

ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

“Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’αυτό μένειν”

Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Copyright © 2024 Αθανάσιος Ανδρικόπουλος

Το παρόν ηλεκτρονικό υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών, ως υποστηρικτικό εγχειρίδιο για τα φροντιστηριακά μαθήματα του προγράμματος τους. Το υλικό δεν προορίζεται για εμπορική χρήση ή διάθεση εκτός του επίσημου περιβάλλοντος διδασκαλίας του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Παρόλη την προσεκτική επιμέλεια και συνεχή προσπάθεια ενημέρωσης και βελτίωσης, ενδέχεται να περιέχει λάθη ή παραλείψεις, καθώς βρίσκεται σε αρχικό στάδιο ανάπτυξης. Η συνεργασία και τα σχόλια των φοιτητών στο πλαίσιο της κοινής μας προσπάθειας εκτιμώνται ιδιαίτερα και συμβάλλουν στην καλύτερη ποιότητα και πληρότητα του υλικού.

Δεκέμβρης 2025



I	Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά	5
1	Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά	7
1.1	Μερικές παράγωγοι	7
1.1.1	Μερικές παράγωγοι υψηλότερης τάξης	9
1.2	Κανόνας της Αλυσίδας	10
1.3	Διαφορισμότητα, εφαπτόμενα επίπεδα και γραμμική προσέγγιση	16
1.4	Αυξήσεις και Διαφορικά	18
1.5	Διαφορικά και γραμμική προσέγγιση	28
1.6	Βελτιστοποίηση στον Λογισμό πολλών μεταβλητών	39
1.6.1	Από τον Λογισμό της Μίας στη Θεωρία των Πολλών Μεταβλητών	45
1.7	Πολλαπλασιαστές Lagrange: Βελτιστοποίηση υπό συνθήκη	55
1.8	Μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange	56
1.8.1	Κριτήριο Πρώτης Τάξεως	56
1.8.2	Κριτήριο Δευτέρας Τάξεως	57

I

Η Κληρονομιά των Αρχαίων	7
Ελλήνων στα Μαθηματικά	7
1.1 Μερικές παράγωγοι	9
1.1.1 Μερικές παράγωγοι υψηλότερης τάξης	9
1.2 Κανόνας της Αλυσίδας	10
1.3 Διαφορισιμότητα, εφαπτόμενα επίπεδα και γραμμική προσέγγιση	16
1.4 Αυξήσεις και Διαφορικά	18
1.5 Διαφορικά και γραμμική προσέγγιση	28
1.6 Βελτιστοποίηση στον Λογισμό πολλών μεταβλητών	39
1.6.1 Από τον Λογισμό της Μίας στη Θεωρία των Πολλών Μεταβλητών	45
1.7 Πολλαπλασιαστές Lagrange: Βελτιστοποίηση υπό συνθήκη	55
1.8 Μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange	56
1.8.1 Κριτήριο Πρώτης Τάξεως	56
1.8.2 Κριτήριο Δευτέρας Τάξεως	57



1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

1.1 Μερικές παράγωγοι

Όπως έχουμε ήδη τονίσει, μια συνάρτηση f με δύο ή περισσότερες μεταβλητές δεν έχει έναν μοναδικό ρυθμό μεταβολής αφού η κάθε μεταβλητή μπορεί να επηρεάζει με διαφορετικό τρόπο την f . Έτσι, για παράδειγμα, η ένταση του ρεύματος I που κυκλοφορεί σε ένα κύκλωμα είναι συνάρτηση τόσο της διαφοράς δυναμικού V όσο και της αντίστασης R , με την εξάρτηση να περιγράφεται μέσω του νόμου του Ohm που έχει τη μορφή:

$$I(V, R) = \frac{V}{R}.$$

Η ένταση του ρεύματος I αυξάνεται ως συνάρτηση του V (όταν η R είναι σταθερή), αλλά μειώνεται ως συνάρτηση του R (όταν το V είναι σταθερό).

Οι *μερικές παράγωγοι* είναι οι ρυθμοί μεταβολής ως προς καθεμία από τις μεταβλητές ξεχωριστά. Έτσι, μια συνάρτηση $f(x, y)$ με δύο μεταβλητές θα έχει δύο μερικές παραγώγους, που συμβολίζονται με f_x και f_y , οι οποίες μάλιστα θα ορίζονται από τα ακόλουθα όρια (εφόσον αυτά υπάρχουν):

Οι μερικές παράγωγοι ισούνται με τον ρυθμό μεταβολής ως προς κάθε μεταβλητή.

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}, \quad f_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η f_x είναι η παράγωγος της $f(x, b)$, που είναι συνάρτηση μόνο του x , ενώ η f_y είναι η παράγωγος της $f(a, y)$ που είναι συνάρτηση μόνο του y . Η f_x ονομάζεται *μερική παράγωγος της f ως προς τη μεταβλητή x* ή ως η x παράγωγος της f , ενώ παρόμοια ορολογία χρησιμοποιείται για την f_y .

Ο συμβολισμός κατά Leibniz για τις μερικές παραγώγους είναι ο ακόλουθος:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y,$$

και

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a,b)} = f_x(a,b), \quad \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a,b)} = f_y(a,b).$$

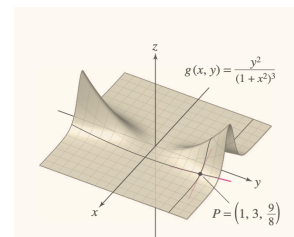
Σημείωση 1.1.1 Το σύμβολο ∂ που χρησιμοποιείται για τη μερική παράγωγο είναι ένα «στρογγυλεμένο d». Χρησιμοποιείται προκειμένου να διαχωρίσει τις παραγώγους μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών από τις παραγώγους των συναρτήσεων μίας μεταβλητής όπου χρησιμοποιούμε το σύμβολο «d».

Παράδειγμα 1.1.2

Υπολογίστε τις τιμές των μερικών παραγώγων

$g_x(1,3)$ και $g_y(1,3)$, όπου

$$g(x,y) = \frac{y^2}{(1+x^2)^3}.$$



Σχήμα 1.1 Οι κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών στις καμπύλες-ίχνη στο σημείο P είναι οι $g_x(1,3)$ και $g_y(1,3)$

Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις 1.1.3

1. Η Ηρώ κατέληξε στην ακόλουθη λανθασμένη σχέση, καθώς δεν εφάρμοσε σωστά τον κανόνα του γινομένου:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 y^2) = x^2(2y) + y^2(2x).$$

Ποιο ήταν το λάθος που έκανε και πώς θα πρέπει να γίνει σωστά ο υπολογισμός;

2. Εξηγήστε γιατί δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του πηλίκου προκειμένου να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x+y}{y+1} \right).$$

Εφαρμόζεται ο κανόνας παραγώγισης πηλίκου στον υπολογισμό της μερικής παραγώγου

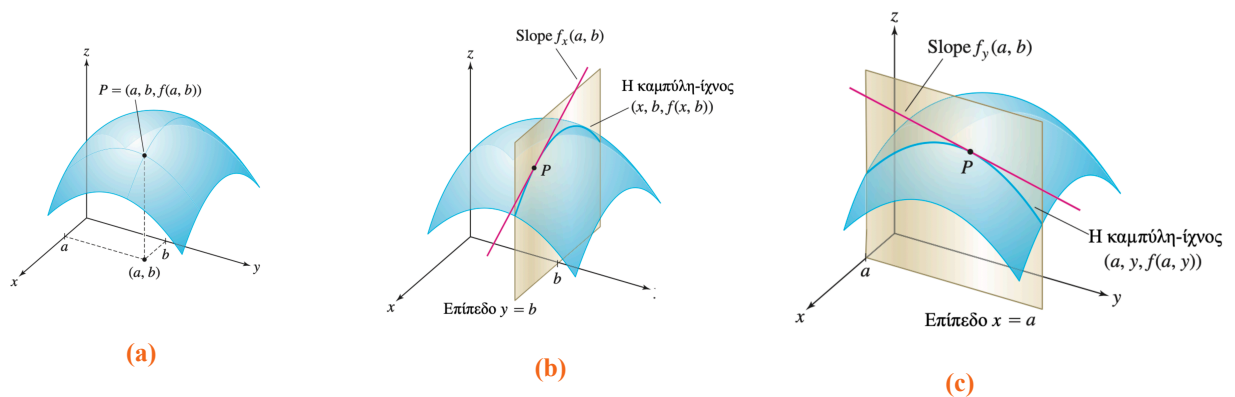
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x+y}{y+1} \right);$$

3. Ποια από τις ακόλουθες μερικές παραγώγους μπορεί να υπολογιστεί χωρίς προσφυγή στον κανόνα του πηλίκου;

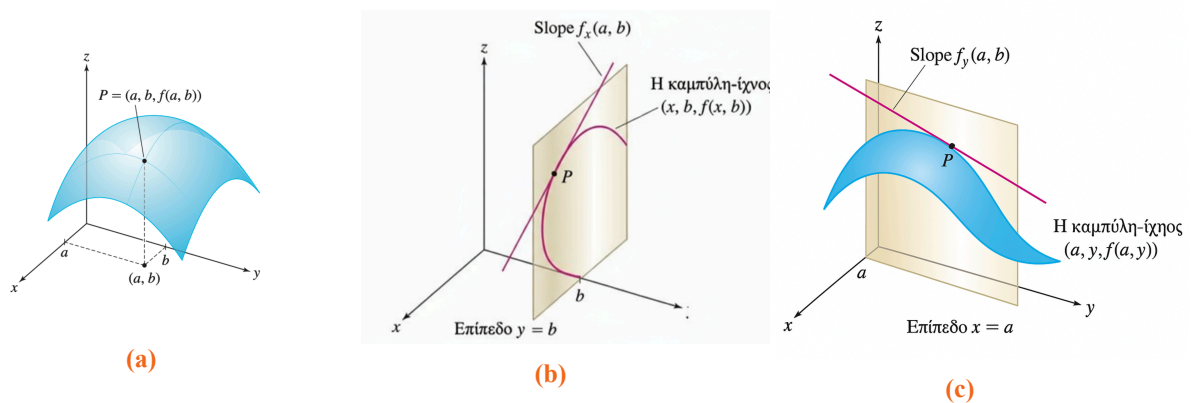
$$\alpha) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{y^2+1} \right) \quad \beta) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{y^2+1} \right) \quad \gamma) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y^2}{y^2+1} \right)$$

Εμβάθυνση στα σχήματα

Οι μερικές παράγωγοι στο σημείο $P = (a, b)$ αντιπροσωπεύουν τις κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών των καμπυλών-ίχνων του γραφήματος της $f(x, y)$ στο σημείο $(a, b, f(a, b))$ του Σχήματος 1.3(a). Για να υπολογίσουμε την $f_x(a, b)$ θέτουμε $y = b$ και παραγωγίζουμε στην κατεύθυνση x . Με τον τρόπο αυτόν προκύπτει η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στην καμπύλη που είναι το ίχνος του γραφήματος της f στο επίπεδο $y = b$ (βλ. Σχήμα 1.3(b)). Παρομοίως, η $f_y(a, b)$ είναι η κλίση της καμπύλης που είναι το ίχνος του γραφήματος της f στο επίπεδο $x = a$ (βλ. Σχήμα 1.3(c)).



Σχήμα 1.2 Οι μερικές παράγωγοι και οι κλίσεις των καμπυλών-ίχνων



Σχήμα 1.3 Οι μερικές παράγωγοι και οι κλίσεις των καμπυλών-ίχνων

1.1.1 Μερικές παράγωγοι υψηλότερης τάξης

Οι μερικές παράγωγοι υψηλότερης τάξης είναι οι παράγωγοι των παραγώγων. Έτσι, για παράδειγμα, οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης μιας συνάρτησης f είναι οι μερικές παράγωγοι των f_x και f_y . Θα γράφουμε λοιπόν f_{xx} για την x παράγωγο της f_x και f_{yy} για την y παράγωγο της f_y :

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Υπάρχουν επίσης και οι *μεικτές μερικές παράγωγοι*:

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Η διαδικασία «δημιουργίας» μερικών παραγώγων μπορεί να συνεχιστεί με παρόμοιο τρόπο. Έτσι, για παράδειγμα, η f_{xyx} είναι η x παράγωγος της f_{xy} , ενώ η f_{xyy} είναι η y παράγωγος της f_{xy} (εκτελούμε τις διαδοχικές παραγωγίσεις με τη σειρά που υποδεικνύουν οι δείκτες ξεκινώντας από αριστερά και κινούμενοι προς τα δεξιά).

Ο συμβολισμός κατά Leibniz για τις παραγώγους υψηλότερης τάξης είναι:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Οι μερικές παράγωγοι υψηλότερης τάξης ορίζονται για συναρτήσεις με τρεις ή και περισσότερες μεταβλητές με παρόμοιο τρόπο.

Παράδειγμα 1.1.4

Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^3 + y^2 e^x.$$

Θεώρημα 1.1.5 Θεώρημα Clairaut: *ισότητα των μεικτών παραγώγων* Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} και είναι συνεχείς σε έναν δίσκο D , τότε ισχύει $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ για όλα τα σημεία $(a, b) \in D$. Έτσι, στο D θα έχουμε ότι

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}.$$

Παράδειγμα 1.1.6

Αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Clairaut, ποια από τις ακόλουθες παραγώγους είναι ίση με την f_{xy} ;

$$(a) f_{xyx} \quad \beta) f_{yyx} \quad \gamma) f_{xyy} \quad \delta) f_{yxx}$$

1.2 Κανόνας της Αλυσίδας

Το θεώρημα που είναι γνωστό ως *κανόνας της αλυσίδας* αποτελεί βασικό εργαλείο του Διαφορικού Λογισμού. Η ιδέα του είναι ότι, όταν μια συνάρτηση εξαρτάται από πολλές μεταβλητές, οι οποίες με τη σειρά τους εξαρτώνται από άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε η παράγωγος της αρχικής συνάρτησης ως προς καθεμία από τις νέες μεταβλητές μπορεί να υπολογιστεί «αλυσιδωτά» μέσω των παραγώγων των ενδιάμεσων συναρτήσεων. Το θεώρημα που είναι γνωστό ως *κανόνας της αλυσίδας* αποτελεί βασικό εργαλείο του Διαφορικού Λογισμού. Η ιδέα του είναι ότι, όταν μια συνάρτηση εξαρτάται από πολλές μεταβλητές, οι οποίες με τη σειρά τους εξαρτώνται από άλλες

ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε η παράγωγος της αρχικής συνάρτησης ως προς καθεμία από τις νέες μεταβλητές μπορεί να υπολογιστεί «αλυσιδωτά» μέσω των παραγώγων των ενδιαμέσων συναρτήσεων. Ο κανόνας της αλυσίδας για σύνθεση δύο συναρτήσεων μίας μεταβλητής f και g είναι:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ή με συμβολισμό διαφορών, όπως χρησιμοποιείται από τον Lipschitz,

$$\frac{d(f \circ g)}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}.$$

Με λίγα λόγια, αν έχουμε $z = f(g)$ και $g = g(x)$, τότε η σύνθεση δίνει $z = f(g(x))$. Ο κανόνας της αλυσίδας για αυτή την περίπτωση δίνει:

$$\frac{dz}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ή με διαφορετική σημειογραφία,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Στην περίπτωση μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

όπου καθεμία από τις μεταβλητές $x_1, x_2, \dots, x_n$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση άλλων μεταβλητών, δηλαδή

$$x_i = x_i(t_1, t_2, \dots, t_m), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

η μερική παράγωγος της f ως προς την t_k δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_k}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

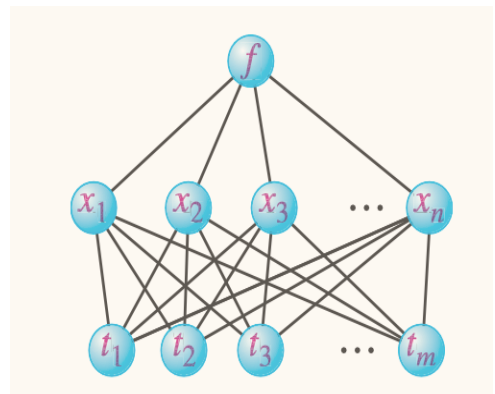
Με αυτόν τον τρόπο, ο κανόνας της αλυσίδας επεκτείνεται στις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και μας επιτρέπει να μελετούμε περίπλοκες εξαρτήσεις σε προβλήματα γεωμετρίας, φυσικής, οικονομίας και άλλων επιστημών.

Μπορούμε να θεωρούμε τις εξαρτήσεις που υπάρχουν μεταξύ των μεταβλητών με ένα σκαρίφημα όπως αυτό του Σχήματος 1.4. Βοηθητικά, προκειμένου να θυμόμαστε τον κανόνα της αλυσίδας, θα αναφέρουμε τις παραγώγους

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

ως πρωτεύουσες παραγώγους.

Σύμφωνα με την εξίσωση του κανόνα της αλυσίδας, η παράγωγος της συνάρτησης f ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή t_k είναι ίση με το άθροισμα n όρων της μορφής:



Σχήμα 1.4 Σκαρίφημα με το οποίο μπορούμε να παρατηρούμε τις εξαρτήσεις μεταξύ των μεταβλητών.

$$j\text{-οστός όρος: } \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_k}, \quad \text{για } j = 1, 2, \dots, n$$

Παράδειγμα 1.2.1

Δίνεται η συνάρτηση:

$$z = f(x, y) = x^2 y + \sin(y)$$

όπου

$$x = e^t + u, \quad y = t^2 u$$

Υπολογίστε το $\frac{\partial z}{\partial t}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

Ασκήσεις 1.2.2

1. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό μέσω του ορίου για να επιβεβαιώσετε τις ακόλουθες σχέσεις για τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = y^2, \quad \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 2xy.$$

2. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό μέσω του ορίου για να επιβεβαιώσετε τις ακόλουθες σχέσεις για τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right) = -\frac{x}{y^2}.$$

3. Να υπολογίσετε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης των συναρτήσεων.

$$(a) f(x, y) = x^2 + y^2,$$

$$(b) f(x, y) = x^4 y + xy^{-2},$$

$$(d) f(x, y, z) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (e) f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$$

$$(f) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (g) f(x, y) = \frac{x}{x - y}.$$

4. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $f(x, y)$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2.$$

Υπόδειξη: Σκεφτείτε με βάση το θεώρημα του Clairaut.

5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$u(x, t) = \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

ικανοποιεί την εξίσωση διάδοσης θερμότητας

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{για κάθε σταθερό } n.$$

6. Στις επόμενες ασκήσεις χρησιμοποιήστε τον κανόνα της αλυσίδας για να υπολογίσετε τις ζητούμενες μερικές παραγώγους. Να εκφράσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση μόνο των ανεξάρτητων μεταβλητών.

(a) $\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial r}, \quad f(x, y, z) = xy + z^2, \quad x = s^2, y = 2rs, z = r^2$

(b) $\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t}, \quad f(x, y, z) = xy + z^2, \quad x = r + s - 2t, y = 3rt, z = s^2$

(c) $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \quad g(\theta, \phi) = \tan(\theta + \phi), \quad \theta = xy, \phi = x + y$

(d) $\frac{\partial R}{\partial v}, \frac{\partial R}{\partial w}, \quad R(x, y) = (x - 2y)^3, \quad x = w^2, y = v^w$

(e) $\frac{\partial F}{\partial y}, \quad F(u, v) = e^{u+v}, \quad u = x^2, v = xy$

(f) $\frac{\partial f}{\partial u}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2, \quad x = e^{u+v}, y = u + v$

(g) $\frac{\partial h}{\partial t_2}, \quad h(x, y) = \frac{x}{y}, \quad x = t_1 t_2, y = t_1^2 t_2$

(h) $\frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad f(x, y, z) = xy - z^2, \quad x = r \cos \theta, y = \cos^2 \theta, z = r$

7. Ο τελεστής Laplace Δ για μία συνάρτηση f ορίζεται ως

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}.$$

Μια συνάρτηση $f(x, y)$ που ικανοποιεί την εξίσωση Laplace $\Delta f = 0$ ονομάζεται *αρμονική*.

75. Να αποδείξετε ότι οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι αρμονικές:

α) $f(x, y) = x,$ β) $f(x, y) = e^x \cos y,$

γ) $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),$ δ) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2).$

Ασκήσεις 1.2.3*Η σημασία των υποθέσεων*

Η παρούσα άσκηση είναι σχεδιασμένη για να τονίσει τη σημασία και την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος Clairaut. Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{if } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Επιβεβαιώστε ότι για $(x, y) \neq (0, 0)$ ισχύει:

$$f_x(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

b) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της μερικής παραγώγου με το όριο για να αποδείξετε ότι

$$f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$$

και επιπλέον ότι οι μερικές παράγωγοι $f_{yx}(0, 0)$ και $f_{xy}(0, 0)$ υπάρχουν και οι δύο αλλά δεν είναι ίσες.

c) Δείξτε ότι για $(x, y) \neq (0, 0)$ ισχύει:

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Δείξτε ότι η f_{xy} δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$. *Υπόδειξη:* Δείξτε ότι ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_{xy}(h, 0) \neq \lim_{k \rightarrow 0} f_{xy}(0, k).$$

d) Εξηγήστε τον λόγο για τον οποίο το αποτέλεσμα του ερωτήματος (b) δεν αντιφάσκει με το θεώρημα του Clairaut.

→ Μετάβαση στη Λύση της Άσκησης 1.5.9

Λύση.

(a) Για $(x, y) \neq (0, 0)$ γράφουμε $f(x, y) = xy(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-1}$. Παραγωγίζοντας και εφαρμόζοντας τον κανόνα ilorithμου/αλυσίδας,

$$f_x(x, y) = y(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-1} + xy(2x)(x^2 + y^2)^{-1} - xy(x^2 - y^2)(2x)(x^2 + y^2)^{-2}$$

$$= \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = x(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^{-1} + xy(-2y)(x^2 + y^2)^{-1} - xy(x^2 - y^2)(2y)(x^2 + y^2)^{-2}$$

$$= \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

(b) Με τον ορισμό:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0-0}{k} = 0,$$

αφού $f(h,0) = f(0,k) = 0$ για $h \neq 0, k \neq 0$.

Για τις μικτές στο $(0,0)$ χρησιμοποιούμε τα f_x, f_y του (α):

$$f_x(0,y) = \frac{y(0+0-y^4)}{(y^2)^2} = -y \quad (y \neq 0), \quad f_x(0,0) = 0,$$

άρα

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y-0}{y} = -1.$$

Ομοίως,

$$f_y(x,0) = \frac{x(x^4-0-0)}{(x^2)^2} = x \quad (x \neq 0), \quad f_y(0,0) = 0,$$

οπότε

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h-0}{h} = 1.$$

Άρα $f_{yx}(0,0) = 1 \neq -1 = f_{xy}(0,0)$, ενώ και οι δύο υπάρχουν.

(c) Για $(x,y) \neq (0,0)$ παραγωγίζουμε ξανά (ή ισοδύναμα παραγωγίζουμε τις εκφράσεις του (α)) και βρίσκουμε

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Για τη συνέχεια στο $(0,0)$, εξετάζουμε όρια κατά μήκος των αξόνων:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f_{xy}(h,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^6}{(h^2)^3} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow 0} f_{xy}(0,k) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k^6}{(k^2)^3} = -1.$$

Τα όρια διαφέρουν $\Rightarrow$ το f_{xy} (και αντίστοιχα το f_{yx}) δεν είναι συνεχές στο $(0,0)$.

(d) Το θεώρημα του Clairaut (ή Young) απαιτεί, εκτός από την ύπαρξη των f_{xy}, f_{yx} , και *συνέχεια* κάποιας μικτής παραγώγου σε γειτονιά του σημείου ώστε να συμπίσουν στο σημείο. Στην παρούσα άσκηση, από το (γ) είδαμε ότι το f_{xy} δεν είναι συνεχές στο $(0,0)$, άρα οι υποθέσεις του θεωρήματος δεν ισχύουν· επομένως δεν υπάρχει αντίφαση με το (β) όπου $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

1.3 Διαφορισιμότητα, εφαπτόμενα επίπεδα και γραμμική προσέγγιση

Στην παρούσα ενότητα θα διερευνήσουμε τη σημαντική έννοια της διαφορισιμότητας για συναρτήσεις με περισσότερες από μία μεταβλητές, σε συνδυασμό με τις σχετιζόμενες ιδέες του εφαπτόμενου επιπέδου και της γραμμικής προσέγγισης. Στον Λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, μια συνάρτηση f είναι *παραγωγίσιμη* αν υπάρχει η παράγωγός της. Δηλαδή, αν υπάρχει η

κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης σε ένα σημείο a και συμβολίζεται ως $f'(a)$ ή $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$. Ενώ

μία συνάρτηση είναι διαφορίσιμη αν μπορεί να περιγραφεί τοπικά από μια γραμμική συνάρτηση, δηλαδή η συνάρτηση συμπεριφέρεται “σαν ευθεία” όταν τη μελετούμε σε μικροσκοπική κλίμακα γύρω από ένα σημείο. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της y για τιμές του x κοντά στο a μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο $(a, f(a))$. Με μαθηματικούς όρους η παραπάνω ιδέα εκφράζεται ως:

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x, \text{ όπου } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ καθώς } \Delta x \rightarrow 0.$$

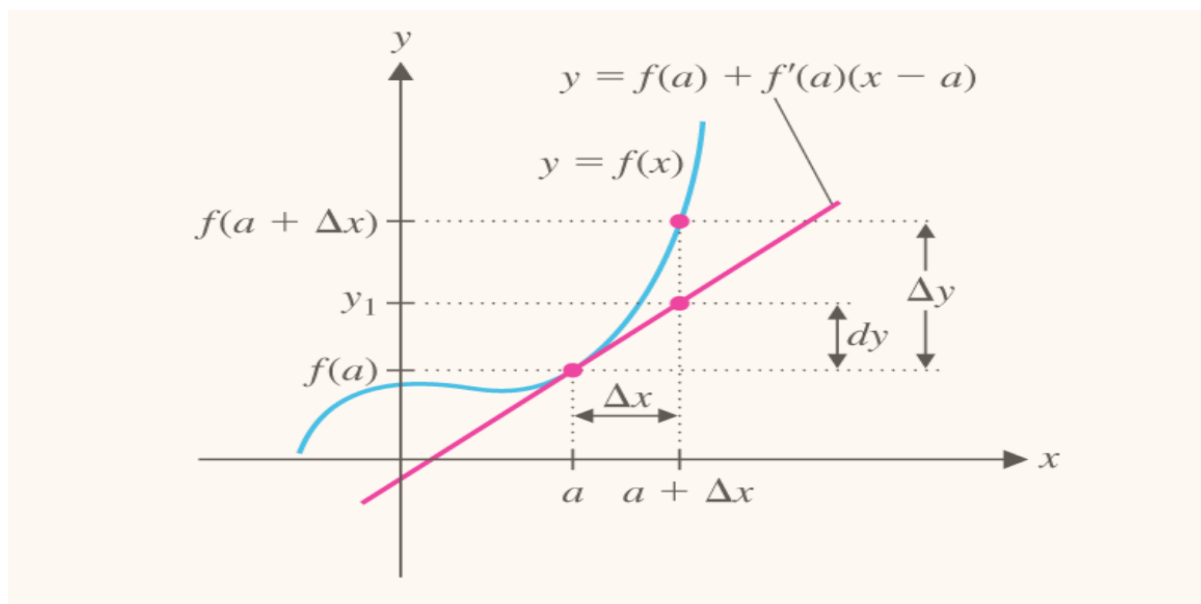
Αυτός ο τύπος οδηγεί στη έννοια του διαφορικού που εκφράζεται ως εξής:

Ορισμός 1.3.1 Έστω $y = f(x)$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση στο x και $\Delta x = h \neq 0$ μια οποιαδήποτε μεταβολή του x . Τότε σαν *διαφορικό* της f στο x ορίζεται το γινόμενο

$$f'(x) \cdot h = f'(x) \cdot \Delta x,$$

το οποίο συμβολίζεται με $df(x)$ ή dy , δηλαδή

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot h = f'(x) \cdot \Delta x$$



Σχήμα 1.5 Η γραμμική προσέγγιση του Δx δίνεται από το διαφορικό dx .

Από τον ορισμό της παραγώγου στη μία μεταβλητή προκύπτει ότι αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο a , τότε

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x}{\Delta x} = f'(a) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon = f'(a),$$

και συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη.

Αντίστροφα, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a , τότε θα έχουμε

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a).$$

Συνεπώς,

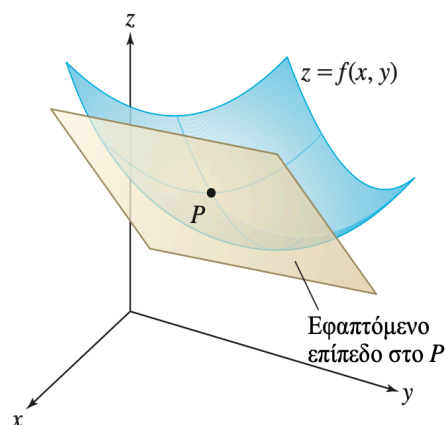
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \varepsilon, \text{ όπου } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ καθώς } \Delta x \rightarrow 0.$$

Ισοδύναμα έχουμε

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x, \text{ όπου } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ καθώς } \Delta x \rightarrow 0$$

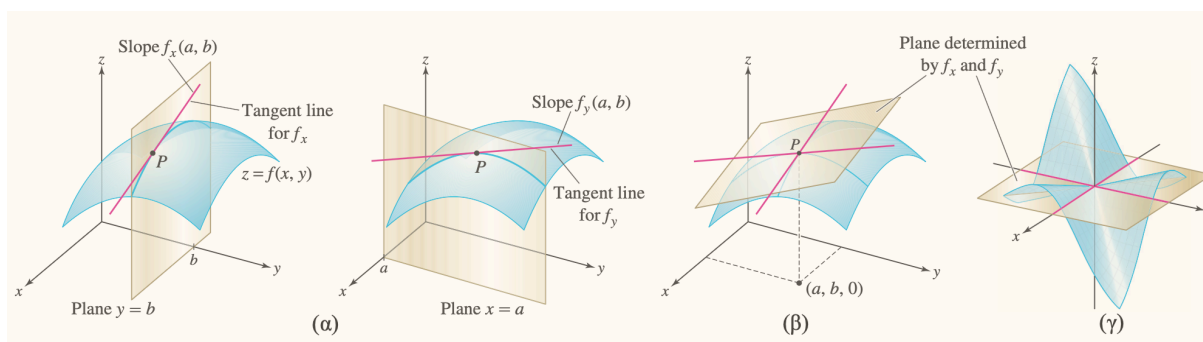
που συνεπάγεται ότι η f είναι διαφορίσιμη.

Επεκτείνοντας την ιδέα αυτή, θα περίμενε κανείς ότι μια συνάρτηση $f(x, y)$ θα είναι διαφορίσιμη αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοί της $f_x(x, y)$ και $f_y(x, y)$. Δυστυχώς όμως, όπως θα διαπιστώσουμε, η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν είναι αρκετά ισχυρή συνθήκη ώστε να εξασφαλίζει τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν είναι ικανή συνθήκη που εξασφαλίζει τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης. Η διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης $f(x, y)$ στο (a, b) θα πρέπει να εξασφαλίζει το γεγονός ότι υπάρχει ένα εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της $f(x, y)$ και στο σημείο $P = (a, b, f(a, b))$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6 Το εφαπτόμενο επίπεδο

Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της $f(x, y)$, $f_x(a, b)$ και $f_y(a, b)$ στο (a, b) , τότε αυτές προσδιορίζουν ευθείες που είναι εφαπτόμενες στο γράφημα της $f(x, y)$ στο σημείο P . Στο Σχήμα 1.7(α) φαίνεται ότι η μία από αυτές τις εφαπτόμενες ευθείες κείται στο επίπεδο $y = b$, ενώ η άλλη βρίσκεται στο επίπεδο $x = a$. Θα ονομάζουμε, αντιστοίχως, τις ευθείες αυτές ως την *εφαπτόμενη ευθεία για την f_x* και την *εφαπτόμενη ευθεία για την f_y* . Αυτές οι δύο εφαπτόμενες ευθείες προσδιορίζουν ένα επίπεδο που εύλογα μπορεί να είναι το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της συνάρτησης (βλ. Σχήμα 1.7(β)). Θα αναφερόμαστε σε αυτό το επίπεδο ως το *επίπεδο που ορίζεται από τις f_x και f_y* . Δυστυχώς, όμως, αυτό το επίπεδο μπορεί να μην είναι πλήρως εφαπτόμενο στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο P καθώς υπάρχει η πιθανότητα άλλες ευθείες, που διέρχονται από το σημείο P και ανήκουν στο επίπεδο, να μην εφάπτονται στο γράφημα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.7(γ).



Σχήμα 1.7 Είναι το επίπεδο που προσδιορίζεται από τις f_x και f_y εφαπτόμενο στο γράφημα της συνάρτησης;

1.4 Αυξήσεις και Διαφορικά

Ορισμός 1.4.1 Ο όρος $o(\sqrt{h^2 + k^2})$.

Ο όρος $o(\sqrt{h^2 + k^2})$ είναι βασικό εργαλείο στη μαθηματική ανάλυση, καθώς διακρίνει τις γραμμικές από τις μη γραμμικές συνιστώσες της τοπικής συμπεριφοράς μιας συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, λέμε ότι μια συνάρτηση $f(h, k)$ ανήκει στο $o(\sqrt{h^2 + k^2})$ αν,

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ ώστε για κάθε σημείο (h, k) με $\sqrt{h^2 + k^2} < \delta$ να ισχύει:

$$|f(h, k)| < \varepsilon \sqrt{h^2 + k^2}.$$

Με άλλα λόγια: $f(h, k) = o(\sqrt{h^2 + k^2}) \iff \frac{f(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \rightarrow 0.$

Θεώρημα 1.4.2 (Κριτήριο διαφορισιμότητας) Έστω $f : S \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, S ανοικτό, και $(a, b) \in S$. Αν οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y υπάρχουν σε μία περιοχή του (a, b) και είναι συνεχείς στο (a, b) , τότε η f είναι διαφορίσιμη στο (a, b) , δηλαδή

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}) \quad \text{καθώς } (h, k) \rightarrow (0, 0).$$

Υπενθυμίζουμε ότι η αύξηση Δy της $f(x)$ στο $x = a$ είναι

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a),$$

και για “μικρό” Δx έχουμε την προσέγγιση

$$\Delta y \approx dy = f'(a) \Delta x.$$

Έστω $z = f(x, y)$. Ορίζουμε την αύξηση της f στο (a, b) ως

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b).$$

Τότε έχουμε

$$\Delta z = [f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y)] + [f(a, b + \Delta y) - f(a, b)].$$

Με βάση το Θεώρημα Μέσης Τιμής (MVT):

$$f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b + \Delta y) = f_x(u, b + \Delta y) \Delta x,$$

$$f(a, b + \Delta y) - f(a, b) = f_y(a, v) \Delta y,$$

όπου $u \in (a, a + \Delta x)$ και $v \in (b, b + \Delta y)$.

Άρα

$$\Delta z = f_x(u, b + \Delta y) \Delta x + f_y(a, v) \Delta y.$$

Γράφουμε

$$\Delta z = \left(f_x(a, b) + \underbrace{[f_x(u, b + \Delta y) - f_x(a, b)]}_{\varepsilon_1} \right) \Delta x + \left(f_y(a, b) + \underbrace{[f_y(a, v) - f_y(a, b)]}_{\varepsilon_2} \right) \Delta y.$$

Έτσι,

$$\Delta z = \underbrace{f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y}_{dz} + \underbrace{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}_{\text{σφάλμα}}.$$

Αν f_x, f_y είναι συνεχείς στο (a, b) , τότε

$$\varepsilon_1 \rightarrow 0, \quad \varepsilon_2 \rightarrow 0 \quad \text{όταν} \quad (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0).$$

Συνεπώς

$$\Delta z = dz + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = dz + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).$$

Απο την ισότητα

$$\Delta z = dz + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).$$

έχουμε

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)} \frac{\Delta z - dz}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

που σημαίνει ότι η f είναι διαφορίσιμη στο (a, b) .

Σημείωση 1.4.3 Πως προκύπτει $dz + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = dz + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$. Έχουμε

$$\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = \left(\frac{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right) \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Θέτουμε

$$\eta = \frac{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

Τότε το σφάλμα γράφεται:

$$\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = \eta \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Όριο καθώς $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$:

Αν $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ και $\varepsilon_2 \rightarrow 0$, τότε και ο συνδυασμός τους η «πακετάρεται» σε μια μορφή που εξαρτάται μόνο από την ευκλείδεια απόσταση

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Πράγματι,

$$|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y| \leq \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Αρκεί να υψώσουμε στο τετράγωνο και να δείξουμε ότι

$$(\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y)^2 \leq (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2).$$

Πράγματι,

$$(\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y)^2 = \varepsilon_1^2 (\Delta x)^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \Delta x \Delta y + \varepsilon_2^2 (\Delta y)^2.$$

Ενώ

$$(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) = \varepsilon_1^2 (\Delta x)^2 + \varepsilon_1^2 (\Delta y)^2 + \varepsilon_2^2 (\Delta x)^2 + \varepsilon_2^2 (\Delta y)^2.$$

Άρα η διαφορά είναι

$$[(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)] - (\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y)^2 = (\varepsilon_1 \Delta y - \varepsilon_2 \Delta x)^2 \geq 0.$$

Συνεπώς η αρχική ανισότητα ισχύει.

Ορισμός 1.4.4 Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $z = f(x, y)$. Λέμε ότι η f είναι *διαφορίσιμη* στο σημείο (a, b) αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(a, b)$, $f_y(a, b)$ και ισχύει ότι για κάθε $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ έχουμε

$$\Delta z = f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) = f_x(a, b) \Delta x + f_y(a, b) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

όπου $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ καθώς $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ ή ισοδύναμα:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(a + \Delta x, b + \Delta y) - f(a, b) - f_x(a, b) \Delta x - f_y(a, b) \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Δηλαδή, η μεταβολή Δz γράφεται ως άθροισμα μιας γραμμικής συνάρτησης των $(\Delta x, \Delta y)$ και ενός σφάλματος που τείνει στο μηδέν όταν $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

Λογική μορφή	Φραστική διατύπωση	Ερμηνεία
$A \Rightarrow B$	«Αν ισχύει το A , τότε ισχύει το B »	Το A είναι <i>ικανή συνθήκη</i> για το B
$B \Rightarrow A$	«Αν ισχύει το B , τότε ισχύει το A »	Το A είναι <i>αναγκαία συνθήκη</i> για το B
$A \Leftrightarrow B$	«Αν και μόνο αν»	Το A είναι <i>και ικανή και αναγκαία συνθήκη</i> για το B

Πίνακας 1.1 Ικανή, αναγκαία και ικανή-αναγκαία συνθήκη

Παράδειγμα 1.4.6

Ένας αριθμός είναι άρτιος αν και μόνο αν διαιρείται με το 2.

- Αν ένας αριθμός είναι άρτιος, τότε διαιρείται με το 2 σημαίνει ότι η ιδιότητα «άρτιος» είναι *ικανή συνθήκη*.
- Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 2, τότε είναι άρτιος σημαίνει ότι η ιδιότητα «άρτιος» είναι *αναγκαία συνθήκη*.

Σημείωση 1.4.7 Το θεώρημα 1.4.2 δίνει ικανή συνθήκη, όχι όμως αναγκαία. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι διαφορίσιμες αλλά οι μερικές τους παράγωγοι δεν είναι συνεχείς.

Παράδειγμα 1.4.8

Εξετάστε αν η συνάρτηση f

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$ και αν οι

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

είναι συνεχείς στο $(0, 0)$. Τι συμπεραίνετε;

→ Μετάβαση στη Λύση του Παραδείγματος 1.4.8

Λύση. Υπολογισμοί των $\Delta f, df$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0.$$

Όμοια, λόγω κυκλικότητας των x, y , θα ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Άρα $df = 0$.

Επίσης

$$\Delta f = f(h,k) - f(0,0) = (h^2 + k^2) \sin \frac{1}{h^2 + k^2}.$$

Και από (Μ.σ.2.5) έχουμε

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{(h^2 + k^2) \sin \frac{1}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \sqrt{h^2 + k^2} \sin \frac{1}{h^2 + k^2}.$$

Η έκφραση αυτή τείνει στο μηδέν για $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$, διότι $\sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ και $\sin \frac{1}{h^2 + k^2}$ είναι φραγμένη. (Μηδενική επί φραγμένη = μηδενική). Άρα η $f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Για τη συνέχεια των f_x, f_y στο $(0,0)$ έχουμε:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} \left((x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y} \left((x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Οι f_x, f_y είναι συνεχείς για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f_x στο σημείο $(0,0)$. Έχουμε

$$f_x(x,x) = 2x \sin \frac{1}{2x^2} - \frac{x}{x^2} \cos \frac{1}{x^2} = 2x \sin \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}.$$

Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{2x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

δεν υπάρχει, το

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x,x)$$

δεν υπάρχει. Συνεπώς και το

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y)$$

δεν υπάρχει. Όμοια, δεν υπάρχει και το

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x,y).$$

Συμπέρασμα: Συμπεραίνουμε ότι κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση δεν έχει κατ' ανάγκην μερικές παραγώγους πρώτης τάξης συνεχείς.

← Επιστροφή στο Παράδειγμα 1.4.8

Παράδειγμα 1.4.9

Η συνάρτηση δύο μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη και δεν έχει μερικές παράγωγους συνεχείς στο σημείο αυτό Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και αν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της είναι συνεχείς στο ίδιο σημείο. Τι παρατηρείτε σχετικά με τη σχέση μεταξύ διαφορισιμότητας και συνέχειας των μερικών παραγώγων;

Λύση.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ερώτημα: Εξετάζουμε αν η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και αν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι συνεχείς στο ίδιο σημείο.

1. Υπολογισμός μερικών παραγώγων στο σημείο $(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0.$$

Άρα $f_x(0,0) = 0$ και $f_y(0,0) = 0$.

2. Τύποι μερικών παραγώγων για $(x,y) \neq (0,0)$:

Με χρήση του κανόνα του πηλίκου:

$$f_x(x,y) = \frac{(2xy)(x^2+y^2) - x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

3. Συνέχεια των μερικών παραγώγων στο σημείο $(0,0)$:

Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x,y) = 0.$$

Για τη f_x :

$$|f_x(x,y)| = \left| \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq 2 \frac{|x||y|^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Θέτουμε $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Τότε $|x| \leq r$, $|y| \leq r$, άρα

$$|f_x(x,y)| \leq 2 \frac{r r^3}{r^4} = 2r \rightarrow 0 \quad \text{όταν} \quad (x,y) \rightarrow (0,0).$$

Άρα $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0)$. Η f_x είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Για τη f_y :

$$|f_y(x,y)| = \left| \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq \frac{x^2(|x|^2+|y|^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1.$$

Για να βρούμε το όριο, εκφράζουμε ξανά σε πολικές συντεταγμένες: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$:

$$f_y = \frac{r^4 \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{r^4} = \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

Το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από το r , άρα το όριο ως $(x,y) \rightarrow (0,0)$ είναι $\cos^2 \theta (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$, που εξαρτάται από τη διεύθυνση. **Όμως αυτό είναι λάθος για τη συνέχεια:** το όριο δεν τείνει στο μηδέν για όλες τις διευθύνσεις, οπότε πρέπει να επανελέγξουμε προσεκτικά.

Εξετάζουμε συγκεκριμένες πορείες:

$$\text{- Αν } y = 0: f_y(x,0) = \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4} = 1. \quad \text{- Αν } x = 0: f_y(0,y) = 0.$$

Άρα το όριο της $f_y(x,y)$ **δεν υπάρχει** στο $(0,0)$.

Συμπέρασμα:

- Οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ υπάρχουν. - Η f_x είναι συνεχής στο $(0,0)$. - Η f_y δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Επομένως, η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$, παρόλο που οι μερικές παράγωγοι της υπάρχουν.

Παράδειγμα 1.4.10

Παράδειγμα συνάρτησης που οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ υπάρχουν αλλά δεν είναι συνεχείς εκεί. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases},$$

Λύση.

Βήμα 1: Υπολογισμός μερικών παραγώγων στο $(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0.$$

Βήμα 2: Για $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$f_x(x,y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Πράγματι, για να είναι η f διαφορίσιμη στο $(0,0)$ απαιτείται, μεταξύ άλλων, οι μερικές παράγωγοι να είναι συνεχείς εκεί. Δηλαδή πρέπει

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0), \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_y(x,y) = f_y(0,0).$$

Εξετάζουμε το $f_x(x,y)$:

- Αν $y = x$, τότε $f_x(x,x) = 0$.
- Αν $y = 0$, τότε $f_x(x,0) = 0$.
- Αν $x = 0$, τότε $f_x(0,y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y} \rightarrow \infty$.

Επομένως, το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y)$ δεν υπάρχει. Άρα η f_x δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Ανάλογα δείχνουμε ότι και η f_y δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Συμπερασματικά, αν και οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0), f_y(0,0)$ υπάρχουν, δεν είναι συνεχείς εκεί. Άρα η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Ορισμός 1.4.11 Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ και $z = f(x,y)$. Καλούμε *γραμμικοποίηση της $f(x,y)$ με κέντρο το σημείο (a,b)* την παράσταση

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Θα αναφέρουμε την $L(x,y)$ ως *γραμμικοποίηση της $f(x,y)$ με κέντρο το σημείο (a,b)* . Αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγιστεί η συνάρτηση $f(x,y)$ κοντά στο (a,b) .

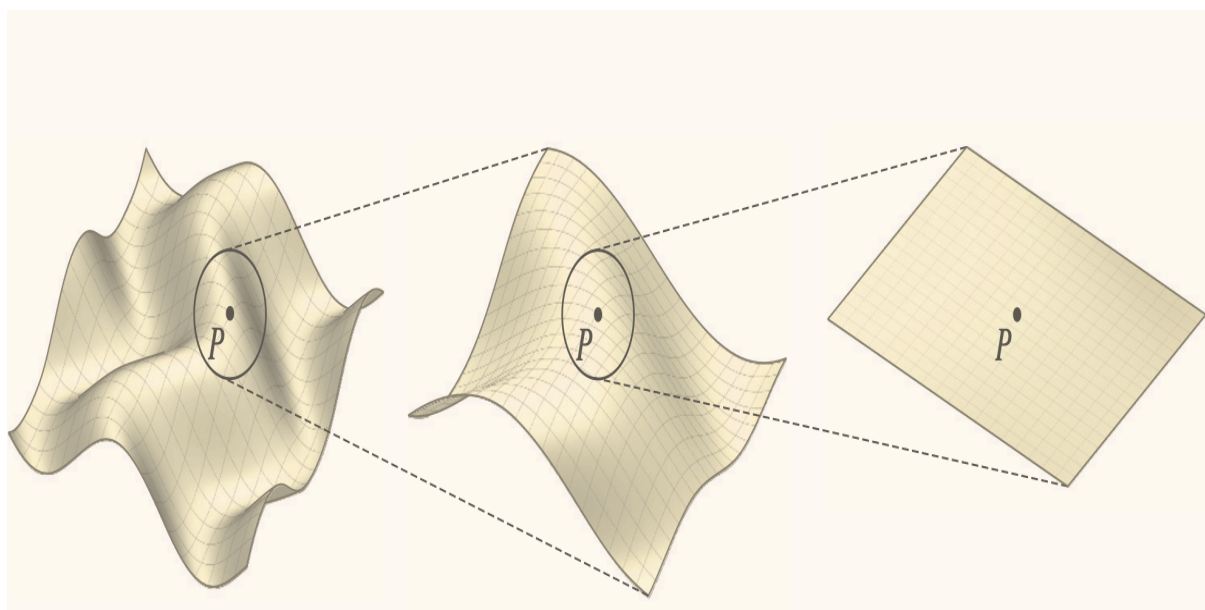
Θεώρημα 1.4.12 Διαφορισιμότητα και εφαπτόμενο επίπεδο Έστω ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ ορίζεται σε έναν δίσκο D που περιέχει το (a,b) και ότι επιπλέον οι μερικές παράγωγοι $f_x(a,b)$ και $f_y(a,b)$ υπάρχουν. Τότε:

- Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι *διαφορίσιμη* στο (a,b) αν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y) - L(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} = 0.$$

- Αν η $f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο (a,b) , τότε το *εφαπτόμενο επίπεδο* στο γράφημα της συνάρτησης και στο σημείο $(a,b, f(a,b))$ είναι το επίπεδο με εξίσωση $z = L(x,y)$. Η αναλυτική εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι η

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$



Σχήμα 1.9 Το γράφημα της συνάρτησης μοιάζει ολοένα και περισσότερο με το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο P καθώς προχωράμε στην ολοένα και μεγαλύτερη μεγέθυνσή του.

Υπενθύμιση 1.4.13

Μια συνάρτηση f λέγεται ότι έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο σημείο (x_0, y_0) αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι σε μία περιοχή του (x_0, y_0) και είναι συνεχείς στο σημείο αυτό. Αν ισχύει αυτό σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f ανήκει στην κλάση C^1 ($C^1(\mathbb{R}^2)$). Δηλαδή:

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2) \iff f \text{ είναι παραγωγίσιμη και οι } f_x, f_y \text{ είναι συνεχείς στο } \mathbb{R}^2$$

Έτσι και γενικότερα: Μια συνάρτηση ανήκει στην κλάση C^k αν όλες οι μερικές παράγωγοι μέχρι και τάξης k υπάρχουν και είναι συνεχείς.

1.5 Διαφορικά και γραμμική προσέγγιση

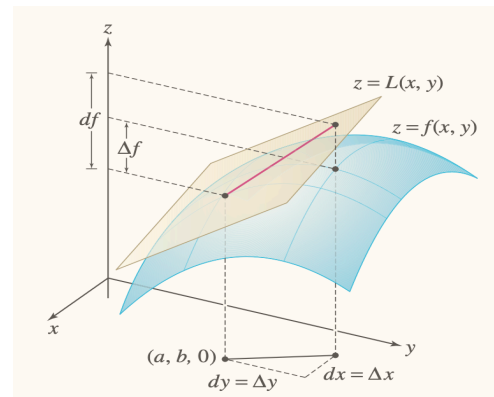
Έστω ότι η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο (a, b) και ότι επιπλέον $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Τότε το διαφορικό df ορίζεται ως:

$$df = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$

Στο Σχήμα 1.10 φαίνεται ότι το διαφορικό df αντιπροσωπεύει τη μεταβολή στο ύψος του εφαπτόμενου επιπέδου για δεδομένες μεταβολές dx και dy των μεταβλητών x και y .

Αν με Δf συμβολίσουμε την πραγματική αλλαγή της συνάρτησης $f(x, y)$, τότε προκύπτει ότι $\Delta f \approx df$ και έτσι καταλήγουμε στη διαφορική μορφή της γραμμικής προσέγγισης:

$$\Delta f \approx df = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy$$



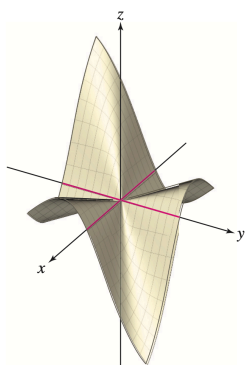
Σχήμα 1.10 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}.$$

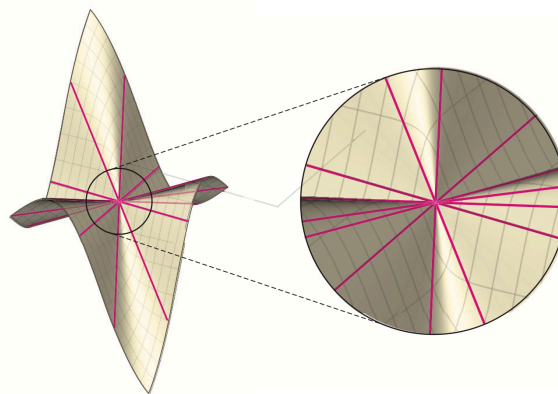
Σχόλιο 1.5.1 Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν εγγυάται τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης. Η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy(x+y)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

δείχνει μια τέτοια περίπτωση. Πράγματι, έχουμε $f_x(0, 0) = 0$ και $f_y(0, 0) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το επίπεδο που ορίζεται από τις μερικές παραγώγους είναι το επίπεδο xy . Όμως, το γράφημα της f κοντά στην αρχή των αξόνων αποτελείται από ευθείες που διέρχονται από την αρχή, οι οποίες δεν ανήκουν όλες στο επίπεδο xy . Καθώς μεγεθύνουμε την περιοχή γύρω από $(0, 0)$, οι ευθείες αυτές συνεχίζουν να σχηματίζουν γωνίες με το επίπεδο xy και έτσι το γράφημα δεν τείνει να γίνει επίπεδο. Επομένως, η $f(x, y)$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ και δεν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο εκεί.



(a) Το οριζόντιο ίχνος στο $z = 0$ περιλαμβάνει τους άξονες x και y



(b) Το οριζόντιο ίχνος στο $z = 0$ περιλαμβάνει τους άξονες x και y . Αλλά η γραφική παράσταση περιέχει επίσης μη οριζόντιες ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Επομένως, η γραφική παράσταση δεν εμφανίζεται πιο επίπεδη καθώς μεγεθύνουμε στην αρχή των αξόνων.

Σχήμα 1.11 Η συνάρτηση $f(x, y)$ δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1) Μερικές παράγωγοι στο $(0, 0)$

$$f(x, 0) = 0 \Rightarrow f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad f(0, y) = 0 \Rightarrow f_y(0, 0) = 0.$$

2) Συνέχεια στο $(0, 0)$

Θέτουμε $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ισχύει $|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$, άρα

$$|2xy(x+y)| \leq (x^2 + y^2)(|x| + |y|) \leq \sqrt{2}(x^2 + y^2)^{3/2} = \sqrt{2}r^3.$$

Οπότε

$$|f(x, y)| = \left| \frac{2xy(x+y)}{x^2 + y^2} \right| \leq \sqrt{2}r \rightarrow 0$$

καθώς $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

3) Μη διαφορισιμότητα στο $(0, 0)$

Αν η f ήταν διαφορίσιμη στο $(0, 0)$, θα είχαμε

$$df(0, 0) = f_x(0, 0)dx + f_y(0, 0)dy = 0,$$

και επομένως

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Ελέγχουμε κατά μήκος της ευθείας $y = x$:

$$f(x, x) = \frac{2x \cdot x(x+x)}{x^2 + x^2} = \frac{4x^3}{2x^2} = 2x, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}|x|.$$

Άρα

$$\frac{|f(x, x)|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|2x|}{\sqrt{2}|x|} = \sqrt{2} \not\rightarrow 0.$$

Η αναγκαία συνθήκη αποτυγχάνει, συνεπώς η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Συμπέρασμα: Η f είναι συνεχής και έχει μερικές παραγώγους στο $(0, 0)$, όμως δεν είναι διαφορίσιμη. Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν εγγυάται τη διαφορισιμότητα.

Ασκήσεις 1.5.2

Εξετάστε αν η συνάρτηση f με

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

Λύση. Από (Μ.σ.2.5) πρέπει να βρούμε τα $df, \Delta f$ στο $(0, 0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = 0$$

Άρα

$$df = 0h + 0k = 0$$

Επίσης,

$$\Delta f = f(0 + h, 0 + k) - f(0, 0) = \frac{hk}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Συνεπώς,

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{hk}{h^2 + k^2}$$

Πλησιάζουμε το $(0, 0)$ με πολικές συντεταγμένες $h = r \cos \theta$, $k = r \sin \theta$ με $r \rightarrow 0$ και $\theta \in [0, 2\pi)$, οπότε έχουμε

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta$$

Το όριο για $r \rightarrow 0$ δεν υπάρχει διότι είναι εξαρτώμενο του θ . Συνεπώς δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$, αν και είναι συνεχής.

Λυμένες ασκήσεις 1.5.3

Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ και να εξεταστεί αν είναι συνεχείς στο $(0, 0)$.

Υπολογισμός μερικών παραγώγων στο $(0, 0)$:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h^3}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = 2$$

Αναλυτικός έλεγχος συνέχειας για f_x :

Υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο:

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3 + 2y^3}{x^2 + y^2} \right) = \frac{3x^2(x^2 + y^2) - 2x(x^3 + 2y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Περνάμε σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{3(r \cos \theta)^2 \cdot r^2 - 2r \cos \theta \cdot [r^3 \cos^3 \theta + 2r^3 \sin^3 \theta]}{r^4}$$

Υπολογίζοντας τους όρους:

$$3(r \cos \theta)^2 \cdot r^2 = 3r^4 \cos^2 \theta$$

$$2r \cos \theta \cdot [r^3 \cos^3 \theta + 2r^3 \sin^3 \theta] = 2r^4 \cos^4 \theta + 4r^4 \cos \theta \sin^3 \theta$$

Άρα:

$$f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{3r^4 \cos^2 \theta + 3r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 2r^4 \cos^4 \theta - 4r^4 \cos \theta \sin^3 \theta}{r^4}$$

Απλοποιείται ως:

$$= \cos^4 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta$$

Παίρνουμε το όριο:

$$\lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) = \lim_{(r,\theta) \rightarrow (0,0)} \cos^4 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta - 4 \cos \theta \sin^3 \theta = 1$$

και επειδή $f_x(0,0) = 1$ έχουμε ότι η f_x είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Ομοίως ισχύει για την f_y

$$f_y(x,y) = \frac{6y^2(x^2 + y^2) - 2y(x^3 + 2y^3)}{(x^2 + y^2)^2}$$

Περνάμε πάλι σε πολικές συντεταγμένες, εκτελούμε αναλυτικούς υπολογισμούς και βρίσκουμε ότι το όριο είναι παντού ίσο με 2 όπως η τιμή στο σημείο $(0,0)$.

Συμπέρασμα:

$$f_x(0,0) = 1, \quad f_y(0,0) = 2$$

και οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο $(0,0)$.

Θεώρημα 1.5.4 Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο (a,b) , τότε στο ίδιο σημείο υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(a,b)$ και $f_y(a,b)$.

Λύση. Εφόσον η f είναι διαφορίσιμη στο (a,b) , υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(a+h, b+k) - f(a,b) - L(h,k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Ο γραμμικός αυτός μετασχηματισμός γράφεται ως

$$L(h,k) = Ah + Bk,$$

όπου $A, B \in \mathbb{R}$.

Θα δείξουμε ότι $A = f_x(a,b)$ και $B = f_y(a,b)$.

Πράγματι, για $h \neq 0$ και $k = 0$ έχουμε:

$$f(a+h, b) - f(a,b) = Ah + R(h,0), \quad \text{όπου} \quad \frac{|R(h,0)|}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Διαίρεση με h δίνει:

$$\frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h} = A + \frac{R(h,0)}{h},$$

και λαμβάνοντας όριο όταν $h \rightarrow 0$ προκύπτει

$$f_x(a,b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a,b)}{h} = A.$$

Ανάλογα, θέτοντας $h = 0$ και $k \neq 0$:

$$f(a, b+k) - f(a,b) = Bk + R(0,k), \quad \text{με} \quad \frac{|R(0,k)|}{|k|} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0,$$

οπότε

$$f_y(a, b) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a, b+k) - f(a, b)}{k} = B.$$

Άρα οι μερικές παράγωγοι $f_x(a, b)$ και $f_y(a, b)$ υπάρχουν και ισούνται με τους συντελεστές του γραμμικού μέρους $L(h, k)$ της διαφορικής.

Σχόλιο 1.5.5 Η διαφορισιμότητα συνεπάγεται ύπαρξη των μερικών παραγώγων στο σημείο, αλλά όχι τη συνέχειά τους.

Παράδειγμα 1.5.6

Η διαφορισιμότητα δεν συνεπάγεται τη συνέχειά των μερικών παραγώγων. Εξετάστε αν η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ και αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο $(0, 0)$.

Τι συμπεραίνετε;

Λύση.

Βήμα 1: Συνέχεια στο $(0, 0)$. Για $(x, y) \neq (0, 0)$ θέτουμε $r^2 = x^2 + y^2$, άρα

$$f(x, y) = r^2 \sin\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Εφόσον $|\sin(\frac{1}{r^2})| \leq 1$, προκύπτει

$$|f(x, y)| \leq r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

οπότε $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ και η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

Βήμα 2: Μερικές παράγωγοι στο $(0, 0)$. Υπολογίζουμε με τον ορισμό:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin(\frac{1}{h^2})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin(\frac{1}{h^2}) = 0.$$

Ομοίως

$$f_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} k \sin(\frac{1}{k^2}) = 0.$$

Άρα $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

Η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη. Πράγματι

$$\begin{aligned}
& \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - f_x(0,0)h - f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
&= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{(h^2 + k^2) \sin\left(\frac{1}{h^2 + k^2}\right)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\
&= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sqrt{h^2 + k^2} \cdot \sin\left(\frac{1}{h^2 + k^2}\right) = 0
\end{aligned}$$

Βήμα 3: Μερικές παράγωγοι για $(x,y) \neq (0,0)$. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα γινομένου και αλυσίδας:

$$f_x(x,y) = 2x \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Απλοποιώντας:

$$f_x(x,y) = 2x \left[\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)}{x^2 + y^2} \right].$$

Ανάλογα,

$$f_y(x,y) = 2y \left[\sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)}{x^2 + y^2} \right].$$

Βήμα 4: Συνέχεια των f_x, f_y στο $(0,0)$. Εξετάζουμε το όριο του $f_x(x,y)$ στο $(0,0)$.

Χρησιμοποιούμε ξανά $r^2 = x^2 + y^2$, οπότε

$$|f_x(x,y)| = 2|x| \left| \sin\left(\frac{1}{r^2}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{r^2}\right)}{r^2} \right|.$$

Το δεύτερο σκέλος περιέχει $\frac{\cos(1/r^2)}{r^2}$ που **δεν τείνει στο 0** καθώς $r \rightarrow 0$ (ταλαντώνεται απερίορστα).

Ειδικά, αν πάρουμε κατά μήκος του άξονα $y = 0$:

$$f_x(x,0) = 2x \left[\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x^2} \right],$$

και ο όρος $-\frac{2x \cos(1/x^2)}{x^2} = -\frac{2 \cos(1/x^2)}{x}$ δεν έχει όριο. Άρα το f_x δεν είναι συνεχές στο $(0,0)$ (αντίστοιχα και το f_y).

Συμπέρασμα: Η διαφορισιμότητα δεν συνεπάγεται τη συνέχεια των μερικών παραγώγων.

Θεώρημα 1.5.7 Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ με τις μερικές παραγώγους f_x, f_y ορισμένες σε μια γειτονιά του $a \in U$ και συνεχείς στο a . Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο a .

Λύση. Γράφουμε, για (x, y) κοντά στο $a = (a_1, a_2)$,

$$f(x, y) - f(a_1, a_2) = [f(x, y) - f(a_1, y)] + [f(a_1, y) - f(a_1, a_2)].$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής μίας μεταβλητής στις συναρτήσεις $u \mapsto f(u, y)$ και $v \mapsto f(a_1, v)$, υπάρχουν ξ μεταξύ a_1 και x , και η μεταξύ a_2 και y με

$$f(x, y) - f(a_1, y) = f_x(\xi, y)(x - a_1), \quad f(a_1, y) - f(a_1, a_2) = f_y(a_1, \eta)(y - a_2).$$

Άρα

$$f(x, y) - f(a_1, a_2) = f_x(a)(x - a_1) + f_y(a)(y - a_2) + R(x, y),$$

όπου

$$R(x, y) = [f_x(\xi, y) - f_x(a)](x - a_1) + [f_y(a_1, \eta) - f_y(a)](y - a_2).$$

Θέτουμε $h = x - a_1$, $k = y - a_2$. Από τη συνέχεια των f_x, f_y στο a , καθώς $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ έχουμε $f_x(\xi, y) \rightarrow f_x(a)$ και $f_y(a_1, \eta) \rightarrow f_y(a)$, οπότε

$$\frac{|R(a_1 + h, a_2 + k)|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \leq |f_x(\xi, a_2 + k) - f_x(a)| \frac{|h|}{\sqrt{h^2 + k^2}} + |f_y(a_1, \eta) - f_y(a)| \frac{|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} \xrightarrow{(h, k) \rightarrow (0, 0)} 0.$$

Άρα

$$f(a_1 + h, a_2 + k) = f(a) + f_x(a)h + f_y(a)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}),$$

δηλαδή η f είναι διαφορίσιμη στο a με διαφορική $Df(a)(h, k) = f_x(a)h + f_y(a)k$.

Σχόλιο 1.5.8 Από το Θεώρημα 1.5.7 προκύπτει ότι αν οι f_x, f_y είναι συνεχείς σε ένα $U \subseteq D_f$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο U . Το αντίστροφο δεν ισχύει, όπως έδειξε το αντιπαράδειγμα.

Ασκήσεις 1.5.9

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^3 y$$

είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο (a, b) .

Να βρείτε την γραμμική προσέγγιση της $f(x, y)$ στο σημείο $(1, 2)$ και να την χρησιμοποιήσετε για να προσεγγίσετε την τιμή $f(1.01, 1.99)$.

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0, 0)$.

3. Εξετάστε αν η συνάρτηση f με

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

5. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

6. Αν η f είναι διαφορίσιμη συνάρτηση με τοπική γραμμικοποίηση

$$L(x, y) = f(a, b) + m(x - a) + n(y - b),$$

τότε $m = f_x(a, b)$ και $n = f_y(a, b)$.

7. Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}.$$

Δείξτε ότι οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν, αλλά η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

8. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της διαφορισιμότητας για να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο (a, b) , τότε η f θα είναι και συνεχής στο (a, b) .

9. Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy(x+y)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Στην άσκηση αυτή μπορείτε να αποδείξετε ότι αν και η $g(x, y)$ είναι συνεχής στο $(0, 0)$ και οι μερικές παράγωγοι $g_x(0, 0)$ και $g_y(0, 0)$ υπάρχουν, η $g(x, y)$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

- Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, ότι η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
- Να χρησιμοποιήσετε τους ορισμούς με βάση το όριο για να δείξετε ότι οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ υπάρχουν και είναι ίσες με το μηδέν.
- Δείξτε ότι η γραμμικοποίηση της $f(x, y)$ στο $(0, 0)$ είναι η $L(x, y) = 0$.
- Δείξτε ότι αν η $f(x, y)$ ήταν διαφορίσιμη στο $(0, 0)$, τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h, h)}{h} = 0.$$

Στη συνέχεια, παρατηρήστε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει καθώς $f(h, h) = 2h$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $f(x, y)$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$.

- Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της διαφορισιμότητας για να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f(x, y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ και ισχύει

$$f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0,$$

τότε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

→ Μετάβαση στη Λύση της Άσκησης 1.5.9

1. Λύση.

Η f είναι πολωνυμική ως προς x, y , άρα είναι C^∞ στο $\mathbb{R}^2$ και ιδίως διαφορίσιμη σε κάθε (a, b) .

Οι μερικές παράγωγοι:

$$f_x(x, y) = 3x^2y, \quad f_y(x, y) = x^3.$$

Στο $(1, 2)$:

$$f(1, 2) = 2, \quad f_x(1, 2) = 6, \quad f_y(1, 2) = 1.$$

Η γραμμική προσέγγιση (εφαπτόμενο επίπεδο) είναι

$$L_{(1,2)}(x, y) = f(1, 2) + f_x(1, 2)(x - 1) + f_y(1, 2)(y - 2) = 2 + 6(x - 1) + (y - 2) = 6x + y - 6.$$

Άρα

$$f(1.01, 1.99) \approx L_{(1,2)}(1.01, 1.99) = 6(1.01) + 1.99 - 6 = 2.05.$$

Έλεγχος: Η ακριβής τιμή είναι $f(1.01, 1.99) = (1.01)^3 \cdot 1.99 \approx 2.0503$, οπότε το σφάλμα της προσέγγισης είναι περίπου 3×10^{-4} .

2. Λύση.

Η συνάρτηση είναι προφανώς συνεχής παντού, και στο $(0, 0)$ συγκεκριμένα,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Οι μερικές παράγωγοι στο $(0, 0)$ είναι:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h}.$$

Το όριο αυτό είναι 1 αν $h > 0$ και -1 αν $h < 0$, άρα δεν υπάρχει. Ομοίως, η $f_y(0,0)$ δεν υπάρχει για τον ίδιο λόγο (αν υπολογιστεί με k αντί h).

Άρα η f δεν έχει μερικές παραγώγους στο $(0, 0)$ και επομένως δεν μπορεί να είναι διαφορίσιμη εκεί. *Συμπέρασμα:* Η συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι συνεχής αλλά όχι διαφορίσιμη

στο σημείο $(0, 0)$.

3. (a) *Συνέχεια στο $(0, 0)$.* Για $(x,y) \neq (0,0)$ θέτουμε $r^2 = x^2 + y^2$. Τότε

$$|f(x,y)| = \left| \frac{2xy(x+y)}{x^2 + y^2} \right| \leq 2|x+y| \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq 2|x+y|.$$

Επειδή $|x+y| \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = \sqrt{2}r$, έχουμε

$$|f(x,y)| \leq 2\sqrt{2}r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Άρα $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, επομένως η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

- (b) *Μερικές παράγωγοι στο $(0, 0)$.* Με τον ορισμό:

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Ομοίως,

$$f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{k} = 0.$$

Άρα $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

- (c) *Γραμμικοποίηση.* Η γραμμικοποίηση της f στο $(0, 0)$ είναι

$$L(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 0.$$

- (d) *Έλεγχος διαφορισιμότητας.* Αν η f ήταν διαφορίσιμη στο $(0, 0)$, τότε θα ίσχυε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - L(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Θεωρούμε την ευθεία $y = x$. Τότε

$$f(x,x) = \frac{2x \cdot x(2x)}{x^2 + x^2} = \frac{4x^3}{2x^2} = 2x.$$

Άρα

$$\frac{f(x,x)}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{2}|x|} = \sqrt{2} \operatorname{sgn}(x),$$

που δεν τείνει στο 0 όταν $x \rightarrow 0$.

Επομένως, η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$, παρότι είναι συνεχής και έχει μηδενικές μερικές παραγώγους στο σημείο αυτό.

Συμπέρασμα: Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$, οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι 0, όμως η συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

4. Έστω ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και ισχύει

$$f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

Από τον ορισμό της διαφορισιμότητας έχουμε ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - L(0,0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0.$$

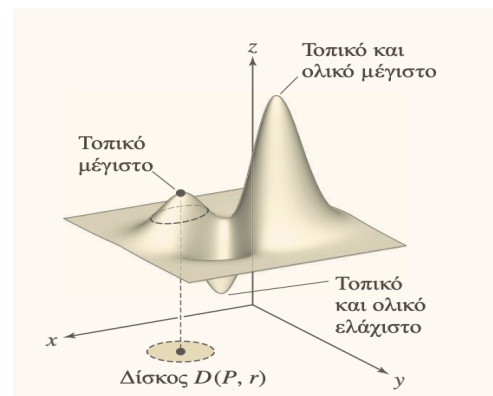
Επειδή $L(0,0) = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 0$, θα έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

1.6 Βελτιστοποίηση στον Λογισμό πολλών μεταβλητών

Θυμηθείτε, καταρχάς, ότι η *βελτιστοποίηση* είναι η διαδικασία της εύρεσης των ακρότατων τιμών μιας συνάρτησης. Αυτό ισοδυναμεί με την εύρεση των μεγίστων και ελαχίστων τιμών στο γράφημα της συνάρτησης και στο δεδομένο κάθε φορά πεδίο ορισμού. Όπως διαπιστώσαμε από την περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, είναι σημαντικό να διαχωρίσουμε μεταξύ *τοπικών* και *ολικών* ακρότατων τιμών.

Μια τοπικά ακρότατη τιμή είναι μια τιμή $f(a,b)$ που είναι μέγιστη ή ελάχιστη σε κάποιον μικρό ανοικτό δίσκο γύρω από το (a,b) (βλ. Σχήμα 1.12).



Σχήμα 1.12 Η συνάρτηση $f(x,y)$ έχει ένα τοπικό μέγιστο στο P .

Ορισμός 1.6.1 Τοπικά ακρότατες τιμές Μια συνάρτηση $f(x,y)$ έχει τοπικό ακρότατο στο $P = (a,b)$ αν υπάρχει ένας ανοικτός δίσκος $D(P,r)$ τέτοιος ώστε

- *Τοπικό μέγιστο:* $f(x,y) \leq f(a,b)$ για όλα τα $(x,y) \in D(P,r)$.
- *Τοπικό ελάχιστο:* $f(x,y) \geq f(a,b)$ για όλα τα $(x,y) \in D(P,r)$.

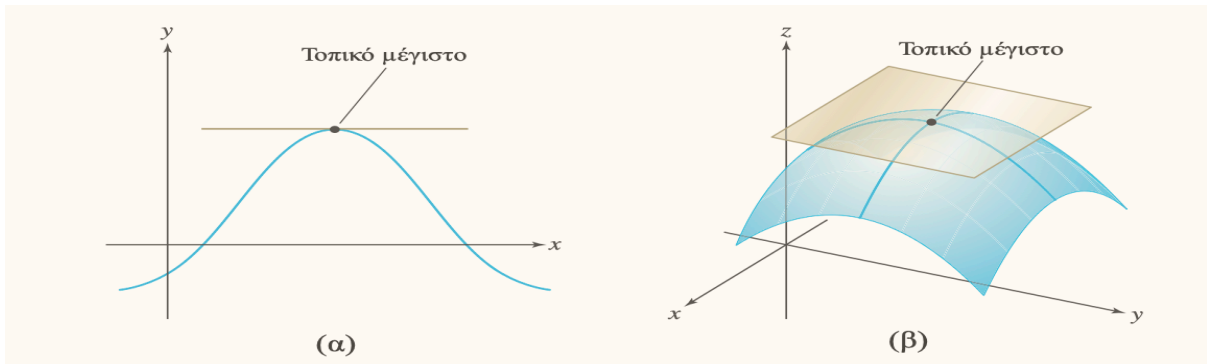
Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, αν η τιμή $f(a)$ είναι

ένα τοπικό ακρότατο, τότε το a είναι ένα κρίσιμο σημείο, γεγονός που σημαίνει ότι η εφαπτόμενη ευθεία (αν υπάρχει) είναι οριζόντια στο $x = a$. Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει για τις συναρτήσεις με δύο μεταβλητές, αλλά σε αυτή την περίπτωση είναι το *εφαπτόμενο επίπεδο* αυτό που πρέπει να είναι οριζόντιο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.13.

Το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $z = f(x, y)$ στο $P = (a, b)$ έχει εξίσωση

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b).$$

Συνεπώς, το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο αν $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, δηλαδή αν η εξίσωση ανάγεται στην $z = f(a, b)$. Η συνθήκη αυτή μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό για ένα κρίσιμο σημείο, όπου λάβαμε υπόψη μας την πιθανότητα να μην υπάρχουν είτε η μία είτε και οι δύο μερικές παράγωγοι.



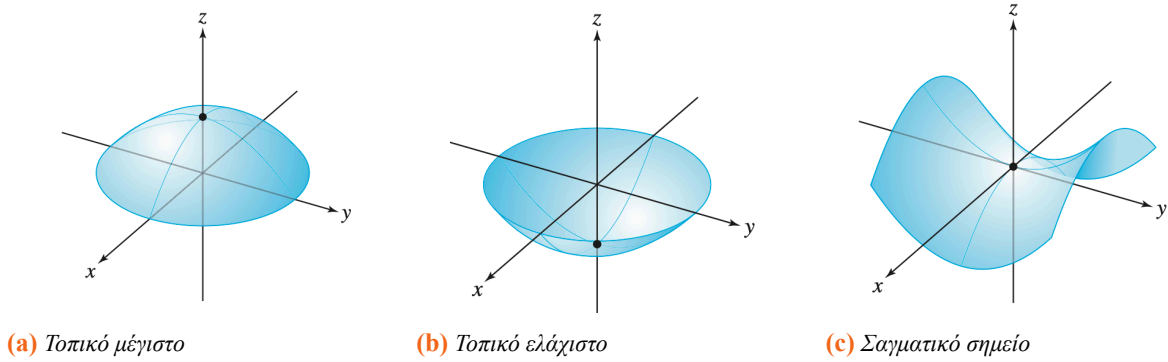
Σχήμα 1.13 Το γράφημα της συνάρτησης μοιάζει ολοένα και περισσότερο με το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο P καθώς προχωράμε στην ολοένα και μεγαλύτερη μεγέθυνσή του.

Ορισμός 1.6.2 Κρίσιμο σημείο Ένα σημείο $P = (a, b)$ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x, y)$ ονομάζεται **κρίσιμο** αν:

- $f_x(a, b) = 0$ ή $f_x(a, b)$ δεν υπάρχει και
- $f_y(a, b) = 0$ ή $f_y(a, b)$ δεν υπάρχει.

Θεώρημα 1.6.3 Θεώρημα Fermat Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο $P = (a, b)$, τότε το (a, b) είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $f(x, y)$.

Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση f με μία μεταβλητή μπορεί να έχει ένα σημείο καμπής αντί για ένα τοπικό ακρότατο σε ένα κρίσιμο σημείο. Ένα παρόμοιο φαινόμενο εμφανίζεται και στον Λογισμό πολλών μεταβλητών. Για καθεμία από τις συναρτήσεις του Σχήματος 1.14, το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο. Όμως, η συνάρτηση του Σχήματος 1.14c έχει ένα *σαγματικό σημείο*, δηλαδή ένα κρίσιμο σημείο, το οποίο δεν είναι ούτε τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο. Αν σταθείτε σε ένα τέτοιο σημείο και ξεκινήσετε να περπατάτε, τότε αν κινηθείτε προς ορισμένες κατευθύνσεις όπως οι $+j$ και $-j$ θα «οδηγηθείτε» προς τα επάνω, ενώ αν ακολουθήσετε άλλες, όπως οι κατευθύνσεις $+i$ και $-i$, θα «οδηγηθείτε» προς τα κάτω.



Σχήμα 1.14

Σημείωση 1.6.4 Τετραγωνικές μορφές

Η μελέτη των τετραγωνικών μορφών, δηλαδή του αν ένας ακέραιος μπορεί να εκφραστεί ως τιμή μιας τέτοιας μορφής, ξεκινά από πολύ παλιά. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι το θεώρημα του Fermat για το άθροισμα δύο τετραγώνων, που εξετάζει πότε ένας ακέραιος μπορεί να γραφεί ως $x^2 + y^2$, με x, y ακραίους. Το πρόβλημα αυτό σχετίζεται στενά με την εύρεση των Πυθαγόρειων τριάδων. Ήδη από το 628, ο Ινδός μαθηματικός Brahmagupta μελέτησε εξισώσεις της μορφής $x^2 - ny^2 = c$, γνωστές σήμερα ως εξίσωση του Pell, και έδωσε μεθόδους επίλυσής τους. Στην Ευρώπη, το πρόβλημα αυτό ασχολήθηκαν να μελετήσουν οι Brouncker, Euler και Lagrange. Αργότερα, το 1801, ο Gauss δημοσίευσε το έργο *Disquisitiones Arithmeticae*, όπου ανέπτυξε πλήρη θεωρία για τις δυαδικές τετραγωνικές μορφές πάνω στους ακραίους. Η θεωρία των τετραγωνικών μορφών εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη φύση των συντελεστών: μπορεί να είναι πραγματικοί, μιγαδικοί, ρητοί ή ακέραιοι αριθμοί. Στη γραμμική άλγεβρα και τη αναλυτική γεωμετρία, οι συντελεστές θεωρούνται συνήθως πραγματικοί ή μιγαδικοί, ενώ στη θεωρία αριθμών είναι στοιχεία ενός δακτυλίου ή ενός πεδίου.

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία

$$A(x_1, y_1, z_1) \quad \text{και} \quad B(x_2, y_2, z_2)$$

του χώρου $\mathbb{R}^3$. Η Ευκλείδεια απόστασή τους είναι:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2}. \end{aligned}$$

Η παράσταση

$$Q(A, B) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2$$

είναι ουσιαστικά ένα πολυώνυμο, κάθε όρος του οποίου είναι δευτέρου βαθμού ως προς τις μεταβλητές $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$. Κάθε παράσταση που μπορεί να γραφεί σε αυτή τη μορφή ονομάζεται τετραγωνική μορφή.

Ορισμός Με τον όρο *τετραγωνική μορφή* (quadratic form) $Q(x)$ n μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_n$ εννοούμε κάθε έκφραση που μπορεί να γραφεί ως:

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{(n-1)n}x_{n-1}x_n.$$

Τετραγωνικές μορφές με Μήτρες

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j} \sum_j a_{ij}x_i x_j,$$

ή

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j,$$

όπου

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Μια τετραγωνική μορφή μπορεί να γραφεί συνοπτικά με τη βοήθεια μητρών. Για την τετραγωνική μορφή (16) θεωρούμε τη συμμετρική μήτρα:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Για τη μήτρα αυτή ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$ για $i, j = 1, 2, \dots, n$. Με τη βοήθεια της μήτρας A , η τετραγωνική μορφή μπορεί να γραφεί ως:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_i x_j = x^T A x.$$

Επειδή η τετραγωνική μορφή συνδέεται άμεσα με τη μήτρα A , συμβολίζεται συχνά και ως $Q_A(x)$.

Παράδειγμα 1 Για $n = 2$ και $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ έχουμε την τετραγωνική μορφή

$$Q_A(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2.$$

Παράδειγμα 2 Η τετραγωνική μορφή

$$Q_A(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2$$

γράφεται ως

$$Q_A(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Θετικότητα και Αρνητικότητα Τετραγωνικής Μορφής

Ορισμός Έστω τετραγωνική μορφή $Q_A(x)$ με $x \in S$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Η τετραγωνική αυτή μορφή λέγεται ότι είναι:

- **Θετικά ορισμένη** (*positive definite*) αν και μόνο αν $Q_A(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.
- **Θετικά ημιορισμένη** (*positive semidefinite*) αν και μόνο αν $Q_A(x) \geq 0$ για κάθε $x \neq 0$.
- **Αρνητικά ορισμένη** (*negative definite*) αν και μόνο αν $Q_A(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$.
- **Αρνητικά ημιορισμένη** (*negative semidefinite*) αν και μόνο αν $Q_A(x) \leq 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Ορισμός Η k -τάξης κύρια ελάσσων ορίζουσα, είναι η ορίζουσα της υπομήτρας D_k τάξης k , της οποίας τα διαγώνια στοιχεία βρίσκονται επάνω στη διαγώνιο της A .

Για παράδειγμα, έστω μια τετραγωνική μήτρα τάξης 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες προκύπτουν καθώς κινούμαστε κατά μήκος της διαγωνίου a_{11}, a_{22}, a_{33} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1 = a_{11}, \\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Κριτήριο Θετικότητας και Αρνητικότητας

- (α) Η τετραγωνική μορφή $Q_A(x)$ είναι **θετικά ορισμένη** αν και μόνο αν οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες ικανοποιούν

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0.$$

Δηλαδή, όλες οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες είναι θετικές.

- (β) Η τετραγωνική μορφή $Q_A(x)$ είναι **αρνητικά ορισμένη** αν και μόνο αν οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες εναλλάσσονται στο πρόσημο, αρχίζοντας από αρνητική:

$$D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0.$$

Για μια συμμετρική μήτρα A , αν είναι θετικά ορισμένη, τότε

$$|A| = D_n > 0.$$

(γ) Η τετραγωνική μορφή $Q_A(x)$ είναι *θετικά ημιορισμένη* αν και μόνο αν

$$\bar{D}_1 \geq 0, \bar{D}_2 \geq 0, \dots, \bar{D}_k \geq 0,$$

δηλαδή αν και μόνο αν όλες οι κύριες ελάσσονες είναι μη αρνητικές.

(δ) Η τετραγωνική μορφή $Q_A(x)$ είναι *αρνητικά ημιορισμένη* αν και μόνο αν

$$\bar{D}_1 \leq 0, \bar{D}_2 \geq 0, \dots, (-1)^n \bar{D}_n \geq 0.$$

Παράδειγμα 3

1. Η τετραγωνική μορφή

$$Q_A(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

είναι θετικά ορισμένη γιατί

$$|A_1| = 3 > 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

2. Η τετραγωνική μορφή

$$Q_A(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -6x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2$$

είναι αρνητικά ορισμένη γιατί

$$|A_1| = -6 < 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

3. Η τετραγωνική μορφή

$$Q_A(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2$$

δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη γιατί

$$|A_1| = 1 > 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Διαφορικό δευτέρας τάξεως και τετραγωνική μορφή.

Υπόθεση: $f \in C^2, f_{xy} = f_{yx}$ - **Θεώρημα Clairaut.** Έχουμε ότι $dz = f_x dx + f_y dy$.

Παίρνουμε δεύτερο διαφορικό (χρησιμοποιούμε ότι $d(dx) = d(dy) = 0$ και τη γραμμικότητα του d):

$$d^2z = d(dz) = d(f_x) dx + d(f_y) dy.$$

Υπολογίζουμε τα $d(f_x)$ και $d(f_y)$:

$$d(f_x) = f_{xx} dx + f_{xy} dy, \quad d(f_y) = f_{yx} dx + f_{yy} dy.$$

Άρα

$$\begin{aligned} d^2 z &= (f_{xx} dx + f_{xy} dy) dx + (f_{yx} dx + f_{yy} dy) dy = \\ &= f_{xx} dx^2 + (f_{xy} + f_{yx}) dx dy + f_{yy} dy^2. \end{aligned}$$

Επειδή $f \in C^2$, τότε $f_{xy} = f_{yx}$ και επομένως

$$d^2 z = f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2 = (dx, dy) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

1.6.1 Από τον Λογισμό της Μίας στη Θεωρία των Πολλών Μεταβλητών

Ακριβώς όπως στον Λογισμό της μίας μεταβλητής, όπου η μελέτη των κρίσιμων σημείων μιας συνάρτησης βασίζεται στα λεγόμενα **κριτήρια της πρώτης και δεύτερης παραγώγου**, έτσι και στον Λογισμό πολλών μεταβλητών υπάρχουν ανάλογες συνθήκες που μας επιτρέπουν να καθορίσουμε τη φύση ενός κρίσιμου σημείου - αν δηλαδή αντιστοιχεί σε *τοπικό μέγιστο*, *τοπικό ελάχιστο* ή *σημείο σαγματικού τύπου*.

Στην περίπτωση μίας μεταβλητής, γνωρίζουμε ότι η εξίσωση

$$f'(x) = 0$$

χαρακτηρίζει τα κρίσιμα σημεία, ενώ το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου $f''(x)$ καθορίζει το είδος του ακροτάτου. Αν $f''(x) > 0$, τότε το σημείο είναι ελάχιστο, αν $f''(x) < 0$, μέγιστο, και αν $f''(x) = 0$, το κριτήριο είναι αβέβαιο.

Στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών $f(x, y)$, η ίδια λογική επεκτείνεται, αλλά οι παράγωγοι δεν αρκούν μόνες τους για να περιγράψουν τη γεωμετρική συμπεριφορά της επιφάνειας. Εδώ, τα ολικά διαφορικά αποτελούν το κατάλληλο εργαλείο για να εκφράσουμε και να γενικεύσουμε τις έννοιες του πρώτου και του δεύτερου κριτηρίου.

Η συνθήκη

$$dz = f_x dx + f_y dy = 0$$

αντιστοιχεί στο γνωστό κριτήριο $f'(x) = 0$ της μίας μεταβλητής: εκφράζει το γεγονός ότι, στο κρίσιμο σημείο, το ολικό διαφορικό μηδενίζεται, δηλαδή η εφαπτομένη επιφάνεια είναι οριζόντια. Επομένως για να υπάρξει κρίσιμο σημείο, απαιτείται το ολικό διαφορικό να μηδενίζεται ανεξάρτητα από τις κατευθύνσεις dx, dy . Αυτό σημαίνει ότι για να είναι ένα σημείο (a, b) κρίσιμο σημείο πρέπει:

Κριτήριο Πρώτης Τάξεως για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0.$$

Αντίστοιχα, το διαφορικό δευτέρας τάξεως

$$d^2z = (dx, dy) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

γενικεύει τη δεύτερη παράγωγο $f''(x)$. Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι το δεύτερο διαφορικό είναι *τετραγωνική μορφή*, της οποίας το πρόσημο καθορίζει τον τύπο του κρίσιμου σημείου, ακριβώς όπως το πρόσημο της $f''(x)$ στον μονοδιάστατο λογισμό. Έτσι, ενώ στον χώρο μίας μεταβλητής η κυρτότητα ή κοίλανση της γραφικής παράστασης καθορίζεται από ένα απλό πρόσημο, στον χώρο δύο μεταβλητών ο ρόλος αυτός αναλαμβάνεται από το *σύμβολο του Hessian*, δηλαδή τη μήτρα των δευτέρων παραγώγων. Με αυτόν τον τρόπο, η μετάβαση από τον Λογισμό της μίας μεταβλητής στον Λογισμό πολλών μεταβλητών δεν αποτελεί απλώς τεχνική γενίκευση, αλλά μια *θεμελιακή ενοποίηση*. Οι έννοιες της παραγωγισιμότητας και της διαφορισιμότητας ταυτίζονται, ενώ τα γνωστά κριτήρια του μονοδιάστατου λογισμού εκφράζονται πλέον μέσα από τα ολικά διαφορικά. Η θεωρία αποκτά έτσι μια ενιαία γεωμετρική ερμηνεία, που ισχύει σε κάθε διάσταση και επιτρέπει τον καθορισμό του είδους των κρίσιμων σημείων μέσω της συμπεριφοράς του διαφορικού δευτέρας τάξεως. Με βάση τα παραπάνω, το κριτήριο δευτέρας τάξεως για συναρτήσεις δύο μεταβλητών σε ένα κρίσιμο σημείο (a, b) με την βοήθεια της Εισισιανής

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{yx}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

διαμορφώνεται ως εξής:

Κριτήριο Δευτέρας Τάξεως για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

$$\text{Av } D(a, b) = \det H = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2.$$

Τότε ισχύουν:

1. Av $D(a, b) > 0$ και $f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow$ το σημείο (a, b) είναι *τοπικό ελάχιστο*.
2. Av $D(a, b) > 0$ και $f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow$ το σημείο (a, b) είναι *τοπικό μέγιστο*.
3. Av $D(a, b) < 0 \Rightarrow$ το σημείο (a, b) είναι *σαγματικό σημείο*.
4. Av $D(a, b) = 0 \Rightarrow$ το κριτήριο είναι *απροσδιόριστο*.

Σχόλιο 1.6.5 Σύμφωνα με το *Θεώρημα Weierstrass*, κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό και φραγμένο σύνολο παίρνει τουλάχιστον μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή. Επομένως, αν στο εσωτερικό του συνόλου δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία που να ικανοποιούν τις συνθήκες πρώτης τάξης, τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης θα εντοπίζονται αναγκαστικά σε σημεία του *συνόρου* του πεδίου ορισμού.

Περίληψη 1.6.6

- Θα λέμε ότι το $P = (a, b)$ είναι ένα *κρίσιμο σημείο* της συνάρτησης $f(x, y)$ αν:

$f_x(a, b) = 0$ ή $f_x(a, b)$ δεν υπάρχει, και $f_y(a, b) = 0$ ή $f_y(a, b)$ δεν υπάρχει.

- Τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα μιας συνάρτησης f εμφανίζονται στα κρίσιμα σημεία.
- Η διακρίνουσα της $f(x, y)$ στο $P = (a, b)$ είναι η ποσότητα:

$$D(a, b) = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - (f_{xy}(a, b))^2$$

- *Κριτήριο δεύτερης μερικής παραγώγου:* Αν το $P = (a, b)$ είναι κρίσιμο σημείο της $f(x, y)$:
 $D(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0 \Rightarrow f(a, b)$ τοπικό ελάχιστο,

$$D(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0 \Rightarrow f(a, b) \text{ τοπικό μέγιστο,}$$

$$D(a, b) < 0 \Rightarrow \text{σαγματικό σημείο,}$$

$$D(a, b) = 0 \Rightarrow \text{το κριτήριο δεν αποφασίζει.}$$

- Ένα σημείο P είναι *εσωτερικό* σημείο του χωρίου D αν το D περιέχει κάποιον ανοικτό δίσκο $D(P, r)$. Ένα σημείο P είναι *συνοριακό* αν κάθε $D(P, r)$ περιέχει σημεία εντός και εκτός του D . Το *εσωτερικό* του D είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων, ενώ το *σύνολο* το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων. Ένα χωρίο είναι *κλειστό* αν περιέχει και τα συνοριακά του σημεία και *ανοικτό* αν περιέχει μόνο τα εσωτερικά του.
- *Ακρότατα τιμών σε κλειστά και φραγμένα σύνολα:* Αν f είναι συνεχής και D κλειστό και φραγμένο, τότε:
 - Η f παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο D .
 - Οι ακραίες τιμές εμφανίζονται είτε στα κρίσιμα σημεία του εσωτερικού του D , είτε σε σημεία του συνόρου του D .

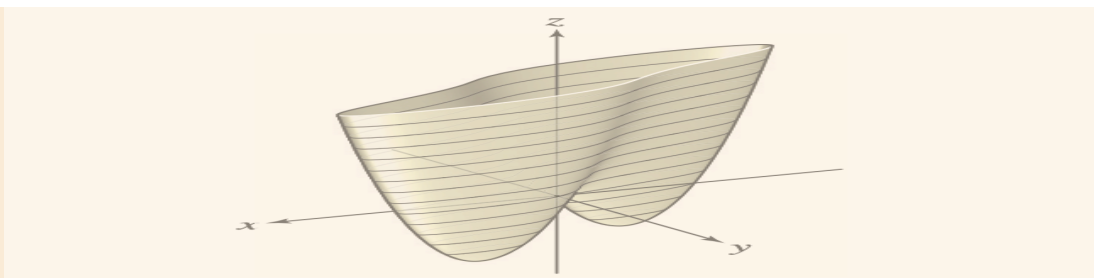
Για τον προσδιορισμό των ακρότατων τιμών: πρώτα εξετάζουμε τα κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του D , έπειτα συγκρίνουμε με τις τιμές της f στα συνοριακά σημεία.

Ασκήσεις 1.6.7

1. Έστω το σημείο $P = (a, b)$ ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^4 - 4xy$.
 (α) Χρησιμοποιήστε τη συνθήκη $f_x(x, y) = 0$ για να αποδείξετε ότι πρέπει να ισχύει η σχέση $a = 2b$. Στη συνέχεια, βασιστείτε στη συνθήκη $f_y(x, y) = 0$ για να αποδείξετε ότι μπορεί να ισχύει

$$P = (0, 0), (2\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ ή } (-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

 (β) Συμβουλευτείτε το Σχήμα 1.15 για να προσδιορίσετε τα τοπικά ελάχιστα καθώς και τα σαγματικά σημεία για τη συνάρτηση $f(x, y)$ και να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστό της.



Σχήμα 1.15

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y) = y^2x - yx^2 + xy.$$

(a) Δείξτε ότι τα κρίσιμα σημεία (x, y) της συνάρτησης ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$y(y - 2x + 1) = 0, \quad x(2y - x + 1) = 0.$$

(b) Δείξτε ότι η συνάρτηση f έχει τρία κρίσιμα σημεία στα οποία είτε $x = 0$ είτε $y = 0$ (είτε και $x = 0$ και $y = 0$) και ένα κρίσιμο σημείο στο οποίο και το x και το y είναι διαφορετικά του μηδενός.

(c) Χρησιμοποιήστε το κριτήριο της δεύτερης μερικής παραγώγου για να αποφασίσετε για το είδος του κρίσιμου σημείου (τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο ή σαγματικό σημείο).

3. Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων στο χωρίο που δίνεται σε κάθε περίπτωση.

(a) $f(x, y) = x^3 - 2y, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$

(b) $f(x, y) = 5x - 3y, \quad y \geq x - 2, y \geq -x - 2, y \leq 3.$

(c) $f(x, y) = x^2 + 2y^2, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$

(d) $f(x, y) = x^3 + x^2y + 2y^2, \quad x, y \geq 0, x + y \leq 1.$

(e) $f(x, y) = x^2 + xy^2 + y^2, \quad x, y \geq 0, x + y \leq 1.$

(f) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1.$

(g) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y, \quad x \geq 0, 0 \leq y \leq 3, y \geq x.$

(h) $f(x, y) = (4y^2 - x^2)e^{-x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 2.$

(i) $f(x, y) = x^2 + 2xy^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$

4. Βρείτε το σημείο του επιπέδου

$$z = x + y + 1$$

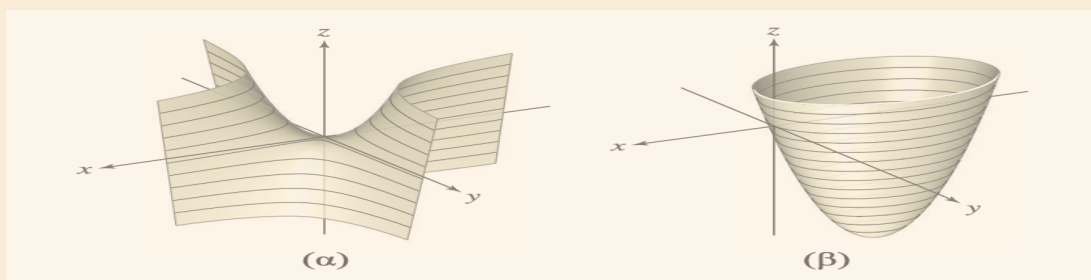
που βρίσκεται εγγύτερα στο $P = (1, 0, 0)$.

5. Προσδιορίστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4y + 6x, \quad g(x, y) = x^2 - 12xy + y.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε το κριτήριο της δεύτερης μερικής παραγώγου για να αποφασίσετε αν έχετε τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο ή σαγματικό σημείο σε καθένα από τα κρίσιμα σημεία.

Τέλος, αντιστοιχίστε τις συναρτήσεις $f(x, y)$ και $g(x, y)$ με τα γραφήματα (α) και (β) του Σχήματος 1.16.



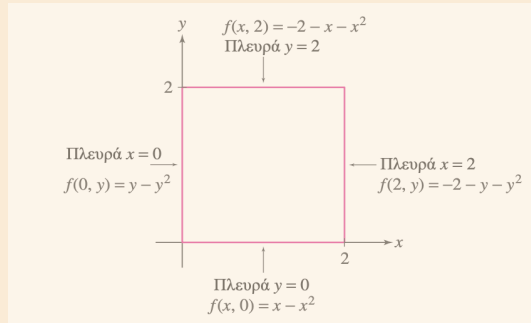
Σχήμα 1.16

6. Προσδιορίστε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x, y) = x + y - x^2 - y^2 - xy$$

στο τετράγωνο του Σχήματος 1.16 που ορίζεται από τις ανισώσεις $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, ακολουθώντας τα εξής βήματα:

- Αρχικά προσδιορίστε το κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $f(x, y)$ μέσα στο τετράγωνο και στη συνέχεια εκτιμήστε την τιμή της συνάρτησης f στο σημείο αυτό.
- Στην κάτω πλευρά του τετραγώνου ισχύει ότι $y = 0$ και $f(x, y) = x - x^2$. Υπολογίστε τις ακρότατες τιμές της συνάρτησης f σε αυτή την πλευρά.
- Προσδιορίστε τις ακρότατες τιμές της συνάρτησης f στις υπόλοιπες πλευρές του τετραγώνου.
- Βρείτε τώρα τη μέγιστη των τιμών που υπολογίσατε στα ερωτήματα α), β) και γ).



Σχήμα 1.17 Οι τύποι της συνάρτησης $f(x,y) = x + y - x^2 - y^2 - xy$ στο σύνορο του τετραγώνου $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$

7. Έστω n σημεία $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Η βέλτιστη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι η γραμμική συνάρτηση

$$f(x) = mx + b$$

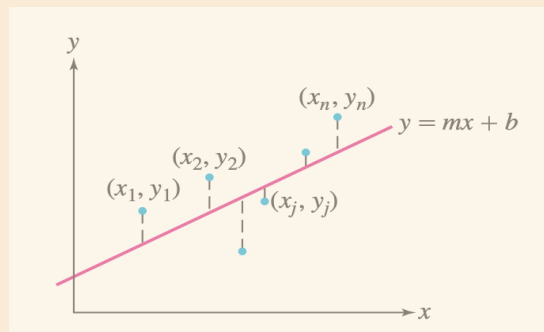
η οποία ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων (βλ. Σχήμα 1.18):

$$E(m, b) = \sum_{j=1}^n (y_j - f(x_j))^2$$

Δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της ποσότητας E επιτυγχάνεται για τις τιμές των m και b που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$m \left(\sum_{j=1}^n x_j \right) + bn = \sum_{j=1}^n y_j$$

$$m \sum_{j=1}^n x_j^2 + b \sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$



Σχήμα 1.18 Η βέλτιστη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων μεταξύ των δεδομένων σημείων και της ευθείας.

Λύση.

2. Έστω

$$f(x, y) = y^2 x - y x^2 + xy.$$

(a) Υπολογίζουμε τις πρώτες μερικές:

$$f_x = y^2 - 2yx + y = y(y - 2x + 1), \quad f_y = 2xy - x^2 + x = x(2y - x + 1).$$

Τα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν το σύστημα

$$y(y - 2x + 1) = 0, \quad x(2y - x + 1) = 0,$$

όπως ζητήθηκε.

(b) Επίλυση του συστήματος κατά περιπτώσεις.

(i) $x = 0$. Τότε $y(y + 1) = 0 \Rightarrow y = 0$ ή $y = -1$.

$$(0, 0), (0, -1).$$

(ii) $y = 0$. Τότε $x(1 - x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

$$(0, 0), (1, 0).$$

(iii) $x \neq 0, y \neq 0$. Τότε

$$y - 2x + 1 = 0, \quad 2y - x + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1, \\ 2(2x - 1) - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{3}.$$

Άρα συνολικά τέσσερα κρίσιμα σημεία:

$$(0, 0), (0, -1), (1, 0), \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Τα τρία πρώτα έχουν είτε $x = 0$ είτε $y = 0$, ενώ το τέταρτο έχει και x και y διάφορα του μηδενός.

(γ) Κριτήριο δεύτερης παραγώγου. Οι δεύτερες μερικές είναι

$$f_{xx} = -2y, \quad f_{yy} = 2x, \quad f_{xy} = 2y - 2x + 1.$$

Η Εσσιανή είναι

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}, \text{ και } D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -4xy - (2y - 2x + 1)^2.$$

Έλεγχος στα κρίσιμα σημεία:

1) Στο $(0, 0)$:

$$f_{xx} = 0, f_{yy} = 0, f_{xy} = 1 \Rightarrow D = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ σαγματικό.

2) Στο $(0, -1)$:

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 0, f_{xy} = -1 \Rightarrow D = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ σαγματικό.

3) Στο $(1, 0)$:

$$f_{xx} = 0, f_{yy} = 2, f_{xy} = -1 \Rightarrow D = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ σαγματικό.

4) Στο $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$:

$$f_{xx} = \frac{2}{3}, f_{yy} = \frac{2}{3}, f_{xy} = -\frac{1}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} > 0,$$

και $f_{xx} = \frac{2}{3} > 0 \Rightarrow$ τοπικό ελάχιστο. Η τιμή του ελαχίστου:

$$f\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{27} - \frac{3}{27} = -\frac{1}{27}.$$

Συμπέρασμα: Τα $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ είναι σαγματικά σημεία, ενώ στο $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ η f έχει τοπικό ελάχιστο με τιμή $-\frac{1}{27}$.

5. (i) Για $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4y + 6x$.

$$f_x = 2x + 6, f_y = 4y - 4.$$

Κρίσιμα σημεία: $f_x = f_y = 0 \Rightarrow x = -3, y = 1$.

Δεύτερες μερικές:

$$f_{xx} = 2 > 0, f_{yy} = 4 > 0, f_{xy} = 0 \Rightarrow D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 8 > 0.$$

Άρα, επειδή $f_{xx} > 0$, στο $(-3, 1)$ έχουμε τοπικό (και καθολικό) ελάχιστο με

$$f(-3, 1) = (-3)^2 + 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 6(-3) = -11.$$

Εναλλακτικά, $f = (x + 3)^2 + 2(y - 1)^2 - 11$, σαφώς κυρτή (ελλειπτικό παραβολοειδές).

(ii) Για $g(x, y) = x^2 - 12xy + y$.

$$g_x = 2x - 12y, g_y = -12x + 1.$$

Κρίσιμο σημείο από $g_x = g_y = 0$:

$$-12x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{12}, \quad 2x - 12y = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{6} = \frac{1}{72}.$$

Δεύτερες μερικές:

$$g_{xx} = 2, g_{yy} = 0, g_{xy} = -12 \Rightarrow D = g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2 = 2 \cdot 0 - (-12)^2 = -144 < 0.$$

Άρα στο $(\frac{1}{12}, \frac{1}{72})$ έχουμε σαγματικό σημείο (υπερβολικό παραβολοειδές).

Αντιστοίχιση με γραφήματα Σχ. 1.16:

- $f(x, y)$: ελλειπτικό παραβολοειδές με ελάχιστο στο $(-3, 1) \Rightarrow$ αντιστοιχεί στο (α).

- $g(x, y)$: υπερβολικό παραβολοειδές (σαγματικό) $\Rightarrow$ αντιστοιχεί στο (β) .

6. Η συνάρτηση είναι

$$f(x, y) = x + y - x^2 - y^2 - xy,$$

και ορίζεται στο τετράγωνο $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$.

(a) Κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό.

Υπολογίζουμε τις πρώτες μερικές:

$$f_x = 1 - 2x - y, \quad f_y = 1 - 2y - x.$$

Θέτουμε $f_x = f_y = 0$:

$$\begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ 1 - 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 1 - 2(1 - 2x) - x = 0 \end{cases} \Rightarrow -1 + 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}.$$

Το σημείο $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ανήκει στο εσωτερικό του τετραγώνου.

Υπολογίζουμε

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

(b) Στην πλευρά $y = 0$:

$$f(x, 0) = x - x^2.$$

Η παράγωγος $f'(x) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Άρα $f(\frac{1}{2}, 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Στα άκρα $x = 0, 2$: $f(0, 0) = 0, f(2, 0) = -2$.

(c) Πλευρές:

$$\bullet x = 0: \quad f(0, y) = y - y^2,$$

$$f'(y) = 1 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}, \quad f(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.$$

$$\bullet x = 2: \quad f(2, y) = 2 + y - 4 - y^2 - 2y = -2 - y^2 - y,$$

$$f'(y) = -2y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \text{ (εκτός περιοχής).}$$

Άρα στις άκρες $y = 0, 2$:

$$f(2, 0) = -2, \quad f(2, 2) = -8.$$

$$\bullet y = 2: \quad f(x, 2) = x + 2 - x^2 - 4 - 2x = -2 - x^2 - x,$$

$$f'(x) = -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (εκτός περιοχής),}$$

οπότε $f(0, 2) = -2$, $f(2, 2) = -8$.

(d) Συνοψίζουμε τις τιμές:

- Εσωτερικό: $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$
- Πλευρές: μέγιστο $= \frac{1}{4}$ στα $(0, \frac{1}{2})$ και $(\frac{1}{2}, 0)$
- Άκρα: μικρότερες τιμές $(-2, -8)$.

Συμπέρασμα: Η μέγιστη τιμή της f στο τετράγωνο είναι

$$f_{\max} = \frac{1}{3}$$

και προσεγγιστικά εμφανίζεται στο εσωτερικό σημείο $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

7. Έστω n σημεία $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ και η γραμμική συνάρτηση

$$f(x) = mx + b.$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις τιμές των m, b που ελαχιστοποιούν το άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων:

$$E(m, b) = \sum_{j=1}^n (y_j - f(x_j))^2 = \sum_{j=1}^n (y_j - (mx_j + b))^2.$$

Για ελάχιστο, απαιτούμε οι μερικές παράγωγοι να μηδενίζονται:

$$\frac{\partial E}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0.$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial E}{\partial m} = -2 \sum_{j=1}^n x_j (y_j - (mx_j + b)) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -2 \sum_{j=1}^n (y_j - (mx_j + b)) = 0.$$

Διαιρούμε και τις δύο εξισώσεις με -2 :

$$\sum_{j=1}^n x_j (y_j - mx_j - b) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n (y_j - mx_j - b) = 0.$$

Αναπτύσσοντας:

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j - m \sum_{j=1}^n x_j^2 - b \sum_{j=1}^n x_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n y_j - m \sum_{j=1}^n x_j - bn = 0.$$

Επαναγράφοντας το σύστημα με τα m, b ως αγνώστους:

$$\begin{cases} m \sum_{j=1}^n x_j + bn = \sum_{j=1}^n y_j, \\ m \sum_{j=1}^n x_j^2 + b \sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n x_j y_j. \end{cases}$$

Αυτό είναι το σύστημα ελαχίστων τετραγώνων, το οποίο δίνει τις βέλτιστες τιμές των m και b .

Λύνοντας για m, b :

$$m = \frac{n \sum x_j y_j - \sum x_j \sum y_j}{n \sum x_j^2 - (\sum x_j)^2}, \quad b = \frac{\sum y_j - m \sum x_j}{n}.$$

Έτσι η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων είναι

$$f(x) = mx + b,$$

όπου m, b δίνονται από τους παραπάνω τύπους.

1.7 Πολλαπλασιαστές Lagrange: Βελτιστοποίηση υπό συνθήκη

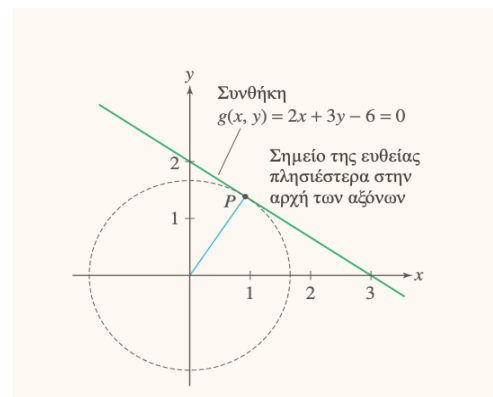
Σε ορισμένα από τα προβλήματα βελτιστοποίησης ζητείται ο προσδιορισμός των ακρότατων τιμών μιας συνάρτησης $f(x, y)$ η οποία υπόκειται σε κάποια συνθήκη που μπορεί να εκφραστεί ως $g(x, y) = 0$. αποθέστε ότι επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε εκείνο το σημείο της ευθείας $2x + 3y = 6$ το οποίο βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων (βλ. Σχήμα 1). Η απόσταση από το σημείο (x, y) μέχρι την αρχή των αξόνων είναι

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

επομένως το πρόβλημα που έχουμε να επιλύσουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Σχήμα 1.19 Εύρεση του ελαχίστου της συνάρτησης $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ πάνω στην ευθεία $2x + 3y = 6$.

που υπόκειται στη συνθήκη $g(x, y) = 2x + 3y = 6$. Δεν αναζητούμε, λοιπόν, γενικά την ελάχιστη τιμή της $f(x, y)$ (η οποία πολύ εύκολα άλλωστε προκύπτει ότι είναι η τιμή 0), αλλά την ελάχιστη τιμή μεταξύ όλων των σημείων (x, y) που βρίσκονται στην ευθεία. Γενικά, στη βελτιστοποίηση

υπό συνθήκη δεν αναζητούμε τα ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x, y)$, σε όλο το επίπεδο, αλλά μόνο σε σημεία που ικανοποιούν μία επιπλέον *συνθήκη*, η οποία μπορεί να γραφεί με τη μορφή εξίσωσης

$$g(x, y) = c.$$

1.8 Μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange

1.8.1 Κριτήριο Πρώτης Τάξεως

Ξεκινάμε με ένα θεώρημα που αποτελεί τη βάση της μεθόδου των *πολλαπλασιαστών Lagrange*. Το θεώρημα αυτό μας δίνει τις αναγκαίες συνθήκες ώστε μια συνάρτηση $f(x, y)$ να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο υπό έναν περιορισμό της μορφής $g(x, y) = c$.

Θεώρημα 1.8.1 Πολλαπλασιαστές Lagrange Έστω ότι οι $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις. Αν η $f(x, y)$ έχει ένα τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο υπό τον περιορισμό

$$g(x, y) = c$$

στο σημείο $P = (a, b)$ και εφόσον

$$(g_x(a, b), g_y(a, b)) \neq (0, 0),$$

τότε υπάρχει κάποια βαθμωτή ποσότητα λ τέτοια ώστε να ισχύει το σύστημα:

$$\begin{cases} f_x(a, b) - \lambda g_x(a, b) = 0, \\ f_y(a, b) - \lambda g_y(a, b) = 0, \\ g(a, b) = c. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια, το θεώρημα μάς λέει ότι η διαδικασία αναζήτησης ακροτάτων υπό περιορισμούς μπορεί να περιγραφεί με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Πιο αναλυτικά, έστω η συνάρτηση $z = f(x, y)$ και έστω ότι έχουμε το πρόβλημα

$$\max f(x, y) \quad \text{υπό τον περιορισμό } g(x, y) = c,$$

τότε εισάγουμε τον *πολλαπλασιαστή Lagrange* λ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(c - g(x, y)).$$

Τα πιθανά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y)$, υπό τον περιορισμό $g(x, y) = c$, προσδιορίζονται από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων που εκφράζει τις συνθήκες πρώτης τάξης βελτιστοποίησης, γνωστές ως συνθήκες των πολλαπλασιαστών του Lagrange, και διατυπώνονται ως εξής:

Κριτήριο Πρώτης Τάξης

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad g(x, y) = c..$$

1.8.2 Κριτήριο Δευτέρας Τάξεως

Για να διαπιστωθεί αν τα σημεία που προκύπτουν από το σύστημα είναι τοπικά μέγιστα, ελάχιστα ή σαγματικά σημεία, εξετάζουμε την *Εσσιανή* της $L(x, y, \lambda)$ ως προς τις μεταβλητές x, y , δηλαδή τον πίνακα

Κριτήριο Πρώτης Τάξης

$$\det(H) = \begin{vmatrix} 0 & g_x(x, y) & g_y(x, y) \\ g_x(x, y) & L_{xx}(x, y) & L_{xy}(x, y) \\ g_y(x, y) & L_{yx}(x, y) & L_{yy}(x, y) \end{vmatrix}$$

Η φύση του σημείου καθορίζεται από την *οριστικότητα* του πίνακα H :

- Αν ο πίνακας H είναι *θετικά ορισμένος*, τότε το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο.
- Αν ο πίνακας H είναι *αρνητικά ορισμένος*, τότε το σημείο είναι τοπικό μέγιστο.
- Αν ο πίνακας H αλλάζει πρόσημο, τότε το σημείο είναι σαγματικό.
- Αν κάποια κύρια ορίζουσα μηδενίζεται, τότε το κριτήριο παραμένει απροσδιόριστο και απαιτείται περαιτέρω μελέτη της συνάρτησης.

Με τον τρόπο αυτό, το Κριτήριο Δευτέρας Τάξεως δίνει ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την ταξινόμηση των κρίσιμων σημείων σε τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα ή σαγματικά σημεία, στηριζόμενο στην ανάλυση του προσήμου των ιδιοτιμών ή ισοδύναμα στις συνθήκες των κυρίων οριζουσών.

Σημείωση 1.8.2 Συνθήκες αριστοποίησης υπό περιορισμούς Εδώ θα εξετάσουμε πώς προκύπτουν τα κριτήρια πρώτης και δεύτερης τάξεως για την αριστοποίηση συναρτήσεων όταν υπάρχουν περιορισμοί. Ας ξεκινήσουμε με τα κριτήρια πρώτης τάξης. Έστω η συνάρτηση $z = f(x, y)$, την οποία επιθυμούμε να αριστοποιήσουμε υπό τον περιορισμό $g(x, y) = c$. Γνωρίζουμε ότι, ανεξάρτητα αν οι μεταβλητές x και y είναι εξαρτημένες ή ανεξάρτητες μεταξύ τους, ισχύει:

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

Ενώ αν πάρουμε το ολικό διαφορικό του περιορισμού έχουμε:

$$dg = g_x dx + g_y dy = 0$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα πρώτου βαθμού με αγνώστους τα dx και dy έχουμε:

$$dz = f_x dx - g_x \frac{f_y}{g_y} dx = \left(f_x - g_x \frac{f_y}{g_y} \right) dx = 0.$$

Για να είναι $dz = 0$, επειδή $dx \neq 0$, συνεπάγεται ότι:

$$f_x - g_x \frac{f_y}{g_y} = 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}.$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι οι παραγώγοι της f ως προς κάθε μεταβλητή είναι ανάλογοι με τις παραγώγους της g . Δηλαδή, υπάρχει κάποιος αριθμός λ ώστε:

$$f_x = -\lambda g_x, \quad f_y = -\lambda g_y$$

Λύνοντας τις εξισώσεις ως προς x , y και λ , βρίσκουμε τα ακρότατα της συνάρτησης. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν υπάρχει κάποιος τρόπος που να μας οδηγήει στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων. Η απάντηση είναι καταφατική· η εξίσωση που μας δίνει την παραπάνω λύση είναι η **εξίσωση του Lagrange**, που γράφεται:

$$L = f(x, y) + \lambda (c - g(x, y)).$$

Τα ακρότατα της f υπό τον περιορισμό $g(x, y) = c$ προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος

Κριτήριο Πρώτης Τάξης

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad g(x, y) = c.$$

Όμοια, για να εξετάσουμε το κριτήριο δεύτερης τάξης στα δεσμευμένα ακρότατα, παρατηρούμε ότι - όπως ακριβώς συμβαίνει και με τα ελεύθερα ακρότατα - το διαφορικό δεύτερης τάξης πρέπει να ικανοποιεί τις ίδιες συνθήκες προσήμου: να είναι θετικά ορισμένο, δηλαδή $d^2z > 0$, στην περίπτωση τοπικού ελαχίστου, και αρνητικά ορισμένο, δηλαδή $d^2z < 0$, στην περίπτωση τοπικού μεγίστου. Έτσι λοιπόν από

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

έχουμε:

$$d^2z = f_x d^2x + f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2$$

και

$$d^2g = g_x d^2x + g_{xx} dx^2 + 2g_{xy} dx dy + g_{yy} dy^2 = 0$$

Συνεχίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} & g_x d^2z - f_x d^2g = \\ & g_x (f_x d^2x + f_{xx} dx^2 + 2f_{xy} dx dy + f_{yy} dy^2) - f_x (g_x d^2x + g_{xx} dx^2 + 2g_{xy} dx dy + g_{yy} dy^2) \\ & = (g_x f_{xx} - f_x g_{xx}) dx^2 + (g_x f_{yy} - f_x g_{yy}) dy^2 + 2(g_x f_{xy} - f_x g_{xy}) dx dy \end{aligned}$$

Διαιρούμε με g_x , έχοντας υπόψη ότι $d^2g = 0$, και καταλήγουμε:

$$d^2z = \left(f_{xx} - \frac{f_x}{g_x} g_{xx} \right) dx^2 + \left(f_{yy} - \frac{f_x}{g_x} g_{yy} \right) dy^2 + 2 \left(f_{xy} - \frac{f_x}{g_x} g_{xy} \right) dx dy$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης αποτελεί μια τετραγωνική μορφή, και ανάλογα με το αν είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένη, έχουμε ελάχιστο ή μέγιστο αντίστοιχα.

$$d^2z = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx} - \lambda g_{xx} & f_{xy} - \lambda g_{xy} \\ g_y & f_{xy} - \lambda g_{xy} & f_{yy} - \lambda g_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dx \\ dy \end{bmatrix}$$

ή

$$d^2z = \begin{bmatrix} 0 & dx & dy \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dx \\ dy \end{bmatrix}$$

όπου $L = f(x, y) + \lambda(c - g(x, y))$.

Αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα

Κριτήριο Δεύτερης Τάξης

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένη αν η $\overline{H}$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός, και αρνητικά ορισμένη αν η $\overline{H}$ είναι μικρότερη του μηδενός.

Ασκήσεις 1.8.3

1. Να εφαρμόσετε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για τη συνάρτηση

$$f(x, y) = (x^2 + 1)y$$

υπό τον περιορισμό

$$x^2 + y^2 = 5.$$

2. Στις επόμενες ασκήσεις να υπολογίσετε τις ελάχιστες και μέγιστες τιμές της συνάρτησης που δίνεται σε κάθε περίπτωση, υπό τον δεδομένο περιορισμό.

a) $f(x, y) = 2x + 3y, \quad x^2 + y^2 = 4$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad 2x + 3y = 6$

c) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2, \quad xy = 4$

d) $f(x, y) = xy, \quad 4x^2 + 9y^2 = 32$

ε) $f(x, y) = x^2y + x + y, \quad xy = 4$

3. Προσδιορίστε το σημείο (a, b) του γραφήματος της συνάρτησης

$$y = e^x$$

για το οποίο το γινόμενο ab γίνεται ελάχιστο.

4. Βρείτε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τον μέγιστο όγκο αν το άθροισμα των ακμών του είναι ίσο με 300 cm.

5. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση

$$f(x, y) = x^2y^3$$

πάνω στον μοναδιαίο κύκλο είναι

$$\frac{6}{25} \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

6. Δείξτε ότι οι εξισώσεις Lagrange για τη συνάρτηση

$$f(x, y) = 2x + y$$

που υπόκειται στον περιορισμό

$$g(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$$

έχουν λύση, αλλά παρ' όλα αυτά η συνάρτηση f δεν έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή πάνω στην καμπύλη της συνθήκης. Αντιφάσκει το συμπέρασμα αυτό με το Θεώρημα 1;

7. Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός ορθού κυκλικού κώνου ακτίνας r και ύψους h δίνεται από τη σχέση

$$S = \pi r \sqrt{r^2 + h^2},$$

ενώ ο όγκος του είναι

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

- (a) Προσδιορίστε τον λόγο h/r για εκείνον τον κώνο που έχει δεδομένη επιφάνεια S και μέγιστο όγκο V .
- (b) Ποια είναι η τιμή του λόγου h/r για τον κώνο με δεδομένο όγκο V και ελάχιστη επιφάνεια S ;
- (c) Υπάρχει κώνος με δεδομένο όγκο V και μέγιστη επιφάνεια S ;

8. Ο Αντώνης έχει \$5.00 που μπορεί να διαθέσει για ένα γεύμα αποτελούμενο από χάμπουρ-

γκερ (με κόστος \$1.50 το ένα) και τηγανητές πατάτες (με κόστος \$1.00 η μερίδα). Η ικανοποίηση που παίρνει ο Αντώνης από το φαγητό του όταν καταναλώσει x_1 χάμπουργκερ και x_2 μερίδες πατάτες μετρίεται από τη συνάρτηση

$$U(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}.$$

Ποιες ποσότητες φαγητού από κάθε είδος θα πρέπει να καταναλώσει ώστε να μεγιστοποιηθεί το αίσθημα της απόλαυσης που θα αισθανθεί; (Υποθέστε ότι μπορεί να αγοράσει και κλασματικές ποσότητες από το κάθε είδος φαγητού.)