ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Η φράση "Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ' αυτό μένειν" του Ηράκλειτου εκφράζει μία νομοτέλεια, ότι δηλαδή η πραγματικότητα έχει ως θεμελιώδες χαρακτηριστικό τη διαρκή κίνηση και τη μεταβολή. Ο Λογισμός είναι ένας κλάδος των μαθηματικών που περιλαμβάνει τη μελέτη της κίνησης και των ρυθμών μεταβολής.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ (a + bi)

Ίππασος

Τοποθεσία	Μεταπόντο, Επαρχία της Ματέρα, Μπαζιλικάτα, Ιταλία
Περιοχή	Μεγάλη Ελλάδα

Ο Ίππασος φέρεται να έχει ανακαλύψει το ότι η τετραγωνική ρίζα του δύο, ή καλύτερα η διαγώνιος ενός τετραγώνου με πλευρά 1, είναι άρρητος αριθμός.

ΠΡΩΤΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

ΕΥΔΟΞΟΣ
407-335 π.χ.

RICHARD DEDEKIND
1831-1916

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

GEORGE CANTOR

ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ CAUCHY

ΤΡΙΤΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ

ΠΡΑΞΕΙΣ

ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΣΩΜΑ

ΑΞΙΩΜΑ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$x = b - \frac{b}{3a}$$

$$x^3 + mx = n, \quad m, n \in \mathbb{R}$$

$$x^3 + mx = n, \quad m, n \in \mathbb{R}$$

$$D = \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{D}}$$

Μακάρι να ήμασταν μαζί…

Θα ήταν φανταστικό!

$$\sqrt{} \qquad -1$$


ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
a ± 0i
ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
0 ± bi
ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ
a ± bi

Taylor series of function f(x) at a is defined as:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \ldots$$

Maclaurin series of function f(x) is a Taylor series of function f(x) at: $a = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \ldots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$

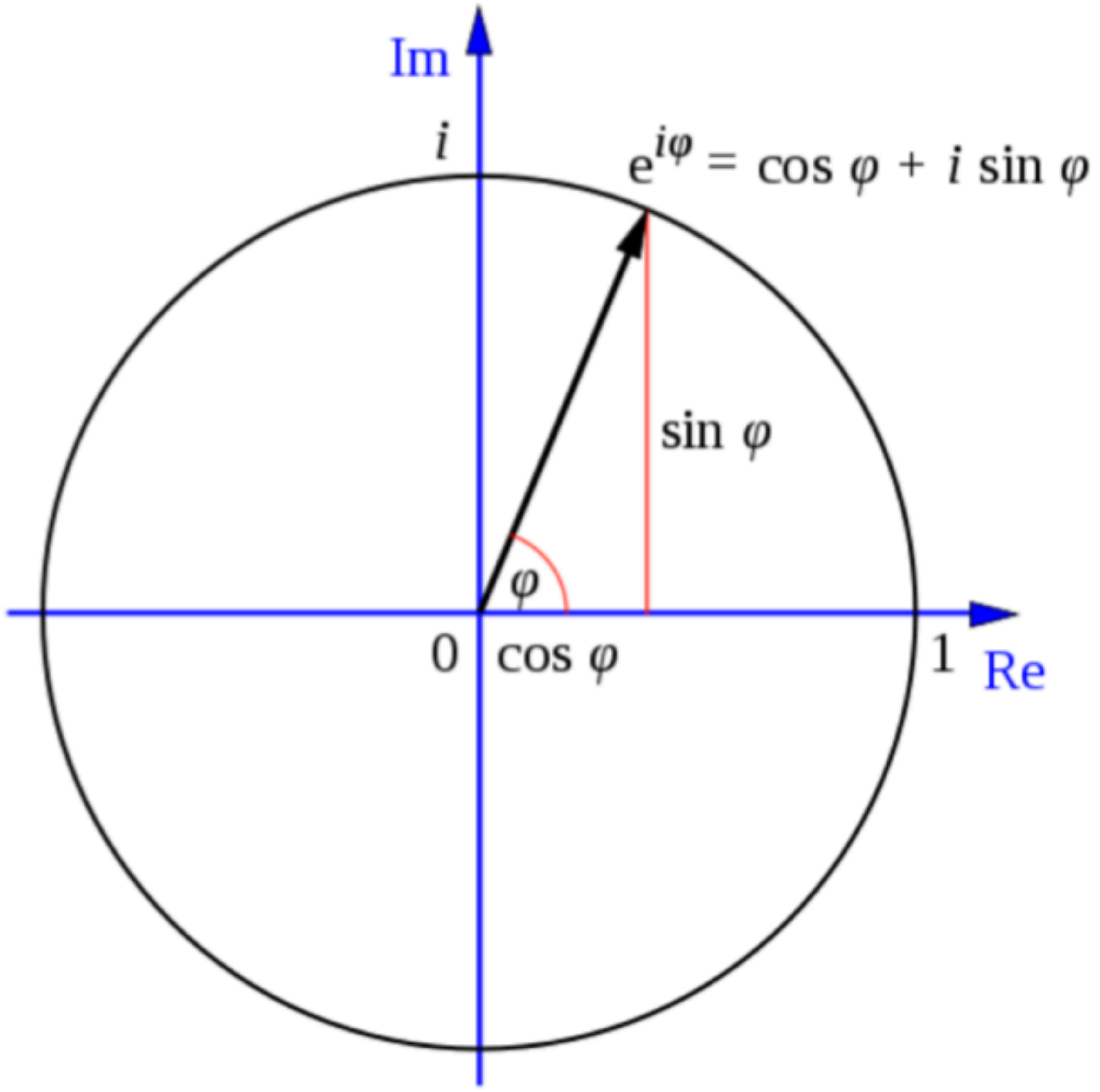
$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + ... \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + ... \\
&= (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...) + i(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...) \\
&= \cos x + i \sin x.
\end{aligned}
$$

Ο τύπος του Euler

Εάν θεωρήσουμε τον μη-μηδενικό μιγαδικό αριθμό $z = a + bi$ ως το σημείο (a, b) στο σύστημα αξόνων xy, γνωρίζουμε ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε αυτό το σημείο από τις πολικές συντεταγμένες (r, φ), όπου r η απόσταση από την αρχή των αξόνων και φ η γωνία σε ακτίνια, από τον άξονα των θετικών x εως την ακτίνα που συνδέει την αρχή των αξόνων με το σημείο αυτό . Συνεπώς,

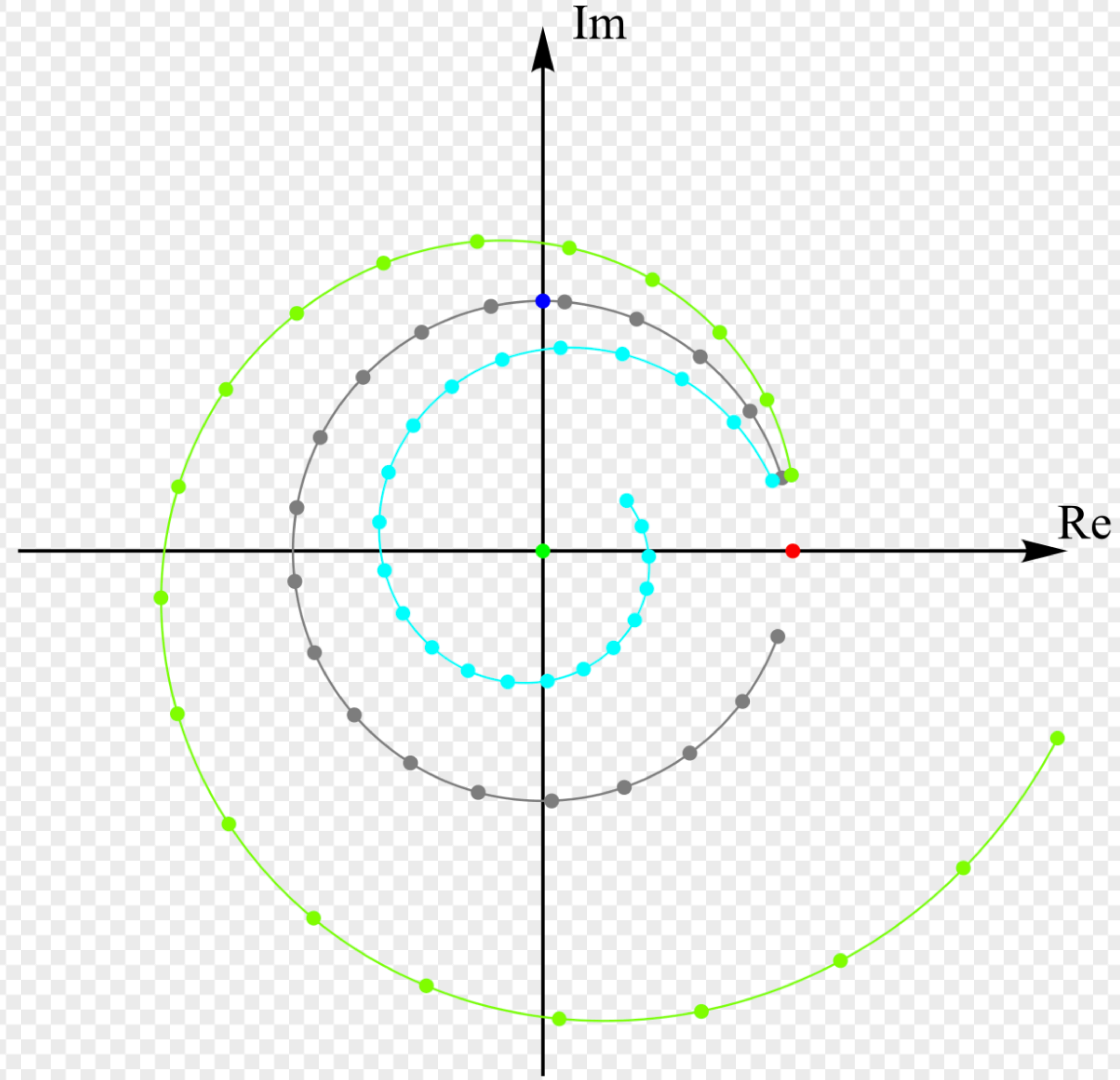


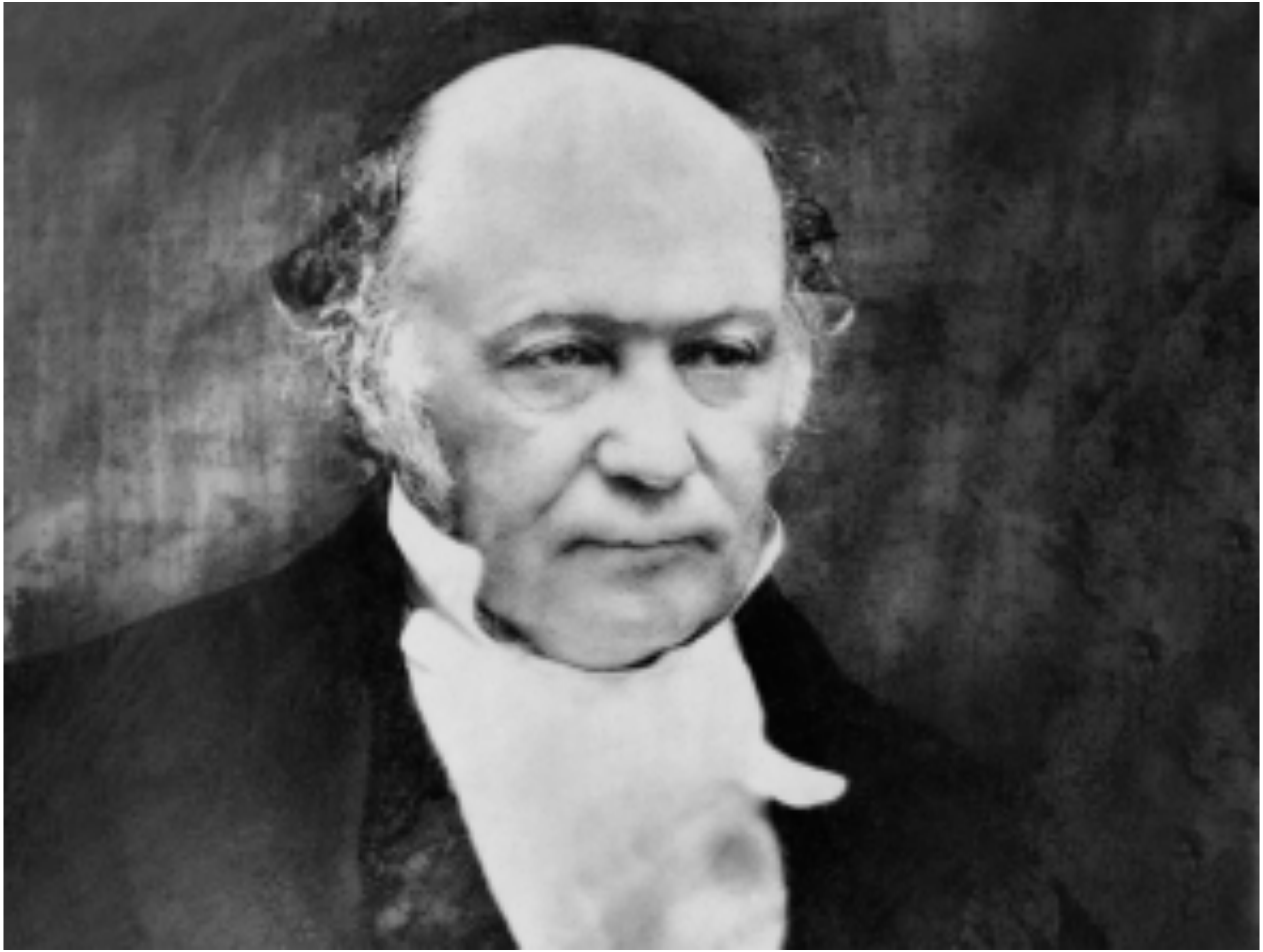
$$\mathbf{e}^{\mathbf{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathbf{i}\ \sin\varphi$$

$$i^i = \frac{1}{\sqrt{e^\pi}}$$

Κύριοι, αυτό που βλέπετε είναι σίγουρα σωστό, αν και απολύτως παράδοξο. Δεν το κατανοούμε και δεν ξέρουμε τι σημαίνει. Ωστόσο, αφού το αποδείξαμε, έχουμε τη βεβαιότητα ότι είναι αληθές.

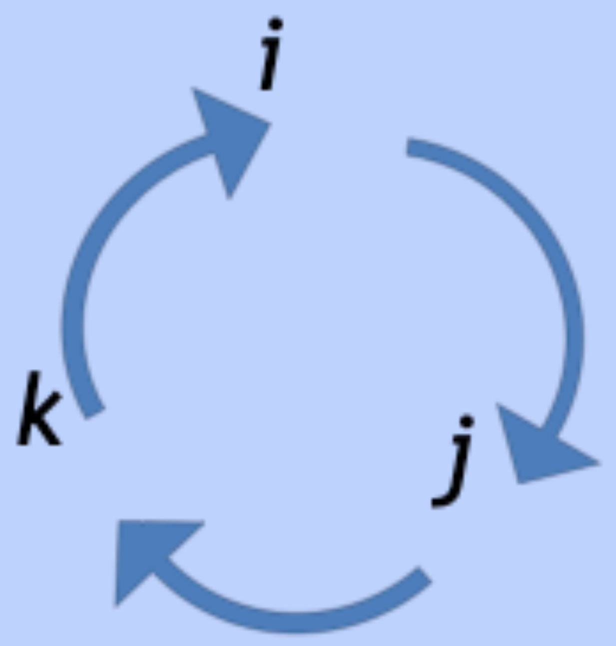
Benjamin Peirce


Im
Re



Τετραδόνια (quaternions)

$$q = w + xi + yj + zk$$

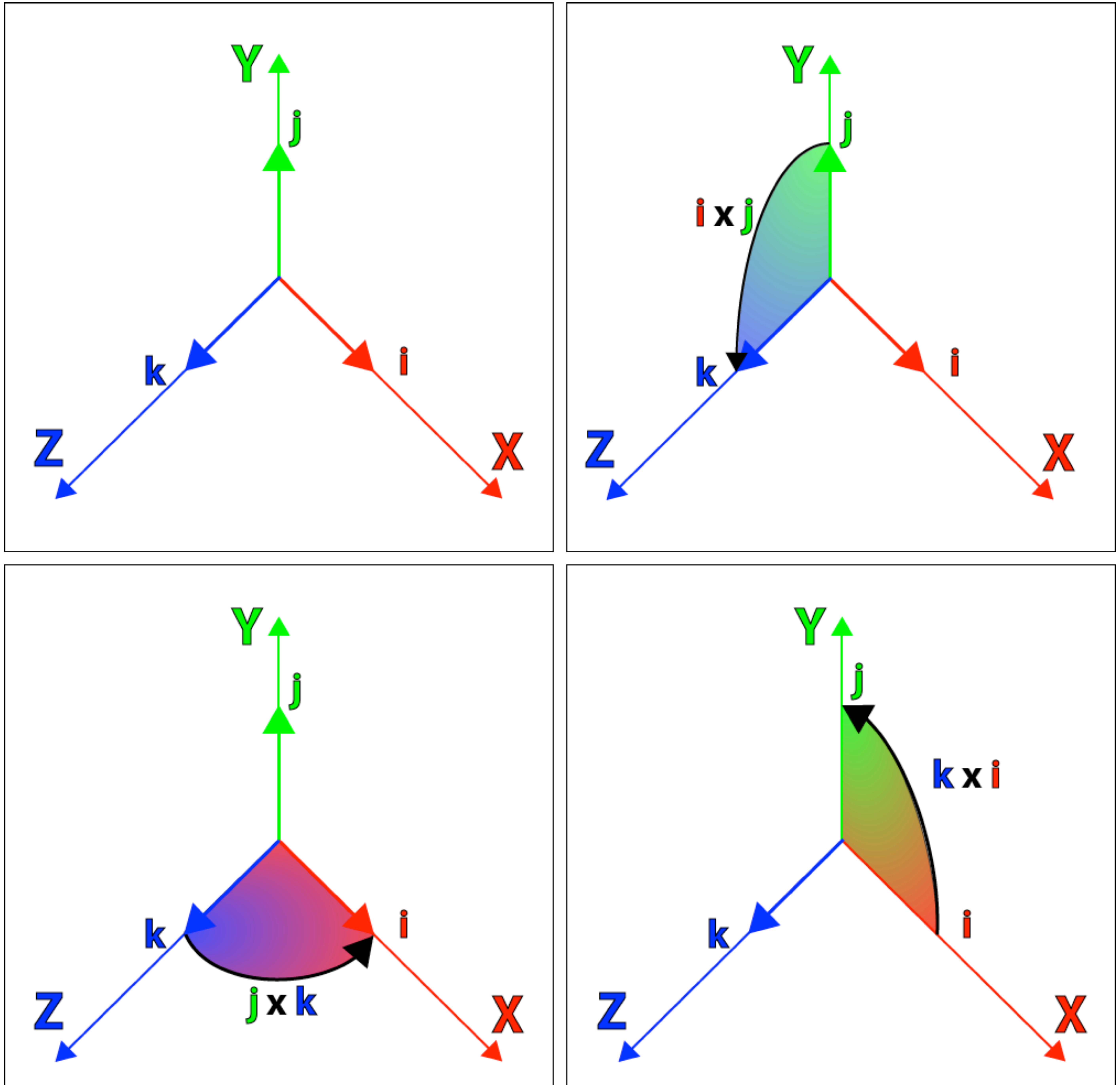


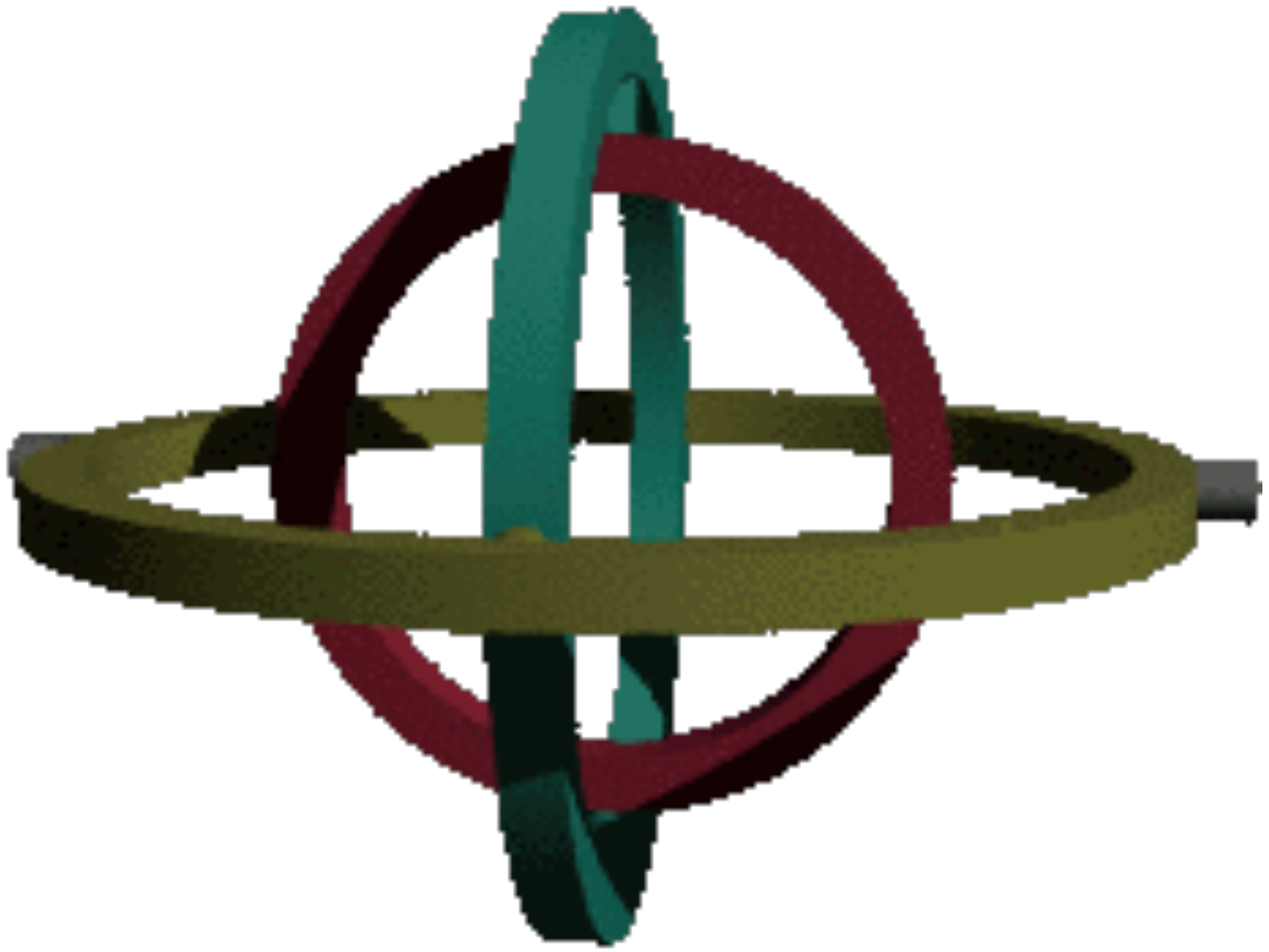

Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge

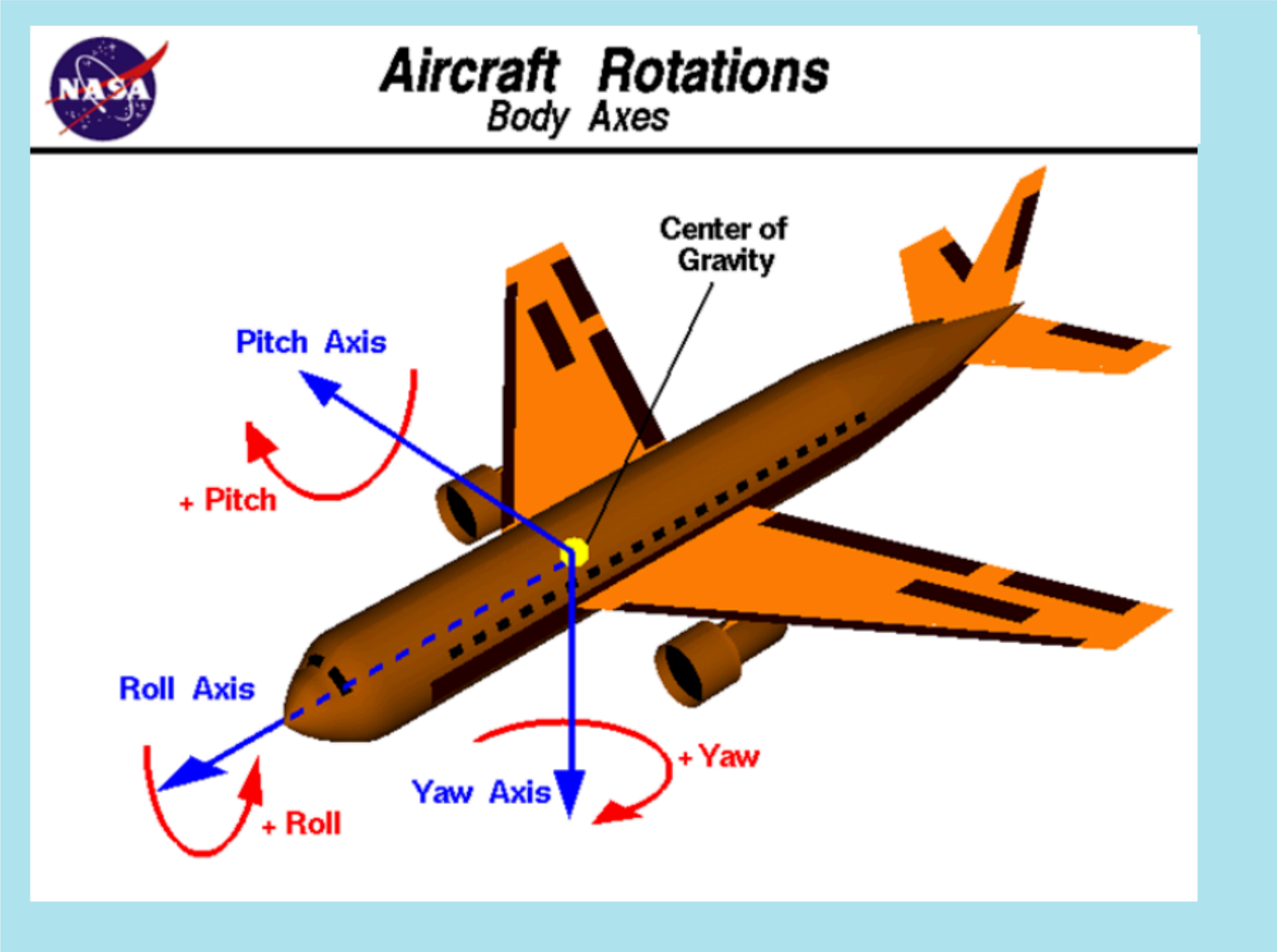

$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1$
2019 Hamilton Walk

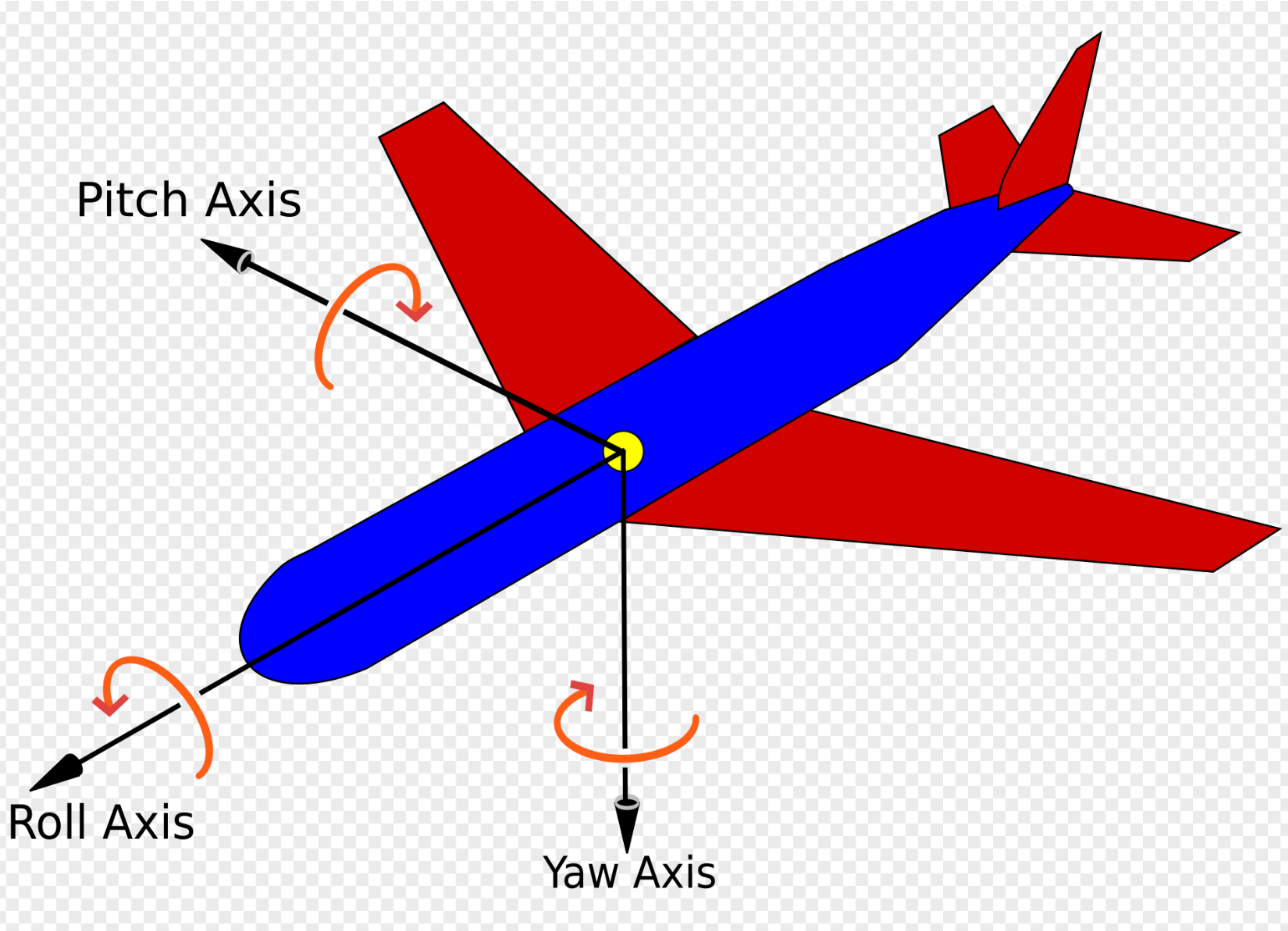

I'M ARRESTING YOU FOR DOING GRAFFITI.
BUT OFFICER, I'M A GENIUS, HONEST!
X² = C - Y
F √Y+1

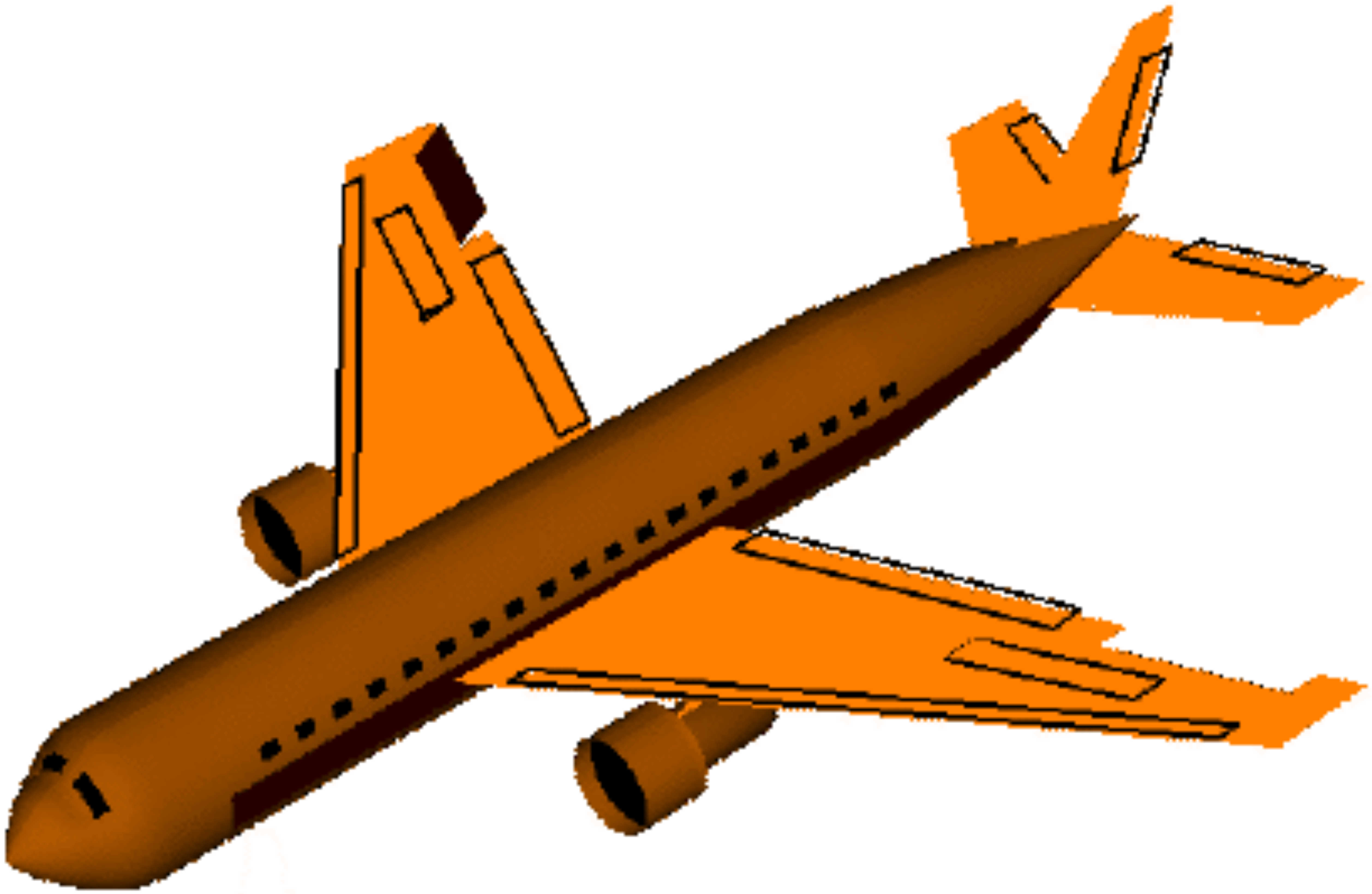
Αυτή η ιδιότητα τα καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμα για την περιγραφή περιστροφών στο τρισδιάστατο χώρο, και χρησιμοποιούνται ευρέως στη μηχανική, τα γραφικά υπολογιστών και τη ρομποτική.

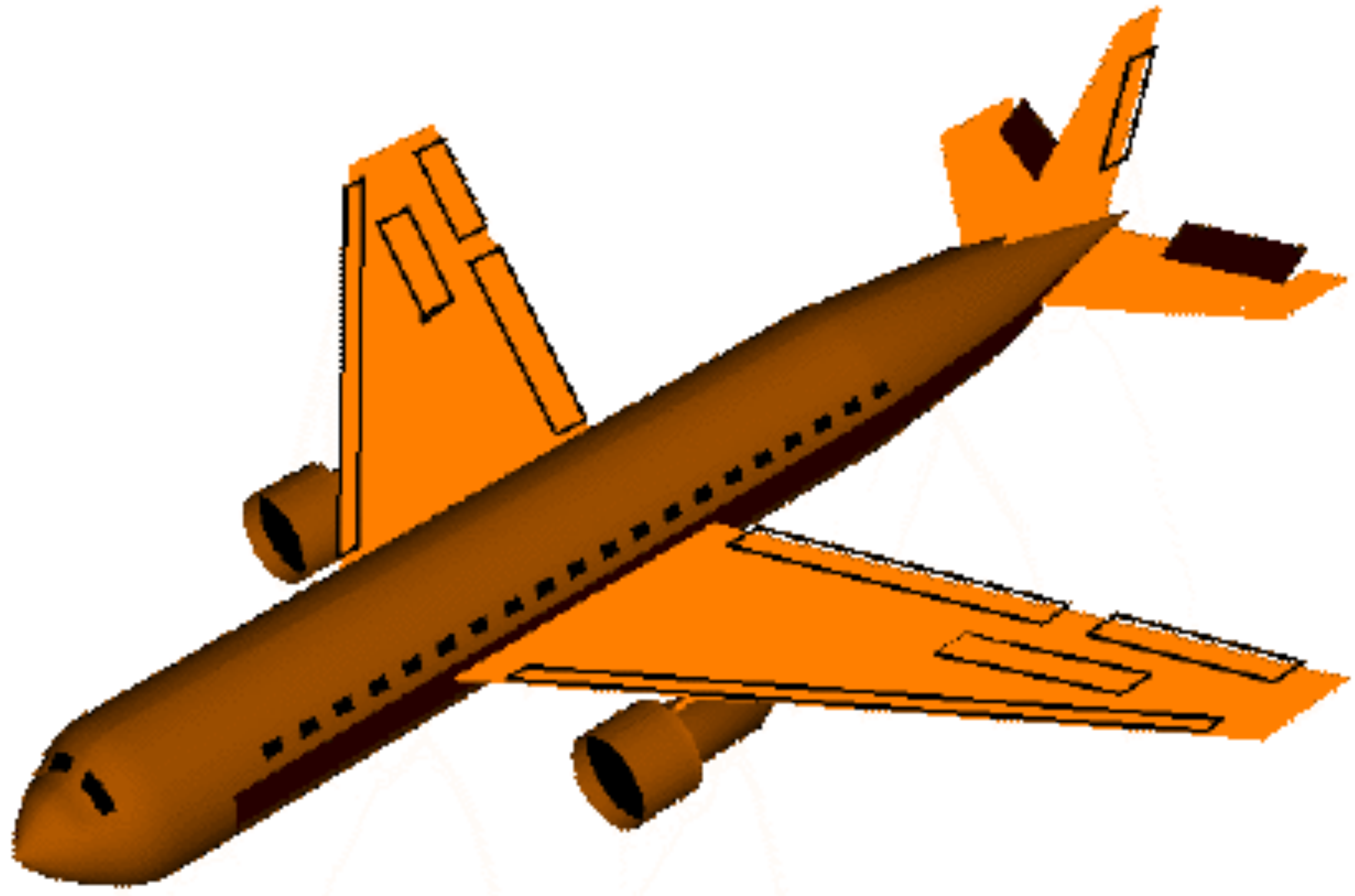

Y
j
k
i
Z
X
i x j
j x k
k x i

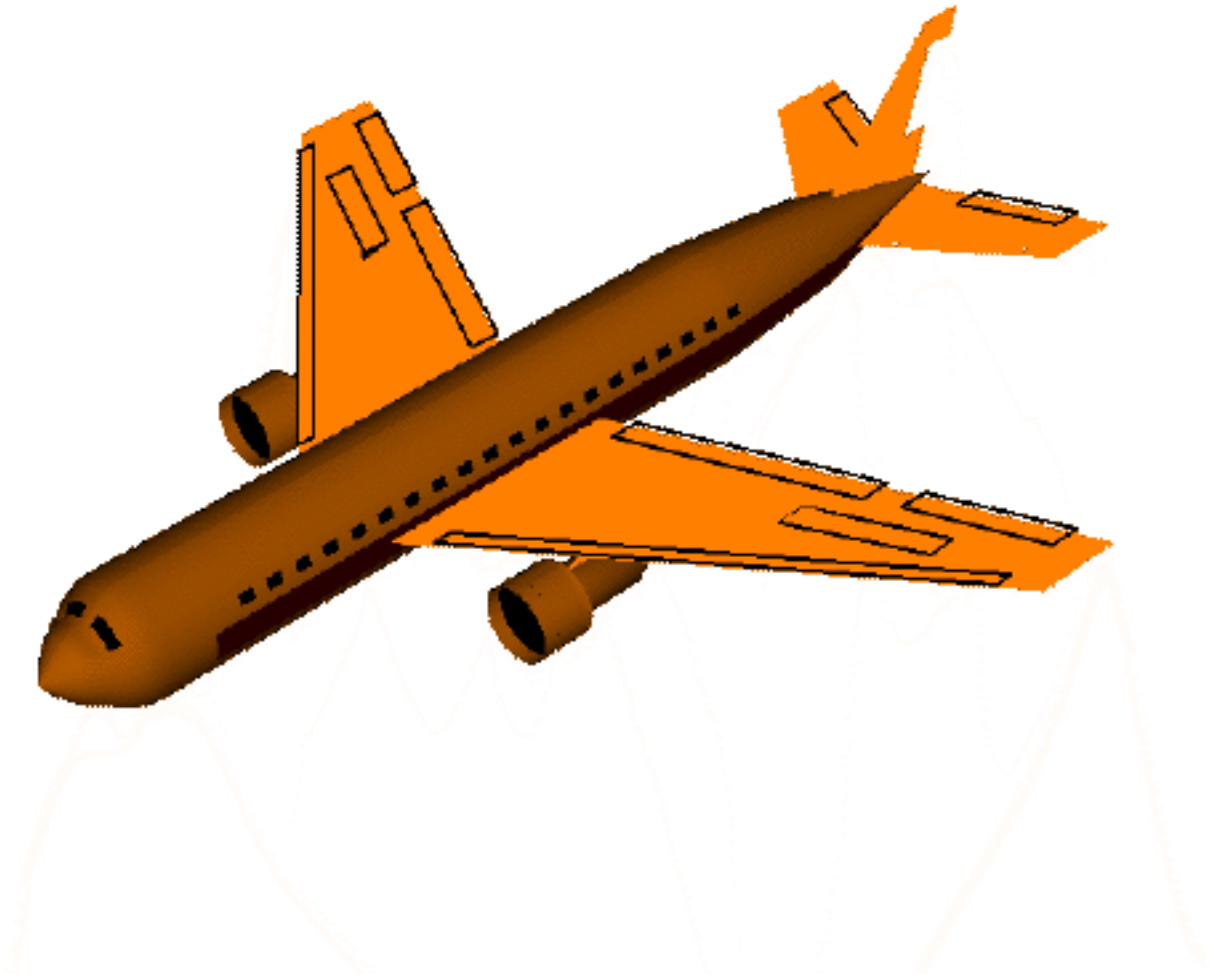


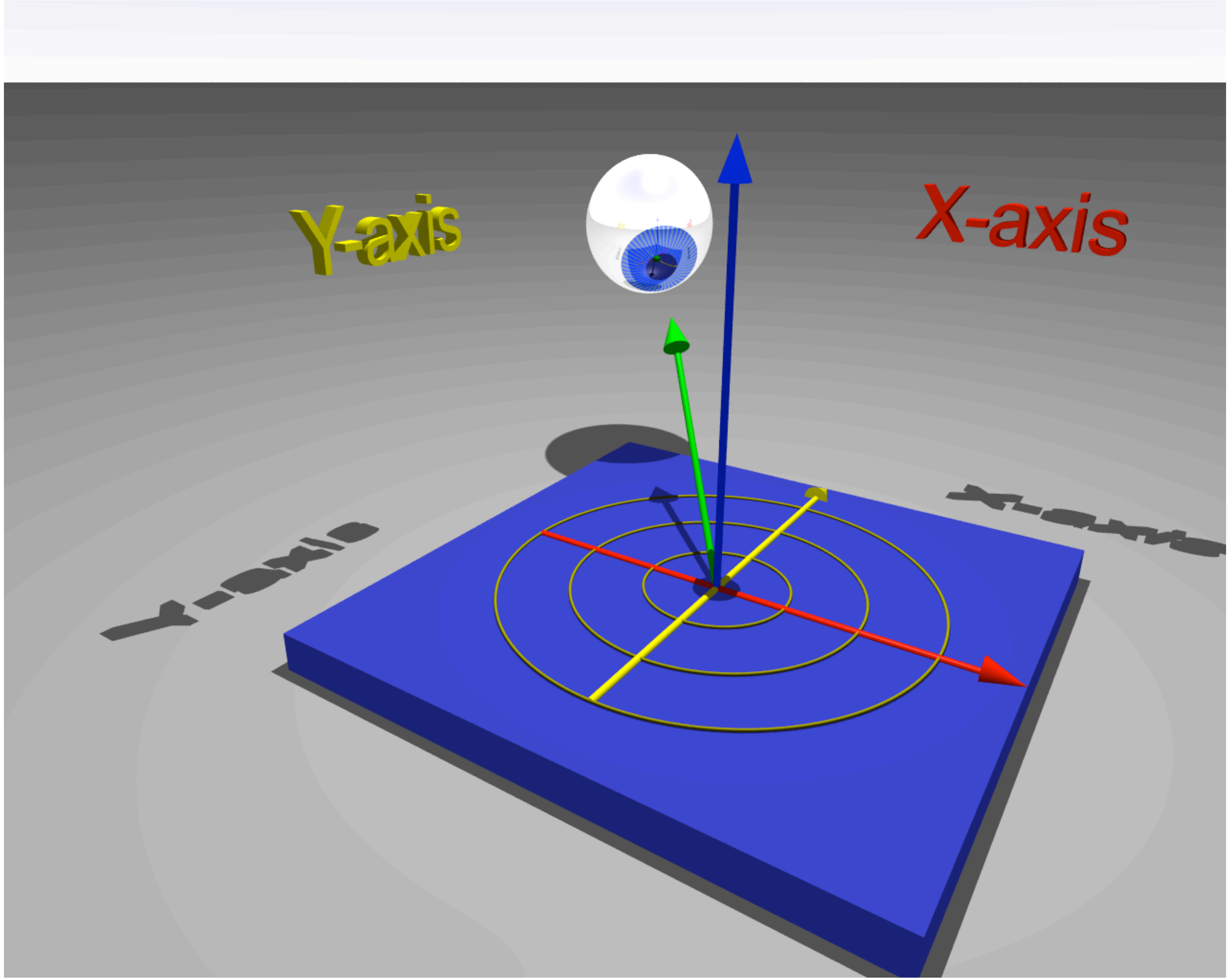

Aircraft Rotations
Body Axes
Center of Gravity
Pitch Axis
+ Pitch
Roll Axis
+ Roll
Yaw Axis
+ Yaw


Pitch Axis
Roll Axis
Yaw Axis









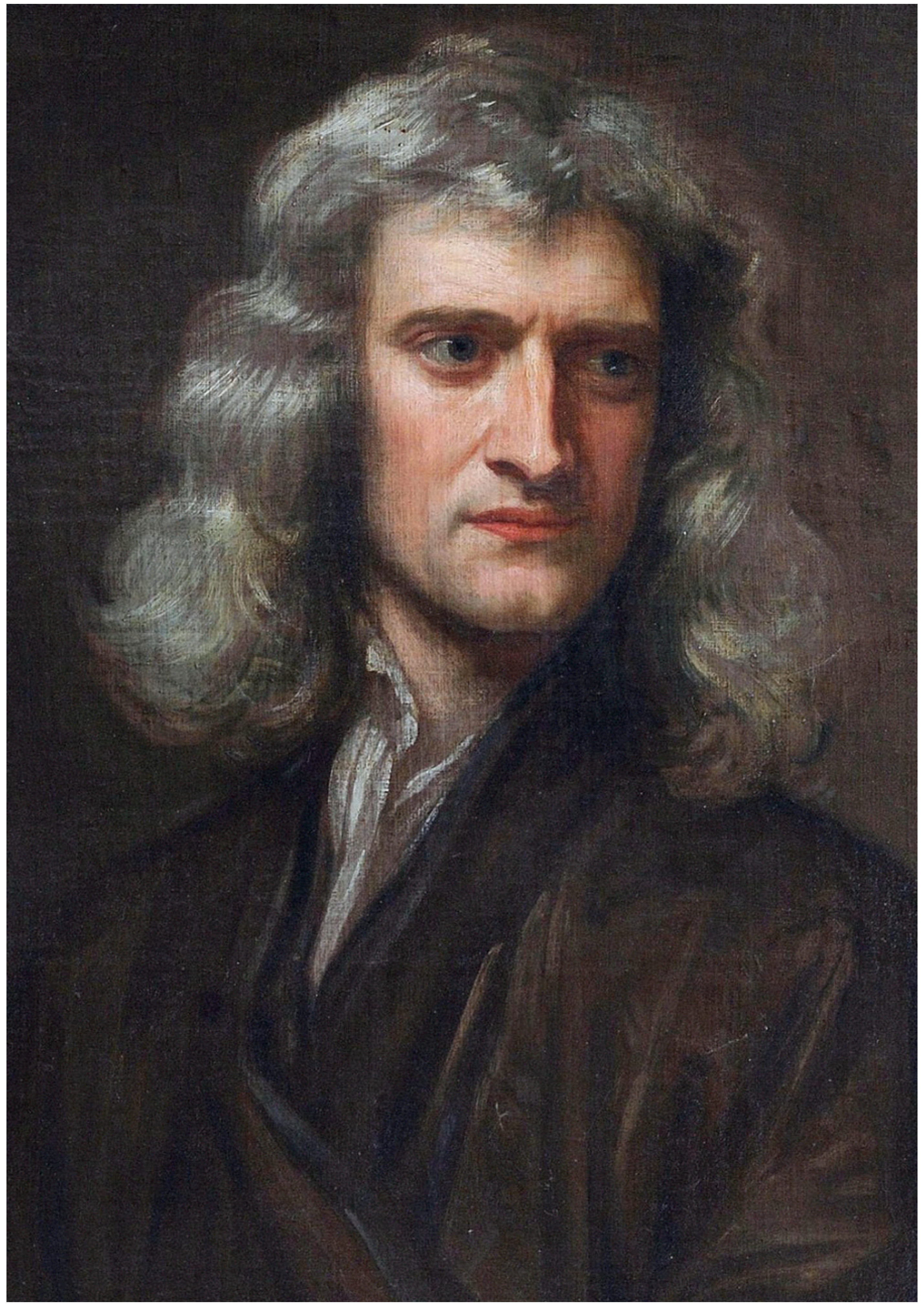
Y-axis
X-axis

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΕΙΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

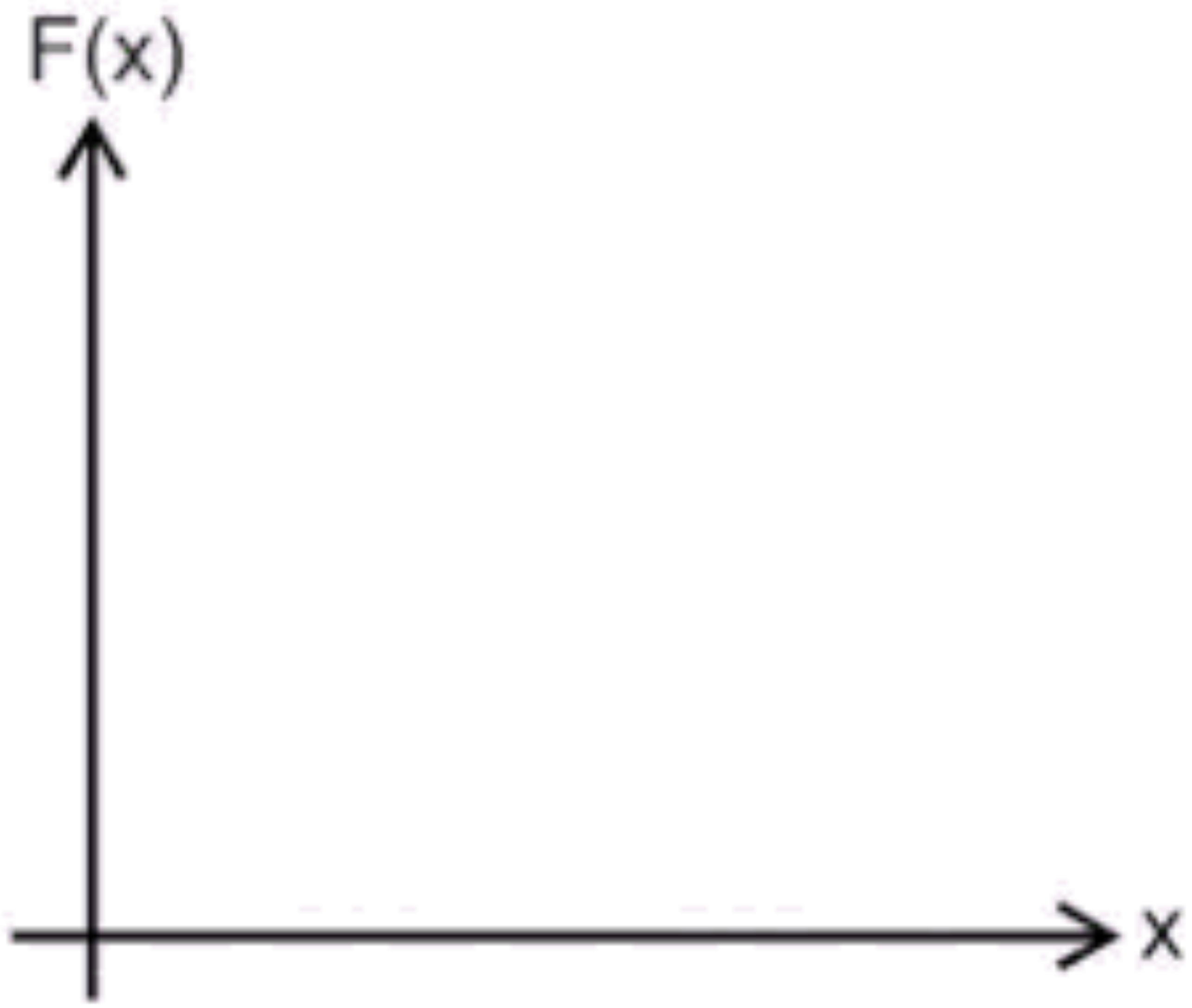
ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ-ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

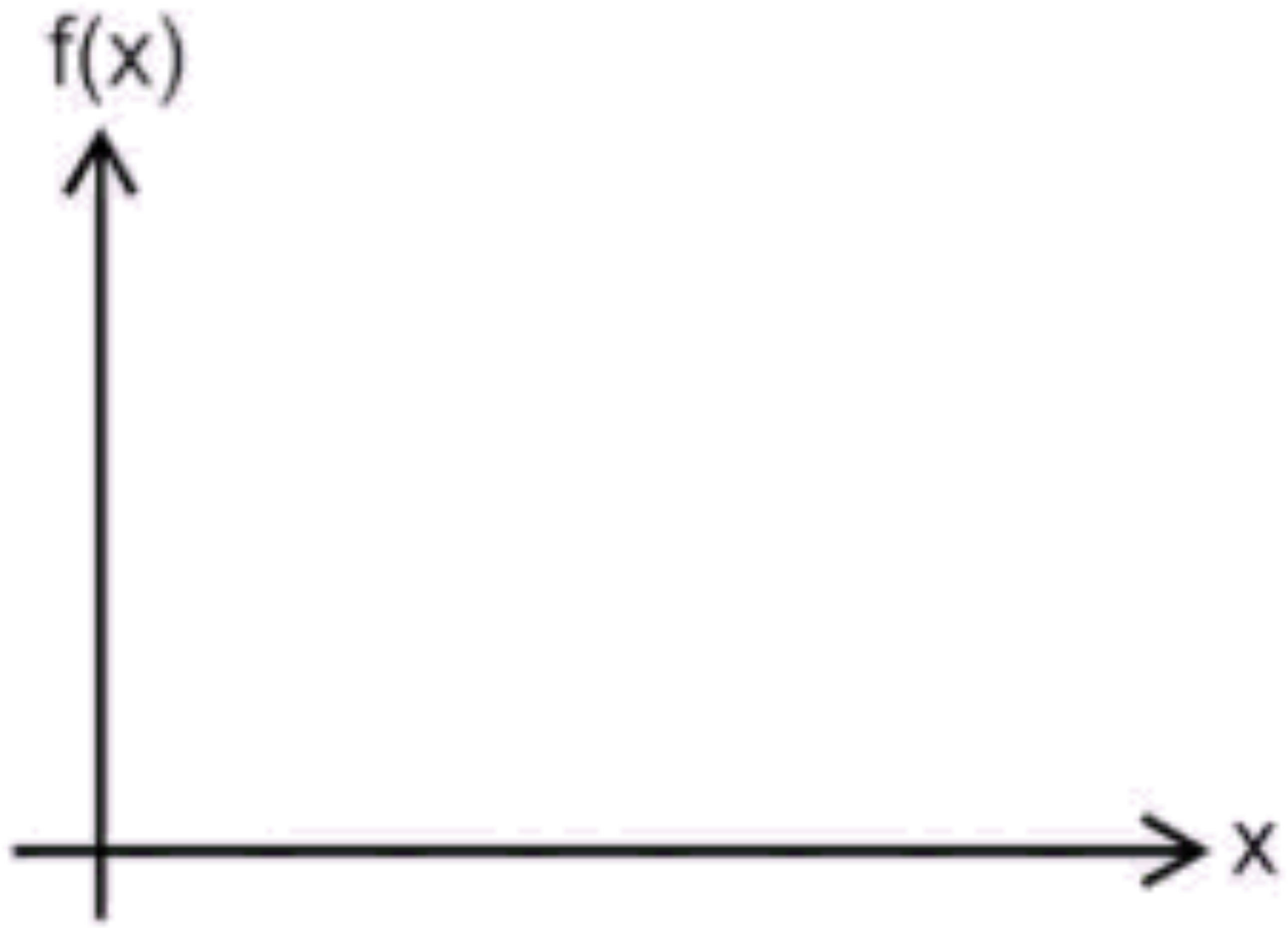
Ισαάκ Νεύτων



Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς

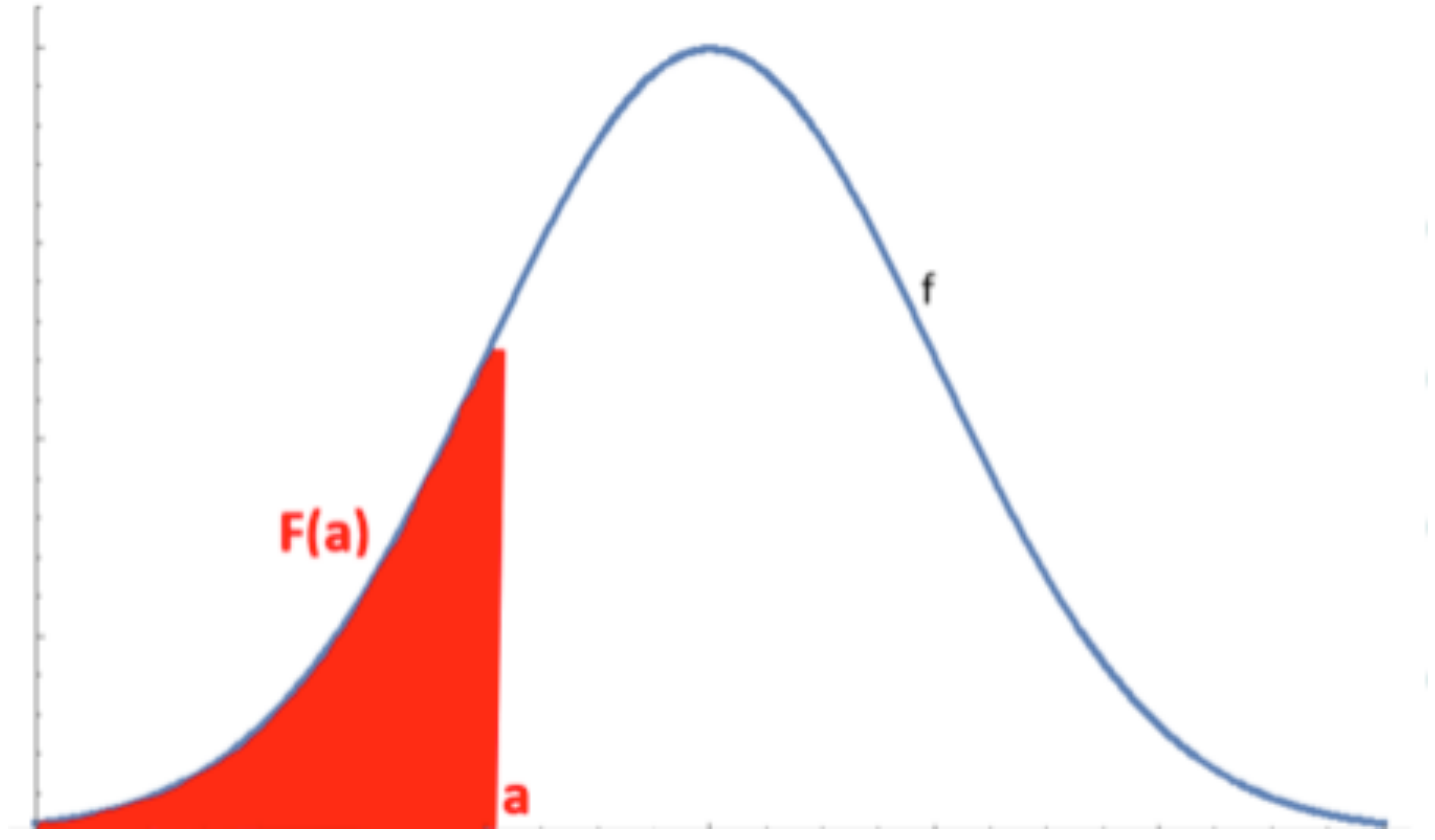

$F(x+h) - F(x) = f(x).h + E$
Excess
y=f(x)
$Area = F(x)$
x
x+h


F(x)
x


f(x)
x

Henri Léon Lebesgue

Τα αθροίσματα Lebesgue χρησιμοποιούνται για να ορίσουν το ολοκλήρωμα Lebesgue μιας συνάρτησης χωρίζοντας τις τιμές y αντί για τις τιμές x όπως γίνεται με τα αθροίσματα Riemann.



f
F(a)
a

Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών

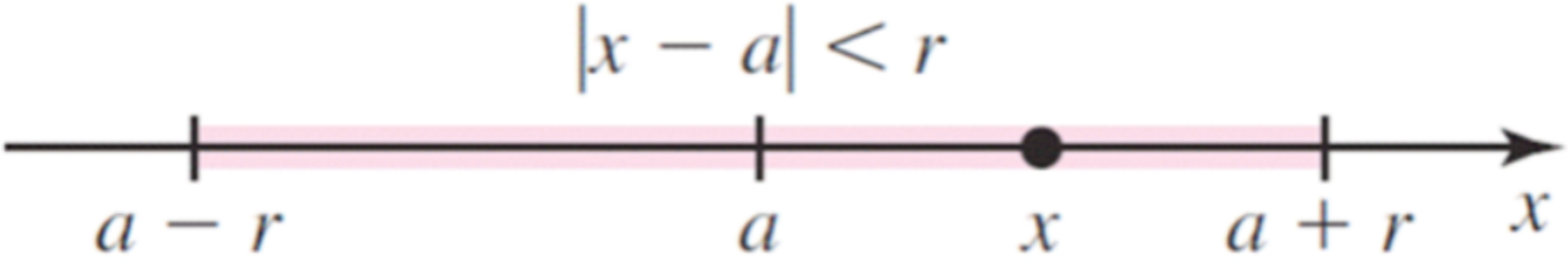
$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

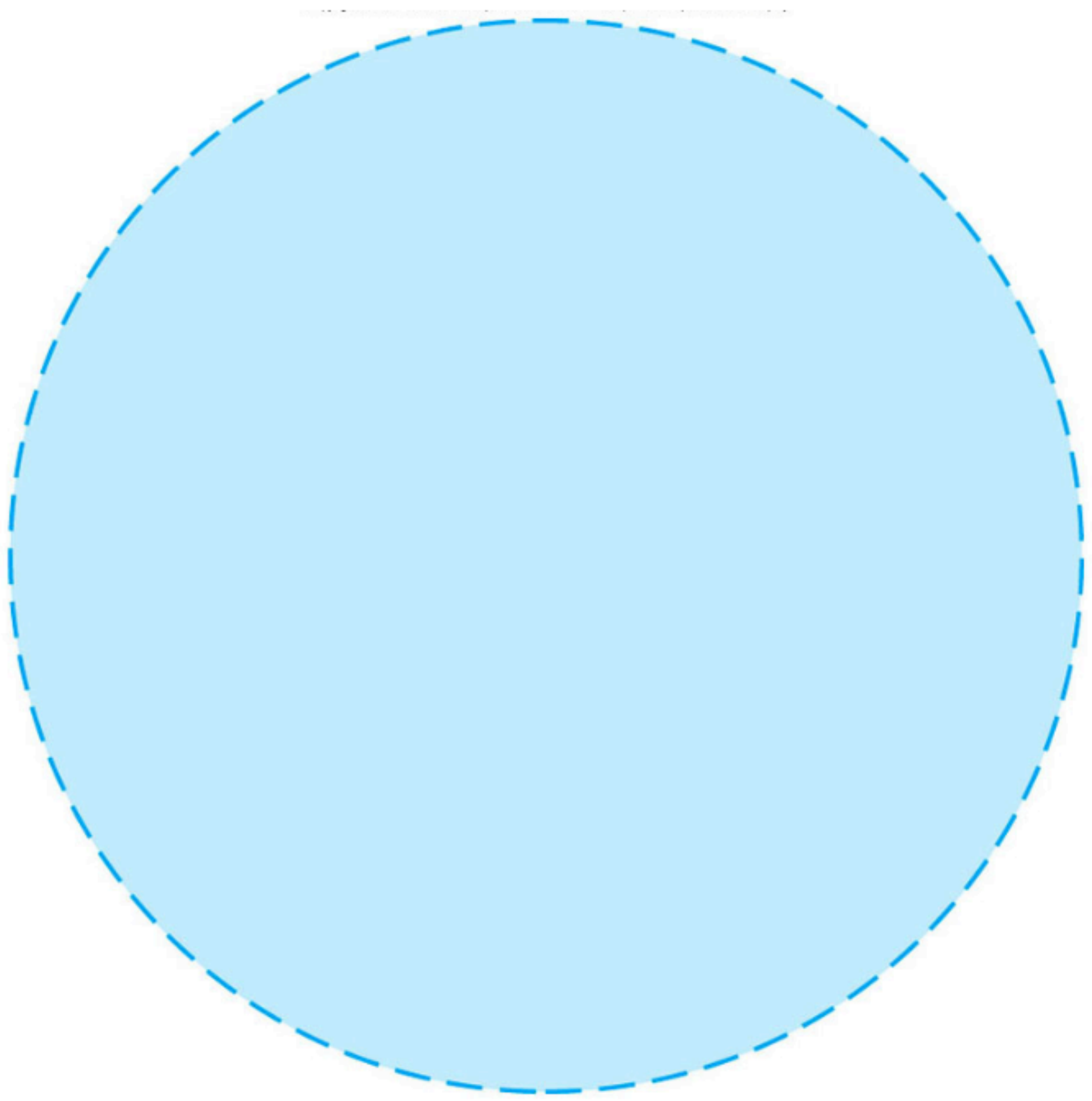
$$Z = f(x, y)$$

ΜΕΤΡΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ
ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

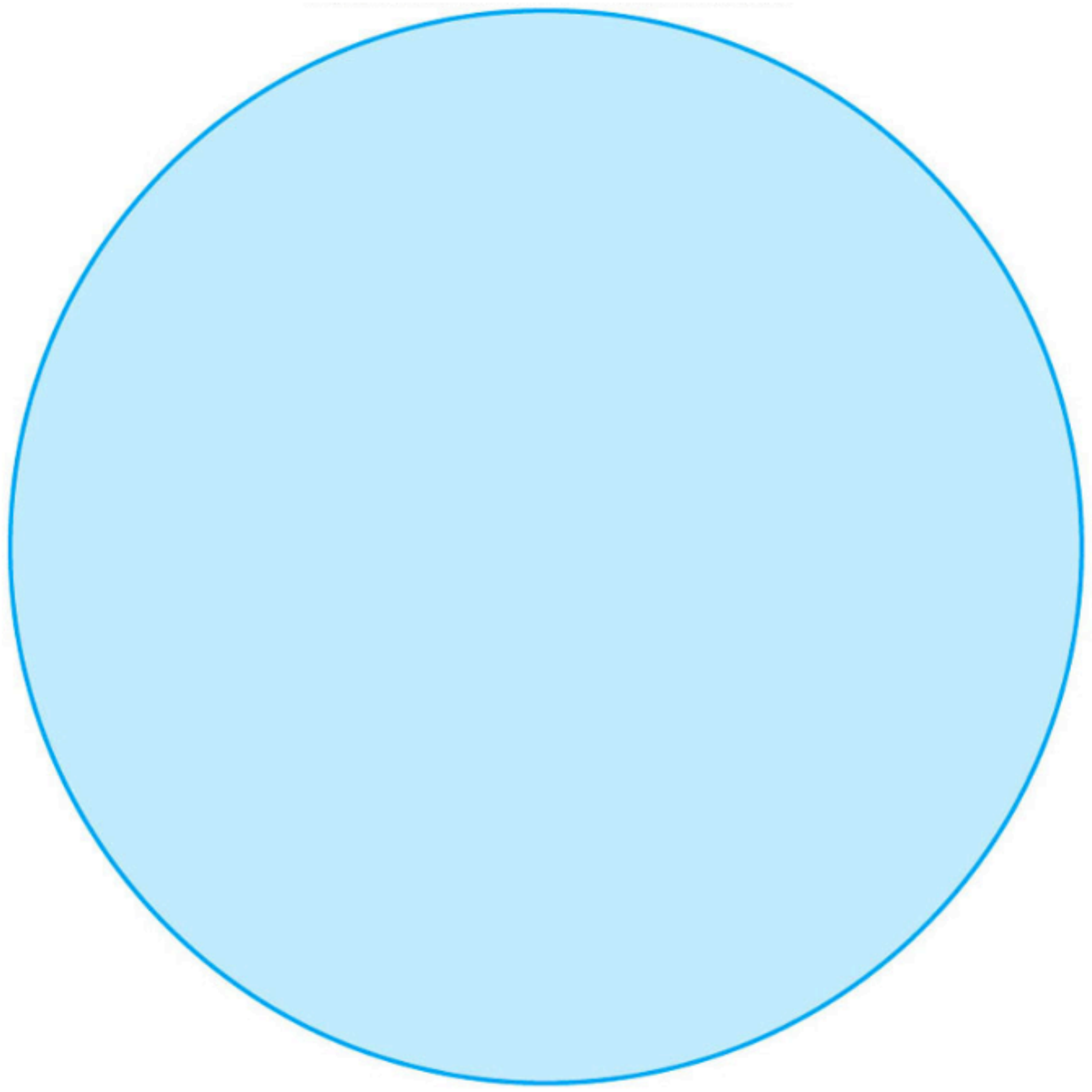


|x − a| < r
a − r
a
x
a + r
x

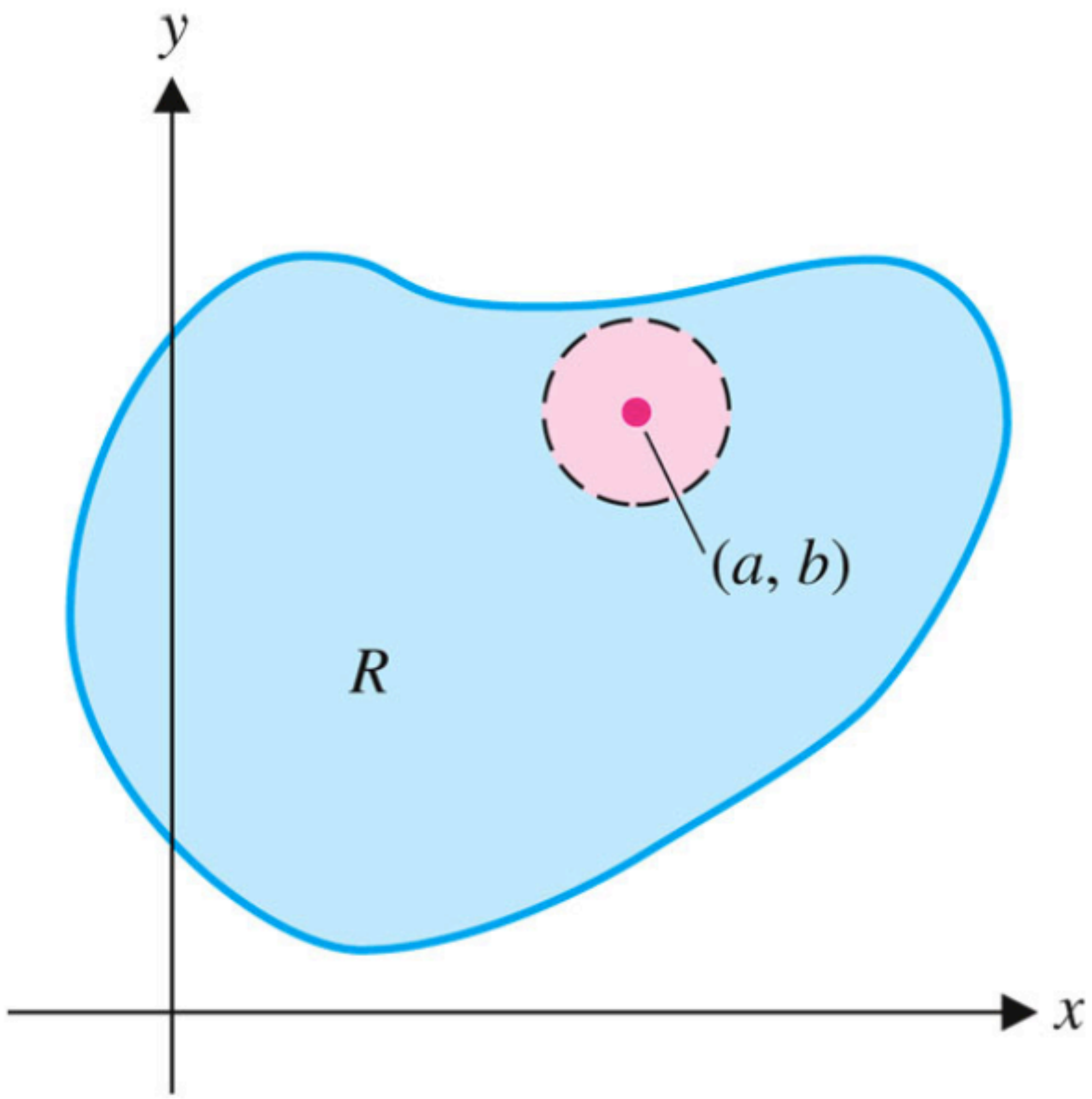
ΑΝΟΙΚΤΟΣ ΔΙΣΚΟΣ



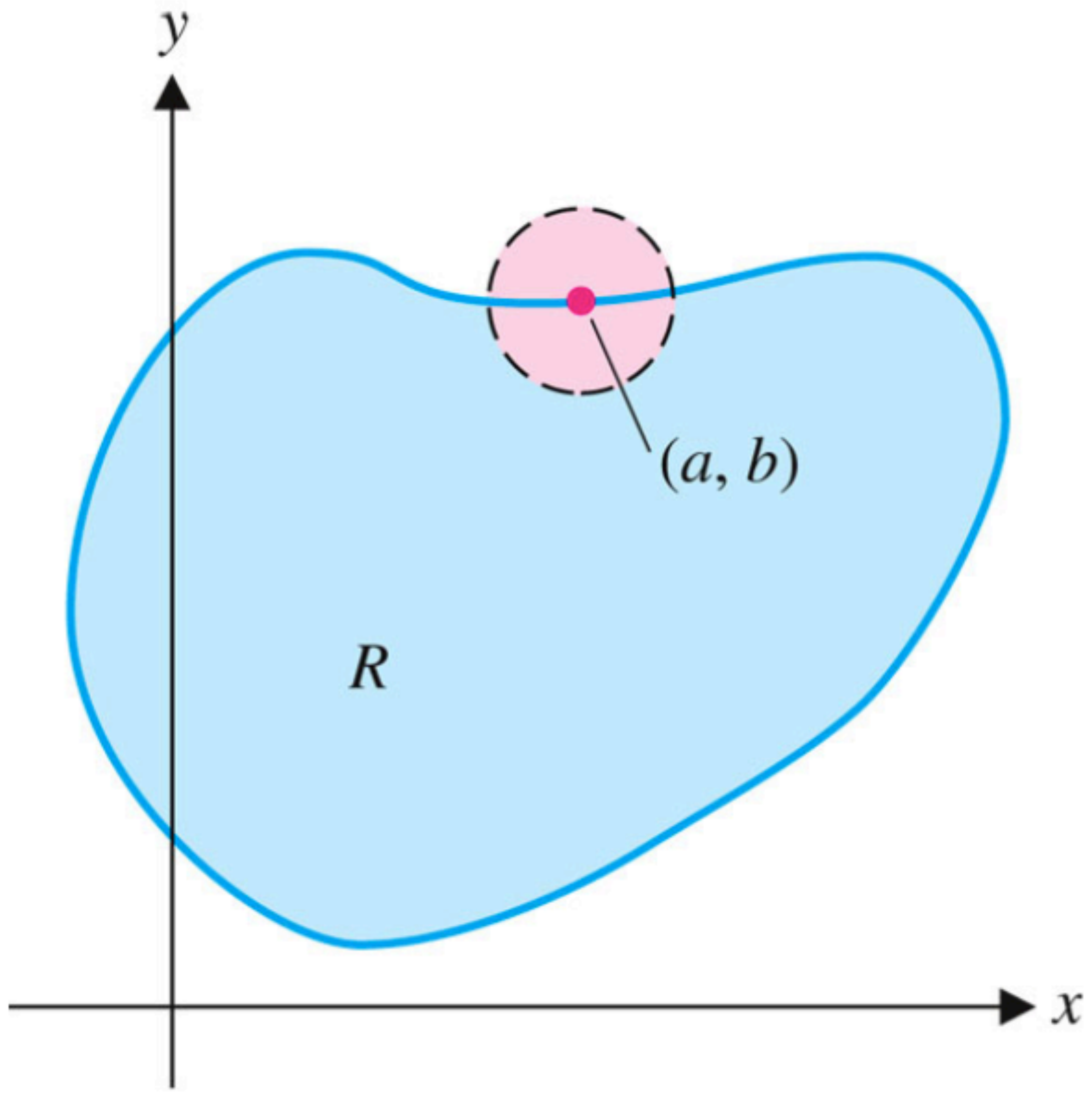
ΚΛΕΙΣΤΟΣ ΔΙΣΚΟΣ



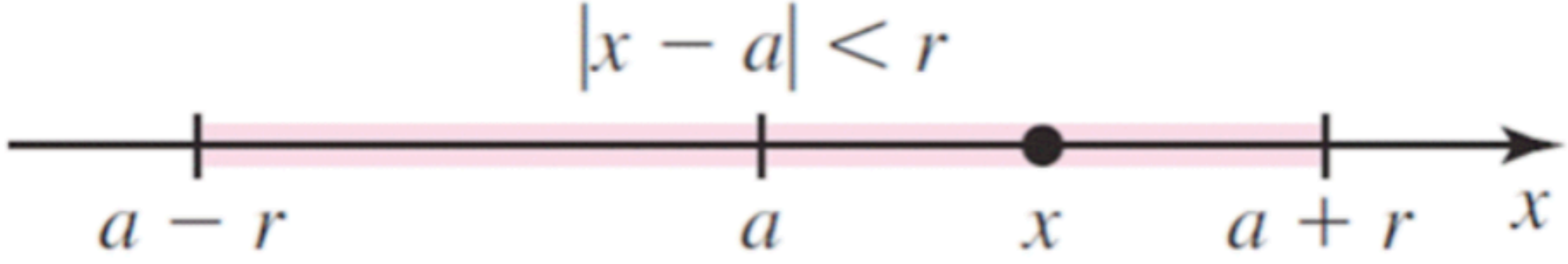
ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ

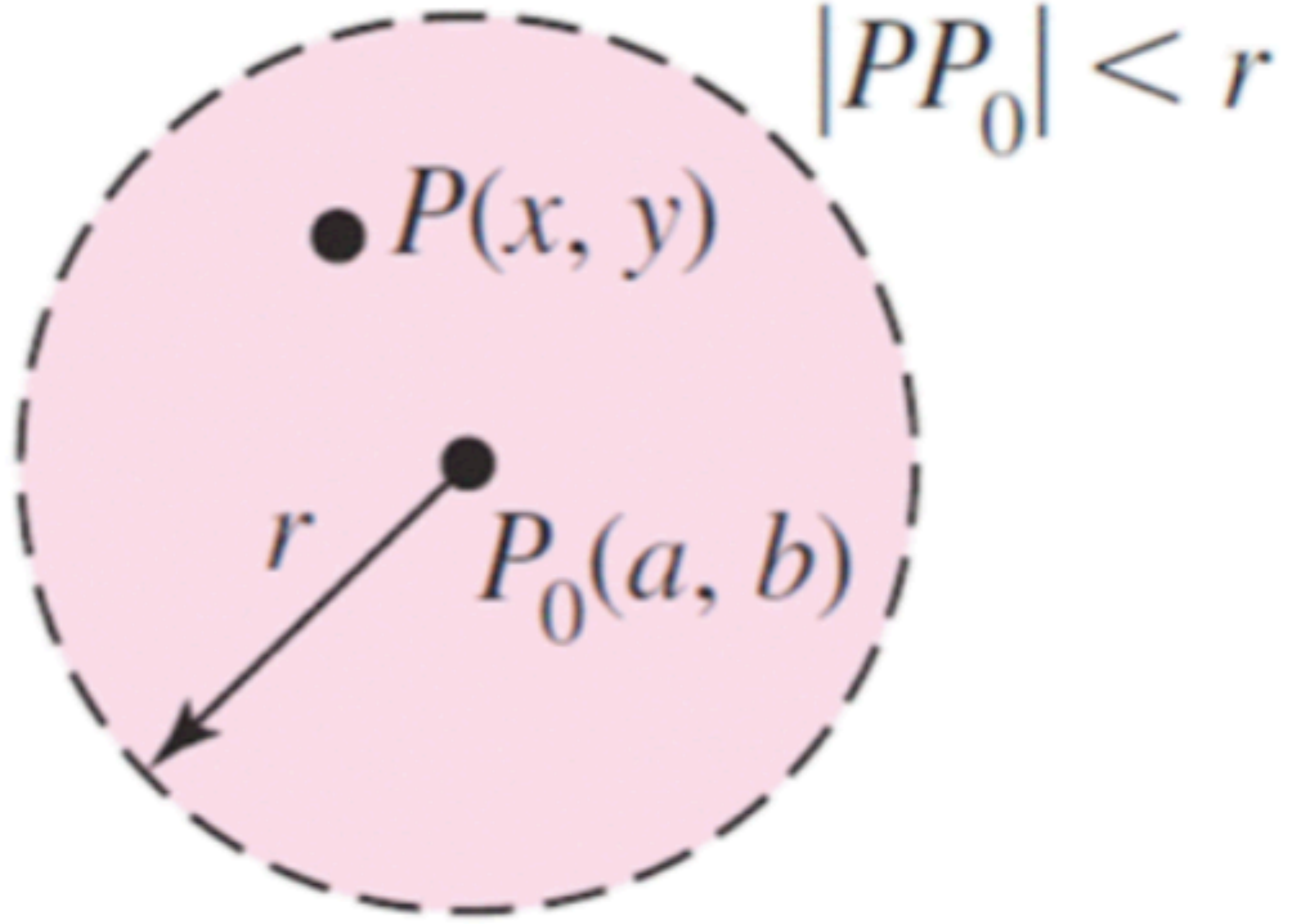


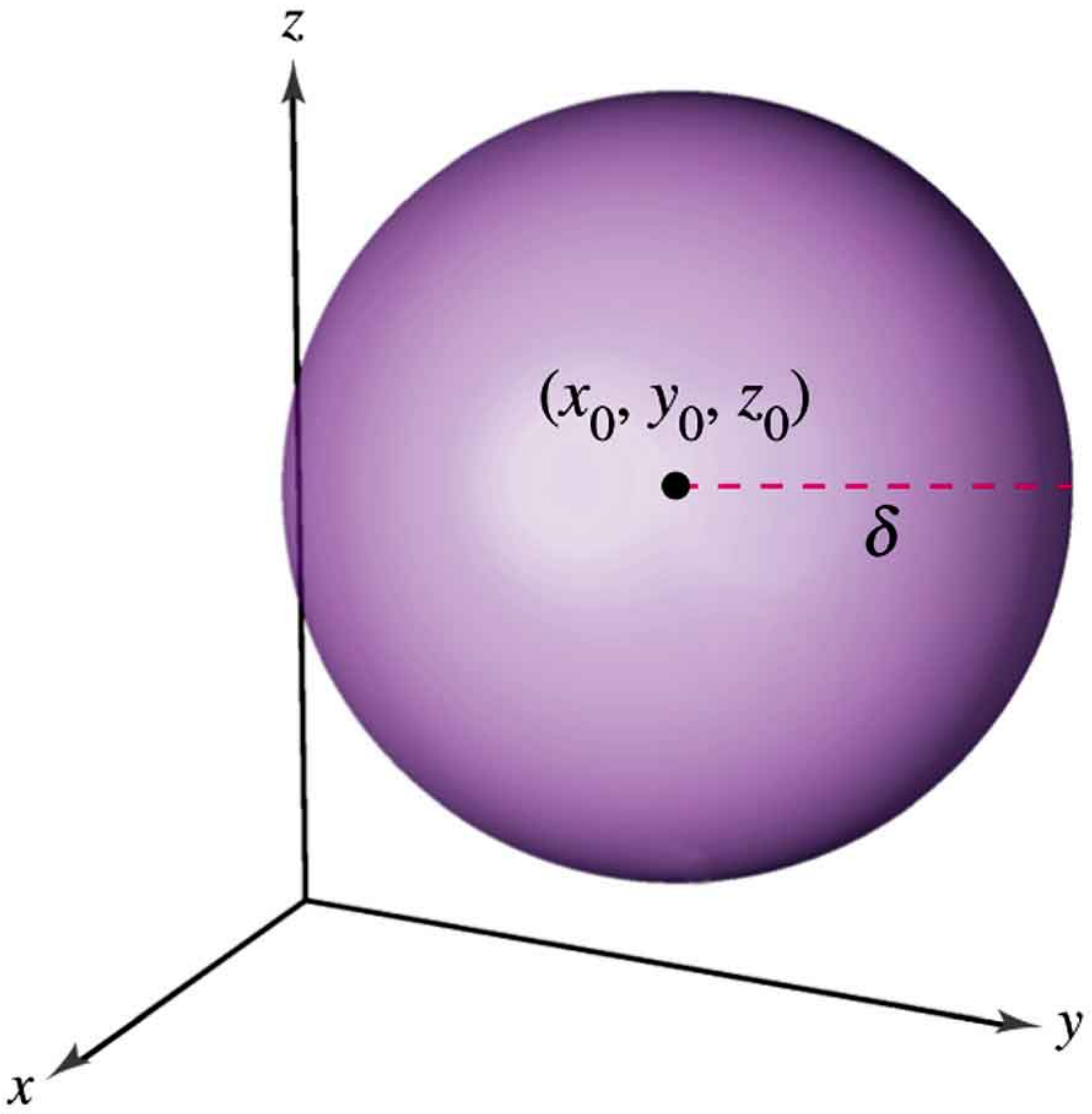
ΟΡΙΑΚΟ ΣΗΜΕΙΟ

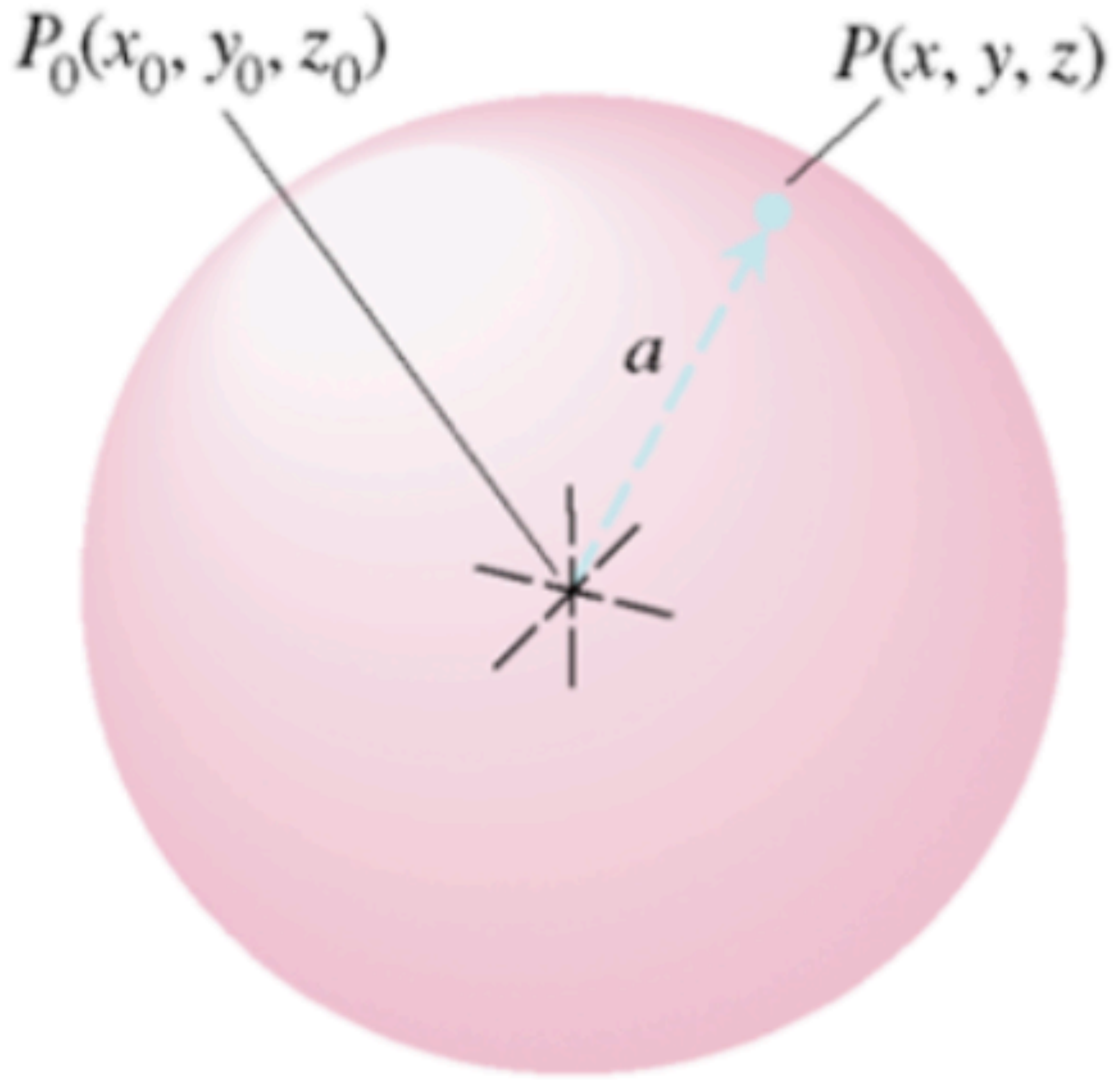


ΠΕΡΙΟΧΗ
ΓΕΙΤΟΝΙΑ

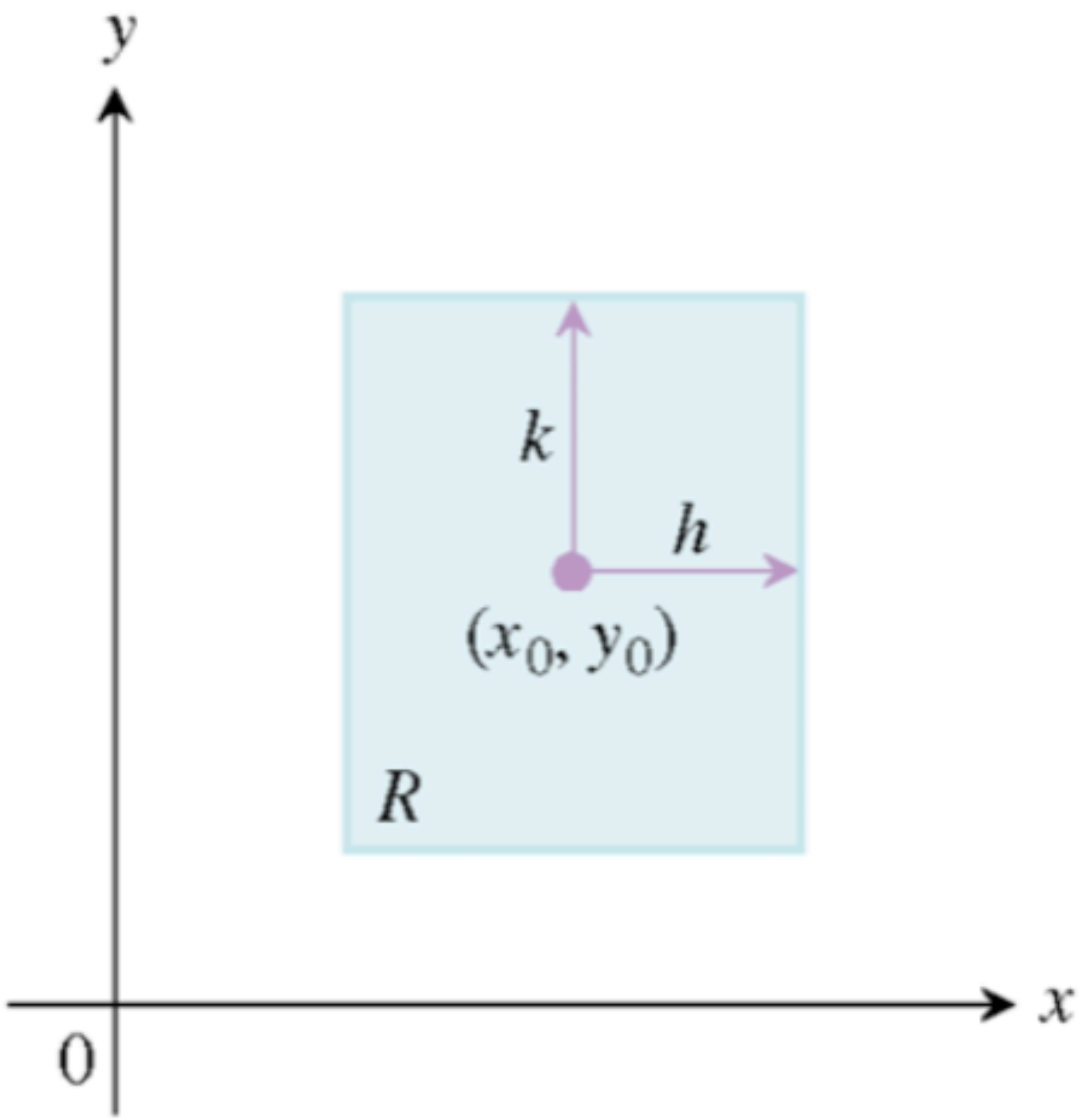

$|x - a| < r$
$a - r$
a
x
$a + r$
x


$|PP_0| < r$
$P(x, y)$
r
$P_0(a, b)$

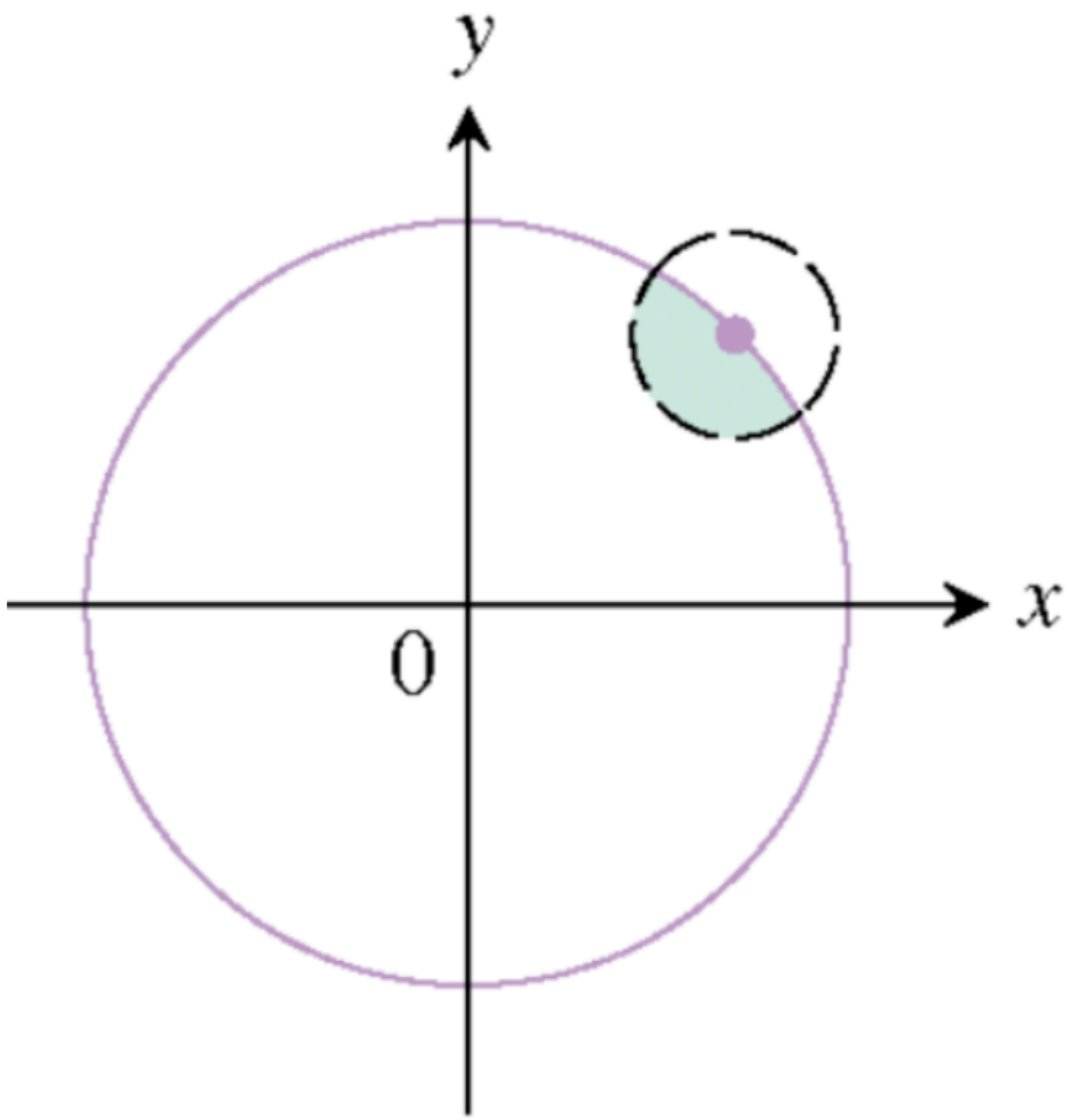

z
(x_0, y_0, z_0)
δ
x
y



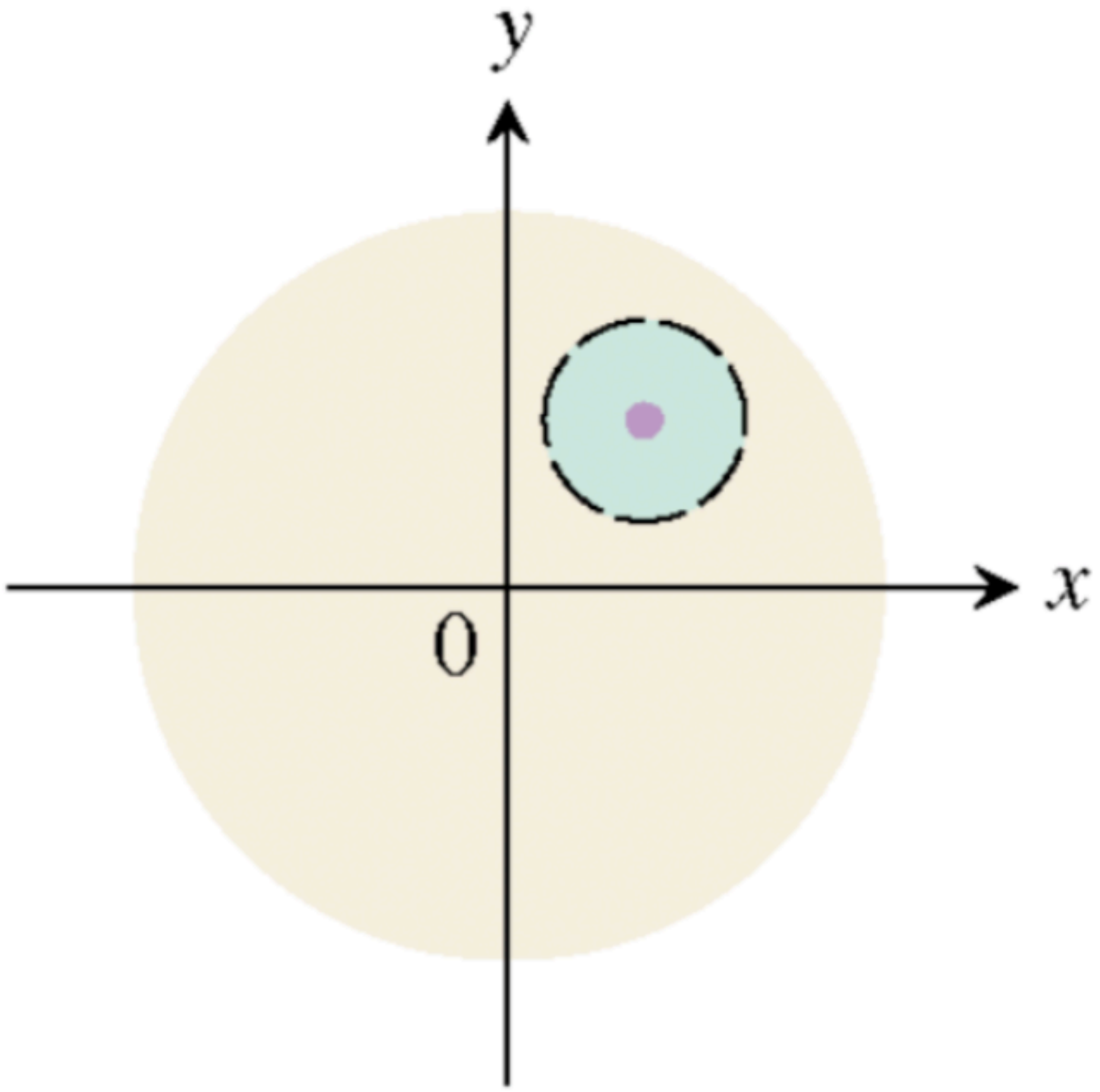
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$



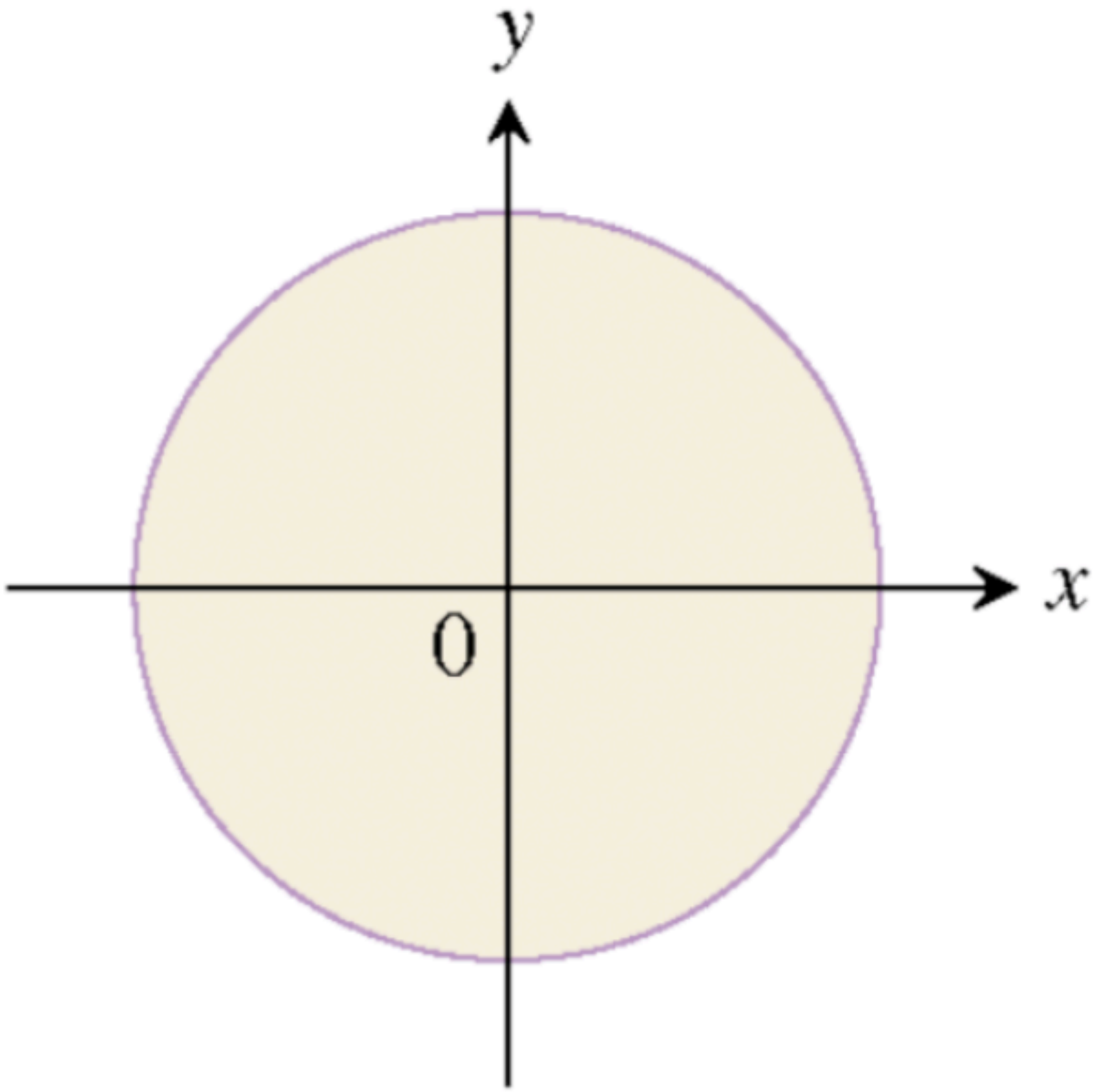
$$R:\ |x - x_0| \le h, |y - y_0| \le k$$



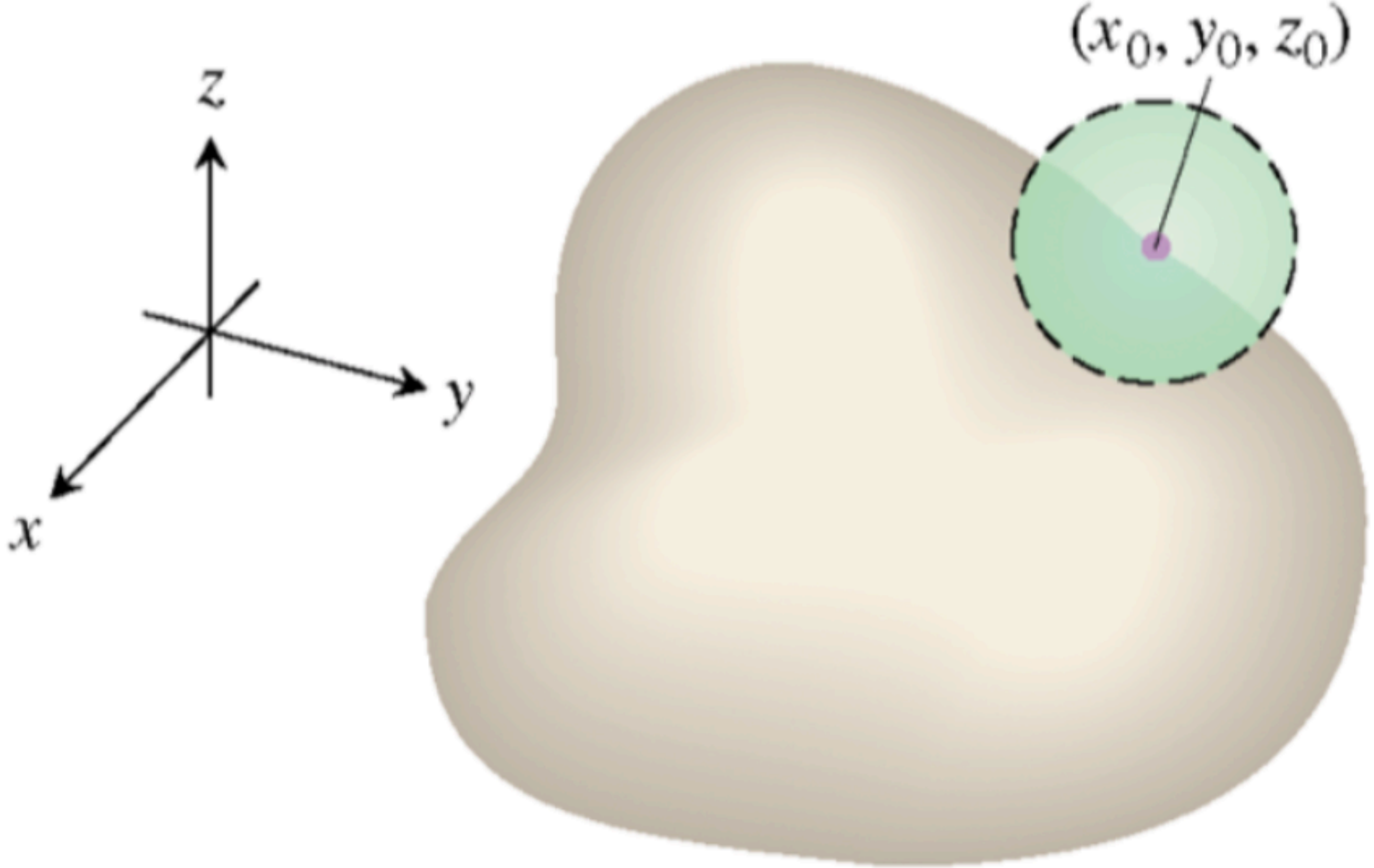
$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$



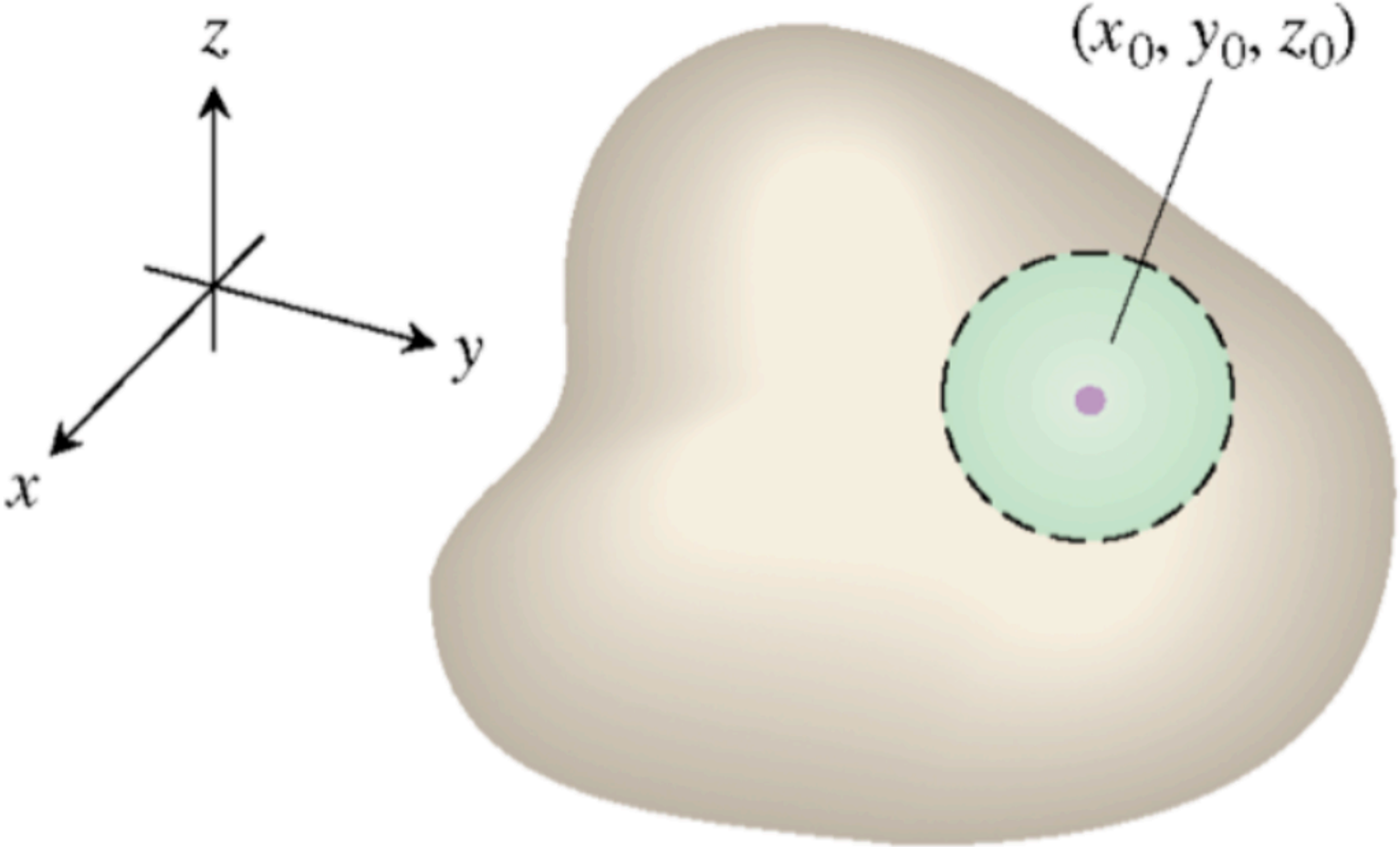
$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$



$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

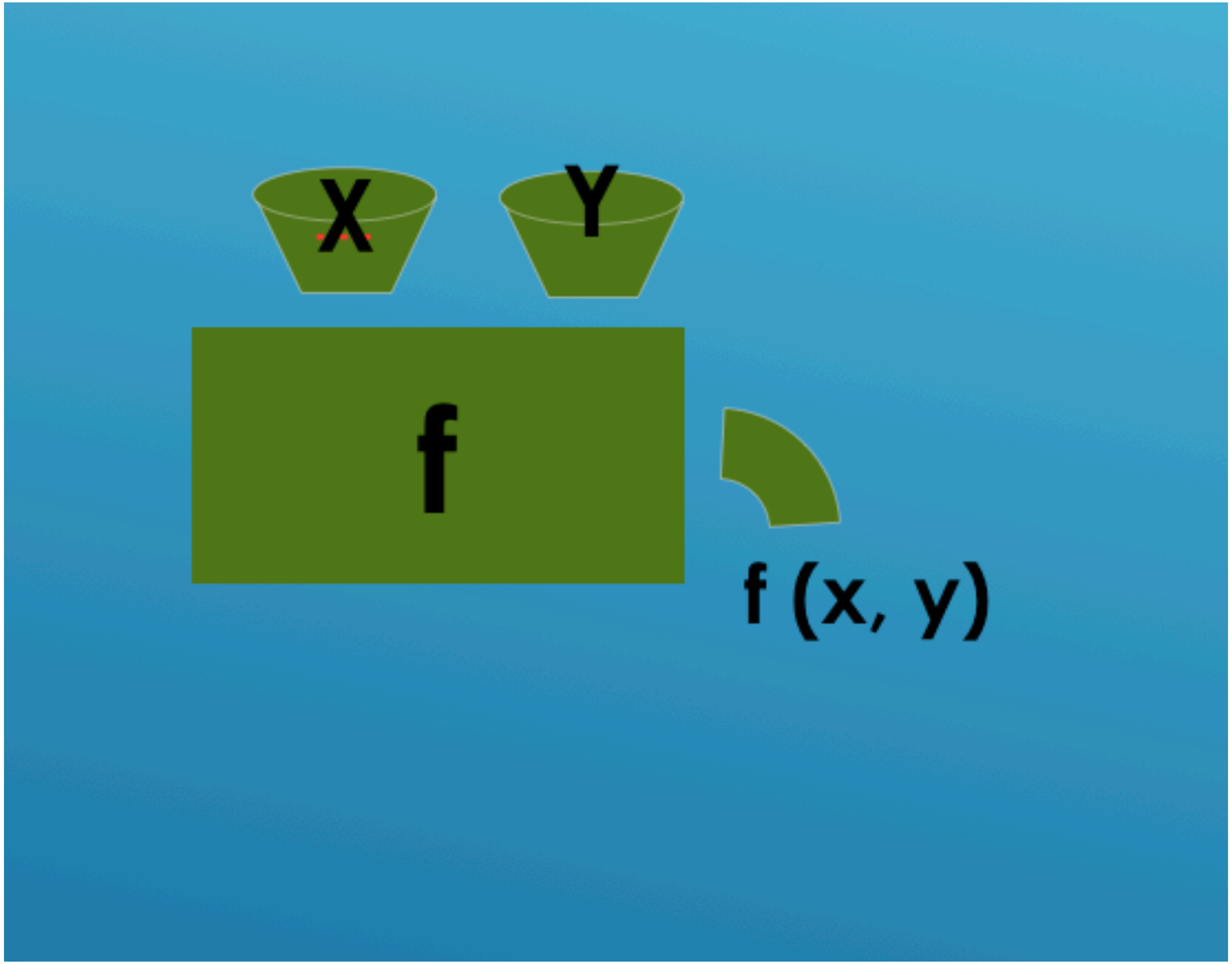


Συνοριακό σημείο

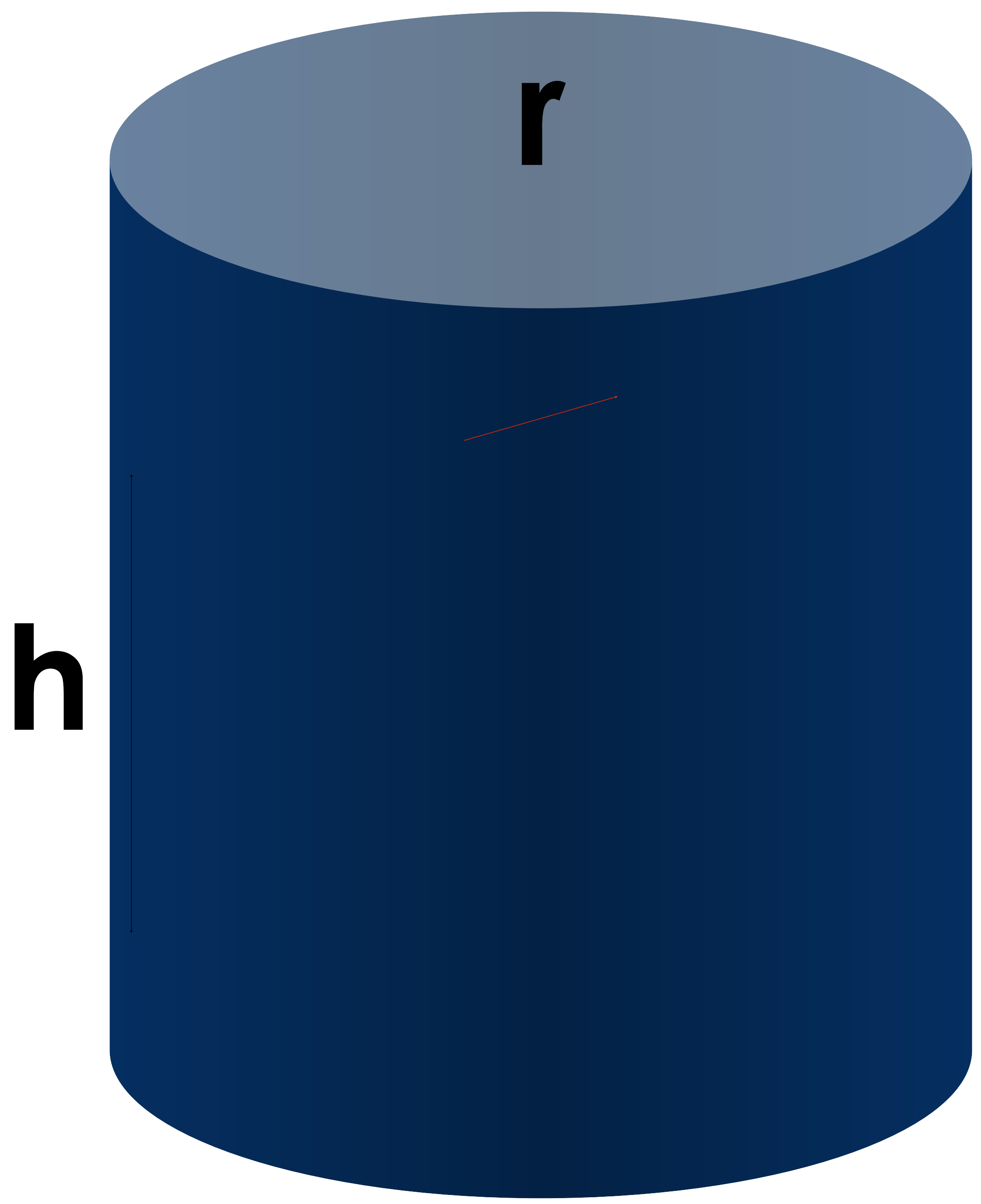


Εσωτερικό σημείο

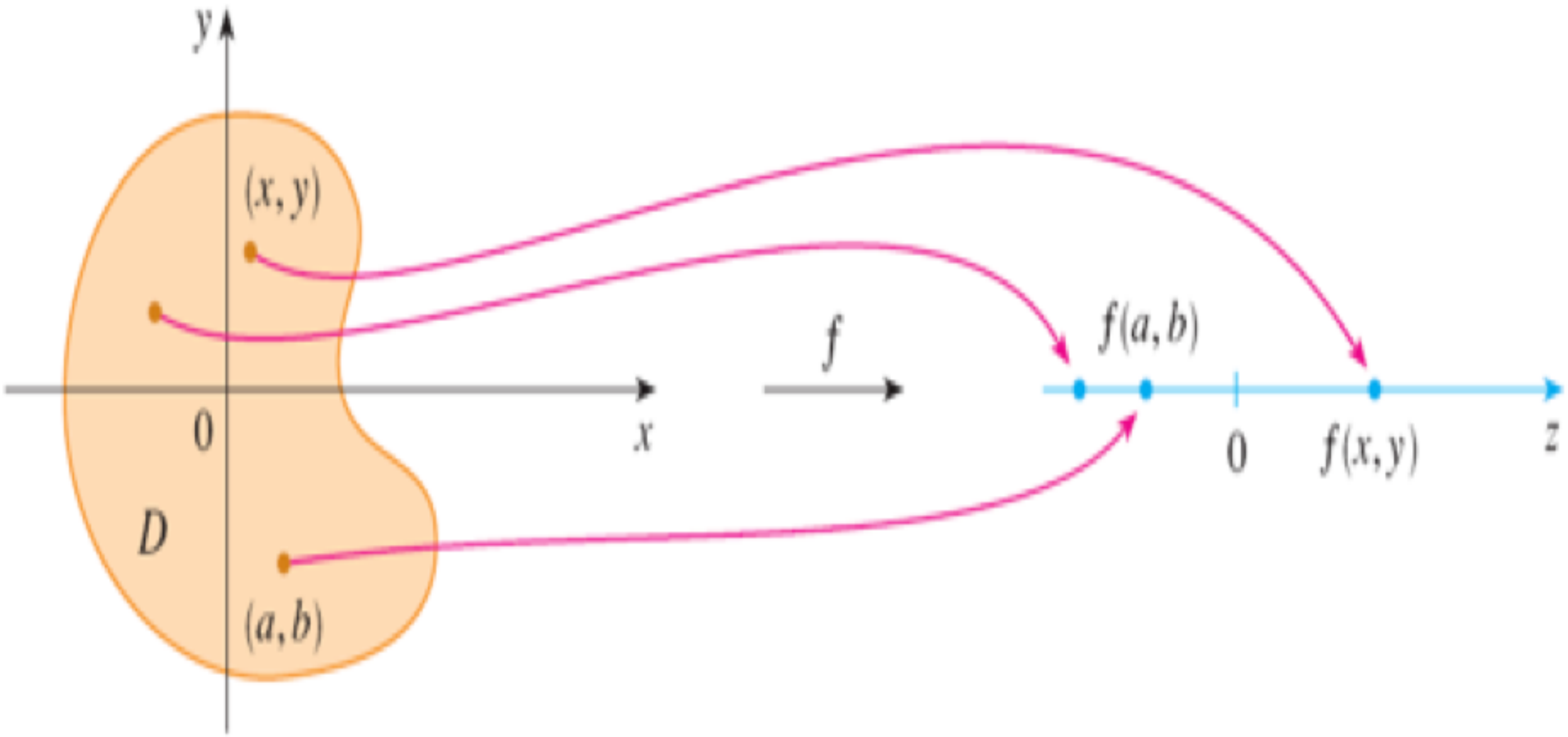
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ


X
Y
f
f (x, y)

$$V = f(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$



ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

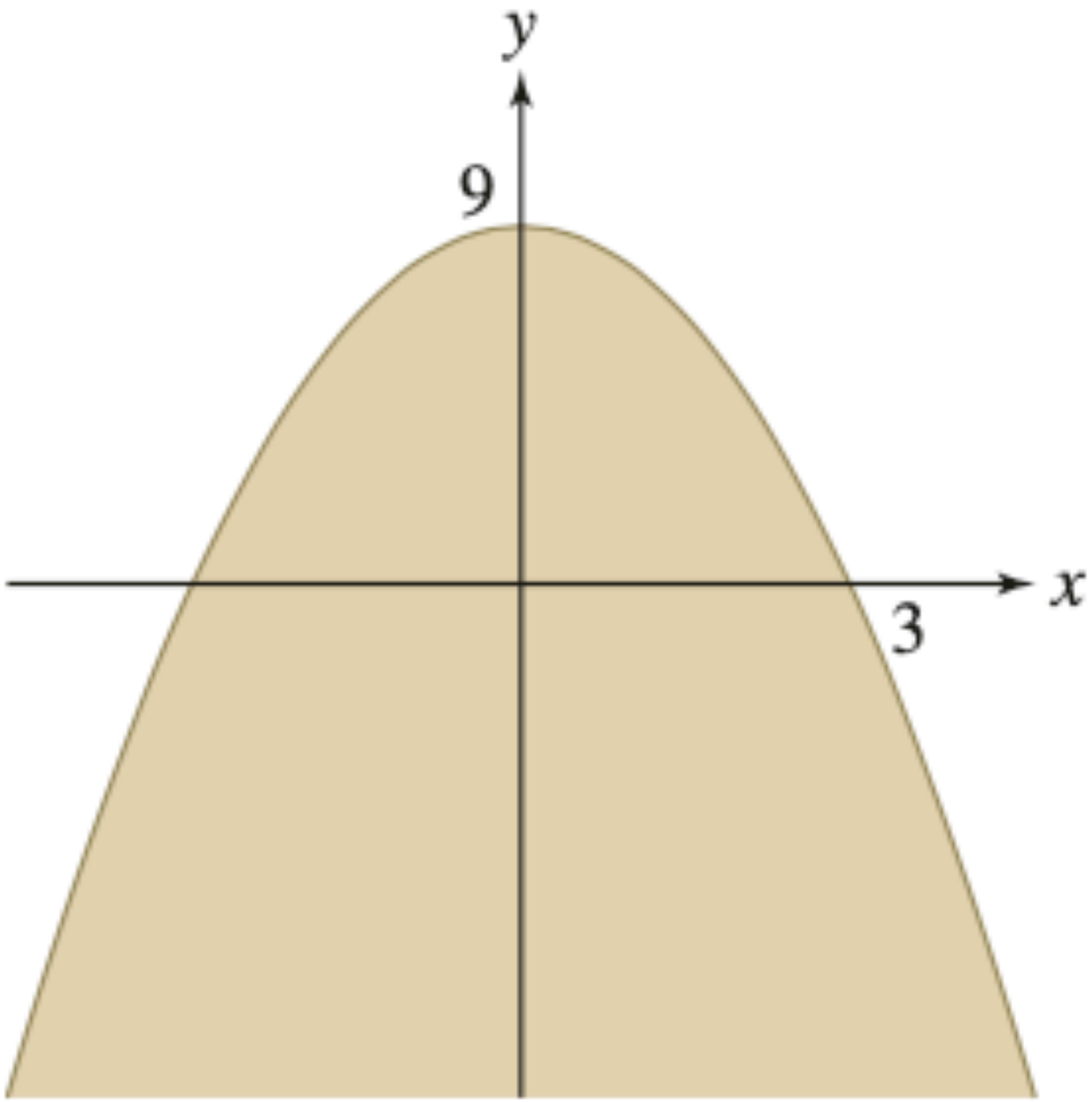


y
(x, y)
0
x
D
(a, b)
f
f(a, b)
0
f(x, y)
z

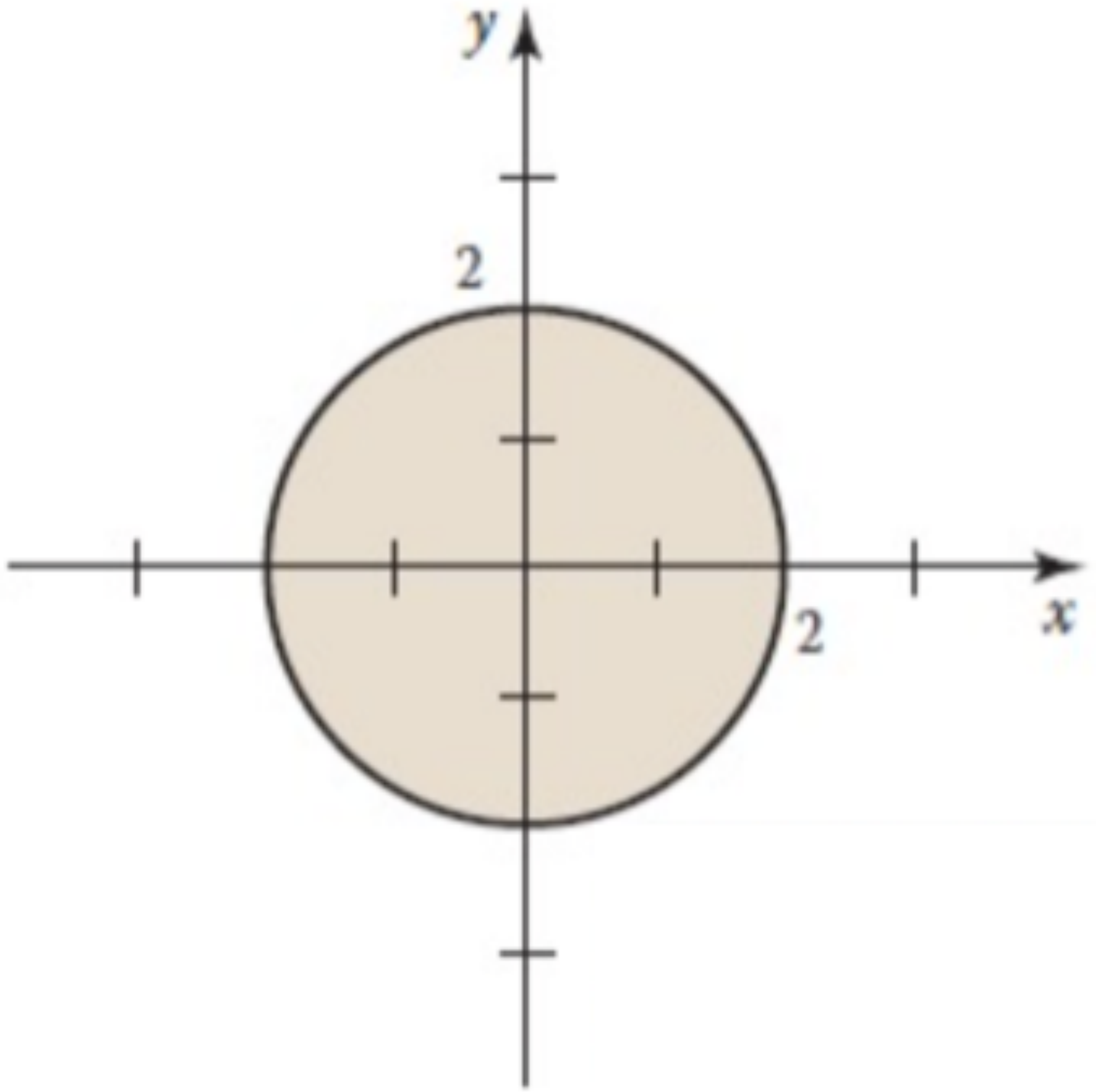
Να σχεδιάσετε το πεδίο ορισμού για καθεμία από τις συναρτήσεις:

α) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y}$ β) $g(x, y, z) = x\sqrt{y} + \ln(z - 1)$.

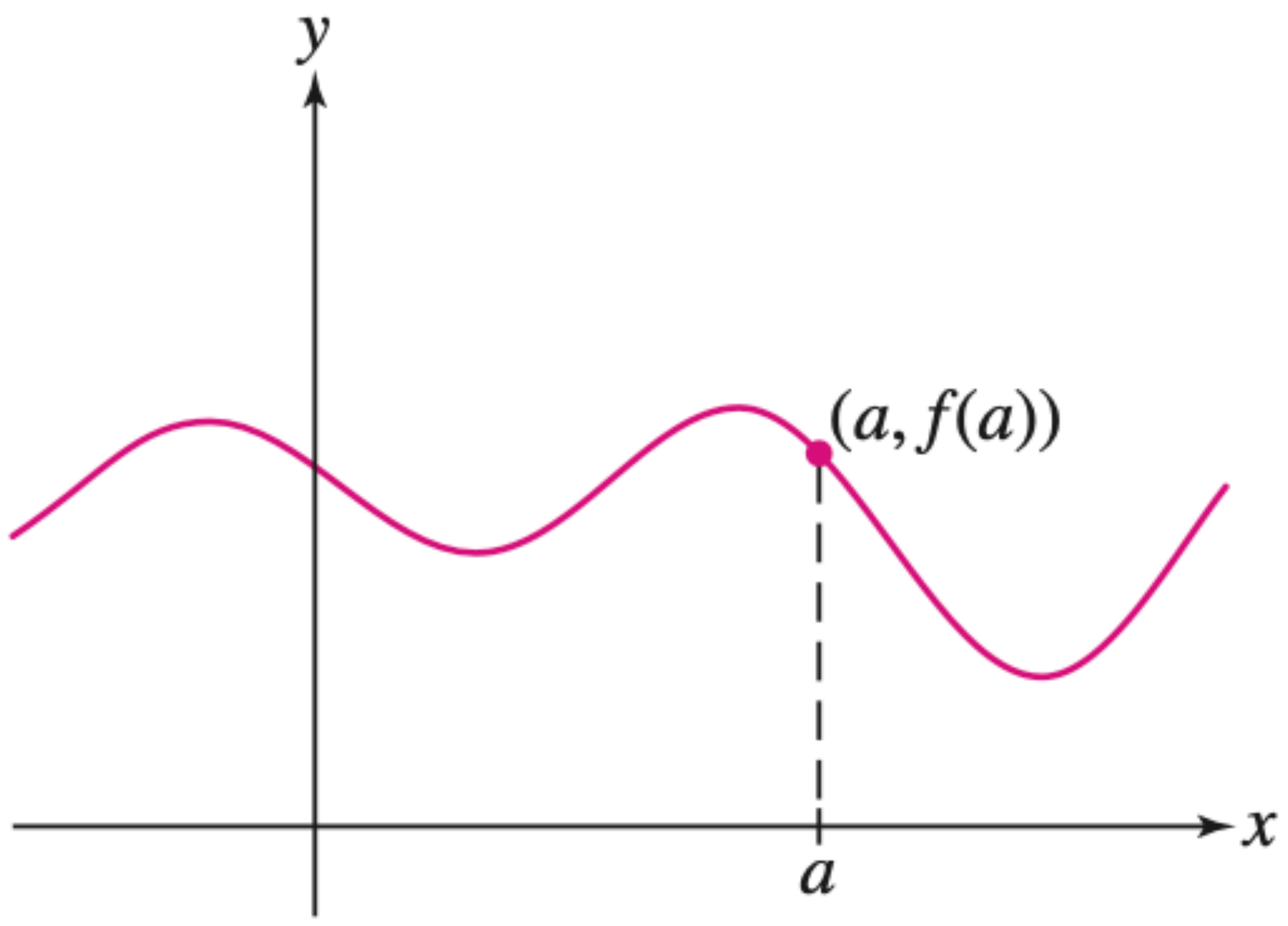
Ποιο είναι το εύρος των τιμών αυτών των συναρτήσεων;


y
9
x
3

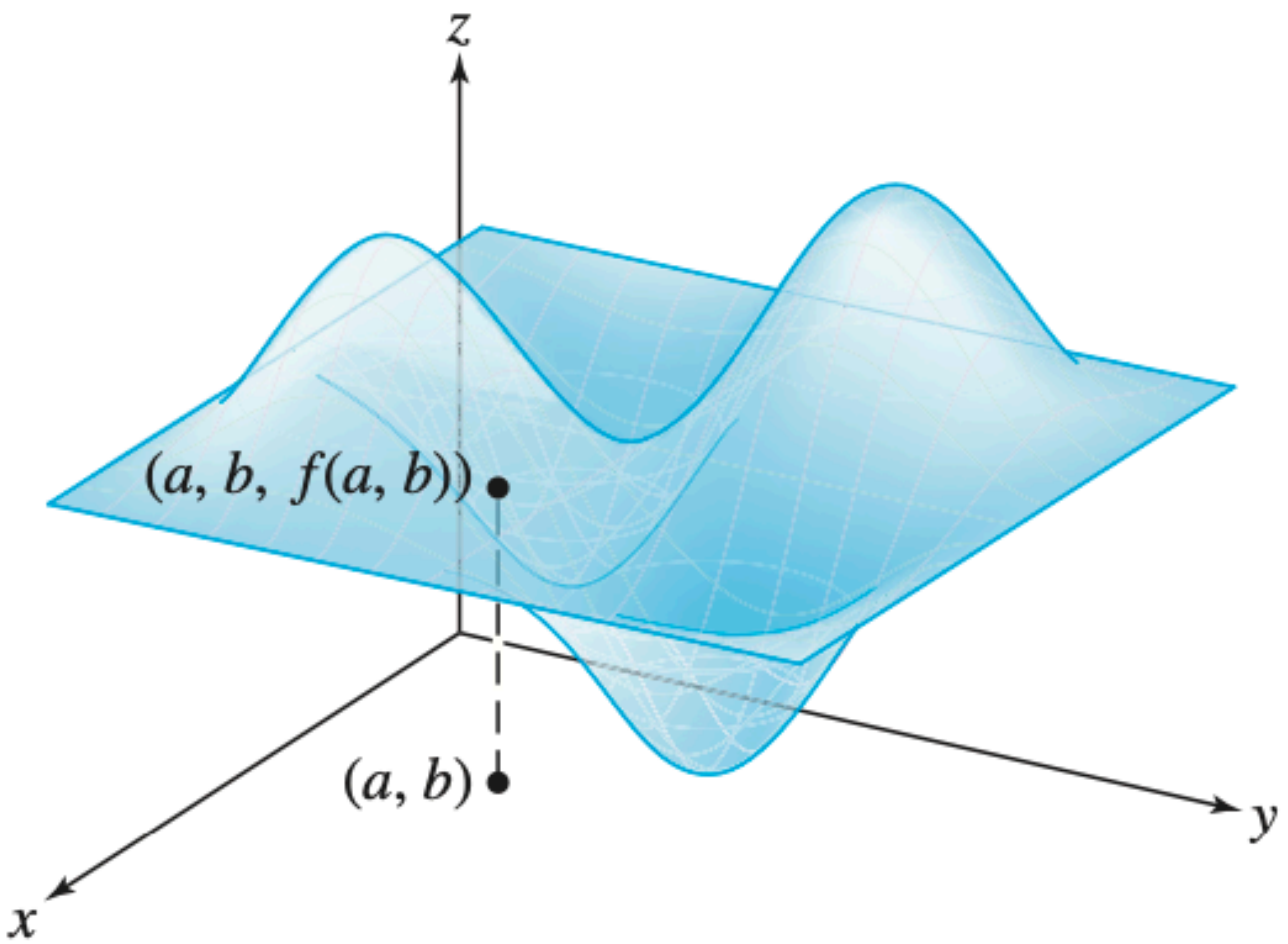
$$g(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$$



ΓΡΑΦΗΜΑ

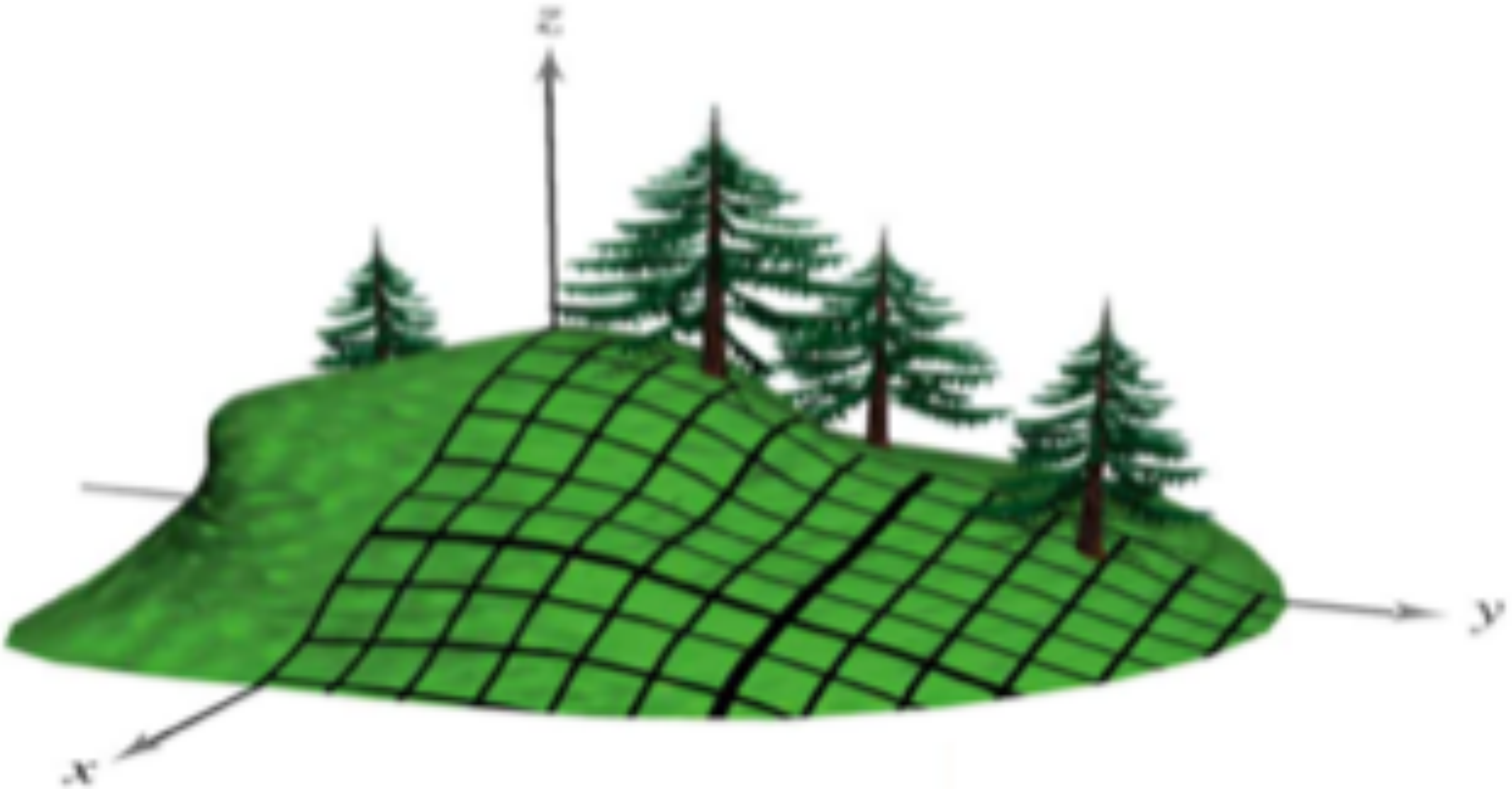


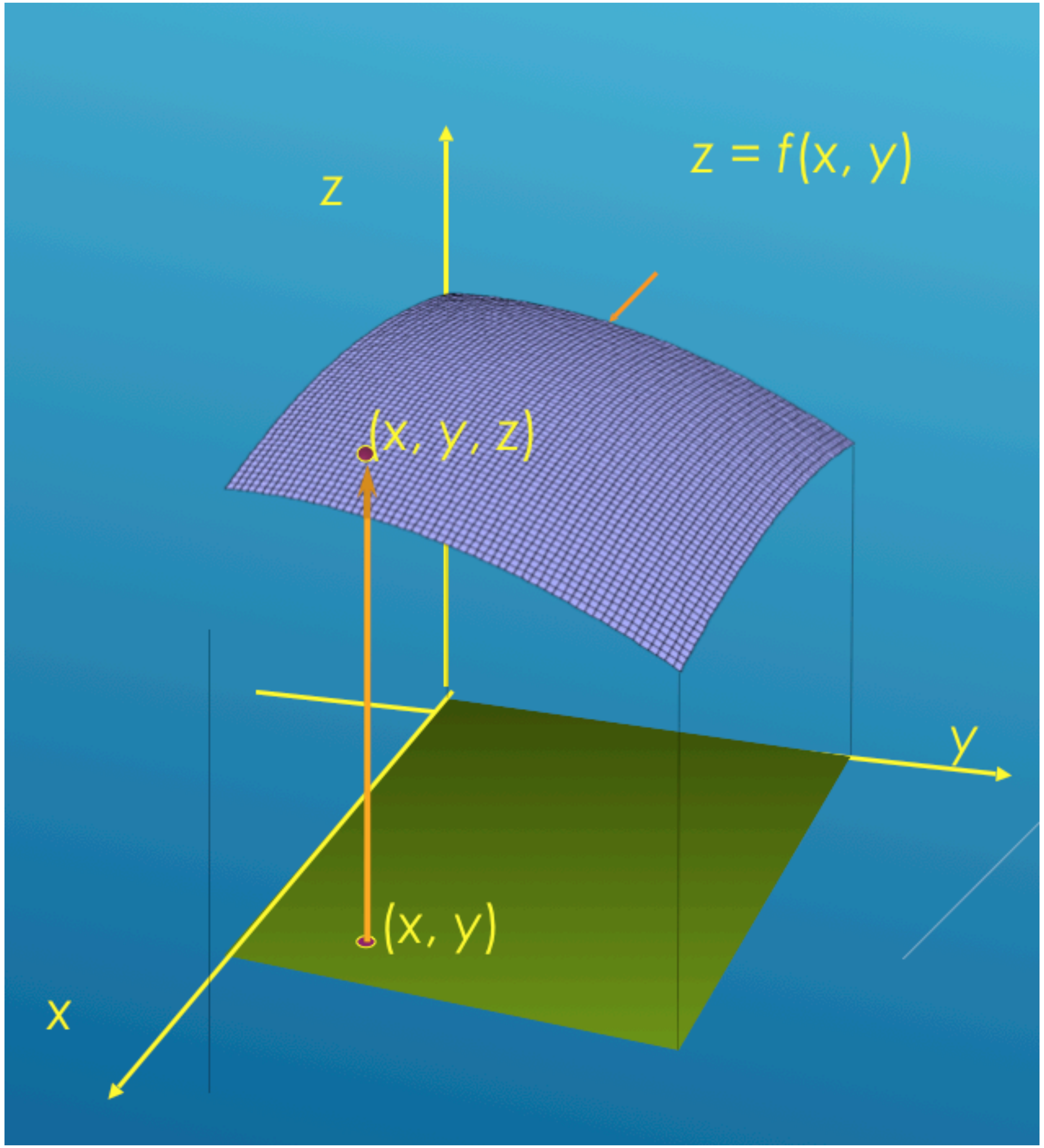
(α) Γραφική παράσταση της $y = f(x)$

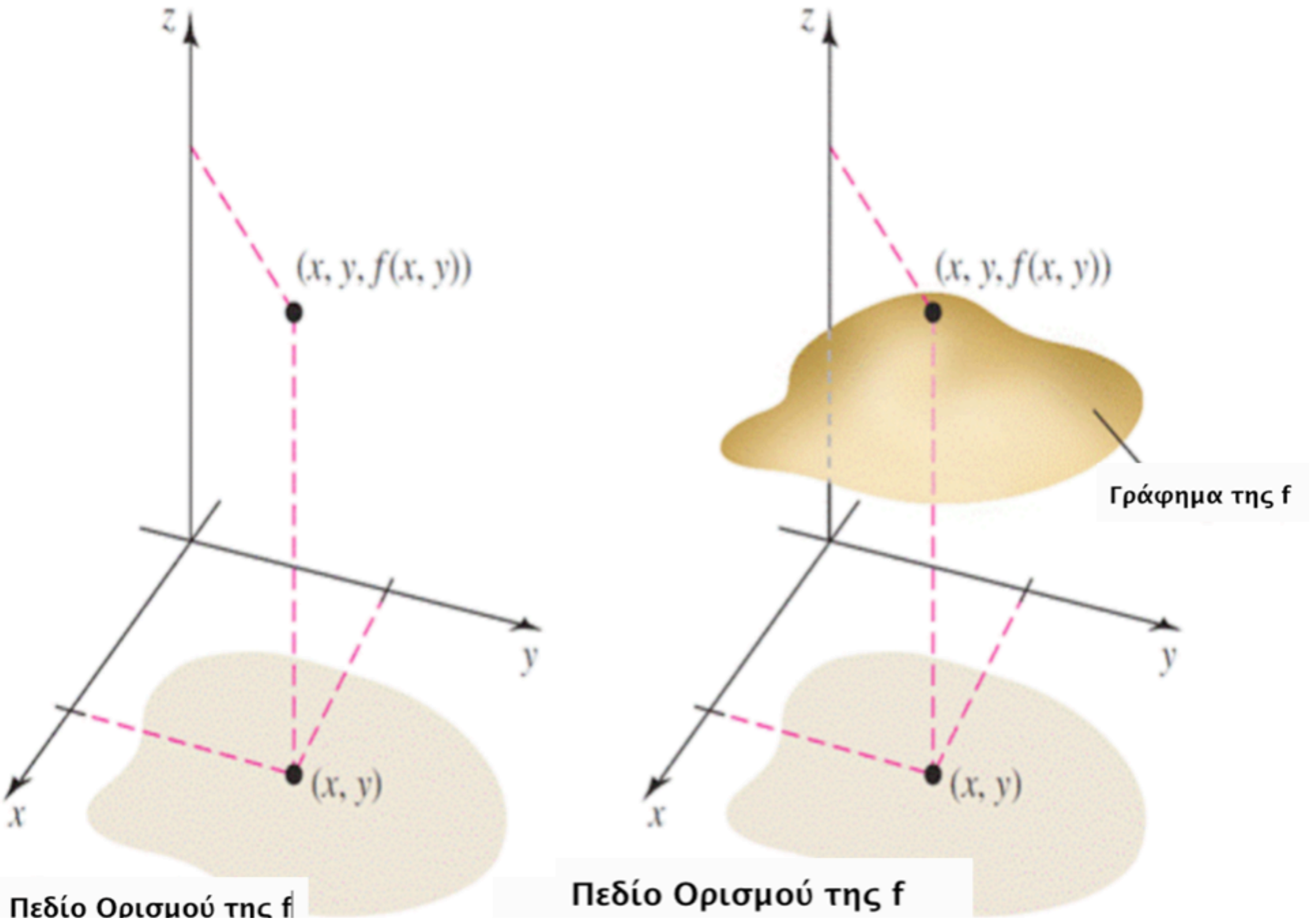


(β) Γραφική παράσταση της $z = f(x, y)$

$$z = f(x, y)$$




z
z = f(x, y)
(x, y, z)
y
(x, y)
x


z
(x, y, f(x, y))
y
x
(x, y)
Πεδίο Ορισμού της f
z
(x, y, f(x, y))
Γράφημα της f
y
x
(x, y)
Πεδίο Ορισμού της f