν τις αποδείξεις των βασικών αποτελεσμάτων της υπάρχουσας θεωρίας. Σε αυτή την βάση ξεκίνησε η *αξιωματική συνολοθεωρία*, κατά πολλούς ένα από τα πιο σημαντικά επιτεύγματα της επιστήμης του εικοστού αιώνα.

3.1.1 Τα αξιώματα της Θεωρίας συνόλων

Πριν αναφερθούμε πιο διεξοδικά σε βασικά στοιχεία της μαθηματικής Λογικής που θα μας επι- τρέψουν να κατανοήσουμε τις εφαρμογές της στην πληροφορική, θα πούμε δύο λόγια για την *Λογική πρώτου βαθμού* (*first-order logic*) που έχει ικανή εκφραστική ισχύ ώστε να μπορεί να διατυπώσει το σύστημα αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων όπως την μελετάμε και την εφαρμόζουμε σήμερα. Όπως η γεωμετρία ξεκινάει με κάποιες έννοιες των οποίων δέχεται την ύπαρξη χωρίς να τις ορίζει (π.χ. σημείο, ευθεία), έτσι και η Λογική πρώτου βαθμού στηρίζεται σε έννοιες χωρίς ορισμό, μία εκ των οποίων είναι η έννοια *σύμβολο*, και ορίζεται από ένα σύνολο συμβολοσειρών από το ίδιο αλφάβητο όπου ως *αλφάβητο* (*alphabet*) ορίζουμε ένα πεπερασμένο σύνολο συμβόλων και ως συμβολοσειρά (*string*) μια ακολουθία συμβόλων που ανήκουν στο αλφάβητο. Η λογική πρώτης τάξης επεκτείνει την Προτασιακή Λογική εισάγοντας επιπρόσθετες έννοιες όπως τους *όρους* (*terms*), τα *κατηγο- ρήματα* (*predicates*) και τους *ποσοδείκτες* (*quantifiers*) και συνεπώς θεωρείται ως μια γενίκευ- ση αυτής. Η Προτασιακή Λογική ως γνωστόν είναι μια γλώσσα που έχει ως βασικό στοιχείο της δηλωτικές προτάσεις οι οποίες μπορεί να είναι είτε αληθείς είτε ψευδείς. Στην Πληροφο- ρική η Προτασιακή Λογική επεξεργάζεται δηλωτικές προτάσεις που αφορούν τη συμπεριφο- ρά υπολογιστικών συστημάτων ή προγραμμάτων, καθώς επίσης βοηθά στον έλεγχο κατά πόσο ένα πρόγραμμα ή ένα σύστημα ικανοποιεί την πρόταση που μελετάμε. Η γλώσσα της Προτασιακής Λογικής αποτελείται από ατομικές προτασεις, τελεστές και παρενθέσεις. Οι τελεστές είναι: *Η άρνηση* $\neg$, η *σύνδεση* $\wedge$, η *διάδεση* $\vee$ και η *συνεπαγωγή* $\rightarrow$. Οι ποσοδείκτες που εισάγονται επιπρόσθετα στην Λογική Πρώτης Τάξης από την υπάρχουσα Προτασιακή Λογική είναι: Ο υπαρξιακός ποσοδείκτης $\exists$ (*υπάρχει*) και ο *καθολικός ποσοδείκτης* $\forall$ (*για όλα*). Η περιγραφή του συστήματος των αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων, πέραν της γλώσσας της Λογικής πρώτης τάξης που χρησιμοποιεί, για να εκφραστεί πλήρως χρειά- ζεται και τα σύμβολα $\equiv$ (*ισοδύ- ναμο με*) και $\in$ (*ανήκει*) καθώς και το αξίωμα επιλογής. Το αξίωμα της επιλογής (AC) μας λέει ότι:

Αν έχουμε μία συλλογή $\mathcal{C}$ από μη κενά σύνολα, τότε μπορούμε να επιλέξουμε ένα μέλος από κάθε σύνολο σε αυτή την συλλογή. Με άλλα λόγια, υπάρχει μία συνάρτηση f στην $\mathcal{C}$ με την ιδιότητα ότι για κάθε σύνολο S στην συλλογή το $f(S)$ είναι ένα μέλος της $\mathcal{C}$.

Η *αξιοματική θεωρία συνόλων* Zermelo-Fraenkel που έχει σαν βάση τα αξιώματα των Zermelo-Fraenkel μαζί με το αξίωμα επιλογής ή ZFC, αποτελούν ένα από τα βασικά θεμέλια όλων των κλασικών μαθηματικών. Τα αξιώματα των Zermelo-Fraenkel είναι τα ακόλουθα:

1. *Αξίωμα επεκτασιμότητας*: Αν δύο σύνολα A και B έχουν τα ίδια στοιχεία, τότε είναι ίσα. Συμβολικά:

$$(\forall x)[x \in A \leftrightarrow x \in B] \rightarrow (A = B).$$

Το αντίστροφο, δηλαδή, αν $A = B$ τότε $x \in A \leftrightarrow x \in B$. Επομένως έχουμε

$$(A = B) \leftrightarrow (\forall x)[x \in A \leftrightarrow x \in B].$$

Το αξίωμα της επεκτασιμότητας λέει απλά ότι ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του. Αυτό μπορεί να φαίνεται προφανές, αλλά υπάρχουν ενδιαφέρουσες συνολοθεωρίες που απορρίπτουν το αξίωμα αυτό. Το αξίωμα της επεκτασιμότητας είναι αυτό που κωδικοποιεί αυτό το «προφανές» γεγονός.

2. *Αξίωμα ζεύγους*: Δοθέντων συνόλων A και B , υπάρχει σύνολο που συμβολίζεται $\{A, B\}$, το οποίο περιέχει τα A και B ως μοναδικά στοιχεία. Συμβολικά:

$$(\forall A)(\forall B)(\exists C)[(\forall x)(x \in C \leftrightarrow (x = A \vee x = B))].$$

Το σύνολο C καλείται *μη διατεταγμένο ζεύγος* των A και B και συμβολίζεται με $\{A, B\}$. Αν $A = B$, τότε $\{A, A\} = \{A\}$ είναι το *μονοσύνολο* του αντικειμένου A . Χρησιμοποιώ- νοντας αυτό το αξίωμα μπορούμε να κατασκευάσουμε πολλά απλά σύνολα, π.χ. τα

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}, \dots,$$

όπου καθένα από αυτά έχει το πολυ δύο μέλη.

3. *Αξίωμα κενού συνόλου*: Υπάρχει σύνολο που δεν περιέχει καθόλου στοιχεία το οποίο καλείται *κενό σύνολο* και συμβολίζεται με $\emptyset$. Συμβολικά:

$$(\exists A)(\forall x)\neg(x \in A).$$

Το αξίωμα της επεκτασιμότητας εξασφαλίζει την μοναδικότητα του κενού συνόλου. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο σύνολα τα οποία δεν έχουν κανένα στοιχείο, τότε $x \in A \rightarrow x \in B$ και $y \in B \rightarrow y \in A$ που συνεπάγεται ότι $A = B$. Εξ ορισμού, το κενό σύνολο περιέχεται (ανήκει) σε κάθε σύνολο.

4. *Αξίωμα της ένωσης*: Αν ένα σύνολο A έχει ως στοιχεία σύνολα B , τότε υπάρχει το σύνολο, το οποίο θα έχει στοιχεία τα στοιχεία των B και μόνον αυτά. Συμβολικά:

$$(\forall A)(\exists C)[(\forall x)(x \in C \leftrightarrow (\exists B)(x \in B \wedge B \in A))].$$

Απο το αξίωμα της επεκτασιμότητας εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι για κάθε συλλογή συνόλων $\mathcal{A}$, μόνο ένα σύνολο ικανοποιεί το αξίωμα της ένωσης το οποίον και το ονομάζουμε *ένωση* του $\mathcal{A}$ και το συμβολίζουμε με $\bigcup \mathcal{A}$ ή $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Συμβολικά:

$$\bigcup \mathcal{A} = \{x | (\exists A \in \mathcal{A})[x \in A]\}.$$

5. *Αξίωμα του απείρου*: Υπάρχει ένα σύνολο που έχει απείρως πολλά στοιχεία, δηλαδή σύνολο το οποίο περιέχει το κενό σύνολο καθώς και μαζί με κάθε στοιχείο A περιέχεται σε αυτό και ο $A \cup \{A\}$, δηλαδή ο επόμενός του. Συμβολικά:

$$(\exists A)[\emptyset \in A \wedge (\forall B)(B \in A \rightarrow B \cup \{B\} \in A)].$$

Αν πάρουμε τον ελάχιστο A με αυτές τις ιδιότητες τότε παίρνουμε τους φυσικούς αριθμούς. Κατά τον ορισμό των *φυσικών αριθμών* αρχίζουμε με το πιο θεμελιώδες σύνολο, το κενό σύνολο ως εξής:

(i) Το $\emptyset$ δεν έχει στοιχεία.

(ii) Το $\{\emptyset\}$ έχει ένα στοιχείο, το κενό σύνολο.

(iii) Το $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ έχει δύο στοιχεία, το κενό σύνολο και το σύνολο που περιέχει το κενό σύνολο. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναλαμβάνεται απείρως έως ότου οριστούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί, δηλαδή:

$$0 = \emptyset$$

$$1 = \{0\} = 0 \cup \{0\} = \{\emptyset\}$$

$$2 = \{0, 1\} = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = \{0, 1, 2\} = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \text{ κ.α.λ.}$$

Προφανώς αυτή η αλληλουχία ξεκινάει από το 0 και όταν αυτό οριστεί τότε ορίζεται και το 1, και όταν το 1 οριστεί τότε ορίζεται και το 2, και ούτω καθεξής. Αυτή η διαδικασία μας φέρνει στην έννοια της επαγωγής για την οποία θα μιλήσουμε λεπτομερώς αργότερα.

Προτού προχωρήσουμε στο επόμενο αξίωμα να υπενθυμίσουμε ότι: Ένα σύνολο A είναι υποσύνολο ενός συνόλου B αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B , δηλαδή

$$(A \subseteq B) \leftrightarrow [(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)].$$

Ο συμβολισμός $\subseteq$ δίνει έμφαση στο ότι το A μπορεί να είναι ίσον με το B , ενώ ο συμβολισμός $\subset$ μας λέει ότι το A είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του B εκτός του ίδιου του B . Στην δεύτερη περίπτωση λέμε ότι το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B .

6. *Αξίωμα του δυναμοσυνόλου*: Για κάθε σύνολο A υπάρχει ένα σύνολο, που συμβολίζεται με $\mathcal{P}(A)$ και καλείται το *δυναμοσύνολο* του A , και έχει σαν στοιχεία όλα τα υποσύνολα του A . Συμβολικά:

$$(\forall A)(\exists B)(\forall C)(C \subseteq A \rightarrow C \in B).$$

Το επόμενο αξίωμα προστέθηκε στα αξιώματα του Zermelo απο τον A. Fraenkel και διατυπώθηκε από τον T. Skolem το 1922.

7. *Αξιωματικό σχήμα της αντικατάστασης*: Εστω $P(x, y)$ είναι μία ιδιότητα τέτοια ώστε, για κάθε x υπάρχει ένα μοναδικό y για το οποίο η $P(x, y)$ ισχύει. Τότε για κάθε σύνολο A υπάρχει ακριβώς ένα σύνολο B , του οποίου τα στοιχεία είναι όλα τα y και μόνον αυτά για τα οποία υπάρχει x στο A έτσι ώστε να επαληθεύεται ο τύπος $P(x, y)$. Συμβολικά:

$$(\forall A)(\exists B)[(\forall y)(y \in B \leftrightarrow (\exists x \in A)P(x, y))].$$

Σαν πόρισμα του αξιωματικού σχήματος της αντικατάστασης προκύπτει η αρχή της *εξειδίκευσης* ή *διαχωρισμού*, σύμφωνα με την οποία: Για κάθε υποσύνολο A και κάθε ιδιότητα φ , υπάρχει ένα υποσύνολο B του A που αποτελείται από αυτά τα στοιχεία του A που ικανοποιούν την φ και μόνον αυτά.

Το επόμενο αξίωμα προστέθηκε το 1925 από τον von Neumann. Για το αξίωμα αυτό χρειαζόμαστε τον ακόλουθο στοιχειώδη ορισμό:

8. *Αξίωμα της θεμελίωσης ή κανονικότητας*: Κάθε μη κενό σύνολο A περιέχει ένα στοιχείο το οποίο είναι ξένο προς το A . Συμβολικά:

$$(\forall A)[A \neq \emptyset \rightarrow (\exists B \in A)(B \cap A = \emptyset)].$$

μία συνέπεια του αξιώματος της θεμελίωσης είναι ότι δεν υπάρχει σύνολο A για το οποίο $A \in A$. Με άλλα λόγια, κανένα σύνολο δεν είναι στοιχείο του εαυτού του. με το αξίωμα αυτό αποκλείεται η ύπαρξη του συνόλου Russell και συνεπώς αίρεται και η αντίφαση που αυτό δημιούργησε. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο A τέτοιο ώστε $A \in A$, τότε $A \in A \cap \{A\}$ και άρα το $\{A\}$ δεν περιέχει κανένα στοιχείο ξένο προς το A . Αυτό όμως αντιβαίνει στο αξίωμα της θεμελίωσης.

IV

Λογισμός μιάς μεταβλητής – (Α)

4	Λογισμός μίας μεταβλητής: Θεωρία και Εφαρμογές	51
4.1	Εισαγωγή	51
4.2	Μαθηματική θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών	52
4.2.1	Το σύνολο των Φυσικών Αριθμών	52
4.2.2	Το σύνολο των Ακεραίων Αριθμών	53
4.2.3	Το Σύνολο των Ρητών Αριθμών	53
4.2.4	Το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών	53
4.2.5	Ιστορικό Σχόλιο	55
4.3	Καρτεσιανό Γινόμενο	55
4.4	Καρτεσιανό Επίπεδο	56
4.5	Συντεταγμένες σημείου στο επίπεδο	56
4.6	Η έννοια της απόστασης	56
4.6.1	Η έννοια της απόλυτης τιμής	57
4.7	Πράξεις στους Πραγματικούς Αριθμούς	59
4.8	Εισαγωγή των μιγαδικών Αριθμών	60
4.8.1	Ιστορικό Σχόλιο	61
4.9	Η άλγεβρα και η γεωμετρία των μιγαδικών αριθμών	61
4.10	Ο τύπος του De Moivre και οι ρίζες των μιγαδικών αριθμών	63
4.11	Ο τύπος του Euler	65
4.12	Η Έννοια της Συνάρτησης	65
4.13	Συνοπτική Παρουσίαση:	
	Γραμμικές και Τετραγωνικές Συναρτήσεις	71
4.14	Οι βασικές κατηγορίες συναρτήσεων	73
4.15	Πολυώνυμα, Ρητές και Αλγεβρικές Συναρτήσεις	73
4.15.1	Ρητές Συναρτήσεις	73
4.16	Τριγωνομετρικές συναρτήσεις	75
4.17	Τριγωνομετρικές Ταυτότητες	80
4.18	Αντίστροφες συναρτήσεις	83
4.19	Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις	86
4.20	Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις	92
4.21	Κατασκευή νέων συναρτήσεων	98
4.21.1	Σύνθεση Συναρτήσεων	99
4.22	Ακολουθίες	101
4.22.1	Γενικός και αναγωγικός τύπος ακολουθίας	102
4.22.2	Γενικός τύπος ακολουθίας:	102
4.22.3	Αναδρομικός τύπος ακολουθίας	102
	Υπόθεση ύπαρξης ορίου-Εξίσωση αναδρομής	102
4.23	Μαθηματική Επαγωγή	105
4.23.1	Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy	114
4.23.2	Άλλα κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών	117



4 Λογισμός μιας μεταβλητής: Θεωρία και Εφαρμογές

4.1 Εισαγωγή

Η φράση “*Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’αυτό μένειν*” του Ηράκλειτου εκφράζει μία νομοτέλεια, ότι δηλαδή η πραγματικότητα έχει ως θεμελιώδες χαρακτηριστικό τη διαρκή κίνηση και τη μεταβολή. Ο Λογισμός είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που περιλαμβάνει τη μελέτη της κίνησης και των ρυθμών μεταβολής. Οι έννοιες του Λογισμού είναι βαθιά ενσωματωμένες σε πολλές επιστήμες όπως είναι η φυσική, η μηχανική, η οικονομία, η στατιστική, η ιατρική κ.ά. Τα μαθηματικά γενικότερα βασίζονται σε αξιώματα, δηλαδή αποδεκτές αρχές χωρίς αμφισβήτηση. Με αυτά, χτίζουμε μια λογική και συνεπή δομή που μας επιτρέπει να βρίσκουμε μαθηματικές αλήθειες χωρίς να ασχολούμαστε με την ουσία των αριθμών. Με λίγα λόγια τα αξιώματα αποτελούν την αρχική βάση πάνω στην οποία χτίζονται όλες οι άλλες μαθηματικές έννοιες και θεωρήματα. Όπως ένα σπίτι δεν μπορεί να σταθεί χωρίς γερά θεμέλια, έτσι και τα μαθηματικά δεν μπορούν να υπάρξουν χωρίς αξιώματα. Με αυτά, δημιουργούμε ένα συνεπές σύστημα, όπου κάθε μαθηματική αλήθεια χτίζεται με βήματα λογικής πάνω σε αυτή τη βάση. Τα μαθηματικά επίσης έχουν μια στενή σχέση με τη φιλοσοφία, καθώς η φιλοσοφία ασχολείται περισσότερο με ερωτήματα για τη φύση και την ύπαρξη των αριθμών, ενώ στα μαθηματικά οι αριθμοί χρησιμοποιούνται για τη διατύπωση και την απόδειξη αληθειών μέσω της λογικής. Αυτή η διττή φύση των αριθμών – ως εργαλεία και ως φιλοσοφικές οντότητες – κάνει τα μαθηματικά ιδιαίτερα συναρπαστικά, αφού βρίσκονται στην τομή μεταξύ επιστήμης και φιλοσοφίας. Η αλληλεπίδραση αυτή βοηθά να εμπλουτίζεται η ανθρώπινη σκέψη και προσφέρει ποικίλες οπτικές γωνίες για την κατανόηση του κόσμου μας καθώς οι αριθμοί ενσωματώνουν έννοιες που μας καλούν να σκεφτούμε και πέρα από τα σύνορα των μαθηματικών, διερευνώντας βαθύτερα τι είναι πραγματικά οι αριθμοί και πώς συνδέονται με την αντίληψη μας για την πραγματικότητα. Στην ουσία, η φιλοσοφία ενισχύει τη θεωρητική μας κατανόηση, ενώ τα μαθηματικά μας προσφέρουν τα εργαλεία για να εφαρμόσουμε αυτές τις ιδέες με ακρίβεια και συνέπεια. Εν κατακλείδι, η φιλοσοφική διάσταση των αριθμών έγκειται στο ότι δεν αποτελούν απλώς εργαλεία υπολογισμών, αλλά φέρουν μαζί τους βαθιά ερωτήματα για τη φύση και την ύπαρξή τους, καλώντας μας να αναλογιστούμε την ουσία τους πέρα από τα όρια των μαθηματικών. Όμως, πέρα από τον θεμελιώδη πυλώνα των αριθμών, που αποτελούν τη βάση του Λογισμού, υπάρχει ένας εξίσου σημαντικός: η έννοια της απόστασης. Η απόσταση δεν είναι απλώς ένα μαθηματικό εργαλείο, αλλά μια έννοια βαθιά ριζωμένη στην ανθρώπινη εμπειρία, που μας βοηθά να κατανοούμε τον κόσμο γύρω μας. Στην καθημερινή ζωή, η απόσταση δεν περιγράφει μόνο τον μετρήσιμο διαχωρισμό μεταξύ δύο αντικειμένων, αλλά και τον

βαθμό της εγγύτητάς τους, είτε πρόκειται για φυσικά είτε για αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα. Η έννοια της εγγύτητας, σε συνδυασμό με την ύπαρξη μιας εσωτερικής σχέσης κυριαρχίας ή διάταξης μεταξύ δύο αντικειμένων με βάση κάποιο κριτήριο κατάταξης, δεν αποτελεί ένα στατικό μέγεθος αλλά έναν παράγοντα που διαμορφώνει τη δυναμική των σχέσεων. Το γεγονός αυτό μας καλεί να μελετήσουμε την ασυμμετρία και τη δυϊκότητα ως δύο αλληλοσυμπληρούμενες όψεις της ίδιας δομής. με βάση αυτή τη νομοτέλεια, ένας άλλος σημαντικός πυλώνας του Λογισμού είναι η σχέση κυριαρχίας ή διάταξης. Αυτή η έννοια μας επιτρέπει να κατανοούμε και να συγκρίνουμε τα αντικείμενα όχι μόνο ως μεμονωμένα σημεία αλλά ως στοιχεία που κατέχουν μια ιεραρχική ή ταξινομητική σχέση μεταξύ τους. Η διάταξη καθορίζει πώς κάθε στοιχείο τοποθετείται σε σχέση με τα υπόλοιπα, δημιουργώντας μια δομή κυριαρχίας που είναι απαραίτητη για την κατανόηση των μαθηματικών σχέσεων και της δυναμικής των συστημάτων στον Λογισμό. Το τρίπτυχο “αριθμός - εγγύτητα - σχέση κυριαρχίας” οδήγησε σε δύο θεμελιώδεις έννοιες για τον Λογισμό: το ανοικτό διάστημα και το όριο. Αυτές οι έννοιες αποτελούν τη βάση για την κατανόηση της προσέγγισης και της σύγκλισης, προσφέροντας ένα βαθύτερο πλαίσιο για το πώς οι οντότητες τείνουν να αγγίζουν την πλήρη έκφραση της ύπαρξής τους και πώς διαμορφώνονται οι μεταξύ τους σχέσεις. Το ανοικτό διάστημα εκφράζει την έννοια της εγγύτητας χωρίς να περιορίζεται από απόλυτα όρια, ενώ το όριο αποτυπώνει την πορεία μιας συνεχούς προσέγγισης προς ένα σημείο σταθερότητας. Μαζί, παρέχουν ένα πλαίσιο για την κατανόηση των θεμελιωδών δομών και αλληλεπιδράσεων, όπως διατυπώνονται μέσα από τον Λογισμό.

4.2 Μαθηματική θεμελίωση του συνόλου των πραγματικών αριθμών

Θα ξεκινήσουμε από την αξιωματική θεμελίωση των φυσικών αριθμών που βασίζεται στα αξιώματα Peano, τα οποία διατυπώθηκαν από τον Ιταλό μαθηματικό Giuseppe Peano. Συγκεκριμένα, υπάρχουν πέντε βασικά αξιώματα που παρέχουν έναν τυπικό ορισμό για τους φυσικούς αριθμούς και περιγράφουν τις βασικές ιδιότητες που τους διέπουν. Είναι τα ακόλουθα:

4.2.1 Το σύνολο των Φυσικών Αριθμών

Τα Αξιώματα Peano για τους Φυσικούς Αριθμούς

Τα αξιώματα Peano ορίζουν τις θεμελιώδεις ιδιότητες του συνόλου των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$. Ας τα δούμε αναλυτικά:

1. *Αξίωμα της Ύπαρξης του μηδενός:*
 $0 \in \mathbb{N}$

Υπάρχει ένας φυσικός αριθμός που ονομάζεται 0 και ανήκει στο σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$.

2. *Αξίωμα της Διαδοχής:*
 $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) \in \mathbb{N}$

Κάθε φυσικός αριθμός n έχει έναν μοναδικό διάδοχο $S(n)$, ο οποίος επίσης ανήκει στο σύνολο $\mathbb{N}$.

3. *Αξίωμα της μη Ισότητας του μηδενός:*
 $\forall n \in \mathbb{N}, S(n) \neq 0$

Ο 0 δεν είναι διάδοχος κανενός φυσικού αριθμού.

4. *Αξίωμα της μοναδικότητας του Διαδόχου:*
 $\forall m, n \in \mathbb{N}, S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$

Αν δύο φυσικοί αριθμοί έχουν τον ίδιο διάδοχο, τότε οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι.

5. *Αξίωμα της μαθηματικής Επαγωγής:*

$$\forall A \subseteq \mathbb{N}, [0 \in A \wedge (\forall n \in A \Rightarrow S(n) \in A)] \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

Εάν ένα υποσύνολο A των φυσικών αριθμών περιέχει το 0 και είναι κλειστό ως προς τον διάδοχο, τότε A περιέχει όλους τους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή $A = \mathbb{N}$.

Τα παραπάνω αξιώματα παρέχουν τη θεμελιώδη βάση για τον ορισμό των φυσικών αριθμών και καθορίζουν τις ιδιότητές τους.

Πιο απλά, το σύνολο των φυσικών αριθμών ορίζεται ως:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

και χαρακτηρίζεται από δύο ιδιότητες:

- Έχει αρχή, δηλαδή τον αριθμό 1.
- Αν n είναι στοιχείο του N , τότε και $n + 1$ είναι στοιχείο του N .

Η δεύτερη ιδιότητα είναι γνωστή ως *ιδιότητα της διαδοχής* και δηλώνει ότι το σύνολο N είναι κλειστό στις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

Το αν το 0 ανήκει στους φυσικούς αριθμούς εξαρτάται από τη σύμβαση. Σε πολλά πλαίσια, οι φυσικοί αριθμοί περιλαμβάνουν το 0 και συμβολίζονται ως:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Εδώ, το 0 θεωρείται σημείο εκκίνησης, ιδιαίτερα χρήσιμο σε αξιωματικά συστήματα όπως τα αξιώματα Peano.

Αλλού, οι φυσικοί αριθμοί θεωρούνται ότι ξεκινούν από το 1, με τον συμβολισμό:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} (\mathbb{N}^+),$$

όπου το 0 αποκλείεται, π.χ., στη θεωρία αριθμών. Η επιλογή της σύμβασης εξαρτάται από το μαθηματικό πλαίσιο και το σκοπό της μελέτης.

4.2.2 Το σύνολο των Ακεραίων Αριθμών

Το σύνολο των ακεραίων αριθμών είναι:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

το οποίο χάνει την ιδιότητα της αρχής αλλά διατηρεί την ιδιότητα της διαδοχής. Είναι κλειστό στις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, και του πολλαπλασιασμού.

4.2.3 Το Σύνολο των Ρητών Αριθμών

Αν επεκτείνουμε τους ακεραίους με την πράξη της διαίρεσης (εκτός της διαίρεσης με το μηδέν), δημιουργούμε το σύνολο των ρητών αριθμών

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ δεν έχει την ιδιότητα της διαδοχής. Οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού, και της διαίρεσης (εκτός της διαίρεσης με μηδέν) δίνουν αποτελέσματα μέσα στο $\mathbb{Q}$.

4.2.4 Το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών

Το σύνολο των Πραγματικών Αριθμών $\mathbb{R}$ αποτελεί θεμέλιο για τον Λογισμό. Το κύριο χαρακτηριστικό του είναι ότι περιέχει όλους τους αριθμούς που αντιστοιχούν σε κάθε σημείο μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων πάνω στην ευθεία. Στη ευθεία αυτή, οι αριθμοί είναι τοποθετημένοι έτσι ώστε, αν κινηθούμε από τα αριστερά προς τα δεξιά, οι τιμές των αριθμών να αυξάνονται. Για παράδειγμα, αν πάρουμε ένα σημείο x πάνω στη γραμμή, τότε όλα τα σημεία που βρίσκονται αριστερά του αντιστοιχούν σε αριθμούς μικρότερους από x , ενώ όσα βρίσκονται δεξιά του αντιστοιχούν σε μεγαλύτερους αριθμούς. Ειδικότερα, αν $x = 0$, τα σημεία στα αριστερά του 0 αντιστοιχούν στους αρνητικούς αριθμούς, ενώ στα δεξιά του βρίσκονται οι θετικοί αριθμοί. Αυτή η μοναδική ιδιότητα του $\mathbb{R}$, που απουσιάζει από τα υποσύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$, ονομάζεται *πληρότητα*. Η πληρότητα διασφαλίζει πως δεν υπάρχουν «κενά» μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών και κάθε θετικός πραγματικός αριθμός μπορεί να έχει ρίζα οποιουδήποτε τάξης. Αν αφαιρέσουμε τους ρητούς αριθμούς $\mathbb{Q}$ από το $\mathbb{R}$, απομένει το σύνολο των αρρήτων αριθμών, το οποίο συμβολίζεται ως $\mathbb{Q}^c$. Οι άρρητοι αριθμοί δεν μπορούν να γραφούν ως λόγος δύο ακεραίων και, αν εκφραστούν

δεκαδικά, περιέχουν άπειρα μη περιοδικά δεκαδικά ψηφία. Είναι σχετικά εύκολο να κατανοήσει κανείς τη διαφορά ανάμεσα σε ένα σύνολο με πεπερασμένο αριθμό στοιχείων και ένα σύνολο με άπειρα στοιχεία. Ωστόσο, είναι πιο δύσκολο να αντιληφθούμε ότι κάποια άπειρα σύνολα έχουν περισσότερα στοιχεία από άλλα επίσης άπειρα σύνολα. Στα μαθηματικά, υπάρχουν πολλοί τύποι άπειρων συνόλων. Για τον Λογισμό, όμως, χρειαζόμαστε δύο βασικά είδη: το άπειρο των φυσικών αριθμών, το οποίο είναι μετρήσιμο, και το άπειρο των πραγματικών αριθμών, που είναι μεγαλύτερο, επειδή περιλαμβάνει περισσότερα στοιχεία από το πρώτο και καλείται υπεραριθμήσιμο. Σύνολα με ίδιο πλήθος στοιχείων με το $\mathbb{N}$ λέγονται αριθμήσιμα, ενώ σύνολα όπως το $\mathbb{R}$, με περισσότερα στοιχεία, είναι μη αριθμήσιμα. Δύο σύνολα A και B θεωρούνται ότι έχουν ίσο πλήθος στοιχείων αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε στοιχείο του A με ένα μοναδικό στοιχείο του B , με τέτοιο τρόπο ώστε: (1) Κάθε στοιχείο του A να συνδέεται με ακριβώς ένα στοιχείο του B , και αντίστροφα. (2) Όλα τα στοιχεία και των δύο συνόλων να συμμετέχουν στην αντιστοίχιση, χωρίς να περισσεύει κανένα στοιχείο σε κανένα από τα δύο σύνολα. Έτσι, τα σύνολα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ και $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμα, ενώ τα $\mathbb{Q}^c$ και $\mathbb{R}$ δεν είναι. Η μετάβαση από το σύνολο των ρητών $\mathbb{Q}$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ γίνεται μέσω της έννοιας της πραγματικής ευθείας. Το σύνολο $\mathbb{R}$ απεικονίζεται ως μια ευθεία γραμμή, όπου:

- Το σημείο 0 είναι η *αρχή του άξονα*¹.
- Το σημείο 1 ορίζεται ως η *μονάδα του άξονα*.



Σχήμα 4.1: Η πραγματική ευθεία

Η πραγματική ευθεία χωρίζεται σε δύο ημιάξονες: στον θετικό ημιάξονα βρίσκονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ενώ στον αρνητικό ημιάξονα βρίσκονται οι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο πάνω στην ευθεία, και κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν μοναδικό πραγματικό αριθμό. Η συνέχεια της ευθείας εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχουν κενά ή διακοπές, επιτρέποντας έτσι την άμεση σύνδεση κάθε τιμής με την επόμενη. Αυτή η συνεχής και αδιάσπαστη γραμμή, που περιέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς, είναι γνωστή ως πραγματική ευθεία και συμβολίζεται με $\mathbb{R}$. Στο θετικό ημιάξονα βρίσκονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και στο αρνητικό ημιάξονα οι αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Η *συνέχεια* της ευθείας εξασφαλίζει ότι δεν υπάρχουν κενά ή διακοπές. Έτσι, μπορούμε να αναφερόμαστε στην *πραγματική ευθεία* $\mathbb{R}$, η οποία περιέχει το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών.

¹ Κάθε προσανατολισμένη ευθεία $\mathcal{E}$ στην οποία έχουμε καθορίσει:

1. Ένα σημείο O σαν *αρχή*.
2. Ένα διάνυσμα $\vec{OI} = \vec{i}$ σαν μοναδιαίο, δηλαδή $|\vec{OI}| = |\vec{i}| = 1$

την καλούμε *άξονα* με αρχή το O και μοναδιαίο διάνυσμα το $\vec{OI} = \vec{i}$. Τα άκρα του άξονα αντιστοιχούν στις τιμές $-\infty$ και $+\infty$, υποδηλώνοντας ότι ο άξονας εκτείνεται απερίοριστα προς δύο κατευθύνσεις του που συμβολίζονται με τα σύμβολα x' για την αρνητική κατεύθυνση και x για τη θετική κατεύθυνση. (i) Η ημιευθεία Ox λέγεται *θετικός ημιάξονας* Ox . (ii) Η ημιευθεία

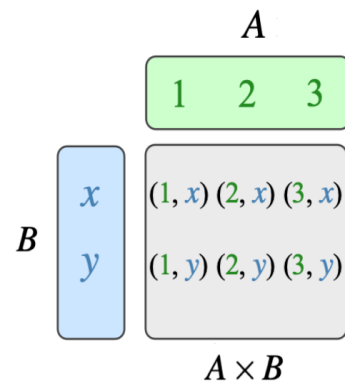
Ox' λέγεται *αρνητικός ημιάξονας* Ox' .

4.2.5 Ιστορικό Σχόλιο

Οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι τα μεγέθη είναι συμμετρικά, δηλαδή μπορεί να βρεθεί κοινό μέτρο μεταξύ αυτών, μέχρι που ανακάλυψαν την ύπαρξη ασυμμετρίας. Αυτή η κρίση ήρθε με την παρατήρηση ότι δεν υπάρχει κοινό μέτρο για τη διαγώνιο ενός τετραγώνου, δηλαδή η διαγώνιος δε μπορεί να εκφραστεί ως λόγος δύο φυσικών αριθμών. Η λύση του προβλήματος της αξιωματικής θεμελίωσης των πραγματικών αριθμών έγινε από τον Εύδοξο και βρίσκεται στο βιβλίο V, ορισμός 5, των *Στοιχείων* του Ευκλείδη. Η κατασκευή των άρρητων (ασύμμετρων) αριθμών, που βασίζεται στη θεωρία του Εύδοξου, δημοσιεύτηκε το 1872 από τον Dedekind και είναι γνωστή ως κατασκευή των πραγματικών αριθμών μέσω τομών (Dedekind cuts). Η θεωρία των Ευδόξου και Dedekind συνιστά ένα από τα σημαντικότερα μαθηματικά επιτεύγματα της θεωρίας αριθμών όλων των εποχών.

4.3 Καρτεσιανό Γινόμενο

Αν A και B είναι δύο μη κενά σύνολα, τότε το καρτεσιανό γινόμενο, $A \times B$, είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (a, b) με το πρώτο στοιχείο από το A και το δεύτερο από το B . Όπως και με τις άλλες πράξεις γινομένου, χρησιμοποιούμε το σύμβολο πολλαπλασιασμού $\times$ για να αναπαραστήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο μεταξύ δύο συνόλων. Εδώ, χρησιμοποιούμε τη σημειογραφία $A \times B$ για το καρτεσιανό γινόμενο των A και B . Χρησιμοποιώντας τη σημειογραφία συνόλου, μπορούμε να γράψουμε το καρτεσιανό γινόμενο ως: $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$. Αν τα δύο σύνολα είναι ίδια, δηλαδή αν $A = B$, τότε το $A \times B$ ονομάζεται το καρτεσιανό τετράγωνο του συνόλου A και σημειώνεται ως A^2 : $A^2 = A \times A = \{(a, b) | a \in A, b \in A\}$.



Σχήμα 4.2: Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B .

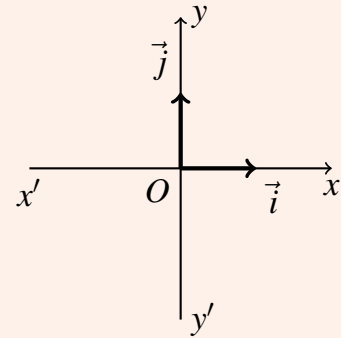
Το καρτεσιανό γινόμενο αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο στη μαθηματική ανάλυση και βρίσκει εφαρμογές σε πολλούς τομείς, όπως στην αναπαράσταση εικόνων, τη δομή της σκακιέρας, τον σχεδιασμό δεδομένων και άλλα πολλά. Προσφέρει έναν συστηματικό τρόπο να συσχετί- ζουμε στοιχεία από διαφορετικά σύνολα, σχηματίζοντας διατεταγμένα ζεύγη ή n -πλέγματα, τα οποία διατηρούν τη σειρά των στοιχείων από τα αρχικά σύνολα. Αυτή η συσχέτιση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν θέλουμε να απεικονίσουμε πολύπλοκες σχέσεις και δομές. Για παράδειγμα, στην αναπαράσταση μιας ψηφιακής εικόνας, κάθε εικονοστοιχείο (pixel) μπορεί να περιγραφεί ως ένα διατεταγμένο ζεύγος συντεταγμένων που αντιστοιχεί στη θέση του στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα. Έτσι, το καρτεσιανό γινόμενο μας επιτρέπει να ορίσουμε την εικόνα ως ένα σύνολο ζευγών συντεταγμένων που αντιστοιχούν στα σημεία της. Επιπλέον, σε παιχνίδια όπως το σκάκι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το καρτεσιανό γινόμενο για να ορίσουμε τη θέση κάθε τετραγώ- νου στη σκακιέρα. Αν θεωρήσουμε ότι οι γραμμές και οι στήλες της σκακιέρας αντιστοιχούν σε σύνολα, τότε το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων αυτών δίνει όλες τις πιθανές θέσεις των τετραγώνων. Συνεπώς, το καρτεσιανό γινόμενο παρέχει τη βάση για την κατασκευή πιο σύνθετων δομών και σχέσεων, διευκολύ- νοντας την κατανόηση και την ανάλυση δεδομένων που εξαρτώνται από πολλαπλές παραμέ- τρους. Με αυτή την προσέγγιση μπορούμε να δημιουργούμε πολυδιάστα- τες απεικονίσεις και να αναπτύσσουμε συστήματα που βασίζονται στη διασύνδεση στοιχείων από διάφορες πηγές ή σύνολα.

4.4 Καρτεσιανό Επίπεδο

Σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'y'$ και $y'y$ με κοινή αρχή O και μοναδιαία διανύσματα αντίστοιχα τα $\vec{i}$ και $\vec{j}$, οπότε έχουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο ή ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο ή ένα καρτεσιανό επίπεδο και το συμβολίζουμε με Oxy .

Το σύστημα Oxy λέγεται ορθοκανονικό, γιατί:

1. Είναι ορθογώνιο γιατί οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι κάθετοι.
2. Είναι κανονικό γιατί τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι ισομήκη.

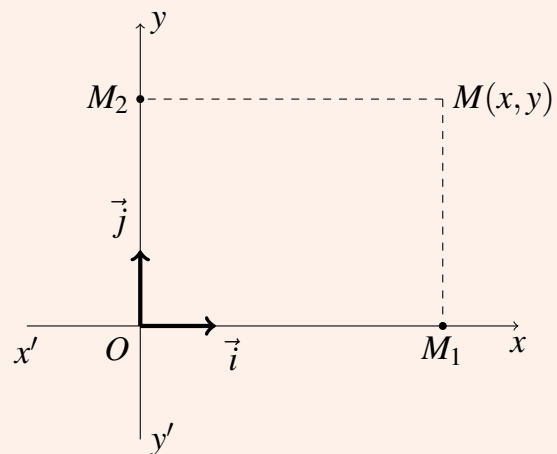


Σχήμα 4.3: Καρτεσιανό επίπεδο

4.5 Συντεταγμένες σημείου στο επίπεδο

Έστω M τυχαίο σημείο του καρτεσιανού επιπέδου Oxy . Από το M φέρνουμε $MM_1 \parallel y'y$ και $MM_2 \parallel x'x$. Αν x είναι η τετμημένη του M_1 ως προς τον άξονα $x'x$, υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM_1} = x \cdot \vec{i}$.

Τότε ο $x \in \mathbb{R}$ καλείται *τετμημένη* του M . Όμοια, αν y είναι η τετμημένη του M_2 ως προς τον άξονα $y'y$, υπάρχει $y \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OM_2} = y \cdot \vec{j}$. Τότε ο $y \in \mathbb{R}$ καλείται *τεταγμένη* του M . Η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου M λέγονται *συντεταγμένες* του M . Έτσι σε κάθε σημείο M του επιπέδου αντιστοιχεί ένα ζεύγος συντεταγμένων, δηλαδή ένα ζευγάρι (x, y) πραγματικών αριθμών. Ένα σημείο M με τετμημένη x και τεταγμένη y συμβολίζεται και με $M(x, y)$ ή απλά με (x, y) . Αντίστροφα, σε κάθε ζεύγος (x, y) πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί ένα μοναδικό σημείο M του επιπέδου, το οποίο βρίσκουμε με τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω.



Σχήμα 4.4: Καρτεσιανό επίπεδο

4.6 Η έννοια της απόστασης

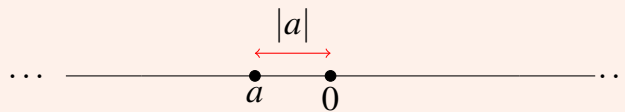
Η έννοια της απόστασης ξεκινάει από την Ευκλείδεια γεωμετρία και φτάνει μέχρι τους σύγχρονους αφηρημένους μετρικούς χώρους. Σήμερα, η έννοια της απόστασης είναι ένα θεμελιώδες εργαλείο σε πολλούς τομείς των μαθηματικών και επιστημών, καθώς η ευελιξία της επιτρέπει τη μελέτη και την κατανόηση ποικίλων χώρων και δομών. Στη γραμμική άλγεβρα, την ανάλυση και την τοπολογία, η απόσταση παίζει κεντρικό ρόλο στη μελέτη των χώρων συναρτήσεων και των τελεστών, επιτρέποντας τη θεμελίωση και κατανόηση πολλών σημαντικών εννοιών. Πιο συγκεκριμένα, η έννοια της απόστασης στην Συναρτησιακή Ανάλυση είναι απαραίτητη για την μελέτη

των διανυσματικών χώρων, όπου μετρικές και νόρμες χρησιμοποιούνται για να οριστεί το πόσο “κοντά” ή “μακριά” βρίσκονται στοιχεία μεταξύ τους. Η απόσταση επιτρέπει την οργάνωση και κατανόηση των ιδιοτήτων των διανυσματικών χώρων και των τελεστών που δρουν σε αυτούς τους χώρους. Για παράδειγμα, η σύγκλιση ακολουθιών σε χώρους Banach και Hilbert βασίζεται στην έννοια της απόστασης, αφού η σύγκλιση ενός στοιχείου προς ένα άλλο εξαρτάται από τη δυνατότητα μέτρησης της “πλησιέστερης απόστασης” μεταξύ τους. Οι εφαρμογές της απόστασης επεκτείνονται σε πολλούς τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Στη φυσική, για παράδειγμα, η απόσταση αποτελεί βασικό στοιχείο στη θεωρία του χωροχρόνου και στην περιγραφή των κβαντικών συστημάτων, όπου οι αποστάσεις μεταξύ καταστάσεων καθορίζουν την ομοιότητά τους. Στην επεξεργασία σήματος, η απόσταση βοηθά στην ανάλυση σημάτων και στην ανίχνευση μοτίβων, ενώ στην τεχνητή νοημοσύνη χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της “ομοιότητας” μεταξύ δεδομένων. Η έννοια της απόστασης έχει περάσει από πολλές φάσεις εξέλιξης, ξεκινώντας από την απλή ιδέα της απόλυτης τιμής, η οποία χρησιμοποιήθηκε για να μετρήσει την απόσταση μεταξύ δύο αριθμών στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

4.6.1 Η έννοια της απόλυτης τιμής

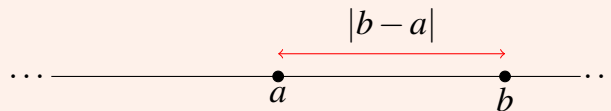
Η *απόλυτη τιμή* ενός αριθμού x , συμβολισμένη ως $|x|$, ορίζει την “απόσταση” του αριθμού αυτού από το μηδέν. Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού ορίζεται ως:

$$|x| = \text{απόσταση από την αρχή} = \begin{cases} a & \text{αν } x \geq 0 \\ -a & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$



Σχήμα 4.5: $|a|$ είναι η απόσταση από το a έως την αρχή των αξόνων

Η απόσταση μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών a και b είναι $|b - a|$, η οποία είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα a και b (Σχήμα 4.6).



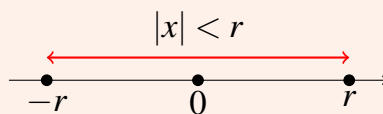
Σχήμα 4.6: Η απόσταση μεταξύ a και b .

Τα ανοιχτά και τα κλειστά διαστήματα μπορούν να περιγραφούν από ανισότητες απόλυτης τιμής. Για παράδειγμα, το διάστημα $(-r, r)$ περιγράφεται από την ανισότητα $|x| < r$ (Σχήμα 4.7):

Πιο γενικά, για ένα διάστημα συμμετρικό γύρω από την τιμή c (Σχήμα 4.8):

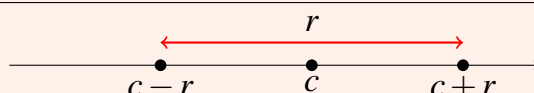
Στη συνέχεια, η έννοια αυτή γενικεύθηκε για να μετρήσει την απόσταση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε αριθμών a και b ως $|a - b|$. Αυτός ο απλός ορισμός της απόστασης αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της Ευκλείδειας γεωμετρίας, όπου η απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο επίπεδο ορίζεται ως η απόσταση ανάμεσα στις συντεταγμένες τους, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο θεώρημα. Στον καρτεσιανό χώρο, η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο:

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r \Leftrightarrow x \in (-r, r)$$



Σχήμα 4.7: Το διάστημα $(-r, r) = \{x : |x| < r\}$

$$|x - c| < r \Leftrightarrow c - r < x < c + r \Leftrightarrow x \in (c - r, c + r)$$



Σχήμα 4.8: Το διάστημα $(a, b) = (c - r, c + r)$

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Αυτός ο ορισμός επεκτάθηκε περαιτέρω στους τρισδιάστατους και n -διάστατους Ευκλείδειους χώρους, όπου η απόσταση μεταξύ σημείων καθορίζεται με παρόμοιο τρόπο.

Η απόσταση, ωστόσο, δεν περιορίστηκε μόνο στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Με την ανάπτυξη της θεωρίας των συναρτήσεων και της ανάλυσης, η απόσταση μεταξύ συναρτήσεων ή στοιχείων πιο γενικών διανυσματικών χώρων άρχισε να μελετάται, χρησιμοποιώντας πιο αφηρημένες έννοιες όπως οι *νόρμες* και οι *μετρικές*. Στη συναρτησιακή ανάλυση, για παράδειγμα, η απόσταση μεταξύ δύο συναρτήσεων f και g στον χώρο L^2 δίνεται από:

$$d(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad a \leq b$$

Αυτή η έννοια της απόστασης έχει επεκταθεί και σε αφηρημένους μετρικούς χώρους, όπου η απόσταση μεταξύ στοιχείων καθορίζεται από μια συνάρτηση $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες (μη-αρνητικότητα, ταυτοτική ιδιότητα, συμμετρία και ανισότητα τριγώνων).

Μετρικός Χώρος

Ένας μετρικός χώρος είναι ένα ζεύγος (X, d) , όπου X είναι ένα σύνολο και d είναι μια συνάρτηση που ονομάζεται *μετρική* και ορίζει την απόσταση μεταξύ δύο σημείων του συνόλου. Η μετρική $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ πρέπει να ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες για κάθε $x, y, z \in X$:

- *Μη Αρνητικότητα:* $d(x, y) \geq 0$ και $d(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
- *Συμμετρία:* $d(x, y) = d(y, x)$.
- *Ανισότητα Τριγώνων:* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Η μετρική d ορίζει μια έννοια “απόστασης” στον χώρο X .

Παραδείγματα μετρικών Χώρων

- *Ευκλείδειος χώρος*: Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

- *Χώρος των απόλυτων διαφορών*: Στο $\mathbb{R}^n$ με μετρική

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (\text{μετρική } L_1).$$

- *Απλός διακριτός χώρος*: $d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \neq y \\ 0, & \text{αν } x = y \end{cases}$

Χώρος με Νόρμα (Normed Space)

Ένας χώρος με νόρμα είναι ένας διανυσματικός χώρος V εφοδιασμένος με μια *νόρμα* $\|\cdot\|$, που είναι μια συνάρτηση $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες για κάθε $x, y \in V$ και κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$:

- *Μη Αρνητικότητα*:
 $\|x\| \geq 0$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.
- *Ομοιογένεια (Homogeneity)*:
 $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$
- *Ανισότητα Τριγώνου*:
 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Παραδείγματα Χώρων με Νόρμα

1. Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια νόρμα

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}.$$

2. Χώρος $\mathbb{R}^n$ με την L_1 νόρμα (Manhattan ή taxicab norm):

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

3. Χώρος L^p : Οι χώροι L^p (όπως L^2, L^1) αποτελούν παραδείγματα χώρων με νόρμα που χρησιμοποιούνται στη λειτουργική ανάλυση, όπου η νόρμα είναι

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

4.7 Πράξεις στους Πραγματικούς Αριθμούς

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, μπορούμε να εκτελούμε τις βασικές αριθμητικές πράξεις:

- Πρόσθεση,
- Αφαίρεση, η οποία περιγράφεται ως “αντίστροφη πρόσθεση”,
- Πολλαπλασιασμός, και

• Διαίρεση, η οποία περιγράφεται ως “αντίστροφος πολλαπλασιασμός”.
Οι πράξεις αυτές μπορούν να εκτελούνται χωρίς προβλήματα όσο βρισκόμαστε στο πεδίο των πραγματικών αριθμών.

Περιορισμοί των Πραγματικών Αριθμών

Είναι επίσης δυνατό να εξάγουμε ρίζες στους πραγματικούς αριθμούς $\mathbb{R}$, αλλά ο περιορισμός προκύπτει όταν ασχολούμαστε με άρτιες τάξεις ριζών (όπως τετραγωνικές ρίζες) από αρνητικούς αριθμούς. Αυτό συμβαίνει γιατί δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο να είναι αρνητικό.

Άσκηση Αυτοαξιολόγησης

(α) Αποδείξτε ότι ισχύουν οι ανισότητες:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \quad x > 0 \quad \text{και} \quad x + \frac{1}{x} \leq -2, \quad x < 0.$$

(β) Αν $a_1, a_2, a_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ είναι πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε την ανισότητα του Schwarz:

$$(a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + a_3\beta_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2).$$

(γ) Αν $\varepsilon > 0$, να βρεθεί ένας ρητός αριθμός r , που να απέχει λιγότερο από ε από τον αριθμό 2.

4.8 Εισαγωγή των μιγαδικών Αριθμών

Γνωρίζουμε ότι μια δευτεροβάθμια εξίσωση με αρνητική διακρίνουσα δεν έχει λύση στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα, η εξίσωση $x^2 = -1$ δεν μπορεί να λυθεί μέσα στο σύνολο $\mathbb{R}$, αφού το τετράγωνο οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού είναι πάντα μη αρνητικό. Για να ξεπεράσουμε αυτόν τον περιορισμό, επεκτείνουμε το σύνολο $\mathbb{R}$ σε ένα νέο σύνολο, το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Το σύνολο $\mathbb{C}$ διατηρεί όλες τις πράξεις και ιδιότητες του $\mathbb{R}$ αλλά, επιπλέον, περιέχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $x^2 = -1$. Συγκεκριμένα, υπάρχει ένα στοιχείο i στο $\mathbb{C}$, για το οποίο ισχύει $i^2 = -1$. με βάση αυτές τις παραδοχές, το διευρυμένο σύνολο $\mathbb{C}$ περιλαμβάνει τα εξής στοιχεία:

1. Όλους τους πραγματικούς αριθμούς.
2. Όλα τα στοιχεία της μορφής yi , όπου y είναι πραγματικός αριθμός και το στοιχείο είναι το γινόμενο του b με το i .
3. Όλα τα αθροίσματα της μορφής $x + yi$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί.

Τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{C} = \{z = x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ονομάζονται *μιγαδικοί αριθμοί*, και το $\mathbb{C}$ αναφέρεται ως το *σύνολο των μιγαδικών αριθμών*.



4.8.1 Ιστορικό Σχόλιο

Οι απαρχές για τη δημιουργία των μιγαδικών αριθμών ανάγονται στις προσπάθειες πολλών μαθηματικών να επιλύσουν εξισώσεις 3ου βαθμού. Αν στην εξίσωση $ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$ θέσουμε $x = y - \frac{\beta}{3a}$ και εκτελέσουμε τις πράξεις, τότε προκύπτει μια εξίσωση της μορφής

$$x^3 = px + q.$$

Στις αρχές του 16ου αιώνα, οι Ιταλοί αλγεβριστές S. del Ferro και N. Tartaglia ανακάλυψαν μια μέθοδο επίλυσης τέτοιων εξισώσεων, που με σημερινό συμβολισμό ισοδυναμεί με τον τύπο:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2} - \frac{p^3}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} - \frac{p^3}{3}}} \quad (6.1)$$

Υπάρχουν εξισώσεις με πραγματικές ρίζες, όπως για παράδειγμα, η $x^3 = 15x + 4$ που έχει μια προφανή ρίζα το 4 (οι άλλες δύο είναι οι $-2 + \sqrt{3}$ και $-2 - \sqrt{3}$), αλλά η διακρίνουσα D είναι αρνητική! Ο τύπος στη συγκεκριμένη περίπτωση δίνει

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Στα μέσα του 16ου αιώνα, ο R. Bombelli, με καινοτόμες για την εποχή του υποθέσεις, κατόρθωσε να δείξει ότι

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121} \quad \text{και} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις ισότητες στην (6.1), προκύπτει άμεσα ότι $x = 4$, αποδεικνύοντας πως το αδιανόητο μπορεί να γίνει πραγματικότητα. Οι αριθμοί της μορφής $z = a + \beta i$, όπου $i = \sqrt{-1}$, που αρχικά ονομάστηκαν φανταστικοί και αργότερα μιγαδικοί, έγιναν από τότε ένα αναπόσπαστο εργαλείο των μαθηματικών και των εφαρμογών τους σε άλλες επιστήμες

4.9 Η άλγεβρα και η γεωμετρία των μιγαδικών αριθμών

Βασικές πράξεις στο μιγαδικό επίπεδο

- Πρόσθεση:
 $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- Αφαίρεση:
 $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
- Πολλαπλασιασμός:
 $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- Διαίρεση:
 $\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad x_2 + iy_2 \neq 0$
- Ισότητα:
 $(x_1 + iy_1) = (x_2 + iy_2) \iff x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = y_2$

Επειδή ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να θεωρηθεί, όπως είδαμε παραπάνω, σαν ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y) , μπορούμε να παραστήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με σημεία σ' ένα επίπεδο Oxy . Το επίπεδο αυτό ονομάζεται *μιγαδικό επίπεδο* ή *επίπεδο του Gauss* ή *επίπεδο*

του Argand.

Μιγαδικό επίπεδο

Ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ παριστάνεται από ένα σημείο P με τετμημένη x και τεταγμένη y . Ο άξονας Ox λέγεται *πραγματικός άξονας* και ο άξονας Oy *φανταστικός*. Επίσης μπορούμε να έχουμε και την εξής *πολική μορφή* για τον μιγαδικό αριθμό z :

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

όπου

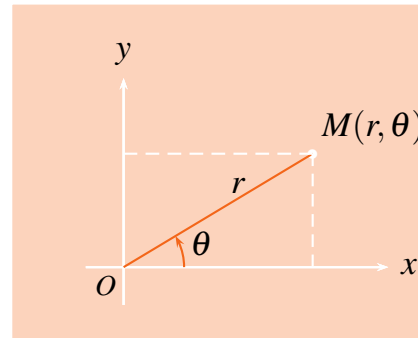
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{και} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Σ' αυτήν την παράσταση το r είναι μοναδικό αλλά όχι και το θ . Συνήθως θεωρούμε ότι το θ μεταβάλλεται σ' ένα διάστημα εύρους 2π και σαν τέτοιο χρησιμοποιούμε το $I = [0, 2\pi)$, δηλαδή $0 \leq \theta < 2\pi$.

Το r λέγεται *μέτρο* ή *απόλυτη τιμή* του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζεται με $r = |z|$ και το θ *όρισμα* ή *πολική γωνία* ή *φάση* του z και συμβολίζεται με $\theta = \arg z$. Ο αριθμός $x - iy$ λέγεται *συζυγής μιγαδικός* ή απλά *συζυγής* του z και θα συμβολίζεται με $\bar{z}$ ή z^* . Οι μιγαδικοί αριθμοί z και $\bar{z}$ παριστάνουν στο μιγαδικό επίπεδο σημεία, που είναι συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα Ox .

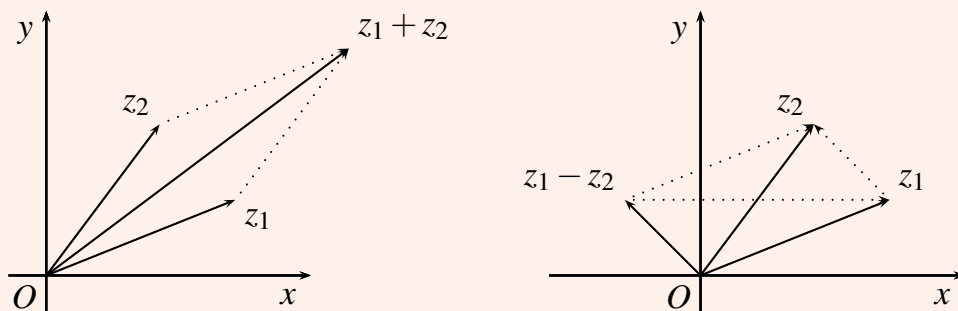
Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

1. $z\bar{z} = |z|^2 = r^2$
2. $z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = 2iy$
3. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$



Σχήμα 4.9: Πολικές συντεταγμένες

Οι μιγαδικοί αριθμοί ακολουθούν τον ίδιο κανόνα πρόσθεσης που ισχύει και για τα διανύσματα σε ένα επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να τους προσθέσουμε (ή να τους αφαιρέσουμε) χρησιμοποιώντας τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Αντίστροφα, οποιοδήποτε διάνυσμα σε ένα επίπεδο μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν μιγαδικό αριθμό.



Σχήμα 4.10: Κανόνας του παραλληλογράμμου

Σημείωση 4.9.1 . Αξιοποιώντας την ταύτιση $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, κάθε μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ αντιστοιχεί φυσικά στο διάνυσμα $\vec{z} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Με αυτή την ερμηνεία, μπορούμε να αποδώσουμε στις πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών γεωμετρική σημασία:

- Το γινόμενο $\Re(\bar{z}_1 z_2)$ παριστάνει το εσωτερικό (βαθμωτό) γινόμενο $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2$,
- Το γινόμενο $\Im(\bar{z}_1 z_2)$ παριστάνει το εξωτερικό (διανυσματικό) γινόμενο ως προσδιοριστή:

$$\vec{z}_1 \times \vec{z}_2 := \det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix}.$$

Αυτή η αναπαράσταση δεν εισάγει νέα πράξη στους $\mathbb{C}$, αλλά αξιοποιεί την αντιστοιχία με το $\mathbb{R}^2$ για γεωμετρική ερμηνεία.

Κατ' αναλογία με τα διανύσματα, έστω ότι δίνονται δύο μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

1. *Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο*: Το εσωτερικό γινόμενο των δύο αριθμών ορίζεται ως

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \cos \theta = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = \frac{\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2}{2},$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των z_1 και z_2 , η οποία κυμαίνεται από 0 έως π . Αυτό το γινόμενο είναι ένας πραγματικός αριθμός και μοιάζει με το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων.

2. *Εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο*: Το εξωτερικό γινόμενο των δύο αριθμών δίνεται από τη σχέση

$$z_1 \times z_2 = |z_1||z_2| \sin \theta = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2) = \frac{\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2}{2i}.$$

Αυτή η ποσότητα είναι επίσης ένας πραγματικός αριθμός και είναι ανάλογη με το διανυσματικό γινόμενο των διανυσμάτων. Εάν οι z_1 και z_2 είναι διαφορετικοί από το μηδέν, τότε ισχύουν οι εξής προτάσεις:

1. μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι οι z_1 και z_2 κάθετοι είναι το εσωτερικό γινόμενο $z_1 \cdot z_2 = 0$.
2. μια αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι οι z_1 και z_2 παράλληλοι είναι το εξωτερικό γινόμενο $z_1 \times z_2 = 0$.

με άλλα λόγια, το εσωτερικό γινόμενο δείχνει τη σχέση των γωνιών μεταξύ των μιγαδικών αριθμών, ενώ το εξωτερικό γινόμενο υποδεικνύει αν οι αριθμοί είναι παράλληλοι ή κάθετοι.

4.10 Ο τύπος του De Moivre και οι ρίζες των μιγαδικών αριθμών

Οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των μιγαδικών αριθμών είναι σχετικά εύκολες στην καρτεσιανή τους μορφή, δηλαδή όταν οι αριθμοί εκφράζονται ως $z = x + iy$. Ωστόσο, οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης είναι ακόμη πιο εύκολες όταν οι αριθμοί εκφράζονται στην πολική τους μορφή. Συγκεκριμένα, αν:

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{και} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2), \quad \text{με } r_2 \neq 0$$

τότε μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

Μια γενίκευση της σχέσης του πολλαπλασιασμού είναι η εξής:

$$z_1 z_2 \cdots z_n = r_1 r_2 \cdots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

Αν θέσουμε $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z$, τότε η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$z^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

Αυτή η σχέση ονομάζεται *τύπος του De Moivre* και μας δίνει την n -οστή δύναμη ενός μιγαδικού αριθμού.

Υπολογισμός n -οστής ρίζας

Η n -οστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού z ορίζεται ως ο μιγαδικός αριθμός w , έτσι ώστε να ισχύει:

$$w^n = z$$

Έστω $w = r_w [\cos \theta_w + i \sin \theta_w]$ και $z = r [\cos \theta + i \sin \theta]$. Η σχέση $w^n = z$ γράφεται με τη χρήση του τύπου του De Moivre:

$$r_w^n [\cos(n\theta_w) + i \sin(n\theta_w)] = r [\cos \theta + i \sin \theta]$$

Από τον ορισμό της ισότητας δύο μιγαδικών αριθμών, προκύπτει:

$$r_w^n = r \quad \text{και} \quad n\theta_w = \theta + 2k\pi, \quad \text{με } r_w, r > 0 \quad \text{και} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Αν τις δύο τελευταίες σχέσεις τις υψώσουμε στο τετράγωνο και τις προσθέσουμε, τότε:

$$r_w = \sqrt[n]{r}$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση του (1.8), έχουμε:

$$\cos n\theta_w = \cos \theta \quad \text{και} \quad \sin n\theta_w = \sin \theta$$

Άρα:

$$n\theta_w = \theta + 2k\pi \quad \implies \quad \theta_w = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Τελικά, η n -οστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ είναι:

$$w = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

4.11 Ο τύπος του Euler

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι n -οστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου n πλευρών, που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = \sqrt[n]{r}$ και κέντρο την αρχή των αξόνων.

Αν στο ανάπτυγμα MacLaurin της εκθετικής συνάρτησης

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

θέσουμε $x = i\theta$, επειδή η άπειρη αυτή σειρά συγκλίνει απολύτως για κάθε $x \in \mathbb{C}$ θα έχουμε:

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots$$

Ομαδοποιώντας τους πραγματικούς και τους φανταστικούς όρους, καταλήγουμε στην εξής σχέση:

$$e^{i\theta} = \left[1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right] + i \left[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \right] = \cos \theta + i \sin \theta$$

Η σχέση:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

ονομάζεται *τύπος του Euler*. Έτσι, ένας μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γραφεί υπό την εκθετική μορφή:

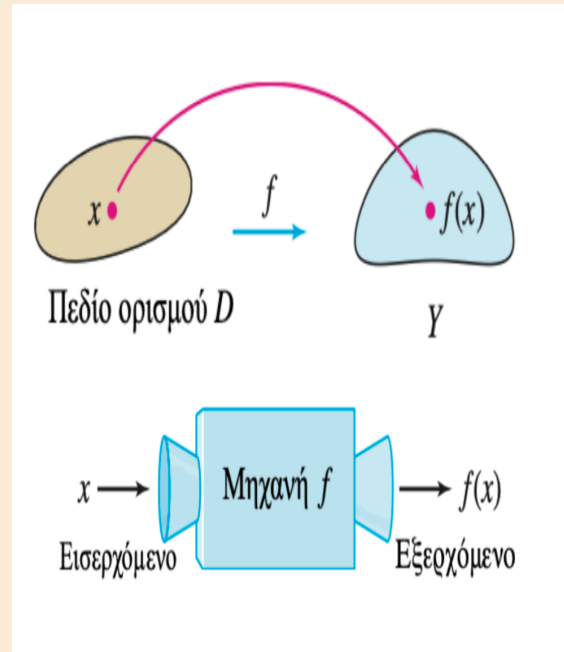
$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0$$

4.12 Η Έννοια της Συνάρτησης

Οι συναρτήσεις αποτελούν έναν από τους θεμελιώδεις πυλώνες των μαθηματικών, καθώς χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της σχέσης ανάμεσα σε δύο σύνολα δεδομένων. μια συνάρτηση δεν είναι τίποτα περισσότερο από έναν κανόνα, ο οποίος αντιστοιχίζει σε κάθε στοιχείο ενός συνόλου, που ονομάζεται *πεδίο ορισμού*, ένα μοναδικό στοιχείο ενός άλλου συνόλου, που ονομάζεται *πεδίο τιμών*. Η έννοια της συνάρτησης χρησιμοποιείται ευρέως σε διάφορους τομείς, όπως η φυσική, η μηχανική, η οικονομία και η πληροφορική, για να περιγράψει μεταβολές, εξαρτήσεις και σχέσεις. μια συνάρτηση μπορεί να απεικονιστεί γραφικά, να εκφραστεί με έναν μαθηματικό τύπο ή να περιγραφεί λεκτικά, ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματος. Η κατανόηση των συναρτήσεων είναι ουσιώδης για την ανάπτυξη αναλυτικής σκέψης και την επίλυση προβλημάτων. Στα επόμενα, θα διερευνήσουμε τον τρόπο με τον οποίο ορίζονται οι συναρτήσεις, πώς συμβολίζονται και ποιες είναι οι βασικές τους ιδιότητες. Αυτή η γνώση είναι το πρώτο βήμα για την κατανόηση πιο πολύπλοκων εννοιών των μαθηματικών και των εφαρμογών τους.

Ορισμός 4.12.1 . μια συνάρτηση από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B είναι ένας κανόνας ή διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα μοναδικό στοιχείο του συνόλου B .

- Το σύνολο A ονομάζεται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης f .
- Οι συναρτήσεις συνήθως συμβολίζονται με μικρά γράμματα, όπως f, g, h κ.λπ.
- Αν μια συνάρτηση f αντιστοιχίζει το στοιχείο $x \in A$ στο στοιχείο $y \in B$, τότε γράφουμε $y = f(x)$, που διαβάζεται ως « y είναι η τιμή της f στο x ».
- Η τιμή $f(x)$ λέγεται *τιμή της συνάρτησης f στο x* .
- Το γράμμα x , που αναφέρεται σε οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού, ονομάζεται *ανεξάρτητη μεταβλητή*.
- Το γράμμα y , που αναφέρεται στην τιμή της συνάρτησης f στο x , ονομάζεται *εξαρτημένη μεταβλητή*.
- Το σύνολο όλων των τιμών $f(x)$ για όλα τα $x \in A$ ονομάζεται *σύνολο τιμών της f* και συμβολίζεται ως $f(A)$.



Σχήμα 4.11: μια συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί ως ένας κανόνας ή μια διαδικασία που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο x από το πεδίο ορισμού D σε μια μοναδική τιμή $f(x)$ στο πεδίο τιμών Y . Οπτικά, μπορούμε να φανταστούμε τη συνάρτηση ως μια «μηχανή» που δέχεται το x ως είσοδο, το επεξεργάζεται σύμφωνα με τον καθορισμένο κανόνα και παράγει την έξοδο $f(x)$.

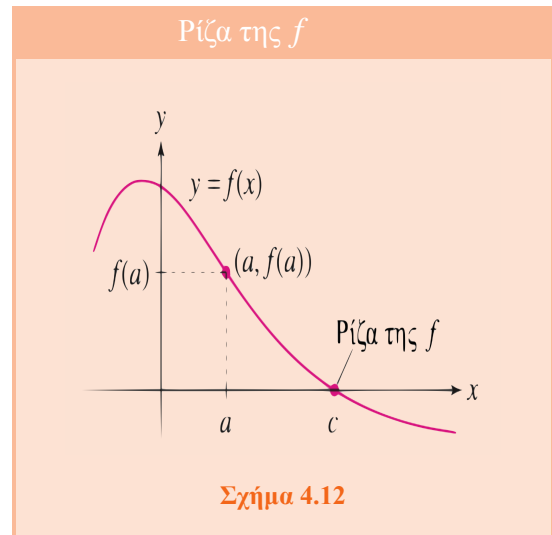
Όταν γράφουμε $y = f(x)$ για μια συνάρτηση f , αναφερόμαστε στο x ως την *ανεξάρτητη μεταβλητή* και στο y ως την *εξαρτημένη μεταβλητή*, επειδή η τιμή του y εξαρτάται από την επιλογή του x . Συνήθως, όταν εξετάζουμε συναρτήσεις f , μας ενδιαφέρει το πεδίο ορισμού D , δηλαδή το σύνολο των τιμών του x για τις οποίες η συνάρτηση f ορίζεται, καθώς και το σύνολο τιμών R , το οποίο περιέχει όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει η συνάρτηση $f(x)$. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9 - x}$ έχει ως φυσικό πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών x για τους οποίους $9 - x \geq 0$, δηλαδή $D = \{x : x \leq 9\}$. Παρακάτω, δίνεται ένας πίνακας με μερικά παραδείγματα συναρτήσεων, το πεδίο ορισμού τους και το σύνολο τιμών τους:

Πεδίο Ορισμού

$f(x)$	Πεδίο ορισμού D	Σύνολο τιμών R
x^2	$\mathbb{R}$	$\{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 1\}$
$\frac{1}{x+1}$	$\{x : x \neq -1\}$	$\{y \in \mathbb{R} : y \neq 0\}$

Αυτός ο πίνακας δείχνει ότι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών διαφέρουν ανάλογα με τον τύπο της συνάρτησης.

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $y = f(x)$ δημιουργείται σχεδιάζοντας τα σημεία $(a, f(a))$, όπου το a ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης D . Για να κατανοήσετε τη διαδικασία, μπορείτε να ξεκινήσετε από μια συγκεκριμένη τιμή $x = a$ στον οριζόντιο άξονα x , να κινηθείτε κάθετα προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και, στη συνέχεια, να κινηθείτε οριζόντια προς τον άξονα y , όπου θα βρείτε την τιμή της συνάρτησης $f(a)$. Η *ρίζα* ή το *σημείο μηδενισμού* μιας συνάρτησης είναι μια τιμή c τέτοια ώστε $f(c) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο $(c, 0)$ είναι σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον άξονα x . Δηλαδή, οι ρίζες της συνάρτησης είναι οι τιμές του x όπου η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x .



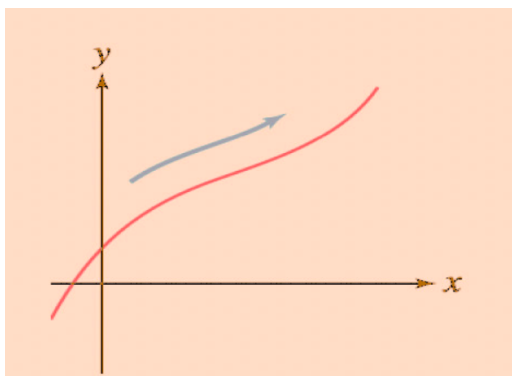
Σχήμα 4.12

Συχνά εξετάζουμε αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα σε ένα συγκεκριμένο διάστημα. Μια συνάρτηση χαρακτηρίζεται ως *αύξουσα* όταν, καθώς κινούμαστε προς τα δεξιά στον άξονα x , η γραφική της παράσταση ανεβαίνει. Αντίθετα, είναι *φθίνουσα* όταν η γραφική της παράσταση κατεβαίνει όσο κινούμαστε προς τα δεξιά. Αυτές οι ιδιότητες μας δίνουν μια πρώτη εικόνα για τη συμπεριφορά της συνάρτησης και βοηθούν στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο αλλάζει η τιμή της καθώς μεταβάλλεται η ανεξάρτητη μεταβλητή x . Για την ακριβή διατύπωση, ορίζουμε τις έννοιες της αύξουσας και φθίνουσας συνάρτησης σε ένα ανοικτό διάστημα, λαμβάνοντας υπόψη τη μονοτονία της, δηλαδή αν η συνάρτηση αυξάνει ή μειώνεται συνεχώς στο συγκεκριμένο διάστημα.

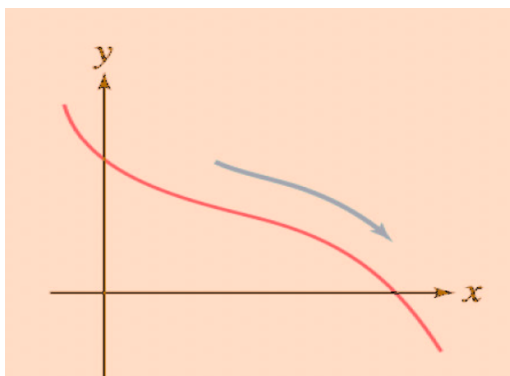
Ορισμός 4.12.2. μια συνάρτηση f είναι:

- Γνησίως αύξουσα στο (a, b) αν $f(x_1) < f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $x_1 < x_2$.
- Γνησίως φθίνουσα στο (a, b) αν $f(x_1) > f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $x_1 < x_2$.
- αύξουσα στο (a, b) αν $f(x_1) \leq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $x_1 < x_2$.
- φθίνουσα στο (a, b) αν $f(x_1) \geq f(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in (a, b)$ με $x_1 < x_2$.

Λέμε ότι η συνάρτηση f είναι (γνησίως) *μονότονη* αν είναι είτε (γνησίως) αύξουσα είτε (γνησίως) φθίνουσα.



(α): Η γραφική παράσταση μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης.



(β): Η γραφική παράσταση μιας γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.

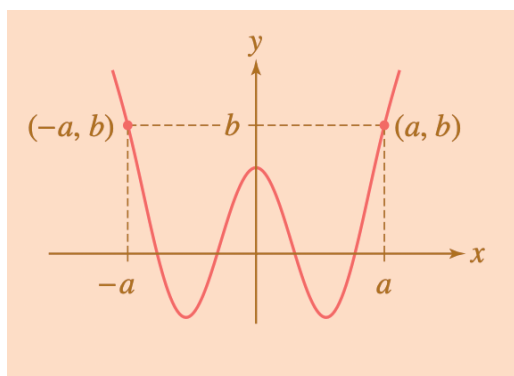
Μία άλλη σημαντική ιδιότητα των συναρτήσεων είναι η *ισοτιμία* ή *ομοτιμία*, η οποία αναφέρεται στο αν μια συνάρτηση είναι *άρτια* ή *περιττή*:

Ορισμός 4.12.3. Έστω $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση, όπου το πεδίο ορισμού D_f είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, δηλαδή $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$. Τότε λέμε ότι:

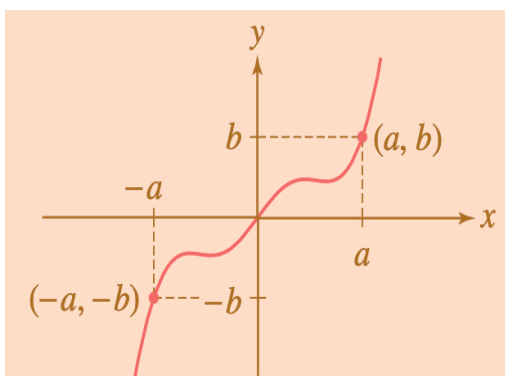
- Η f είναι *άρτια* αν $f(-x) = f(x)$.
- Η f είναι *περιττή* αν $f(-x) = -f(x)$.

Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με άρτια ή περιττή ισοτιμία έχουν μια ειδική συμμετρία:

- *Άρτια συνάρτηση:* Η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y . Αυτό σημαίνει ότι αν το $P = (a, b)$ ανήκει στη γραφική παράσταση, τότε ανήκει και το $Q = (-a, b)$ (Σχήμα (a)).
- *Περιττή συνάρτηση:* Η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων. Αυτό σημαίνει ότι αν το $P = (a, b)$ ανήκει στη γραφική παράσταση, τότε ανήκει και το $Q = (-a, -b)$ (Σχήμα (b)).



(a): Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης



(b): Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης

Παράδειγμα 4.12.4.

Να εξετάσετε πότε η συνάρτηση είναι άρτια, περιττή ή τίποτα από τα δύο.

(1) $f(x) = x^4$, (2) $g(x) = x^{-1}$, (3) $h(x) = x^2 + x$

Λύση:

1. Για τη συνάρτηση $f(x)$, έχουμε: $f(-x) = (-x)^4 = x^4$. Άρα, $f(x)$ είναι άρτια.
2. Για τη συνάρτηση $g(x)$, έχουμε: $g(-x) = (-x)^{-1} = -x^{-1}$. Άρα, $g(x)$ είναι περιττή.
3. Για τη συνάρτηση $h(x)$, έχουμε: $h(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$. Παρατηρούμε ότι το $h(-x) \neq h(x)$ και $h(-x) \neq -h(x)$. Άρα, $h(x)$ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

Περίληψη 4.12.5 .

- Σημαντικοί νόμοι των εκθετών:

(a) $b^x b^y = b^{x+y}$

(b) $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

(c) $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$

(d) $(b^x)^y = b^{xy}$

- Τύπος διωνυμικού αναπτύγματος: Το $(a + b)^n$ είναι ένα άθροισμα όρων

$$\frac{n!}{(n-p)!p!} a^{n-p} b^p,$$

με έναν όρο για κάθε p από 0 έως n .

- Απόλυτη τιμή:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{αν } a \geq 0 \\ -a & \text{αν } a < 0 \end{cases}$$

- Τριγωνική ανισότητα: $|a + b| \leq |a| + |b|$

- Τέσσερα διαστήματα με άκρα τα a και b :

$$(a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$$

- Αναπαράσταση ανοικτών και κλειστών διαστημάτων χρησιμοποιώντας ανισότητες με απόλυτη τιμή:

$$(a, b) = \{x : |x - c| < r\}, \quad [a, b] = \{x : |x - c| \leq r\}$$

όπου $c = \frac{1}{2}(a + b)$ είναι το μέσον και $r = \frac{1}{2}(b - a)$ είναι η ακτίνα.

- Απόσταση d μεταξύ (x_1, y_1) και (x_2, y_2) :

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Εξίσωση κύκλου με ακτίνα r και κέντρο (a, b) :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- Ένα σημείο μηδενισμού ή ρίζα μιας συνάρτησης f είναι ο αριθμός c τέτοιος ώστε $f(c) = 0$.

- Κριτήριο κατακόρυφης ευθείας: μια καμπύλη στο επίπεδο αποτελεί τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης του x αν και μόνο αν κάθε κατακόρυφη ευθεία $x = a$ τέμνει την καμπύλη το πολύ σε ένα σημείο.

- Γνησίως αύξουσα: $f(x_1) < f(x_2)$ αν $x_1 < x_2$

$$\text{Αύξουσα: } f(x_1) \leq f(x_2) \text{ αν } x_1 < x_2$$

$$\text{Γνησίως φθίνουσα: } f(x_1) > f(x_2) \text{ αν } x_1 < x_2$$

$$\text{Φθίνουσα: } f(x_1) \geq f(x_2) \text{ αν } x_1 < x_2$$

- Άρτια συνάρτηση: $f(-x) = f(x)$ (η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y).

- Περιττή συνάρτηση: $f(-x) = -f(x)$ (η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων).

Ασκήσεις 4.12.6 .

1. Να αναπαραστήσετε γραφικά κάθε ζεύγος σημείων και να υπολογίσετε τη μεταξύ τους απόσταση:
(a) $(1, 4)$ και $(3, 2)$
(b) $(2, 1)$ και $(2, 4)$
2. Να αναπαραστήσετε γραφικά κάθε ζεύγος σημείων και να υπολογίσετε τη μεταξύ τους απόσταση:
(a) $(0, 0)$ και $(-2, 3)$
(b) $(-3, -3)$ και $(-2, 3)$
3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο $(2, 4)$:
(a) με ακτίνα $r = 3$.
(b) Που διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$.
4. Να βρείτε όλα τα σημεία του επιπέδου xy με ακέραιες συντεταγμένες τα οποία βρίσκονται σε απόσταση 5 μονάδων από την αρχή των αξόνων. Στη συνέχεια, να βρείτε όλα τα σημεία με ακέραιες συντεταγμένες που απέχουν 5 μονάδες από το σημείο $(2, 3)$.
5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f: \{r, s, t, u\} \rightarrow \{A, B, C, D, E\}$$

που ορίζεται ως

$$f(r) = A, \quad f(s) = B, \quad f(t) = B, \quad f(u) = E.$$

6. Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης της οποίας το πεδίο ορισμού D έχει τρία στοιχεία και το σύνολο τιμών R έχει δύο στοιχεία. Υπάρχει συνάρτηση τέτοια ώστε το πεδίο ορισμού D να έχει δύο στοιχεία και το σύνολο τιμών R να έχει τρία στοιχεία;
7. Στις κάτωθι συναρτήσεις να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών κάθε συνάρτησης. $f(x) = -x$, $g(t) = t^4$, $f(x) = x^3$, $g(t) = \sqrt{2-t}$, $f(x) = |x|$, $h(s) = \frac{1}{s}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$.
8. Στις κάτωθι συναρτήσεις να εξετάσετε αν η f είναι αύξουσα ή φθίνουσα.
 $f(x) = |x+1|$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, $f(x) = \frac{1}{x^4+x^2+1}$.
9. Προσδιορίστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, περιττές ή τίποτα από τα δύο:
 $f(x) = x^5$, $g(t) = t^3 - t^2$, $F(t) = \frac{1}{t^4+t^2}$.
10. Προσδιορίστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, περιττές ή τίποτα από τα δύο:
 $f(x) = 2x - x^2$, $k(w) = (1-w)^3 + (1+w)^3$, $f(t) = \frac{1}{t^4+t+1} - \frac{1}{t^4-t+1}$, $g(t) = 2^t - 2^{-t}$.
11. Γράψτε την $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 12x^2 - 3x + 4$ ως άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης.
12. Έστω ότι η p είναι μια συνάρτηση που ορίζεται για κάθε x .
13. Δείξτε ότι αν η f ορίζεται ως $f(x) = p(x) + p(-x)$, τότε είναι άρτια.
14. Δείξτε ότι αν η g ορίζεται ως $g(x) = p(x) - p(-x)$, τότε είναι περιττή.
15. Έστω ότι η p είναι μια συνάρτηση που ορίζεται για $x > 0$ και ικανοποιεί τη συνθήκη $p(a/b) = p(b) - p(a)$. Να δείξετε ότι η $f(x) = p\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ είναι περιττή συνάρτηση.

4.13 Συνοπτική Παρουσίαση: Γραμμικές και Τετραγωνικές Συναρτήσεις

1. μια γραμμική συνάρτηση έχει τη μορφή $f(x) = ax + b$.
2. Η γενική εξίσωση μιας ευθείας είναι $ay + bx = c$. Η ευθεία $y = c$ είναι οριζόντια και $x = c$ είναι κατακόρυφη.
3. Δύο βολικοί τρόποι για να γράψουμε την εξίσωση μιας μη κάθετης ευθείας είναι:
 - (i) μορφή κλίσης-τεταγμένης επί την αρχή: $y = ax + b$ (κλίση a και τεταγμένη επί την αρχή b).
 - (ii) μορφή σημείου-κλίσης: $y - \lambda = (x - \kappa)$ [κλίση λ , διέρχεται από το σημείο (κ, λ)].
4. Δύο ευθείες με κλίσεις a_1 και a_2 είναι:
 - (i) Παράλληλες αν και μόνο αν $a_1 = a_2$.
 - (ii) Κάθετες αν και μόνο αν $a_1 = -\frac{1}{a_2}$, $a_2 \neq 0$.
5. Δευτεροβάθμια συνάρτηση: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Οι ρίζες είναι:
 - (i) $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, όπου $D \geq 0$ με $D = b^2 - 4ac$.
 - (ii) Οι ρίζες είναι πραγματικές και διακριτές αν $D > 0$.
 - (iii) Υπάρχει μία διπλή ρίζα αν $D = 0$.
 - (iv) Δεν υπάρχουν πραγματικές ρίζες αν $D < 0$.
6. Η συμπλήρωση του τετραγώνου συνίσταται στην έκφραση της δευτεροβάθμιας συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$ ως το άθροισμα του πολλαπλασίου ενός τετραγώνου και μίας σταθεράς, δηλαδή ως $f(x) = a(x + p)^2 + q$.

Ασκήσεις 4.13.1 .

1. Να βρείτε την κλίση, την τεταγμένη επί την αρχή και την τεμνόμενη επί την αρχή για τις ευθείες που δίνονται
(a) $y = 3x + 12$, (b) $y = 4 - x$, (c) $4x + 9y = 3$, και (d) $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 6)$.
2. Να βρείτε την κλίση κάθε ευθείας:
(a) $y = 3x + 2$, (b) $y = 3(x - 9) + 2$, (c) $3x + 4y = 12$, και (d) $3x + 4y = -8$.
3. Να βρείτε την εξίσωση κάθε ευθείας από την περιγραφή που δίνεται
(1) Κλίση 3, τεταγμένη επί την αρχή 8.
(2) Κλίση -2 , τεταγμένη επί την αρχή 3.
(3) Κλίση 3, διέρχεται από το $(7, 9)$.
(4) Κλίση -5 , διέρχεται από το $(0, 0)$.
(5) Οριζόντια, διέρχεται από το $(0, -2)$,
(6) Διέρχεται από τα $(-1, 4)$ και $(2, 7)$,
(7) Παράλληλη στην $y = 3x - 4$, διέρχεται από το $(1, 1)$,
(8) Διέρχεται από τα $(1, 4)$ και $(12, -3)$,
(9) Κάθετη στην $3x + 5y = 9$, διέρχεται από το $(2, 3)$,
(10) Κατακόρυφη, διέρχεται από το $(-4, 9)$,
(11) Οριζόντια, διέρχεται από το $(8, 4)$,
(12) Κλίση 3, τεταγμένη επί την αρχή 6.
4. Εξετάστε αν τα σημεία $(0.5, 1)$, $(1, 1.2)$, $(2, 2)$ είναι συνευθειακά.
5. Βρείτε το b έτσι ώστε τα σημεία $(2, -1)$, $(3, 2)$ και $(b, 5)$ να είναι συνευθειακά.
6. Δείξτε ότι η f είναι γραμμική συνάρτηση κλίσης a αν και μόνο αν $f(x + h) - f(x) = ah$ (για κάθε x και h). Δηλαδή, αποδείξτε τις παρακάτω δύο προτάσεις:
(a) Το γεγονός ότι η f είναι γραμμική με κλίση a συνεπάγεται ότι $f(x + h) - f(x) = ah$ (για κάθε x και h).
(b) Το γεγονός ότι $f(x + h) - f(x) = ah$ (για κάθε x και h) συνεπάγεται ότι η f είναι γραμμική με κλίση a .
7. Βρείτε τις ρίζες των δευτεροβάθμιων πολυωνύμων:
(a) $f(x) = 4x^2 - 3x - 1$,
(b) $f(x) = x^2 - 2x - 1$.
8. Για ποιες τιμές του c έχει η συνάρτηση $f(x) = x^2 + cx + 1$ μία διπλή ρίζα; Για ποιες τιμές δεν έχει πραγματικές ρίζες;

- Δείξτε ότι η παραβολή $y = x^2$ αποτελείται από όλα τα σημεία P με $d_1 = d_2$, όπου d_1 είναι η απόσταση του P από το σημείο $(0, \frac{1}{4})$ και d_2 είναι η απόσταση του P από την ευθεία $y = -\frac{1}{4}$ (Σχήμα 2.13).



4.14 Οι βασικές κατηγορίες συναρτήσεων

Η βασική ιδιότητα μιας συνάρτησης είναι ότι κάθε στοιχείο από το πεδίο ορισμού της αντιστοιχίζεται σε μία μοναδική τιμή από το σύνολο τιμών της. Ο τρόπος με τον οποίο ορίζεται η σχέση αυτή μπορεί να περιγραφεί μέσω τύπων, γραφημάτων ή ακόμα και απλών περιγραφών. Παρόλα αυτά, η σχέση μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκη και να μην έχει απλή περιγραφή. Στα μαθηματικά ορίζονται πάρα πολλές διαφορετικές συναρτήσεις, αλλά στον Λογισμό ασχολούμαστε μόνο με συγκεκριμένες κατηγορίες συναρτήσεων που είναι “καλά συμπεριφερόμενες”. Αυτές είναι κατάλληλες για τις περισσότερες εφαρμογές και τις χρησιμοποιούμε όταν αναλύουμε έννοιες, όπως οι παράγωγοι.

Οι σημαντικότερες κατηγορίες “καλά συμπεριφερόμενων” συναρτήσεων περιλαμβάνουν:

Βασικές συναρτήσεις

- Πολυωνυμικές συναρτήσεις
- Ρητές συναρτήσεις
- Αλγεβρικές συναρτήσεις
- Εκθετικές συναρτήσεις
- Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
- Λογαριθμικές συναρτήσεις
- Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Θα αναφερόμαστε σε αυτές ως οι *βασικές συναρτήσεις*.

4.15 Πολύωνυμα, Ρητές και Αλγεβρικές Συναρτήσεις

Πολύωνυμα

Για κάθε πραγματικό αριθμό n , μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = ax^n$ ονομάζεται *συνάρτηση δύναμης* με εκθέτη n και συντελεστή $a \in \mathbb{R}$. Παραδείγματα περιλαμβάνουν τις συναρτήσεις $f(x) = x^3$, $f(x) = x^{-7}$ και $f(x) = x^\pi$. Η βάση είναι η μεταβλητή x και ο εκθέτης είναι μια σταθερά. Ένα *πολύωνμο* είναι το άθροισμα συναρτήσεων δύναμης με εκθέτες οι οποίοι είναι θετικοί ακέραιοι ή μηδέν. Ένα πολύωνμο μπορεί να γραφεί ως

Πολύωνμο με πραγματικούς συντελεστές και βαθμό n

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

όπου:

- Τα $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι οι συντελεστές.
- Ο βαθμός του πολωνύμου P είναι n (υποθέτουμε ότι $a_n \neq 0$).
- Ο a_n ονομάζεται κύριος συντελεστής.

Το πεδίο ορισμού των πολυωνυμικών συναρτήσεων είναι το σύνολο $\mathbb{R}$.

4.15.1 Ρητές Συναρτήσεις

μια *ρητή συνάρτηση* ορίζεται ως το πηλίκο δύο πολυωνυμικών συναρτήσεων, δηλαδή:

Ρητή συνάρτηση

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

όπου $P(x)$ και $Q(x)$ είναι πολυώνυμα και $Q(x) \neq 0$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους $Q(x) \neq 0$. Παραδείγματα: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, με πεδίο ορισμού: $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$ και $h(t) = \frac{t^6 + t^3 - 3t - 1}{t^2 - 1}$, με πεδίο ορισμού: $\{t \in \mathbb{R} : t \neq \pm 1\}$. Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι επίσης ρητή (με $Q(x) = 1, f(x) = \frac{P(x)}{1}$).

Αλγεβρικές Συναρτήσεις

μια *αλγεβρική συνάρτηση* προκύπτει ως αποτέλεσμα αθροισμάτων, γινομένων ή ριζών πολυωνυμικών συναρτήσεων. Για παράδειγμα:

$$f(x) = \sqrt{1 + 3x^2 - x^4}, \quad g(t) = (\sqrt{t} - 2)^{-2}.$$

Το πεδίο ορισμού κάθε αλγεβρικής συνάρτησης εξαρτάται από το αν υπάρχουν προβλήματα ορισμού, όπως διαίρεση με το μηδέν ή αρνητικές ρίζες.

Υπερβατικές Συναρτήσεις

Κάθε συνάρτηση που δεν ανήκει στην κατηγορία των αλγεβρικών ονομάζεται *υπερβατική*. Παραδείγματα περιλαμβάνουν τις εκθετικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Οι υπερβατικές συναρτήσεις είναι εξαιρετικά σημαντικές στα μαθηματικά και τη φυσική, και περιγράφουν φαινόμενα που δεν μπορούν να αναπαρασταθούν μέσω πολυωνυμικών σχέσεων.

Εκθετικές και Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Εκθετικές συναρτήσεις: Η συνάρτηση $f(x) = b^x$, όπου $b > 0$ και $b \neq 1$, ονομάζεται εκθετική συνάρτηση με βάση b . Μερικά παραδείγματα είναι:

$$f(x) = 2^x, \quad g(t) = 10^t, \quad h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \quad p(t) = (\sqrt{5})^t.$$

Οι εκθετικές συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους, οι λογαριθμικές συναρτήσεις, αντιμετωπίζονται με περισσότερη λεπτομέρεια σε παρακάτω ενότητα.

Τριγωνομετρικές συναρτήσεις: Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις που κατασκευάζονται από $\sin x$ και $\cos x$. Αυτές οι συναρτήσεις και οι αντίστροφές τους θα μελετηθούν σε επόμενη ενότητα.

Κατασκευή νέων συναρτήσεων

Αν δίνονται οι συναρτήσεις f και g , μπορούμε να κατασκευάσουμε νέες συναρτήσεις παίρνοντας το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο συναρτήσεων:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{με } g(x) \neq 0).$$

Σε ό,τι αφορά τα πεδία ορισμού:

Για το άθροισμα, τη διαφορά και το γινόμενο δύο συναρτήσεων f και g ισχύει:

$$D_{f \pm g} = D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

Για το πηλίκο $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$, απαιτείται επιπλέον να ισχύει ότι $g(x) \neq 0$, άρα:

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}.$$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sin x$, τότε:

$$(f+g)(x) = x^2 + \sin x, \quad (f-g)(x) = x^2 - \sin x,$$

$$(fg)(x) = x^2 \sin x, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\sin x}.$$

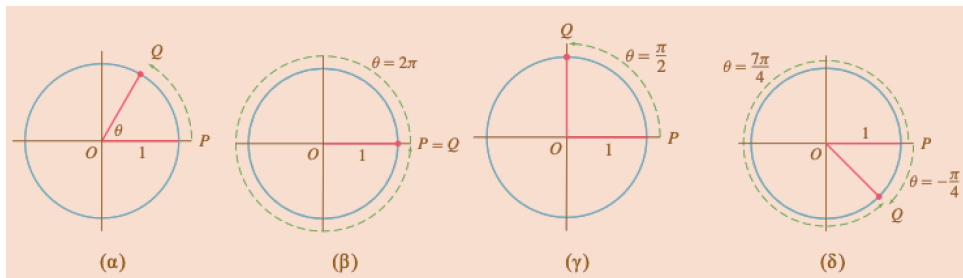
μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάσουμε συναρτήσεις με σταθερές. Μια συνάρτηση της μορφής

$$h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x) \quad (c_1, c_2 \text{ σταθερές})$$

ονομάζεται *γραμμικός συνδυασμός των f και g* .

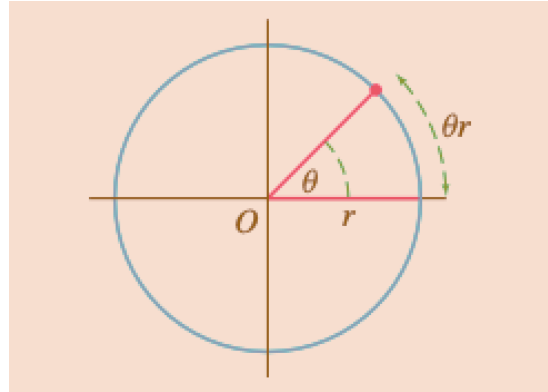
4.16 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Θα ξεκινήσουμε την τριγωνομετρική μας ανασκόπηση με την υπενθύμιση των δύο συστημάτων αρίθμησης της γωνίας: ακτίνια και μοίρες. Περιγράφονται με τον καλύτερο τρόπο χρησιμοποιώντας σχέσεις μεταξύ γωνιών και περιστροφής. Όπως συνηθίζεται, χρησιμοποιούμε συχνά το πεζό γράμμα θ για να συμβολίσουμε γωνίες και στροφές.



Σχήμα 4.14: Το μέτρο της γωνίας θ μιας αντι-ωρολογιακής περιστροφής σε ακτίνια είναι το μήκος τόξου πάνω στον μοναδιαίο κύκλο που διαγράφει το σημείο P καθώς περιστρέφεται προς το Q .

Το Σχήμα 4.14 (α) δείχνει έναν μοναδιαίο κύκλο με ακτίνα $\overline{OP}$ να περιστρέφεται αντι-ωρολογιακά προς την ακτίνα OQ . Το μέτρο αυτής της περιστροφής σε ακτίνια είναι το μήκος του κυκλικού τόξου που διαγράφει το σημείο P καθώς περιστρέφεται προς το Q . Σε έναν κύκλο ακτίνας r το τόξο που διαγράφεται από μια αντι-ωρολογιακή περιστροφή θ ακτινίων έχει μήκος θr (Σχήμα 4.28). Ο μοναδιαίος κύκλος έχει περίμετρο 2π . Επομένως, μια πλήρης περιστροφή κατά μήκος του κύκλου έχει μέτρο σε ακτίνια $\theta = 2\pi$ (Σχήμα 4.14 (β)). Το μέτρο σε ακτίνια κατά το ένα τέταρτο του κύκλου είναι $\theta = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ (Σχήμα 4.14 (γ)) και, γενικώς, η περιστροφή κατά το ένα- n -οστό του κύκλου έχει μέτρο σε ακτίνια $\frac{2\pi}{n}$ (Σχήμα 4.16). Μια αρνητική περιστροφή (με $\theta < 0$) είναι μια στροφή κατά την ωρολογιακή φορά (Σχήμα 4.14 (δ)). Το μέτρο σε ακτίνια μιας γωνίας όπως η $\angle POQ$ στο Σχήμα 4.14 (α) ορίζεται ως το μέτρο σε ακτίνια μιας περιστροφής που στρέφει το OP πάνω στο OQ .



Σχήμα 4.15: Σε κύκλο ακτίνας r , το τόξο που διαγράφεται από μία αντι-ωρολογιακή περιστροφή θ ακτινίων έχει μήκος θr .

Περιστροφή	Μέτρο σε ακτίνια
Δύο πλήρεις κύκλοι	4π
Πλήρης κύκλος	2π
Ημικύκλιο	π
Τεταρτοκύκλιο	$2\pi/4 = \pi/2$
Ένα έκτο του κύκλου	$2\pi/6 = \pi/3$

Πίνακας 4.16: μέτρα σε ακτίνια για διαφορετικές περιστροφές.

Παρατηρήστε όμως ότι το μέτρο μιας γωνίας σε ακτίνια δεν είναι μοναδικό. Οι περιστροφές κατά θ και $\theta + 2\pi$ στρέφουν και οι δύο το OP πάνω στο OQ . Επομένως, οι θ και $\theta + 2\pi$ αναπαριστούν την ίδια γωνία, αν και η περιστροφή κατά $\theta + 2\pi$ συμπληρώνει επιπλέον έναν πλήρη κύκλο.

Γενικά, δύο μέτρα σε ακτίνια αναπαριστούν την ίδια γωνία αν οι αντίστοιχες περιστροφές διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π . Για παράδειγμα, οι:

$$\frac{\pi}{4}, \quad \frac{9\pi}{4}, \quad \text{και} \quad -\frac{15\pi}{4}$$

αναπαριστούν όλες την ίδια γωνία αφού διαφέρουν κατά πολλαπλάσια του 2π :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} - 2\pi = -\frac{15\pi}{4} + 4\pi.$$

Κάθε γωνία έχει ένα μοναδικό μέτρο σε ακτίνια που ικανοποιεί τη σχέση $0 \leq \theta < 2\pi$. Με αυτή την επιλογή, η γωνία θ βαίνει σε ένα τόξο μήκους $r\theta$ σε έναν κύκλο ακτίνας r (Σχήμα 4.28).

Οι μοίρες ορίζονται διαιρώντας έναν κύκλο (όχι απαραίτητα τον μοναδιαίο κύκλο) σε 360 ίσα μέρη. Μία μοίρα είναι το $\frac{1}{360}$ ενός κύκλου. Μία περιστροφή κατά θ μοίρες (συμβολίζεται ως $^\circ$) είναι μια περιστροφή κατά $\frac{\theta}{360}$ ενός πλήρους κύκλου. Για παράδειγμα, μια περιστροφή κατά 90° είναι μια περιστροφή κατά

$$\frac{90}{360} = \frac{1}{4} \text{ ενός κύκλου.}$$

Όπως με τα ακτίνια, το μέτρο μιας γωνίας σε μοίρες δεν είναι μοναδικό. Δύο μέτρα σε μοίρες αναπαριστούν την ίδια γωνία αν διαφέρουν κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 360. Για παράδειγμα, οι γωνίες -45° και 675° συμπίπτουν καθώς $675 = -45 + 2(360)$. Κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο θ σε μοίρες με $0 \leq \theta < 360$. Για τη μετατροπή μεταξύ ακτίνων και μοιρών θυμηθείτε ότι 2π ακτίνια είναι ίσα με 360° . Επομένως, 1 ακτίνο ισοδυναμεί με $360/2\pi$ ή $180/\pi$ μοίρες.

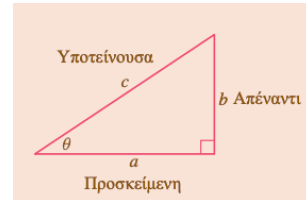
Ακτίνια	Μοίρες
0	0°
$\frac{\pi}{6}$	30°
$\frac{\pi}{4}$	45°
$\frac{\pi}{3}$	60°
$\frac{\pi}{2}$	90°

Πίνακας 4.17: Για να μετατρέψουμε τα ακτίνια σε μοίρες πολλαπλασιάζουμε τις μοίρες με $\frac{180}{\pi}$. Για να μετατρέψουμε τις μοίρες σε ακτίνια πολλαπλασιάζουμε τα ακτίνια με $\frac{\pi}{180}$.

Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημίτονο και συνημίτονο μπορούν να οριστούν με όρους ορθογώνιων τριγώνων. Έστω θ μια οξεία γωνία σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και έστω ότι ονομάζουμε τις πλευρές όπως στο Σχήμα 4.19. Τότε

$$\sin \theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}}, \quad \cos \theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{προσκειμένη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

Σχήμα 4.18



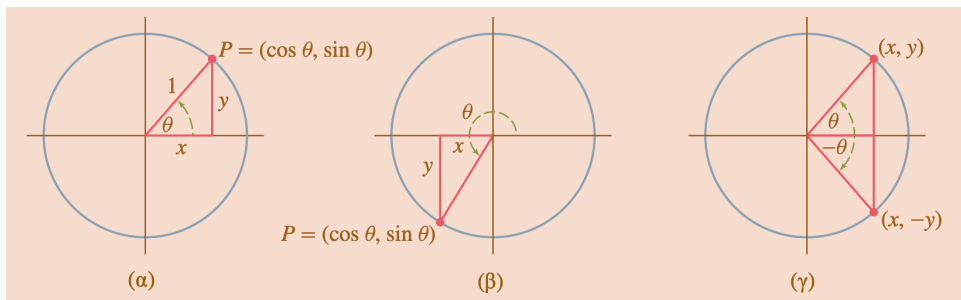
Σχήμα 4.19

Ωστόσο, αυτός ο ορισμός έχει το μειονέκτημα ότι δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε γωνίες μεγαλύτερες από $\pi/2$ ή μικρότερες από 0. Για να ξεπεραστεί αυτό, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις επεκτείνονται χρησιμοποιώντας τον μοναδιαίο κύκλο. Έστω ότι $P = (x, y)$ είναι ένα σημείο στον μοναδιαίο κύκλο που αντιστοιχεί στη γωνία θ . Τότε:

$\cos \theta =$ η τετμημένη x του σημείου P , $\sin \theta =$ η τεταγμένη y του σημείου P .

Αυτοί οι ορισμοί καλύπτουν όλες τις γωνίες θ και αντιστοιχούν στον κλασικό ορισμό του ορθογώνιου τριγώνου για γωνίες θ μεταξύ 0 και $\pi/2$. Η επέκταση αυτή καθιστά τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις χρήσιμες όχι μόνο στη γεωμετρία του τριγώνου αλλά και σε περιβάλλοντα όπου οι γωνίες μπορεί να υπερβαίνουν τα 90° , όπως στη φυσική, στις ταλαντώσεις, και σε πολικές συντεταγμένες.

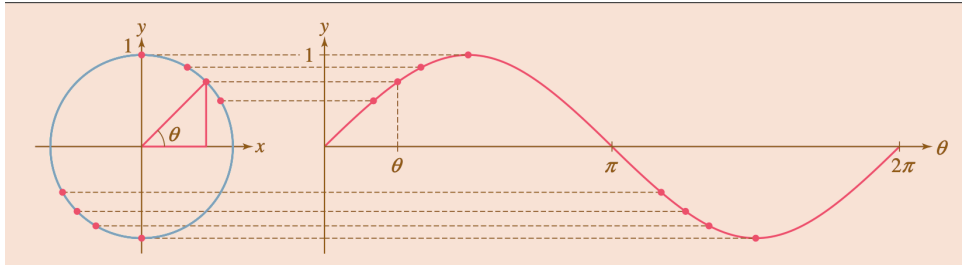
Επιπλέον, βλέπουμε από το Σχήμα 4.20(γ) ότι η $f(\theta) = \sin \theta$ είναι περιττή συνάρτηση και η $f(\theta) = \cos \theta$ είναι άρτια συνάρτηση:



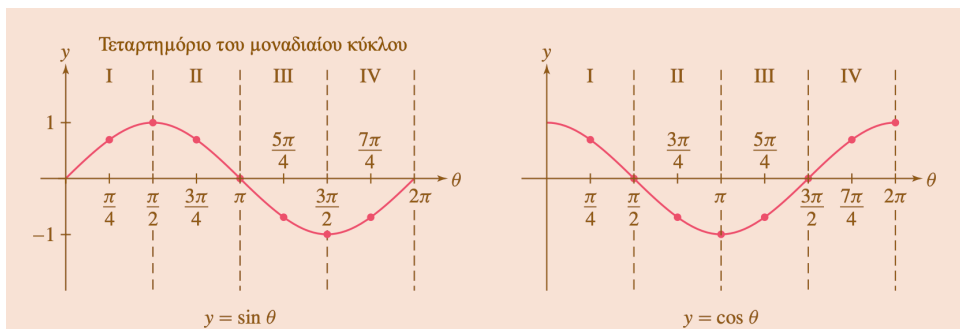
Σχήμα 4.20

Η γραφική παράσταση της $y = \sin \theta$ είναι το γνωστό «ημιτονοειδές κύμα» που απεικονίζεται στο Σχήμα 4.21. Παρατηρήστε πώς παράγεται η γραφική παράσταση από τη συντεταγμένη y του

σημείου $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ καθώς κινείται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο. Η γραφική παράσταση της $y = \cos \theta$ έχει το ίδιο σχήμα αλλά είναι μετατοπισμένη προς τα αριστερά κατά $\pi/2$ μονάδες (Σχήμα 4.22). Τα πρόσημα των $\sin \theta$ και $\cos \theta$ μεταβάλλονται καθώς το $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ αλλάζει τεταρτημόριο.



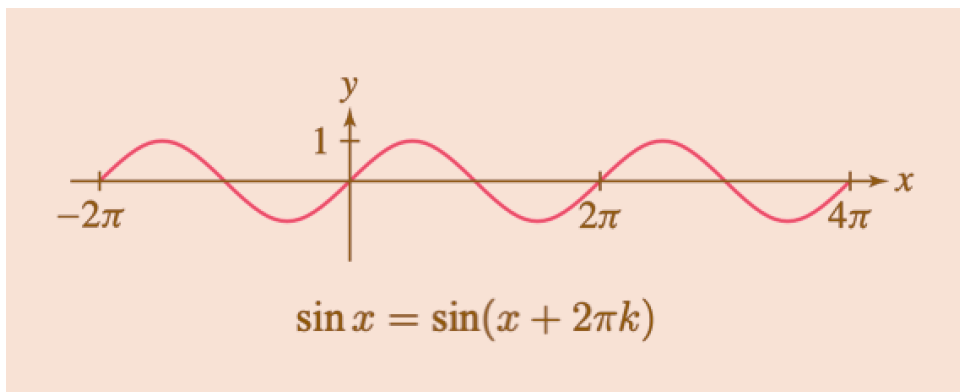
Σχήμα 4.21: Η γραφική παράσταση της $y = \sin \theta$ παράγεται καθώς το σημείο $P = (\cos \theta, \sin \theta)$ κινείται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.



Σχήμα 4.22: Γραφικές παραστάσεις των $y = \sin \theta$ και $y = \cos \theta$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

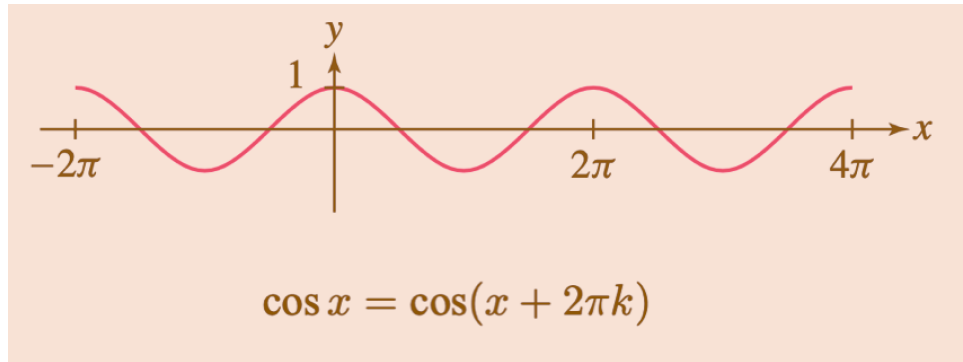
Ορισμός 4.16.1 . μια συνάρτηση f λέγεται *περιοδική* με περίοδο T αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x + T) = f(x)$ και T είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός με αυτή την ιδιότητα.

Η συνάρτηση του ημιτόνου είναι περιοδική με περίοδο $T = 2\pi$ (Σχήμα 4.23) επειδή τα μέτρα σε ακτίνια x και $x + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο του μοναδιαίου κύκλου για κάθε ακέραιο k :



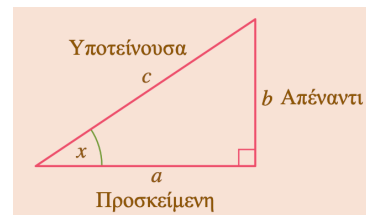
Σχήμα 4.23: Γραφικές παραστάσεις των $y = \sin \theta$ και $y = \cos \theta$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Τό ίδιο ισχύει και για την συνάρτηση του συνημιτόνου (Σχήμα 4.24).



Σχήμα 4.24: Γραφικές παραστάσεις των $y = \sin \theta$ και $y = \cos \theta$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

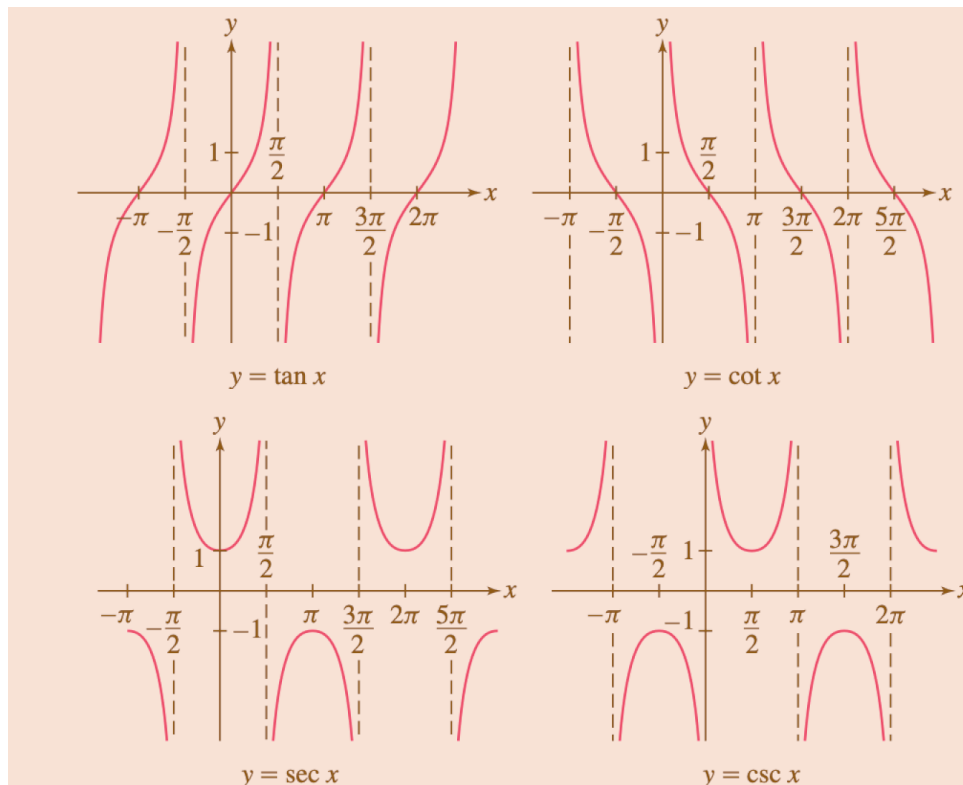
Υπάρχουν τέσσερις ακόμη τυπικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις, κάθε μία από τις οποίες ορίζεται είτε ως συνάρτηση των $\sin x$ και $\cos x$ είτε ως λόγοι πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου (Σχήμα 4.26):



Σχήμα 4.26

Εφαπτομένη:	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{b}{a}$,	Συνεφαπτομένη:	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{a}{b}$
Τέμνουσα:	$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{c}{a}$,	Συντέμνουσα:	$\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{c}{b}$

Αυτές οι συναρτήσεις είναι περιοδικές (Σχήμα 10): Οι $y = \tan x$ και $y = \cot x$ έχουν περίοδο π και οι $y = \sec x$ και $y = \csc x$ έχουν περίοδο 2π .



Σχήμα 4.27: Γραφικές παραστάσεις των καθιερωμένων τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Όπως με τα ακτίνια, το μέτρο μιας γωνίας σε μοίρες δεν είναι μοναδικό. Δύο μέτρα σε μοίρες αναπαριστούν την ίδια γωνία αν διαφέρουν κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 360. Για παράδειγμα, οι γωνίες -45° και 675° συμπίπτουν καθώς $675 = -45 + 2(360)$. Κάθε γωνία έχει μοναδικό μέτρο θ σε μοίρες με $0 \leq \theta < 360$. Για τη μετατροπή μεταξύ ακτίνων και μοιρών θυμηθείτε ότι 2π ακτίνια είναι ίσα με 360° . Επομένως, 1 ακτίνο ισοδυναμεί με $360/2\pi$ ή $180/\pi$ μοίρες.

Ακτίνια	Μοίρες
0	0°
$\frac{\pi}{6}$	30°
$\frac{\pi}{4}$	45°
$\frac{\pi}{3}$	60°
$\frac{\pi}{2}$	90°

Πίνακας 4.28: Για να μετατρέψουμε τα ακτίνια σε μοίρες πολλαπλασιάζουμε τις μοίρες με $\frac{180}{\pi}$. Για να μετατρέψουμε τις μοίρες σε ακτίνια πολλαπλασιάζουμε τα ακτίνια με $\frac{\pi}{180}$.

4.17 Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

Οι τριγωνομετρικές ταυτότητες είναι βασικές ιδιότητες που ικανοποιούνται από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, όπως το ημίτονο ($\sin x$) και το συνημίτονο ($\cos x$). Η πιο θεμελιώδης τριγωνομετρική ταυτότητα προκύπτει από το Πυθαγόρειο θεώρημα και εκφράζεται ως:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Αυτή η εξίσωση είναι γνωστή ως η *Πυθαγόρεια Ταυτότητα*. Αποτελεί τη βάση για πολλές άλλες τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Ισοδύναμες εκφράσεις προκύπτουν με διαίρεση της παραπάνω εξίσωσης με $\cos^2 x$ ή $\sin^2 x$, συγκεκριμένα έχουμε:

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Αυτές οι δύο ταυτότητες (2) είναι εξίσου σημαντικές και συχνά χρησιμοποιούνται για τη λύση προβλημάτων που περιλαμβάνουν τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Ακολουθεί ένας πίνακας που περιλαμβάνει μερικές από τις πιο κοινές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

Συμπληρωματικές γωνίες: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

Τύποι πρόσθεσης: $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

Τύποι διπλάσιου τόξου: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$

Τύποι μετατόπισης: $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

Παράδειγμα 4.17.1 .

Για θ μεταξύ 0 και 2π η εξίσωση $\cos \theta = \frac{2}{5}$ έχει μία λύση στο διάστημα $(0, \pi/2)$ και μία στο $(3\pi/2, 2\pi)$. Να υπολογίσετε την $\tan \theta$ σε κάθε περίπτωση.

Λύση

Αρχικά, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ παίρνουμε

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Αν $0 < \theta < \pi/2$, τότε το $\sin \theta$ είναι θετικό και παίρνουμε τη θετική τετραγωνική ρίζα:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{21}/5}{2/5} = \frac{\sqrt{21}}{2}$$

Για να παραστήσουμε αυτόν τον υπολογισμό, σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με γωνία θ έτσι ώστε $\cos \theta = \frac{2}{5}$. Τότε από το πυθαγόρειο η απέναντι πλευρά έχει μήκος $\sqrt{21} = \sqrt{5^2 - 2^2}$. Αν $3\pi/2 < \theta < 2\pi$, τότε το $\sin \theta$ είναι αρνητικό και

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{21}}{2}.$$

Θεώρημα 4.17.2 . Νόμος των συνημιτόνων Αν ένα τρίγωνο έχει πλευρές a , b και c , και θ είναι η γωνία απέναντι από την πλευρά c , τότε ισχύει:

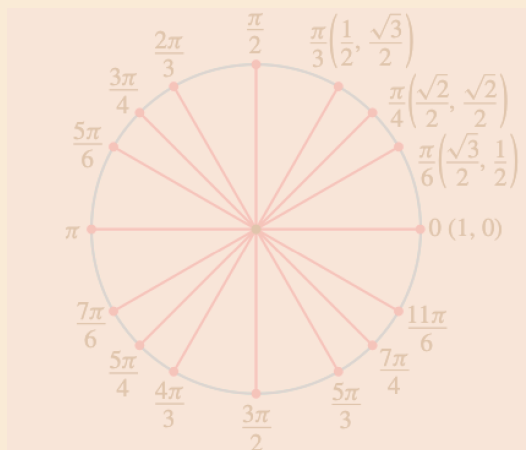
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta.$$

Ασκήσεις 4.17.3.

1. Βρείτε τη γωνία μεταξύ 0 και 2π που είναι ισοδύναμη με την $13\pi/4$.
2. Περιγράψτε τη $\theta = \pi/6$ με μία γωνία αρνητικού μέτρου σε ακτίνα.
3. Να μετατρέψετε τις παρακάτω γωνίες από ακτίνα σε μοίρες:
 - a. Βρείτε τη γωνία μεταξύ 0 και 2π που είναι ισοδύναμη με την $13\pi/4$.
 - b. Περιγράψτε τη $\theta = \pi/6$ με μία γωνία αρνητικού μέτρου σε ακτίνα.
 - c. Να μετατρέψετε τις παρακάτω γωνίες από ακτίνα σε μοίρες:

$$1 \qquad \pi/3 \qquad \frac{5}{12} \qquad -\frac{3\pi}{4}$$

- Συμπληρώστε τις τιμές των
- d. $(\cos \theta, \sin \theta)$ για τα υπόλοιπα σημεία του Σχήματος 2.32.



Σχήμα 4.32

4. Να βρείτε όλες τις γωνίες μεταξύ 0 και 2π που ικανοποιούν τα κάτωθι:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \qquad \tan \theta = 1 \qquad \tan \theta = -1$$

$$\csc \theta = 2 \qquad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec t = 2$$

5. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα προσήμων:

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\cot \theta$	$\sec \theta$	$\csc \theta$
$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	+	+				
$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$						
$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$						
$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$						

6. Δείξτε ότι αν $\tan \theta = c$ και $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, τότε $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$.

Υπόδειξη: Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο στο οποίο οι κάθετες πλευρές έχουν μήκη c και 1 .

7. Έστω ότι $\cos \theta = \frac{1}{3}$.

(α) Δείξτε ότι αν $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, τότε $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ και $\tan \theta = 2\sqrt{2}$.

4.18 Αντίστροφες συναρτήσεις

Η ενότητα αφορά τις αντίστροφες συναρτήσεις, οι οποίες είναι συναρτήσεις που «αντιστρέφουν» τη δράση μιας άλλης συνάρτησης. Η ύπαρξη αντίστροφης συνάρτησης αποτελεί ένα από τα θεμελιώδη θέματα στα μαθηματικά, ειδικά στον κλάδο της ανάλυσης και της άλγεβρας. Ουσιαστικά μια συνάρτηση f έχει αντίστροφη συνάρτηση αν μπορούμε να «αντιστρέψουμε» τη διαδικασία της, δηλαδή αν για κάθε τιμή εξόδου της συνάρτησης υπάρχει μία μοναδική τιμή εισόδου. Για το λόγο αυτό χρειαζόμαστε την έννοια που περιγράφεται στον παρακάτω ορισμό.

Θεώρημα 4.18.1 . Νόμος της αντιθετοαντιστροφής Έστω p και q δύο λογικοί ισχυρισμοί. Ισχύει ότι

$$(p \implies q) \iff (\neg q \implies \neg p).$$

Ορισμός 4.18.2 . Συνάρτηση ένα-προς-ένα μια συνάρτηση f είναι ένα-προς-ένα σε ένα πεδίο ορισμού D αν, για κάθε τιμή του c , η εξίσωση $f(x) = c$ έχει το πολύ μία λύση για $x \in D$. Ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $a, b \in D$, αν $a \neq b$, τότε $f(a) \neq f(b)$.

Τα Σχήματα 4.34 και 4.35 δείχνουν ότι μια συνάρτηση f είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν ισχύει:

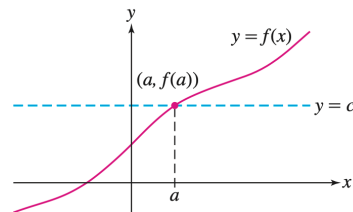
$$\forall a, b \in D, \quad f(a) = f(b) \implies a = b,$$

ή ισοδύναμα:

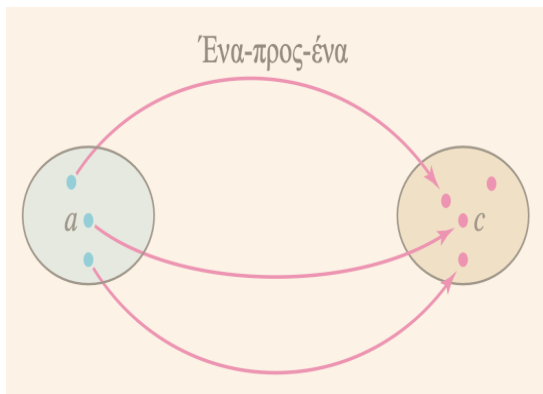
$$\forall a, b \in D, \quad a \neq b \implies f(a) \neq f(b).$$

Αυτό σημαίνει ότι κάθε τιμή του $f(x)$ λαμβάνεται το πολύ μία φορά.

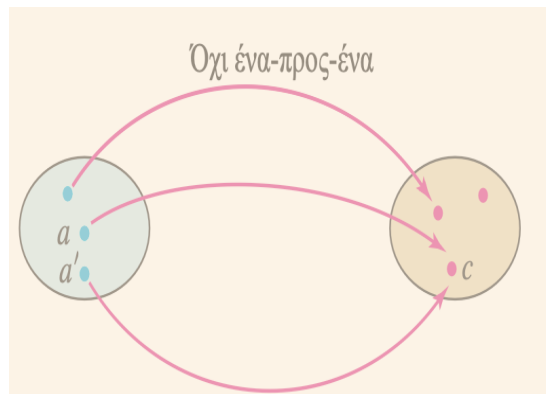
Κριτήριο οριζόντιας ευθείας Μια συνάρτηση του x λέγεται ένα-προς-ένα αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο. Αυτό σημαίνει ότι σε καμία περίπτωση δύο διαφορετικές τιμές του x δεν αντιστοιχίζονται στην ίδια τιμή του y . Με άλλα λόγια, η συνάρτηση δεν “επαναλαμβάνει” τιμές και επομένως μπορεί να έχει αντίστροφη συνάρτηση. Το κριτήριο της οριζόντιας ευθείας αποτελεί το γεωμετρικό εργαλείο για τον έλεγχο αυτής της ιδιότητας.



Σχήμα 4.33: Η ευθεία $y = c$ τέμνει τη γραφική παράσταση στα σημεία όπου $f(a) = c$



Σχήμα 4.34: Η $f(x) = c$ έχει το πολύ μία λύση για κάθε c



Σχήμα 4.35: Η $f(x) = c$ έχει δύο λύσεις: $x = a$ και $x = a'$

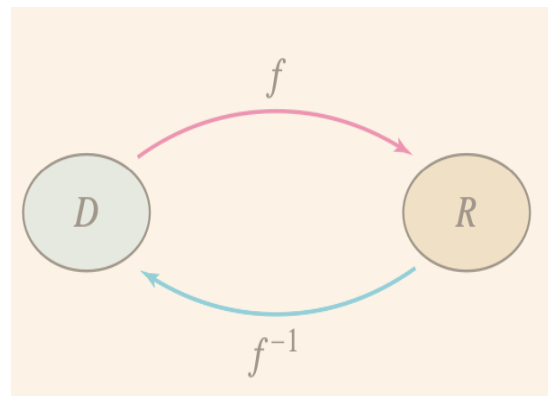
Ορισμός 4.18.3 . Αντίστροφη Έστω ότι η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού D και σύνολο τιμών R . Αν υπάρχει συνάρτηση g με πεδίο ορισμού R έτσι ώστε $g(f(x)) = x$ για $x \in D$ και $f(g(x)) = x$ για $x \in R$ τότε η f ονομάζεται *αντιστρέψιμη*. Η συνάρτηση g ονομάζεται *αντίστροφη συνάρτηση* και συμβολίζεται με f^{-1} .

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ Το «πεδίο ορισμού» είναι το σύνολο των αριθμών x έτσι ώστε να ορίζεται η f (το σύνολο των επιτρεπτών τιμών εισόδου) και το «σύνολο τιμών» είναι το σύνολο όλων των τιμών $f(x)$ (το σύνολο των εξαγομένων).

Ένα παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f(x) = x^3$, της οποίας η αντίστροφη είναι η κυβική ρίζα: $f^{-1}(x) = x^{1/3}$. Όταν έχουμε έναν πίνακα τιμών για μια συνάρτηση f , μπορούμε να τον χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε την αντίστροφη f^{-1} , αντιστρέφοντας τις στήλες x και y

Έτσι, η ανάλυση των αντιστροφών συναρτήσεων μας επιτρέπει να εξετάσουμε τις ιδιότητές τους, όπως και τις γραφικές τους παραστάσεις.

Συνάρτηση			Αντίστροφη	
x	$f(x) = x^3$		x	$f^{-1}(x) = x^{1/3}$
-2	-8	(Εναλλαγή στηλών)	-8	-2
-1	-1		-1	-1
0	0		0	0
1	1		1	1
2	8		8	2
3	27		27	3



Σχήμα 4.36: Μια συνάρτηση και η αντίστροφή της

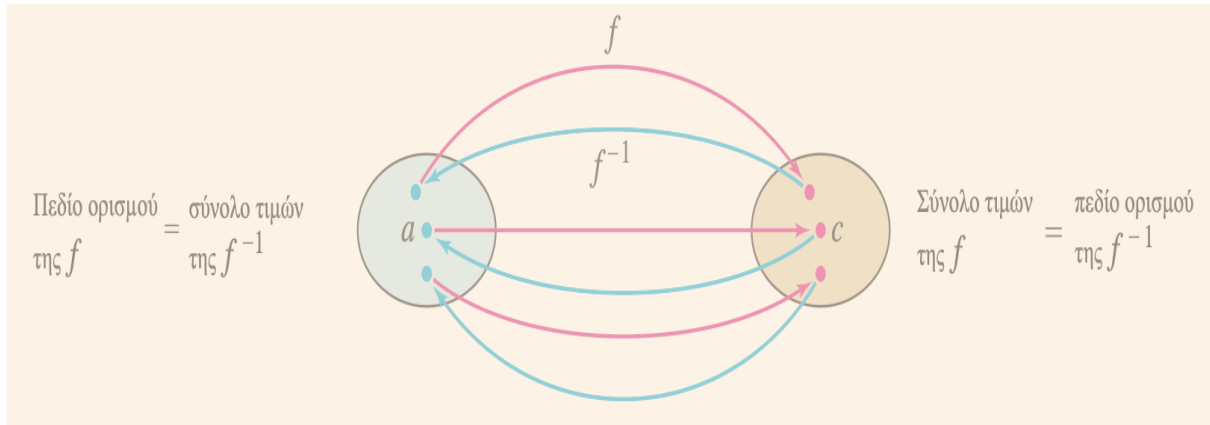
Γενικά, $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$. Η έκφραση $f^{-1}(x)$ είναι απλώς ένας συμβολισμός για την αντίστροφη συνάρτηση και το -1 δεν αποτελεί εκθέτη.

Ορισμός 4.18.4 . Υπαρξη της αντίστροφης

Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} υπάρχει αν και μόνο αν η f είναι ένα-προς-ένα στο πεδίο ορισμού της D . Επιπλέον:

- Πεδίο ορισμού της $f =$ σύνολο τιμών της f^{-1}
- Σύνολο τιμών της $f =$ πεδίο ορισμού της f^{-1}

Φανταστείτε μια λειτουργία f σαν ένα μηχάνημα που παίρνει μια είσοδο από ένα σύνολο και την μετατρέπει σε μια έξοδο. Όταν αυτή η διαδικασία είναι “ένα-προς-ένα”, τότε μπορούμε με σιγουριά να αναστρέψουμε το μηχάνημα: γνωρίζοντας την έξοδο, μπορούμε να ξαναβρούμε ακριβώς την είσοδο. Αυτή η αναστροφή είναι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . Δεν είναι όμως όλα τα μηχανήματα αναστρέψιμα, μόνο εκείνα που δεν μπερδεύουν τις εισόδους τους. Γι’ αυτό η ύπαρξη της αντίστροφης εξαρτάται από την ιδιότητα του “ένα-προς-ένα”, όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα.



Σχήμα 4.37: Καθώς περνάμε από την f στην f^{-1} το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών παραμένουν αμετάβλητα

Παράδειγμα 4.18.5.

Να δείξετε ότι η $f(x) = 2x - 18$ είναι

αντιστρέψιμη. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1} ;

Βήμα 1 Επίλυση της εξίσωσης $y = f(x)$ εκφράζοντας το x ως συνάρτηση του y .

$$y = 2x - 18 \Leftrightarrow y + 18 = 2x \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y + 9.$$

Αυτό μας δίνει την αντίστροφη ως συνάρτηση της μεταβλητής y

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + 9.$$

Βήμα 2 Εναλλαγή των μεταβλητών.

Συνήθως προτιμάμε να γράφουμε την αντίστροφη ως συνάρτηση του x , επομένως εναλλάσσουμε τους ρόλους των x και y

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 9.$$

Οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} φαίνονται στο Σχήμα 4.38.

Για να ελέγξουμε τους υπολογισμούς μας, θα επιβεβαιώσουμε ότι

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

Πράγματι

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x - 18) = \frac{1}{2}(2x - 18) + 9 = (x - 9) + 9 = x$$

και

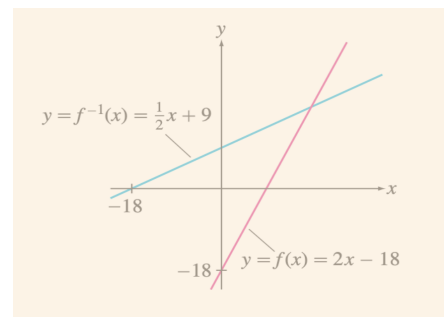
Η μεταβλητή y στην $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + 9$ ονομάζεται βουβή μεταβλητή. Είναι «τοπική» στην εξίσωση, που σημαίνει ότι η αλλαγή του y με κάποιο άλλο σύμβολο δεν αλλάζει το νόημα της σχέσης ούτε τα μαθηματικά που προηγούνται και έπονται της σχέσης. Θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$f^{-1}(A) = \frac{1}{2}A + 9$$

ή

$$f^{-1}(DOG) = \frac{1}{2}DOG + 9$$

χωρίς να επηρεάσουμε τα μαθηματικά στο Παράδειγμα 4.18.5. Γενικά, το x προτιμάται ως ανεξάρτητη μεταβλητή όταν γράφουμε εκφράσεις συναρτήσεων.



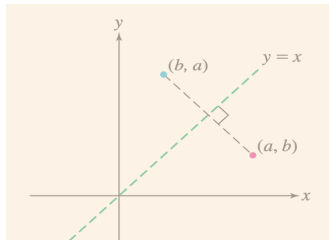
Σχήμα 4.38: Μία συνάρτηση και η αντίστροφή της

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1}{2}x + 9\right) = 2\left(\frac{1}{2}x + 9\right) - 18 = (x + 18) - 18 = x.$$

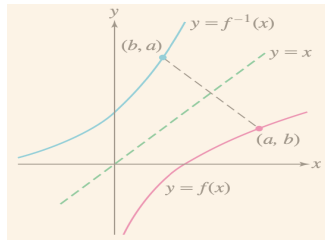
Επειδή η f^{-1} είναι γραμμική συνάρτηση, το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια, περιγράφουμε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης. Η *ανάκλαση* ενός σημείου (a, b) ως προς την ευθεία $y = x$ ορίζεται το σημείο (b, a) (Σχήμα 4.39). Παρατηρήστε ότι αν σχεδιάσουμε τους άξονες x και y στην ίδια κλίμακα, τότε τα (a, b) και (b, a) ισαπέχουν από την ευθεία $y = x$ και το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει είναι κάθετο στην $y = x$. Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η ανάκλαση της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$ (Σχήμα 4.40). Για να το ελέγξετε δείξτε ότι το (a, b) ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν $f(a) = b$.

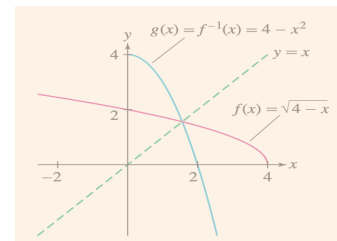
Αλλά $f(a) = b$ αν και μόνο αν $f^{-1}(b) = a$, οπότε το σημείο (b, a) ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1} .



Σχήμα 4.39: Επίπεδες booleanικές τιμές



Σχήμα 4.40: Η γραφική παράσταση της f^{-1} είναι η ανάκλαση της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$



Σχήμα 4.41: Η γραφική παράσταση της αντίστροφης g της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4-x}$

Παράδειγμα 4.18.6.

Σχεδίαση της γραφικής παράστασης της αντίστροφης Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4-x}$, αφού πρώτα τεκμηριώσετε ότι είναι αντιστρέψιμη (1-1).

Λύση Έστω $g(x) = f^{-1}(x)$. Παρατηρήστε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι $\{x : x \leq 4\}$ και το σύνολο τιμών είναι $\{x : x \geq 0\}$. Δεν χρειαζόμαστε τον τύπο της $g(x)$ για να σχεδιάσουμε τη γραφική της παράσταση. Απλώς ανακλούμε τη γραφική παράσταση της f ως προς την ευθεία $y = x$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.41.

Αν το επιθυμούμε, μπορούμε εύκολα να λύσουμε την $y = \sqrt{4-x}$ ως προς x και να πάρουμε $x = 4 - y^2$, οπότε $g(x) = 4 - x^2$ με πεδίο ορισμού $\{x : x \geq 0\}$.

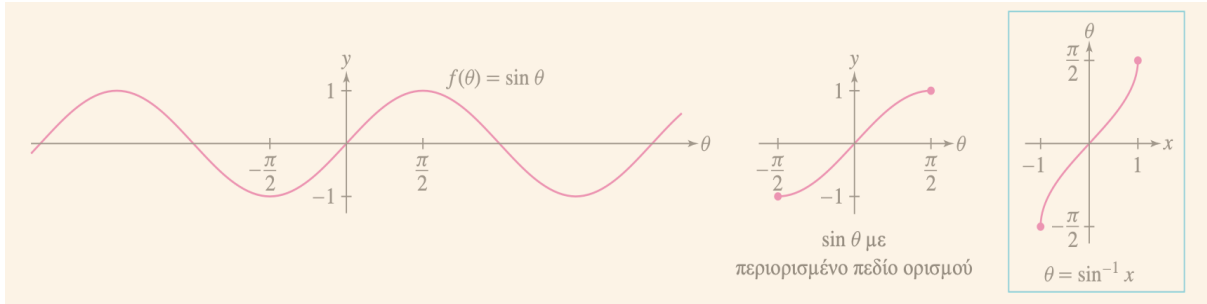
4.19 Αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Έχουμε δει ότι η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} υπάρχει αν και μόνο αν η f είναι ένα-προς-ένα στο πεδίο ορισμού της. Επειδή οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις δεν είναι ένα-προς-ένα, πρέπει να περιορίσουμε το πεδίο ορισμού κάθε μίας για να ορίσουμε τις αντίστροφές τους. Αρχικά θεωρήστε τη συνάρτηση του ημιτόνου. Το Σχήμα 4.42 δείχνει ότι η $f(\theta) = \sin \theta$ είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Με αυτό το διάστημα ως πεδίο ορισμού, η αντίστροφη ονομάζεται *συνάρτηση τόξου ημιτόνου* και συμβολίζεται με $\theta = \sin^{-1} x$ ή $\theta = \arcsin x$. Εξ ορισμού,

μη συγχέετε την αντίστροφη $\sin^{-1} x$ με το αντίστροφο

$$(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x} = \csc x$$

Οι αντίστροφες συναρτήσεις $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \dots$ συμβολίζονται συχνά ως $\arcsin x, \arccos x$ κτλ.



Σχήμα 4.42: Η γραφική παράσταση της αντίστροφης g της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4-x}$

Το σύνολο τιμών της $f(x) = \sin x$ είναι το $[-1, 1]$, οπότε η $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$.

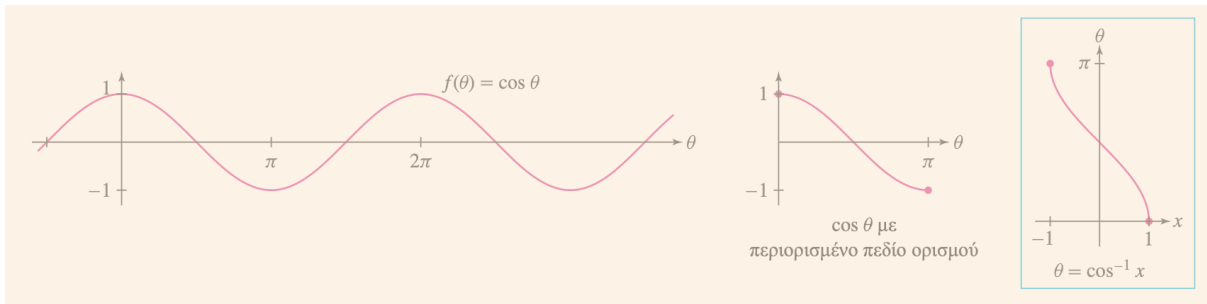
Η συνάρτηση του συνημιτόνου είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $[0, \pi]$ παρά στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (Σχήμα 4.43). Με αυτό το πεδίο ορισμού η αντίστροφη ονομάζεται *συνάρτηση τόξου συνημιτόνου* και συμβολίζεται με $\theta = \cos^{-1} x$ ή $\theta = \arccos x$, με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$.

Εξ ορισμού,

Περίληψη των σχέσεων αντιστροφής ανάμεσα στις συναρτήσεις συνημιτόνου και τόξου συνημιτόνου:

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \quad \text{για } -1 \leq x \leq 1$$

$$\cos^{-1}(\cos \theta) = \theta \quad \text{για } 0 \leq \theta \leq \pi$$

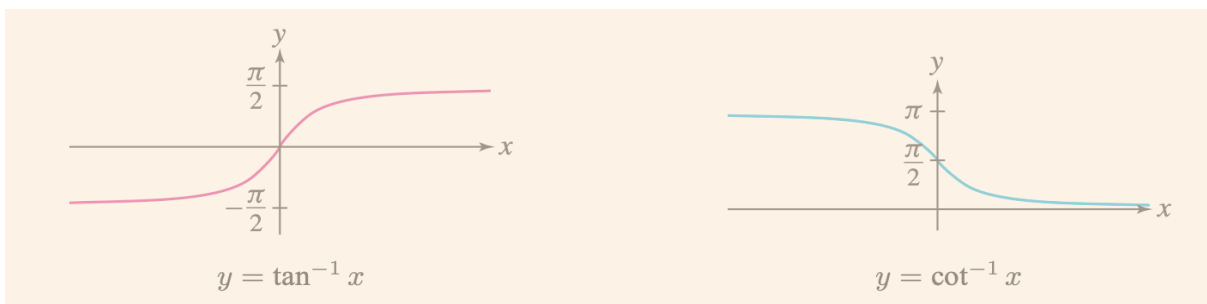


Σχήμα 4.43

Στη συνέχεια, μελετάμε τις υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Η συνάρτηση $f(\theta) = \tan \theta$ είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και η $f(\theta) = \cot \theta$ είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $(0, \pi)$.

Ορίζουμε τις αντίστροφες των $f(\theta) = \tan \theta$ και $f(\theta) = \cot \theta$ περιορίζοντάς τις σε αυτά τα πεδία ορισμού: $\theta = \tan^{-1} x$ είναι η μοναδική γωνία στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ τέτοια ώστε $\tan \theta = x$ και $\theta = \cot^{-1} x$ είναι η μοναδική γωνία στο $(0, \pi)$ τέτοια ώστε $\cot \theta = x$.

Το σύνολο τιμών των $f(\theta) = \tan \theta$ και $f(\theta) = \cot \theta$ είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί $\mathbb{R}$. Επομένως, οι $\theta = \tan^{-1} x$ και $\theta = \cot^{-1} x$ έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ (Σχήμα 4.44).

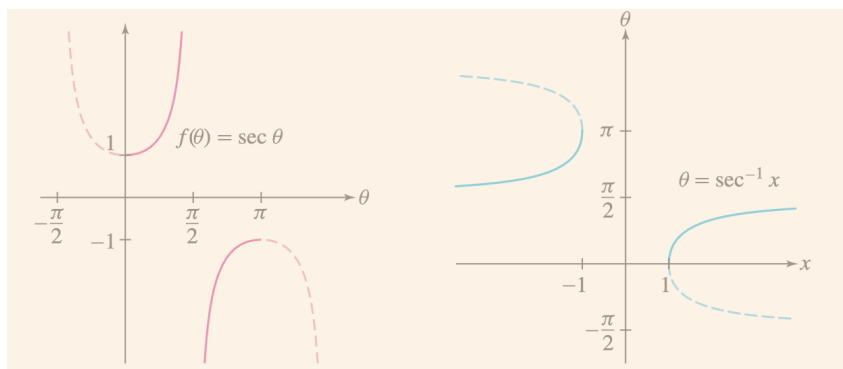


Σχήμα 4.44

Η συνάρτηση $f(\theta) = \sec \theta$ δεν ορίζεται στο $\theta = \frac{\pi}{2}$, αλλά βλέπουμε στο Σχήμα 18 ότι είναι ένα-προς-ένα στο $[0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$. Ομοίως, η $f(\theta) = \csc \theta$ δεν ορίζεται στο $\theta = 0$, αλλά είναι ένα-προς-ένα στο $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$.

Ορίζουμε τις αντίστροφες συναρτήσεις ως εξής: $\theta = \sec^{-1} x$ είναι η μοναδική γωνία στο $[0, \pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ τέτοια ώστε $\sec \theta = x$ και $\theta = \csc^{-1} x$ είναι η μοναδική γωνία στο $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ τέτοια ώστε $\csc \theta = x$.

Το Σχήμα 4.45 δείχνει ότι το σύνολο τιμών της $f(\theta) = \sec \theta$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $|x| \geq 1$. Το ίδιο ισχύει για την $f(\theta) = \csc \theta$. Προκύπτει ότι τόσο η $\theta = \sec^{-1} x$ όσο και η $\theta = \csc^{-1} x$ έχουν πεδίο ορισμού $\{x : |x| \geq 1\}$.



Σχήμα 4.45: Η $f(\theta) = \sec \theta$ είναι ένα-προς-ένα στο διάστημα $[0, \pi]$ έχοντας αφαιρέσει την τιμή π .

Περίληψη 4.19.1 .

- μια συνάρτηση f είναι ένα-προς-ένα σε ένα πεδίο ορισμού D αν για κάθε τιμή c η εξίσωση $f(x) = c$ έχει το πολύ μία λύση $x \in D$, ή, ισοδύναμα, αν για κάθε $a, b \in D$, αν $a \neq b$, τότε $f(a) \neq f(b)$.
- Έστω ότι η f έχει πεδίο ορισμού D και σύνολο τιμών R . Η αντίστροφη f^{-1} (αν υπάρχει) είναι η μοναδική συνάρτηση με πεδίο ορισμού R και σύνολο τιμών D που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{και} \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$
- Η αντίστροφη της f υπάρχει αν και μόνο αν η f είναι ένα-προς-ένα στο πεδίο ορισμού της.

1.5 Αντίστροφες Συναρτήσεις

- Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση λύνουμε την $y = f(x)$ ως προς x συναρτήσει του y και παίρνουμε την $x = g(y)$. Η αντίστροφη είναι η συνάρτηση g .
- *Κριτήριο οριζόντιας ευθείας:* Η f είναι ένα-προς-ένα αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.
- Η γραφική παράσταση της f^{-1} προκύπτει από την αντανάκλαση της γραφικής παράστασης της f ως προς την ευθεία $y = x$.
- Το τόξο ημιτόνου και το τόξο συνημιτόνου ορίζονται για $-1 \leq x \leq 1$:

$$\theta = \sin^{-1} x \quad \text{είναι η μοναδική γωνία στο } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ τέτοια ώστε } \sin \theta = x$$

$$\theta = \cos^{-1} x \quad \text{είναι η μοναδική γωνία στο } [0, \pi] \text{ τέτοια ώστε } \cos \theta = x.$$
- Η $\tan^{-1} x$ και η $\cot^{-1} x$ ορίζονται για κάθε x :

$$\theta = \tan^{-1} x \quad \text{είναι η μοναδική γωνία στο } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ τέτοια ώστε } \tan \theta = x$$

$$\theta = \cot^{-1} x \quad \text{είναι η μοναδική γωνία στο } (0, \pi) \text{ τέτοια ώστε } \cot \theta = x.$$
- Η $\sec^{-1} x$ και η $\csc^{-1} x$ ορίζονται για $|x| \geq 1$:

$$\theta = \sec^{-1} x \quad \text{είναι η μοναδική γωνία στο } \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \text{ τέτοια ώστε } \sec \theta = x$$

$$\theta = \csc^{-1} x \quad \text{είναι η μοναδική γωνία στο } \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ τέτοια ώστε } \csc \theta = x.$$

Ασκήσεις 4.19.2 .

- Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τη σχέση $f^{-1}(x) = f(x)$;
(a) $f^{-1}(x) = x$, (b) $f(x) = 1$, (c) $f(x) = \sqrt{x}$,
(d) $f(x) = |x|$, (e) $f(x) = 1 - x$, $f(x) = x^{-1}$.
- Γιατί η συνάρτηση f , που απεικονίζει εφήβους στις Ηνωμένες Πολιτείες στα επίθετά τους, δεν έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ;
- Δείξτε ότι η $f(x) = 7x - 4$ είναι αντιστρέψιμη και βρείτε την αντίστροφή της.
- Είναι η $f(x) = x^2 + 2$ ένα-προς-ένα; Αν όχι, περιγράψτε ένα πεδίο ορισμού στο οποίο είναι ένα-προς-ένα.
- Ποιο είναι το μεγαλύτερο διάστημα που περιέχει το μηδέν στο οποίο η $f(x) = \sin x$ είναι ένα-προς-ένα;
- Δείξτε ότι η $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ είναι αντιστρέψιμη και βρείτε την αντίστροφή της.
(a) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f και το σύνολο τιμών της f^{-1} ;
(b) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} και το σύνολο τιμών της f ;
- Επιβεβαιώστε ότι οι $f(x) = x^3 + 3$ και $g(x) = (x - 3)^{1/3}$ είναι αντίστροφες δείχνοντας ότι $f(g(x)) = x$ και $g(f(x)) = x$.
- Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση για $f(t) = \frac{t+1}{t-1}$ και $g(t) = \frac{t+1}{t-1}$.
- Να βρείτε ένα πεδίο ορισμού στο οποίο η f είναι ένα-προς-ένα και έναν τύπο για την αντίστροφή της f περιορισμένης σε αυτό το πεδίο ορισμού. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} .
(a) $f(x) = 4 - x$
(b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
(c) $f(x) = \frac{1}{7x-3}$
(d) $f(s) = \frac{1}{s^2}$
(e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
(f) $f(z) = z^3$
(g) $f(x) = \sqrt{x^3+9}$
- Δείξτε ότι η $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ είναι ένα-προς-ένα στο $(-\infty, 0]$ και βρείτε τον τύπο της f^{-1} για αυτό το πεδίο ορισμού της f .
- Έστω $f(x) = x^2 - 2x$. Βρείτε ένα πεδίο ορισμού στο οποίο υπάρχει η f^{-1} και βρείτε τον τύπο της f^{-1} για αυτό το πεδίο ορισμού της f .
- Δείξτε ότι η $f(x) = x + x^{-1}$ είναι ένα-προς-ένα στο $[1, \infty)$ και βρείτε την αντίστροφη f^{-1} . Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f^{-1} ;
- Να ελέγξετε αν οι επόμενες συναρτήσεις είναι ένα-προς-ένα και, αν είναι, να προσδιορίσετε τις αντίστροφες.
(a)

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

(b)

4.20 Εκθετικές και Λογαριθμικές Συναρτήσεις

μια *εκθετική συνάρτηση* είναι μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = b^x$, όπου $b > 0$ και $b \neq 1$. Ο αριθμός b ονομάζεται *βάση*. Για παράδειγμα:

$$f(x) = 2^x, \quad g(x) = (1.4)^x, \quad h(x) = 10^x.$$

Η περίπτωση $b = 1$ δεν θεωρείται εκθετική, επειδή τότε η συνάρτηση γίνεται σταθερή: $f(x) = 1^x = 1$.

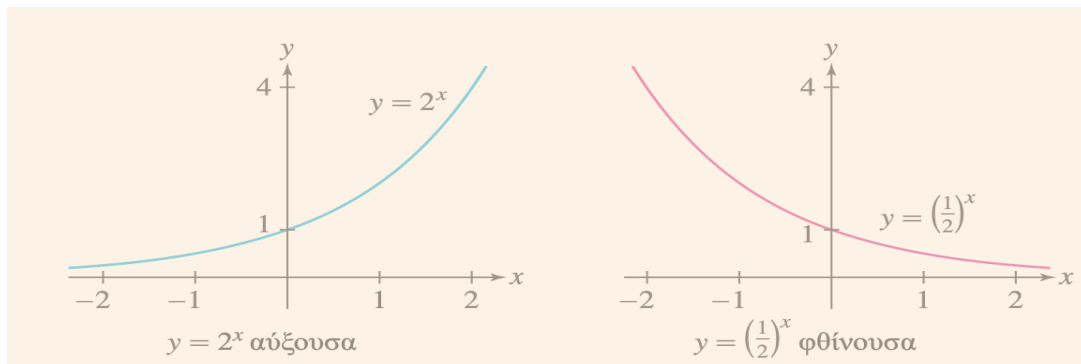
μερικές χαρακτηριστικές τιμές εκθετικών συναρτήσεων είναι:

$$2^4 = 16, \quad 2^{-3} = 0.125, \quad (1.4)^{0.8} \approx 1.309, \quad 10^{4.6} \approx 39,810.717.$$

Ιδιότητες των Εκθετικών Συναρτήσεων

Οι εκθετικές συναρτήσεις έχουν τρεις βασικές ιδιότητες:

- Είναι πάντα θετικές: Δηλαδή, $b^x > 0$ για κάθε x .
- Το σύνολο τιμών τους είναι το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών $(0, \infty)$.
- Είναι:
 - Αύξουσες, αν $b > 1$.
 - Φθίνουσες, αν $0 < b < 1$.



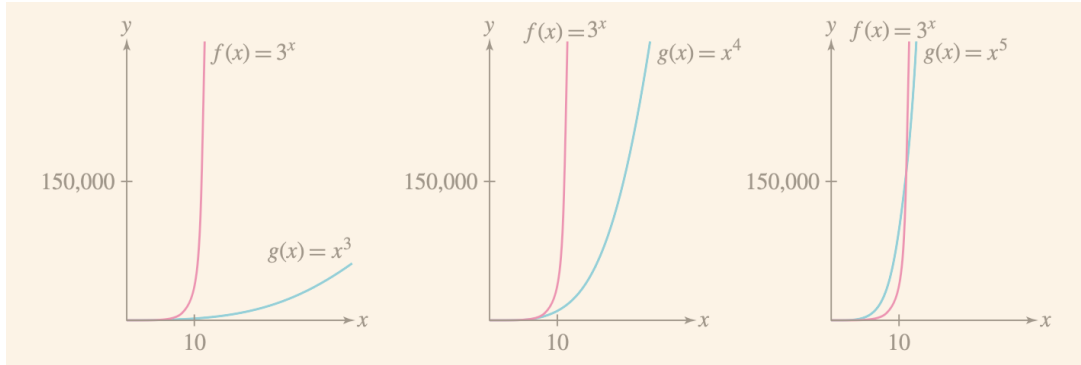
Σχήμα 4.46

Ταχεία αύξηση των εκθετικών συναρτήσεων

Αν $b > 1$, η εκθετική συνάρτηση $f(x) = b^x$ δεν είναι απλώς αύξουσα αλλά, με κάποια έννοια, *ταχύτερα αύξουσα*. Αν και ο όρος «ταχύτερα αύξουσα» είναι ίσως υποκειμενικός, το παρακάτω ακριβές παράδειγμα είναι αληθές:

Για κάθε n , αν το x είναι θετικό και αρκετά μεγάλο, τότε η $f(x) = b^x$ αυξάνεται πιο γρήγορα από οποιαδήποτε συνάρτηση δύναμης $g(x) = x^n$ (θα το αποδείξουμε στην Ενότητα 4.5).

Για παράδειγμα, το Σχήμα 2 δείχνει ότι η $f(x) = 3^x$ τελικά ξεπερνά και αυξάνεται ταχύτερα από τις συναρτήσεις δύναμης $g(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ και $g(x) = x^5$. Ο Πίνακας 1 συγκρίνει την $f(x) = 3^x$ με την $g(x) = x^5$.



Σχήμα 4.47: Σύγκριση της $f(x) = 3^x$ με συναρτήσεις δύναμης

Ο αριθμός e

Στην επόμενη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε τον λογάριθμο για να μελετήσουμε τις εκθετικές συναρτήσεις. Μια ενδιαφέρουσα αποκάλυψη είναι ότι η πιο φυσική και βολική βάση για μια εκθετική συνάρτηση δεν είναι $b = 10$ ή $b = 2$, όπως θα περίμενε κανείς, αλλά ένας ειδικός άρρητος αριθμός, που συμβολίζεται με e . Η τιμή του e είναι προσεγγιστικά:

$$e \approx 2.718.$$

μια αριθμομηχανή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό συγκεκριμένων τιμών της συνάρτησης $f(x) = e^x$. Για παράδειγμα:

$$e^3 \approx 20.0855, \quad e^{-1/4} \approx 0.7788.$$

Στον λογισμό, όταν αναφερόμαστε σε εκθετική συνάρτηση, εννοούμε ότι η βάση είναι e . Ένας άλλος κοινός συμβολισμός για τη συνάρτηση e^x είναι:

$$\exp(x).$$

Αν και οι γραπτές αναφορές στον αριθμό π εμφανίζονται πριν από 4000 χρόνια, οι μαθηματικοί συνειδητοποίησαν τον σημαντικό ρόλο του αριθμού e πολύ αργότερα, τον 17ο αιώνα.

Ο συμβολισμός e εισήχθη από τον Leonhard Euler, ο οποίος ανακάλυψε πολλές θεμελιώδεις ιδιότητες αυτού του σημαντικού αριθμού.

Ο αριθμός e έχει υπολογιστεί με ακρίβεια που ξεπερνά τα 100 δισεκατομμύρια δεκαδικά ψηφία. Εδώ είναι τα πρώτα του ψηφία:

$$e = 2.71828182845904523536 \dots$$

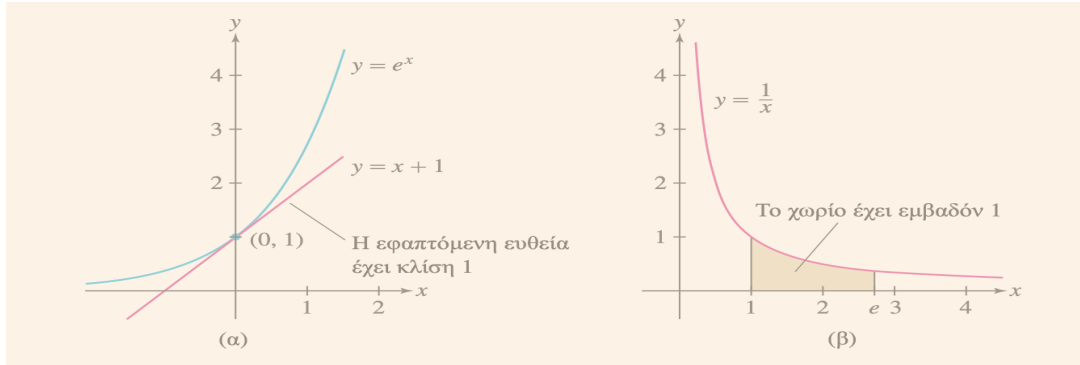
Ορισμός του αριθμού e

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να ορίσουμε τον αριθμό e , οι οποίοι βασίζονται στην έννοια του ορίου. Παρακάτω παρατίθενται τέσσερις χαρακτηριστικοί ορισμοί, δύο μέσω ορίων και δύο μέσω γεωμετρικών ιδιοτήτων.

- **Ορισμός μέσω ορίου:** Καθώς $x \rightarrow 0$, οι τιμές της παράστασης $(1+x)^{1/x}$ τείνουν στον αριθμό e . Εναλλακτικά, αν αντικαταστήσουμε $x = \frac{1}{t}$, τότε οι τιμές της έκφρασης $(1 + \frac{1}{t})^t$ τείνουν στον e καθώς $t \rightarrow \infty$.
- **Ορισμός μέσω άπειρης σειράς:** Ο αριθμός e προκύπτει προσθέτοντας διαδοχικά όρους στο άθροισμα:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

- **Γεωμετρικός ορισμός 1:** Από όλες τις εκθετικές συναρτήσεις $y = b^x$, η βάση $b = e$ είναι η μοναδική για την οποία η κλίση της εφαπτόμενης στο σημείο $(0, 1)$ είναι ίση με 1.
- **Γεωμετρικός ορισμός 2:** Ο αριθμός e είναι ο μοναδικός τέτοιος ώστε το εμβαδόν της περιοχής κάτω από την υπερβολή $y = \frac{1}{x}$ για $1 \leq x \leq e$ είναι ίσο με 1.



Σχήμα 4.48

Λογάριθμοι

Οι λογαριθμικές συναρτήσεις είναι οι αντίστροφες των εκθετικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, αν $b > 0$ και $b \neq 1$, τότε ο λογάριθμος με βάση b , που συμβολίζεται ως $\log_b x$, είναι η αντίστροφη της συνάρτησης $f(x) = b^x$.

Ορισμός 4.20.1 . Ορίζουμε ότι:

$$y = \log_b x \iff b^y = x, x > 0, y \in \mathbb{R}.$$

Άρα, οι βασικές ιδιότητες των λογαρίθμων είναι:

$$b^{\log_b x} = x \quad \text{και} \quad \log_b(b^x) = x, x > 0.$$

Ο $\log_b x$ είναι ο αριθμός στον οποίο πρέπει να υψώσουμε το b για να πάρουμε το x .

$$\begin{aligned} \log_2(8) &= 3 \quad \text{επειδή } 2^3 = 8, \\ \log_{10}(1) &= 0 \quad \text{επειδή } 10^0 = 1, \\ \log_3\left(\frac{1}{9}\right) &= -2 \quad \text{επειδή } 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Ο λογάριθμος με βάση το e (ο φυσικός αριθμός $e \approx 2.718$) ονομάζεται *φυσικός λογάριθμος* και συμβολίζεται ως $\ln x$:

$$x = \log_e x, x > 0.$$

Οι λογάριθμοι μπορούν να υπολογιστούν με αριθμομηχανή. Για παράδειγμα:

$$\ln 17 \approx 2.83321 \quad \text{επειδή } e^{2.83321} \approx 17.$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.49, οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$ είναι αντίστροφες, γεγονός που σημαίνει ότι ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$e^{\ln x} = x, x > 0 \quad \text{και} \quad \ln(e^x) = x, x \in \mathbb{R}.$$

Υπενθυμίζεται ότι για την εκθετική συνάρτηση $f(x) = b^x$:

- Το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.
- Το σύνολο τιμών της είναι όλοι οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\{x : x > 0\}$.

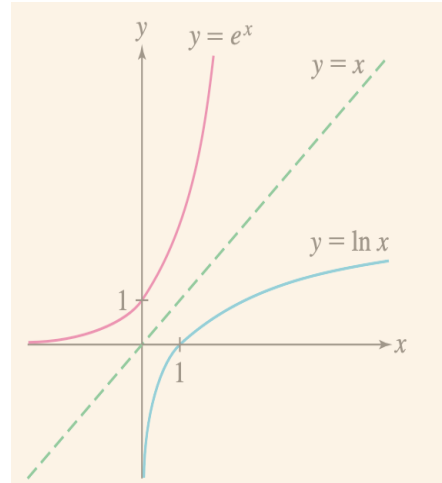
Αφού το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών αντιστρέφονται στην αντίστροφη συνάρτηση $\log_b x$:

- Το πεδίο ορισμού της $\log_b x$ είναι $\{x : x > 0\}$ (θετικοί πραγματικοί αριθμοί).
- Το σύνολο τιμών της $\log_b x$ είναι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Αν $b > 1$, τότε ο $\log_b x$ έχει τις εξής ιδιότητες:

- Είναι θετικός όταν $x > 1$.
- Είναι αρνητικός όταν $0 < x < 1$.

Το Σχήμα 4.49 δείχνει αυτά τα χαρακτηριστικά για τη βάση $b = e$. Λάβετε υπόψη ότι ο λογάριθμος ενός αρνητικού αριθμού δεν ορίζεται. Για παράδειγμα, ο $\log_{10}(-2)$ δεν υπάρχει, διότι η εξίσωση $10^y = -2$ δεν έχει λύση. Για κάθε ιδιότητα των εκθετικών συναρτήσεων, υπάρχει αντίστοιχη ιδιότητα για τους λογαρίθμους. Αυτές οι ιδιότητες συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα 4.1.



Σχήμα 4.49

Ιδιότητες των λογαρίθμων

	Ιδιότητα	Παράδειγμα
Λογάριθμος του 1	$\log_b(1) = 0$	
Λογάριθμος του b	$\log_b(b) = 1$	
Γινόμενα	$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$	$\log_5(2 \cdot 3) = \log_5 2 + \log_5 3$
Πηλίκα	$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$	$\log_2\left(\frac{3}{7}\right) = \log_2 3 - \log_2 7$
Αντίστροφοι	$\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b x$	$\log_2\left(\frac{1}{7}\right) = -\log_2 7$
Δυνάμεις (οποιοδήποτε n)	$\log_b(x^n) = n \log_b x$	$\log_{10}(8^2) = 2 \cdot \log_{10} 8$

Πίνακας 4.1

μπορούμε να αλλάξουμε τη βάση στις εκθετικές και τις λογαριθμικές συναρτήσεις χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τύπους αλλαγής βάσης, οι οποίοι αποδεικνύονται μέσω των ιδιοτήτων των εκθετικών και των λογαρίθμων:

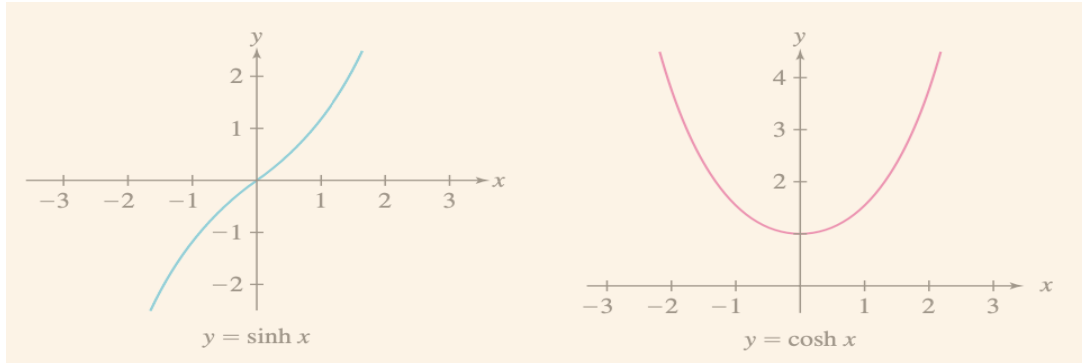
$$b^x = a^{x \cdot \log_a b}, a > 0, b > 0, x \in \mathbb{R}, \quad b^x = e^{x \ln b}, b > 0, x \in \mathbb{R}.$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, b > 0, a > 0, x > 0, \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}, b > 0, x > 0.$$

Οι υπερβολικές συναρτήσεις είναι συγκεκριμένοι συνδυασμοί των e^x και e^{-x} , που διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στη μηχανική και στη φυσική.

Το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο φαίνονται στο Σχήμα 4.50 και ορίζονται ως εξής:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$



Σχήμα 4.50: Οι συναρτήσεις υπερβολικού ημιτόνου και συνημιτόνου

Όπως υποδηλώνει η ορολογία, υπάρχουν ομοιότητες μεταξύ των υπερβολικών και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Παρακάτω παρατίθενται μερικά παραδείγματα:

- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις και οι αντίστοιχες υπερβολικές έχουν την ίδια ισοτιμία. Έτσι:

$$f(x) = \sin x \text{ και } f(x) = \sinh x \text{ είναι περιττές, ενώ } f(x) = \cos x \text{ και } f(x) = \cosh x \text{ είναι άρτιες.}$$

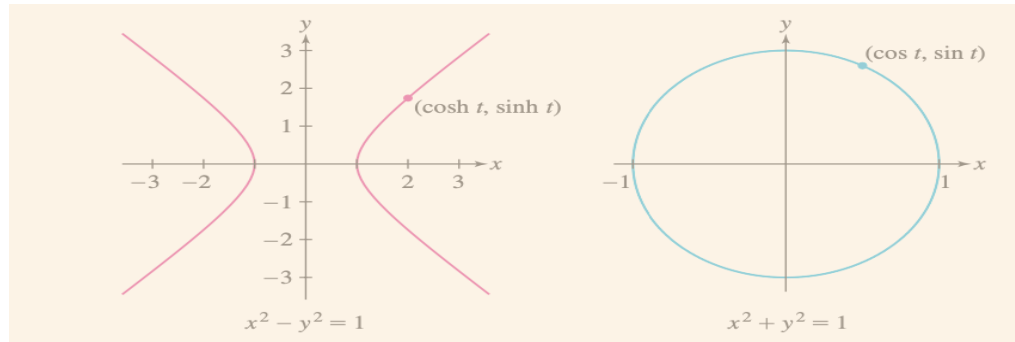
- Η βασική τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ έχει υπερβολικό ανάλογο:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

- Οι τύποι αθροίσματος για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις έχουν υπερβολικό ανάλογο:

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \\ \text{και} \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y. \end{aligned}$$

- Λόγω της ταυτότητας $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, το σημείο $(\cosh t, \sinh t)$ βρίσκεται πάνω στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$, όπως τα $(\cos t, \sin t)$ βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ (Σχήμα 4.51).



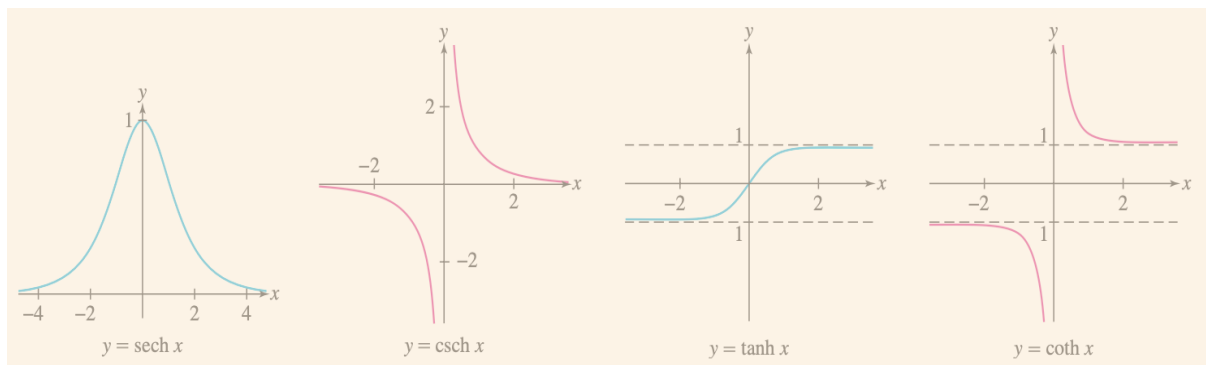
Σχήμα 4.51

- Οι συναρτήσεις της υπερβολικής εφαπτομένης, συνεφαπτομένης, τέμνουσας και συντέμνουσας (δείτε Σχήμα 4.52) ορίζονται όπως και οι αντίστοιχες τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$$

και

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$



Σχήμα 4.52

Περίληψη 4.20.2 .

- Η $f(x) = b^x$ είναι η εκθετική συνάρτηση με βάση b ($b > 0$ και $b \neq 1$).
- Η $f(x) = b^x$ είναι αύξουσα αν $b > 1$ και φθίνουσα αν $b < 1$.
- Ο αριθμός $e \approx 2.718$.
- Για $b > 0$ με $b \neq 1$, η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_b x$ είναι η αντίστροφη της $f(x) = b^x$:

$$y = \log_b x \iff x = b^y.$$
- Ο φυσικός λογάριθμος είναι ο λογάριθμος με βάση e και συμβολίζεται ως $\ln x$:

$$e^{\ln x} = x \quad \text{και} \quad \ln(e^x) = x \quad \text{για κάθε } x > 0.$$
- Σημαντικές λογαριθμικές ιδιότητες:
 - (i) $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
 - (ii) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
 - (iii) $\log_b(x^n) = n \log_b x$
 - (iv) $\log_b 1 = 0$ και $\log_b b = 1$
- Τύποι αλλαγής βάσης:

$$b^x = a^{x \log_a b}, \quad b^x = e^{x \ln b}, \quad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}, \quad \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}.$$
- Το υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{περιττή συνάρτηση}), \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{άρτια συνάρτηση}).$$
- Υπόλοιπες υπερβολικές συναρτήσεις:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}.$$
- Βασική ταυτότητα:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$
- Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις και πεδίο ορισμού:
 - $f(x) = \sinh^{-1} x$ για κάθε x ,
 - $f(x) = \cosh^{-1} x$ για $x \geq 1$,
 - $f(x) = \tanh^{-1} x$ για $|x| < 1$,
 - $f(x) = \coth^{-1} x$ για $|x| > 1$,
 - $f(x) = \operatorname{sech}^{-1} x$ για $0 < x \leq 1$,
 - $f(x) = \operatorname{csch}^{-1} x$ για $x \neq 0$.

4.21 Κατασκευή νέων συναρτήσεων

Αν δίνονται οι συναρτήσεις f και g , μπορούμε να κατασκευάσουμε νέες συναρτήσεις παίρνοντας το άθροισμα, τη διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο των συναρτήσεων:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f - g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{με } g(x) \neq 0).$$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2$ και $g(x) = \sin x$, τότε:

$$(f + g)(x) = x^2 + \sin x, \quad (f - g)(x) = x^2 - \sin x,$$

$$(f \cdot g)(x) = x^2 \sin x, \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\sin x}.$$

μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάσουμε συναρτήσεις με σταθερές. Μία συνάρτηση της μορφής

$$h(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x) \quad (c_1, c_2 \text{ σταθερές}),$$

ονομάζεται *γραμμικός συνδυασμός των f και g* .

4.21.1 Σύνθεση Συναρτήσεων

Οι σύνθετες συναρτήσεις εμφανίστηκαν στις μελέτες της μηχανικής και της φυσικής, όπου συχνά μια φυσική ποσότητα εξαρτάται από άλλη μέσω ενδιάμεσων σχέσεων. Στον 18ο αιώνα, ο Euler συστηματοποίησε την έννοια της συνάρτησης με τη μορφή που την αναγνωρίζουμε σήμερα, χρησιμοποιώντας την ως μαθηματικό εργαλείο για την ανάλυση. Ο ίδιος επεξεργάστηκε τη σύνθεση συναρτήσεων ως διαδικασία που ενώνει δύο ή περισσότερες συναρτήσεις σε μία ενιαία. Εισήγαγε την αναπαράσταση $f(x)$, που διευκόλυνε τη σύνθεση με μία συνάρτηση $g(x)$ μέσω της αντικατάστασης $g(f(x))$. Στα έργα μεγάλων μαθηματικών όπως του Newton και του Lagrange, η σύνθεση συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκε στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων και στην ανάλυση καμπυλών. Η σύνθεση συναρτήσεων χρησιμοποιήθηκε επίσης στη γεωμετρία και στους μετασχηματισμούς (π.χ. περιστροφές και κλίμακες), ειδικά στον καθορισμό συστημάτων συντεταγμένων. Με την έλευση της αλγεβρικής θεωρίας ομάδων τον 19ο αιώνα, μαθηματικοί όπως ο Galois έδειξαν ότι η σύνθεση συναρτήσεων συνδέεται άμεσα με τη συμμετρία και τις ομάδες μετασχηματισμών. Στον 20ό αιώνα, η σύνθεση συναρτήσεων έγινε κρίσιμο εργαλείο στη μαθηματική ανάλυση, τη θεωρία υπολογισμών και την πληροφορική. Η έννοια του συνδυασμού διαδικασιών και αλγορίθμων βασίζεται στην ίδια θεμελιώδη ιδέα: την εφαρμογή μιας λειτουργίας στο αποτέλεσμα μιας άλλης. Γενικά, η σύνθεση συναρτήσεων είναι ουσιαστικά μια αναπαράσταση της αλληλουχίας διαδικασιών. Είτε πρόκειται για μαθηματικά προβλήματα είτε για πραγματικές εφαρμογές (όπως στη φυσική, στην οικονομία ή στον προγραμματισμό), η ιδέα του να εφαρμόζουμε λειτουργίες σε στάδια είναι απαραίτητη για την κατανόηση σύνθετων συστημάτων. Η ιστορική εξέλιξη της σύνθεσης συναρτήσεων μάς δείχνει πώς μια ιδέα, που αρχικά δημιουργήθηκε για να περιγράψει γεωμετρικά φαινόμενα, εξελίχθηκε σε κεντρικό εργαλείο για την ανάλυση συστημάτων και τη λύση προβλημάτων σε κάθε επιστήμη.

Η σύνθεση είναι λοιπόν ένας άλλος σημαντικός τρόπος κατασκευής νέων συναρτήσεων. Η σύνθεση των συναρτήσεων f και g είναι η συνάρτηση $f \circ g$ που ορίζεται ως

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Έστω η συνάρτηση $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Η τιμή της h στο x μπορεί να οριστεί σε δύο φάσεις ως εξής:

- (α) Στο $x \in \mathbb{R}$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $y = x^2 - 1$ και στη συνέχεια
- (β) στο $y = x^2 - 1$ αντιστοιχίζουμε τον αριθμό $\sqrt{y} = \sqrt{x^2 - 1}$, εφόσον $y = x^2 - 1 \geq 0$.

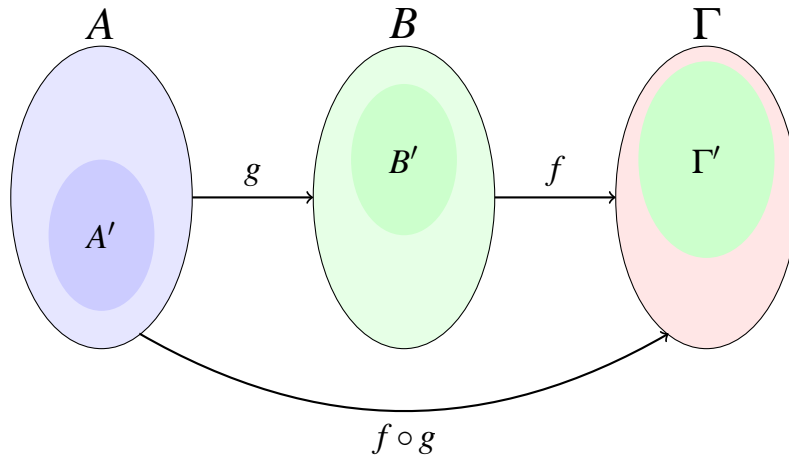
Στη διαδικασία αυτή εμφανίζονται δύο συναρτήσεις:

- (α) Η $g(x) = x^2 - 1$ που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbb{R}$ (α' φάση), και
- (β) Η $f(y) = \sqrt{y}$, που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $B = [0, +\infty)$ (β' φάση).

Έτσι, η τιμή της $h = f \circ g$ στο x γράφεται τελικά

$$h(x) = f(g(x)).$$

Η συνάρτηση h λέγεται σύνθεση της g με την f και συμβολίζεται με $f \circ g$.



Σχήμα 4.53: Διάγραμμα σύνθεσης συναρτήσεων f , g , και $f \circ g$

Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ δεν είναι ολόκληρο το πεδίο ορισμού A της g , αλλά περιορίζεται στα $x \in A$ για τα οποία η τιμή $g(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού B της f , δηλαδή είναι το σύνολο $A' = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Γενικά το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι:

$$\text{Πεδίο ορισμού } (f \circ g) = \{x \in A \mid g(x) \in B\}.$$

Ορισμός 4.21.1. Έστω δύο συναρτήσεις f και g με πεδία ορισμού D_f και D_g αντίστοιχα. Τότε ορίζω τη συνάρτηση

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

και διαβάζω “σύνθεση της f με τη g ”. Το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι το

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}.$$

Παράδειγμα 4.21.2 .

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις:

$$(a) f \circ g \text{ και } (b) g \circ f$$

Λύση: (a) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $D_f = (0, +\infty)$, ενώ η g το $D_g = [0, +\infty)$. Για να ορίζεται η παράσταση $g(f(x))$ πρέπει

$$x \in D_f \quad \text{και} \quad f(x) \in D_g$$

ή ισοδύναμα,

$$\{x > 0 | \ln x \geq 0\} \Rightarrow \ln x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1.$$

Δηλαδή, πρέπει $x \geq 1$. Επομένως η $f \circ g$ ορίζεται και είναι:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\ln x) = \sqrt{\ln x}, \quad \text{για κάθε } x \in [1, +\infty).$$

(b) Για να ορίζεται η παράσταση $f(g(x))$ πρέπει

$$x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f$$

ή ισοδύναμα

$$\{x \geq 0 | \sqrt{x} > 0\} \Rightarrow x > 0.$$

Δηλαδή, πρέπει $x > 0$. Επομένως, ορίζεται η $f \circ g$ και είναι:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \ln \sqrt{x}, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

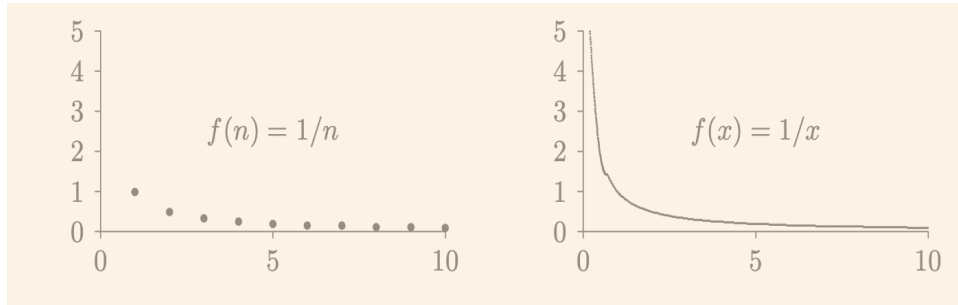
4.22 Ακολουθίες

Οι ακολουθίες έχουν βαθιές ρίζες στην ιστορία των μαθηματικών και χρησιμοποιούνται ευρέως σε διάφορες εφαρμογές από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Μερικές σημαντικές ιστορικές στιγμές περιλαμβάνουν την αρχαία Ελλάδα και τη συνεισφορά μαθηματικών όπως ο Εύδοξος και ο Αρχιμήδης. Η μέθοδος Εξάντλησης του Ευδόξου ήταν μία από τις πρώτες μαθηματικές τεχνικές που χρησιμοποιήθηκε από τον Αρχιμήδη για την προσέγγιση τιμών, όπως το π , και για τον υπολογισμό του εμβαδού και του όγκου γεωμετρικών σχημάτων. Συγκεκριμένα, ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε τη μέθοδο για να προσεγγίσει την περιφέρεια του κύκλου με ακολουθίες που περιέγραφαν πο-λύγωνα εγγεγραμμένα στον κύκλο και με την προσθήκη όλο και περισσότερων πλευρών στα πολύγωνα, υπολόγιζε ακριβέστερα το π εξαντλώντας το διάστημα μεταξύ του εμβαδού των δύο πολυγώνων. Αυτή η τεχνική θεωρείται πρόδρομος του απειροστικού λογισμού. Ο Ευκλείδης επίσης ένας από τους σημαντικότερους μαθηματικούς της αρχαιότητας, έκανε χρήση ακολουθιών στο έργο του *Στοιχεία* όπου παρουσίασε ακολουθίες φυσικών αριθμών που σχετίζονταν με πρώτους αριθμούς. Η απόδειξή του για την απειρία των πρώτων αριθμών βασίζεται στη δημιουργία μίας ακολουθίας πρώτων αριθμών. Επιπλέον, ανέπτυξε γεωμετρικές προόδους για να περιγράψει σχέσεις και ιδιότητες αριθμών. Η χρήση των ακολουθιών εξελίχθηκε από τη γεωμετρική και αριθμητική προσέγγιση των αρχαίων σε πιο γενικευμένες έννοιες. Οι ακολουθίες δεν αποτελούν μόνο ένα εργαλείο στα μαθηματικά, αλλά και μία γέφυρα μεταξύ της αρχαίας και της σύγχρονης μαθηματικής σκέψης. Η συνεισφορά μαθηματικών όπως ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης έθεσε τις βάσεις για τις τεχνικές και τις θεωρίες που χρησιμοποιούμε σήμερα. Σήμερα, οι ακολουθίες δεν περιορίζονται μόνο στη θεωρία των μαθηματικών, αλλά αποτελούν ένα εργαλείο με απεριόριστες εφαρμογές σε όλους τους τομείς της επιστήμης και της τεχνολογίας. Από την ανάλυση δεδομένων και τη μοντελοποίηση φυσικών φαινομένων έως την κατανόηση των οικονομικών συστημάτων και των βιολογικών διαδικασιών, οι ακολουθίες συνεχίζουν να παίζουν έναν κρίσιμο ρόλο στη διαμόρφωση του σύγχρονου κόσμου. Στην Πληροφορική οι ακολουθίες δεδομένων, όπως οι χρονοσειρές, χρησιμοποιούνται σε μοντέλα πρόβλεψης και σε αλγορίθμους μηχανικής μάθησης. Στην επεξεργασία σήματος, οι ακολουθίες χρησιμοποιούνται για την ανάλυση ήχου, εικόνας και βίντεο. Στην Κρυπτογραφία η παραγωγή ακολουθιών ψευδοτυχαίων αριθμών αποτελεί βασικό στοιχείο για την ασφάλεια πληροφοριών. Οι ακολουθίες χρησιμοποιούνται επίσης στη βιοπλη-ροφορική για την ανάλυση γονιδιωμάτων και πρωτεϊνών. Θα μελετήσουμε τις ακολουθίες πιο λεπτομερώς, καθώς αυτό το εννοιολογικό πλαίσιο θα χρησιμοποιηθεί αργότερα, όταν θα εξετά-σουμε τις σειρές και τις συναρτήσεις. Οι ακολουθίες αποτελούν τη βάση για την κατανόηση πιο σύνθετων εννοιών, όπως οι συγκλίνουσες και αποκλίνουσες σειρές, καθώς και οι συναρτήσεις που περιγράφονται μέσω αυτών. Αν και η έννοια μιας ακολουθίας αριθμών $a_1, a_2, a_3, \dots$ είναι αρκετά απλή, είναι χρήσιμο να σκεφτούμε μία ακολουθία ως μία συνάρτηση. Μέχρι στιγμής έχουμε ασχοληθεί με συναρτήσεις των οποίων τα πεδία ορισμού είναι οι πραγματικοί αριθμοί, ή κάποιο υποσύνολο αυτών. Ουσιαστικά, η ακολουθία είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$ (Σχήμα 4.54). Ως εκ τούτου, μια ακολουθία ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 4.22.1 . μία ακολουθία είναι μία διατεταγμένη συλλογή στοιχείων, συνήθως αριθμών, που καθορίζεται από μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Συμβολικά, μία ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορίζεται ως εξής:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(n) = a_n,$$

όπου a_n είναι ο n -οστός όρος της ακολουθίας.



Σχήμα 4.54: Γράφημα ακολουθίας και αντίστοιχης συνάρτησης

Ορισμός 4.22.2 . Ονομάζουμε *ουρά μιας ακολουθίας* το υποσύνολο των όρων της ακολουθίας που περιλαμβάνει όλους τους όρους μετά από έναν συγκεκριμένο δείκτη N . Δηλαδή, αν έχουμε μια ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, η ουρά της ακολουθίας είναι το σύνολο $\{a_{N+1}, a_{N+2}, a_{N+3}, \dots\}$, όπου N είναι ένας ακέραιος αριθμός.

4.22.1 Γενικός και αναγωγικός τύπος ακολουθίας

4.22.2 Γενικός τύπος ακολουθίας:

Ο γενικός όρος μίας ακολουθίας μπορεί να δοθεί ως συνάρτηση του n , π.χ.

$$a_n = \frac{n+2}{n^2+n+3}$$

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

4.22.3 Αναδρομικός τύπος ακολουθίας

Ο γενικός όρος μίας ακολουθίας μπορεί να δοθεί ως συνάρτηση προηγούμενων όρων του μαζί με τον αρχικό (ή τους αρχικούς), π.χ.

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \quad \text{με} \quad a_1 = 2$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{με} \quad a_0 = 0, a_1 = 1 \quad (\text{Αριθμοί Fibonacci})$$

Υπόθεση ύπαρξης ορίου-Εξίσωση αναδρομής

Όταν στη θέση των όρων μίας αναδρομικής σχέσης (π.χ. $a_{n+1} = f(a_n)$) βάζουμε μία μεταβλητή x , αυτό γίνεται για να διερευνήσουμε εάν υπάρχει το όριο της ακολουθίας.

Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε κάποιο όριο L . Επομένως:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L.$$

Άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα a_n και a_{n+1} με μια μεταβλητή x στην αναδρομική εξίσωση.

Η αναδρομική σχέση $a_{n+1} = f(a_n)$ γίνεται:

$$x = f(x).$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται *εξίσωση αναδρομής* και η λύση της δίνει το πιθανό όριο.

Παράδειγμα 4.22.3.

Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_1 = 3$ και

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} a_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Να βρεθεί ο a_n όρος της ακολουθίας ως συνάρτηση του n , δηλαδή να βρεθεί η συνάρτηση $a_n = a(n)$.

Λύση. Θεωρούμε την εξίσωση αναδρομής $x = 1 + \frac{1}{2}x$ που προκύπτει από την αναδρομική σχέση αν θέσουμε $a_n = x$, $a_{n+1} = x$. Η ρίζα της εξίσωσης αναδρομής είναι $x = 2$. Παρατηρούμε ότι

$$a_{n+1} - 2 = 1 + \frac{1}{2}a_n - 2 \Rightarrow a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$a_2 - 2 = \frac{1}{2}(a_1 - 2),$$

$$a_3 - 2 = \frac{1}{2}(a_2 - 2),$$

.....

$$a_n - 2 = \frac{1}{2}(a_{n-1} - 2).$$

Από τα ανωτέρω προκύπτει ότι

$$a_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a_1 - 2) \Rightarrow a_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (3 - 2)$$

$$\Rightarrow a_n = 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Θα συνεχίσουμε με ορισμούς που παρουσιάζουν βασικές έννοιες για τις ακολουθίες. Αυτοί οι ορισμοί θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα τις ιδιότητες και τη χρήση των ακολουθιών στις επόμενες ενότητες.

Ορισμός 4.22.4 . a) Η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ λέγεται *αύξουσα* (αντίστοιχα *αυστηρώς αύξουσα*) αν είναι:

$$a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{αντίστοιχα } a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N})$$

και λέγεται *φθίνουσα* (αντίστοιχα *αυστηρώς φθίνουσα*) αν είναι:

$$a_n \geq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{αντίστοιχα } a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}).$$

b) Λέμε ότι μία ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι *φραγμένη εκ των άνω* αν:

$$\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός M είναι ένα ανώτερο φράγμα της ακολουθίας.

c) Λέμε ότι μία ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι *φραγμένη εκ των κάτω* αν:

$$\exists m \in \mathbb{R} : a_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Στην περίπτωση αυτή, λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός m είναι ένα κατώτερο φράγμα της ακολουθίας.

d) Λέμε ότι μία ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι *φραγμένη*, αν είναι φραγμένη εκ των άνω και εκ των κάτω, δηλαδή αν:

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$$

e) Ονομάζουμε *supremum* ή *ελάχιστο άνω φράγμα* μιας άνω φραγμένης ακολουθίας τον πραγματικό αριθμό $S = \sup a_n$, ο οποίος έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i) Ο S είναι άνω φράγμα.
- (ii) Αν S' είναι ένα άνω φράγμα, τότε $S \leq S'$.

f) Αντίστοιχα, ονομάζουμε *infimum* ή *μέγιστο κάτω φράγμα* μιας κάτω φραγμένης ακολουθίας τον πραγματικό αριθμό $I = \inf a_n$, ο οποίος έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i) Ο I είναι κάτω φράγμα.
- (ii) Αν I' είναι ένα κάτω φράγμα, τότε $I' \leq I$.

Σημείωση 4.22.5 . Το παραγοντικό ενός φυσικού αριθμού n συμβολίζεται με $n!$ και ορίζεται ως

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{εάν } n = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n, & \text{εάν } n \neq 0. \end{cases}$$

Παράδειγμα 4.22.6.

Εξετάστε αν οι παρακάτω ακολουθίες είναι μονότονες, φραγμένες ή και τα δύο.

- a) $\{-n^2\}_{n=0}^{\infty}$
- b) $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$
- c) $\left\{\frac{2}{n^2}\right\}_{n=5}^{\infty}$
- d) Να βρεθεί το supremum και το infimum του συνόλου $A = (0, 1)$.

Λύση: a) Η ακολουθία $\{-n^2\}_{n=0}^{\infty}$ είναι φθίνουσα (και άρα μονότονη), διότι

$$-n^2 > -(n+1)^2 \quad \text{για κάθε } n.$$

Εφόσον οι όροι της ακολουθίας είναι είτε μηδενικοί είτε αρνητικοί, η ακολουθία είναι άνω φραγμένη. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιονδήποτε θετικό αριθμό ή το μηδέν ως φράγμα, αλλά είναι τυπικό να επιλέγουμε το μικρότερο δυνατό φράγμα, που είναι $M = 0$, αφού

$$-n^2 \leq 0 \quad \text{για κάθε } n.$$

Η ακολουθία δεν είναι κάτω φραγμένη, διότι μπορούμε να φτάσουμε κάτω από οποιοδήποτε πιθανό φράγμα, επιλέγοντας αρκετά μεγάλο n . Επομένως, η ακολουθία δεν είναι πλήρως φραγμένη, αλλά είναι άνω φραγμένη.

b) Οι όροι αυτής της ακολουθίας $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ εναλλάσσονται μεταξύ 1 και -1 , οπότε η ακολουθία δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα. Επομένως, η ακολουθία δεν είναι μονότονη. Επίσης είναι φραγμένη, καθώς είναι άνω φραγμένη από το 1 και κάτω φραγμένη από το -1 .

c) Η ακολουθία $\left\{\frac{2}{n^2}\right\}_{n=5}^{\infty}$ είναι φθίνουσα (και άρα μονότονη), διότι:

$$\frac{2}{n^2} > \frac{2}{(n+1)^2} \quad \text{για κάθε } n \geq 5.$$

Όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί, άρα η ακολουθία είναι κάτω φραγμένη από το 0. Επίσης, επειδή η ακολουθία είναι φθίνουσα, ο πρώτος όρος ($n = 5$) είναι ο μεγαλύτερος, άρα η ακολουθία είναι άνω φραγμένη από το $\frac{2}{25}$.

d) Το σύνολο A είναι το ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$, δηλαδή περιλαμβάνει όλους τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την σχέση $0 < x < 1$. Παρατηρούμε ότι $x < 1$, $\forall x \in A$. Συνεπώς το 1 είναι άνω φράγμα του A . Επίσης για κάθε $y < 1$, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $y < x$, δηλαδή κανένα μικρότερο από το 1 δεν μπορεί να είναι άνω φράγμα. Επομένως το 1 είναι το μικρότερο άνω φράγμα του συνόλου A . Δηλαδή το supremum του A .

Ομοίως παρατηρούμε ότι $x > 0$, $\forall x \in A$. Άρα, το 0 είναι κάτω φράγμα του A . Επίσης, για κάθε $y > 0$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $x < y$. Δηλαδή κανένα μεγαλύτερο από το 0 δεν μπορεί να είναι κάτω φράγμα. Επομένως το 0 είναι το μεγαλύτερο κάτω φράγμα του συνόλου A , δηλαδή, το infimum του A . Άρα για το σύνολο $A = (0, 1)$, έχουμε $\sup A = 1$ και $\inf A = 0$.

Σημειώνεται ότι ούτε το 0 ούτε το 1 ανήκουν στο σύνολο, καθώς το διάστημα είναι ανοιχτό.

4.23 Μαθηματική Επαγωγή

Η μαθηματική επαγωγή είναι μια μέθοδος απόδειξης που χρησιμοποιείται για να δείξουμε ότι μια πρόταση ισχύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς n ή για κάποια ακολουθία τιμών του n . Η μέθοδος βασίζεται στη λογική της εξαγωγής συμπερασμάτων από το συγκεκριμένο στο γενικό.

Βήμα 1: Αποδεικνύουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = 1$.

Βήμα 2: Δεχόμαστε ότι η συγκεκριμένη πρόταση ισχύει για $n = k$.

Βήμα 3: Με βάση το Βήμα 2 αποδεικνύουμε ότι ισχύει και για $n = k + 1$.

Παράδειγμα 4.23.1 .

Δίνεται η ακολουθία $\{a_n\}$ με $a_1 = 1$ και $a_{n+1} = 3a_n + 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία.

Λύση. Έχουμε $a_1 = 1$ και $a_2 = 5$, και εφαρμόζοντας τον αναδρομικό τύπο για μερικές τιμές του n , φαίνεται ότι η ακολουθία είναι γνήσια αύξουσα. Θα το δείξουμε αυτό με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Η $a_n < a_{n+1}$ ισχύει για $n = 1$, αφού $a_1 < a_2$. Υποθέτουμε ότι η $a_n < a_{n+1}$ ισχύει για $n = k$, δηλ. $a_k < a_{k+1}$. Θα δείξουμε ότι η $a_n < a_{n+1}$ ισχύει για $n = k + 1$, δηλαδή $a_{k+1} < a_{k+2}$.

Πράγματι,

$$a_{k+1} < a_{k+2} \iff 3a_k + 2 < 3a_{k+1} + 2 \iff 3a_k < 3a_{k+1} \iff a_k < a_{k+1},$$

που ισχύει από την υπόθεση (ii). Από (i), (ii) και (iii) σύμφωνα με τις αρχές της μαθηματικής επαγωγής έπεται ότι η $a_n < a_{n+1}$ ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$ και επομένως η (a_n) είναι γνήσια αύξουσα.

Παράδειγμα 4.23.2 .

Δίνεται $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6}$ με $a_1 = 2$. Να δείξετε ότι η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη και αύξουσα.

Λύση.

1. Θα δείξουμε ότι $a_n \leq 3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έχουμε ότι $a_1 = 2 \leq 3$ (σωστό). Υποθέτουμε ότι $a_k \leq 3$. Τότε, $a_{k+1} = \sqrt{a_k + 6} \leq \sqrt{3 + 6} = \sqrt{9} = 3$. Άρα $a_{k+1} \leq 3$, οπότε με επαγωγή έχουμε ότι $a_n \leq 3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Για να αποδείξουμε ότι η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα θα πρέπει

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 6} > a_n.$$

Επειδή $a_n > 0$ μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο χωρίς να αλλάξει το πρόσημο της ανισότητας:

$$a_n + 6 > a_n^2 \Rightarrow a_n^2 - a_n - 6 < 0 \Rightarrow (a_n + 2)(a_n - 3) < 0 \Rightarrow a_n \in (0, 3).$$

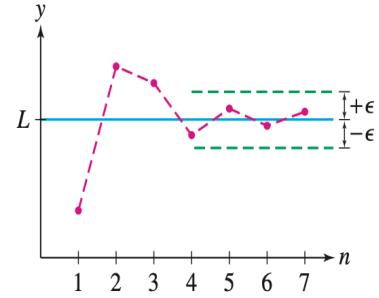
Άρα η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα.

Ορισμός 4.23.3. Λέμε ότι μία ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ έχει όριο το $L \in \mathbb{R}$ ή ότι συγκλίνει στο $L \in \mathbb{R}$ και γράφουμε:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ ή $a_n \rightarrow L$ όταν $n \rightarrow +\infty$, αν:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \text{ τέτοιο ώστε } (n > n_0 \implies |a_n - L| < \varepsilon).$$

Μία ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ λέγεται *μηδενική*, αν συγκλίνει στο $0 \in \mathbb{R}$.



Σχήμα 4.55: Διάγραμμα μιας ακολουθίας με όριο L . Για κάθε ε οι κουκκίδες τελικά παραμένουν εντός μιας ζώνης εύρους εγύρω από το L .

Πρόταση 4.23.4. Το όριο μίας ακολουθίας είναι μοναδικό, δηλαδή αν $a_n \rightarrow a$ και $a_n \rightarrow b$ τότε $a = b$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι οι a , b δεν είναι ίσοι και χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η ανισότητα $a < b$. Εξ ορισμού, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει δείκτης $n_1(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ για κάθε } n > n_1.$$

Ομοίως, υπάρχει $n_2(\varepsilon)$ έτσι ώστε για κάθε $n > n_2$ να είναι $|a_n - b| < \varepsilon$. Αν επιλέξουμε $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ και ως N τον μεγαλύτερο από τους $n_1\left(\frac{b-a}{2}\right)$ και $n_2\left(\frac{b-a}{2}\right)$, τότε για $n > N$ προκύπτει από την πρώτη και τη δεύτερη σχέση ότι:

$$|a_n - a| < \frac{b-a}{2}, \quad |a_n - b| < \frac{b-a}{2}.$$

Αν κάνουμε τις πράξεις θα καταλήξουμε στο αποτέλεσμα

$$a_n < \frac{b+a}{2} \quad \text{και} \quad a_n > \frac{b+a}{2}$$

που είναι άτοπο. Συνεπώς $a = b$.

Ορισμός 4.23.5. Το ακέραιο μέρος ενός πραγματικού αριθμού x ορίζεται ως

$$[x] = n, \quad \text{όπου } n \in \mathbb{Z} \text{ και } n \leq x < n+1.$$

Παράδειγμα 4.23.6.

Έστω $a_n = \frac{n+4}{n+3}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Λύση: Ο ορισμός απαιτεί να βρούμε για κάθε $\varepsilon > 0$ να υπάρχει ένας αριθμός $n(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε

$$|a_n - 1| < \varepsilon \quad \text{για κάθε } n > n(\varepsilon).$$

Έχουμε:

$$|a_n - 1| = \left| \frac{n+4}{n+3} - 1 \right| = \frac{1}{n+3}.$$

Επομένως, $|a_n - 1| < \varepsilon$ αν

$$\frac{1}{n+3} < \varepsilon \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 3.$$

Θέτουμε $n_0(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} - 3 \right] + 1$. Τότε, για κάθε $n > n_0(\varepsilon)$ θα ισχύει $|a_n - 1| < \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

Ορισμός 4.23.7. a) Λέμε ότι μία ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ έχει όριο το $+\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \quad \text{ή} \quad a_n \rightarrow +\infty, \quad \text{όταν } n \rightarrow +\infty \quad \text{αν}$$

$$(\forall M > 0) (\exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}) \quad \text{τέτοιο ώστε } (n > n_0(M) \implies a_n > M).$$

b) Λέμε ότι μία ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ έχει όριο το $-\infty$ και γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \quad \text{ή} \quad a_n \rightarrow -\infty, \quad \text{όταν } n \rightarrow +\infty \quad \text{αν}$$

$$(\forall M > 0) (\exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}) \quad \text{τέτοιο ώστε } (n > n_0(M) \implies a_n < -M).$$

c) Μία ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ λέγεται *συγκλίνουσα* αν έχει όριο ℓ και είναι $\ell \in \mathbb{R}$.

d) Μία ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ λέγεται *αποκλίνουσα* αν δεν έχει όριο ή αν έχει όριο το $+\infty$ ή το $-\infty$.

Σημείωση 4.23.8. Το σύμβολο $\approx$ στη μαθηματική ανάλυση σημαίνει ασυμπτωτική ισοδυναμία. Δηλώνει ότι δύο εκφράσεις έχουν την ίδια τάξη μεγέθους καθώς μια μεταβλητή τείνει σε κάποιο όριο (π.χ. το n τείνει στο ∞ ή σε κάποιο κρίσιμο σημείο). Με λίγα λόγια η ασυμπτωτική ισοδυναμία δηλώνει ότι για μεγάλο n οι δύο εκφράσεις $f(n)$ και $g(n)$ έχουν την ίδια “ταχύτητα αύξησης” και η αναλογία τους πλησιάζει τη μονάδα. Δηλαδή για πολύ μεγάλες τιμές του n τα $f(n)$ και $g(n)$ είναι “πολύ κοντά”. Επομένως έχουμε

$$f(n) \approx g(n) \quad \text{όταν } n \rightarrow \infty \text{ σημαίνει ότι } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Συμπερασματικά το $\approx$ δεν σημαίνει ακριβής ισότητα αλλά μια έννοια ασυμπτωτικής ισότητας, η οποία χρησιμοποιείται ευρέως για την περιγραφή συμπεριφοράς συναρτήσεων σε οριακές καταστάσεις.

Παράδειγμα 4.23.9 .

Να βρεθούν τα όρια:

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n + \frac{5}{4}}$
2. $\lim_{n \rightarrow -\infty} -n^2$

Λύση με τον ορισμό: 1. Για την ακολουθία $a_n = \sqrt{n^2 + n + \frac{5}{4}}$ θα αποδείξουμε ότι

$$(\forall M > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ τέτοιο ώστε } [\forall n, n > n_0 \implies \sqrt{n^2 + n + \frac{5}{4}} > M].$$

(α) Εκτίμηση της ακολουθίας:

$$a_n = \sqrt{n^2 + n + \frac{5}{4}} = \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 1} \geq n + \frac{1}{2} > n.$$

(β) Επαλήθευση του ορισμού: Για κάθε $M > 0$ παίρνουμε $n_0 = [M] + 1$. Τότε, για $n > n_0$, έχουμε

$$a_n = \sqrt{n^2 + n + \frac{5}{4}} > n \geq [M] + 1 > M.$$

Άρα, η ακολουθία $a_n = \sqrt{n^2 + n + \frac{5}{4}}$ τείνει στο $+\infty$ καθώς $n \rightarrow +\infty$.

2. Για την ακολουθία $a_n = -n^2$ θα αποδείξουμε ότι

$$(\forall M > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) \text{ τέτοιο ώστε } [\forall n, n > n_0 \implies -n^2 < -M].$$

Έστω $M > 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $-n^2 < -M$ για αρκετά μεγάλα n . Από την ανίσωση $-n^2 < -M$ παίρνουμε $n^2 > M$. Θεωρώντας τη θετική τετραγωνική ρίζα και επιλύοντας ως προς n βρίσκουμε $n > \sqrt{M}$. Τώρα θέτουμε $n_0 = [\sqrt{M}]$, όπου $[M]$ είναι το ακέραιο μέρος του M .

Τότε, για όλα τα $n \geq n_0$, ισχύει $n^2 > M$ και συνεπώς $-n^2 < -M$. Επομένως για κάθε $M > 0$, βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για όλα τα $n \geq n_0$, να ισχύει $a_n = -n^2 < -M$. Άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Θεώρημα 4.23.10 . Κάθε αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) και φραγμένη εκ των άνω (αντίστοιχα φραγμένη εκ των κάτω) ακολουθία είναι συγκλίνουσα.

Πρόταση 4.23.11 . Κάθε μηδενική ακολουθία είναι και φραγμένη.

Απόδειξη. Έστω $a_n, n \in \mathbb{N}$ μία μηδενική ακολουθία. Τότε,

$$(\forall \varepsilon > 0) (\text{επομένως και για } \varepsilon = 1) (\exists n(\varepsilon) > 0) \text{ τέτοιο ώστε } (|a_n| < 1 \text{ όταν } n \geq n(\varepsilon)).$$

Αν τώρα $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n(\varepsilon)-1}|, 1\}$ θα έχουμε:

$$|a_n| \leq A, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως διαπιστώνουμε πως η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη.
Το αποτέλεσμα της προτάσεως αυτής μας οδηγεί στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.23.12 . Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι και φραγμένη.

Ορισμός 4.23.13 . Υπακολουθία μιας ακολουθίας $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ονομάζεται κάθε ακολουθία $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, όπου $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.

Οι όροι της υπακολουθίας $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ αποτελούν υποσύνολο των όρων της αρχικής ακολουθίας $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, και η υπακολουθία διατηρεί την ίδια διάταξη με την αρχική ακολουθία. Είναι φανερό ότι κάθε ακολουθία έχει άπειρες υπακολουθίες.

Θεώρημα 4.23.14 . Έστω ότι $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ είναι συγκλίνουσες ακολουθίες με:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M.$$

Τότε ισχύουν τα εξής:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \pm M.$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) = LM.$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{L}{M}, \quad \text{αν } M \neq 0.$
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = cL, \quad \text{για οποιαδήποτε σταθερά } c.$

Θεώρημα 4.23.15 . Κριτήριο παρεμβολής για ακολουθίες Έστω $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθίες τέτοιες ώστε για κάποιον αριθμό M ισχύει:

$$b_n \leq a_n \leq c_n \quad \text{για } n > M \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L.$$

Τότε,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Παράδειγμα 4.23.16 .

Να δείξετε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{\sin n}{n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει στο 0.

Λύση. Γνωρίζουμε ότι $|\sin n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Διαιρώντας με $n > 0$, προκύπτει

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Θέτουμε:

$$b_n = -\frac{1}{n}, \quad c_n = \frac{1}{n}, \quad \text{και } a_n = \frac{\sin n}{n}.$$

Η ακολουθία $\left\{-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0.$$

Η ακολουθία $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ επίσης συγκλίνει:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής, η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει επίσης στο 0.

Λυμένες ασκήσεις 4.23.17 .

1. Να βρεθεί ένας τύπος για τον n -οστό όρο κάθε ακολουθίας

(a) Η ακολουθία είναι: $1, -\frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \dots$

(b) Η ακολουθία είναι: $\frac{2}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{8}, \dots$

2. Να αποδείξετε ότι η $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Υπάρχει το $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

3. Να δείξετε ότι η ακολουθία

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \quad \dots$$

είναι φραγμένη και αύξουσα. Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι υπάρχει το $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ και να υπολογίσετε την τιμή του.

4. Δίνεται η ακολουθία $b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(a) Να βρείτε μια τιμή του M τέτοια ώστε $|b_n| \leq 10^{-5}$ για $n \geq M$.

(b) Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορίου για να αποδείξετε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Λύση (1a) Παρατηρούμε ότι οι αριθμητές είναι $1, -1, 1, \dots$, δηλαδή εναλλάσσονται μεταξύ 1 και -1 . Αυτό περιγράφεται από τον όρο $(-1)^{n+1}$. Επίσης οι παρονομαστές είναι οι κύβοι των n : $1^3, 2^3, 3^3, \dots$, δηλαδή n^3 . Άρα, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$.

(1b) Παρατηρούμε ότι οι αριθμητές είναι $2, 3, 4, \dots$, δηλαδή $n+1$. Επίσης οι παρονομαστές είναι $6, 7, 8, \dots$, δηλαδή $n+5$. Άρα, ο γενικός όρος της ακολουθίας είναι $b_n = \frac{n+1}{n+5}$.

(2) Η ακολουθία είναι φθίνουσα επειδή $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} > \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$. Επί πλέον η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη από κάτω διότι για κάθε n , $a_n > 0$. Από το Θεώρημα μονοτονίας, καθώς η a_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, υπάρχει το όριο

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{και} \quad L \geq 0.$$

μπορούμε να δείξουμε ότι $L = 0$ παρατηρώντας ότι η a_n μπορεί να γραφεί ως

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Οπότε:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

(3) Καταρχήν θα δείξουμε ότι η $\{a_n\}$ είναι άνω φραγμένη. Βεβαίως, έχουμε $a_1 = \sqrt{2} \approx 1.414$, άρα $a_1 < 2$. Από την άλλη, ισχύει ότι αν $a_n < 2$, τότε $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} < \sqrt{2 \cdot 2} = \sqrt{4} = 2$. Επομένως εφαρμόζοντας επαγωγικά το ίδιο επιχείρημα, προκύπτει ότι

$$a_n < 2 \quad \text{για κάθε } n.$$

Η ακολουθία $\{a_n\}$ είναι λοιπόν άνω φραγμένη από το 2.

Αφού a_n είναι θετική και για κάθε n ισχύει $a_1 = \sqrt{2} > 0$ έχουμε

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} > a_n.$$

Άρα, η ακολουθία είναι επίσης αύξουσα.

Αφού η ακολουθία είναι άνω φραγμένη και αύξουσα, από το Θεώρημα μονοτονίας προκύπτει ότι υπάρχει το όριο $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Παίρνοντας το όριο στην αναδρομική σχέση $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$, έχουμε

$$L = \sqrt{2L}.$$

Άρα $L^2 = 2L$ ή $L^2 - 2L = 0$ το οποίο συνεπάγεται $L(L - 2) = 0$. Συνεπώς $L = 0$ ή $L = 2$. Καθώς οι όροι της ακολουθίας είναι θετικοί και η ακολουθία είναι αύξουσα, απορρίπτεται η λύση $L = 0$ και παραμένει η λύση $L = 2$.

(4a) Η απόλυτη τιμή $|b_n|$ δίνεται από την σχέση $|b_n| = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ και ζητείται να βρεθεί μια τιμή

του M τέτοια ώστε $\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq 10^{-5}$ για $n \geq M$.

Λαμβάνουμε λογάριθμο και στα δύο μέλη

$$\ln\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) \leq \ln(10^{-5}) \quad \text{οπότε} \quad n \ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq -5 \ln(10).$$

Δεδομένου ότι $\ln\left(\frac{1}{3}\right) < 0$, διαιρούμε με $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ αντιστρέφοντας την ανισότητα έχουμε

$$n \geq \frac{-5 \ln(10)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

Υπολογίζουμε:

$$\ln(10) \approx 2.3026, \quad \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(1) - \ln(3) = -\ln(3) \approx -1.0986.$$

Άρα:

$$n \geq \frac{-5 \cdot 2.3026}{-1.0986} \approx 10.48.$$

Επομένως, μπορούμε να πάρουμε $M = 11$.

(4b) Για κάθε $\varepsilon > 0$, θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$|b_n - 0| = \left(\frac{1}{3}\right)^n < \varepsilon \quad \text{για κάθε } n > N.$$

Λύνοντας την ανισότητα $\left(\frac{1}{3}\right)^n < \varepsilon$ λαμβάνουμε λογάριθμο και στα δύο μέλη και έτσι έχουμε

$$n \ln\left(\frac{1}{3}\right) < \ln(\varepsilon).$$

Διαιρούμε με $\frac{1}{3}$ (το οποίο είναι αρνητικό) αντιστρέφοντας την ανισότητα έχουμε

$$n > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

Ορίζουμε:

$$N = \left\lceil \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} \right\rceil.$$

Τότε, για κάθε $n > N$, ισχύει: $\left(\frac{1}{3}\right)^n < \varepsilon$. Επομένως, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

4.23.1 Κριτήριο σύγκλισης του Cauchy

Ο ορισμός του ορίου που δόθηκε παραπάνω μας επιτρέπει να ελέγξουμε εάν μια ακολουθία συγκλίνει σε έναν συγκεκριμένο αριθμό a . Ωστόσο, όταν το υποψήφιο όριο a δεν είναι γνωστό, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε αυτόν τον ορισμό για να εξετάσουμε τη σύγκλιση. Στην περίπτωση αυτή, απαιτείται ένα κριτήριο σύγκλισης το οποίο βασίζεται αποκλειστικά στους ίδιους τους όρους της ακολουθίας, χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε την τιμή του ορίου. Την ανάγκη αυτή καλύπτει το *κριτήριο σύγκλισης του Cauchy*.

Ορισμός 4.23.18 . Η ακολουθία a_n , $n \in \mathbb{N}$ είναι *Cauchy* τότε και μόνο τότε όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ που εξαρτάται από το ε , έτσι ώστε

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

για κάθε ζευγάρι φυσικών αριθμών n, m , που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του n_0 .

Η έννοια της ουράς είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μελέτη της σύγκλισης, καθώς μας επιτρέπει να επικεντρωθούμε στη συμπεριφορά των όρων της ακολουθίας όταν οι δείκτες n γίνονται πολύ μεγάλοι. Συχνά, η σύγκλιση ή άλλες ιδιότητες της ακολουθίας εξαρτώνται αποκλειστικά από τη συμπεριφορά της ουράς της. Το πλεονέκτημα του κριτηρίου του Cauchy είναι ότι δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε το όριο της ακολουθίας για να ελέγξουμε αν συγκλίνει. Μας επιτρέπει να βασιστούμε μόνο στους ίδιους τους όρους της ακολουθίας. Σύμφωνα με το κριτήριο, για να συγκλίνει μια ακολουθία, αρκεί οι όροι της να βρίσκονται πολύ κοντά (δηλαδή στην ουρά) ανεξάρτητα πόσο απέχουν μεταξύ τους οι δείκτες n και m . με άλλα λόγια, η σύγκλιση ελέγχεται εξετάζοντας μόνο τη “συμπεριφορά” των όρων προς το τέλος της ακολουθίας, χωρίς να χρειάζεται να ξέρουμε πού συγκλίνει. Επίσης, το ίδιο κριτήριο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία δεν συγκλίνει, αν δείξουμε ότι δεν μπορούμε να ικανοποιήσουμε την παραπάνω συνθήκη για κάποια τιμή του ε .

Παράδειγμα 4.23.19 .

Η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

είναι Cauchy ακολουθία.

Λύση. Πράγματι, αν θεωρήσουμε χωρίς να βλάπτεται η γενικότητα ότι $n > m$, τότε

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \left| \frac{1}{n} \right| + \left| \frac{1}{m} \right| < \frac{2}{m} < \varepsilon$$

για κάθε $n, m \geq n_0$. Αν επιλέξουμε για n_0 το ακέραιο μέρος του $\frac{2}{\varepsilon}$ συν 1, δηλαδή $n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$, τότε από

$$n, m \geq n_0 = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{2}{\varepsilon} \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{2}{m} < \varepsilon.$$

Θεώρημα 4.23.20 . Στον χώρο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, κάθε ακολουθία Cauchy είναι συγκλίνουσα. Δηλαδή, αν μια ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy, τότε υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $L \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Θεώρημα 4.23.21 . Μια ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει αν και μονον αν είναι ακολουθία Cauchy.

Παράδειγμα 4.23.22 .

Έστω $0 < \lambda < 1$ και ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ για την οποία ισχύει:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \lambda |a_n - a_{n-1}|, \quad n \geq 2.$$

Δείξτε ότι η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Λύση. Για να δείξουμε ότι η (a_n) είναι ακολουθία Cauchy, πρέπει να αποδείξουμε ότι για κάθε ε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ που εξαρτάται από το ε , έτσι ώστε

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

για κάθε ζευγάρι φυσικών αριθμών n, m , που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του n_0 .

Εστω $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$. Τότε, $n = k + m, k \in \mathbb{N}$. Επομένως, ισχύει:

$$|a_n - a_m| = |(a_{m+k} - a_{m+k-1}) + (a_{m+k-1} - a_{m+k-2}) + \cdots + (a_{m+1} - a_m)|.$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$|a_n - a_m| \leq |a_{m+k} - a_{m+k-1}| + |a_{m+k-1} - a_{m+k-2}| + \cdots + |a_{m+1} - a_m|.$$

Από την υπόθεση, έχουμε:

$$|a_{m+1} - a_m| \leq \lambda |a_m - a_{m-1}|,$$

$$|a_{m+2} - a_{m+1}| \leq \lambda |a_{m+1} - a_m| \leq \lambda^2 |a_m - a_{m-1}|,$$

$$|a_{m+3} - a_{m+2}| \leq \lambda |a_{m+2} - a_{m+1}| \leq \lambda^3 |a_m - a_{m-1}|.$$

Επαναληπτικά, για $k \geq 1$, έχουμε:

$$|a_{m+k} - a_{m+k-1}| \leq \lambda^k |a_m - a_{m-1}|.$$

Έπομένως από την υπόθεση έχουμε:

$$|a_n - a_m| \leq \sum_{\mu=1}^k \lambda^\mu |a_m - a_{m-1}|.$$

Η σειρά $\sum_{\mu=1}^k \lambda^\mu$ είναι γεωμετρική και ισούται με

$$\sum_{\mu=1}^k \lambda^\mu = \lambda \frac{1 - \lambda^k}{1 - \lambda} \leq \frac{1}{1 - \lambda}.$$

Άρα

$$|a_n - a_m| \leq \frac{|a_m - a_{m-1}|}{1 - \lambda}.$$

Καθώς $|a_m - a_{m-1}| \rightarrow 0$ (λόγω του $\lambda < 1$), για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε N τέτοιο ώστε

$$|a_m - a_{m-1}| < (1 - \lambda) \cdot \varepsilon, \quad \forall m \geq N.$$

Άρα

$$|a_n - a_m| \leq \frac{|a_m - a_{m-1}|}{1 - \lambda} \leq \frac{(1 - \lambda) \cdot \varepsilon}{1 - \lambda} = \varepsilon.$$

Συνεπώς η ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ είναι ακολουθία Cauchy.

Παράδειγμα 4.23.23.

Να δείξετε ότι η ακολουθία

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ \frac{1}{n}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

δεν είναι συγκλίνουσα.

Λύση. Αν επιλέξουμε για ε το θετικό αριθμό $\frac{1}{2}$, τότε δεν υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$|b_n - b_m| < \frac{1}{2}, \quad n, m \geq n_0$$

Πράγματι,

$$\text{για κάθε } k \in \mathbb{N}, \quad |a_{2k+1} - a_{2k}| = \left|1 - \frac{1}{2k}\right| \not< \frac{1}{2}.$$

Επομένως η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι συγκλίνουσα.

4.23.2 Άλλα κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών

Πέρα από τα βασικά κριτήρια για τη σύγκλιση μιας ακολουθίας που περιγράψαμε, υπάρχουν και άλλα κριτήρια που χρησιμοποιούμε για να μελετήσουμε τη σύγκλιση μιας ακολουθίας. Η επιλογή του κατάλληλου κριτηρίου εξαρτάται από την αναλυτική μορφή της ακολουθίας και τις ιδιότητές της. Τα κυριότερα κριτήρια σύγκλισης ακολουθιών, πέρα από αυτά που έχουμε ήδη περιγράψει αναλυτικά, μπορούν να συνοψιστούν ως εξής, χωρίς να απαιτείται περαιτέρω ανάλυση:

(a) *Κριτήριο σύγκλισης με μηδενική ακολουθία*

Αν μια ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο μηδέν και μια άλλη ακολουθία $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη τότε το γινόμενο των δύο ακολουθιών $\{a_n b_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει επίσης στο μηδέν.

(b) *Κριτήριο σύγκλισης γεωμετρικών ακολουθιών*

Αν $\omega \in \mathbb{R}$ με $|\omega| < 1$ και $a_n = \omega^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ τότε $\lim a_n = 0$.

(c) *Κριτήριο σύγκλισης λόγων*

Αν για την ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ισχύει $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \theta$ με $\theta < 1$, τότε η $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο μηδέν.

(d) *Κριτήριο σύγκλισης ριζικών*

Αν για την ακολουθία $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ έχουμε $a_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και $\lim \sqrt[n]{a_n} = \theta$ με $\theta < 1$, τότε $\lim a_n = 0$.

(e) *Κριτήριο ακολουθιών τύπου $1/n^k$*

Αν $a_n = \frac{1}{n^k}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ και k σταθερός θετικός ρητός αριθμός τότε $\lim a_n = 0$.

(f) *Κριτήριο σύγκλισης ακολουθιών ριζών*

Αν $a_n = \alpha^{1/n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ και $\alpha > 0$ τότε $\lim a_n = 1$.

(g) *Κλασική σύγκλιση προς τον αριθμό e*

Η ακολουθία $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ συγκλίνει στον αριθμό $e \approx 2.718$.

Παράδειγμα 4.23.24 .

Να εξετάσετε τη σύγκλιση ή την απόκλιση της ακολουθίας $a_n = \frac{1}{2^n}$.

Λύση. Υπολογίζουμε τον λόγο:

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{\frac{2^{n+1}}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Το όριο του λόγου είναι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{2}.$$

Επειδή το όριο του λόγου είναι $\theta = \frac{1}{2} < 1$, σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Παράδειγμα 4.23.25.

Να εξετάσετε τη σύγκλιση ή την απόκλιση της ακολουθίας

$$a_n = \frac{n^n}{(2n)^{n+1}}.$$

Παρατηρούμε ότι $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ καθώς $n^n > 0$ και $(2n)^{n+1} > 0$ έχουμε ότι $a_n \geq 0$. Έπομένως ικανοποιείται η βασική συνθήκη του κριτηρίου σύγκλισης ριζικών. Έχουμε

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n)^{n+1}}} = \frac{\sqrt[n]{n^n}}{\sqrt[n]{(2n)^{n+1}}} = \frac{n}{(2n)^{(n+1)/n}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(2n)^{\frac{1}{n}}}$$

Καθώς $(2n)^{1/n} \rightarrow 1$ όταν $n \rightarrow \infty$ έχουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$. Επειδή $\theta = \frac{1}{2} < 1$ από το κριτήριο ριζικών συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{n^n}{(2n)^{n+1}}$ συγκλίνει στο μηδέν.

Ασκήσεις 4.23.26 .

1. Να βρείτε τον όρο a_4 για την ακολουθία

$$a_n = n^2 - n.$$

2. Ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες συγκλίνουν στο μηδέν;

(a) $\frac{n^2}{n^2 + 1}$

(b) 2^n

(c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

3. Έστω a_n η n -οστή δεκαδική προσέγγιση της $\sqrt{2}$. Δηλαδή $a_1 = 1$, $a_2 = 1.4$, $a_3 = 1.41$ και ούτω καθεξής. Ποιο είναι το $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$;

4. Ποια από τις παρακάτω ακολουθίες ορίζεται αναδρομικά;

(a) $a_n = \sqrt{4 + n}$

(b) $b_n = \sqrt{4 + b_{n-1}}$

5. Το Θεώρημα 1.1.13 αναφέρει ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες και, στη δεύτερη περίπτωση, να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

(α) Αν η $\{a_n\}$ είναι φραγμένη, τότε συγκλίνει.

(β) Αν η $\{a_n\}$ δεν είναι φραγμένη, τότε συγκλίνει.

(γ) Αν η $\{a_n\}$ αποκλίνει, τότε δεν είναι φραγμένη.

6. Υποθέστε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4 \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 7.$$

Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$

(β) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^3$

(γ) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi b_n)$

(δ) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - 2a_n b_n)$

7. Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορίου για να αποδείξετε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} = 0.$$

8. Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορίου για να αποδείξετε ότι

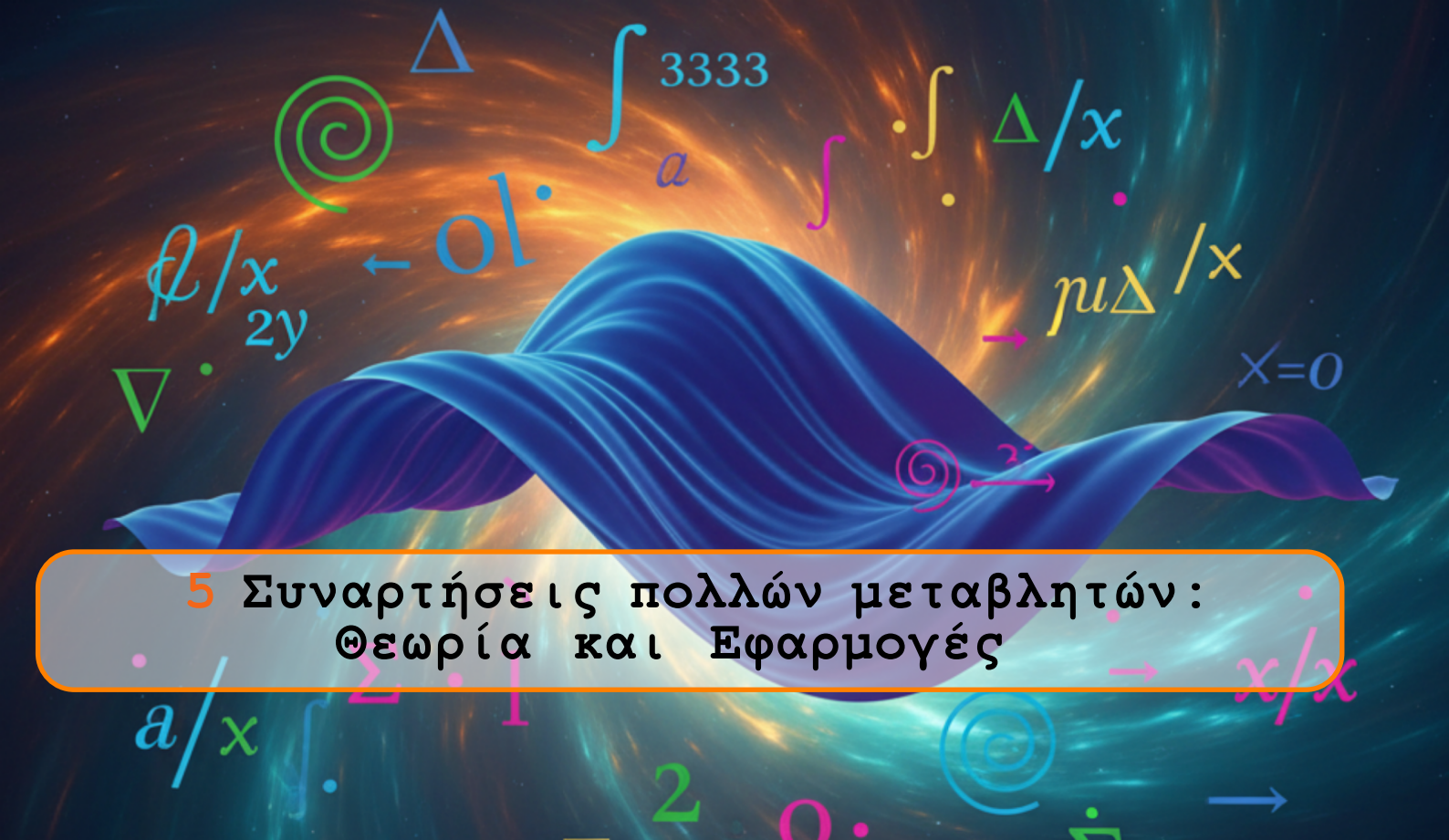
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + n^{-1}} = 1.$$

9. Στις επόμενες ασκήσεις να χρησιμοποιήσετε κατάλληλους κανόνες ορίων για να βρείτε το όριο της ακολουθίας ή για να δείξετε ότι αποκλίνει:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Λογισμός πολλών μεταβλητών

5	Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών:	
	Θεωρία και Εφαρμογές	123
5.1	Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών	123
5.1.1	Εισαγωγή	123
5.2	Πεδία ορισμού και Πεδία Τιμών	125
5.2.1	Συναρτήσεις δύο μεταβλητών	125
5.2.2	Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων με δύο μεταβλητές	127
5.2.3	Ίχνη	129
5.3	Ισοσταθμικές καμπύλες και ισοσταθμικοί χάρτες	131
5.4	Συναρτήσεις με περισσότερες από δύο μεταβλητές	136
5.5	Όρια και συνέχεια στην περίπτωση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών	139
5.5.1	Ιστορικό Σχόλιο	139



5 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών: Θεωρία και Εφαρμογές

5.1 Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

5.1.1 Εισαγωγή

Οι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών αποτελούν έναν θεμελιώδη λίθο τόσο των Μαθηματικών όσο και πολλών εφαρμοσμένων επιστημών, όπως η Φυσική, η Μηχανική, η Οικονομία και η Επιστήμη των Υπολογιστών. Από τον απλό υπολογισμό εμβαδών γεωμετρικών σχημάτων, έως τη μελέτη μεταβολών φυσικών μεγεθών όπως η θερμοκρασία ή η πυκνότητα, οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών παρέχουν την απαραίτητη γλώσσα για την περιγραφή και ανάλυση φαινομένων που εξελίσσονται σε δύο διαστάσεις. Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι να παρουσιάσει με σαφήνεια και πληρότητα τη θεωρία, τις μεθόδους και τις εφαρμογές των συναρτήσεων δύο μεταβλητών με βασικά παραδείγματα - όπως το εμβαδόν παραλληλογράμμου ή η απόσταση σημείου από την αρχή των αξόνων - και καταλήγοντας σε πιο σύνθετες περιπτώσεις όπως παραδείγματα από την φυσική και την θεωρία υπολογιστών, το κεφάλαιο αυτό ξεδιπλώνει τη δύναμη και την πολυδιάστατη ισχύ των συναρτήσεων με δύο μεταβλητές. Παράλληλα, η γεωμετρική απεικόνιση μέσω ισοθαμικών καμπύλων και επιφανειών εμπλουτίζει τη θεωρητική προσέγγιση με πολύτιμες διαισθητικές γνώσεις, προσφέροντας το απαραίτητο εργαλείο για την ανάλυση και μοντελοποίηση πολύπλοκων συστημάτων. Είτε πρόκειται για την περιγραφή φαινομένων της φύσης, είτε για την ανάλυση δεδομένων στην επιστήμη των υπολογιστών και την τεχνολογία, οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών βρίσκονται στον πυρήνα κάθε ουσιαστικής μελέτης και σύνθεσης, επιτρέποντας μας να κατανοήσουμε, να προβλέψουμε και να μετασχηματίσουμε τον κόσμο γύρω μας.

Η μετάβαση από τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών ανοίγει νέους ορίζοντες στη μαθηματική ανάλυση, καθώς απαιτεί την αναδιατύπωση και επέκταση θεμελιωδών εννοιών σε δύο διαστάσεις. Στο προηγούμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε εκτενώς με βασικές έννοιες όπως το πεδίο ορισμού, η γραφική απεικόνιση, η έννοια της συνέχειας, η δυνατότητα παραγωγής και η διαφορισμότητα για συναρτήσεις πραγματικών αριθμών μιας μεταβλητής. Σε αυτό το κεφάλαιο, η μελέτη εστιάζει στο πώς επιμηκύνονται οι έννοιες αυτές όταν η συνάρτηση εξαρτάται από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και επομένως το πεδίο ορισμού αποκτά γεωμετρική υπόσταση - δεν πρόκειται πλέον για διάστημα, αλλά για περιοχή στο επίπεδο των (x, y) . Η έννοια της περιοχής γίνεται κεντρική: το πλήθος των σημείων όπου ορίζεται μια

συνάρτηση δύο μεταβλητών συχνά παρουσιάζει γεωμετρικούς περιορισμούς και επιτρέπει τη μελέτη φαινομένων πολύ πιο σύνθετων σε σχέση με τη μονοδιάστατη ανάλυση. Η συνέχεια, η παραγωγισιμότητα και η διαφορισιμότητα αναλύονται σε νέο πλαίσιο, ενώ η έννοια της μερικής παραγώγου εισάγει την ικανότητα περαιτέρω ανάλυσης της μεταβολής συναρτήσεων ως προς κάθε ανεξάρτητη μεταβλητή ξεχωριστά. Εμφανίζονται νέα εργαλεία όπως τα όρια κατεύθυνσης, οι μερικές παράγωγοι, η ολική συνέχεια, οι γραφικές παραστάσεις επιφανειών και οι ισοταθμικές καμπύλες, οι οποίες είναι και το κλειδί για τη διαισθητική κατανόηση της συμπεριφοράς των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Επιπλέον, στο διδιάστατο χώρο αποκτούν ιδιαίτερο ενδιαφέρον τα φαινόμενα τοπικής συμπεριφοράς: εντοπίζονται και μελετώνται μέγιστα, ελάχιστα και σημεία σαγματικής συμπεριφοράς με εργαλεία όπως το διαφορικό και ο πίνακας Hess. Τέλος, ο συνδυασμός μαθηματικών εννοιών και γεωμετρικής οπτικής προσφέρει ένα ισχυρό πλαίσιο για την ανάλυση και μοντελοποίηση φαινομένων που συναντάμε στη φυσική, στην οικονομία, αλλά και στους υπολογιστές, με εφαρμογές από την ανάλυση δεδομένων και την μαθηματική μοντελοποίηση έως τη βελτιστοποίηση συστημάτων.

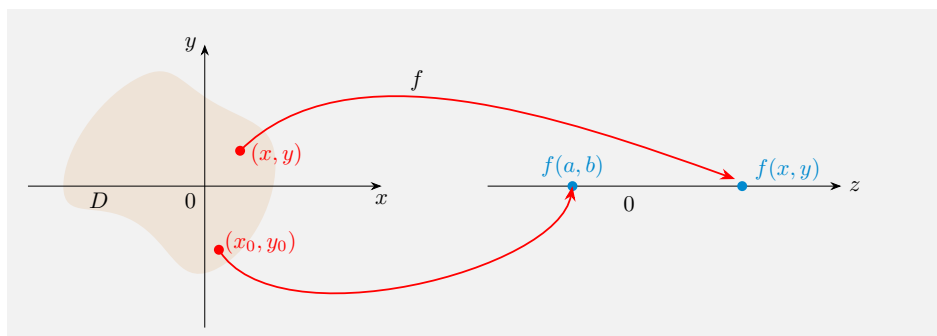
Γενικά, οι πραγματικές συναρτήσεις πολλών ανεξάρτητων πραγματικών μεταβλητών ορίζονται ανάλογα με τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής. Τα στοιχεία του πεδίου ορισμού είναι διατεταγμένα ζεύγη (τριάδες, τετράδες, n -άδες) πραγματικών αριθμών, ενώ τα στοιχεία του πεδίου τιμών είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ορισμός 5.1.1 . Έστω ότι το D είναι ένα σύνολο n -άδων πραγματικών αριθμών $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Μια *πραγματική συνάρτηση* f ορισμένη στο D είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει έναν (μονα- δικό) πραγματικό αριθμό

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

σε κάθε στοιχείο του D . Το σύνολο D είναι το *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης f . Το σύνολο των τιμών που παίρνει η f είναι το *πεδίο τιμών* της συνάρτησης. Το w είναι η *εξαρτημένη μεταβλητή* της f , και η f είναι συνάρτηση των n *ανεξάρτητων μεταβλητών* x_1 έως x_n . Ονομά- ζουμε επίσης τα x_j *μεταβλητές εισόδου* της συνάρτησης και το w *μεταβλητή εξόδου* της συνάρτη- σης.

Αν η f είναι συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, συνήθως συμβολίζουμε τις ανεξάρτη- τες μεταβλητές με x και y και την εξαρτημένη μεταβλητή με z , ενώ φανταζόμαστε το πεδίο ορισμού της f ως χωρίο στο επίπεδο xy . Αν η f είναι συνάρτηση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών, ονομάζουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές x , y και z και την εξαρτημένη μεταβλητή w , και φανταζό- μαστε το πεδίο ορισμού ως χωρίο (περιοχή) του χώρου.



Σχήμα 5.1: Απεικόνιση του $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

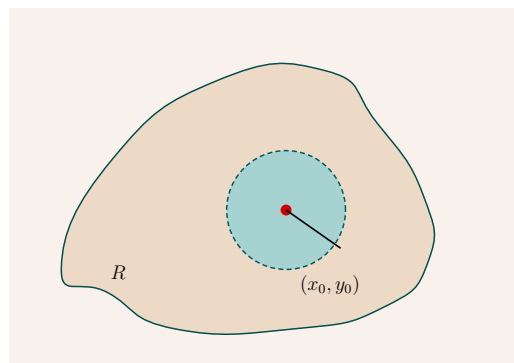
Στις εφαρμογές, τείνουμε να χρησιμοποιούμε γράμματα που μας θυμίζουν τι σημαίνουν οι μεταβλητές που αυτά συμβολίζουν. Για να δηλώσουμε ότι ο όγκος ενός ορθού κυλινδρικού κυλίνδρου είναι συνάρτηση της ακτίνας του και του ύψους του, μπορούμε να γράψουμε $V = f(r, h)$. Για περισσότερη ακρίβεια, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $f(r, h)$ με τον τύπο που υπολογίζει την τιμή του V από τις τιμές των r και h , και να γράψουμε $V = \pi r^2 h$. Σε κάθε

περίπτωση, τα r και h θα είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές και το V η εξαρτημένη μεταβλητή της συνάρτησης.

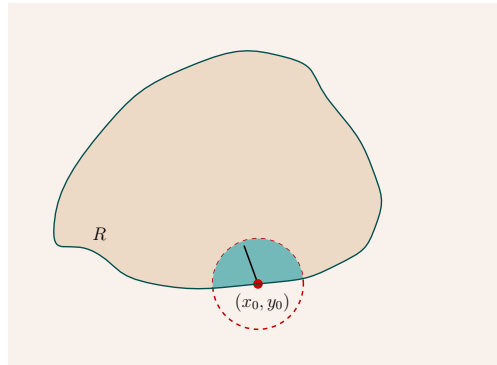
- ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ
- ΠΕΔΙΟ ΤΙΜΩΝ
- ΓΡΑΦΗΜΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
- ΟΡΙΑ
- ΣΥΝΕΧΕΙΑ
- ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ
- ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

5.2 Πεδία ορισμού και Πεδία Τιμών

5.2.1 Συναρτήσεις δύο μεταβλητών



Σχήμα 5.2: Εσωτερικό Σημείο



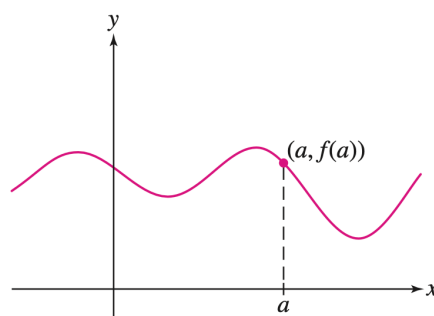
Σχήμα 5.3: Εξωτερικό Σημείο

Παράδειγμα 5.2.1 .

Να σχεδιάσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y}$$

Ποιο είναι το εύρος των τιμών αυτών των συναρτήσεων;



Σχήμα 5.4: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y}$ είναι το σύνολο των σημείων που βρίσκονται πάνω στην παραβολή $y = 9 - x^2$ ή κάτω από αυτήν.

Ασκήσεις 5.2.2 .

$$1. f(x, y) = \sqrt{y - x - 2}$$

$$2. f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$$

$$3. f(x, y) = \frac{(x-1)(y+2)}{(y-x)(y-x^3)}$$

$$4. f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2 - 25}$$

$$5. f(x, y) = \cos^{-1}(y - x^2)$$

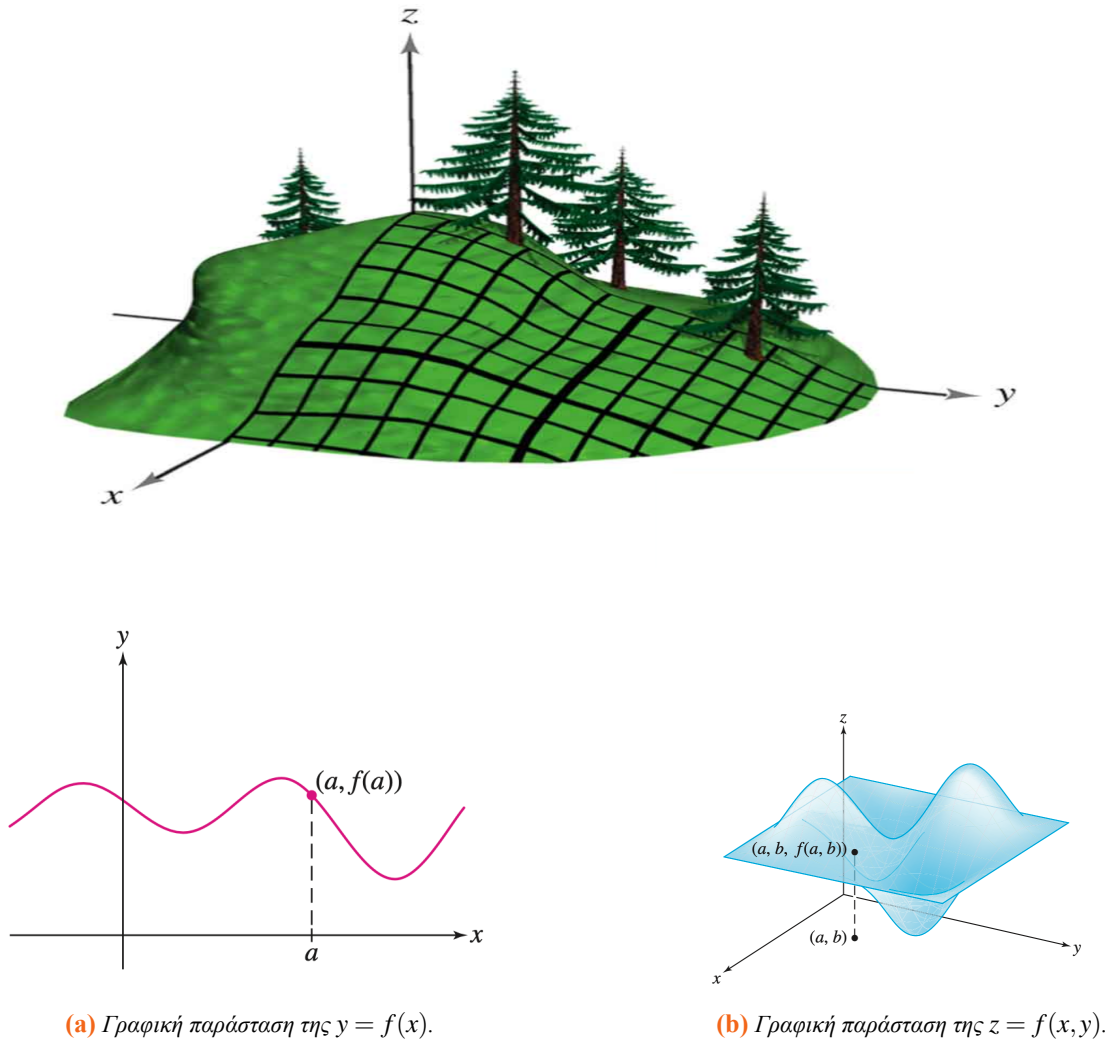
$$6. f(x, y) = \ln(xy + x - y - 1)$$

$$7. f(x, y) = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 9)}$$

$$8. f(x, y) = \frac{1}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$$

5.2.2 Γραφική αναπαράσταση συναρτήσεων με δύο μεταβλητές

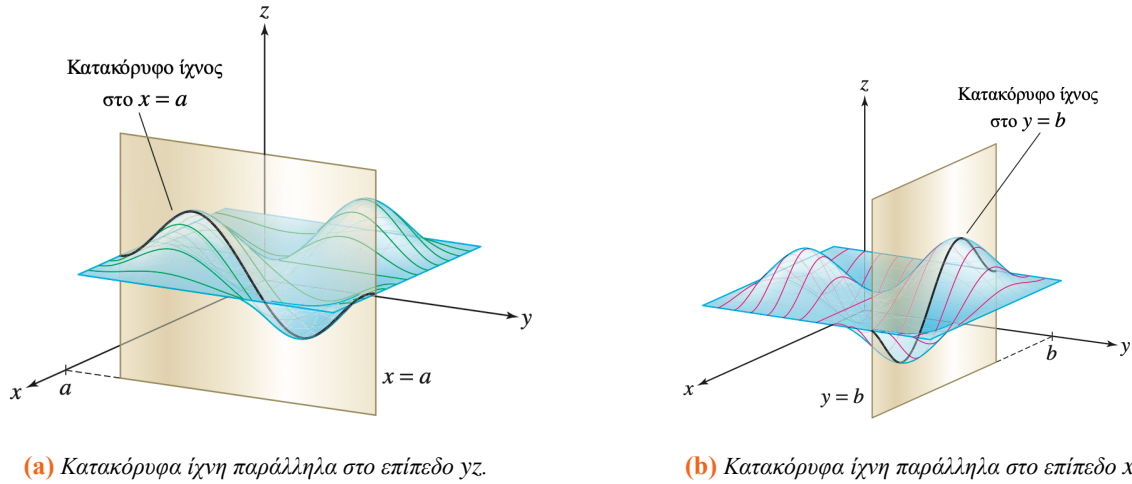
Στην περίπτωση του Λογισμού των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις γραφικές παραστάσεις για να οπτικοποιήσουμε τα πιο σημαντικά από τα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης (βλ. Σχήμα 5.5a). Οι γραφικές παραστάσεις παίζουν έναν παρόμοιο ρόλο και στην περίπτωση των συναρτήσεων με δύο μεταβλητές. Το γράφημα μιας συνάρτησης f δύο μεταβλητών αποτελείται από το σύνολο των σημείων $(a, b, f(a, b))$ του χώρου $\mathbb{R}^3$ για όλα τα ζεύγη τιμών (a, b) που ανήκουν στο πεδίο ορισμού D της f . Υποθέτοντας ότι η f είναι συνεχής (η έννοια της συνέχειας στην πολυμεταβλητή ανάλυση θα οριστεί στην επόμενη ενότητα), το γράφημα είναι μια επιφάνεια το ύψος της οποίας πάνω ή κάτω από το επίπεδο xy στο (a, b) είναι η τιμή της συνάρτησης $f(a, b)$ (βλ. Σχήμα 5.5b). Πολύ συχνά γράφουμε $z = f(x, y)$ προκειμένου να δώσουμε έμφαση στο γεγονός ότι η z συντεταγμένη ενός σημείου του γραφήματος είναι συνάρτηση των x και y .



Σχήμα 5.5

5.2.3 Ίχνη

Ένας τρόπος μέσω του οποίου μπορούμε να αναλύσουμε το γράφημα μιας συνάρτησης $f(x, y)$ είναι σταθεροποιώντας («παγώνοντας») τη συντεταγμένη x , θέτοντας για παράδειγμα $x = a$ και εξετάζοντας την προκύπτουσα καμπύλη που περιγράφεται από την $z = f(a, y)$. Παρομοίως, μπορούμε να θέσουμε $y = b$ και να μελετήσουμε την καμπύλη $z = f(x, b)$. Οι καμπύλες αυτού του είδους είναι γνωστές ως *κατακόρυφα ίχνη*, καθώς προκύπτουν από την τομή της γραφικής παράστασης με επίπεδα που είναι παράλληλα σε ένα από τα κατακόρυφα επίπεδα συντεταγμένων (βλ. Σχήμα 5.6).

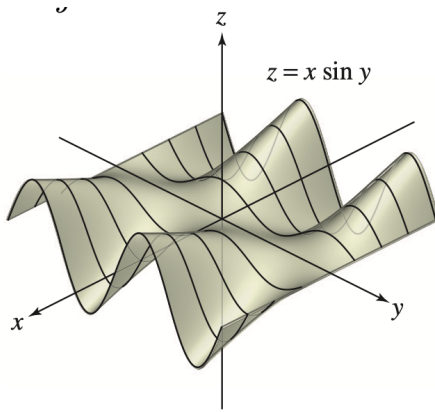


Σχήμα 5.6

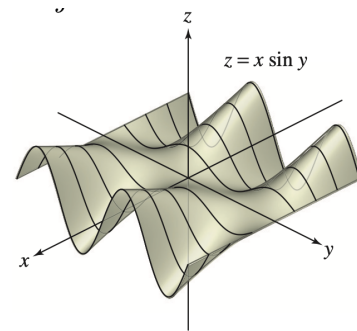
- *Κατακόρυφο ίχνος στο επίπεδο $x = a$* : Προκύπτει από την τομή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με το κατακόρυφο επίπεδο $x = a$ και αποτελείται από το σύνολο των σημείων της μορφής $(a, y, f(a, y))$.
- *Κατακόρυφο ίχνος στο επίπεδο $y = b$* : Προκύπτει από την τομή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με το κατακόρυφο επίπεδο $y = b$ και αποτελείται από το σύνολο των σημείων της μορφής $(x, b, f(x, b))$.

Παράδειγμα 5.2.3 .

Να περιγράψετε τα κατακόρυφα ίχνη της συνάρτησης $f(x, y) = x \sin y$ (Σχήμα 5.7).



(a) Τα ίχνη στα επίπεδα $x = a$ είναι οι καμπύλες $z = a \sin y$.



(b) Τα ίχνη στα επίπεδα $y = b$ είναι οι καμπύλες $z = x \sin b$.

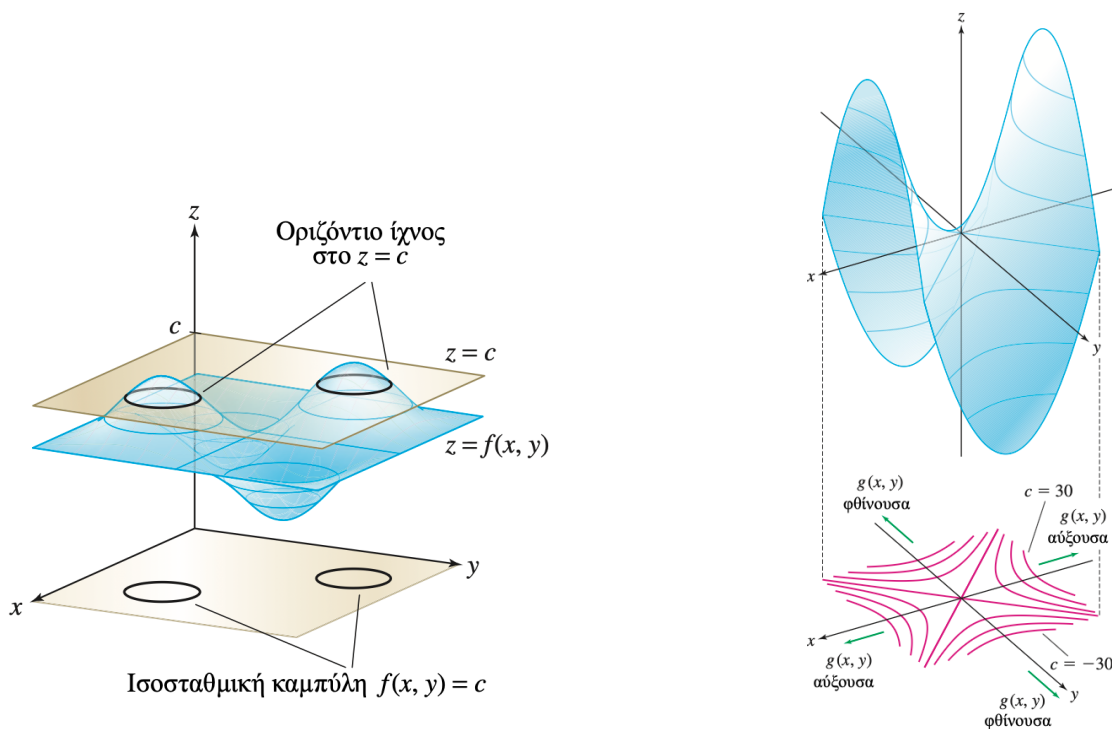
Σχήμα 5.7: Κατακόρυφα ίχνη της συνάρτησης $f(x, y) = x \sin y$.

5.3 Ισοσταθμικές καμπύλες και ισοσταθμικοί χάρτες

Πέραν των κατακόρυφων ιχνών, τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x, y)$ έχουν και οριζόντια ίχνη. Τα οριζόντια ίχνη, αλλά και οι συνδεόμενες με αυτά ισοσταθμικές καμπύλες, είναι εξαιρετικά σημαντικά κατά την ανάλυση της συμπεριφοράς μιας συνάρτησης (βλ. Σχήμα 5.8):

- Το *οριζόντιο ίχνος* σε ύψος c προκύπτει από την τομή της γραφικής παράστασης με το οριζόντιο επίπεδο $z = c$, αποτελείται δε από το σύνολο των σημείων της μορφής $(x, y, f(x, y))$ που είναι τέτοια ώστε να ισχύει $f(x, y) = c$. Επομένως, η ισοσταθμική καμπύλη που αντιστοιχεί στην τιμή c αποτελείται από όλα εκείνα τα σημεία (x, y) στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f στο επίπεδο xy για τα οποία η συνάρτηση παίρνει την τιμή c . Κάθε ισοσταθμική καμπύλη είναι η προβολή πάνω στο επίπεδο xy του οριζώντιου ίχνους του γραφήματός της που βρίσκεται ακριβώς από πάνω της.

- Ένας *ισοσταθμικός χάρτης* είναι μια «κάτοψη» στο πεδίο ορισμού επί του επιπέδου xy , που απεικονίζει τις ισοσταθμικές καμπύλες $f(x, y) = c$ για τιμές της c που ισαπέχουν. Η απόσταση m που μεσολαβεί μεταξύ των διαδοχικών τιμών της c αποκαλείται *ισοσταθμικό διάστημα*. Όταν μετακινούμαστε από τη μια ισοσταθμική καμπύλη στην επόμενη, η τιμή της συνάρτησης $f(x, y)$ (και επομένως και το ύψος της γραφικής παράστασης) μεταβάλλεται κατά $\pm m$.



(a) Μια ισοσταθμική καμπύλη αποτελείται από το σύνολο των σημείων (x, y) για τα οποία η συνάρτηση παίρνει την ίδια τιμή c .

(b) Ο ισοσταθμικός χάρτης της συνάρτησης $g(x, y) = x^2 - 3y^2$ με διάστημα $m = 10$.

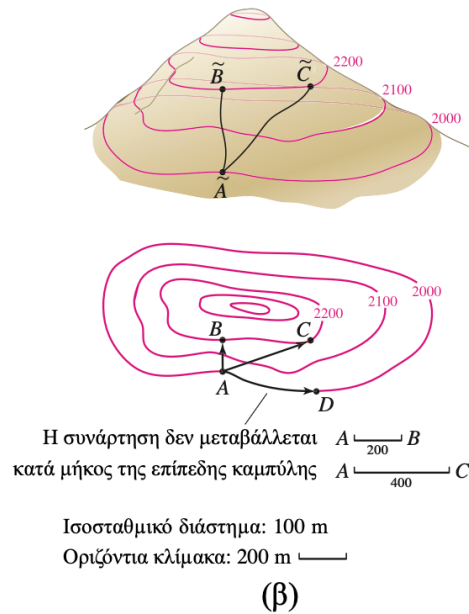
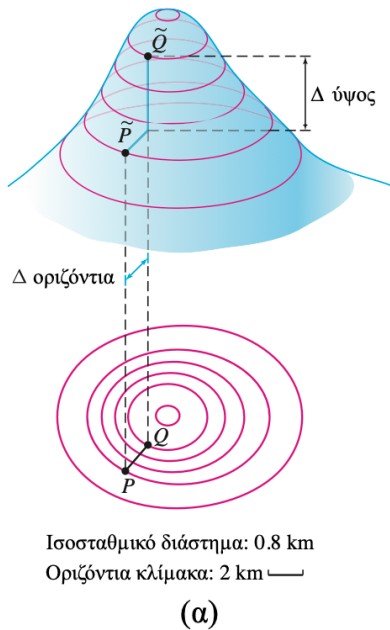
Σχήμα 5.8

Πώς μπορούμε όμως να προσδιορίσουμε, με κάποιον ποσοτικό τρόπο, πόσο απότομο είναι το γράφημα μιας συνάρτησης; Ας φανταστούμε την επιφάνεια που ορίζεται από τη $z = f(x, y)$ ως έναν λόφο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.9. Αν τοποθετήσουμε το επίπεδο xy στο επίπεδο της θάλασσας, τότε το $f(a, b)$ θα είναι το ύψος του λόφου στο σημείο (a, b) του επιπέδου, μετρημένο ως προς το επίπεδο της θάλασσας. Στο Σχήμα 5.9(a) απεικονίζονται δύο σημεία P και Q , που ανήκουν στο επίπεδο xy , μαζί με τα σημεία του γραφήματος που βρίσκονται ακριβώς από πάνω τους και τα οποία δηλώνονται ως $\tilde{P}$ και $\tilde{Q}$ αντίστοιχα. Ορίζουμε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης ως εξής:

Μέσος ρυθμός μεταβολής από το P μέχρι το Q .

$$\text{Μέσος ρυθμός μεταβολής από το } P \text{ μέχρι το } Q = \frac{\Delta \text{ ύψος}}{\Delta \text{ οριζόντιο}}$$

όπου $\Delta \text{ ύψος}$ = η μεταβολή του ύψους από το σημείο $\tilde{P}$ μέχρι το σημείο $\tilde{Q}$ και $\Delta \text{ οριζόντιο}$ = η απόσταση μεταξύ των σημείων P και Q .



Σχήμα 5.9

Παράδειγμα 5.3.1 .

Ο μέσος ρυθμός μεταβολής εξαρτάται από την κατεύθυνση Να υπολογίσετε τον μέσο ρυθμό μεταβολής καθώς κινούμαστε από το σημείο A προς τα σημεία B, C και D του Σχήματος 5.9.

Λύση. Το ισοσταθμικό διάστημα στον χάρτη του Σχήματος 5.9(β) είναι $m = 100$ m. Αυτό σημαίνει ότι αφού τα τμήματα $\overline{AB}$ και $\overline{AC}$ εκτείνονται καλύπτοντας δύο ισοσταθμικές καμπύλες, η μεταβολή στο ύψος είναι ίση με 200 m και στις δύο αυτές περιπτώσεις. Χρησιμοποιώντας την οριζόντια κλίμακα προκύπτει ότι το $\overline{AB}$ αντιστοιχεί σε οριζόντια μεταβολή ίση με 200 m, ενώ για το $\overline{AC}$ η οριζόντια απόσταση είναι ίση με 400 m. Αντιθέτως, δεν υπάρχει μεταβολή του ύψους καθώς κινούμαστε από το σημείο A προς το σημείο D . Επομένως, θα ισχύει:

$$\text{Μέσος ρυθμός μεταβολής από το } A \text{ στο } B = \frac{\Delta \text{ ύψος}}{\Delta \text{ οριζόντιο}} = \frac{200}{200} = 1.0$$

$$\text{Μέσος ρυθμός μεταβολής από το } A \text{ στο } C = \frac{\Delta \text{ ύψος}}{\Delta \text{ οριζόντιο}} = \frac{200}{400} = 0.5$$

$$\text{Μέσος ρυθμός μεταβολής από το } A \text{ στο } D = \frac{\Delta \text{ ύψος}}{\Delta \text{ οριζόντιο}} = 0.$$

Πράγματι, διαπιστώνουμε ότι ο μέσος ρυθμός μεταβολής εξαρτάται από την κατεύθυνση.

Σημείωση 5.3.2 .

- Μια *ισοσταθμική καμπύλη* είναι μια καμπύλη στο επίπεδο xy που ορίζεται από την εξίσωση $f(x, y) = c$. Η ισοσταθμική καμπύλη $f(x, y) = c$ είναι η προβολή στο επίπεδο xy μιας οριζόντιας καμπύλης-ίχνους η οποία προκύπτει από την τομή του γραφήματος της συνάρτησης με το οριζόντιο επίπεδο $z = c$.
- Ένας *ισοσταθμικός χάρτης* απεικονίζει τις ισοσταθμικές καμπύλες $f(x, y) = c$ για διαφορετικές τιμές της σταθεράς c οι οποίες ισαπέχουν. Αυτή η σταθερή απόσταση m μεταξύ των τιμών της c ονομάζεται *ισοσταθμικό διάστημα*.
- Όταν παρατηρούμε έναν ισοσταθμικό χάρτη, θα πρέπει να έχουμε πάντα κατά νου ότι:
 - Το ύψος δεν μεταβάλλεται όταν κανείς κινείται κατά μήκος μιας ισοσταθμικής καμπύλης.
 - Το ύψος αυξάνεται ή μειώνεται κατά m (το ισοσταθμικό διάστημα) όταν κανείς μεταβαίνει από τη μία ισοσταθμική καμπύλη στη γειτονική της.
- Η απόσταση των ισοσταθμικών καμπυλών υποδηλώνει το πόσο απότομο είναι το γράφημα: Όσο πιο κοντά βρίσκονται οι ισοσταθμικές καμπύλες τόσο πιο απότομη είναι η γραφική παράσταση.
- Ο μέσος ρυθμός μεταβολής από ένα σημείο P σε ένα άλλο σημείο Q είναι το πηλίκο

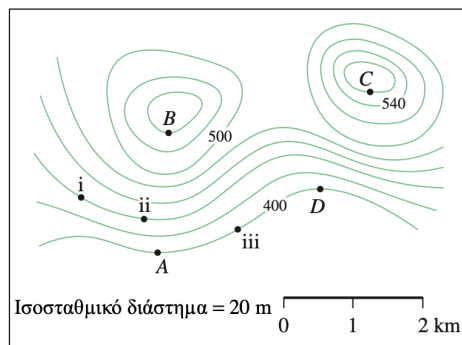
$$\frac{\text{Δύψος}}{\text{Δοριζόντιο}}.$$

- Η κατεύθυνση της πιο απότομης ανόδου σε ένα σημείο P είναι εκείνη η κατεύθυνση κατά μήκος της οποίας η $f(x, y)$ αυξάνεται πιο γρήγορα. Η πιο απότομη άνοδος προκύπτει (κατά προσέγγιση τουλάχιστον) σχεδιάζοντας τα ευθύγραμμα τμήματα ξεκινώντας από το σημείο P και κινούμενοι κάθε φορά προς το κοντινότερο σημείο της γειτονικής ισοσταθμικής καμπύλης.
- Οι ισοσταθμικές επιφάνειες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να γίνουν κατανοητές οι συναρτήσεις των τριών μεταβλητών $f(x, y, z)$. Στην περίπτωση που η συνάρτηση αναπαριστά τη θερμοκρασία, αυτές οι ισοσταθμικές επιφάνειες αποκαλούνται *ισόθερμες*.

Ασκήσεις 5.3.3 .

Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα με βάση το σχήμα 5.10.

1. Η πυκνότητα του θαλασσινού νερού φαίνεται να είναι πιο ευαίσθητη στις μεταβολές της θερμοκρασίας στο σημείο A ή στο σημείο B ;
2. Βρείτε τη μεταβολή της πυκνότητας του θαλασσινού νερού από το A στο B .
3. Εκτιμήστε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας του θαλασσινού νερού από το A στο B και από το A στο C .
4. Εκτιμήστε τον μέσο ρυθμό μεταβολής της πυκνότητας του θαλασσινού νερού από το A στα σημεία i , ii και iii .
5. Σχεδιάστε τη διαδρομή της πιο απότομης ανόδου η οποία ξεκινά από το σημείο D .



Σχήμα 5.10

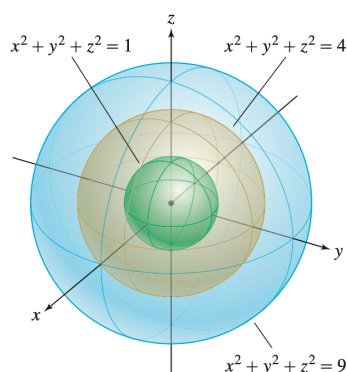
5.4 Συναρτήσεις με περισσότερες από δύο μεταβλητές

Υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις όπου για να περιγράψουμε μια κατάσταση είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Έτσι, για παράδειγμα, αν θελήσουμε να παρακολουθούμε τη θερμοκρασία στα διαφορετικά σημεία ενός δωματίου, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση $T(x, y, z)$ η οποία εξαρτάται από τρεις μεταβλητές που αντιστοιχούν στις τρεις συντεταγμένες κάθε σημείου. Επίσης, κατά τη δημιουργία ποσοτικών οικονομικών μοντέλων καταλήγουμε πολύ συχνά σε συναρτήσεις που εξαρτώνται από περισσότερες από 100 μεταβλητές. Δυστυχώς, δεν είναι δυνατόν να σχεδιάσουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης με περισσότερες από δύο μεταβλητές. Το γράφημα μιας συνάρτησης $f(x, y, z)$ θα αποτελείται από το σύνολο των σημείων $(x, y, z, f(x, y, z))$ που ανήκουν στον τετραδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^4$. Παρ' όλα αυτά, ακριβώς όπως μπορούμε να χρησιμοποιούμε ισοσταθμικούς χάρτες για να οπτικοποιούμε ένα τρισδιάστατο βουνό χρησιμοποιώντας καμπύλες στο επίπεδο των δύο διαστάσεων, είναι επίσης εφικτό να σχεδιάζουμε ισοσταθμικές επιφάνειες για μια συνάρτηση τριών μεταβλητών $f(x, y, z)$. Πρόκειται για επιφάνειες που περιγράφονται από εξισώσεις της μορφής

$$f(x, y, z) = c,$$

για διαφορετικές τιμές του c .

Στην περίπτωση μιας συνάρτησης $T(x, y, z)$ που αναπαριστά τη θερμοκρασία σε κάθε σημείο του χώρου, συνηθίζουμε να αποκαλούμε τις ισοσταθμικές επιφάνειες που περιγράφονται από τις $T(x, y, z) = k$ *ισόθερμες*, καθώς πρόκειται για σύνολα σημείων που έχουν μια κοινή θερμοκρασία k . Για τις συναρτήσεις με τέσσερις ή και ακόμα περισσότερες μεταβλητές, δεν μπορούμε πλέον να οπτικοποιούμε ούτε το γράφημα ούτε τις ισοσταθμικές επιφάνειές τους, έτσι θα πρέπει να αρκούμαστε στη διαίσθησή μας, η οποία θα έχει στο μεταξύ οξυνθεί μέσω της μελέτης των συναρτήσεων με δύο και τρεις μεταβλητές.



Σχήμα 5.11: Οι ισοσταθμικές επιφάνειες της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ είναι σφαίρες.

- Σημείωση 5.4.1 .**
- Το πεδίο ορισμού D μιας συνάρτησης $f(x_1, \dots, x_n)$ με n μεταβλητές είναι το σύνολο των n -άδων $(a_1, \dots, a_n)$ του χώρου $\mathbb{R}^n$, για τις οποίες οι τιμές $f(a_1, \dots, a_n)$ ορίζονται. Το εύρος τιμών της f είναι το σύνολο των τιμών που παίρνει η συνάρτηση f .
 - Η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x, y)$, η οποία παίρνει πραγματικές τιμές, είναι η επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ που αποτελείται από το σύνολο των σημείων της μορφής $(a, b, f(a, b))$, για όλα τα ζεύγη (a, b) που ανήκουν στο πεδίο ορισμού D της f .
 - Ένα *κατακόρυφο ίχνος* είναι η καμπύλη που προκύπτει από την τομή του γραφήματος της συνάρτησης με κάποιο από τα κατακόρυφα επίπεδα $x = a$ ή $y = b$.

Ασκήσεις 5.4.2 .

1. $f(x, y) = \sqrt{y - x - 2}$

2. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

3. $f(x, y) = \frac{(x-1)(y+2)}{(y-x)(y-x^3)}$

4. $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2 - 25}$

5. $f(x, y) = \cos^{-1}(y - x^2)$

6. $f(x, y) = \ln(xy + x - y - 1)$

7. $f(x, y) = \sqrt{(x^2 - 4)(y^2 - 9)}$

8. $f(x, y) = \frac{1}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$

5.5 Όρια και συνέχεια στην περίπτωση των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

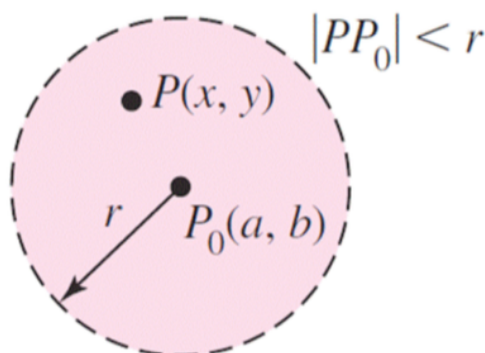
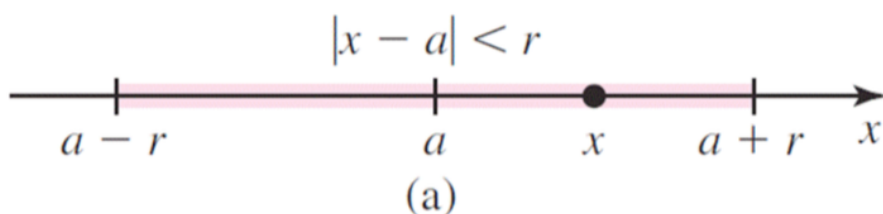
Στην παρούσα ενότητα θα αναπτύξουμε τις έννοιες του ορίου και της συνέχειας στο πλαίσιο της πολυμεταβλητής ανάλυσης. Παρόλο που θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην περίπτωση των συναρτήσεων με δύο μεταβλητές, οι ορισμοί και τα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε εξακολουθούν να ισχύουν για τις συναρτήσεις με τρεις ή και περισσότερες μεταβλητές.

5.5.1 Ιστορικό Σχόλιο

Η έννοια του ορίου αποτελεί έναν από τους θεμέλιους λίθους των μαθηματικών και ειδικότερα της ανάλυσης. Η ανάγκη των μαθηματικών να περιγράψουν φαινόμενα μεταβολής, όπως η κίνηση και η μεταβολή των μεγεθών, οδήγησε στη διαμόρφωση αυτής της θεμελιώδους ιδέας. Ερωτήματα όπως «ποια είναι η ακριβής ταχύτητα σε μια χρονική στιγμή;» ή «πώς υπολογίζεται το εμβαδόν κάτω από μια καμπύλη;» απαιτούν τη χρήση του ορίου.

Οι απαρχές αυτής της έννοιας ανάγονται στην αρχαία Ελλάδα, με τη μέθοδο εξάντλησης του Ευδόξου και τις εργασίες του Αρχιμήδη. Η μέθοδος αυτή σχεδίαζε ακολουθίες σχημάτων, φτάνοντας όσο κοντά θέλουμε στο ζητούμενο μέγεθος, χωρίς να το υπερβαίνει. Παρά την απουσία της σύγχρονης ανάλυσης του απείρου, η «προσέγγιση όσο κοντά θέλουμε» αντανακλά τον πυρήνα της έννοιας του ορίου.

Στην σύγχρονη ανάλυση, το όριο αποτελεί το θεμέλιο για την μελέτη της συνέχειας, των παραγώγων, των ολοκληρωμάτων και της διατύπωσης των πραγματικών αριθμών. Μελετώντας τα όρια, αποκτούμε τα θεμελιακά εργαλεία για τη σύγχρονη μαθηματική σκέψη και ανάλυση.



Θυμηθείτε ότι στην ευθεία των πραγματικών αριθμών λέγαμε ότι ένας αριθμός x είναι κοντά στο a αν η απόσταση $|x - a|$ είναι μικρή. Στο επίπεδο, θα λέμε ότι ένα σημείο (x, y) είναι κοντά σε ένα άλλο σημείο $P = (a, b)$ αν η μεταξύ τους απόσταση

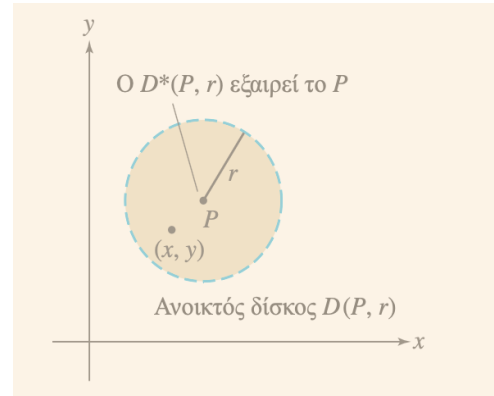
$$d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

είναι μικρή.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι αν θεωρήσουμε το σύνολο των σημείων που βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη από r από το σημείο $P = (a, b)$, τότε θα σχηματιστεί ένας δίσκος $D(P, r)$ με κέντρο το σημείο P , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.13a, που δεν θα περιλαμβάνει όμως τη συνοριακή γραμμή του δίσκου. Αν επιπλέον «επιμείνουμε» ώστε να ισχύει η συνθήκη $d((x, y), (a, b)) \neq 0$, τότε θα καταλήξουμε σε έναν «τρύπιο» δίσκο καθώς σε αυτόν δεν θα συμπεριλαμβάνεται το κέντρο P . Αυτόν τον τελευταίο δίσκο θα τον συμβολίζουμε με $D^*(P, r)$.

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ ορίζεται κοντά στο σημείο P αλλά όχι απαραίτητα στο ίδιο το P . Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι η $f(x, y)$ ορίζεται για όλα τα ζεύγη (x, y) που ανήκουν σε έναν τρύπιο δίσκο $D^*(P, r)$, στο κέντρο του, με $r > 0$. Θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ προσεγγίζει το όριο L καθώς το (x, y) προσεγγίζει το $P = (a, b)$, αν η ποσότητα $|f(x, y) - L|$ γίνεται όσο μικρή θέλουμε ενώ το (x, y) προσεγγίζει αρκούντως κοντά στο σημείο $P = (a, b)$ (βλ. Σχήμα ??). Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\lim_{(x, y) \rightarrow P} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = L$$



Σχήμα 5.12: Ο ανοικτός δίσκος $D(P, r)$ αποτελείται από το σύνολο των σημείων (x, y) που βρίσκονται σε απόσταση μικρότερη του r από το σημείο P . Σε αυτόν δεν συμπεριλαμβάνεται ο συνοριακός κύκλος..

.

Ο ακριβής ορισμός είναι ο ακόλουθος.

Ορισμός 5.5.1 . Όριο Έστω ότι η συνάρτηση $f(x, y)$ ορίζεται κοντά στο σημείο $P = (a, b)$. Τότε

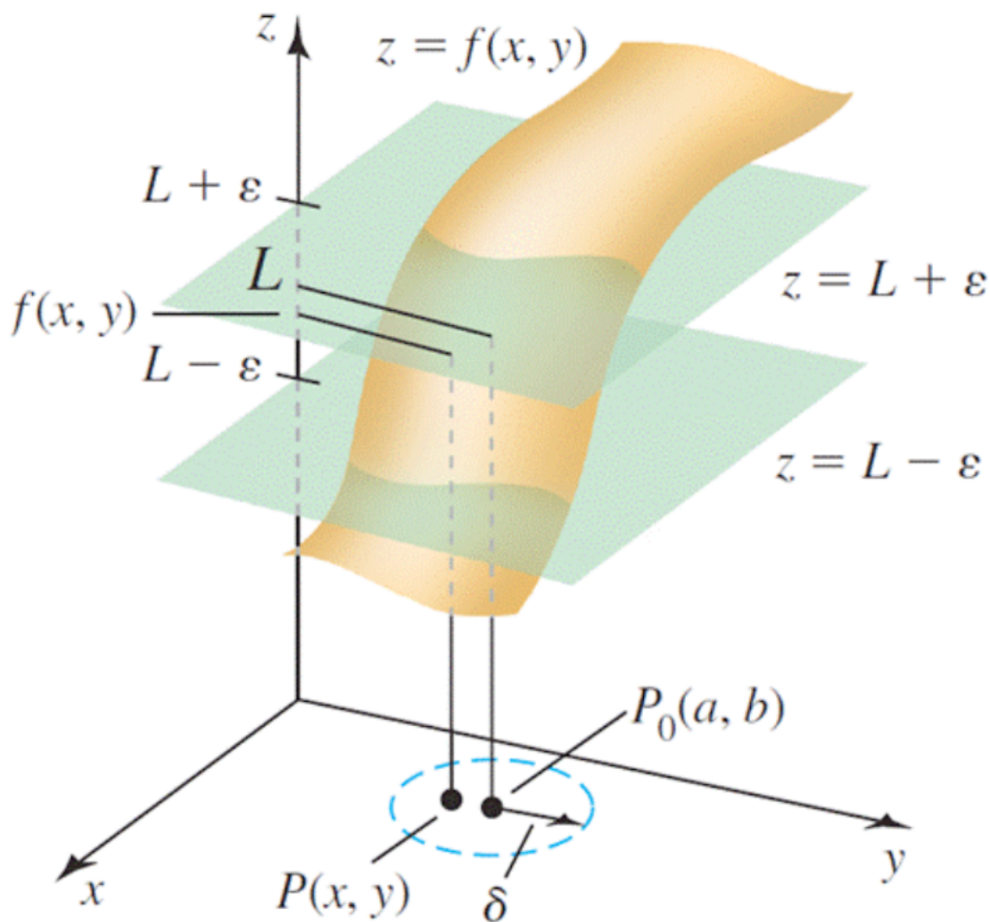
$$\lim_{(x,y) \rightarrow P} f(x, y) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν το (x, y) ικανοποιεί τη συνθήκη

$$0 < d((x, y), (a, b)) < \delta,$$

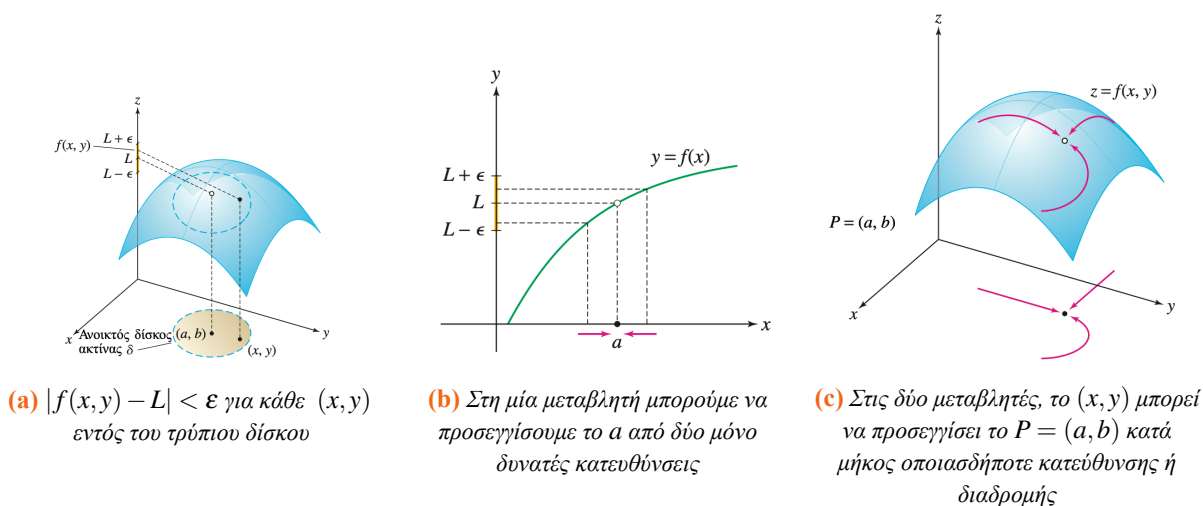
τότε να ισχύει

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon.$$



.

Πρόκειται για έναν ορισμό που είναι παρόμοιος με τον ορισμό του ορίου στην περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, υπάρχει όμως μια σημαντική διαφορά. Στην περίπτωση του ορίου στον Λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής απαιτούμε η $f(x)$ να τείνει στο όριο L καθώς το x προσεγγίζει το a και από τις δύο κατευθύνσεις – δηλαδή από αριστερά αλλά και δεξιά του a (βλ. Σχήμα 5.13b). Στην περίπτωση του ορίου στην πολυμεταβλητή ανάλυση, η συνάρτηση $f(x, y)$ θα πρέπει να τείνει στο όριο L καθώς το (x, y) προσεγγίζει το σημείο P από άπειρες διαφορετικές κατευθύνσεις (βλ. Σχήμα 5.13c).



Σχήμα 5.13

Παράδειγμα 5.5.2 .

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Να αποδείξετε, με τον ορισμό, ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Παράδειγμα 5.5.3 .

Να διερευνηθεί αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Σε περίπτωση που δεν υπάρχει, να αιτιολογήσετε κατάλληλα την απάντησή σας.

.

Πρώτη μέθοδος

Θα δείξουμε ότι η $f(x, y)$ προσεγγίζει διαφορετικά όρια καθώς πλησιάζουμε προς την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ κατά μήκος των αξόνων x και y (βλ. Σχήμα 5.15).

Όριο κατά μήκος του άξονα x :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Όριο κατά μήκος του άξονα y :

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0^2}{0^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Αφού αυτά τα δύο όρια είναι διαφορετικά, αυτό σημαίνει ότι το

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

δεν υπάρχει.

Δεύτερη μέθοδος Αν θέσουμε $y = mx$, τότε θα έχουμε περιορίσει την «κίνηση» μας πάνω σε μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση ίση με m . Στην περίπτωση αυτή το ζητούμενο όριο παίρνει τη μορφή:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{1}{1 + m^2}.$$

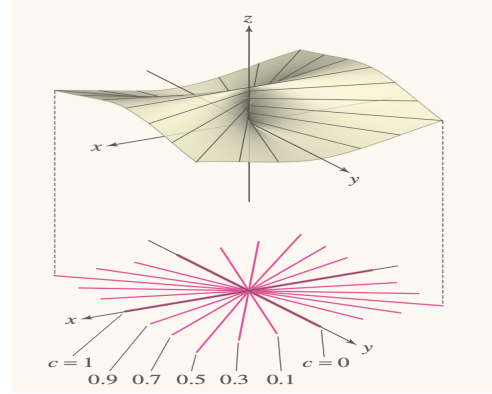
Το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε είναι προφανές ότι εξαρτάται από την τιμή της κλίσης m , γεγονός που σημαίνει ότι θα προκύπτουν διαφορετικά αποτελέσματα για το όριο καθώς η αρχή των αξόνων προσεγγίζεται κατά μήκος ευθειών με διαφορετικές κλίσεις. Έτσι, αν για παράδειγμα $m = 0$, γεγονός που σημαίνει ότι προσεγγίζουμε την αρχή κινούμενοι κατά μήκος του άξονα x , το όριο προκύπτει ίσο με 1. Αν πάλι $m = 1$, γεγονός που σημαίνει ότι τώρα προσεγγίζουμε την αρχή μέσω της ευθείας $y = x$, το όριο σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ίσο με $\frac{1}{2}$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει. Ο ισοσταθμικός χάρτης του Σχήματος 5 δείχνει τα διαφορετικά όρια που υπολογίζονται καθώς προσεγγίζουμε την αρχή των αξόνων κατά μήκος διαφορετικών ευθειών.

Τρίτη μέθοδος Θα μετασχηματίσουμε τη συνάρτηση της οποίας αναζητούμε το όριο στις πολικές συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $x = r \cos \theta$ και $y = r \sin \theta$. Με τον τρόπο αυτό όμως, για οποιαδήποτε διαδρομή προσεγγίζει την αρχή των αξόνων $(0, 0)$ θα πρέπει να ισχύει ότι το r πλησιάζει το 0. Προσεγγίσεις κατά μήκος διαφορετικών ευθειών μπορούν να εξεταστούν σταθεροποιώντας τη γωνία θ σε διαφορετικές τιμές και επιτρέποντας στο r να τείνει στην τιμή 0.

Επομένως, πρέπει να μελετήσουμε το όριο

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{(r \cos \theta)^2}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos^2 \theta.$$

Η τιμή αυτού του ορίου εξαρτάται από τη γωνία θ . Έτσι, αν για παράδειγμα η θ πάρει την τιμή 0, γεγονός που σημαίνει ότι προσεγγίζουμε το $(0, 0)$ κινούμενοι κατά μήκος του θετικού



Σχήμα 5.14: Η γραφική παράσταση και ο ισοσταθμικός

χάρτης της συνάρτησης $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$.

ημιάξονα x , το όριο προκύπτει ίσο με 1. Αν πάλι δώσουμε στη γωνία θ την τιμή $\pi/2$, πράγμα που σημαίνει ότι τώρα θα προσεγγίζουμε το $(0, 0)$ κινούμενοι πάνω στον θετικό ημιάξονα y , τότε το όριο προκύπτει να είναι ίσο με 0.

Αφού για διαφορετικές τιμές της γωνίας θ προκύπτουν διαφορετικά αποτελέσματα, καταλήγουμε και πάλι στο συμπέρασμα ότι το ζητούμενο όριο δεν υπάρχει.

Παραδείγματα 5.5.4 .

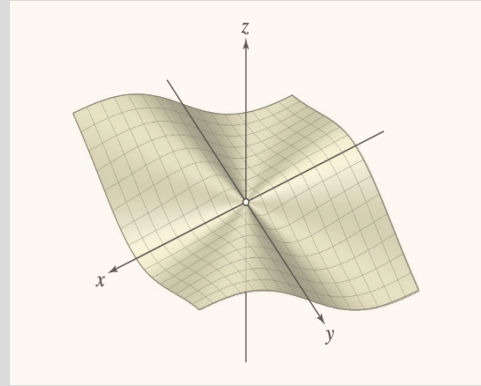
(a) **Επιβεβαίωση ενός ορίου** Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y),$$

όπου η $f(x,y)$ ορίζεται για $(x,y) \neq (0,0)$ από την

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2},$$

και απεικονίζεται στο Σχήμα 1.14.



Σχήμα 5.15: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

(b) Να ελέγξετε αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Η μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες μας επέτρεψε να υπολογίσουμε το πρώτο απο τα δύο προηγούμενα όρια. Στο δεύτερο παράδειγμα, η μετατροπή σε πολικές συντεταγμένες δεν βοηθά, καθώς δεν οδηγεί σε κάποια χρήσιμη απλοποίηση. mx1.2

Σημείωση 5.5.5 . Για να αποδείξουμε ότι ένα όριο δεν υπάρχει, αρκεί να προσδιορίσουμε δύο διαδρομές με βάση τις οποίες προκύπτουν διαφορετικές τιμές για το όριο. Για να αποδείξουμε όμως ότι το όριο σε ένα σημείο *πραγματικά* υπάρχει, δεν είναι αρκετό να εξετάσουμε απλώς και μόνο το όριο κατά μήκος ενός συνόλου διαδρομών μέσω των οποίων προσεγγίζουμε το σημείο. Αντί αυτού είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιούμε τους νόμους και τα θεωρήματα των ορίων για να αποδείξουμε ότι το υπό μελέτη όριο *πραγματικά* υπάρχει.

Όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $P = (a, b)$ αν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Ορισμός 5.5.6 . Συνέχεια Μια συνάρτηση f με δύο μεταβλητές είναι **συνεχής** στο σημείο $P = (a, b)$ αν ισχύει

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο (a, b) του πεδίου ορισμού της.

Σύμφωνα με τους νόμους των ορίων, όλα τα αθροίσματα, τα πολλαπλάσια και τα γινόμενα συνεχών συναρτήσεων είναι επίσης συνεχείς συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις της μορφής $f(x, y) = x^m y^n$ είναι επίσης συνεχείς για όλους τους ακέραιους αριθμούς m και n , γεγονός που με τη σειρά του σημαίνει ότι και όλα τα πολυώνυμα είναι επίσης συνεχή. Επιπλέον, κάθε ρητή συνάρτηση $h(x, y)/g(x, y)$, όπου τα h και g είναι κάποια πολυώνυμα, είναι επίσης συνεχής σε όλα τα σημεία (a, b) για τα οποία ισχύει $g(a, b) \neq 0$. Όπως ακριβώς και στην περίπτωση των ορίων των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, έτσι και εδώ μπορούμε να υπολογίζουμε τα όρια των συνεχών συναρτήσεων κάνοντας αντικατάσταση.

Παράδειγμα 5.5.7 .

Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

και έστω $\varepsilon > 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε (x, y) που ικανοποιεί

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta,$$

έχουμε

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon.$$

Αν συμβαίνει αυτό, πώς το ερμηνεύετε;

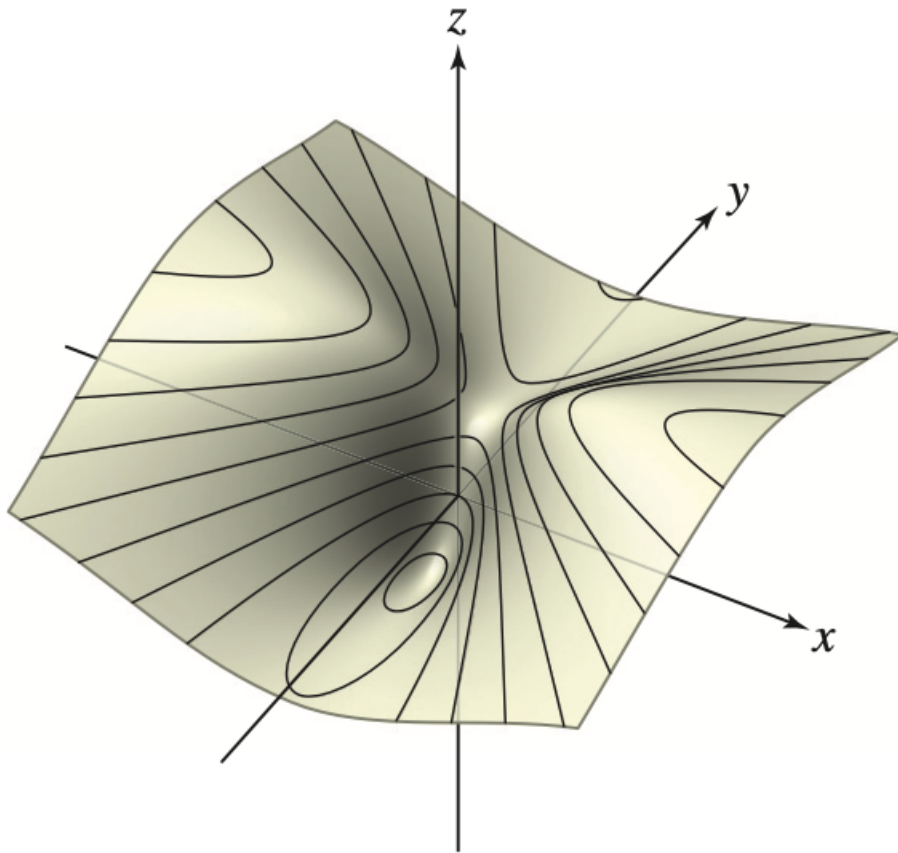
Παράδειγμα 5.5.8.

Υπολογισμός ορίων με αντικατάσταση Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{3x+y}{x^2+y^2+1}$$

είναι συνεχής (βλ. Σχήμα 5.16). Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x,y).$$



Σχήμα 5.16

Παράδειγμα 5.5.9 .

Συναρτήσεις γινόμενα Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,0)} x^3 \frac{\sin y}{y}.$$

Παράδειγμα 5.5.10 .

Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων Να εκφράσετε τη συνάρτηση $H(x, y) = e^{-x^2+2y}$ ως μια σύνθεση συναρτήσεων και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} H(x, y).$$

Παράδειγμα 5.5.11 .

Αν γνωρίζουμε ότι

$$2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos \sqrt{|xy|} < 2|xy|$$

τι μπορούμε να συμπεράνουμε για το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4 - 4\cos \sqrt{|xy|}}{|xy|};$$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ορισμός 5.5.12. Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $(a, b) \in D$. Λέμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $(x, y) \in D$ με

$$0 < |x - a| < \delta_1 \quad \text{και} \quad 0 < |y - b| < \delta_2$$

να ισχύει

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Παράδειγμα 5.5.13.

Είναι γνωστό ότι ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ σε ένα σημείο (x_0, y_0)

του πεδίου ορισμού της δίνεται από τον κάτωθι ορισμό:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l \iff (\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta_1(\varepsilon) > 0) (\exists \delta_2(\varepsilon) > 0) \text{ τ.ω.}$$

$$(|x - x_0| < \delta_1) \text{ και } (|y - y_0| < \delta_2) \implies (|f(x,y) - l| < \varepsilon).$$

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό, για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο $O(0,0)$ θα πρέπει:

- (i) $\delta_1 \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2},$
- (ii) $\delta_2 \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2},$
- (iii) $\delta_1 \leq \sqrt{\varepsilon} \quad \text{και} \quad \delta_2 \leq \sqrt{\varepsilon},$
- (iv) $\delta_1^2 + \delta_2^2 \leq \varepsilon.$

Παράδειγμα 5.5.14 .

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στο $(0,0)$ τη συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \tan(x+y), & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ασκήσεις 5.5.15 .

Στις επόμενες ασκήσεις να χρησιμοποιήσετε κατάλληλη μέθοδο για να υπολογίσετε το ζητούμενο όριο ή να αποδείξετε ότι αυτό δεν υπάρχει.

1. (a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

(b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2}$$

(c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + x^2y^2 + y^4}$$

2. Ελέγξτε αν η ακόλουθη συνάρτηση είναι συνεχής:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{αν } x^2 + y^2 < 1, \\ 1, & \text{αν } x^2 + y^2 \geq 1. \end{cases}$$

3. Έστω $a, b \geq 0$. Να αποδείξετε ότι αν $a + b > 2$, τότε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^a y^b}{x^2 + y^2} = 0,$$

ενώ αν $a + b \leq 2$, τότε το προηγούμενο όριο δεν υπάρχει.

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(2^x - 1)(\sin y)}{xy}, & \text{αν } xy \neq 0, \\ \ln 2, & \text{αν } xy = 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής στο $(0,0)$.