Θεμελιώδεις Παράγωγοι

$\frac{d}{dx}e^x = e^x$
$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$
$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$
$\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$
$\frac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^2(x)$
$\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x)$
$\frac{d}{dx}\csc(x) = -\csc(x)\cot(x)$
$\frac{d}{dx}\sin^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [-1,1]$
$\frac{d}{dx}\cos^{-1} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in [-1,1]$
$\frac{d}{dx}\tan^{-1} = \frac{1}{1+x^2}, \frac{-\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
$\frac{d}{dx}\sec^{-1} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$
$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$
$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$
$\frac{d}{dx}\tanh(x) = sech^2(x)$
$\frac{d}{dx}\coth(x) = -csch^2(x)$
$\frac{d}{dx}sech(x) = -sech(x)\tanh(x)$
$\frac{d}{dx}csch(x) = -csch(x)\coth(x)$
$\frac{d}{dx}\sinh^{-1} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\frac{d}{dx}\cosh^{-1} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$
$\frac{d}{dx}\tanh^{-1} = \frac{1}{1-x^2}\ -1 < x < 1$
$\frac{d}{dx}sech^{-1} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}, 0 < x < 1$
$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$

Θεμελιώδη Ολοκληρώματα

$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$
$\int e^x dx = e^x + c$
$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + c$
$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}(x) + c$
$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(x) + c$
$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1}(x) + c$
$\int \sinh(x)dx = \cosh(x) + c$
$\int \cosh(x)dx = \sinh(x) + c$
$\int \tanh(x)dx = \ln|\cosh(x)| + c$
$\int \tanh(x)sech(x)dx = -sech(x) + c$
$\int sech^2(x)dx = \tanh(x) + c$
$\int csch(x)\coth(x)dx = -csch(x) + c$
$\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| + c$
$\int \cot(x)dx = \ln|\sin(x)| + c$
$\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}dx = \sin^{-1}(\frac{u}{a}) + c$
$\int \frac{1}{a^2+u^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c$
$\int ln(x)dx = (xln(x)) - x + c$

Επίλυση με Αντικατάσταση u
Για το ολοκλήρωμα:
$I = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx$ ακολουθούμε τα εξής βήματα:
1. Θέτουμε $u = g(x)$, άρα $du = g'(x)\,dx$.
2. Το ολοκλήρωμα γίνεται: $I = \int f(u)\,du$
3. Λύνουμε το ολοκλήρωμα και αντικαθιστούμε το u.

Ολοκλήρωση Κατά Παράγοντες
$\int udv = uv - \int vdu$

Συναρτήσεις Και Ταυτότητες

$\sin(\cos^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$
$\cos(\sin^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$
$\sec(\tan^{-1}(x)) = \sqrt{1+x^2}$
$\tan(\sec^{-1}(x))$
$= (\sqrt{x^2-1}\ \alpha\nu\ x \geq 1)$
$= (-\sqrt{x^2-1}\ \alpha\nu\ x \leq -1)$
$\sinh^{-1}(x) = \ln x + \sqrt{x^2+1}$
$\sinh^{-1}(x) = \ln x + \sqrt{x^2-1},\ x \geq -1$
$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln x + \frac{1+x}{1-x},\ 1 < x < -1$
$sech^{-1}(x) = \ln[\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}],\ 0 < x \leq -1$
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \pm \sin(x)\sin(y)$
$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$
$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
$\cosh(n^2x) - \sinh^2 x = 1$
$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$
$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$
$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
$\tan^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$
$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(-x) = \cos(x)$
$\tan(-x) = -\tan(x)$

Έννοιες Γενικών Μαθηματικών ΙΙ

Συναρτήσεις με Δύο ή Περισσότερες Μεταβλητές

Μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών $f(x, y, z, \dots)$ είναι ένας κανόνας που συνδέει κάθε σημείο με μία πραγματική τιμή. Ονομάζεται *συνάρτηση δύο μεταβλητών* όταν είναι της μορφής $f(x, y)$ και *συνάρτηση τριών μεταβλητών* όταν είναι της μορφής $f(x, y, z)$).

Όρια στις Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

Για να υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ μιας συνάρτησης $f(x, y)$, η τιμή του $f(x, y)$ πρέπει να τείνει σε μία συγκεκριμένη τιμή καθώς (x, y) πλησιάζει το (a, b) από οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Μεθοδολογία:
Ύπαρξη Ορίου: Για να δείξουμε ότι το όριο υπάρχει και είναι:

$$L\ \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 \text{ τέτοιο ώστε:}$$
$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon$$

- **Προσέγγιση από διάφορες κατευθύνσεις:** Εξετάζουμε την τιμή του ορίου ακολουθώντας διάφορες διαδρομές.
- **Πολικές συντεταγμένες:** Αν το όριο είναι στο σημείο $(0, 0)$, εκφράζουμε τις x, y ως $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$ και εξετάζουμε το όριο όταν $r \to 0$.

Συνέχεια Συναρτήσεων Πολλών Μεταβλητών

Μια συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής στο σημείο (a, b) αν:

1. Το $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ υπάρχει.
2. Η τιμή $f(a, b)$ είναι ορισμένη.
3. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$.

Μεθοδολογία:

- **Προσδιορισμός ορίου:** Υπολογίζουμε το όριο στο σημείο και το συγκρίνουμε με την τιμή της συνάρτησης σε αυτό το σημείο.
- **Έλεγχος συνέχειας σε επιλεγμένες διαδρομές:** Αν το όριο διαφέρει κατά μήκος δύο διαδρομών, η συνάρτηση δεν είναι συνεχής.

Μερικές Παράγωγοι

Η μερική παράγωγος εκφράζει τον ρυθμό αλλαγής της συνάρτησης ως προς μία από τις μεταβλητές, κρατώντας τις άλλες σταθερές.
Η μερική παράγωγος της $f(x, y)$ ως προς x είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

π.χ Αν δίνεται $z = f(x, y)$, η μερική παράγωγος του z ως προς το x είναι:
$f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$
Αντίστοιχα, ως προς το y:
$f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$
Σημείωση-Σύσταση:
Για την f_{xyy}, εργαστείτε "από μέσα προς τα έξω". Δηλαδή, υπολογίστε πρώτα την f_x, έπειτα την f_{xy} και τέλος την f_{xyy}
Τελικά, έχουμε ότι $f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial^2 y \partial x}$
Για την $\frac{\partial^3 f}{\partial^2 y \partial x}$, εργαστείτε από τα δεξιά προς τα αριστερά στον παρονομαστή.

Κανόνας της Αλυσίδας

Ο κανόνας αλυσίδας επιτρέπει τον υπολογισμό της παραγώγου μιας σύνθετης συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Για παράδειγμα, αν $z = f(u, v)$ όπου $u = g(x, y)$ και $v = h(x, y)$, τότε η παράγωγος της z ως προς x είναι:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Μεθοδολογία:

- **Διάσπαση σε συνιστώσες:** Εκφράζουμε τις παραγώγους κάθε συνάρτησης ως προς τις ενδιάμεσες μεταβλητές.
- **Υπολογισμός μερικών παραγώγων:** Χρησιμοποιούμε τις μερικές παραγώγους σε κάθε επίπεδο της σύνθετης συνάρτησης.

Παράδειγμα:
Έστω $x = x(s, t)$, $y = y(t)$ και $z = z(x, y)$.
Το z έχει τις πρώτες μερικές παραγώγους:
$\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$
Το x έχει τις μερικές παραγώγους:
$\frac{\partial x}{\partial s}$ και $\frac{\partial x}{\partial t}$
και το y έχει την παράγωγο:
$\frac{dy}{dt}$
Στην περίπτωση αυτή (με το z να περιέχει τα x και y καθώς και τα x και y να περιέχουν και τα δύο τα s και t), ο κανόνας της αλυσίδας για το $\frac{\partial z}{\partial s}$ είναι:
$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}$
Επίσης θα έχω ότι:
Ο κανόνας της αλυσίδας για το $\frac{\partial z}{\partial t}$ είναι:
$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$
Σημείωση: η χρήση του "d" αντί του "∂" γίνεται με τη συνάρτηση μιας μόνο ανεξάρτητης μεταβλητής.

Πεπλεγμένη Παραγώγιση

Η πεπλεγμένη παραγώγιση εφαρμόζεται όταν οι μεταβλητές x και y δεν εκφράζονται ανεξάρτητα αλλά συνδέονται μέσω μιας εξίσωσης της μορφής $F(x, y) = 0$. Στην περίπτωση αυτή, για να βρούμε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$, εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας λαμβάνοντας την παράγωγο και των δύο πλευρών ως προς x και χρησιμοποιούμε τις μερικές παραγώγους της $F(x, y)$. Αν έχουμε μια σχέση $F(x, y) = 0$, τότε η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ δίνεται από:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Διανύσματα

Διάνυσμα: $\vec{u}$
Μοναδιαίο Διάνυσμα (Μ.Δ): $\hat{u}$
Μέτρο: $||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
Ιδιότητα Μ.Δ: $\hat{u} = \frac{\vec{u}}{||\vec{u}||}$

Εσωτερικό Γινόμενο
$\vec{u} \cdot \vec{v}$ (Βαθμωτό Μέγεθος).
$\vec{u} =< u_1, u_2, u_3 >$
$\vec{v} =< v_1, v_2, v_3 >$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ δηλώνει την καθετότητα των διανυσμάτων. Το θ είναι η γωνία μεταξύ τους.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||\cos(\theta)$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
Σημειώνεται ότι:
$\hat{u} \cdot \hat{v} = \cos(\theta)$
$||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ όταν $\perp$
Γωνία μεταξύ $\vec{u}$ και $\vec{v}$:
$\theta = \cos^{-1}(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{u}||\,||\vec{v}||})$
Προβολή του $\vec{u}$ στο $\vec{v}$:
$pr_{\vec{v}}\vec{u} = (\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||^2})\vec{v}$

Εξωτερικό Γινόμενο
$\vec{u} \times \vec{v}$ (Διάνυσμα)
(Γεωμετρικά, είναι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με πλευρές $||\vec{u}||$ και $||\vec{v}||$).
$\vec{u} =< u_1, u_2, u_3 >$
$\vec{v} =< v_1, v_2, v_3 >$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ δηλώνει την παραλληλία των διανυσμάτων.

Διανυσματικά Πεδία

Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο (x, y, z) έναν διάνυσμα $\vec{F}(x, y, z)$.
Έστω $f(x, y, z)$ βαθμωτό πεδίο και $\vec{F}(x, y, z) =$
$M(x, y, z)\hat{i} + N(x, y, z)\hat{j} + P(x, y, z)\hat{k}$ διανυσματικό πεδίο.
Κλίση του f : $\nabla f =< \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} >=$
$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$
Απόκλιση του $\vec{F}$:
$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}$
Στροβιλισμός του $\vec{F}$:
$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} =$
$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\hat{j} +$
$\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}$

Συντηρητικά Διανυσματικά Πεδία

Ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ είναι συντηρητικό αν ισχύει $\nabla \times \vec{F} = 0$ και υπάρχει δυναμικό ϕ τέτοιο ώστε $\vec{F} = \nabla\phi$.

Εφαπτόμενα Επίπεδα

Το εφαπτόμενο επίπεδο σε ένα σημείο (a, b) της επιφάνειας $z = f(x, y)$ είναι το επίπεδο που περνάει από το σημείο $(a, b, f(a, b))$ και έχει κλίση ίση με τις μερικές παραγώγους $f_x(a, b)$ και $f_y(a, b)$.
Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι:
$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b)$

Μεθοδολογία:

- **Υπολογισμός σημείου αναφοράς:** Εξετάζουμε το σημείο (a, b) στο οποίο θέλουμε να βρούμε το εφαπτόμενο επίπεδο.
- **Εφαρμογή μερικών παραγώγων:** Χρησιμοποιούμε τις μερικές παραγώγους στο σημείο για να ορίσουμε τις κλίσεις του επιπέδου.

Γραμμική Προσέγγιση

Η γραμμική προσέγγιση είναι η προσέγγιση μιας συνάρτησης κοντά σε ένα σημείο με ένα γραμμικό όρο, δηλαδή τη συνάρτηση του εφαπτόμενου επιπέδου.

Το γραμμικό προσεγγιστικό μοντέλο (1ος όρος Σειράς $Taylor$) είναι:
$f(x, y) \approx$
$f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$

Μεθοδολογία:

- **Υπολογισμός μερικών παραγώγων στο σημείο:** Χρησιμοποιούμε τις παραγώγους για να καθορίσουμε την κλίση του εφαπτόμενου επιπέδου.

Διαφορισιμότητα

Μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών $f(x, y)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο (a, b) αν μπορεί να προσεγγιστεί γραμμικά γύρω από το σημείο αυτό. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της συνάρτησης κοντά στο (a, b) μπορεί να γραφτεί ως: $f(x, y) \approx f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$ όπου f_x και f_y είναι οι μερικές παράγωγοι.

Μεθοδολογία:

- **Υπολογισμός μερικών παραγώγων:** Υπολογίζουμε τις μερικές παράγωγους ως προς κάθε μεταβλητή.
- **Έλεγχος ύπαρξης γραμμικού όρου:** Βεβαιωνόμαστε ότι η συνάρτηση μπορεί να γραφτεί στη μορφή του γραμμικού όρου όπως αναφέρεται παραπάνω.

Κατευθυνόμενες Παράγωγοι

Έστω $z = f(x, y)$ μια συνάρτηση, (a, b) ένα σημείο στο πεδίο (ένα έγκυρο σημείο εισόδου) και $\hat{u}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα $(2D)$.
Τότε, η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι η παράγωγος στο σημείο (a, b) προς την κατεύθυνση του $\hat{u}$ ή:
$D_{\vec{u}} f(a, b) = \hat{u} \cdot \nabla f(a, b)$
Το παραπάνω μας δίνει *Βαθμωτό Μέγεθος*.
$3D$ Έκδοση:
$D_{\vec{u}} f(a, b, c) = \hat{u} \cdot \nabla f(a, b, c)$

Βελτιστοποίηση στον Λογισμό Πολλών Μεταβλητών

Η βελτιστοποίηση σε πολλαπλές μεταβλητές περιλαμβάνει τον εντοπισμό σημείων όπου η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο. Τα κρίσιμα σημεία είναι εκείνα για τα οποία όλες οι μερικές παράγωγοι είναι μηδενικές.
Αν $f(x, y)$ είναι η συνάρτηση, τα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Μεθοδολογία:

- **Εύρεση κρίσιμων σημείων:** Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους και τις εξισώνουμε με το μηδέν.
- **Έλεγχος συνθηκών δεύτερης τάξης:** Χρησιμοποιούμε το κριτήριο των δευτέρων παραγώγων για να προσδιορίσουμε το είδος του κρίσιμου σημείου.

Κρίσιμα Σημεία
1. Βρείτε τις Μερικές Παραγώγους ως προς το x και το y (f_x και f_y)
2. Ορίστε τις παραγώγους ίσες με 0 και χρησιμοποιήστε τις για να λύσετε το σύστημα εξισώσεων για x και y.
3. Αντικαταστήστε την αρχική εξίσωση για το z.
Κάντε χρήση του Κριτηρίου Δεύτερης Παραγώγου για το αν τα κρίσιμα σημεία είναι τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα ή σαγματικά σημεία.

Κριτήριο Δεύτερης (Μερικής) Παραγώγου
1. Βρείτε όλα τα σημεία (x, y) ώστε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

2. Έστω D η ορίζουσα του (2X2) μητρώου $Hessian$:
$D = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}^2(x, y)$
Έχω ότι εάν:
$(a) D > 0$ ΚΑΙ $f_{xx} < 0, f(x, y)$ είναι η τιμή του τοπικού μεγίστου
$(b) D > 0$ ΚΑΙ $f_{xx}(x, y) > 0, f(x, y)$ είναι η τιμή του τοπικού ελαχίστου
$(c) D < 0, (x, y, f(x, y))$ είναι σαγματικό σημείο
$(d) D = 0$, ο έλεγχος είναι ασαφής
3. Προσδιορίστε την φύση των κρίσιμων σημείων.

Πολλαπλασιαστές Λαγκράνζ ($Lagrange$)

Οι πολλαπλασιαστές $Lagrange$ χρησιμοποιούνται για τη βελτιστοποίηση μιας συνάρτησης υπό περιορισμούς.
Ορίζουμε τη βοηθητική συνάρτηση $\mathcal{L} = f(x, y, \dots) + \lambda(g(x, y, \dots) - c)$ και βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους ως προς όλες τις μεταβλητές.
Μεθοδολογία:

- **Ορισμός συνάρτησης** $Lagrange$: Προσθέτουμε τον περιορισμό στην κύρια συνάρτηση μέσω του πολλαπλασιαστή λ.
- **Επίλυση συστήματος εξισώσεων:** Βρίσκουμε τα σημεία που ικανοποιούν όλες τις εξισώσεις.

Σειρές και Πολυώνυμα $Taylor$ στον Λογισμό Πολλών Μεταβλητών

Η Σειρά $Taylor$ για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών $f(x, y, \dots)$ επιτρέπει την προσεγγιστική αναπαράσταση της συνάρτησης γύρω από ένα σημείο $(a, b, \dots)$ με τη χρήση πολυωνυμικών όρων. Η Σειρά $Taylor$ πολλών μεταβλητών βασίζεται στις μερικές παραγώγους της συνάρτησης και εκφράζει την τιμή της συνάρτησης γύρω από το σημείο αναφοράς.
Η γενική μορφή της σειράς $Taylor$ για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$ γύρω από το σημείο (a, b) είναι: $f(x, y) = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + \frac{1}{2!}(f_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b)(y - b)^2) + \dots$ όπου f_x, f_y είναι οι πρώτες μερικές παράγωγοι, και f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} είναι οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της συνάρτησης.
Για μια συνάρτηση $f(x, y, z, \dots)$, η Σειρά $Taylor$ μπορεί να εκφραστεί ως:
$f(x, y, z, \dots) = f(a, b, c, \dots) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b, c, \dots) \cdot (x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a, b, c, \dots) \cdot (x_i - a_i)(x_j - a_j) + \dots$ όπου x_i, x_j αντιπροσωπεύουν τις μεταβλητές της συνάρτησης και οι παράγωγοι υπολογίζονται στο σημείο $(a, b, c, \dots)$.
Μεθοδολογία:

- **1. Υπολογισμός τιμής της συνάρτησης στο σημείο αναφοράς** $(a, b, \dots)$. Ο όρος $f(a, b, \dots)$ αποτελεί τη σταθερή τιμή στο ανάπτυγμα.
- **2. Υπολογισμός πρώτων μερικών παραγώγων στο σημείο** $(a, b, \dots)$. Οι όροι πρώτης τάξης προκύπτουν από τις μερικές παραγώγους πολλαπλασιασμένες με τις διαφορές $(x - a), (y - b), \dots$.
- **3. Υπολογισμός δευτέρων μερικών παραγώγων στο σημείο** $(a, b, \dots)$. Οι όροι δεύτερης τάξης περιλαμβάνουν τις δευτέρες μερικές παραγώγους, όπως f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}, συνδυασμένους με τα τετράγωνα και τους συνδυασμούς των διαφορών $(x - a), (y - b), \dots$.
- **4. Κατασκευή των όρων ανώτερων τάξεων.** Προσθέτουμε όρους ανώτερης τάξης για μεγαλύτερη ακρίβεια στην προσέγγιση.

Τρισδιάστατες Καρτεσιανές Συντετ/νες

Έχω δύο σημεία:
(x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2),
Μεταξύ τους απόσταση:
$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$
Μέσον:
$(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$
Σφαίρα με κέντρο (h, k, l) και ακτίνα r:
$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$

Γραμμές και Επίπεδα

Εξίσωση ενός Επιπέδου
(x_0, y_0, z_0) ανήκει στο επίπεδο και $< A, B, C >$ κανονικό διάνυσμα. Έχω:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$
$< A, B, C > \cdot < x - x_0, y - y_0, z - z_0 > = 0$
$Ax + By + Cz = D$ όπου
$D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$

Εξίσωση μίας Γραμμής
Μια γραμμή απαιτεί ένα διάνυσμα κατεύθυνσης $\vec{u} = < u_1, u_2, u_3 >$ και ένα σημείο (x_1, y_1, z_1)
Τότε, μια παραμετροποίηση μιας γραμμής θα μπορούσε να είναι:
$x = u_1 t + x_1$
$y = u_2 t + y_1$
$z = u_3 t + z_1$

Απόσταση από ένα Σημείο σε ένα Επίπεδο
Η απόσταση από ένα σημείο (x_0, y_0, z_0) σε ένα επίπεδο $Ax + By + Cz = D$ μπορεί να εκφραστεί με τον τύπο:
$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Μετατροπές Συστημάτων Συντεταγμένων

Κυλινδρικό σε Ορθογώνιο
$x = r\cos(\theta)$
$y = r\sin(\theta)$
$z = z$
Ορθογώνιο σε Κυλινδρικό
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$
$z = z$
Σφαιρικό σε Ορθογώνιο
$x = \rho\sin(\phi)\cos(\theta)$
$y = \rho\sin(\phi)\sin(\theta)$
$z = \rho\cos(\phi)$
Ορθογώνιο σε Σφαιρικό
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$
$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
Σφαιρικό σε Κυλινδρικό
$r = \rho\sin(\phi)$
$\theta = \theta$
$z = \rho\cos(\phi)$
Κυλινδρικό σε Σφαιρικό
$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$
$\theta = \theta$
$\cos(\phi) = \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$

Πολικές Συντεταγμένες
Στην χρήση Πολικών Συντεταγμένων ισχύει ότι: $dA = r dr d\theta$

Ολοκλήρωση Συναρτήσεων με Δύο Μεταβλητές

Η ολοκλήρωση συναρτήσεων με δύο μεταβλητές είναι η διαδικασία υπολογισμού του ολοκληρώματος μιας συνάρτησης $f(x, y)$ σε ένα δοσμένο επίπεδο. Ο τύπος του διπλού ολοκληρώματος είναι:
$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y)\, dy\, dx$
όπου D είναι η περιοχή ολοκλήρωσης και τα όρια x_1, x_2, y_1, y_2 είναι οι περιοχές ολοκλήρωσης.

Διπλά Ολοκληρώματα σε Γενικότερα Χωρία

Στο γενικότερο χώρο, το διπλό ολοκλήρωμα εκφράζεται ως:
$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy =$
$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$ όπου η περιοχή R καθορίζεται από τις συναρτήσεις $g_1(x)$ και $g_2(x)$.

Τριπλά Ολοκληρώματα

Το τριπλό ολοκλήρωμα υπολογίζει την ολοκλήρωση συναρτήσεων τριών μεταβλητών στον τρισδιάστατο χώρο. Ο τύπος του τριπλού ολοκληρώματος είναι:
$\iiint_V f(x, y, z)\, dV =$
$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$ όπου η περιοχή V είναι το όγκος ολοκλήρωσης και τα όρια $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ καθορίζουν τον όγκο.

Ολοκλήρωση σε Πολικές Συντεταγμένες

Η ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιείται για περιοχές που έχουν κυκλικό σχήμα. Οι σχέσεις μετασχηματισμού είναι:
$x = r\cos(\theta), \quad y = r\sin(\theta)$ και το στοιχείο περιοχής γίνεται $dA = r\, dr\, d\theta$.
Το ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες είναι:
$\iint_D f(x, y)\, dA =$
$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\, r\, dr\, d\theta$

Ολοκλήρωση σε Κυλινδρικές Συντεταγμένες

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z) είναι χρήσιμες σε περιπτώσεις περιστροφικών συμμετριών. Το στοιχείο όγκου είναι $dV = r\, dr\, d\theta\, dz$. Ο τύπος του τριπλού ολοκληρώματος είναι:
$\iiint_V f(r, \theta, z)\, dV =$
$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1}^{z_2} f(r, \theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$

Ολοκλήρωση σε Σφαιρικές Συντεταγμένες

Στις σφαιρικές συντεταγόνες (r, θ, ϕ), οι σχέσεις μετασχηματισμού είναι:
$x = r\sin(\theta)\cos(\phi), \quad y = r\sin(\theta)\sin(\phi), \quad z = r\cos(\theta)$ και το στοιχείο όγκου είναι:

$dV = r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi$. Το τριπλό ολοκλήρωμα είναι:
$\iiint_V f(r,\theta,\phi)\, dV =$
$\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r,\theta,\phi)\, r^2 \sin(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi$

Αλλαγή Μεταβλητών στα Ολοκληρώματα

Η αλλαγή μεταβλητών στα ολοκληρώματα χρησιμοποιείται για να απλοποιήσει τον υπολογισμό. Η αλλαγή μεταβλητών στο διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να εκφραστεί ως:
$\iint_{D'} f(x,y)\, dx\, dy =$
$\iint_D f(u(x,y), v(x,y)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv$
όπου $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} =$
$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)$ είναι η Ιακωβιανή της μετατροπής. Το ολοκλήρωμα γίνεται:
$\iint_{D'} f(u,v) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\, dv$
Αντίστοιχα στα τριπλά ολοκληρώματα:
$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} =$
$\frac{\partial x}{\partial u}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} - \frac{\partial x}{\partial v}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} +$
$\frac{\partial x}{\partial w}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \cdots =$
$\frac{\partial x}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial w}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right) -$
$\frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial y}{\partial w}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right) +$
$\frac{\partial x}{\partial w}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ είναι η Ιακωβιανή της μετατροπής.
Το ολοκλήρωμα γίνεται:
$\iiint_{V'} f(u,v,w) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\, dv\, dw$

Αποτελέσματα Ιακωβιανών
$J_{\text{πολικές/κυλινδρικές}} = r$ και
$J_{\text{σφαιρικές}} = r^2 \sin\theta$

Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

1ου Είδους

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα πρώτου είδους αφορούν τη διαδικασία ολοκλήρωσης μιας συνάρτησης $f(x,y)$ κατά μήκος μιας καμπύλης C. Η καμπύλη C παραμετροποιείται με την παράμετρο t, έτσι ώστε οι συντεταγμένες x και y να εκφράζονται ως συναρτήσεις του t. Η γενική μορφή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος 1ου είδους είναι:
$I = \int_C f(x,y)\, ds$ όπου το στοιχείο ds αναπαριστά τη μικρή απόσταση πάνω στην καμπύλη C, και ορίζεται ως:
$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$. Για καμπύλες που παραμετροποιούνται ως $x = x(t)$, $y = y(t)$ για $t \in [a,b]$, το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως εξής:
$I = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$

Μεθοδολογία

1. **Παραμετροποίηση της Καμπύλης:** Εκφράζουμε την καμπύλη C με παραμέτρους $x(t)$ και $y(t)$ για $t \in [a,b]$.
2. **Υπολογισμός του ds:** Υπολογίζουμε το στοιχείο της μήκους του τόξου
$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$
3. **Ορισμός της Συνάρτησης:** Τοποθετούμε τη συνάρτηση $f(x,y)$ στο ολοκλήρωμα και την εκφράζουμε ως $f(x(t), y(t))$.

Υπολογισμός του Ολοκληρώματος: Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα
$\int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$

2ου Είδους

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα δεύτερου είδους αφορούν την ολοκλήρωση ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ κατά μήκος μιας καμπύλης C. Αυτός ο τύπος ολοκληρώματος εμφανίζεται συχνά σε εφαρμογές της φυσικής, όπως στον υπολογισμό του έργου που εκτελείται από μια δύναμη. Η γενική μορφή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος 2ου είδους είναι:
$I = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} =$
$\int_C (P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy)$ όπου $\mathbf{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ είναι το διανυσματικό πεδίο και $d\mathbf{r} = (dx, dy)$ το στοιχείο του διανύσματος. Αν η καμπύλη C παραμετροποιείται από την παράμετρο t, το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως:
$\int_a^b \left(P(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\right) dt$

Μεθοδολογία

1. **Παραμετροποίηση της Καμπύλης:** Εκφράζουμε την καμπύλη C με παραμέτρους $x(t)$ και $y(t)$ για $t \in [a,b]$.
2. **Υπολογισμός των dx/dt και dy/dt:** Υπολογίζουμε τις παραγώγους dx/dt και dy/dt των παραμέτρων $x(t)$ και $y(t)$.
3. **Ορισμός του Διανυσματικού Πεδίου:** Τοποθετούμε τα πεδία $P(x,y)$ και $Q(x,y)$ στο ολοκλήρωμα, εκφράζοντάς τα ως $P(x(t), y(t))$ και $Q(x(t), y(t))$.

Υπολογισμός του Ολοκληρώματος: Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:
$\int_a^b \left(P(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}\right) dt.$

Υπολογισμός Έργου
Έστω $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ (δύναμη), όπου $M = M(x,y,z)$, $N = N(x,y,z)$, $P = P(x,y,z)$
Έχω: $d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$
Έργο: $w = \int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$

Ανεξαρτησία Διαδρομής

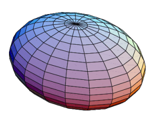
Θεμ/δες Θεωρ. Επικ. Ολοκ/των
C είναι καμπύλη όπου $\vec{r}(t), t \in [a,b]$; $\vec{r}\prime(t)$ υπάρχει. Εάν $f(\vec{r})$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε ένα ανοικτό σύνολο που περιέχει το C, τότε:
$\int_c \nabla f(\vec{r})\cdot d\vec{r} = f(\vec{b}) - f(\vec{a})$

Ισοδύναμες συνθήκες
$\vec{F}(\vec{r})$ συνεχής στο ανοικτό συνδεδεμένο σύνολο D. Τότε:
$(a)\vec{F} = \nabla f$ για κάποια συνάρτηση f.
(εάν $\vec{F}$ είναι συντηρητικό)
$\Leftrightarrow (b) \int_c \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ είναι ανεξάρτητο της διαδρομής στο D
$\Leftrightarrow (c) \int_c \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$ για όλα τα κλειστά μονοπάτια στο D.

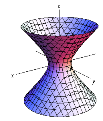
Θεώρημα Διατήρησης
$\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη σε ένα ανοικτό σύνολο D.
$\vec{F}$ συντηρητικό $\Leftrightarrow \nabla\times\vec{F} = \vec{0}$
(σε $2D \nabla\times\vec{F} = \vec{0}$ εάν $M_y = N_x$).

Βασικές Επιφάνειες

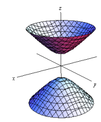
Ελλειψοειδές
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



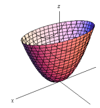
Υπερβολοειδές ενός Φύλλου
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
(Κύριος Άξονας: z διότι ακολουθεί το αρνητικό πρόσημο).



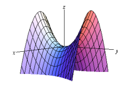
Υπερβολοειδές δύο Φύλλων
$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
(Κύριος άξονας: z διότι είναι αυτός που δεν αφαιρείται).



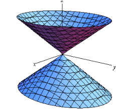
Ελλειπτικό παραβολοειδές
$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$
(Κύριος άξονας: z επειδή είναι η μεταβλητή που ΔΕΝ τετραγωνίζεται).



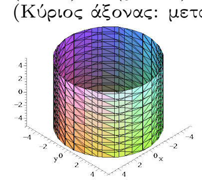
Υπερβολικό παραβολοειδές
(Κύριος άξονας: z επειδή είναι η μεταβλητή που ΔΕΝ τετραγωνίζεται).
$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$



Ελλειπτικός κώνος
(Κύριος άξονας: z επειδή είναι ο μόνος που αφαιρείται).
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

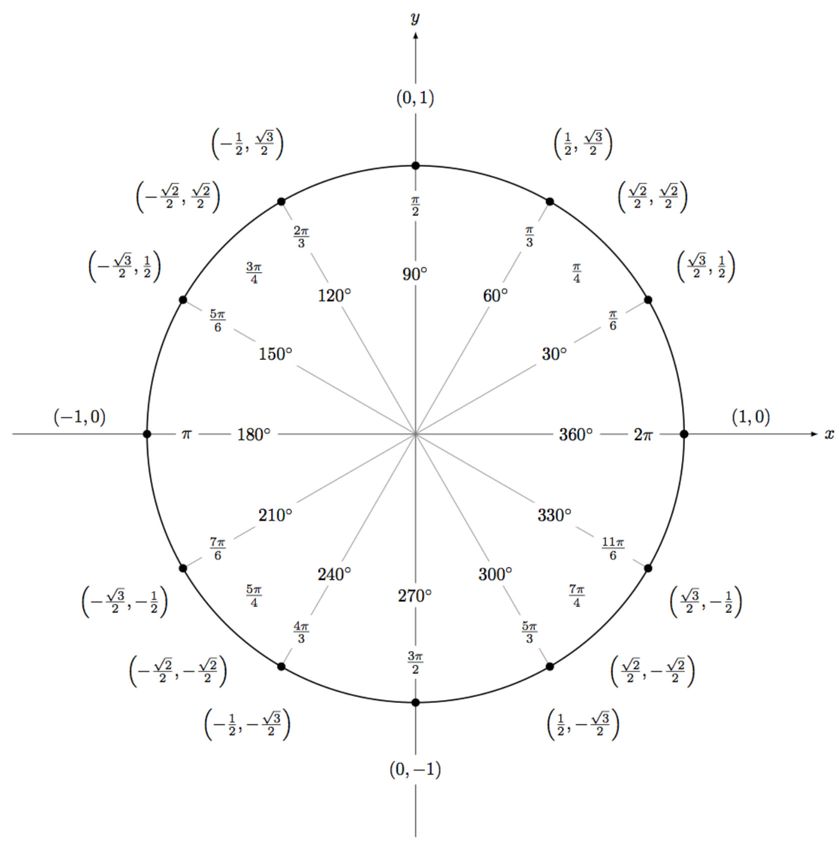


Κύλινδρος
Μία από τις μεταβλητές λείπει ή
$(x-a)^2 + (y-b^2) = c$
(Κύριος άξονας: μεταβλητή που λείπει).



Μοναδιαίος Κύκλος

(cos, sin)



ΑΠΟΦΩΝΗΣΗ

Το παρόν αρχείο υπήρξε προσωπική προσπάθεια ανάπτυξης ενός επίσημου τυπολογίου για την εξέταση του μαθήματος «Γενικά Μαθηματικά ΙΙ ($CEID\_23Y201$)», ως μέλους του Εργαστηρίου των Μαθηματικών Θεμελιώσεων της Επιστήμης των Υπολογιστών ($MFCS - Lab$). Ελπίζω η παραπάνω προσπάθεια να συμβάλλει στην περαιτέρω εξέλιξη του μαθήματος! Είναι αυτονόητο ότι το τυπολόγιο δεν αγγίζει την τελειότητα και γι΄ αυτό το λόγο οποιοσδήποτε εντοπισμός τυπογραφικού σφάλματος και περαιτέρω σχολιασμός είναι πάντοτε ευπρόσδεκτος! Για οποιαδήποτε επικοινωνία, απευθυνθείτε στην διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου, η οποία παρατίθεται παρακάτω.

Εύχομαι καλή επιτυχία σε όλους/όλες!

Με πολλή εκτίμηση,
Αλέξανδρος-Μάριος Αφράτης

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ $E-MAIL$:

`afratisa@ac.upatras.gr`