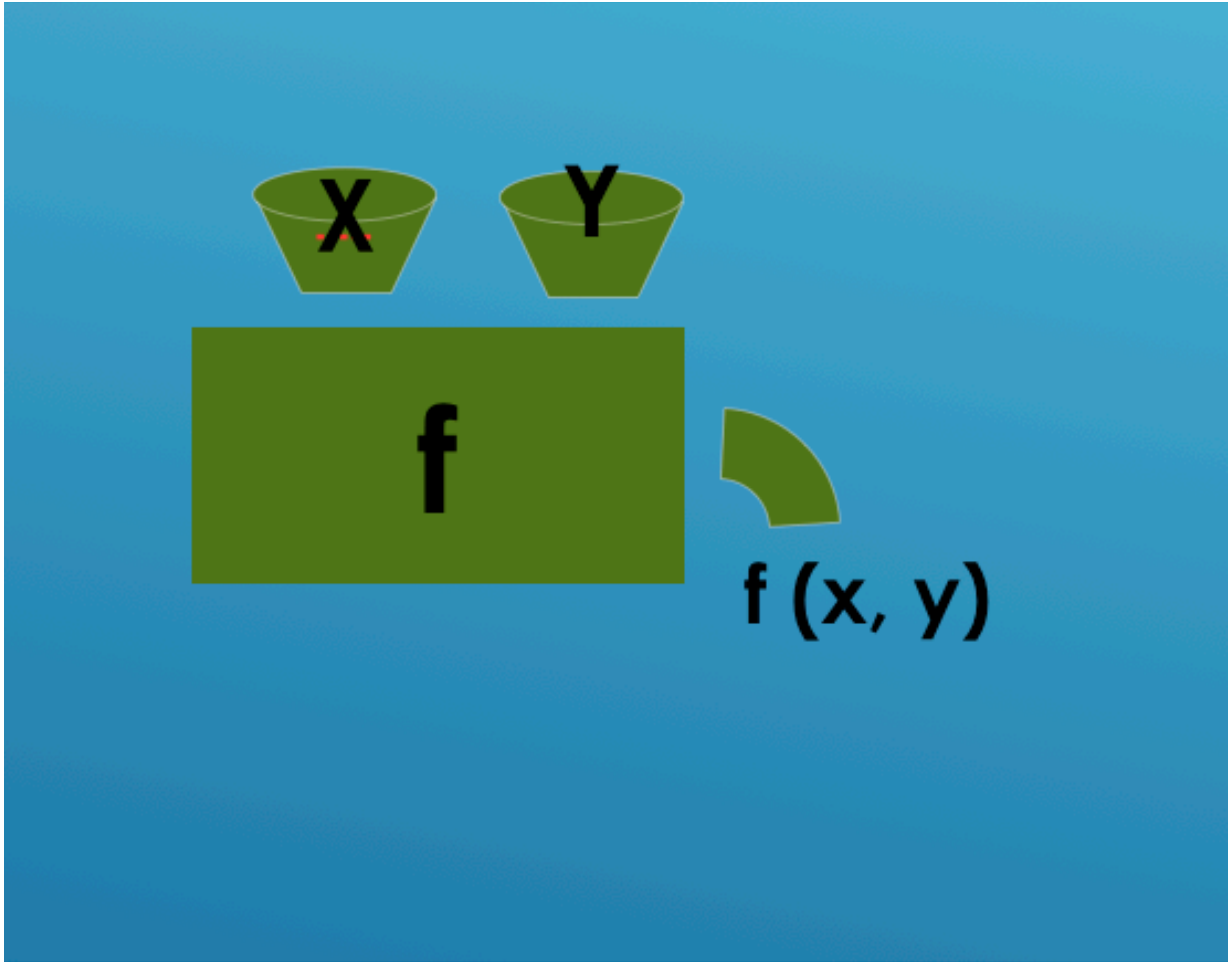
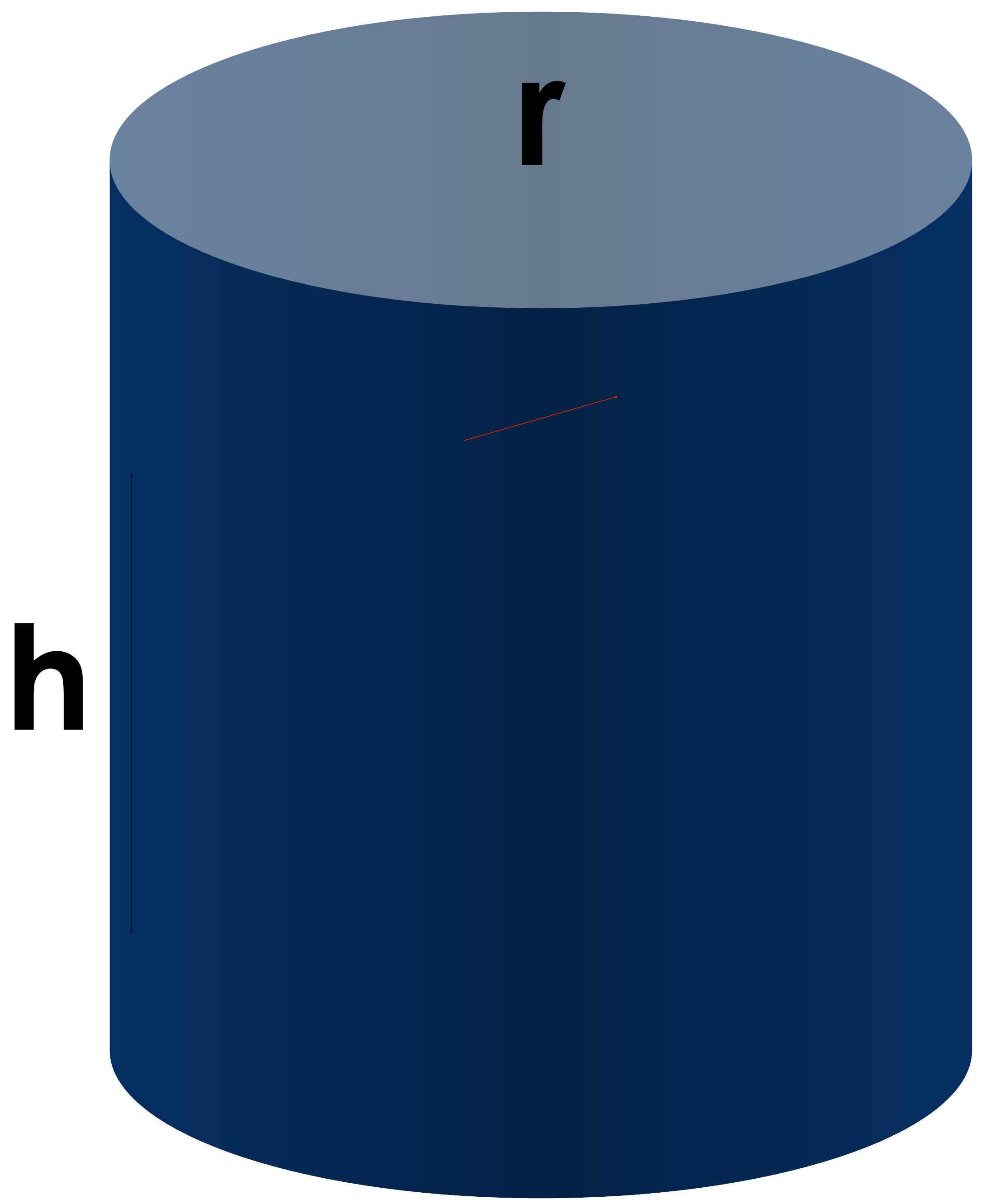
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

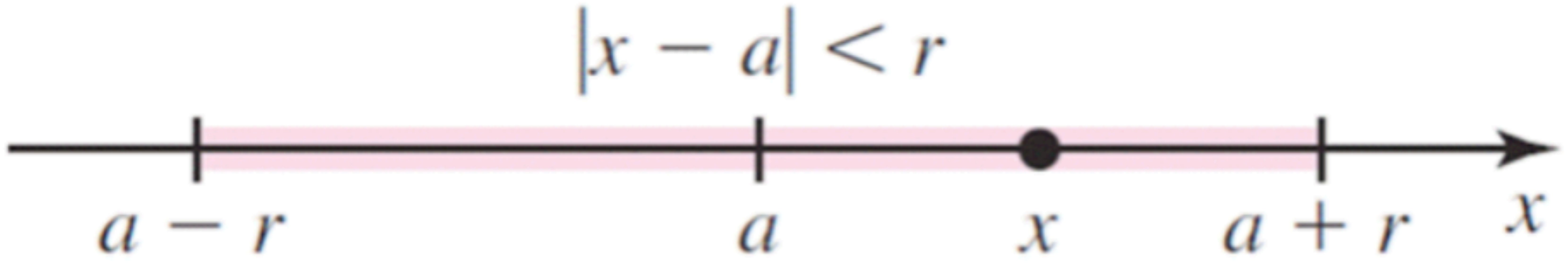
ΠΕΡΙΟΧΗ
ΓΕΙΤΟΝΙΑ

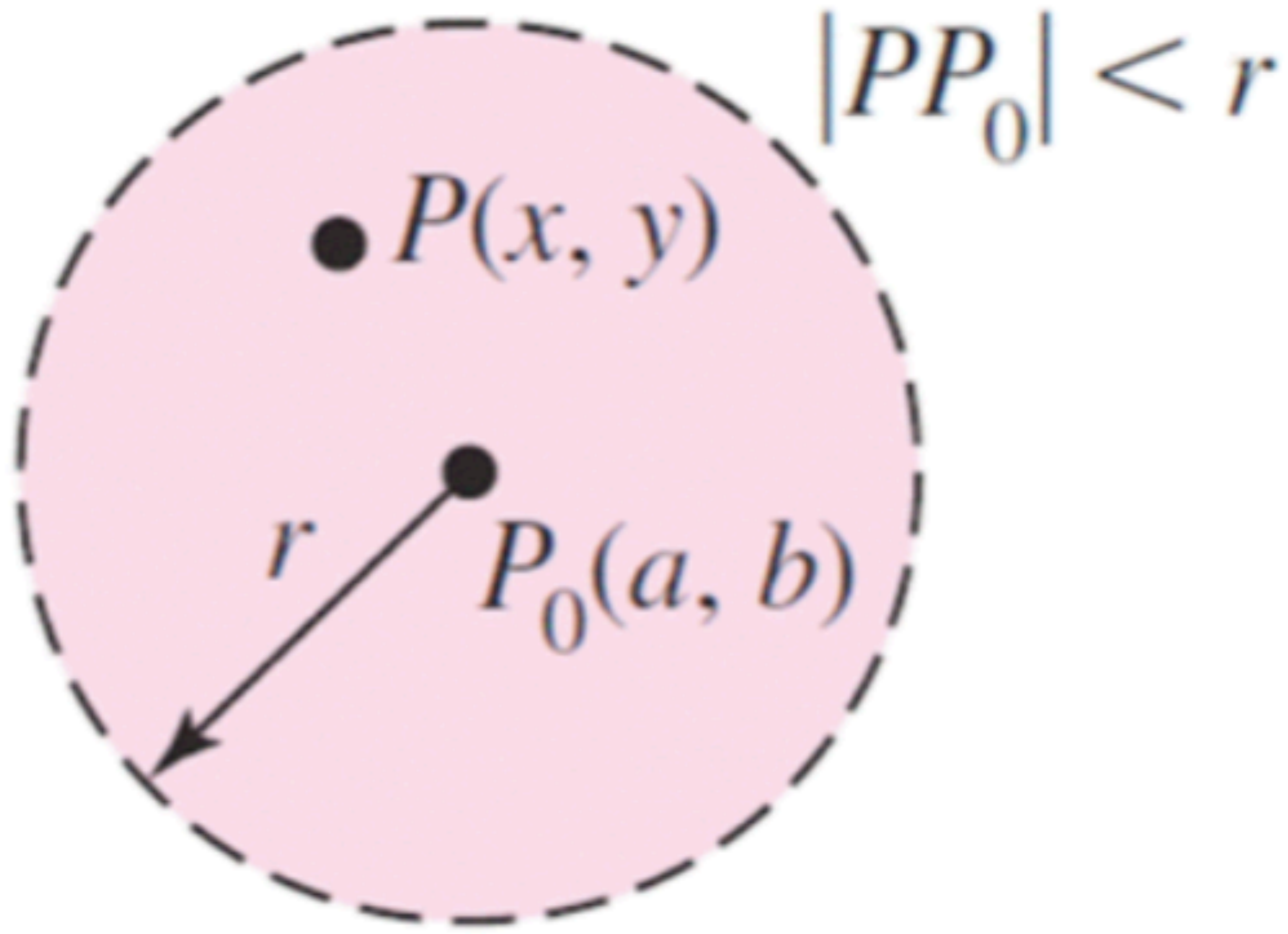
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

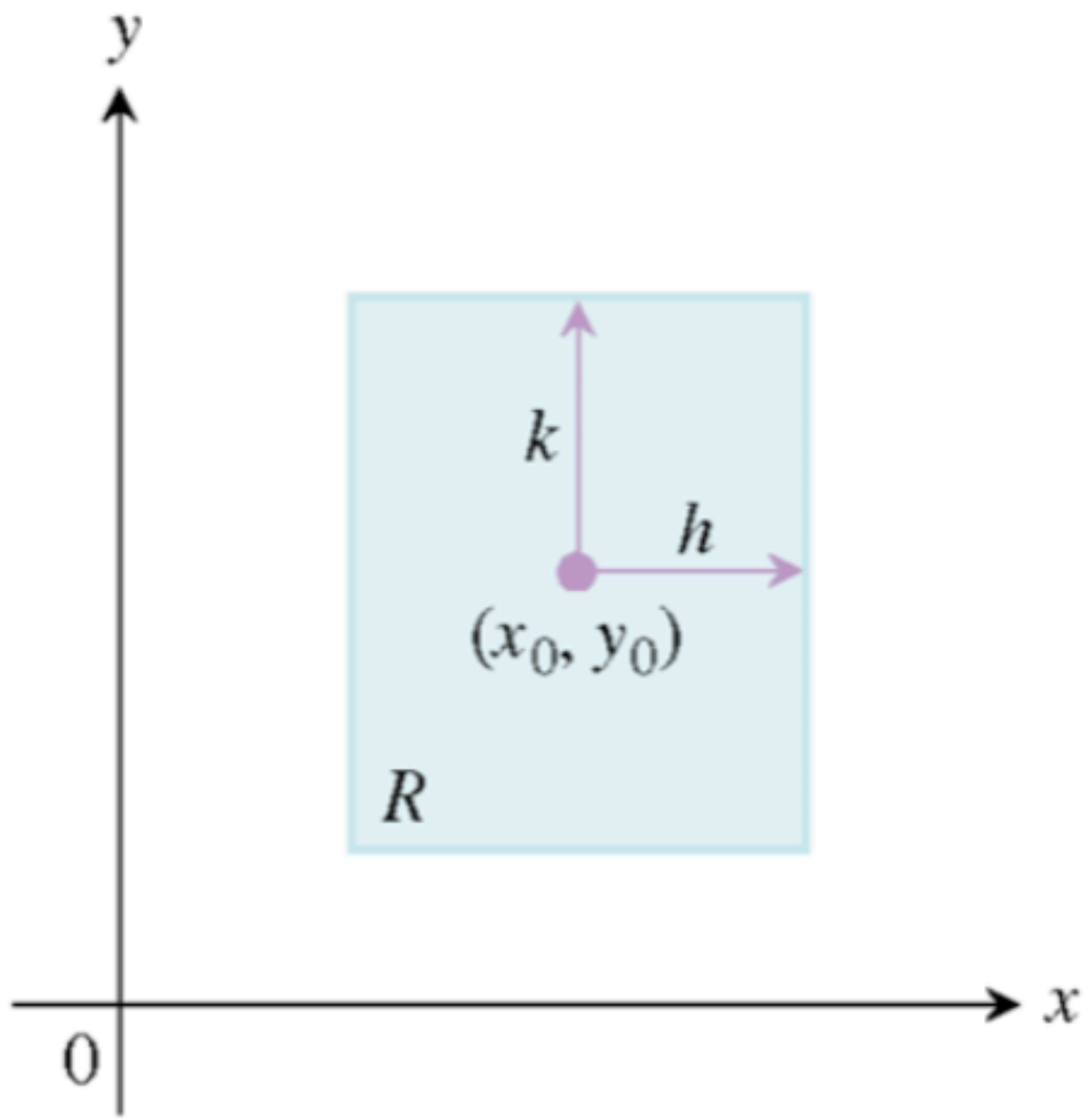

X
Y
f
f (x, y)

$$V = f(r,h) = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

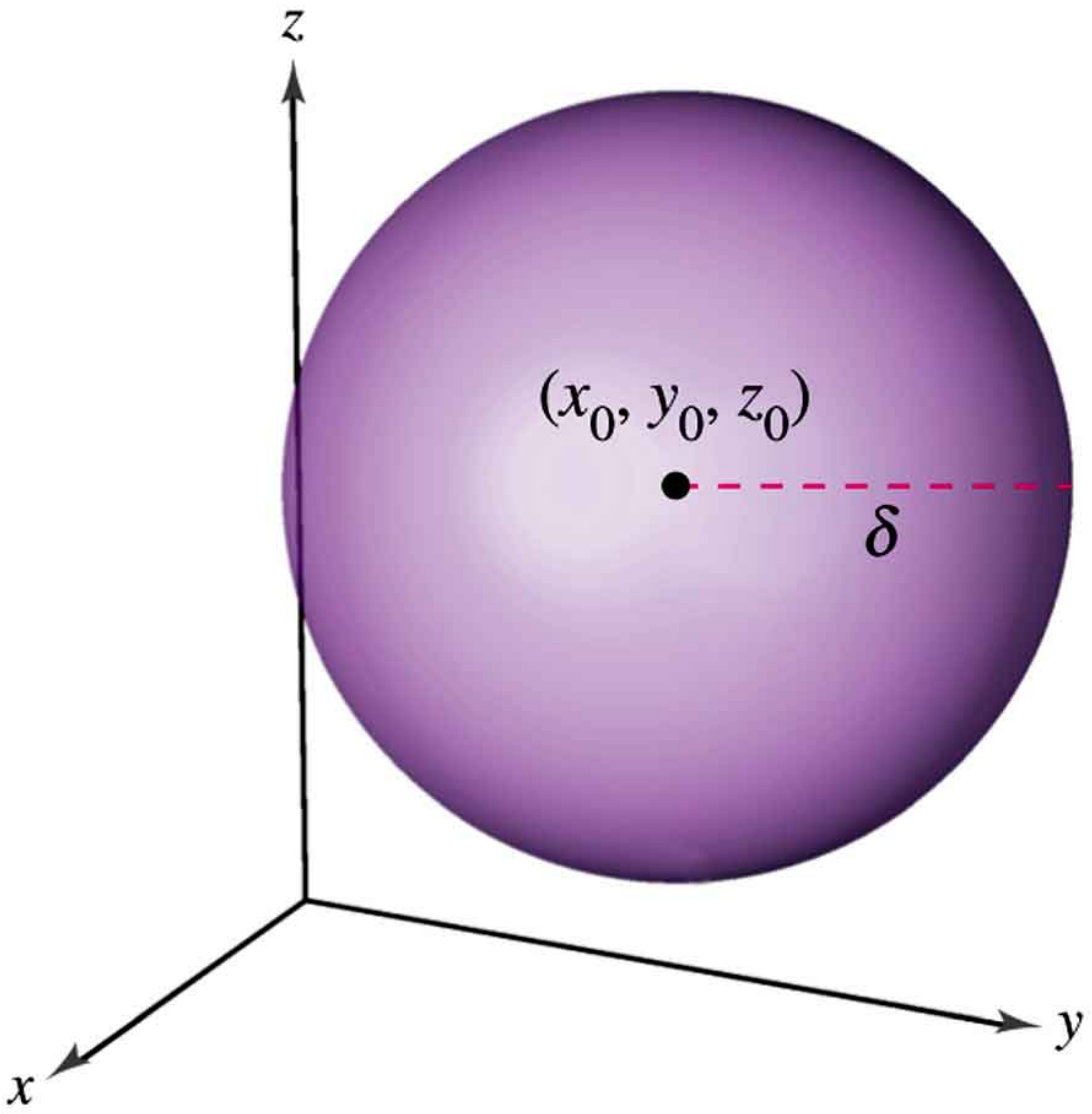


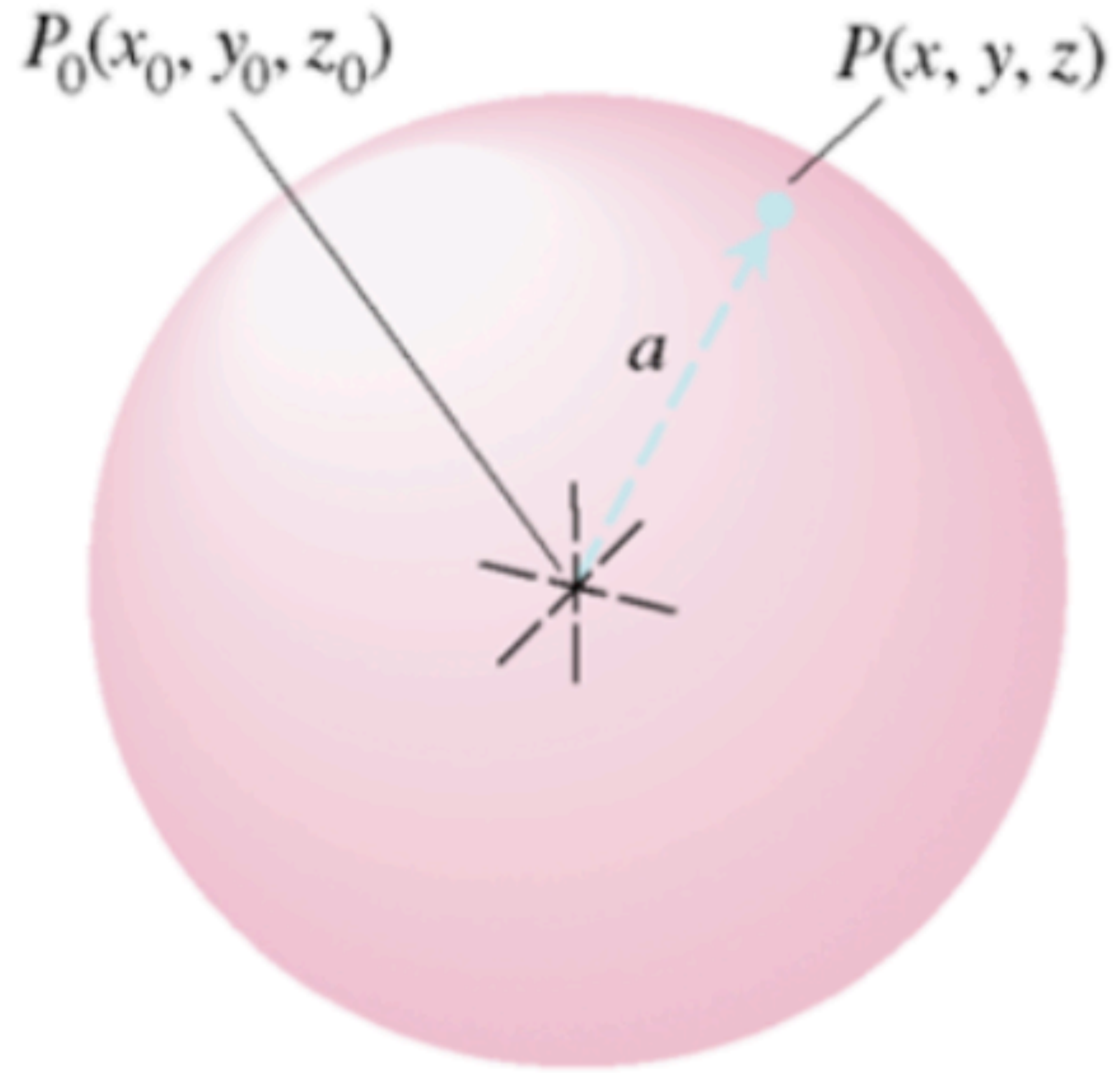

$|x - a| < r$
$a - r$
a
x
$a + r$
x


$|PP_0| < r$
$P(x, y)$
r
$P_0(a, b)$

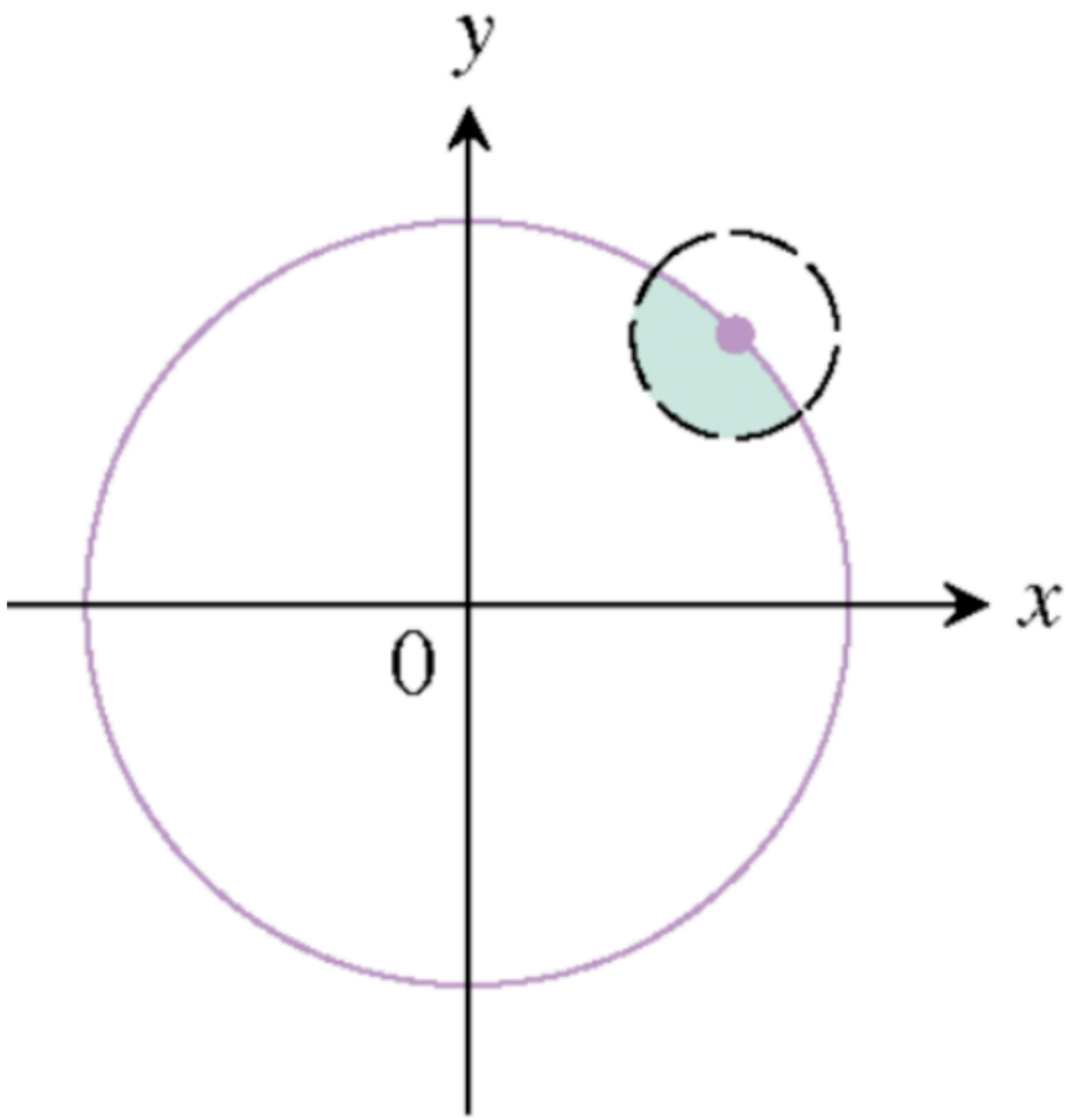


$$R:\ |x - x_0| \le h, |y - y_0| \le k$$

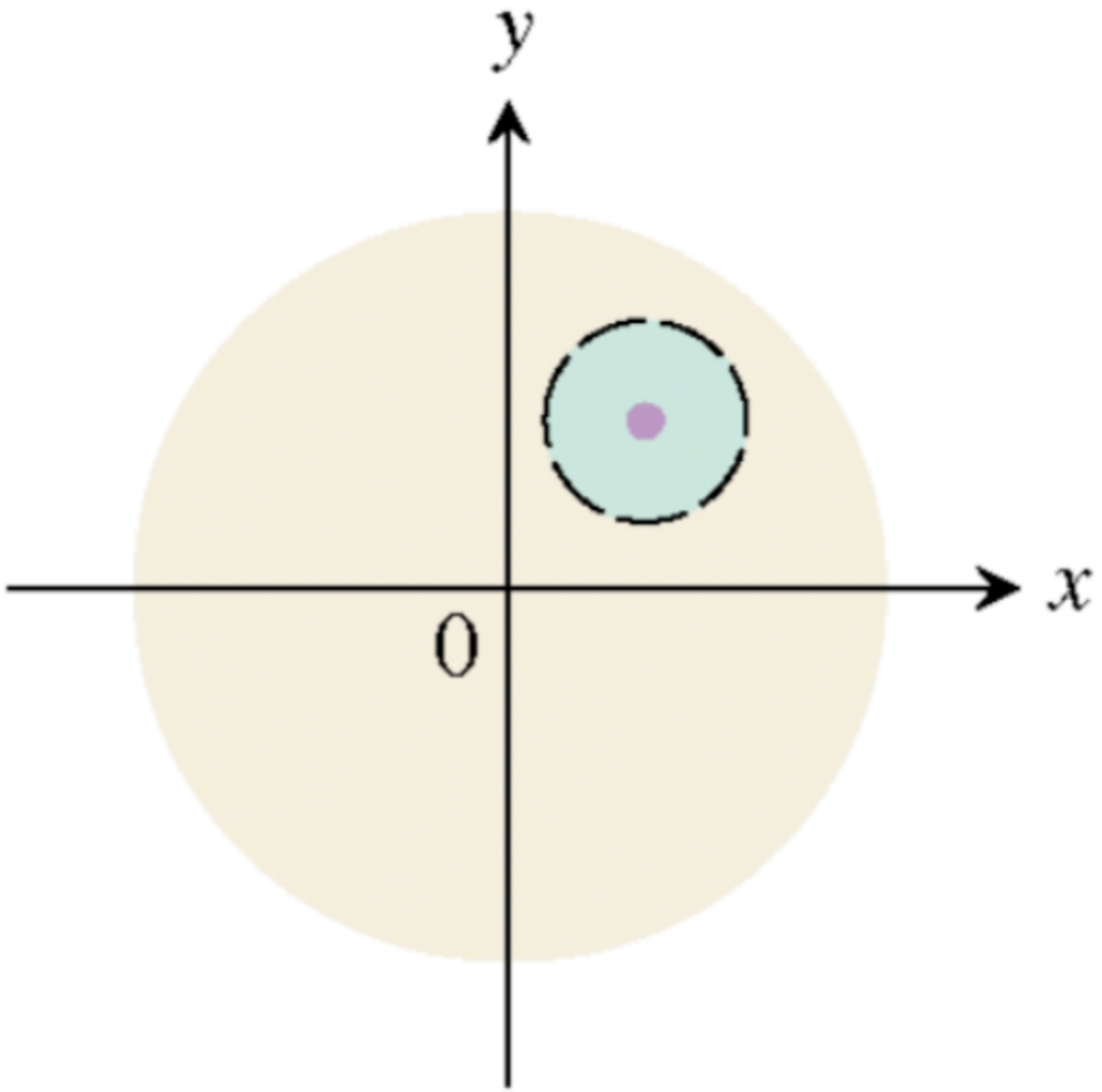

z
(x_0, y_0, z_0)
δ
x
y



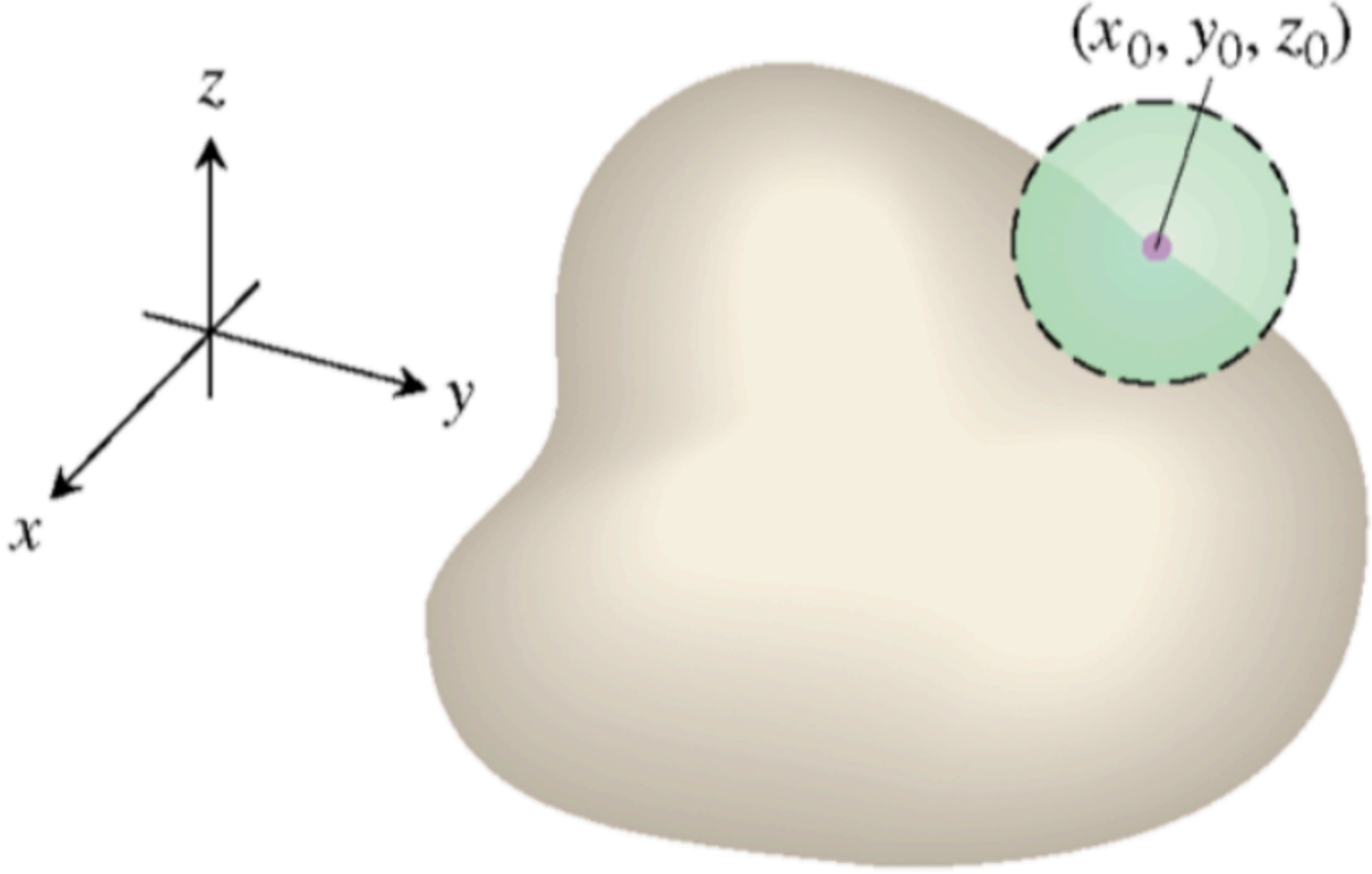
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2.$$



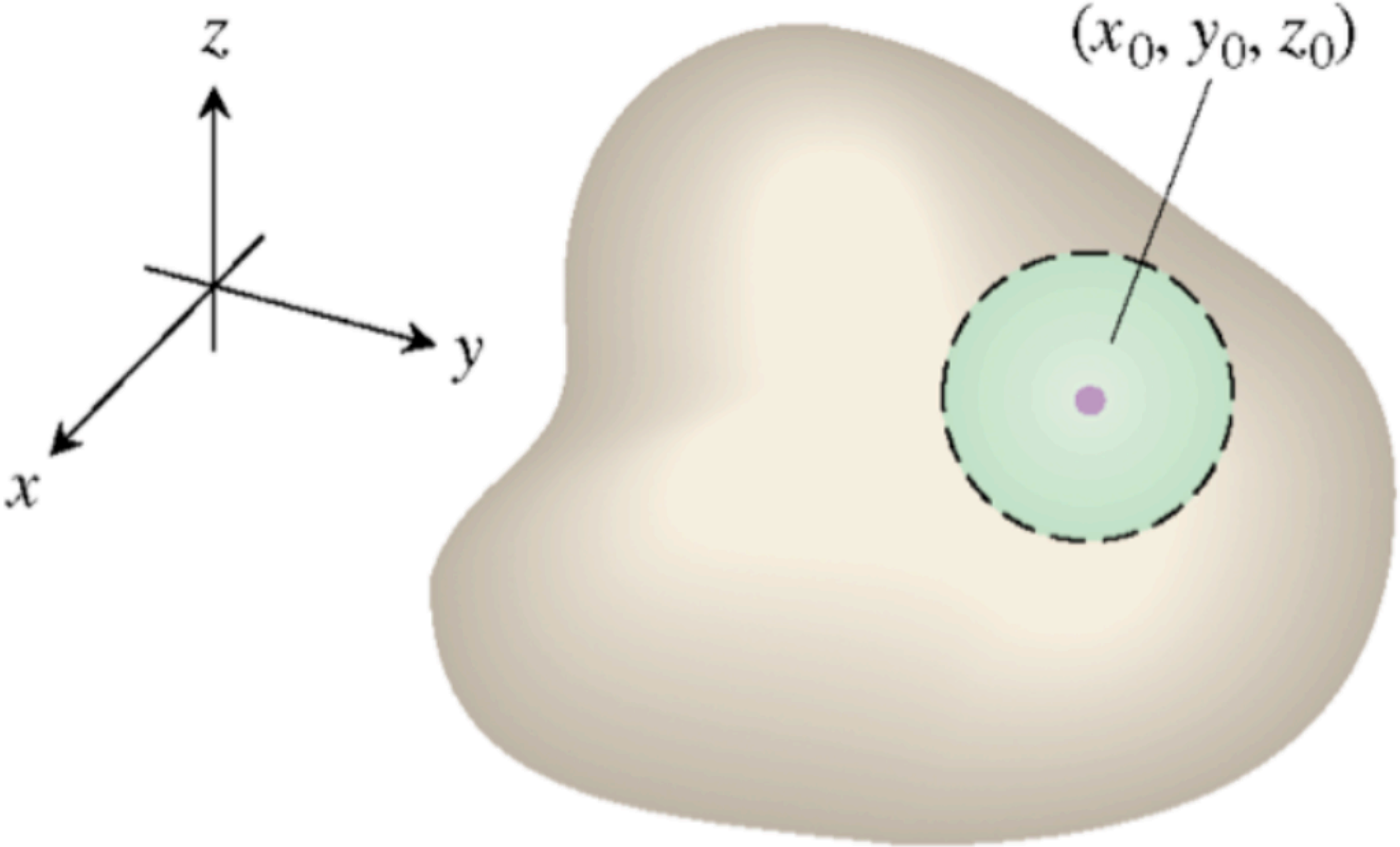
$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$



$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

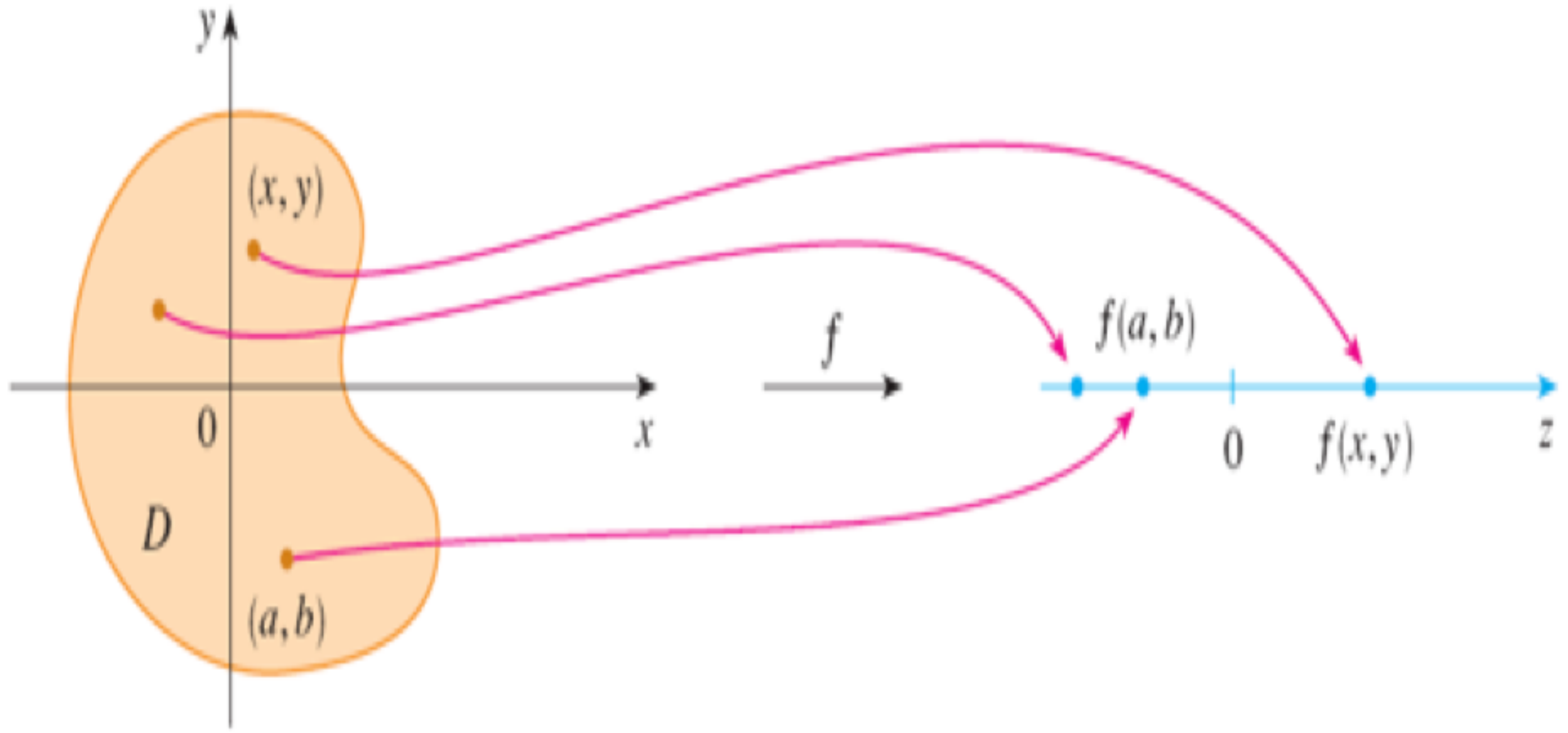


Συνοριακό σημείο



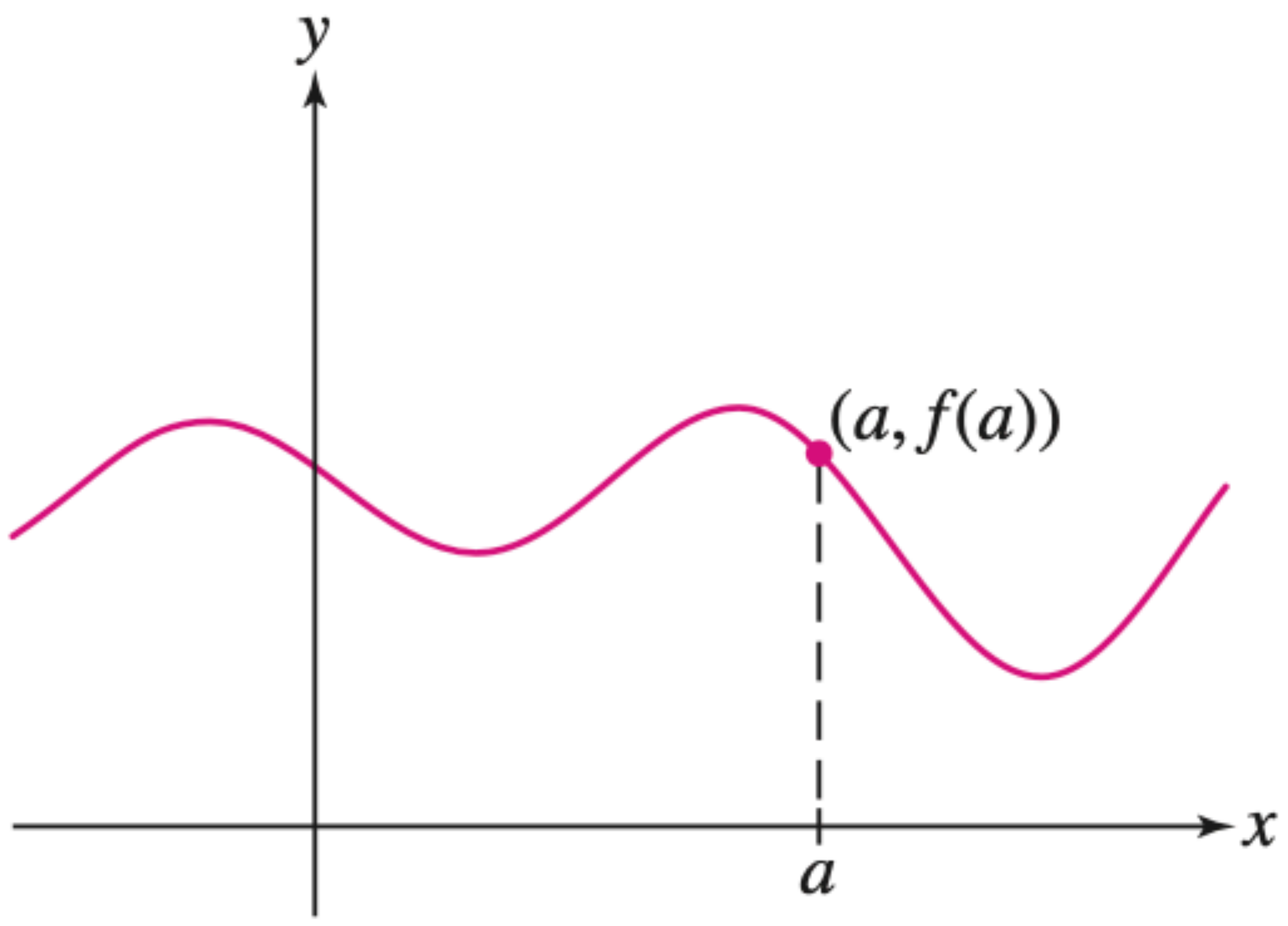
Εσωτερικό σημείο

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

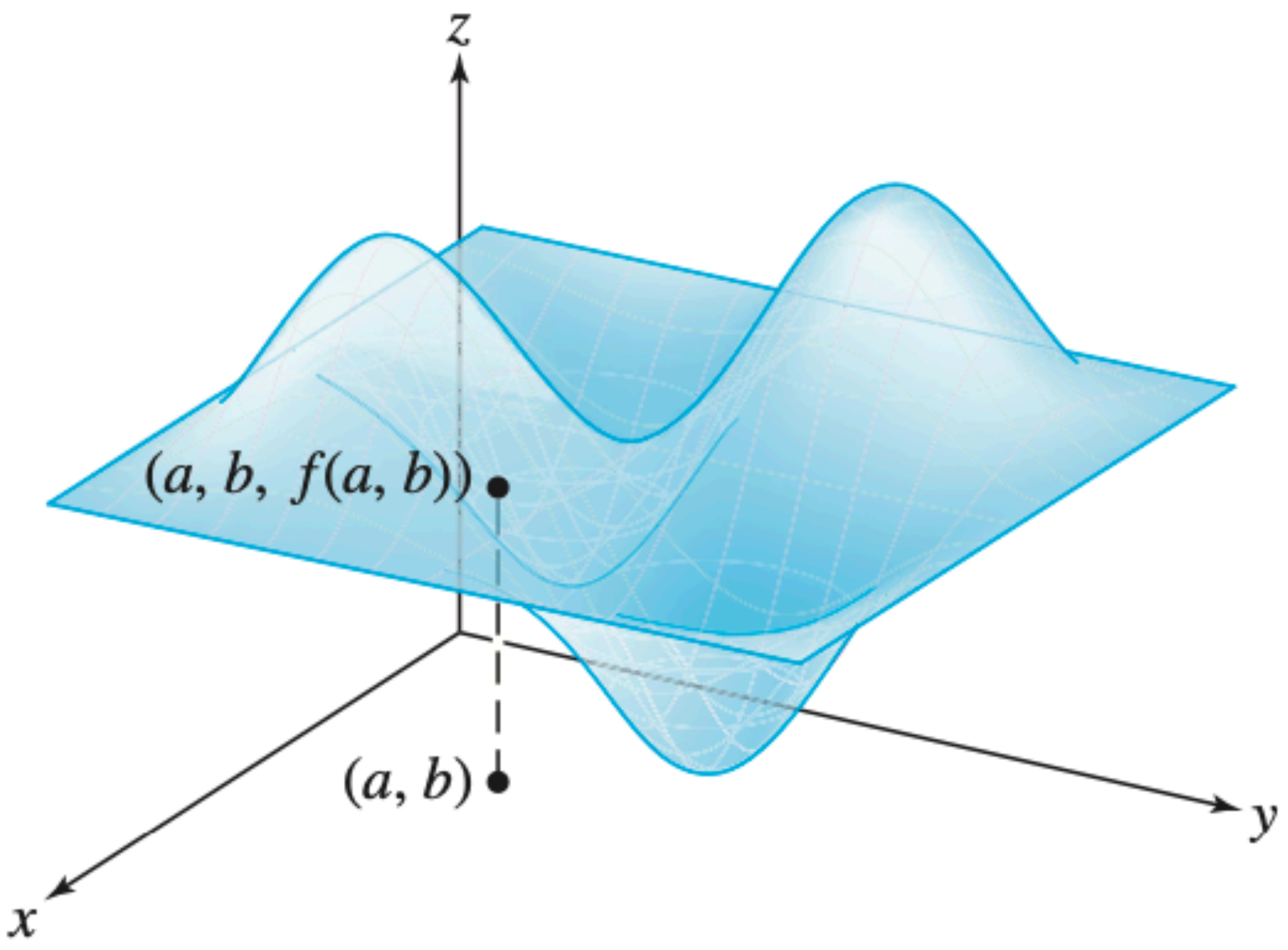


y
(x, y)
f
f(a, b)
0
x
0
f(x, y)
z
D
(a, b)

ΓΡΑΦΗΜΑ

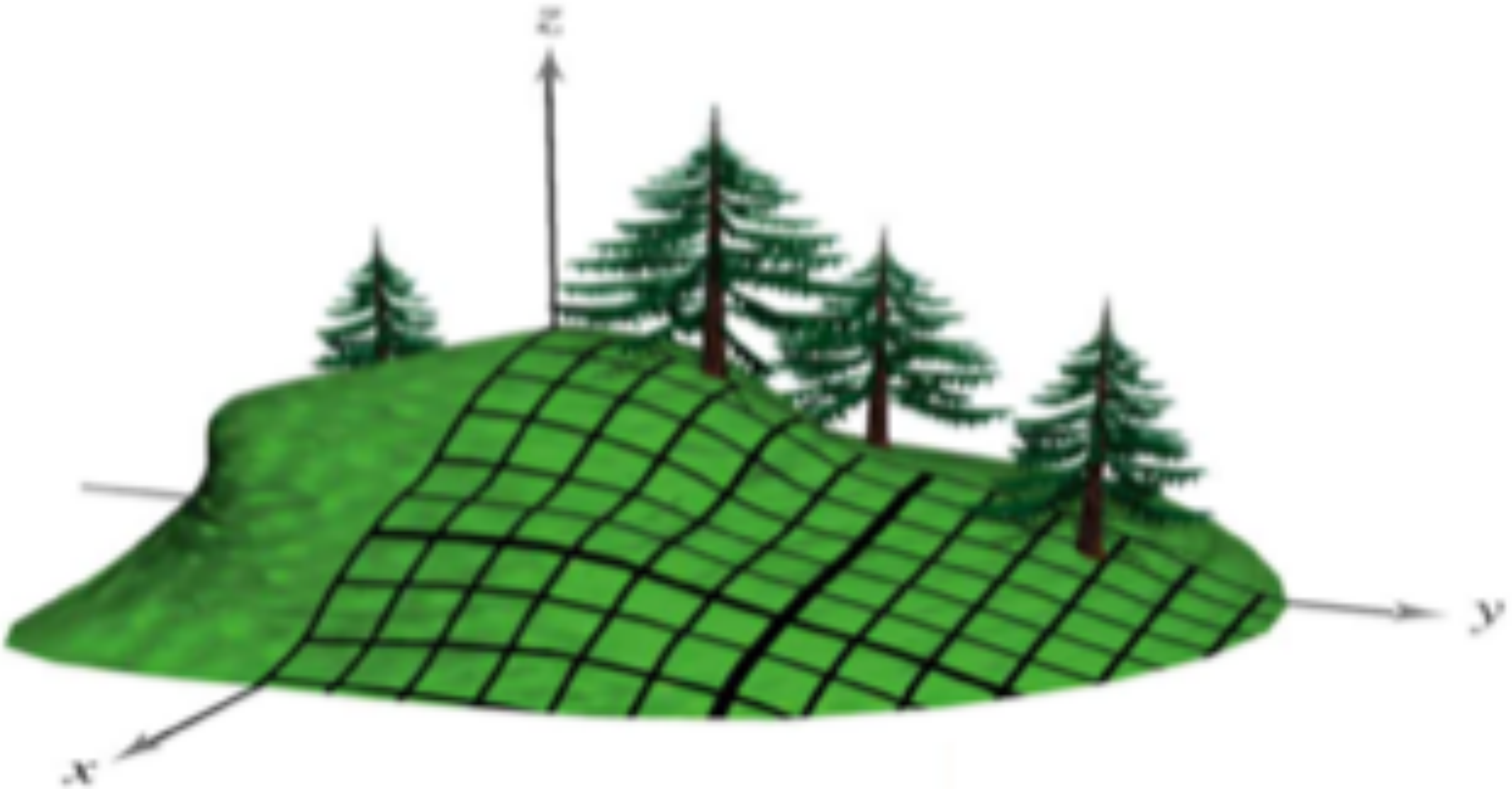


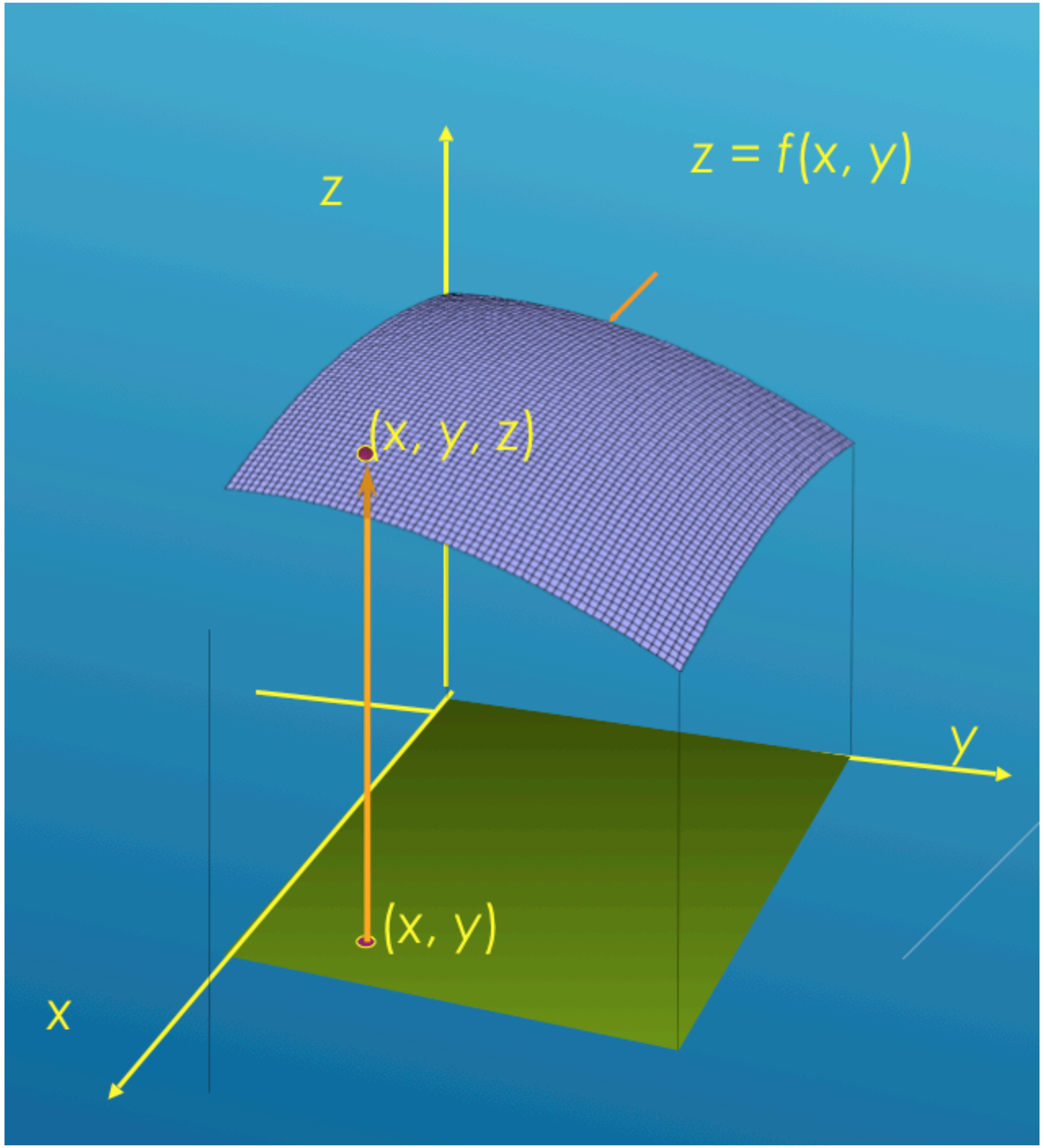
(α) Γραφική παράσταση της $y = f(x)$

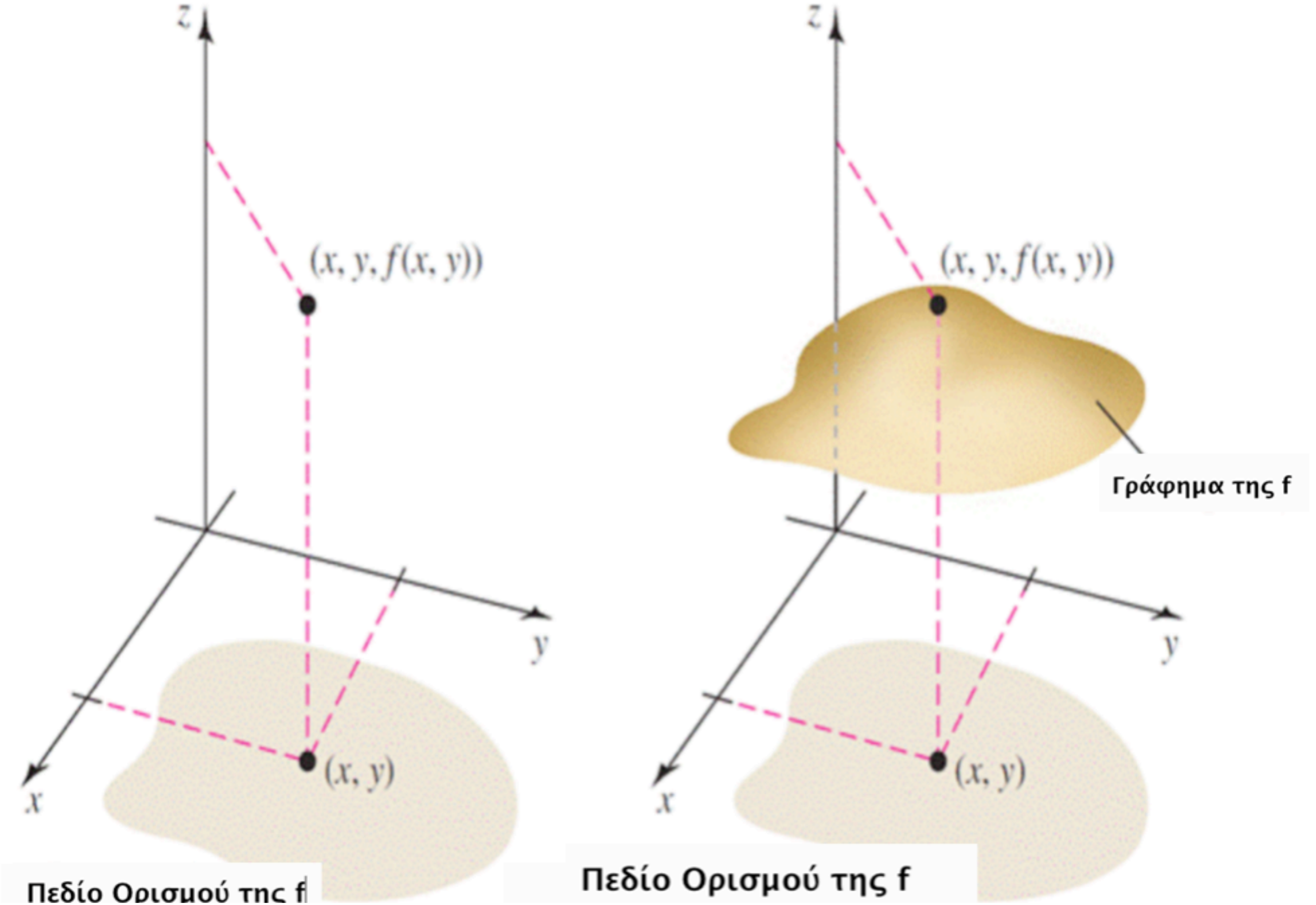


(β) Γραφική παράσταση της $z = f(x, y)$

$$z = f(x, y)$$




z = f(x, y)
z
(x, y, z)
y
(x, y)
x

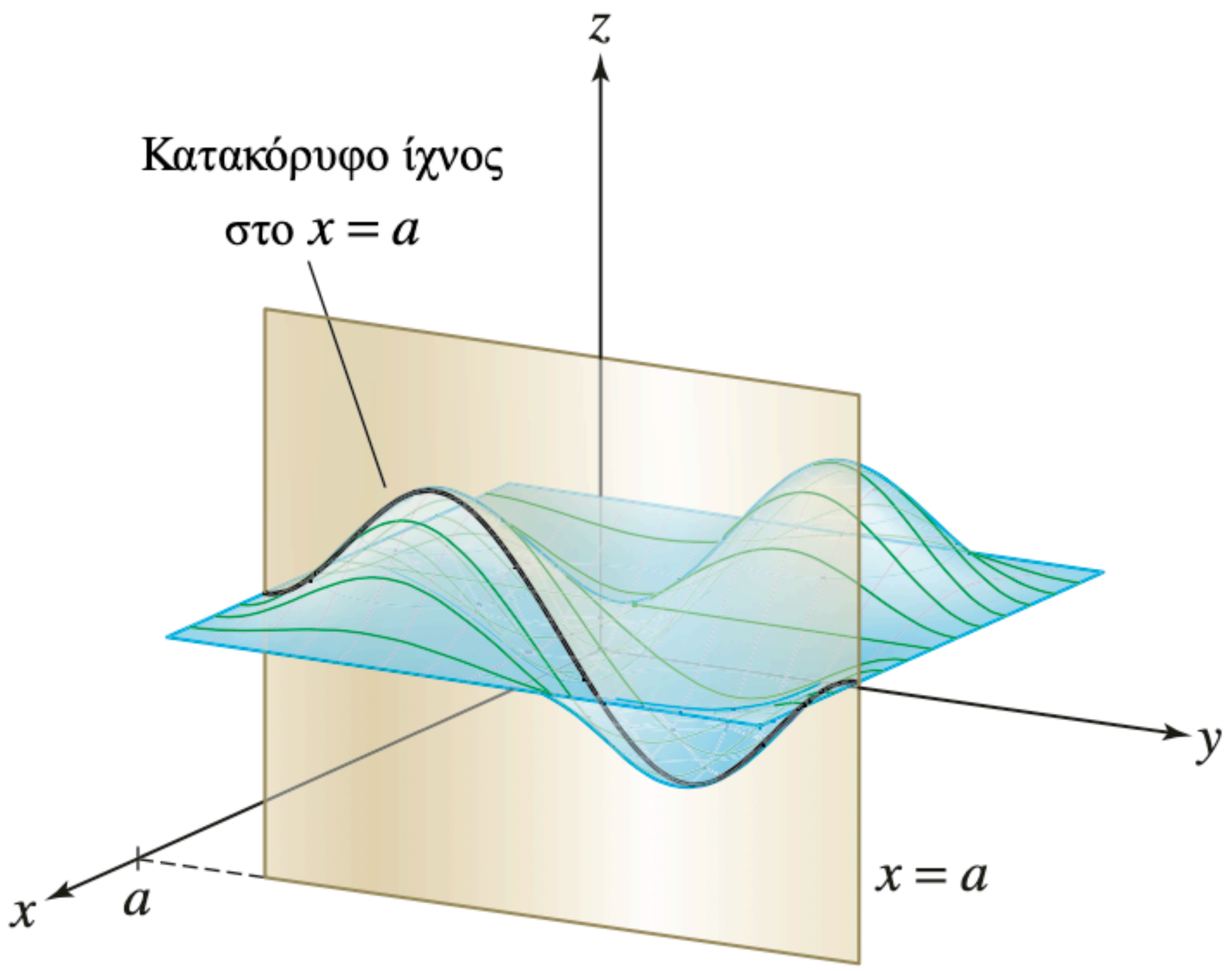

z
(x, y, f(x, y))
y
x
(x, y)
Πεδίο Ορισμού της f
z
(x, y, f(x, y))
Γράφημα της f
y
x
(x, y)
Πεδίο Ορισμού της f

ΙΧΝΗ

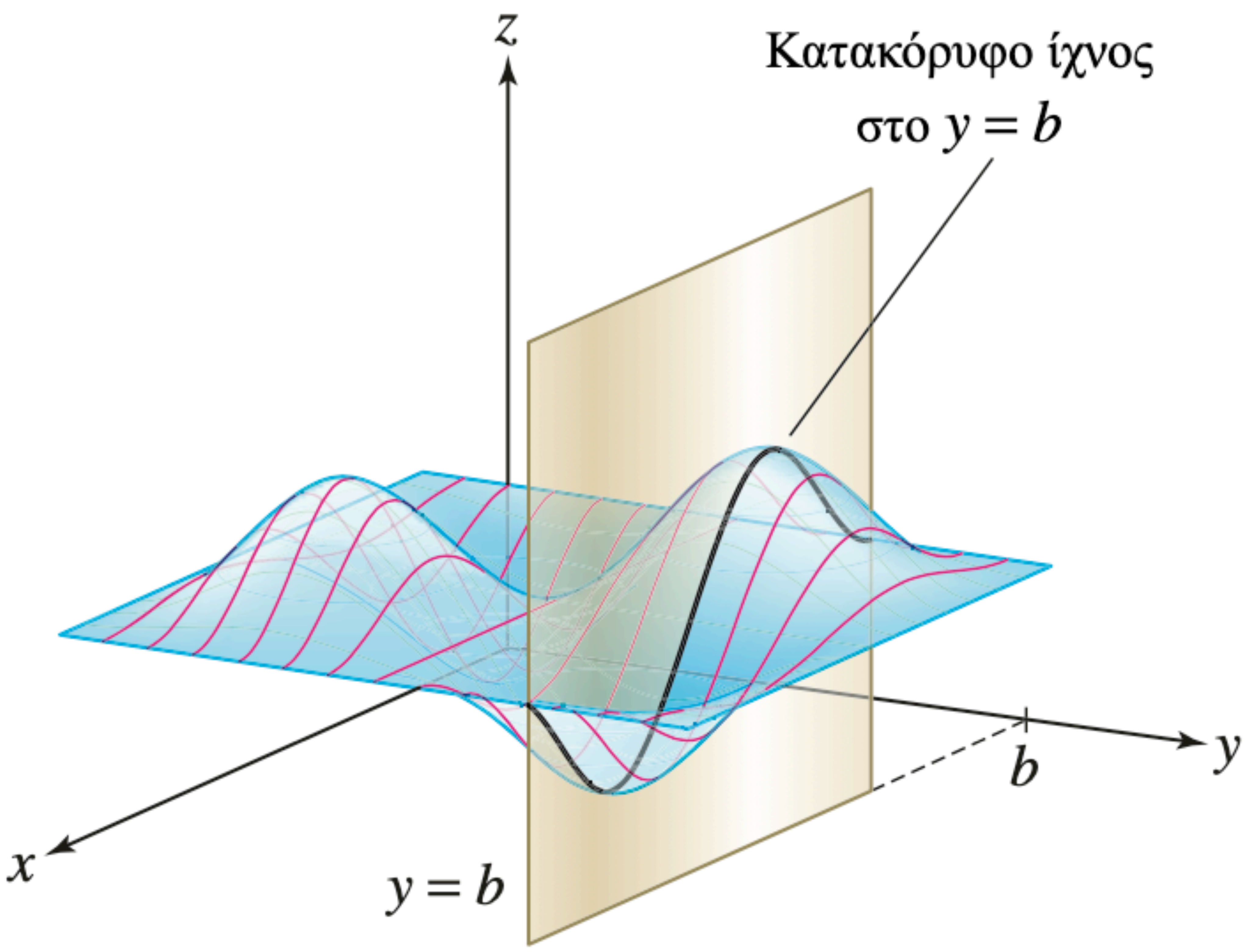
ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟ ΙΧΝΟΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΙΟ ΙΧΝΟΣ

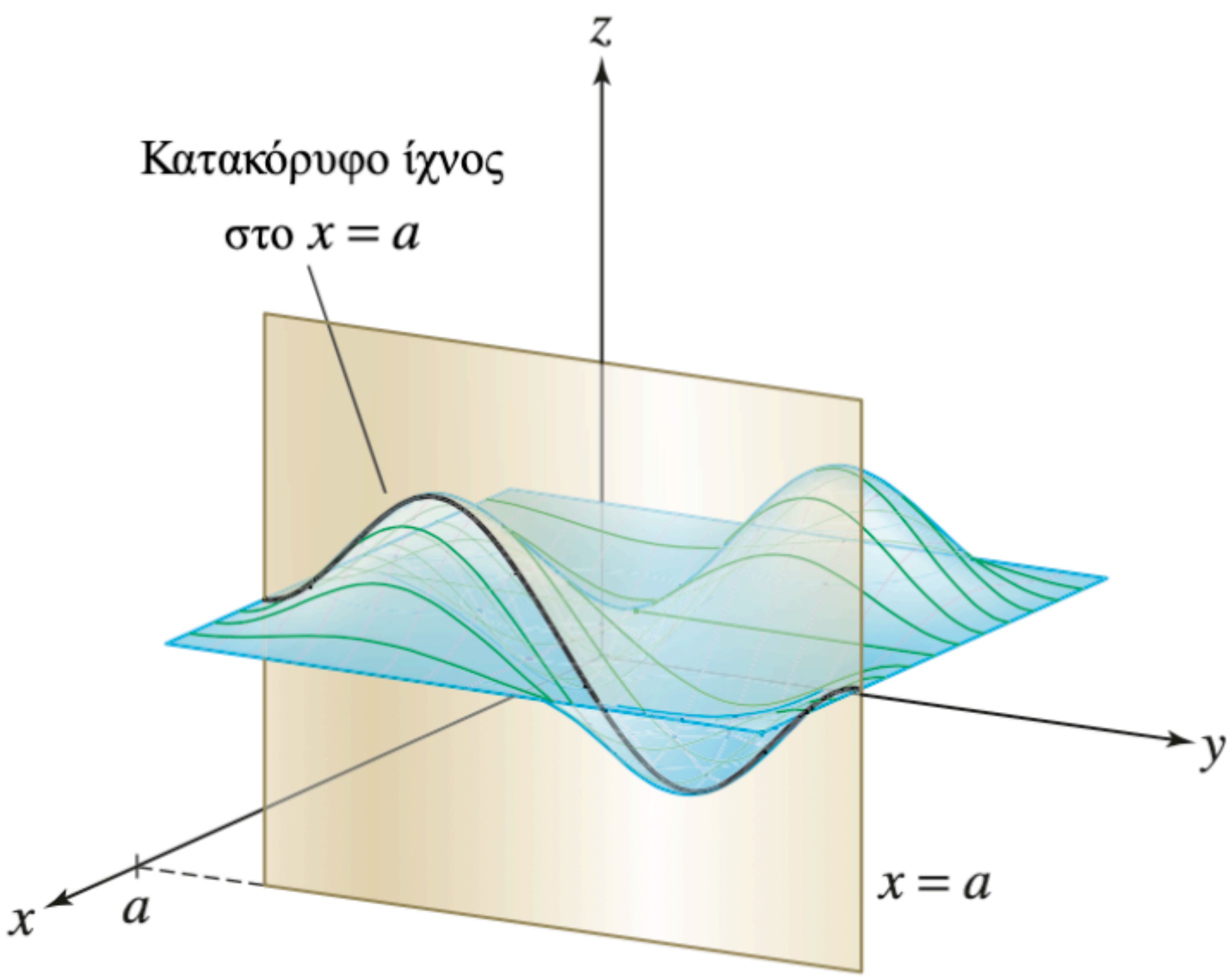
ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΟ ΙΧΝΟΣ



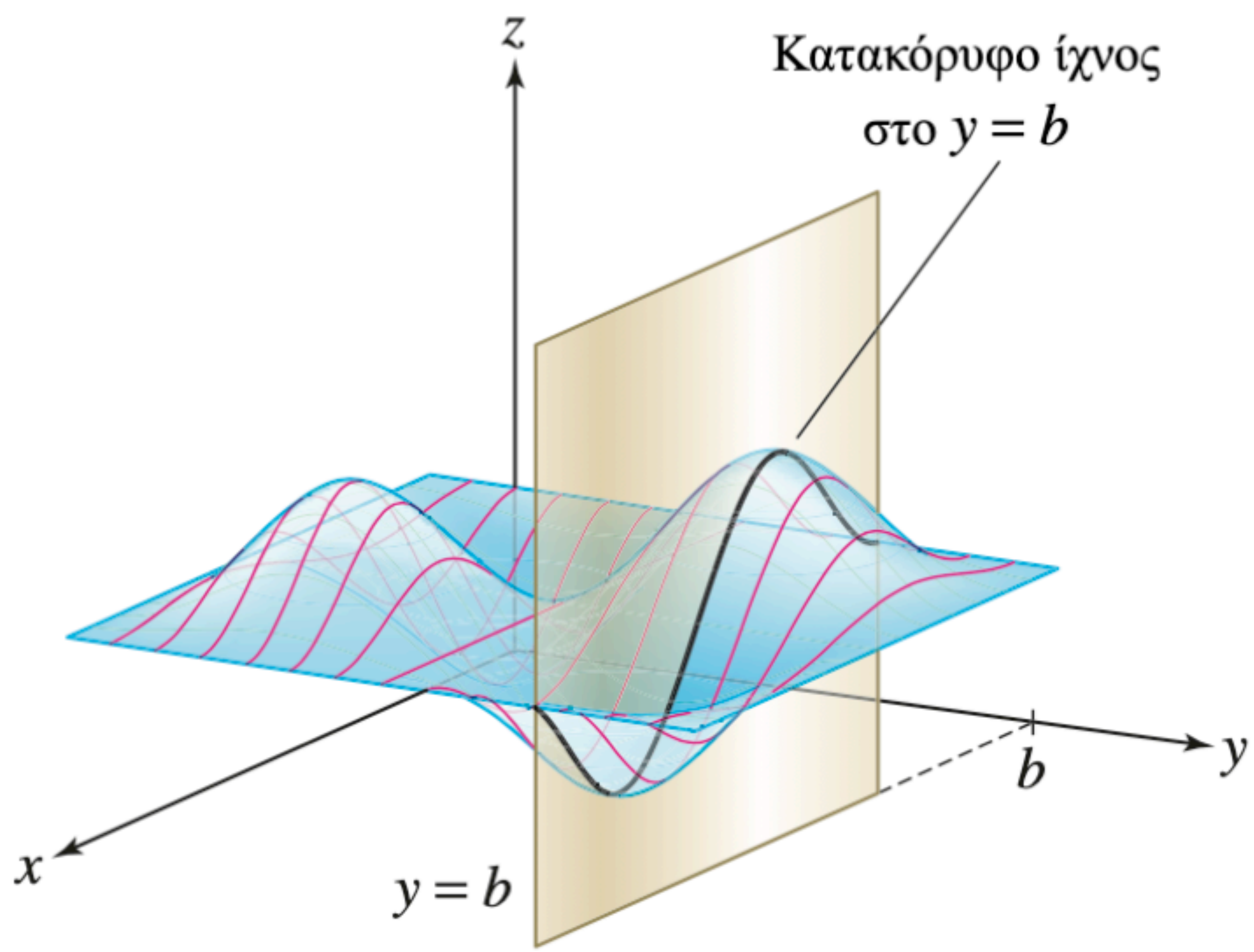
(α) Κατακόρυφα ίχνη παράλληλα στο επίπεδο yz



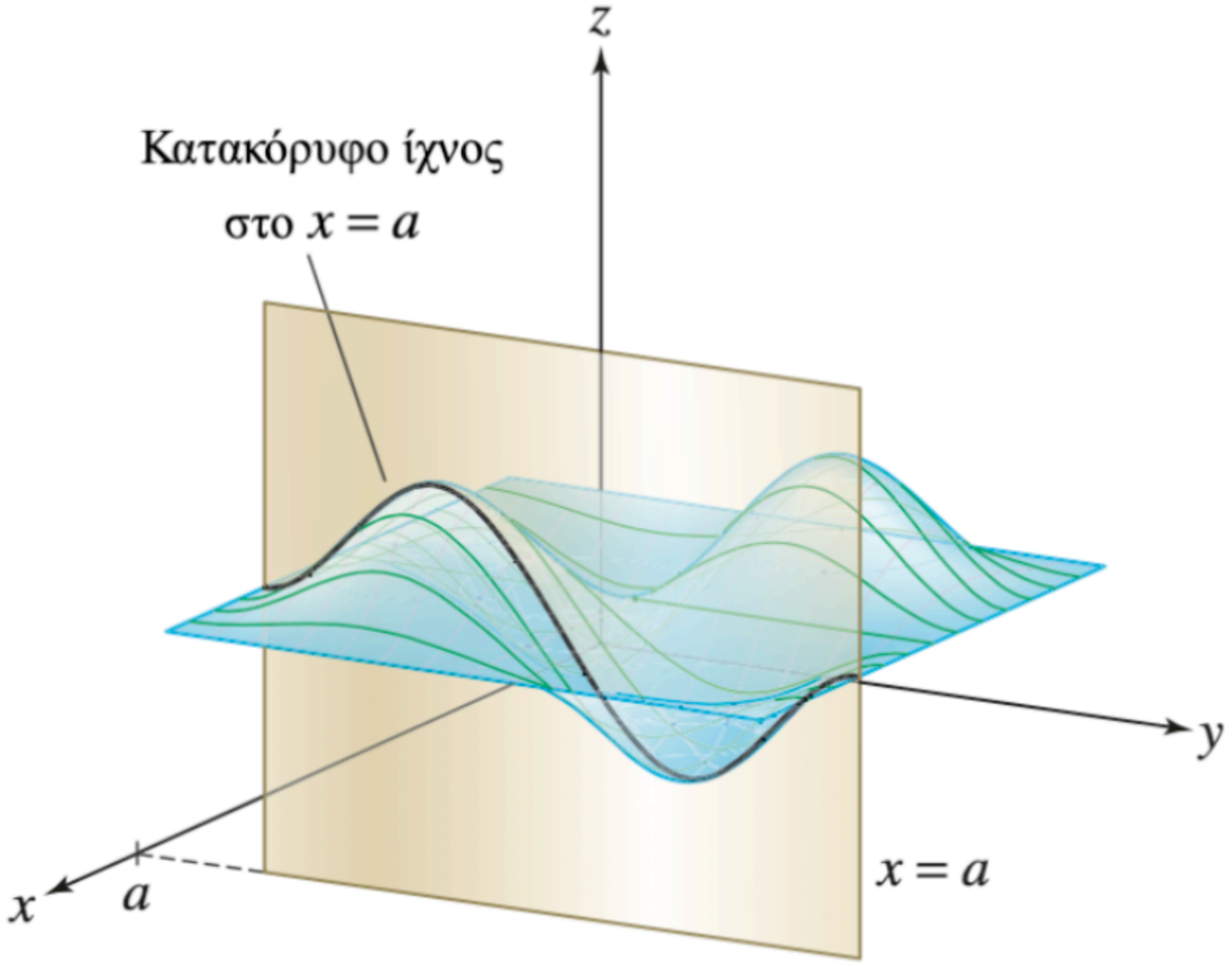
(β) Κατακόρυφα ίχνη παράλληλα στο επίπεδο xz



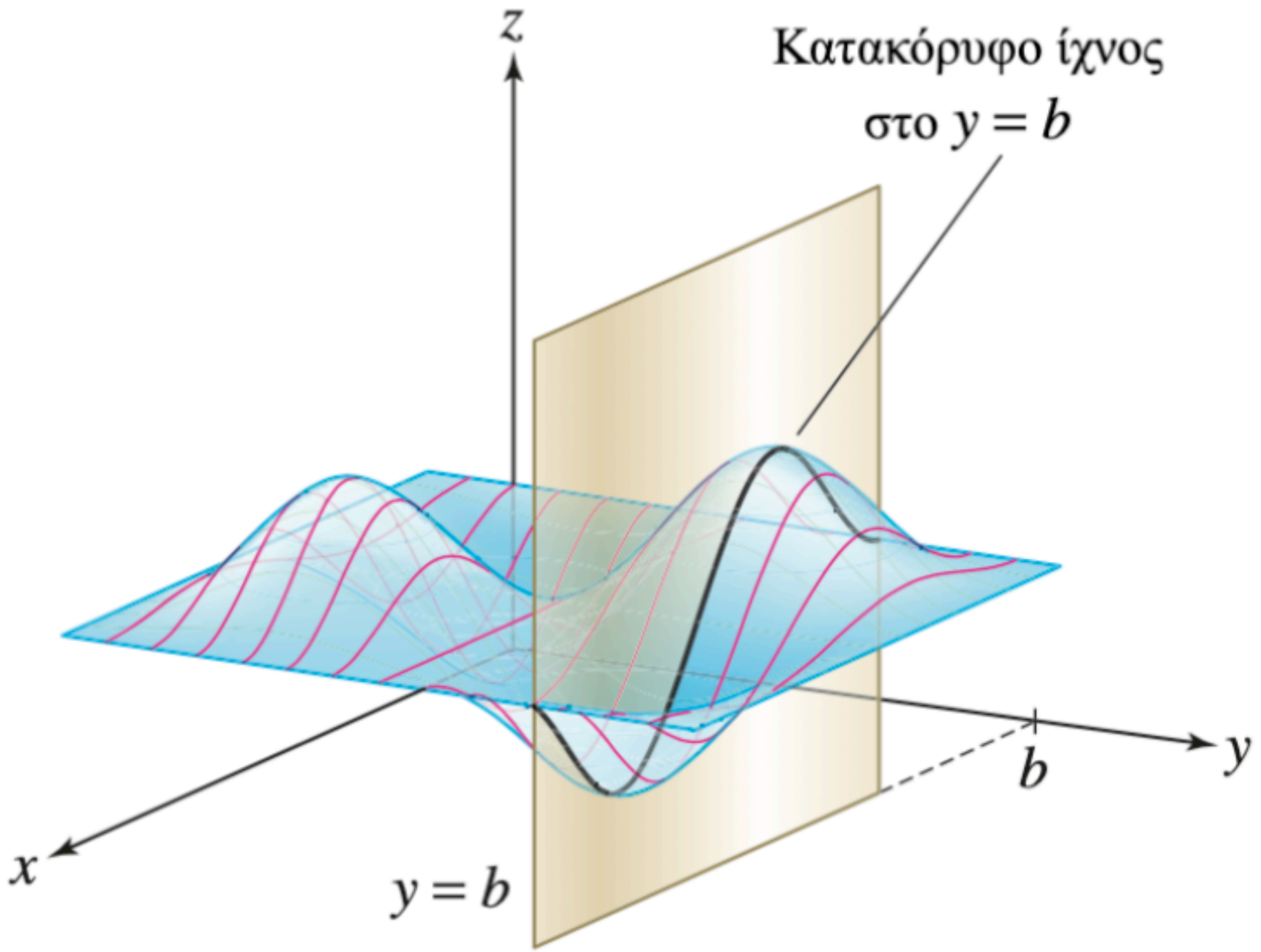
(α) Κατακόρυφα ίχνη παράλληλα στο επίπεδο yz



(β) Κατακόρυφα ίχνη παράλληλα στο επίπεδο xz

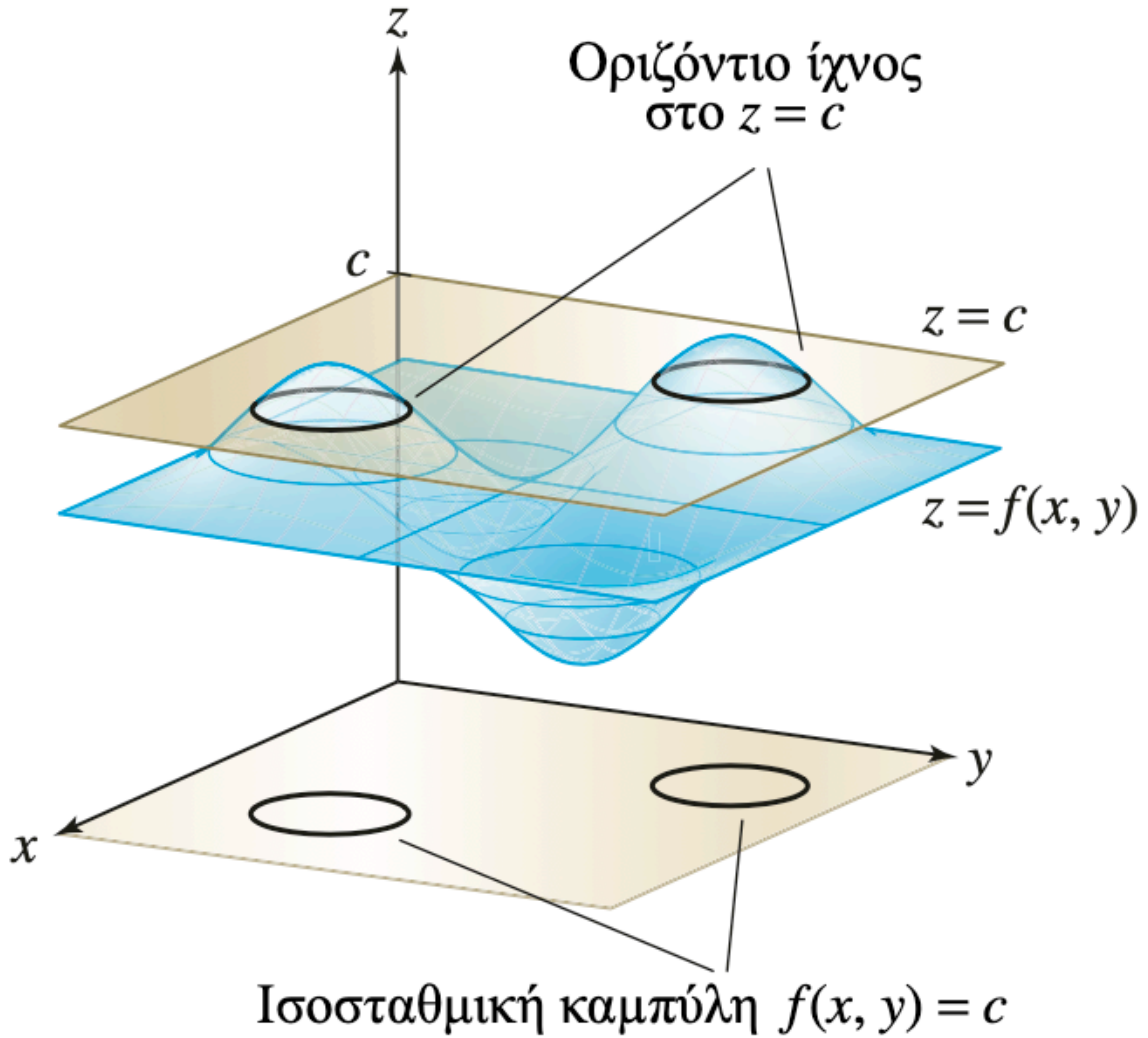


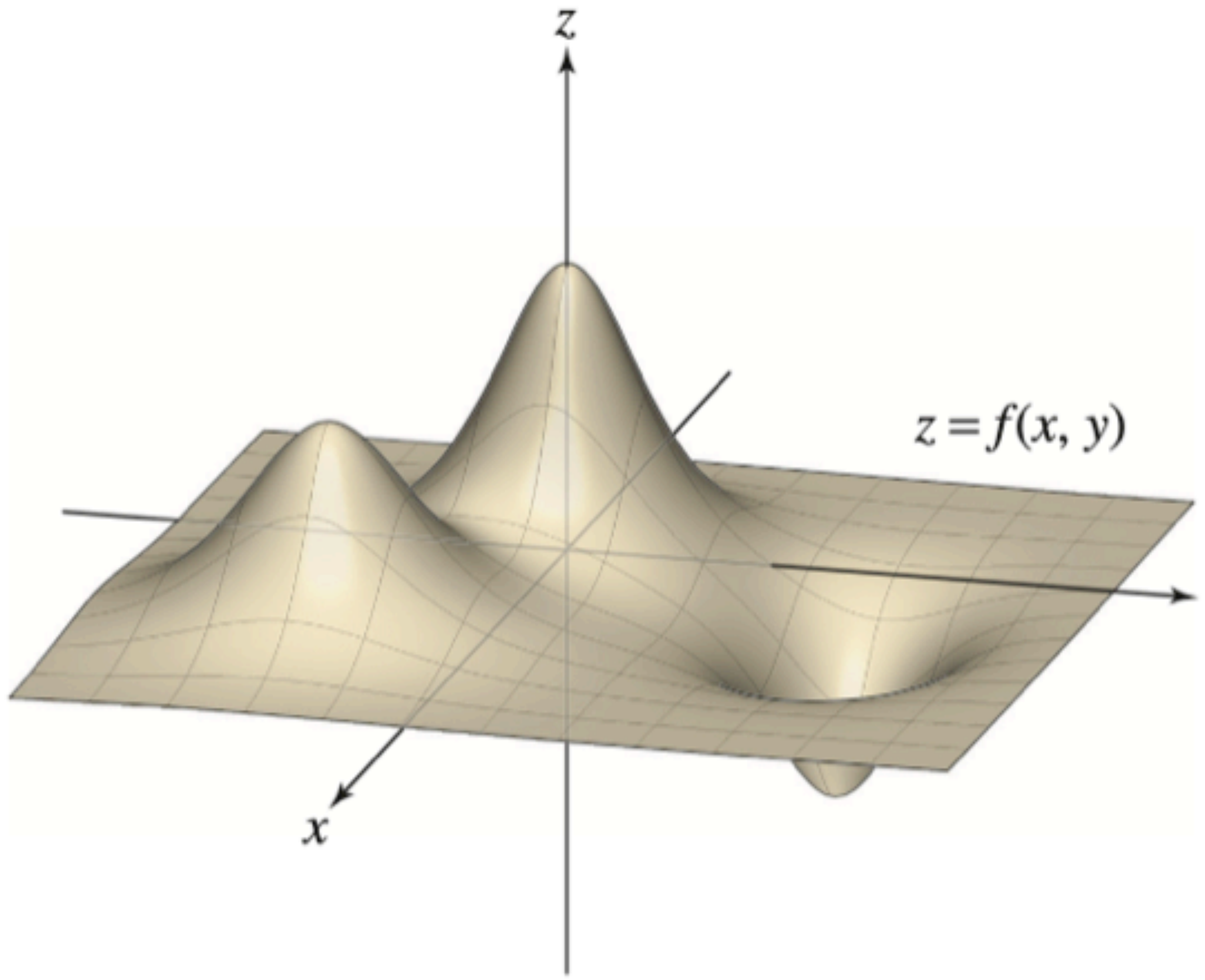
Κατακόρυφα ίχνη παράλληλα στο επίπεδο yz

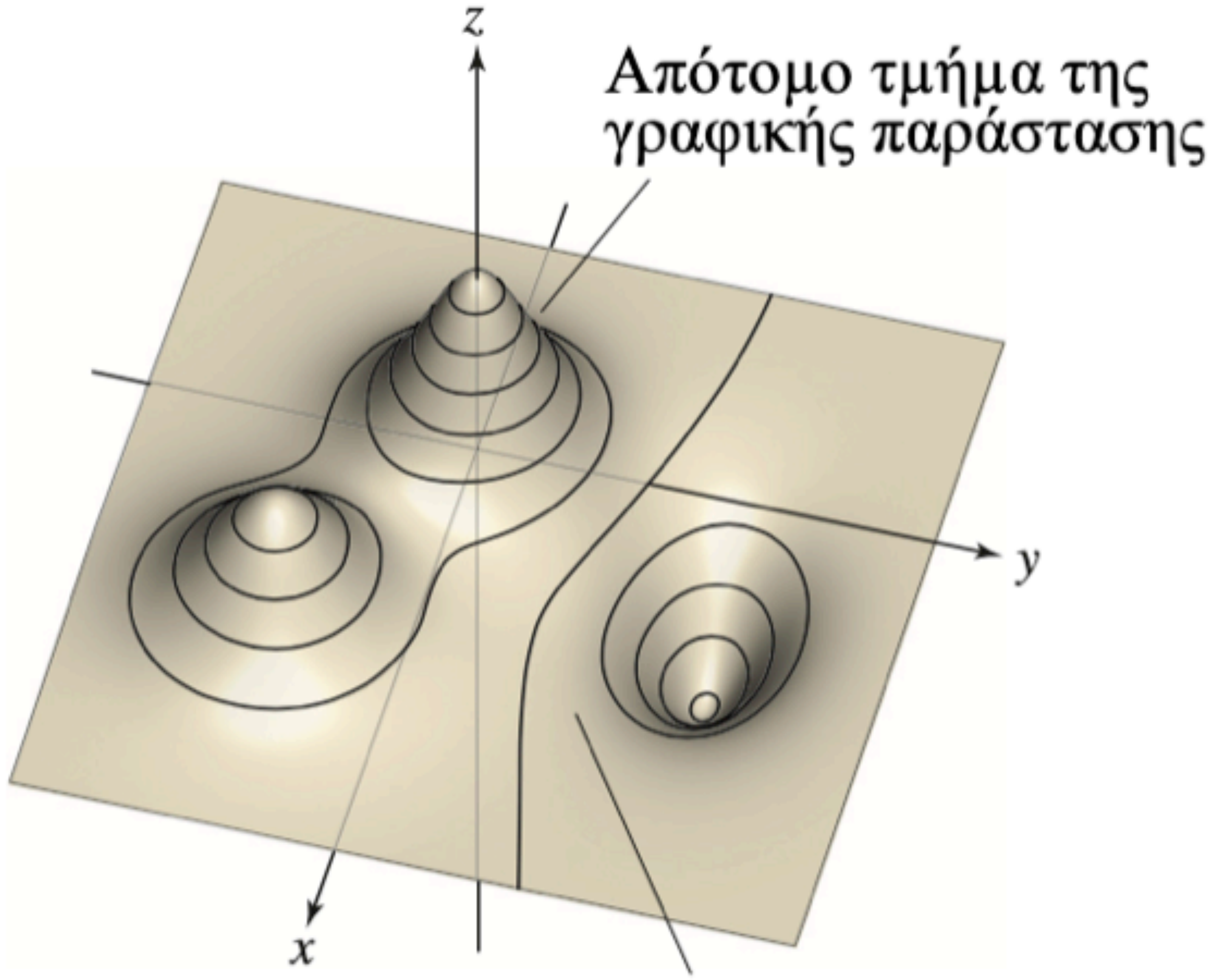


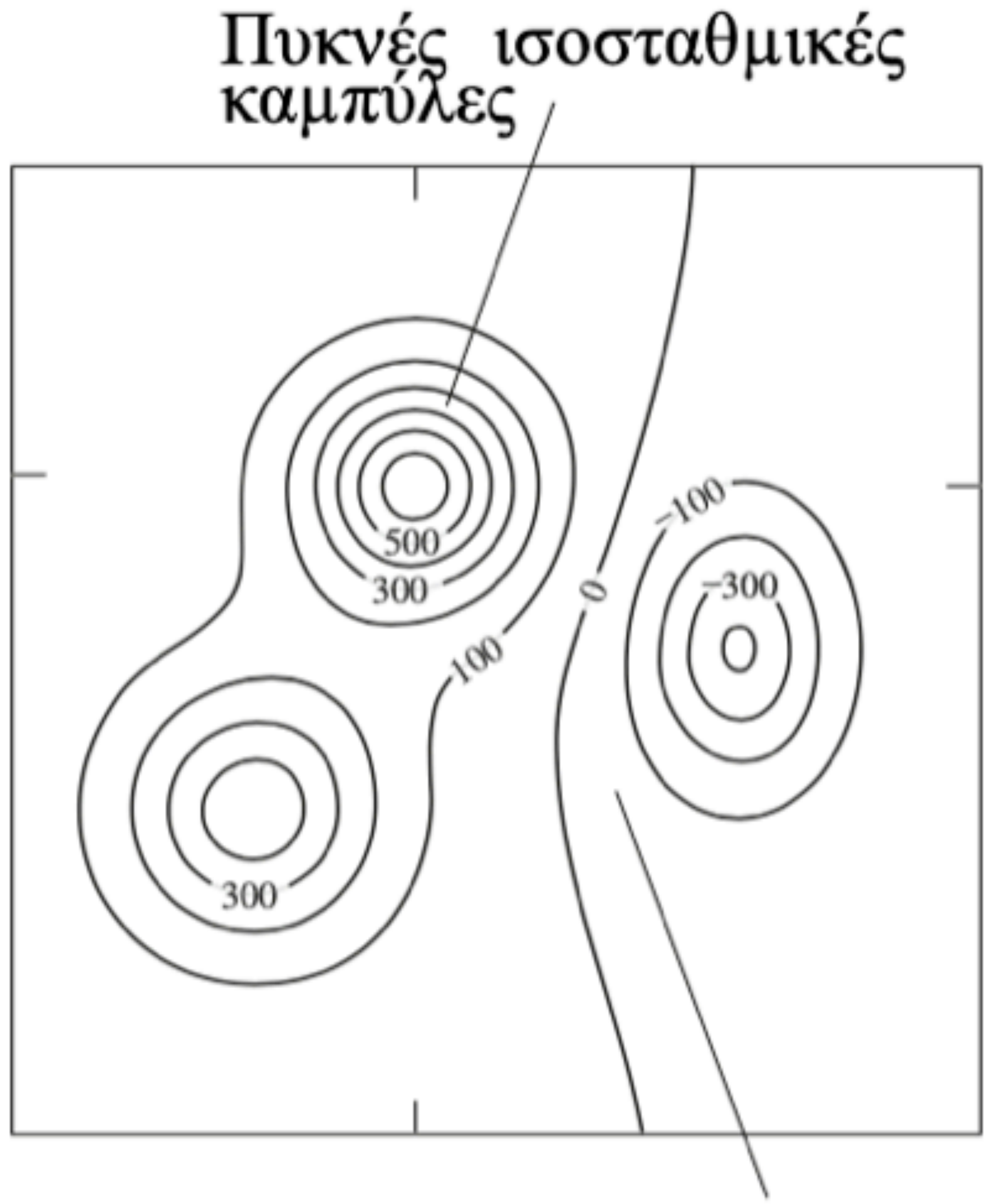
Κατακόρυφα ίχνη παράλληλα στο επίπεδο xz

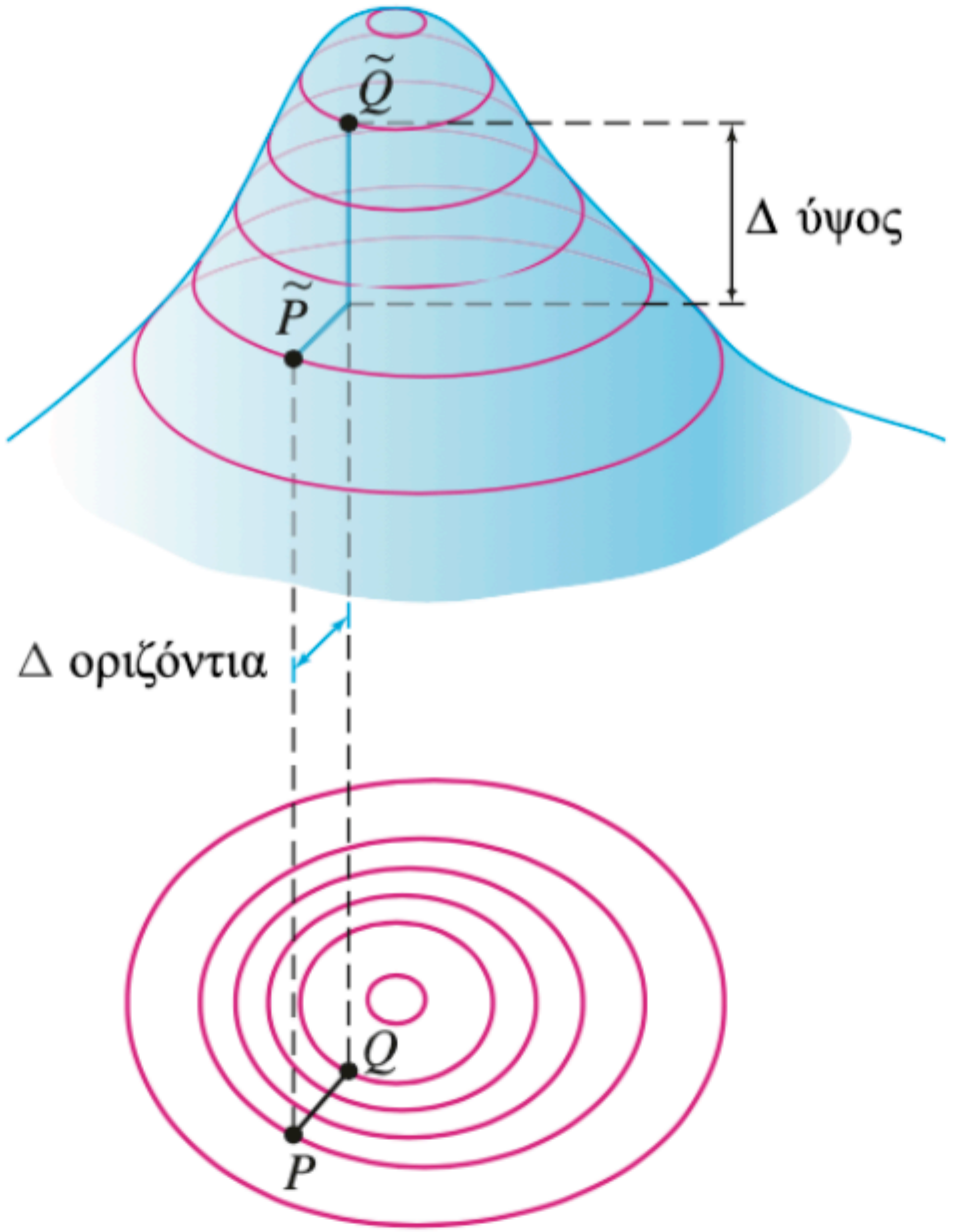
ΙΣΟΥΨΕΙΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ


z
Οριζόντιο ίχνος
στο z = c
c
z = c
z = f(x, y)
y
x
Ισοσταθμική καμπύλη f(x, y) = c

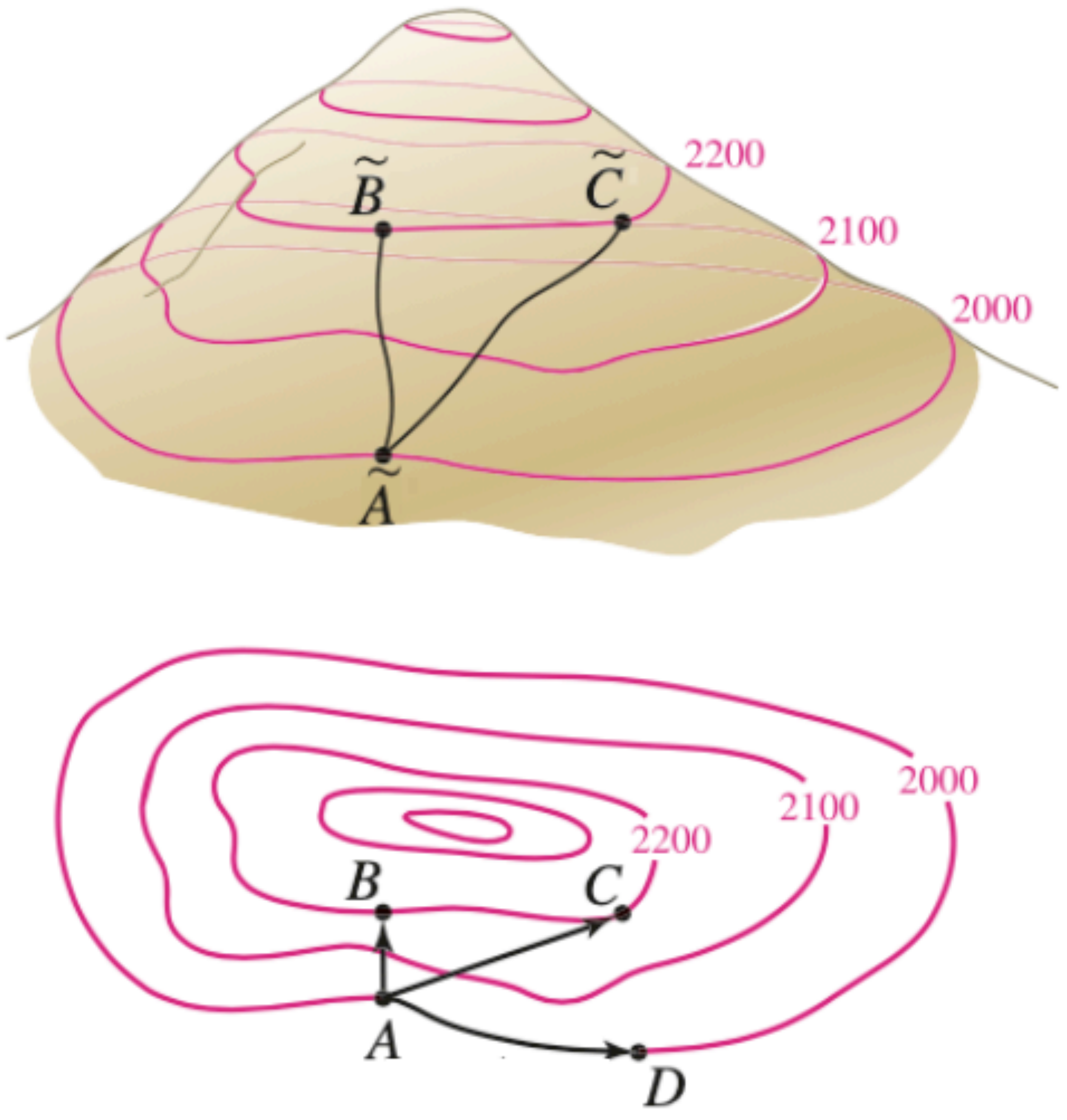

z
$z = f(x, y)$
y
x


z
Απότομο τμήμα της
γραφικής παράστασης
y
x


Πυκνές ισοσταθμικές
καμπύλες
500
300
100
0
−100
−300
300

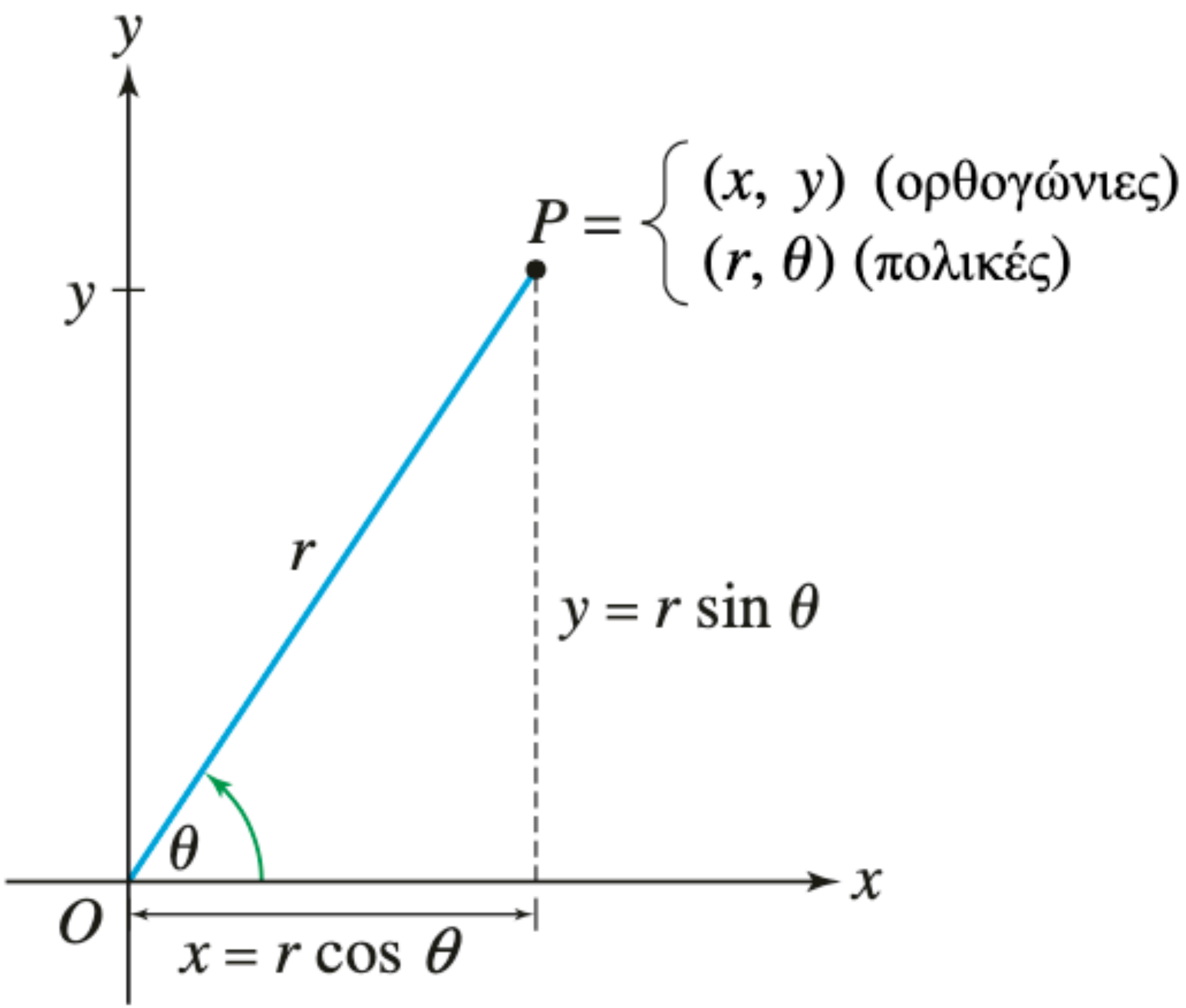


$\widetilde{Q}$
Δ ύψος
$\widetilde{P}$
Δ οριζόντια
Q
P



2200
2100
2000
$\widetilde{B}$
$\widetilde{C}$
$\widetilde{A}$
2000
2100
2200
B
C
A
D

ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ


y
P =
(x, y) (ορθογώνιες)
(r, θ) (πολικές)
y
r
y = r sin θ
θ
O
x
x = r cos θ

Πολικές σε ορθογώνιες

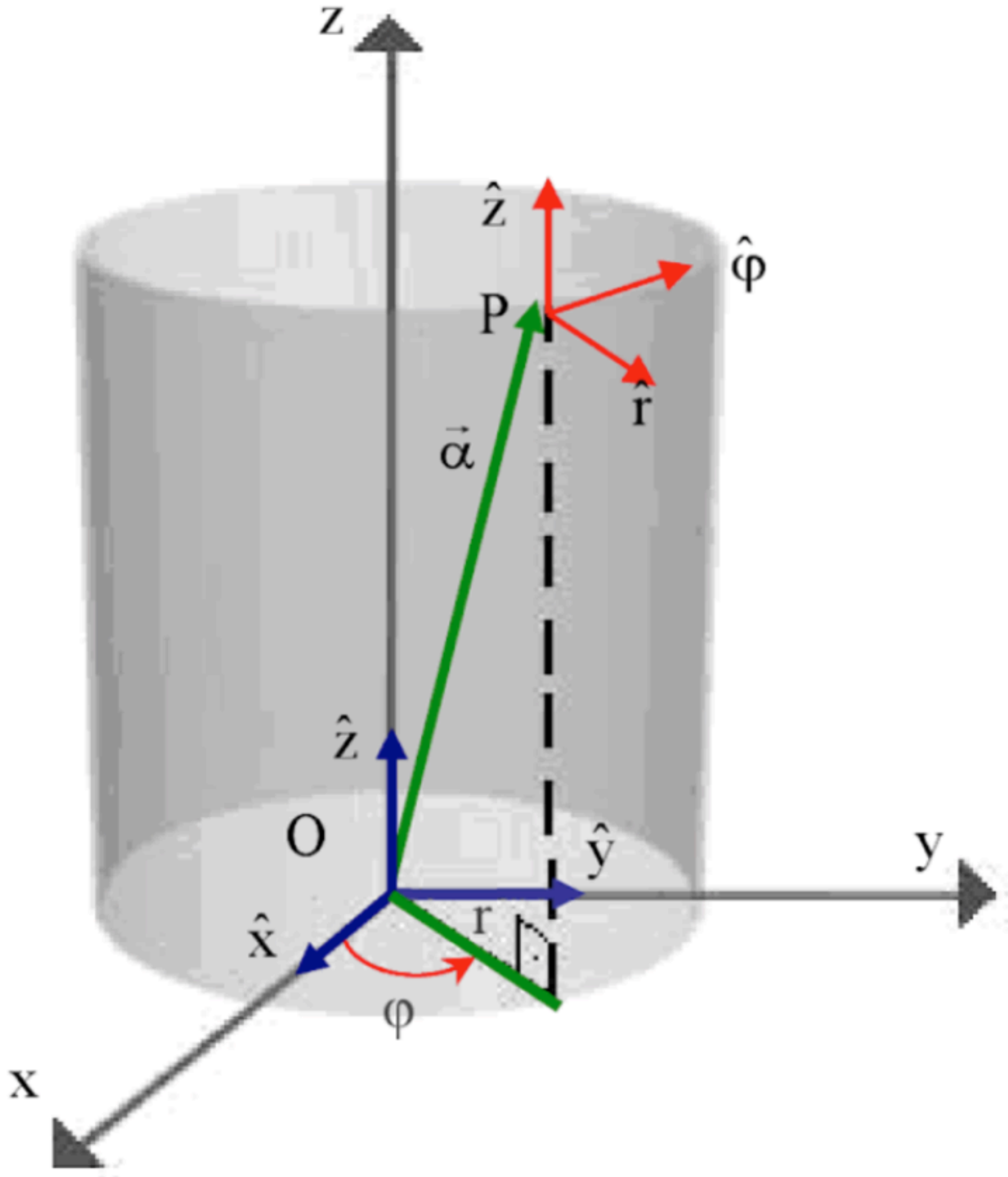
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

Ορθογώνιες σε πολικές

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$


z
$\hat{z}$
$\hat{\varphi}$
P
$\hat{r}$
$\vec{\alpha}$
$\hat{z}$
O
$\hat{y}$
y
$\hat{x}$
r
φ
x

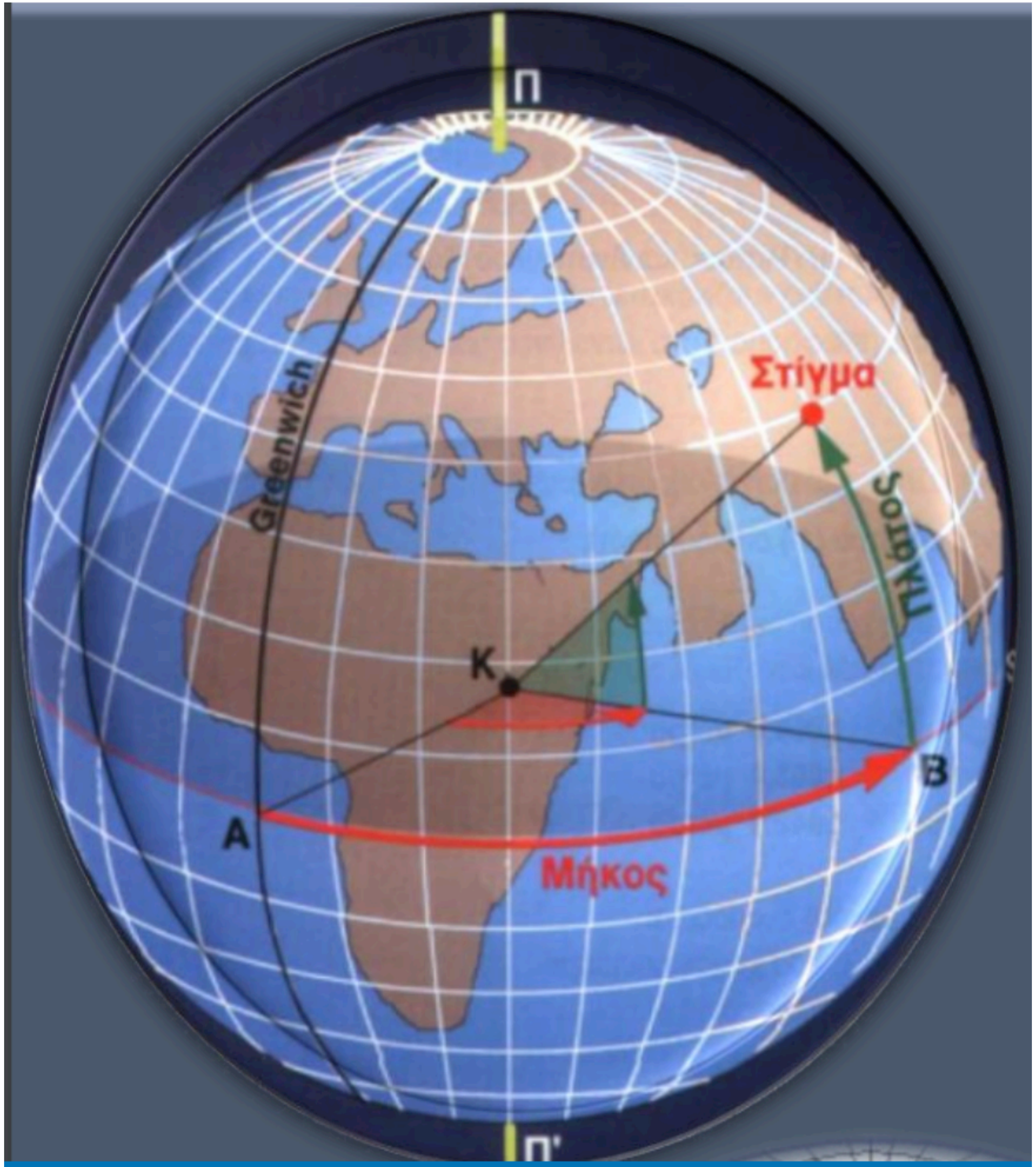
Κυλινδρικές σε ορθογώνιες

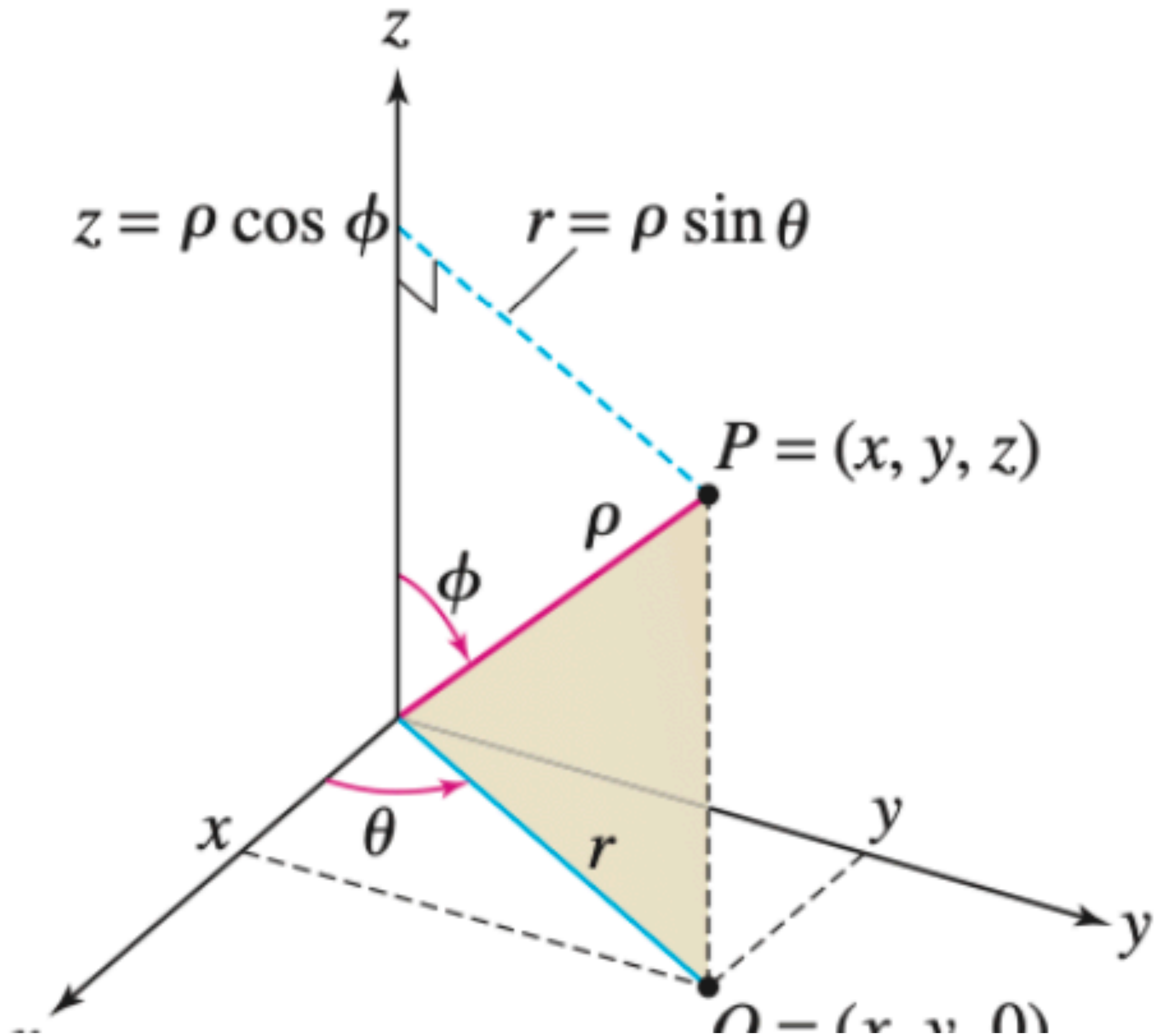
$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z$$

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ


Π
Greenwich
Στίγμα
Πλάτος
K
B
A
Μήκος
Π'

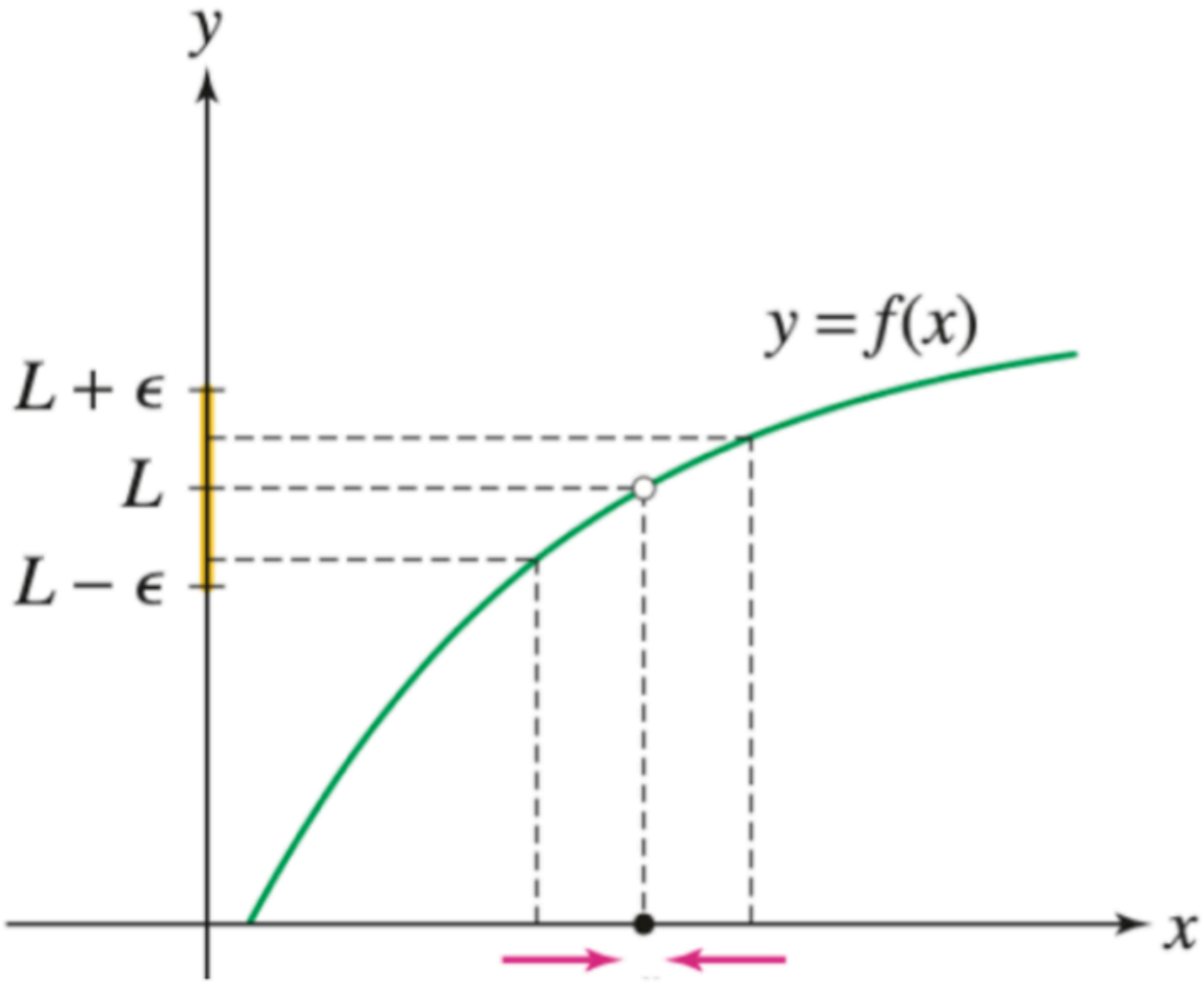


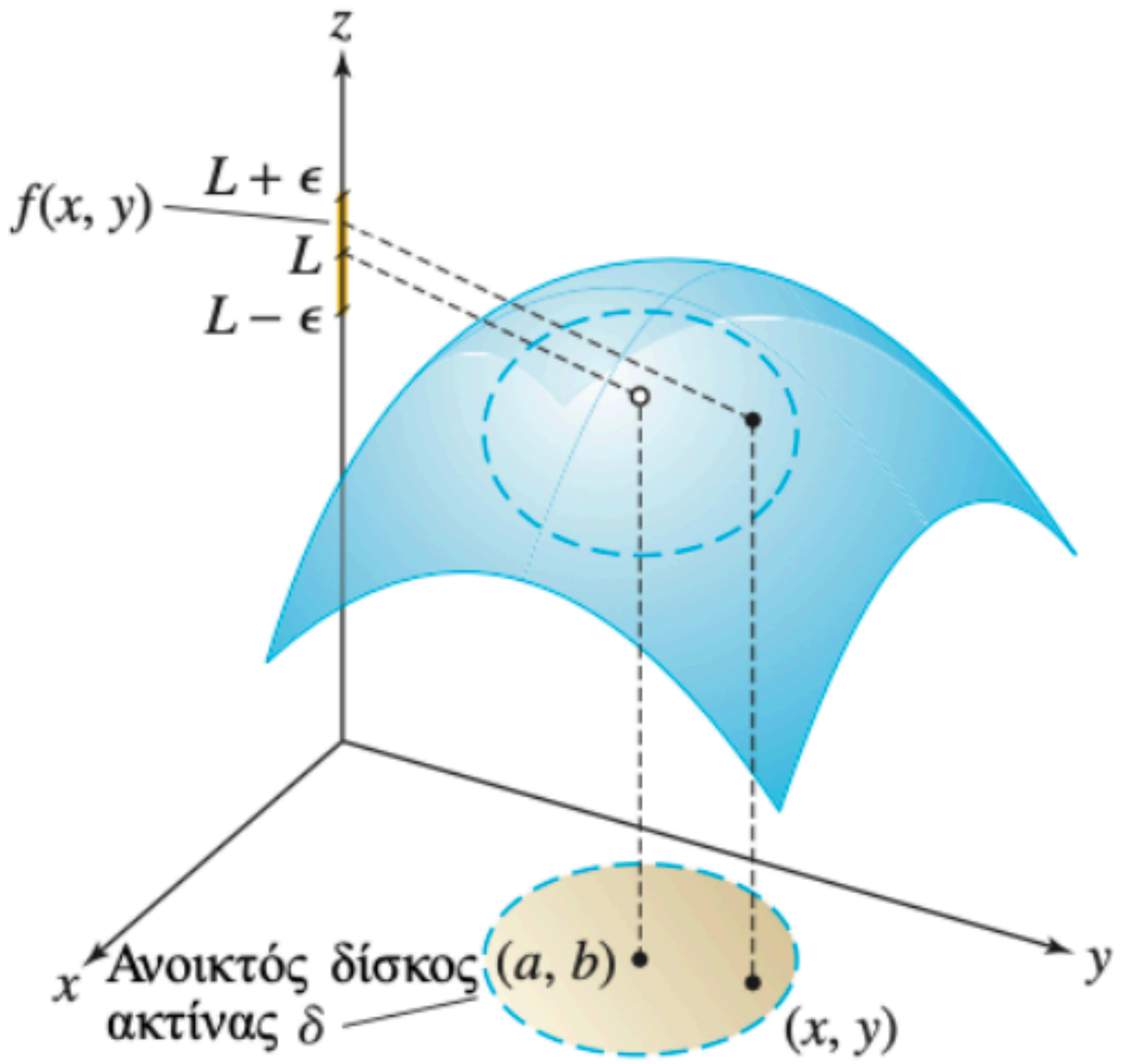
$$x = \rho\sin\phi\cos\theta$$

$$y = \rho\sin\phi\sin\theta$$

$$z = \rho\cos\phi$$

ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ


y
$y = f(x)$
$L + \epsilon$
L
$L - \epsilon$
x

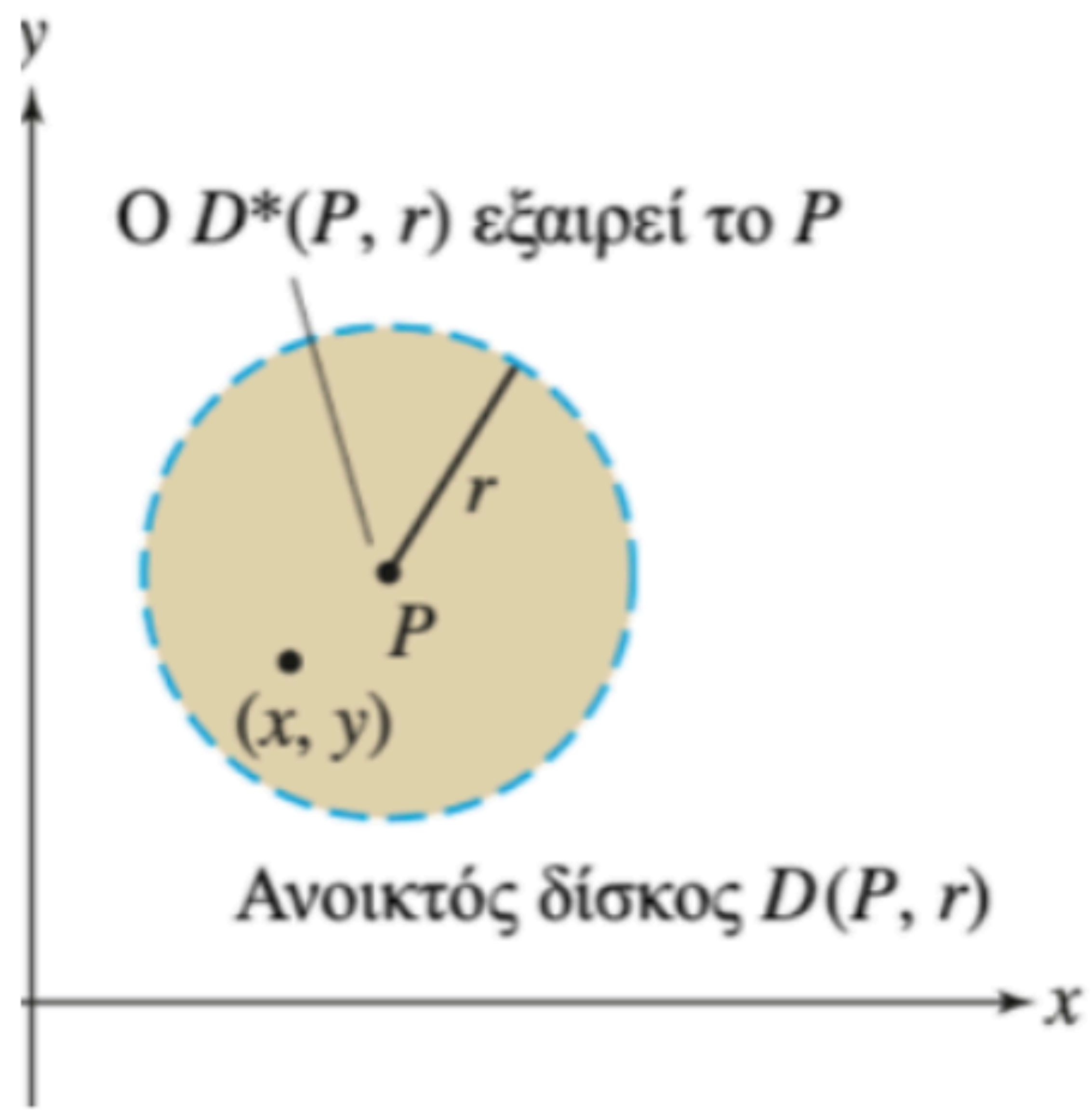

z
$L + \epsilon$
$f(x, y)$
L
$L - \epsilon$
x
Ανοικτός δίσκος
ακτίνας δ
(a, b)
(x, y)
y

ΟΡΙΣΜΟΣ **Όριο** Έστω ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ ορίζεται κοντά στο σημείο $P=(a,b)$. Τότε

$$\lim_{(x,y)\to P} f(x,y) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν το (x,y) ικανοποιεί τη συνθήκη

$$0 < d((x,y),(a,b)) < \delta, \quad \text{τότε να ισχύει} \quad |f(x,y)-L| < \varepsilon$$



Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

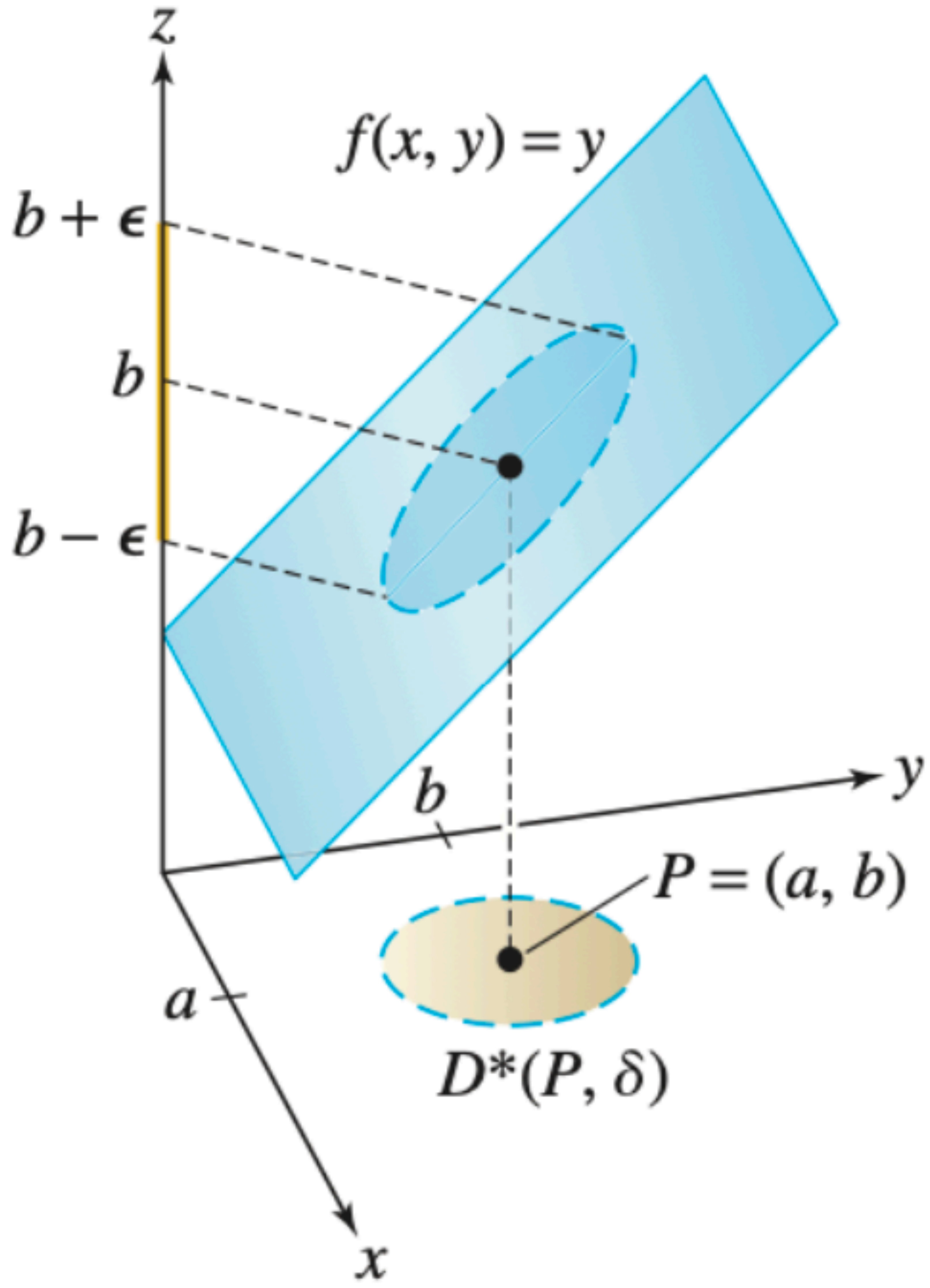
Χρησιμοποιώντας τον ορισμό να αποδείξετε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Να αποδείξετε ότι

α) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$

β) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b.$



Να υπολογιστούν τα

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{y^2-4x+y}{x+2y+3}$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1}{x}(1+y^2)\sin x + \frac{\sin(xy)}{\sin x \sin y}\right)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1 **Νόμοι ορίων** Υποθέτουμε ότι τα όρια $\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)$ και $\lim_{(x,y)\to P} g(x,y)$ υπάρχουν.

(i) **Νόμος αθροίσματος:**

$$\lim_{(x,y)\to P} (f(x,y) + g(x,y)) = \lim_{(x,y)\to P} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to P} g(x,y)$$

(ii) **Νόμος πολλαπλασιασμού με σταθερά:** Για οποιονδήποτε αριθμό k,

$$\lim_{(x,y)\to P} kf(x,y) = k \lim_{(x,y)\to P} f(x,y)$$

(iii) **Νόμος γινομένου:**

$$\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)\, g(x,y) = \left(\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)\right)\left(\lim_{(x,y)\to P} g(x,y)\right)$$

(iv) **Νόμος πηλίκου:** Αν $\lim_{(x,y)\to P} g(x,y) \neq 0$, τότε

$$\lim_{(x,y)\to P} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to P} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to P} g(x,y)}$$

ΕΠΑΛΛΗΛΑ ΟΡΙΑ

Επάλληλα ή διαδοχικά όρια μιας συνάρτησης $f(x,y)$ ονομάζονται τα όρια:

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \quad \text{και}$$

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

Τα επάλληλα όρια δεν είναι απαραίτητα ίσα.

Αν υπάρχει το

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y),$$

και υπάρχουν τα επάλληλα όρια τότε είναι ίσα.

ΕΠΑΛΛΗΛΑ ΟΡΙΑ

Αν $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = l$, τότε το l είναι πιθανό όριο και από τον ορισμό ελέγχουμε αν όντως είναι το όριο.

Έστω η συνάρτηση:

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & \text{αν } x \neq 0 \text{ και } y \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \text{ ή } y = 0 \end{cases}$$

Προσδιορίστε ποιά από τα όρια

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \quad \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right), \quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

υπάρχουν και υπολογίστε τα.

Πότε δεν υπάρχει το όριο;

Κατ' αντιστοιχία με τους πιο πάνω τρόπους προσδιορισμού του πιθανού ορίου, το όριο δεν υπάρχει:

I. αν

$$\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x^k) = \varphi(\lambda).$$

II. Αν για το πολικό πλησίασμα ισχύει:

$$\lim_{\rho\to 0^+} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \varphi(\theta),$$

δηλαδή το όριο είναι εξαρτώμενο του θ.

III. Αν

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right),$$

δηλαδή τα επάλληλα όρια <u>υπάρχουν και δεν είναι ίσα</u>.

Πότε δεν υπάρχει το όριο;

Κατ' αντιστοιχία με τους πιο πάνω τρόπους προσδιορισμού του πιθανού ορίου, το όριο δεν υπάρχει:

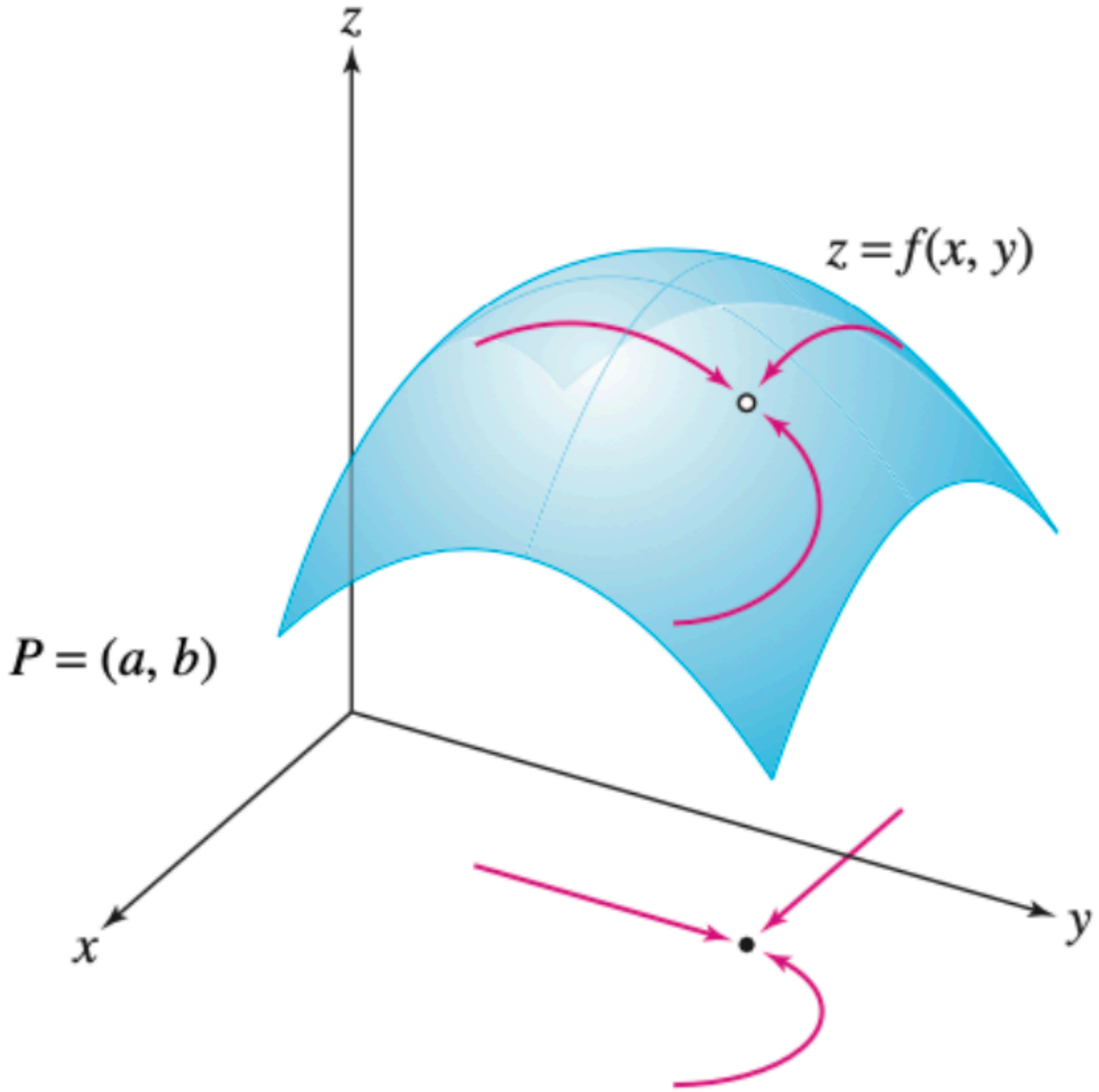
I. αν

$$\lim_{x\to 0} f(x, \lambda x^k) = \varphi(\lambda).$$

II. Αν για το πολικό πλησίασμα ισχύει:

$$\lim_{\rho\to 0^+} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \varphi(\theta),$$

δηλαδή το όριο είναι εξαρτώμενο του θ.



Έστω $a, b \geq 0$. Να αποδείξετε ότι αν $a + b > 2$, τότε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a y^b}{x^2 + y^2} = 0$$

ενώ αν $a + b \leq 2$, τότε το προηγούμενο όριο δεν υπάρχει.

Πότε δεν υπάρχει το όριο;

III. Αν

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right),$$

δηλαδή τα επάλληλα όρια υπάρχουν και δεν είναι ίσα.

Να ελέγξετε αν υπάρχει το όριο

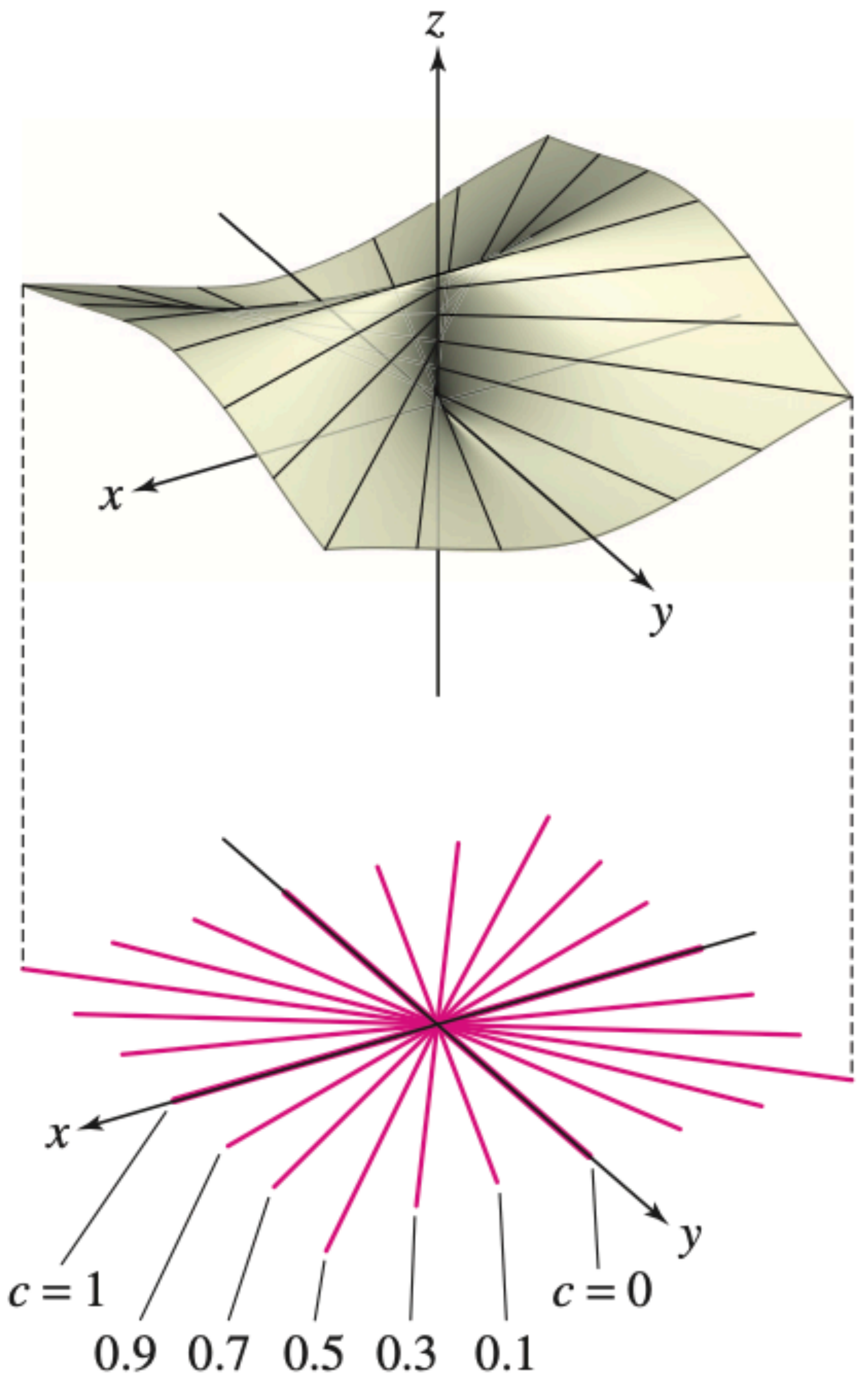
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Να βρεθεί αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$$

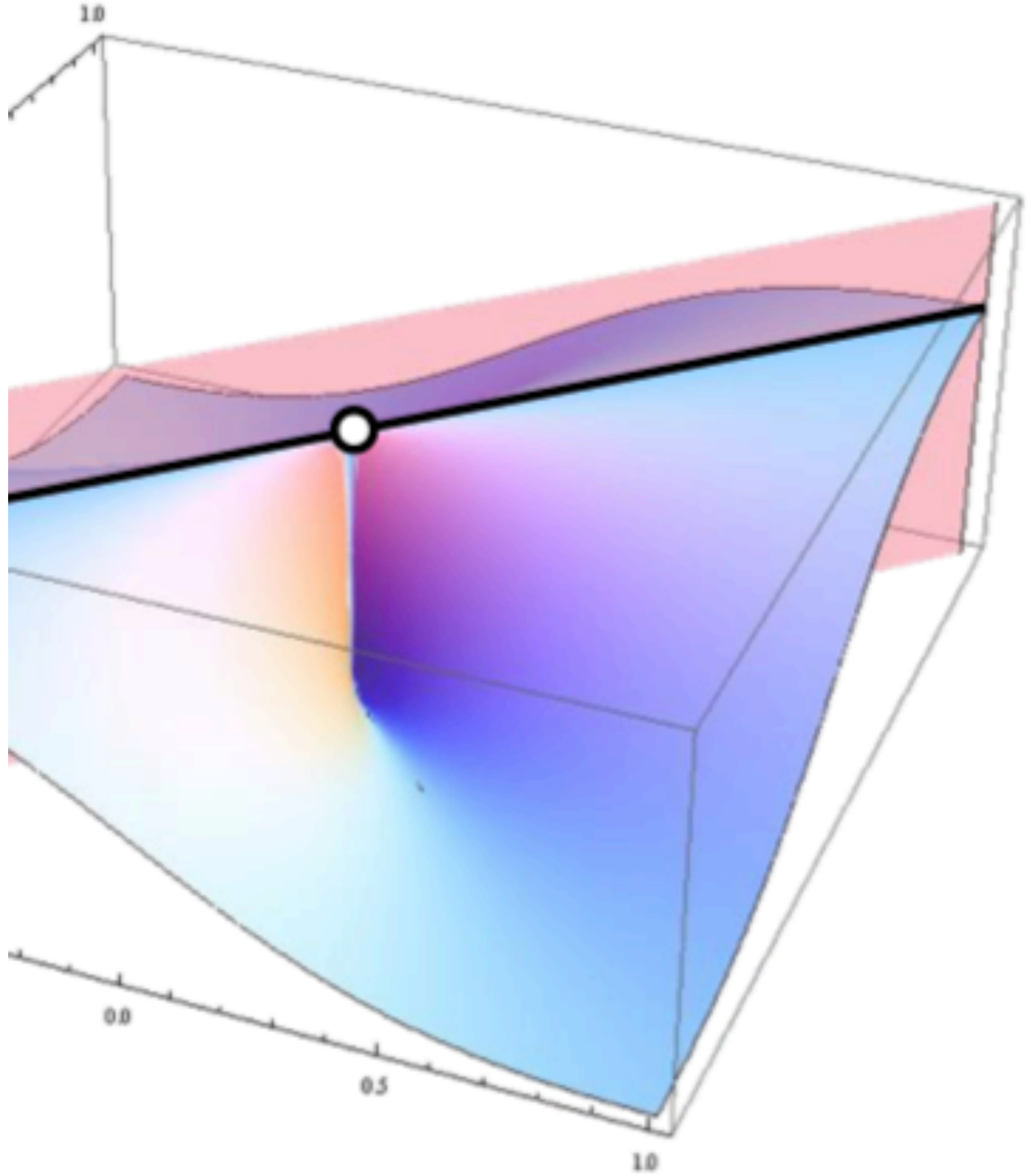
Απόδειξη μη ύπαρξης ενός ορίου

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

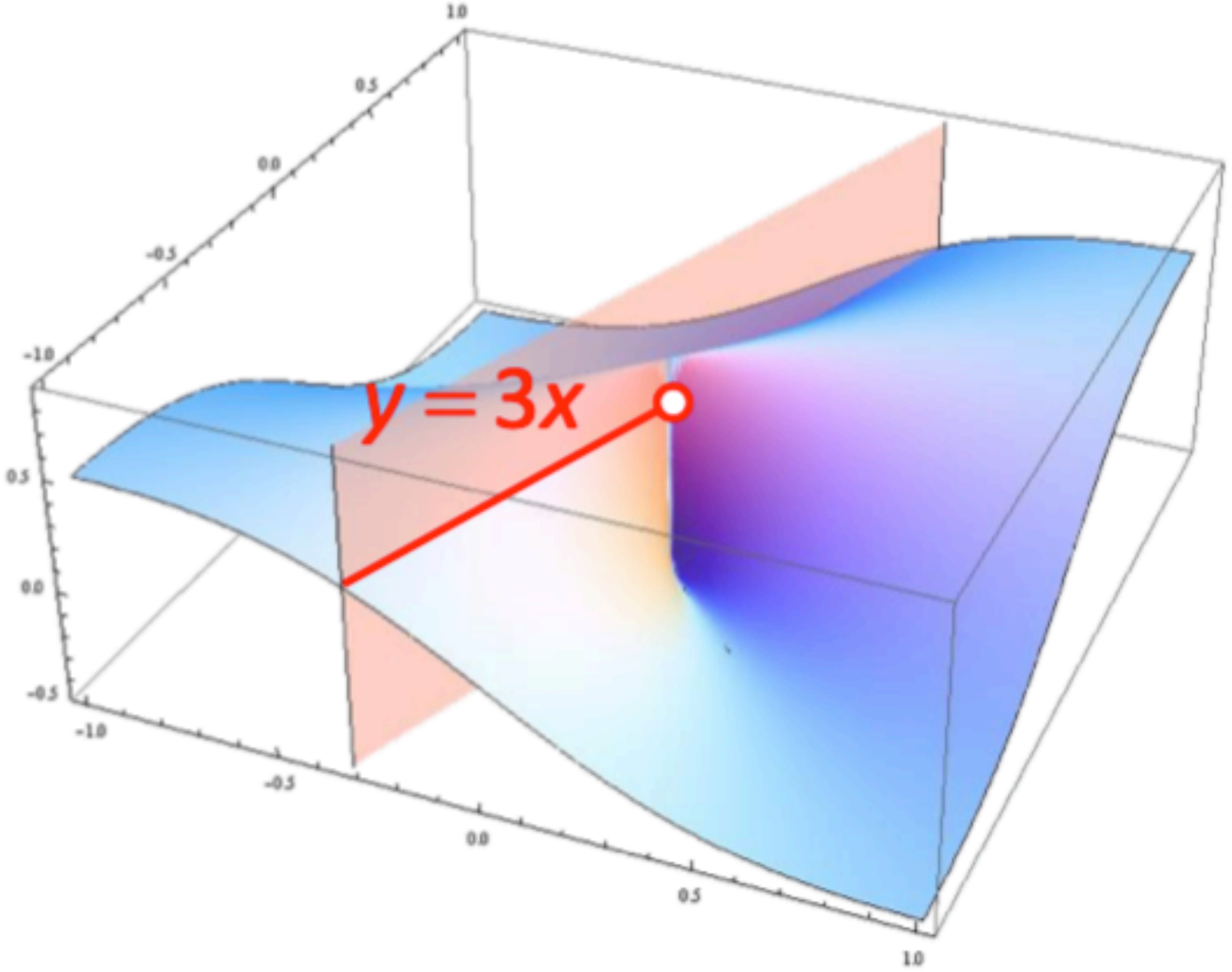


Να βρεθεί αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{3}{10}$$

Μεθοδολογικό σχόλιο

- Αν $|f(x,y)| \leq g(x,y)$ για $(x,y) \in B((0,0),a)$, $a>0$, και ισχύει

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0,$$

τότε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0,$$

δηλαδή όταν μία συνάρτηση φράσσεται απολύτως από μία μηδενική, τότε είναι μηδενική.

- Αν μπορούμε να γράψουμε $f(x,y) = h(x,y) \cdot g(x,y)$ με $|g(x,y)| < M$ (φραγμένη) για $(x,y) \in B((0,0),a)$ και

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0 \quad \text{(μηδενική)},$$

τότε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$

Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει το όριο στο (0,0), ενώ τα διαδοχικά (επαλληλα) όρια υπάρχουν και είναι ίσα.

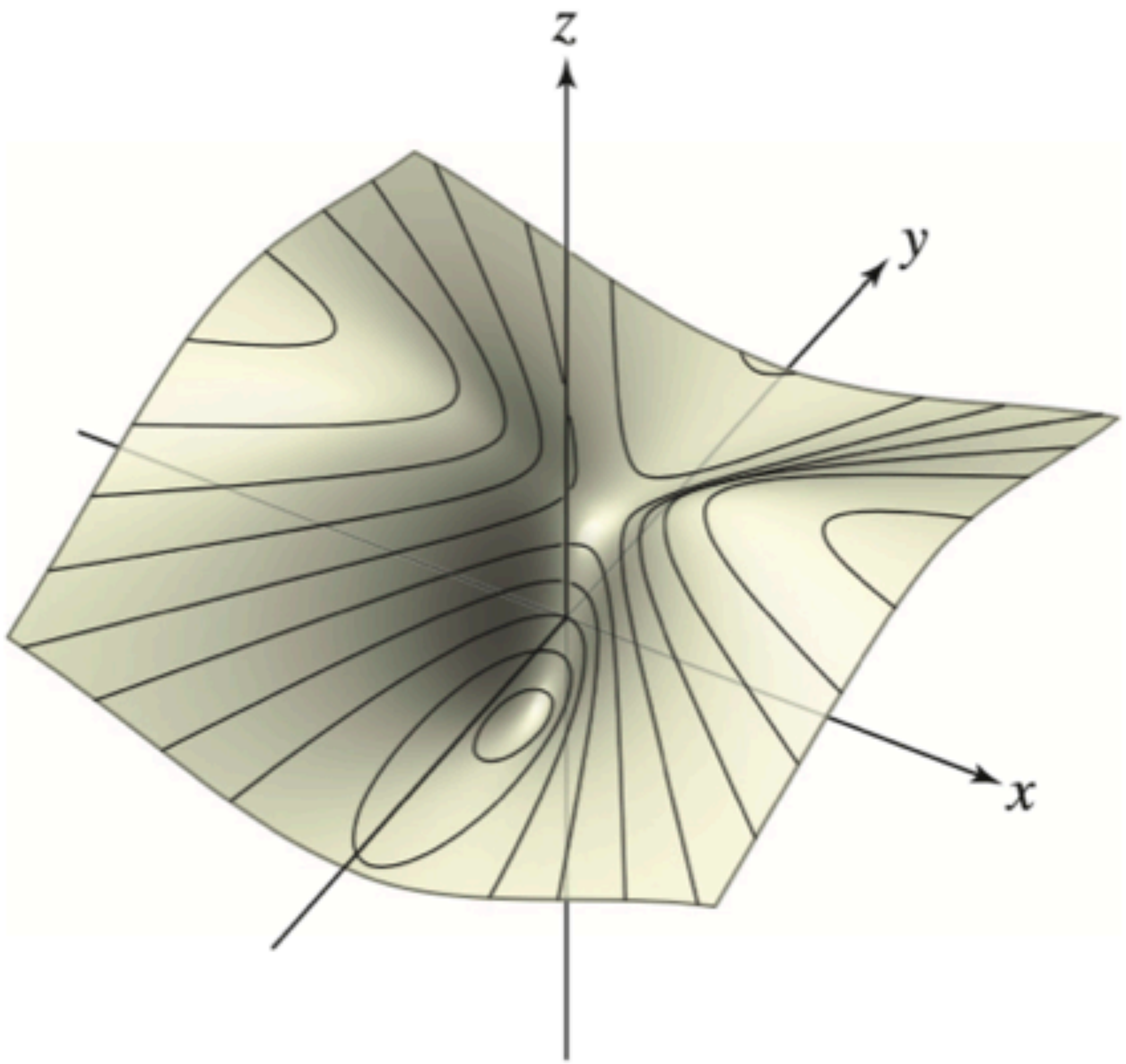
ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ **Συνέχεια** Μια συνάρτηση f με δύο μεταβλητές είναι συνεχής στο σημείο $P = (a, b)$ αν ισχύει

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο (a, b) του πεδίου ορισμού της.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{3x+y}{x^2+y^2+1}$ είναι συνεχής



Είναι γνωστό ότι ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο (x_0, y_0) του πεδίου ορισμού της δίνεται από τον κάτωθι ορισμό:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \ & (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)\ (\exists \delta_2(\varepsilon) > 0)\ \tau.\omega \\ & (|x - x_0| < \delta_1)\ \kappa\alpha\iota\ (|y - y_0| < \delta_2) \ \longrightarrow (|f(x,y) - l| < \varepsilon). \end{aligned} \tag{1}$$

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & \alpha\nu\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \alpha\nu\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (1), για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο $O(0,0)$ θα πρέπει:

(i) $\delta_1 \leq \dfrac{\sqrt{e}}{2}$, (ii) $\delta_2 \leq \dfrac{\sqrt{e}}{2}$, (iii) $\delta_1 \leq \sqrt{\varepsilon}$ και $\delta_2 \leq \sqrt{\varepsilon}$, (iv) $\delta_1^2 + \delta_2^2 \leq \varepsilon$.

Να εξετάσετε ως προς την συνέχεια στο $(0,0)$ την συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \cdot \tan(x+y), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στο $(0,0)$ τη συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι είναι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $O(0,0)$.

. ☐ Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{3xy^2}{x^2+y^2}, & \text{αν } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{αν } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι είναι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $O(0,0)$.

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΑ ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Αν μία συνάρτηση είναι συνεχής σε κάθε σημείο ενός τόπου τότε λέμε ότι είναι συνεχής στον τόπο αυτόν. Η έννοια της **συνέχειας είναι τοπική έννοια**, δηλ.αναφέρεται συνήθως σε ένα σημείο. Η έννοια της ομοιόμορφης συνέχειας έχει καθολικό χαρακτήρα στα πλαίσια ενός τόπου.

Αν P_0 τυχαίο σημείο του $D[f]$ τότε γενικά στον ορισμό της συνέχειας έχουμε $|f(P)-f(P_0)| < \varepsilon$ εάν επιλέξουμε $d(P, P_0) < \delta$ όπου γενικά το $\delta = \delta(P_0, \varepsilon)$. Παρατηρούμε ότι ο ''ρυθμός'' προσέγγισης της οριακής τιμής εξαρτάται από το σημείο P_0. Αν τώρα ισχύει $\delta = \delta(\varepsilon)$, ανεξαρτήτως του σημείου P_0 λέμε ότι η συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής στον τόπο D.

Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $f(x, y)$ καλείται **Lipschitz συνεχής** αν υπάρχει μία σταθερά $L \geq 0$, η οποία καλείται *σταθερά Lipschitz*, τέτοια ώστε για όλα τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) να ισχύει:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leq L\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να δείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \text{ και } f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$$

είναι ομοιόμορφα συνεχείς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για να εξετάσουμε αν η συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, πρέπει να ελέγξουμε αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2), να ισχύει:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για να εξετάσουμε αν η συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, πρέπει να ελέγξουμε αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2), να ισχύει:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} < \delta \Rightarrow |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Για να εκτιμήσουμε αυτή τη διαφορά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα των τριγώνων και την ανισότητα για τις ρίζες:

$$\left|\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right| \leq \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Μεθοδολογικό σχόλιο

Για να εξετάσουμε την ομοιόμορφη συνέχεια μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$, σχηματίζουμε το $|f(x+\delta_1, y+\delta_2) - f(x, y)| = A(\delta_1, \delta_2, x, y)$. Αν υπάρχει συνάρτηση $B(\delta_1, \delta_2)$, ώστε για $(x, y) \in A$ να ισχύει

$$A(\delta_1, \delta_2, x, y) \leq B(\delta_1, \delta_2)$$

και

$$\lim_{(\delta_1,\delta_2)\to(0,0)} B(\delta_1, \delta_2) = 0,$$

τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Ενώ αν $\forall \delta_1, \delta_2 > 0$ μπορούμε να βρούμε $(x, y) \in A$ με

$$A(\delta_1, \delta_2, x, y) > c,$$

όπου c θετική σταθερά, τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Μελετήστε την ομοιόμορφη συνέχεια των παρακάτω συναρτήσεων $z = f(x, y)$ στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \;\; f(x,y) = x + 2y$$