



UNIVERSITY OF
PATRAS
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

Πολυτεχνική Σχολή - Πανεπιστημιούπολη (Ρίο)
Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής (ΤΜΗΥΠ - CEID)
Τομέας Εφαρμογών & Θεμελιώσεων Επιστήμης Η/Υ
Εργαστήριο Μαθηματικών Θεμελιώσεων Επιστήμης Η/Υ (MFCS - Lab)

Εργαστήριο Γενικών Μαθηματικών II

Εργαστηριακή Άσκηση 1

*Βασικές Έννοιες Γραμμικής Άλγεβρας
(Με Χρήση $\text{\LaTeX}$ & MATLAB)*

Υπεύθυνος Μαθήματος "Γενικά Μαθηματικά II":
Αθανάσιος Ανδρικόπουλος

Υπεύθυνος Εργαστηρίου
(Συγγραφή, Επιμέλεια & Επίβλεψη Εργαστηριακών Ασκήσεων):
Αλέξανδρος - Μάριος Αφράτης

Πάτρα, Χειμερινό Εξάμηνο, 2025–26

Δομή Εργαστηρίου:

Η δομή του εργαστηρίου διαμορφώνεται ως εξής:

Εντός Ώρας Εργαστηρίου @ Υπολογιστικό Κέντρο (ΥΚ) (2ος Όροφος ΤΜΗΥΠ):

1. Παρουσίαση & Επεξήγηση Άσκησης & Υλικού, Επίλυση Αποριών, Συζήτηση, Καθοδήγηση.
2. Πεντάλεπτο Κουίζ Κατανόησης Άσκησης στο E-Class (4 Ερωτήσεις: 2 σε LaTeX, 2 σε MATLAB).

Εκτός Υπολογιστικού Κέντρου:

1. Εκπόνηση Εργασίας, Συγγραφή Αναφοράς και Εμπρόθεσμη Υποβολή στο E-Class.

Πρόγραμμα Εργαστηρίου (Παρασκευή 09:00 - 10:00 π.μ. @ ΥΚ):

Μήνας	Ημερομηνία & Δραστηριότητα
Οκτώβριος	10/10 - Παρουσίαση 1ης Άσκησης
	24/10 - Παρουσίαση 2ης Άσκησης
Νοέμβριος	07/11 - Παρουσίαση 3ης Άσκησης
	21/11 - Παρουσίαση 4ης Άσκησης
Δεκέμβριος	05/12 - Αναπλήρωση Μίας Άσκησης

Κανονισμός Εργαστηρίου:

1. Το εργαστήριο είναι **ατομικό** και η βαθμολογία σας σε αυτό είναι **επιπρόσθετη**. Οι ασκήσεις βαθμολογούνται βάσει της ορθότητας και της σαφήνειας των λύσεων που αναπτύσσονται από τον κάθε φοιτητή. Στο E-Class υποβάλετε τις εργασίες σας μέσω του TurnItIn. Το TurnItIn αποτελεί ένα λογισμικό ανίχνευσης, αντιγραφής και λογοκλοπής ακαδημαϊκών εργασιών. Μέσω αυτού, οι εκπαιδευτές του μαθήματος έχουν τη δυνατότητα να ανιχνεύσουν το κατά πόσο οι εργασίες που θα ανεβάσουν οι εκπαιδευόμενοι του μαθήματος είναι προϊόν δικής τους δουλειάς ή προϊόν αντιγραφής. Οι εκπαιδευόμενοι εκπονούν τις εργασίες τους και ο βαθμολογητής που χρησιμοποιεί το TurnItIn συγκρίνει το περιεχόμενο με άλλες πηγές μέσα από βάσεις δεδομένων που διαθέτει. Με αυτόν τον τρόπο, δίνεται η δυνατότητα στον εκπαιδευτή να εξετάζει εάν η εργασία που έχει υποβληθεί είναι προϊόν λογοκλοπής. Η **λογοκλοπή/αντιγραφή συνεπάγεται με το μηδενισμό της εκάστοτε εργασίας**. Για να αθροιστεί ο βαθμός εργαστηρίου στον τελικό σας βαθμό, **προϋποτίθεται προδιβάσιμος βαθμός γραπτής τελικής εξέτασης**, δηλαδή βαθμός **μεγαλύτερος ή ίσος του 5**. Ο Βαθμός σας στο Εργαστήριο θα διαμορφωθεί ως εξής:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (0.9 \cdot BA_E + 0.1 \cdot BK_E)}{n}, \quad i = 1, \dots, n$$

όπου "BA_E" ο Βαθμός Ασκήσεων Εργαστηρίου και "BK_E" ο Βαθμός Κουίζ Εργαστηρίου. Δεν τίθεται θέμα προδιβάσιμου βαθμού σε κάθε άσκηση, καθώς το εργαστήριο είναι προαιρετικό.

2. Οι εργαστηριακές ασκήσεις είναι ισόβαθμες, και συνολικά είναι **τέσσερις (4)**. Θα πρέπει να εκπονήσετε **όλες τις ασκήσεις**. Κάθε εργαστηριακή άσκηση (συνοδευόμενη από το αντίστοιχο κουίζ κατανόησης) θα προσδίδει έως και μισή μονάδα (0.5/10) στον τελικό βαθμό σας στο μάθημα, άρα στο σύνολο έως και δύο μονάδες (2/10) στον τελικό σας βαθμό στο μάθημα.
3. Στο εργαστήριο **δεν προβλέπεται "αρνητική βαθμολόγηση"** σε κανένα σκέλος του.
4. Υποχρεούστε να παραβρεθείτε εντός του ΥΚ, να υπογράψετε το παρουσιολόγιο (υποβολή κουίζ) **συνολικά τέσσερις (4) φορές**, να παρακολουθείτε το υλικό, να εκπονείτε το κουίζ κατανόησης της αντίστοιχης άσκησης εντός του ΥΚ και να υποβάλλετε εμπρόθεσμα την αναφορά της εκάστοτε εργαστηριακής άσκησης, καθώς το TurnItIn ως λογισμικό έχει δομηθεί έτσι ώστε **να μην δέχεται εκπρόθεσμες υποβολές**. Δηλαδή, **αποτυχία στο εργαστήριο** σημαίνει **είτε ανεπίτρεπτος αριθμός απουσιών, είτε ανεπίτρεπτος αριθμός υποβολών εκτός του προβλεπόμενου χρόνου και μεθόδων αναπλήρωσης**. Είναι αποκλειστική σας ευθύνη η συμπλήρωση των απαιτούμενων ασκήσεων! Για τυχόν απουσία σας (έως και **μόνον μια (1) απουσία**) δίνεται η δυνατότητα να καλυφθεί **αποκλειστικά την εβδομάδα αναπλήρωσης** και συγκεκριμένα **την Παρασκευή 05/12/25, 09:00 - 10:00 π.μ. @ ΥΚ**. Για όσους/όσες **δεν καταφέρουν για οποιονδήποτε λόγο να υποβάλλουν εντός του προβλεπόμενου χρόνου**, δίνεται η δυνατότητα υποβολής μίας (1) εκ των εργαστηριακών ασκήσεων **κατά την περίοδο αναπλήρωσης** χωρίς να κρίνεται υποχρεωτική η παρουσία τους στο ΥΚ, **εάν και μόνον εάν έχουν εκπονήσει το κουίζ της αντίστοιχης άσκησης**. Σε αντίθετη περίπτωση, **υποχρεούνται να παραβρεθούν στο ΥΚ την εβδομάδα αναπλήρωσης για να εκπονήσουν το κουίζ και την μία (1) άσκηση που οφείλουν**. Άρα, κατά μέγιστο - συνολικά, **δίνεται η δυνατότητα αναπλήρωσης μίας (1) άσκησης χωρίς υποχρεωτική παρουσία στο ΥΚ την εβδομάδα αναπλήρωσης (εάν και μόνον εάν υπάρχει αντίστοιχος βαθμός κουίζ) και η δυνατότητα αναπλήρωσης μίας (1) άλλης άσκησης και του αντίστοιχου κουίζ της με υποχρεωτική παρουσία στο ΥΚ την εβδομάδα αναπλήρωσης**. Συνεπώς, **εάν συμπληρώσετε δύο (2) απουσίες ή/και δεν συμπληρώσετε τον προβλεπόμενο αριθμό ασκήσεων (με ή χωρίς μεθόδους αναπλήρωσεων), θα μηδενιστείτε άμεσα στο εργαστήριο**.
5. Αν ολοκληρώσετε το εργαστήριο, ο βαθμός εργαστηρίου σας θα διατηρηθεί έως ότου περάσετε το μάθημα. **Αν δεν ολοκληρώσετε το εργαστήριο όπως περιγράφεται παραπάνω, μηδενίζετε άμεσα στο εργαστήριο και λαμβάνετε μόνο τον βαθμό τελικής γραπτής εξέτασης** (δίχως γενικότερα ο μηδενισμός σας στο εργαστήριο να δρα αρνητικά ως προς τον βαθμό τελικής γραπτής εξέτασης).
6. Οι αναφορές των εργαστηριακών ασκήσεων θα συντάσσονται **υποχρεωτικά σε LaTeX και θα περιέχουν τα ζητούμενα σε LaTeX και τα ζητούμενα σε MATLAB**. Το παραδοτέο σας θα είναι **υποχρεωτικά σε μορφή PDF από LaTeX**, το οποίο θα αναρτάται **εμπρόθεσμα** στην εκάστοτε εργασία του E-Class μέσω TurnItIn, με ονομασία ΕΠΩΝΥΜΟ_ΑΜ.pdf
7. Στο εργαστήριο **απαγορεύονται το κάπνισμα, ο καφές, τα αναψυκτικά, το νερό, το φαγητό και λοιπά**. Επιτρέπονται τα βιβλία, σημειώσεις και γενικώς οποιοδήποτε εκπαιδευτικό υλικό κρίνετε ότι σας είναι απαραίτητο. Με την απομάκρυνσή σας, να τακτοποιείτε τη θέση σας στο ΥΚ και να την αφήνετε όπως την βρήκατε!
8. Οι ανακοινώσεις του Εργαστηρίου θα αναρτώνται στην ιστοσελίδα του E-Class (Ανακοινώσεις):

<https://eclass.upatras.gr/courses/CEID1405/>

όπως βαθμολογίες και λοιπά.

Εκ του Εργαστηρίου.

Παραμετροποιήσεις Για Επίλυση Εργαστηριακών Ασκήσεων:

Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση μίας μεταβλητής, η οποία βασίζεται στον 7-ψήφιο Αριθμό Μητρώου (AM) σας στο Πανεπιστήμιο Πατρών.

$$f(\text{AM}) = AB$$

Ο 7-ψήφιος AM σας (με ψηφία (ψ) τα οποία δεικτοδοτούνται ως $i = 1, \dots, n$ όπου $n = 7$ ($n = \text{LSB}$)) αποτελεί την ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης και ο 2-ψήφιος AB την εξαρτημένη μεταβλητή.
Συνάρτηση Μίας Μεταβλητής:

$$f(\text{AM}) = (10) + \left(\left(-85 \cdot (\text{AM} \bmod 1000) + 76 \cdot \sum_{i=1}^n \psi_i - 38 \cdot \psi_n + 48 \cdot \psi_{n-1} + 20 \cdot (\text{AM} \bmod 997) \right) \bmod 90 \right)$$

όπου $\begin{cases} \sum_{i=1}^n \psi_i = \text{Άθροισμα Όλων Των Ψηφίων Του AM}, \\ \psi_n = \text{Τελευταίο Ψηφίο Του AM}, \\ \psi_{n-1} = \text{Προτελευταίο Ψηφίο Του AM}. \end{cases}$

Υπολογίστε **ΥΠΟΧΡΕΩΤΙΚΑ ΣΕ ΚΩΔΙΚΑ MATLAB (ΟΧΙ ΣΤΟ ΧΑΡΤΙ)** τον 2-ψήφιο AB και διαχωρίστε τα 2 ψηφία του ($A = \dots$ & $B = \dots$), τα οποία κρίνονται απολύτως αναγκαία για την επίλυση των παρακάτω ασκήσεων. Κατόπιν υπολογισμού τους να διατηρηθούν εύκαιρα, καθώς **αποτελούν τις παραμετροποιήσεις του AM σας**. Οι παραμετροποιήσεις σας θα παραμείνουν απαράλλακτες κατά την διάρκεια του εξαμήνου και θα χρησιμοποιηθούν σε όλες τις υπόλοιπες εργαστηριακές ασκήσεις.

Υποχρεωτικές Οδηγίες Συγγραφής Αναφορών:

Σε κάθε αναφορά σας υποχρεούστε:

1. Να γράφετε σε $\text{\LaTeX}$ (σε όποιο Engine θεωρείτε ευκολότερο (π.χ PdfLaTeX, XeLaTeX, LuaLaTeX)).
2. Να συμπεριλάβετε στην πρώτη σελίδα - εξώφυλλο πάντοτε τα εξής:
 - i. Λογότυπο του Πανεπιστημίου Πατρών.
 - ii. Τίτλο Εργαστηριακής Άσκησης, Αναγνωριστικά Στοιχεία Μαθήματος & Εργαστηρίου.
 - iii. Ημερομηνία Υποβολής Εργαστηριακής Άσκησης.
 - iv. Στοιχεία Ταυτοπροσωπίας (Επώνυμο, Όνομα, AM).
 - v. Αποτελέσματα Παραμετροποίησης AM ($A = \dots$ & $B = \dots$).
3. Να δημιουργήσετε πίνακα περιεχομένων (υπερσυνδεδεμένο), (βλ. Οδηγ. 4 & 5) για κάθε άσκηση.
4. Να παρουσιάσετε τις παραμετροποιημένες εκφωνήσεις σας και να λύσετε αναλυτικά κάθε ερώτημα με επαρκή θεωρητική αιτιολόγηση και τεκμηρίωση, δίχως καμία παράλειψη σε υπολογισμούς, όπως θα λύνετε ασκήσεις σε τελική γραπτή εξέταση μαθήματος (με τη μόνη διαφορά ότι η λύση θα υλοποιηθεί σε $\text{\LaTeX}$).
5. Να επιλύσετε τα αντίστοιχα ερωτήματα σε κώδικα MATLAB, να παρουσιάσετε τον κώδικα εντός της αναφοράς (όχι σε μορφή εικόνας) και να παραθέσετε αντίστοιχα στιγμιότυπα οθόνης (screenshots) από τα Αποτελέσματα του MATLAB Command Window και τα Γραφήματα (Plots), εάν υπάρχουν. Τέλος, να σχολιάσετε εάν διαφέρει -και αν ναι, που και κατά πόσο διαφέρει- η θεωρητική επίλυσή σας, όπως αναλύθηκε παραπάνω, σε σχέση με την επίλυσή σας σε κώδικα MATLAB.

Προτεινόμενες Πηγές Περαιτέρω Μελέτης:

Γραμμική Άλγεβρα:

- Γραμμική Άλγεβρα - Μια Εισαγωγή, Σημειώσεις (Σε Εξέλιξη – V7.2), Ευάγγελος Στεφανόπουλος, Κεφάλαια 1 - 10

LaTeX:

- [Learn LaTeX in 30 minutes, Overleaf](#)

MATLAB:

- [MATLAB Onramp Course, MathWorks](#)

Πηγές Για Εγκατάσταση Λογισμικών TeXstudio & MATLAB:

TeXstudio:

- [Οδηγίες Λήψης TeXstudio](#)

MATLAB:

- [Οδηγίες Λήψης MATLAB](#)

Ασκήσεις (Γραμμική Άλγεβρα):

Άσκηση 1 – Διανύσματα και Εσωτερικό Γινόμενο [10/100 Μονάδες]:

Έστω τα διανύσματα

$$v = (A, B, A + B), \quad w = (B, A, B - A).$$

1. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $v \cdot w$.
2. Να βρείτε το μέτρο κάθε διανύσματος.
3. Να υπολογίσετε τη γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων.

Άσκηση 2 – Γραμμικός Συνδυασμός και Επίπεδο [10/100 Μονάδες]:

Έστω τρία σημεία του χώρου:

$$P_1 = (A, 1, B), \quad P_2 = (1, B, A), \quad P_3 = (1, 1, 1).$$

1. Να βρείτε το διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία.
2. Να υπολογίσετε την εξίσωση του επιπέδου.
3. Να εξετάσετε εάν το σημείο $Q = (A, B, 1)$ ανήκει στο επίπεδο.

Άσκηση 3 – Μητρώο και Επίλυση Συστήματος [10/100 Μονάδες]:

Έστω το σύστημα $Mx = b$, όπου

$$M = \begin{bmatrix} A & 1 & 0 \\ 0 & B & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} A \\ B \\ A + B \end{bmatrix}.$$

1. Να υπολογίσετε τη λύση του συστήματος.
2. Να εξετάσετε εάν το σύστημα έχει μοναδική λύση, άπειρες ή καμία.
3. Να συσχετίσετε το αποτέλεσμα με την τάξη του μητρώου M .

Άσκηση 4 – Gauss–Jordan και Αντίστροφο Μητρώο [10/100 Μονάδες]:

Έστω το τετραγωνικό μητρώο

$$M = \begin{bmatrix} A & B & 1 \\ 1 & A & B \\ B & 1 & A \end{bmatrix}.$$

1. Να βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του επαυξημένου μητρώου $[M | I]$.
2. Να εξαγάγετε το αντίστροφο M^{-1} .
3. Να εξετάσετε εάν ισχύει $MM^{-1} = I$.

Άσκηση 5 – Γραμμική Ανεξαρτησία και Υπόχωροι [10/100 Μονάδες]:

Έστω τα διανύσματα

$$v_1 = (1, A, 0)^T, \quad v_2 = (0, 1, B)^T, \quad v_3 = v_1 + Av_2.$$

1. Να εξετάσετε εάν τα τρία διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
2. Να βρείτε την τάξη του μητρώου που τα περιέχει ως στήλες.
3. Να προσδιορίσετε τη βάση και τη διάσταση του υποχώρου που παράγουν.

Άσκηση 6 – Ορθοκανονικοποίηση Gram–Schmidt [10/100 Μονάδες]:

Έστω τα διανύσματα $u = (A, B, 1)^T$, $v = (1, A, B)^T$

1. Να εφαρμόσετε την ορθοκανονικοποίηση Gram–Schmidt και να υπολογίσετε το ορθοκανονικό σύνολο που προκύπτει.
2. Να εξετάσετε εάν τα νέα διανύσματα είναι μεταξύ τους κάθετα.
3. Να εξετάσετε εάν τα νέα διανύσματα έχουν μήκος ίσο με 1.

Άσκηση 7 – Προβολές και Ελάχιστα Τετράγωνα [10/100 Μονάδες]:

Έστω το παρακάτω μητρώο και το διάνυσμα

$$X = \begin{bmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \\ B & 2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} A \\ B \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Να υπολογίσετε τη λύση ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\beta}$.
2. Να βρείτε το μητρώο προβολής P στον χώρο των στηλών του X .
3. Να υπολογίσετε το διάνυσμα προβολής $\hat{y} = Py$.

Άσκηση 8 – Ορίζουσα και Αντίστροφο με Συνδιανύσματα [10/100 Μονάδες]:

Έστω το μητρώο

$$M = \begin{bmatrix} A & B & 1 \\ 1 & A & B \\ B & 1 & A \end{bmatrix}.$$

1. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\det(M)$.
2. Να υπολογίσετε τη συνδιανυσματική μήτρα του M .
3. Να εξετάσετε εάν $M^{-1} = \frac{\text{adj}(M)}{\det(M)}$.

Άσκηση 9 – Ιδιοανάλυση και Διαγωνοποίηση [10/100 Μονάδες]:

Έστω το μητρώο

$$H = \begin{bmatrix} A & B \\ 1 & A \end{bmatrix}.$$

1. Να υπολογίσετε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του H .
2. Να εξετάσετε εάν το H είναι διαγωνοποιήσιμο.
3. Να γράψετε το μητρώο H στη μορφή $H = PDP^{-1}$, εάν αυτή ορίζεται για το συγκεκριμένο μητρώο. Εάν η μορφή αυτή δεν ορίζεται, να δώσετε κατάλληλη αιτιολόγηση περί μη ορισιμότητας της προαναφερόμενης μορφής.

Άσκηση 10 – Υπόχωροι Παραγόμενοι από Μητρώο [10/100 Μονάδες]:

Έστω το μητρώο

$$M = \begin{bmatrix} 1 & A & 0 \\ 0 & 1 & B \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Να βρείτε τη βάση του χώρου των γραμμών και του χώρου των στηλών.
2. Να βρείτε τη βάση του μηδενοχώρου.
3. Να βρείτε τη βάση του αριστερού μηδενοχώρου.

Καλή Επιτυχία!

Τέλος 1ης Εργαστηριακής Άσκησης.

Προθεσμία Υποβολής: Πέμπτη, 23 Οκτωβρίου 2025 - 11:55 μ.μ. (23:55).