ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

“Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’αυτό μένειν”
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

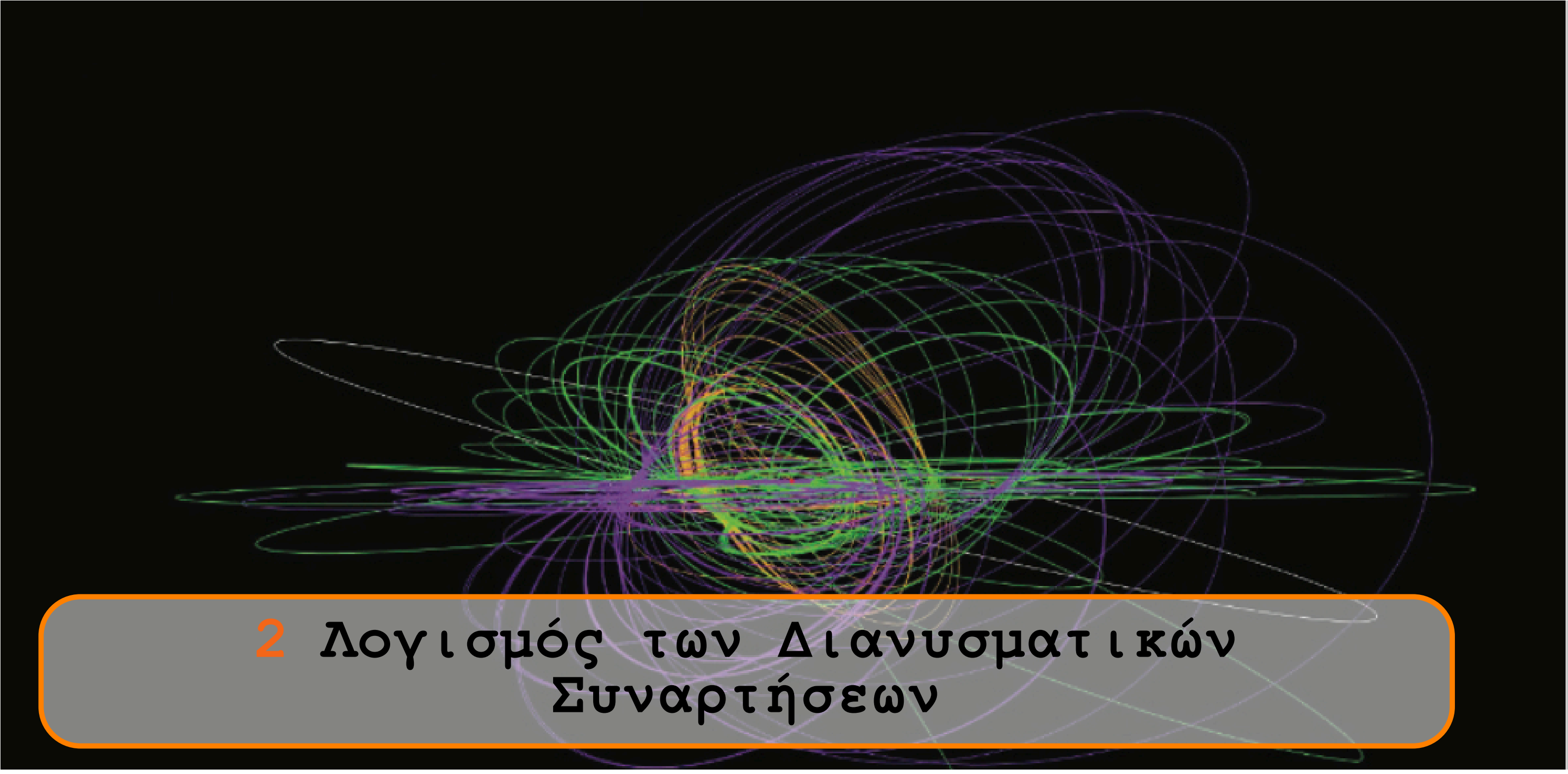
I

Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά

1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

II

Λογισμός των Διανυσματικών Συναρτήσεων



2 Λογισμός των Διανυσματικών Συναρτήσεων

2.1 Διανυσματικά Πεδία και Διανυσματικές Συναρτήσεις

Στο προηγούμενο κεφάλαιο γενικεύσαμε την έννοια της ολοκλήρωσης περνώντας από την περίπτωση της μίας σε αυτήν των πολλών μεταβλητών. Στο παρόν κεφάλαιο θα γενικεύσουμε ακόμα περισσότερο την έννοια της ολοκλήρωσης ώστε να μάθουμε να ολοκληρώνουμε πάνω σε καμπύλες και επιφάνειες, ενώ επιπλέον οι ολοκληρωτέες ποσότητες δεν θα είναι μόνο βαθμωτές συναρτήσεις αλλά και διανυσματικά πεδία. Τα ολοκληρώματα των διανυσματικών πεδίων χρησιμοποιούνται ευρέως στη μελέτη των φαινομένων του ηλεκτρομαγνητισμού, της δυναμικής των ρευστών αλλά και της μεταφοράς θερμότητας. Προκειμένου να θέσουμε το πλαίσιο για τον ορισμό και την ανάλυση των ολοκληρωμάτων αυτού του είδους, θα ξεκινήσουμε το κεφάλαιο με τη μελέτη των διανυσματικών πεδίων.

Υπενθύμιση 2.1.1
Διανύσματα
Θυμηθείτε ότι το επίπεδο είναι το σύνολο των σημείων $\{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$. Συχνά συμβολίζουμε το επίπεδο με $\mathbb{R}^2$. Ο συμβολισμός αυτός αντικατοπτρίζει την ιδέα ότι το επίπεδο είναι ένα «γινόμενο» δύο αντιγράφων της γραμμής των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, όπου το ένα από αυτά αναπαριστά τα σημεία της x-συντεταγμένης, ενώ το άλλο τα σημεία της y-συντεταγμένης. Ένα *διάνυσμα* $\mathbf{v}$, στις δύο διαστάσεις, προσδιορίζεται από *μέτρο*, *διεύθυνση* και *φορά*. Αντιπροσωπεύει μεγέθη που δεν περιγράφονται μόνο από έναν αριθμό, αλλά απαιτούν και πληροφορία για το «προς τα πού» εφαρμόζονται, όπως η δύναμη, η ταχύτητα ή η μετατόπιση. Δηλαδή έχουμε:

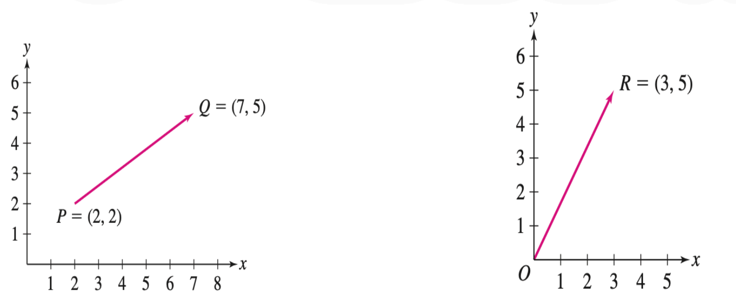
- *Διεύθυνση:* Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα. Όλα τα παράλληλα ή συνευθειακά διανύσματα έχουν την ίδια διεύθυνση.
- *Φορά:* Δείχνει προς ποιο άκρο της ευθείας κατευθύνεται το διάνυσμα. Δύο διανύσματα με ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά είναι αντίθετα διανύσματα.
- *Κατεύθυνση:* Ο όρος χρησιμοποιείται για να εκφράσει συνολικά τη διεύθυνση και τη φορά ενός διανύσματος. Δύο διανύσματα έχουν ίδια κατεύθυνση όταν είναι παράλληλα και ομόρροπα.

Έτσι, ένα διάνυσμα μπορεί να θεωρηθεί ως ένα *προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα*, του οποίου το αρχικό σημείο (*ουρά*) δείχνει το σημείο εφαρμογής και το τελικό σημείο (*αιχμή*) δηλώνει τη φορά του. Με βάση αυτά τα δύο σημεία γράφουμε

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$$

και σχεδιάζουμε το $\mathbf{v}$ ως ένα βέλος με κατεύθυνση από το P προς το Q. Το διάνυσμα αυτό θα λέμε ότι έχει ως *βάση* του το σημείο P. Στο Σχήμα 2.1(α) απεικονίζεται το διάνυσμα με αφετηρία το σημείο $P = (2,2)$ και πέρας σημείο το $Q = (7,5)$. Το μήκος ή *μέτρο* του διανύσματος $\mathbf{v}$, που σημειώνεται με $\|\mathbf{v}\|$, είναι η απόσταση από το σημείο P μέχρι το σημείο Q. Το διάνυσμα $\mathbf{v} = \overrightarrow{OR}$ με κατεύθυνση από την αρχή των αξόνων O προς ένα σημείο R αποκαλείται *διάνυσμα θέσης* του R.

Στο Σχήμα 2.1(β) φαίνεται το διάνυσμα θέσης του σημείου $R = (3,5)$.



(α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{PQ}$ (β) Το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OR}$

Σχήμα 2.1

Ορισμός 2.1.2 Συνιστώσες ενός διανύσματος Οι συνιστώσες του διανύσματος $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, όπου $P = (a_1, b_1)$ και $Q = (a_2, b_2)$, είναι οι ποσότητες

$$\boxed{a = a_2 - a_1 \quad (x\text{-συνιστώσα}), \qquad b = b_2 - b_1 \quad (y\text{-συνιστώσα})}$$

Το ζεύγος των συνιστωσών συμβολίζεται με $\langle a, b \rangle$.

Ορισμός 2.1.3 Το μήκος του διανύσματος $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$, σε συνάρτηση με τις συνιστώσες του (σύμφωνα με τον τύπο που δίνει την απόσταση), θα είναι:

$$\boxed{\|\mathbf{v}\| = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

- Το *μηδενικό διάνυσμα* (στο οποίο η αρχή και το πέρας συμπίπτουν) είναι το διάνυσμα $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$ με μήκος ίσο με μηδέν. Πρόκειται για το μοναδικό διάνυσμα που δεν έχει κατεύθυνση.

- Για ένα διάνυσμα $\mathbf{v}$, το $-\mathbf{v}$ είναι το διάνυσμα με το ίδιο μήκος με το $\mathbf{v}$, αλλά σε αντίθετη κατεύθυνση από αυτό. Έτσι, αν $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$, τότε $-\mathbf{v} = \langle -a, -b \rangle$.

Ξεκινάμε με την γενίκευση της έννοιας του μεμονωμένου διανύσματος, περιγράφοντας πώς αυτό μεταβάλλεται από σημείο σε σημείο μέσα σε μια περιοχή και δημιουργείται ένα πεδίο από διανύσματα που καλύπτουν μια περιοχή, έτσι ώστε κάθε σημείο να έχει το δικό του διάνυσμα που δείχνει τη φορά και το μέγεθος κάποιας φυσικής ποσότητας. Τέτοια πεδία εμφανίζονται σε πολλές εφαρμογές της Φυσικής και των Μαθηματικών, όπως:

- στο *βαρυτικό πεδίο*, όπου κάθε σημείο του χώρου έχει ένα διάνυσμα δύναμης,
- στο *ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο*, όπου τα διανύσματα δείχνουν την κατεύθυνση και την ένταση της δύναμης,
- στο *πεδίο ταχυτήτων* ενός ρευστού, όπου τα διανύσματα δείχνουν την κατεύθυνση και το μέγεθος της ταχύτητας σε κάθε σημείο.

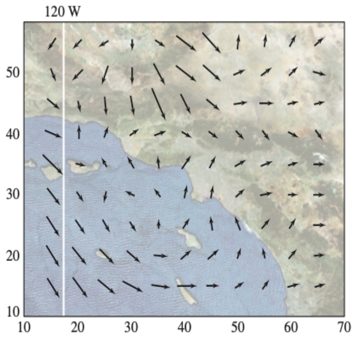
2.1.1 Διανυσματικά πεδία

Με ποιον τρόπο μπορούμε να περιγράψουμε ένα φυσικό μέγεθος, όπως ο άνεμος, που απαρτίζεται από ένα τεράστιο πλήθος μορίων τα οποία κινούνται σε μια περιοχή του χώρου; Αυτό που χρειαζόμαστε είναι ένα νέο είδος συνάρτησης, που είναι γνωστή ως *διανυσματικό πεδίο*. Στην περίπτωση του ανέμου, ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο του χώρου

$$P = (x, y, z)$$

ένα διάνυσμα

$$\mathbf{F}(x, y, z),$$



Σχήμα 2.2 *Το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας του ανέμου στην περιοχή της παραλίας του Λος Άντζελες*

το οποίο αναπαριστά το διάνυσμα της ταχύτητας (μέτρο και κατεύθυνση) του ανέμου στο συγκεκριμένο σημείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.2. Τα διανυσματικά πεδία μπορούν να περιγράψουν διάφορα φυσικά μεγέθη στα οποία αποδίδουμε μέτρο και κατεύθυνση, όπως πεδία δυνάμεων, ηλεκτρικά και μαγνητικά πεδία. Από μαθηματικής σκοπιάς, ένα διανυσματικό πεδίο στον χώρο $\mathbb{R}^3$ παριστάνεται με τη βοήθεια ενός διανύσματος οι συνιστώσες του οποίου είναι συναρτήσεις, δηλαδή:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z) \rangle.$$

Κάθε σημείο

$$P = (a, b, c)$$

συνδέεται με το διάνυσμα $\mathbf{F}(a, b, c)$, το οποίο συμβολίζεται επίσης και ως $\mathbf{F}(P)$. Εναλλακτικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό:

$$\mathbf{F} = F_1\, i + F_2\, j + F_3\, k.$$

Όταν σχεδιάζουμε ένα διανυσματικό πεδίο, θα σχεδιάζουμε το

$$\mathbf{F}(P)$$

ως ένα διάνυσμα με αρχή το σημείο P. Το πεδίο ορισμού του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ είναι το σύνολο των σημείων P για τα οποία ορίζεται το $\mathbf{F}(P)$. Τα διανυσματικά πεδία στο επίπεδο συμβολίζονται με παρόμοιο τρόπο ως:

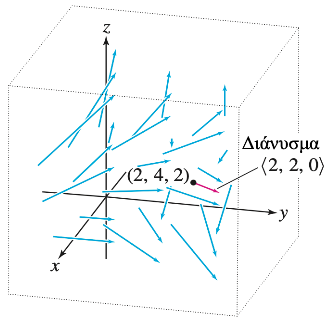
$$\mathbf{F}(x,y) = \langle F_1(x,y),\, F_2(x,y)\rangle = F_1\,\mathbf{i} + F_2\,\mathbf{j}.$$

Στο παρόν κεφάλαιο θα υποθέσουμε ότι οι συνιστώσες συναρτήσεις F_j είναι λείες, διαθέτουν δηλαδή μερικές παραγώγους όλων των τάξεων στο πεδίο ορισμού τους.

Παράδειγμα 2.1.4

Ποιο είναι το διάνυσμα που αντιστοιχεί στο σημείο $P = (2,4,2)$ του διανυσματικού πεδίου

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \langle y-z,\ x,\ z-\sqrt{y}\rangle;$$



Σχήμα 2.3

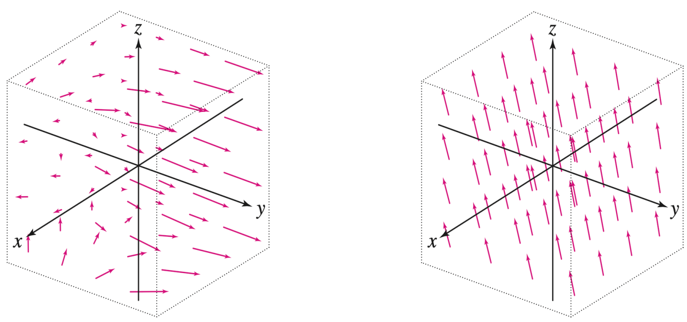
Λύση. Το ζητούμενο διάνυσμα που συνδέεται με το σημείο P είναι:

$$\mathbf{F}(2,4,2) = \langle 4-2,\ 2,\ 2-\sqrt{4}\rangle = \langle 2,\ 2,\ 0\rangle.$$

Ορισμένα από τα διανύσματα του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F}$ απεικονίζονται στο Σχήμα 2.3, με το διάνυσμα $\mathbf{F}(2,4,2)$ να σημειώνεται με κόκκινο χρώμα.

Διαισθητικά: Το πεδίο «σπρώχνει» ή «κατευθύνει» ένα σημείο του χώρου με φορά διαγώνια στο επίπεδο xy, χωρίς καθόλου ανύψωση ή βύθιση στον άξονα z.

Αν και δεν είναι καθόλου πρακτικό να σχεδιάζουμε με το χέρι πολύπλοκα διανυσματικά πεδία στις τρεις διαστάσεις, τα λογισμικά εργαλεία γραφικών που χρησιμοποιούν οι σύγχρονοι υπολογιστές μπορούν να παράγουν πολύ χρήσιμες οπτικές αναπαραστάσεις των διανυσματικών πεδίων, όπως αυτές που φαίνονται στο Σχήμα 2.4. Το διανυσματικό πεδίο του Σχήματος 2.4(β) αποτελεί παράδειγμα ενός *σταθερού διανυσματικού πεδίου*, ενός πεδίου δηλαδή το οποίο αντιστοιχεί το ίδιο διάνυσμα, στην περίπτωσή μας το $\langle 1,-1,3\rangle$, σε κάθε σημείο του χώρου $\mathbb{R}^3$.



(α) $\mathbf{F} = \langle x\sin z, y^2, x/(z^2+1)\rangle$ (β) Το σταθερό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \langle 1,-1,3\rangle$

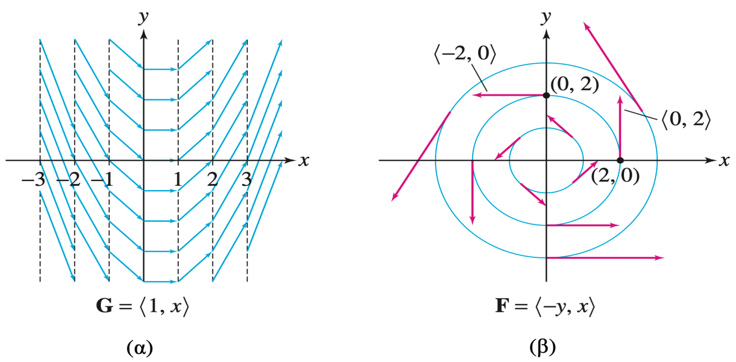
Σχήμα 2.4

Παράδειγμα 2.1.5
Να περιγράψετε τα ακόλουθα δύο διανυσματικά πεδία του χώρου $\mathbb{R}^2$:

$$(a)\ \mathbf{G} = i + xj \qquad (b)\ \mathbf{F} = \langle -y, x\rangle$$

Λύση.
(α) Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G} = i + xj$ αντιστοιχίζει το διάνυσμα $\langle 1, a\rangle$ στο σημείο (a, b). Πιο συγκεκριμένα, αντιστοιχίζει το ίδιο διάνυσμα σε όλα τα σημεία με την ίδια x-συντεταγμένη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5(α). Παρατηρήστε ότι το διάνυσμα $\langle 1, a\rangle$ έχει κλίση a και μέτρο $\sqrt{1+a^2}$. Μπορούμε επομένως να περιγράψουμε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{G}$ ως εκείνο το πεδίο που αντιστοιχίζει ένα διάνυσμα με κλίση a και μέτρο $\langle 1, a\rangle$ σε όλα τα σημεία με $x = a$.

(β) Προκειμένου να αποκτήσουμε μια εικόνα για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\mathbf{F}(a,b) = \langle -b, a\rangle$ έχει μέτρο $r = \sqrt{a^2+b^2}$. Είναι κάθετο στο ακτινικό διάνυσμα $\langle a, b\rangle$, ενώ κατευθύνεται αντι-ωρολογιακά. Επομένως, μπορούμε να περιγράψουμε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ ως εξής: Τα διανύσματα του πεδίου αυτού κατά μήκος ενός κύκλου ακτίνας r έχουν όλα μήκος r, εφάπτονται στον κύκλο και έχουν κατεύθυνση αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.5(β).



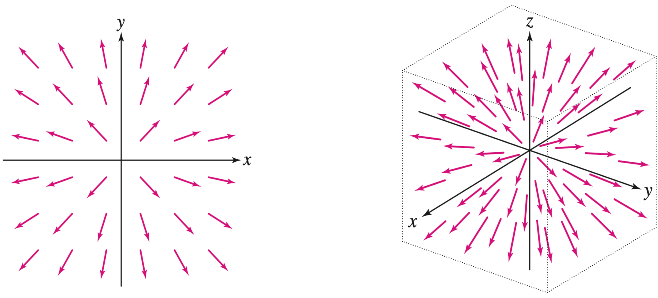
Σχήμα 2.5

Ένα *μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο* είναι ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{F}(P)\| = 1$ για όλα τα σημεία P. Ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ αποκαλείται *ακτινικό διανυσματικό πεδίο* αν το διάνυσμα $\mathbf{F}(P)$ είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ και το μέτρο του διανύσματος $\|\mathbf{F}(P)\|$ εξαρτάται μόνο από την απόσταση r του σημείου P από την αρχή των αξόνων (όπου $r = (x^2+y^2)^{1/2}$ για τον χώρο $\mathbb{R}^2$ και $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ για τον χώρο $\mathbb{R}^3$).

Δύο σημαντικά διανυσματικά πεδία είναι τα μοναδιαία ακτινικά διανυσματικά πεδία στις δύο και τρεις διαστάσεις, τα οποία απεικονίζονται στα Σχήματα 2.6(α) και 2.6(β), αντίστοιχα, και τα οποία έχουν τη μορφή:

$$\mathbf{e}_r = \left\langle \frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right\rangle = \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right\rangle$$

$$\mathbf{e}_r = \left\langle \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right\rangle = \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right\rangle$$



(α) Το μοναδιαίο ακτινικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{e}_r = \langle x/r, y/r \rangle$ στο επίπεδο

(β) Το μοναδιαίο ακτινικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{e}_r = \langle x/r, y/r, z/r \rangle$ στον τρισδιάστατο χώρο

Σχήμα 2.6

Υπενθύμιση 2.1.6

Ξεκινάμε με δύο μη μηδενικά διανύσματα u και v στον χώρο. Αν τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα, τότε το ένα είναι μη μηδενικό πολλαπλάσιο του άλλου. Αν δεν είναι παράλληλα, τότε καθορίζουν ένα επίπεδο - κάθε διάνυσμα του οποίου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυα- σμός των u και v, δηλαδή στη μορφή $au + bv$.

Ορισμός 2.1.7 Ονομάζουμε *εσωτερικό (ή βαθμωτό) γινόμενο* $u \cdot v$ των διανυσμάτων $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ και $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ το βαθμωτό μέγεθος:

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

Παράδειγμα 2.1.8
Εφαρμόζουμε τον ορισμό.

(α) $\langle 1, -2, -1 \rangle \cdot \langle -6, 2, -3 \rangle = (1)(-6) + (-2)(2) + (-1)(-3) = -6 - 4 + 3 = -7$.

(β) $\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \cdot (4i - j + 2k) = \left(\frac{1}{2}\right)(4) + (3)(-1) + (1)(2) = 1$.

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διδιάστατων διανυσμάτων ορίζεται με όμοιο τρόπο:

$$\langle u_1, u_2 \rangle \cdot \langle v_1, v_2 \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Θεωρούμε τώρα ένα μοναδιαίο διάνυσμα n κάθετο σε αυτό το επίπεδο, του οποίου η φορά καθορίζεται από τον *κανόνα του δεξιού χεριού*: ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του n όταν τα υπόλοιπα δάχτυλα κάμπτονται από τη u προς τη v.

Ορισμός 2.1.9 Το *εξωτερικό γινόμενο* δύο διανυσμάτων u και v ορίζεται ως το διάνυσμα

$$u \times v = |u||v| \sin\theta \, n,$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των u και v και n το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο και στα δύο.

Αντίθετα με το εσωτερικό γινόμενο, το εξωτερικό γινόμενο είναι *διάνυσμα*. Για τον λόγο αυτό ονομάζεται και *διανυσματικό γινόμενο*. Το μήκος του $u \times v$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα u και v, ενώ η κατεύθυνσή του είναι κάθετη και στα δύο. Αν ένα από τα δύο διανύσματα είναι μηδενικό ή αν τα u και v είναι παράλληλα, τότε το εξωτερικό τους γινόμενο είναι το μηδενικό διάνυσμα:

$$u \times v = 0.$$

Υπολογισμός εξωτερικού γινομένου ως ορίζουσα Αν

$$u = u_1 i + u_2 j + u_3 k \text{ και } v = v_1 i + v_2 j + v_3 k,$$

τότε

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

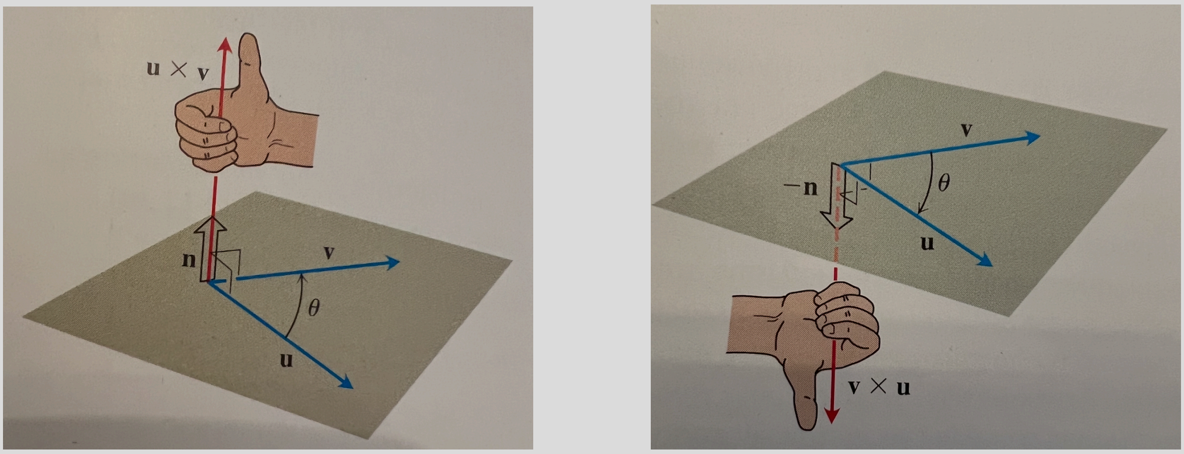
Παράδειγμα 2.1.10
Βρείτε τα $u \times v$ και $v \times u$ αν $u = 2i + j + k$ και $v = -4i + 3j + k$.

Λύση. Αναπτύσσουμε την ορίζουσα:

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Υπολογίζουμε:

$$u \times v = (-2)i - 6j + 10k, \quad v \times u = -(u \times v) = 2i + 6j - 10k.$$



(a) (b)

Σχήμα 2.7

Τελεστές
Τελεστής ονομάζεται κάθε κανόνας ή πράξη που εφαρμόζεται σε μια συνάρτηση (ή σε ένα σύνολο συναρτήσεων) και παράγει ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο - το οποίο μπορεί να είναι αριθμός, συνάρτηση ή διάνυσμα. Για παράδειγμα, ο τελεστής της παραγώγισης $\frac{d}{dx}$ εφαρμόζεται σε μια συνάρτηση $f(x)$ και δίνει τη νέα συνάρτηση $f'(x)$.

2.2 Τελεστές που δρουν σε διανυσματικά πεδία

Στον Λογισμό πολλών μεταβλητών ορίζονται τρεις εξαιρετικά σημαντικές πράξεις παραγώγισης: η κλίση, η απόκλιση και ο στροβιλισμός. Στην παρούσα ενότητα, θα εισαγάγουμε τις πράξεις της κλίσης της απόκλισης και του στροβιλισμού. Καθεμία από αυτές τις τρεις πράξεις παραγώγισης ορίζεται με τη χρήση του *τελεστή ανάδελτα* ∇, που είναι ένα διάνυσμα αποτελούμενο από τελεστές παραγώγισης, ως εξής:

$$\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

Όταν ο τελεστής ∇ δρα σε μια βαθμωτή συνάρτηση f, τότε προκύπτει η κλίση της f. Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι μπορούμε να χειριζόμαστε την προηγούμενη πράξη ως έναν «πολλαπλασιασμό» ενός διανύσματος με ένα βαθμωτό, με τις συνιστώσες του διανύσματος που προκύπτει να είναι πράξεις παραγώγισης πάνω σε συναρτήσεις αντί για γινόμενα. Δηλαδή:

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right\rangle$$

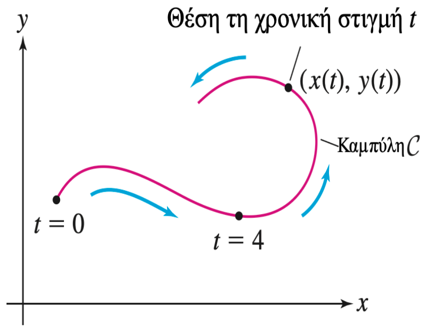
Οι δράσεις του τελεστή ∇ πάνω σε ένα διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ εκφράζονται είτε μέσω του εσωτερικού γινομένου (οδηγώντας στον ορισμό της *απόκλισης*) είτε μέσω του εξωτερικού γινομέ- νου (οδηγώντας στον ορισμό του *στροβιλισμού*).

2.2.1 Διανυσματικές συναρτήσεις

Ειναι γνωστό ότι για να εκφράσουμε την κίνηση με μαθηματικούς όρους ενός σωματιδίου το οποίο κινείται κατά μήκος μιας καμπύλης C που βρίσκεται στο επίπεδο, μελετούμε τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται με τον χρόνο οι συντεταγμένες x και y της θέσης του σωματιδίου, πώς εξαρτώνται δηλαδή από τη μεταβλητή του χρόνου t (βλ. Σχήμα 2.8). Καθώς και οι δύο συντεταγμένες x και y είναι συναρτήσεις του χρόνου t, η θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t θα δίνεται από την

$$\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$$

Αυτή η αναπαράσταση της καμπύλης αποκαλείται *παραμέτρηση* με παράμετρο t και η καμπύλη αποκαλείται *παραμετρική καμπύλη*.



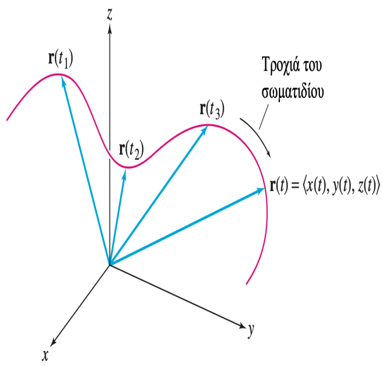
Σχήμα 2.8

Σε μια παραμέτρηση χρησιμοποιούμε συχνά το σύμβολο t για να δηλώσουμε την παράμετρο, θεωρώντας ότι οι εξαρτημένες μεταβλητές μεταβάλλονται με τον χρόνο. Ωστόσο, είμαστε ελεύθεροι να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε άλλη μεταβλητή (όπως, για παράδειγμα, την s ή τη θ). Στις αναπαραστάσεις των παραμετρικών καμπυλών, με τη βοήθεια των γραφικών τους παραστάσεων, η κατεύθυνση της κίνησης συχνά υποδηλώνεται από ένα βέλος, όπως στο Σχήμα 2.8.

Φανταστείτε τώρα ένα σωματίδιο το οποίο κινείται στον χώρο $\mathbb{R}^3$, με τις συντεταγμένες του τη χρονική στιγμή t να είναι οι $x(t)$, $y(t)$ και $z(t)$. Είναι βολικό να αναπαραστήσουμε την τροχιά του σωματιδίου με τη βοήθεια της *διανυσματικής συνάρτησης*:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= \langle x(t), y(t), z(t)\rangle \\ &= x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

Μπορείτε να σκεφτείτε την $\mathbf{r}(t)$ ως ένα κινούμενο διάνυσμα που έχει κατεύθυνση από την αρχή των αξόνων προς το σημείο όπου βρίσκεται το σωματίδιο τη χρονική στιγμή t (βλ. Σχήμα 2.9).



Σχήμα 2.9

Γενικά, μια *διανυσματική συνάρτηση* είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ με την παραπάνω μορφή, το πεδίο ορισμού D της οποίας είναι ένα σύνολο από πραγματικούς αριθμούς, ενώ οι τιμές της *είναι ένα σύνολο από διανύσματα θέσης*. Η μεταβλητή t αποκαλείται *παράμετρος*, ενώ οι συναρτήσεις $x(t), y(t), z(t)$ είναι γνωστές ως **συνιστώσες** ή *συντεταγμένες συναρτήσεις*. Συνήθως θεωρούμε ως πεδίο ορισμού μιας διανυσματικής συνάρτησης το σύνολο όλων των τιμών της παραμέτρου t για τις οποίες ορίζεται η $\mathbf{r}(t)$, δηλαδή το σύνολο των τιμών της t που ανήκουν στα πεδία ορισμών και των τριών συντεταγμένων συναρτήσεων $x(t), y(t), z(t)$.

2.2.2 Σύγκριση και γεωμετρική ερμηνεία Διανυσματικού πεδίου και Διανυσματικής συνάρτησης

Η βασική διαφορά ανάμεσα στις δύο έννοιες έγκειται στο εξής:

- Μια *διανυσματική συνάρτηση* εξαρτάται από μία μεταβλητή (π.χ. τον χρόνο t) και παράγει μια καμπύλη ή τροχιά στο χώρο.
- Ένα *διανυσματικό πεδίο* εξαρτάται από δύο ή τρεις μεταβλητές (π.χ. x, y, z) και παράγει ένα διάνυσμα σε κάθε σημείο του επιπέδου ή του χώρου.

Συνοπτικά, μπορούμε να διακρίνουμε τις δύο έννοιες ως εξής:

Χαρακτηριστικό	**Διανυσματικό πεδίο**	**Διανυσματική συνάρτηση**
Μεταβλητές	Δύο ή τρεις (x, y, z)	Μία (π.χ. t)
Απεικόνιση	$(x, y, z) \mapsto \mathbf{F}(x, y, z)$	$t \mapsto \mathbf{r}(t)$
Αντιπροσωπεύει	Πεδίο δυνάμεων ή ροής	Καμπύλη ή τροχιά
Γεωμετρική έννοια	Διάνυσμα σε κάθε σημείο του χώρου	Θέση στο χρόνο
Παράδειγμα	$\mathbf{F}(x, y, z) = \langle y+z, x, z-\sqrt{y}\rangle$	$\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t, t\rangle$

Επομένως, μπορούμε να πούμε πως οι διανυσματικές συναρτήσεις περιγράφουν *μονοδιάστατες κινήσεις μέσα στον χώρο*, ενώ τα διανυσματικά πεδία αποδίδουν την *κατανομή μιας διάνυσματικής ποσότητας* σε όλο τον χώρο. Και οι δύο έννοιες αποτελούν το θεμέλιο για τη μελέτη πιο σύνθετων εννοιών όπως η *κλίση*, η *απόκλιση* και ο *στροβιλισμός*.

2.2.3 Η κλίση και οι παράγωγοι κατά κατεύθυνση

Για μια συνάρτηση $f(x,y)$, ο ρυθμός μεταβολής στην κατεύθυνση x δίνεται από τη μερική παράγωγο f_x, ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός στην κατεύθυνση y υπολογίζεται με τη βοήθεια της f_y. Αυτές οι μερικές παράγωγοι μας δίνουν τους ρυθμούς μεταβολής στις κατευθύνσεις των μοναδιαίων διανυσμάτων $\boldsymbol{i}$ και $\boldsymbol{j}$, αντίστοιχα. Τι θα κάνουμε όμως αν θελήσουμε να προσδιορίσουμε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η f σε κάποια άλλη κατεύθυνση, για παράδειγμα στην κατεύθυνση του διανύσματος $\langle 2,-1\rangle$; Προκειμένου να εκφράσουμε τυπικά έναν ρυθμό μεταβολής σε οποιαδήποτε κατεύθυνση, θα ορίσουμε την *παράγωγο κατά κατεύθυνση*. Πριν προχωρήσουμε όμως στον ορισμό αυτό, θα εισαγάγουμε το *διάνυσμα της κλίσης* (ή *διάνυσμα βαθμίδας*), που είναι ένα σημαντικό διάνυσμα το οποίο χρησιμοποιείται σε πολλές περιπτώσεις, συμπεριλαμβανομένης και της περίπτωσης του υπολογισμού των παραγώγων κατά κατεύθυνση. Οι συνιστώσες του διανύσματος της κλίσης μιας συνάρτησης f είναι οι μερικές παράγωγοι της f.

Ορισμός 2.2.1 Η κλίση (βαθμίδα) Η κλίση μιας συνάρτησης $f(x,y)$ σε ένα σημείο $P=(a,b)$ είναι το διάνυσμα

$$\nabla f_P = \langle f_x(a,b),\, f_y(a,b)\rangle$$

Στην περίπτωση των συναρτήσεων με τρεις μεταβλητές, για την $f(x,y,z)$ σε ένα σημείο $P=(a,b,c)$, ισχύει:

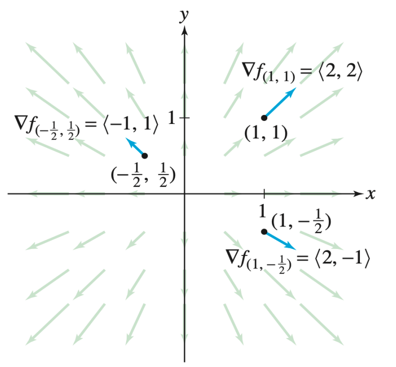
$$\nabla f_P = \langle f_x(a,b,c),\, f_y(a,b,c),\, f_z(a,b,c)\rangle$$

Συμβολίζουμε, επίσης, την κλίση της συνάρτησης f στο σημείο $P=(a,b)$ ως $\nabla f_{(a,b)}$ ή $\nabla f(a,b)$. Ορισμένες φορές θα παραλείπουμε την αναφορά στο σημείο P, γράφοντας απλώς

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right\rangle \quad \text{ή}$$

$$\nabla f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right\rangle$$

Η κλίση ∇f αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα ∇f_P σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της f, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.10.



Σχήμα 2.10 *Τα διανύσματα της κλίσης για τη συνάρτηση $f(x,y)=x^2+y^2$ σε διάφορα σημεία (τα διανύσματα δεν είναι σχεδιασμένα έτσι ώστε να διατηρούν την κλίμακα).*

Σχόλιο 2.2.2 Το σύμβολο ∇, που είναι το κεφαλαίο δέλτα του αλφαβήτου γυρισμένο ανάποδα, αποκαλείται *«ανάδελτα»*. Ξεκίνησε να χρησιμοποιείται ευρέως χάρη στον Σκωτσέζο φυσικό P. G. Tait (1831–1901), ο οποίος αποκαλούσε το συγκεκριμένο σύμβολο με την ονομασία *«νάμπλα»* εξαιτίας της ομοιότητάς του με την αρχαία άρπα των Ασσυρίων. Ο μεγάλος φυσικός James Clerk Maxwell ήταν απρόθυμος να υιοθετήσει αυτόν τον όρο και προτιμούσε για τη βαθμίδα τον όρο «κλίση». Αστειευόμενος, έγραψε το 1871 στον φίλο του Tait: *«Still harping on that nabla?»* (λογοπαίγνιο που σημαίνει «Ακόμα ασχολείσαι με αυτό το νάμπλα;»).

Παράδειγμα 2.2.3

Κλίση στις τρεις διαστάσεις Υπολογίστε το διάνυσμα $\nabla f(3,-2,4)$ για την

$$f(x,y,z) = ze^{2x+3y}.$$

*Λύση.*Οι μερικές παράγωγοι και η κλίση θα είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ze^{2x+3y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3ze^{2x+3y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = e^{2x+3y}.$$

Άρα,

$$\nabla f = \langle 2ze^{2x+3y},\, 3ze^{2x+3y},\, e^{2x+3y}\rangle.$$

Επομένως, τελικά θα προκύψει:

$$\nabla f(3,-2,4) = \langle 2\cdot 4e^0,\, 3\cdot 4e^0,\, e^0\rangle = \langle 8,12,1\rangle.$$

Παράδειγμα 2.2.4

1. Να περιγράψετε τις δύο βασικές γεωμετρικές ιδιότητες του διανύσματος της κλίσης ∇f.

2. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης $f(x,y)$ στο $(0,0)$ σε μια κατεύθυνση που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα των x, αν $\nabla f(0,0) = \langle 2,4\rangle$;

3. Δίνεται η συνάρτηση και η τροχιά

$$f(x,y) = e^{xy}, \qquad \mathbf{r}(t) = \langle t^3,\, 1+t\rangle.$$

   (a) Υπολογίστε την κλίση ∇f της συνάρτησης και την παράγωγο $\mathbf{r}'(t)$.

   (b) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα της αλυσίδας για τροχιές για να υπολογίσετε την παράγωγο $\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))$.

4. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = xy^2$ και $\mathbf{r}(t) = \langle \frac{1}{2}t^2,\, t^3\rangle$.

   (a) Υπολογίστε την κλίση ∇f της συνάρτησης και την παράγωγο $\mathbf{r}'(t)$.

   (b) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα της αλυσίδας για τις τροχιές για να υπολογίσετε την παράγωγο $\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))$ για $t=1$ και $t=-1$.

5. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = x^2+y^2$ και $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t,\, \sin t\rangle$.

   (a) Υπολογίστε την παράγωγο $\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))$ χωρίς να κάνετε κάποιον υπολογισμό. Εξηγήστε την απάντησή σας.

   (b) Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξατε στο ερώτημα (a) χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας.

Στις Ασκήσεις 6-11 να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα της αλυσίδας για να υπολογίσετε την *παράγωγο* $\dfrac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))$ *για την τιμή του* t *που σημειώνεται σε κάθε περίπτωση.*

6. $f(x,y) = x^2 - 3xy, \quad \mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle, \quad t = 0$

7. $f(x,y) = x^2 - 3xy, \quad \mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \sin t \rangle, \quad t = \dfrac{\pi}{2}$

8. $f(x,y) = \sin(xy), \quad \mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{3t} \rangle, \quad t = 0$

9. $f(x,y) = \cos(y-x), \quad \mathbf{r}(t) = \langle e^{t}, e^{2t} \rangle, \quad t = \ln 3$

10. $f(x,y) = x - xy, \quad \mathbf{r}(t) = \langle t^2, t^2 - 4t \rangle, \quad t = 4$

11. $f(x,y) = 3xe^{-y}, \quad \mathbf{r}(t) = \langle 2t^2, t^2 - 2t \rangle, \quad t = 0$

Στις Ασκήσεις 12-17 να υπολογίσετε την παράγωγο κατά κατεύθυνση στην κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}$ *στο σημείο που υποδεικνύεται κάθε φορά. Θυμηθείτε να χρησιμοποιήσετε ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατά τον υπολογισμό της παραγώγου κατά κατεύθυνση.*

12. $f(x,y) = x^2y^3, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad P = \left(\dfrac{1}{6}, 3\right)$

13. $f(x,y) = \sin(x-y), \quad \mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle, \quad P = \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}\right)$

14. $f(x,y) = \tan^{-1}(xy), \quad \mathbf{v} = \langle 1, 1 \rangle, \quad P = (3,4)$

15. $f(x,y) = e^{xy-y^2}, \quad \mathbf{v} = \langle 12, -5 \rangle, \quad P = (2,2)$

16. $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2), \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}, \quad P = (1,0)$

17. $g(x,y,z) = z^2 - xy + 2y^2, \quad \mathbf{v} = \langle 1, -2, 2 \rangle, \quad P = (2,1,-3)$

18. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x,y,z) = z^2 - xy + 2y^2$$

και το διάνυσμα $\mathbf{v} = \langle 1, -2, 2 \rangle$ στο σημείο $P = (2,1,-3)$. Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος του g στο σημείο P προς την κατεύθυνση του $\mathbf{v}$.

Στις Ασκήσεις 19 - 22 να προσδιορίσετε μια εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια και στο σημείο που υποδεικνύεται σε κάθε περίπτωση.

19. $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 20, \quad P = (2,2,1)$

20. $xz + 2x^2y + y^2z^3 = 11, \quad P = (2,1,1)$

21. $x^2 + z^2e^{y-x} = 13, \quad P = \left(2, 3, \dfrac{3}{\sqrt{e}}\right)$

22. $\ln(1 + 4x^2 + 9y^4) - 0.1z^2 = 0, \quad P = (3, 1, 6.1876)$

23 Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = (xy)^{1/3}$.

(a) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό με το όριο για να δείξετε ότι $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

(b) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό με το όριο για να δείξετε ότι η παράγωγος κατά κατεύθυνση $D_{\mathbf{u}}f(0,0)$ δεν υπάρχει για οποιοδήποτε άλλο μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ εκτός από $\mathbf{i}$ και $\mathbf{j}$.

(c) Είναι διαφορίσιμη η συνάρτηση $f(x,y)$ στο $(0,0)$;