ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

"Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ'αυτό μένειν"
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Το παρόν ηλεκτρονικό υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών, ως υποστηρικτικό εγχειρίδιο για τα φροντιστηριακά μαθήματα του προγράμματος τους. Το υλικό δεν προορίζεται για εμπορική χρήση ή διάθεση εκτός του επισήμου περιβάλλοντος διδασκαλίας του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Παρόλη την προσεκτική επιμέλεια και συνεχή προσπάθεια ενημέρωσης και βελτίωσης, ενδέχεται να περιέχει λάθη ή παραλείψεις, καθώς βρίσκεται σε αρχικό στάδιο ανάπτυξης. Η συνεργασία και τα σχόλια των φοιτητών στο πλαίσιο της κοινής μας προσπάθειας εκτιμώνται ιδιαίτερα και συμβάλλουν στην καλύτερη ποιότητα και πληρότητα του υλικού.

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

I

Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά

1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

1.1 Αλλαγή μεταβλητών

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε απεικονίσεις της μορφής

$$G : \mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

όπου $\mathscr{D}$ είναι ένα χωρίο του επιπέδου $\mathbb{R}^2$. Για να μη δημιουργείται σύγχυση ανάμεσα στις μεταβλητές του πεδίου ορισμού και σε εκείνες του πεδίου τιμών, θα χρησιμοποιούμε συνήθως τα γράμματα u, v για τις μεταβλητές στο πεδίο ορισμού, ενώ τα x, y θα αναφέρονται στις αντίστοιχες μεταβλητές του πεδίου τιμών. Με βάση αυτή τη σύμβαση, η απεικόνιση G γράφεται

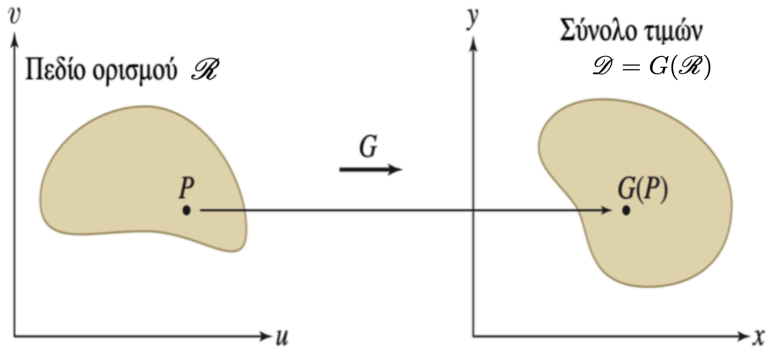
$$G(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v)),$$

όπου οι συναρτήσεις $x(u,v)$ και $y(u,v)$ παριστούν τις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου του πεδίου τιμών ως συναρτήσεις των μεταβλητών u, v του πεδίου ορισμού. Δηλαδή,

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v).$$

Αντιστρόφως, αν η απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη, μπορούμε να εκφράσουμε και τις u, v ως συναρτήσεις των x, y:

$$u = u(x,y), \qquad v = v(x,y).$$



Σχήμα 1.1 *Η απεικόνιση G απεικονίζει το χωρίο $\mathscr{R}$ του επιπέδου (u,v) στο αντίστοιχο χωρίο $\mathscr{D}$ του επιπέδου (x,y).*

Ορισμός 1.1.1 Ιακωβιανός Πίνακας Έστω ένας μετασχηματισμός

$$G : (u,v) \longmapsto (x,y),$$

όπου οι συναρτήσεις $x = x(u,v)$ και $y = y(u,v)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες. Ο *Ιακωβιανός πίνακας* του G ορίζεται ως ο πίνακας όλων των πρώτων μερικών παραγώγων:

$$J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Η *Ιακωβιανή ορίζουσα* του μετασχηματισμού G είναι

$$\det(J_G) = |J(u,v)| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Σχόλιο 1.1.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Αλλαγής Μεταβλητών Το πρόβλημα της αλλαγής μεταβλητών μπορεί να διατυπωθεί γεωμετρικά ως εξής:
Δοθέντος ενός χωρίου προς ολοκλήρωση πάνω σε μια επιφάνεια του επιπέδου xy, αναζητούμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων (u,v), έτσι ώστε μέσω ενός κατάλληλου μετασχηματισμού

$$G : (u,v) \mapsto (x,y)$$

να εκφράσουμε το στοιχειώδες μέτρο $dx\,dy$ ως παραμορφωμένη εικόνα του στοιχειώδους μέτρου $du\,dv$. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το ίδιο ολοκλήρωμα στην περιοχή του επιπέδου xy με πιο συμβατό και απλούστερο τρόπο. Η σχέση μεταξύ των δύο στοιχείων μέτρου δίνεται από

$$dx\,dy = |J(u,v)|\,du\,dv,$$

όπου ο παράγοντας $|J(u,v)|$ εκφράζει την τοπική *παραμόρφωση εμβαδού* που προκαλεί ο μετασχηματισμός G.

Παράδειγμα 1.1.3
Υπολογισμός Ιακωβιανής ορίζουσας Υπολογίστε την Ιακωβιανή ορίζουσα της απεικόνισης

$$G(u,v) = (u^3 + v,\, uv)$$

για $(u,v) = (2,1)$.

Λύση. Έχουμε ότι $x = u^3 + v$ και $y = uv$, επομένως:

$$\mathrm{J_G(u,v)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3u^2 & 1 \\ v & u \end{vmatrix} = 3u^3 - v$$

Η τιμή της Ιακωβιανής ορίζουσας στο $(2,1)$ είναι:

$$J_G(x,y)(2,1) = 3(2)^3 - 1 = 23.$$

Αν λοιπόν το χωρίο $\mathscr{R}$ στο επίπεδο uv είναι απλό (π.χ. ορθογώνιο), και το $\mathscr{D} = G(\mathscr{R})$ είναι το αντίστοιχο χωρίο στο xy–επίπεδο, τότε η παραπάνω αντιστοίχιση γράφεται

$$G(\mathscr{R}) = \mathscr{D},$$

και το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy$$

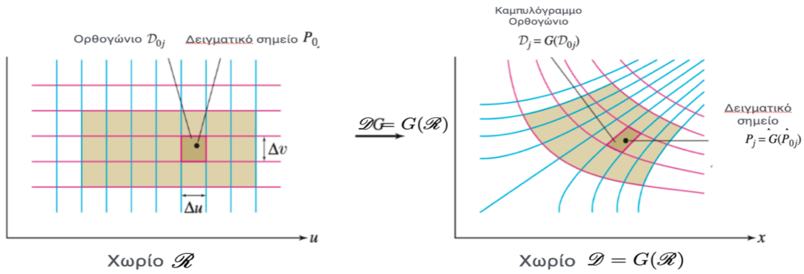
ισοδυναμεί με

$$\iint_{\mathscr{R}} f(G(u,v))\,|J_G(u,v)|\,du\,dv.$$

Επομένως, ζητούμε έναν μετασχηματισμό G που να προσαρμόζει το μονάδιαιο «πλακάκι» του uv–επιπέδου στο μονάδιαιο μέτρο επιφάνειας του xy–επιπέδου, με συντελεστή παραμόρφωσης $k = |J_G(u,v)|$, ώστε η ολοκλήρωση πάνω στο δύσκολο χωρίο $\mathscr{D}$ να μετατραπεί σε ολοκλήρωση πάνω σε ένα απλούστερο χωρίο $\mathscr{R}$.

Θεώρημα 1.1.4 Τύπος αλλαγής μεταβλητών, Έστω ότι η $G : \mathscr{D}_0 \to \mathscr{D}$ είναι μια C^1 απεικόνιση που είναι ένα προς ένα στο εσωτερικό του $\mathscr{D}_0$. Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής, τότε:

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{D}_0} f(x(u,v),\, y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv.$$



Σχήμα 1.2 *Η G απεικονίζει ένα ορθογώνιο πλέγμα $\mathscr{R}$ σε ένα καμπυλωμένο πλέγμα $\mathscr{D}$.*

Παράδειγμα 1.1.5
Αναθεώρηση των πολικών συντεταγμένων Χρησιμοποιήστε τον τύπο αλλαγής μεταβλητών για

να αποδείξετε τη σχέση που ισχύει για την ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες.

Λύση. Η Ιακωβιανή ορίζουσα της απεικόνισης των πολικών συντεταγμένων

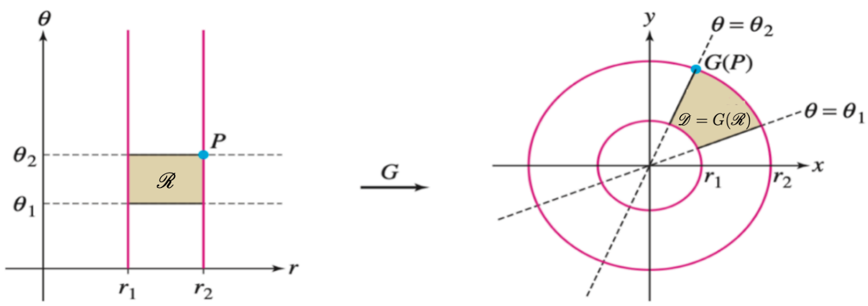
$$G(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

είναι:

$$\mathrm{J_G}(r,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

Ας υποθέσουμε ότι $\mathscr{D} = G(\mathscr{R})$ είναι η εικόνα υπό την απεικόνιση των πολικών συντεταγμένων G του ορθογωνίου $\mathscr{R}$ που ορίζεται από τις ανισώσεις $r_1 \le r \le r_2$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3. Τότε, προκύπτει η γνωστή σχέση για την ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες, δηλαδή:

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$



Σχήμα 1.3 *Η απεικόνιση πολικών συντεταγμένων $G(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$.*

Παράδειγμα 1.1.6
Απεικόνιση πολικών συντεταγμένων. Περιγράψτε την εικόνα ενός πολικού ορθογωνίου

$$\mathscr{R} = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$$

μέσω της απεικόνισης πολικών συντεταγμένων.

Λύση. Μια γνωστή απεικόνιση αυτού του τύπου είναι η απεικόνιση των *πολικών συντεταγμένων*:

$$G(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta),$$

η οποία αντιστοιχίζει κάθε σημείο (r,θ) (απόσταση και γωνία) στο σημείο (x,y) του καρτεσιανού επιπέδου. Η αντίστροφη απεικόνιση δίνεται από

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Από το Σχήμα 1.3 παρατηρούμε ότι:

- Μια κατακόρυφη ευθεία γραμμή

$$r = r_1$$

  (σημειώνεται με κόκκινο χρώμα στο σχήμα) απεικονίζεται σε ένα σύνολο σημείων με ακτινική συντεταγμένη ίση με r_1 και οποιαδήποτε τιμή γωνίας. Πρόκειται λοιπόν για έναν *κύκλο ακτίνας* r_1.
- Μια οριζόντια ευθεία

$$\theta = \theta_1$$

  (σημειώνεται με στικτή γραμμή στο σχήμα) απεικονίζεται σε ένα σύνολο σημείων με ίδια γωνία θ_1 και αυθαίρετη τιμή της r-συντεταγμένης. Πρόκειται για μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και σχηματίζει *γωνία* θ_1 *με τον θετικό ημιάξονα* x.

Η εικόνα του

$$\mathscr{R} = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$$

υπό την απεικόνιση πολικών συντεταγμένων

$$G(r,\theta)$$

είναι το *πολικό ορθογώνιο* στο επίπεδο xy, που ορίζεται από τις ανισώσεις

$$r_1 \le r \le r_2, \qquad \theta_1 \le \theta \le \theta_2.$$

Σχόλιο 1.1.7 Η αλλαγή συντεταγμένων καθιστά πολλές περιοχές συμμετρίας (όπως κύκλους ή τομείς) ευκολότερα περιγράψιμες, καθώς σε πολικές συντεταγμένες γράφονται με απλούστερες εξισώσεις.

1.1.1 Γραμμικές απεικονήσεις

Οι πιο γενικές απεικονίσεις μπορεί να είναι εξαιρετικά πολύπλοκες, επομένως είναι χρήσιμο να ξεκινήσουμε μελετώντας λεπτομερώς τις απλούστερες των περιπτώσεων — δηλαδή τις *γραμμικές απεικονίσεις*.

Μια απεικόνιση

$$G(u,v)$$

λέγεται *γραμμική* αν έχει τη μορφή

$$G(u,v) = (Au + Cv,\ Bu + Dv),$$

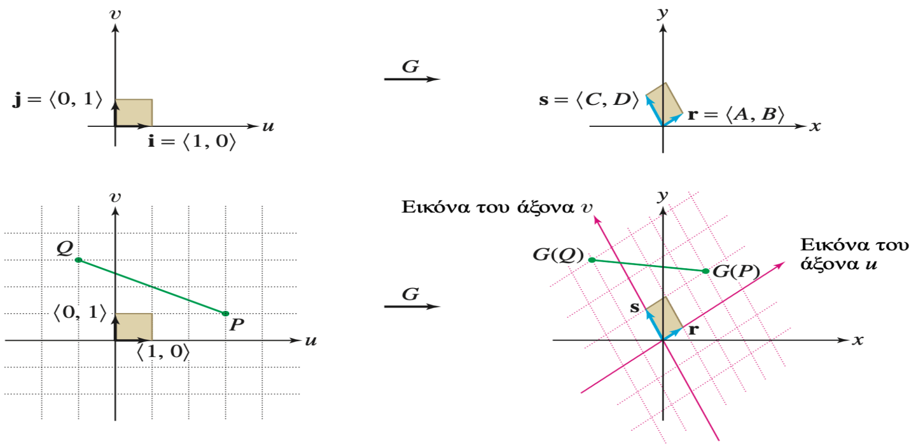
όπου A, B, C, D είναι σταθερές.

Μπορούμε να αποκτήσουμε καλύτερη εικόνα μιας τέτοιας γραμμικής απεικόνισης θεωρώντας την G ως μια αντιστοίχιση μεταξύ των διανυσμάτων του επιπέδου uv και των διανυσμάτων του επιπέδου xy.

Η απεικόνιση G διαθέτει τις ακόλουθες ιδιότητες *γραμμικότητας*.

$$G(u_1 + u_2,\ v_1 + v_2) = G(u_1, v_1) + G(u_2, v_2)$$

$$G(cu,\ cv) = c\,G(u,v) \qquad (c \text{ οποιαδήποτε σταθερά})$$



Σχήμα 1.4 *Η απεικόνιση πολικών συντεταγμένων* $G(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$.

Μια άμεση συνέπεια αυτών των δύο ιδιοτήτων είναι ότι η G απεικονίζει το παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από δύο οποιαδήποτε διανύσματα a και b στο επίπεδο uv στο παραλληλόγραμμο που σχηματίζεται από τις εικόνες $G(a)$ και $G(b)$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4. Γενικότερα, η απεικόνιση G απεικονίζει το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο οποιαδήποτε σημεία P και Q στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις εικόνες τους $G(P)$ και $G(Q)$. Έτσι, το πλέγμα που σχηματίζεται από τα διανύσματα βάσης $i = \langle 1,0 \rangle$ και $j = \langle 0,1 \rangle$ απεικονίζεται σε ένα πλέγμα που σχηματίζεται από τις εικόνες αυτών των διανυσμάτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.4, δηλαδή τα διανύσματα:

$$r = G(1,0) = \langle A,B \rangle, \qquad s = G(0,1) = \langle C,D \rangle.$$

Παράδειγμα 1.1.8

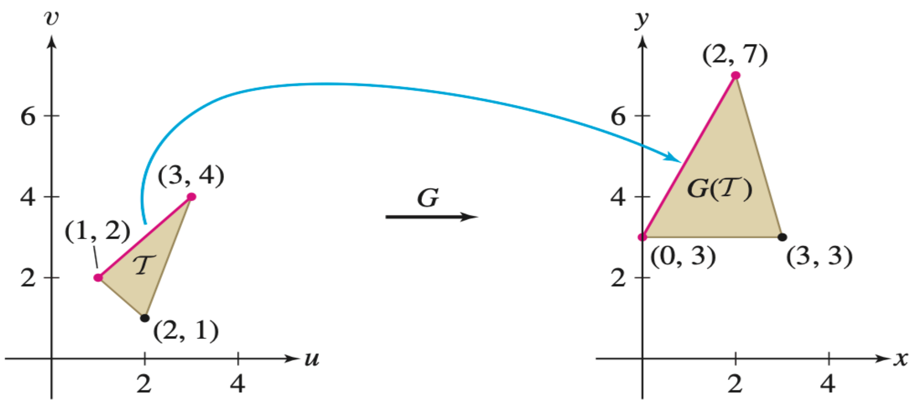
Εικόνα ενός τριγώνου Προσδιορίστε την εικόνα ενός τριγώνου $\mathscr{T}$ με κορυφές τα σημεία $(1,2)$, $(2,1)$ και $(3,4)$ υπό τη γραμμική απεικόνιση

$$G(u,v) = (2u - v,\ u + v).$$

Λύση.

Αφού η απεικόνιση G είναι γραμμική, θα αντιστοιχεί σε κάθε ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο κορυφές του τριγώνου $\mathscr{T}$ το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις εικόνες των αντίστοιχων κορυφών. Επομένως, η εικόνα του τριγώνου $\mathscr{T}$ θα είναι το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των σημείων (βλ. Σχήμα 1.5):

$$G(1,2) = (0,3), \qquad G(2,1) = (3,3), \qquad G(3,4) = (2,7).$$



Σχήμα 1.5 *Η απεικόνιση* $G(u,v) = (2u - v,\, u + v)$.

Παράδειγμα 1.1.9
Έστω η απεικόνιση $G(u,v) = (uv^{-1}, uv)$ για $u > 0$ και $v > 0$. Προσδιορίστε τις εικόνες:

(α) Των ευθειών $u = c$ και $v = c$.

(β) Του ορθογωνίου $[1,2] \times [1,2]$.

Προσδιορίστε επίσης την αντίστροφη απεικόνιση G^{-1}.

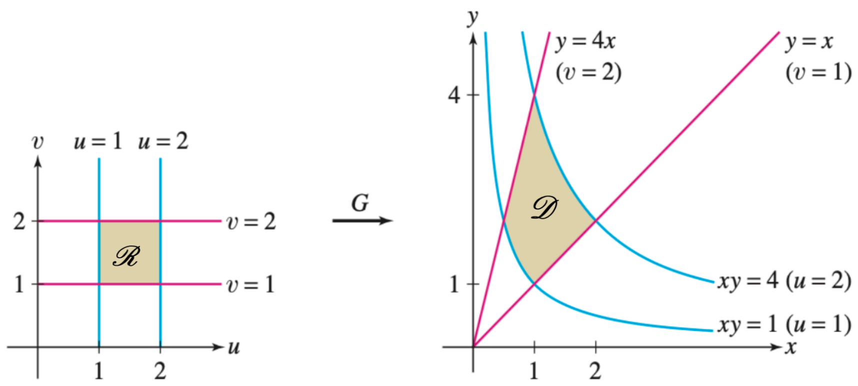
Λύση. (a) Στη συγκεκριμένη απεικόνιση ισχύει

$$x = uv^{-1}, \qquad y = uv.$$

Επομένως,

$$xy = u^2, \qquad \frac{y}{x} = v^2.$$

Η G απεικονίζει την κατακόρυφη ευθεία $u = c$ στην υπερβολή $xy = c^2$. και η οριζόντια ευθεία $v = c$ απεικονίζεται στο σύνολο των σημείων για τα οποία ισχύει $\dfrac{y}{x} = c^2$, δηλαδή $y = c^2 x$, που είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση c^2 (βλ. Σχήμα 1.6).



Σχήμα 1.6 *Η απεικόνιση* $G(u,v) = (uv^{-1}, uv)$.

(b) Η εικόνα του ορθογωνίου $[1,2] \times [1,2]$ είναι το *καμπυλωμένο ορθογώνιο* που περιορίζεται από τέσσερις καμπύλες, οι οποίες είναι οι εικόνες των ευθειών $u = 1$, $u = 2$ και $v = 1$, $v = 2$. Με βάση τα προηγούμενα, η ζητούμενη περιοχή ορίζεται από τις ανισότητες

$$1 \leq xy \leq 4, \qquad 1 \leq \frac{y}{x} \leq 4.$$

Για να προσδιορίσουμε την αντίστροφη απεικόνιση G^{-1} θα χρησιμοποιήσουμε τις προηγούμενες εξισώσεις, προκειμένου να καταλήξουμε στις σχέσεις

$$u = \sqrt{xy} \quad \text{και} \quad v = \sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Επομένως, η αντίστροφη απεικόνιση θα είναι

$$G^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{xy}, \sqrt{\frac{y}{x}}\right),$$

όπου κρατήσαμε τις θετικές τετραγωνικές ρίζες, καθώς ισχύει $u > 0$ και $v > 0$ στο συγκεκριμένο χωρίο.

Σχόλιο 1.1.10 Θα πρέπει να θυμάστε ότι ο τύπος αλλαγής μεταβλητών μετατρέπει ένα ολοκλήρωμα με μεταβλητές τις x, y σε ολοκλήρωμα με μεταβλητές τις u, v, αλλά η απεικόνιση G έχει ως πεδίο ορισμού ένα χωρίο uv και ως πεδίο τιμών ένα χωρίο xy. Ορισμένες φορές είναι πιο εύκολο να προσδιορίσουμε μια απεικόνιση F που έχει τη αντίθετη κατεύθυνση, δηλαδή «ξεκινά» από ένα χωρίο xy και «καταλήγει» σε ένα χωρίο uv. Στην περίπτωση αυτή, η επιθυμητή απεικόνιση G είναι η αντίστροφη της F, δηλαδή

$$G = F^{-1}.$$

Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι ορισμένες φορές είναι εφικτό να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα χωρίς καν να χρειαστεί να επιλύσουμε ως προς G. Το σημείο-κλειδί που εκμεταλλευόμαστε για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο είναι το γεγονός ότι η Ιακωβιανή ορίζουσα της G είναι η αντίστροφη της Ιακωβιανής της απεικόνισης F, δηλαδή:

Αν $G = F^{-1}$ και $J_F(x,y) \neq 0$, τότε

$$J_G(u,v) = J_{F^{-1}}(x,y).$$

Η σχέση μεταξύ των Ιακωβιανών οριζουσών των F και G μπορεί να γραφεί και στην ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}.$$

Παράδειγμα 1.1.11
Χρήση της αντίστροφης απεικόνισης, Ολοκληρώστε τη συνάρτηση

$$f(x,y) = xy(x^2+y^2)$$

στο χωρίο

$$\mathscr{D} : -3 \leq x^2 - y^2 \leq 3, \qquad 1 \leq xy \leq 4.$$

Λύση. Υπάρχει μια απλή απεικόνιση F η οποία έχει τη «λάθος» κατεύθυνση. Θέτουμε

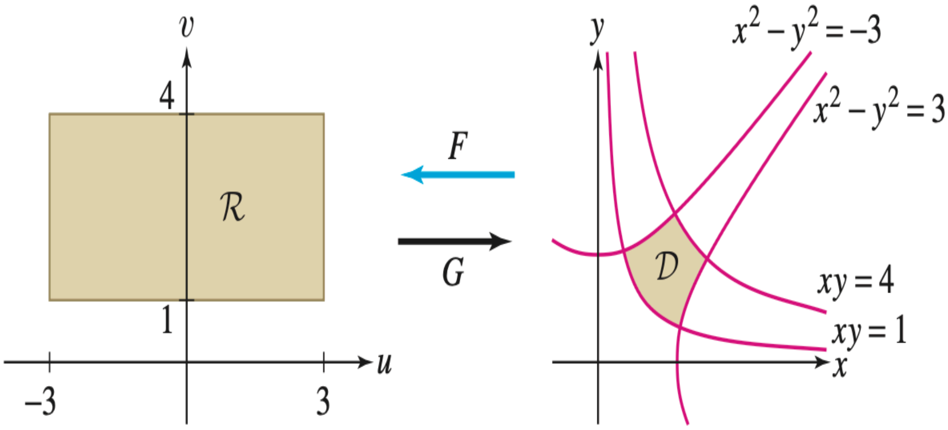
$$u = x^2 - y^2, \qquad v = xy.$$

Με τον τρόπο αυτόν, το χωρίο μας ορίζεται από τις ανισότητες

$$-3 \leq u \leq 3, \qquad 1 \leq v \leq 4,$$

επομένως μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση από το χωρίο $\mathscr{D}$ στο ορθογώνιο $\mathscr{R} = [-3,3] \times [1,4]$ στο επίπεδο uv, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.7, δηλαδή:

$$F : \mathscr{D} \to \mathscr{R}, \qquad (x,y) \mapsto (x^2-y^2, xy).$$



Σχήμα 1.7 *Η απεικόνιση F έχει την αντίστροφη κατεύθυνση.*

Ο Ιακωβιανός πίνακας του F είναι

$$J_F(x,y) = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2x\cdot x - (-2y)\cdot y = 2\big(x^2+y^2\big).$$

Συνεπώς, αφού $J_F(x,y) \neq 0$ στην $\mathscr{R}$, ισχύει ο τύπος

$$J_G(u,v) = J_{F^{-1}}(x,y) = \frac{1}{J_F(x,y)} = \frac{1}{2\big(x^2+y^2\big)}.$$

Κανονικά το επόμενο βήμα θα ήταν να εκφράσουμε τη συνάρτηση $f(x,y)$ με τη βοήθεια των μεταβλητών u και v. Μπορούμε όμως, στην περίπτωσή μας, να αποφύγουμε αυτό το βήμα αν παρατηρήσουμε ότι η Ιακωβιανή απλοποιείται με έναν από τους παράγοντες της συνάρτησης $f(x,y)$, δηλαδή:

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{D}} xy(x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{R}} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(G)|\,du\,dv$$

$$= \iint_{\mathscr{R}} xy(x^2+y^2)\frac{1}{2(x^2+y^2)}\,du\,dv = \frac{1}{2}\iint_{\mathscr{R}} xy\,du\,dv.$$

Επειδή $v = xy$, προκύπτει:

$$\frac{1}{2}\iint_{\mathscr{R}} xy\,du\,dv = \frac{1}{2}\iint_{\mathscr{R}} v\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\int_{1}^{4} v\,dv\,du = \frac{1}{2}.6\left(\frac{1}{2}4^2 - \frac{1}{2}1^2\right) = \frac{45}{2}.$$

Σχόλιο 1.1.12 Μπορούμε να ορίσουμε απευθείας τον μετασχηματισμό G από το ορθογώνιο $\mathscr{R} = [-3,3]\times[1,4]$ στο uv–επίπεδο στο χωρίο $\mathscr{D}$ στο xy–επίπεδο, χωρίς να χρειαστεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του F. Να δούμε αν αντιμετωπίσουμε προβλήματα και ποιά; Ξεκινάμε από το σύστημα

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = xy. \end{cases}$$

Λύνουμε ως προς x, y. Θέτουμε $R = \sqrt{u^2+4v^2}$, οπότε:

$$x^2+y^2 = \sqrt{u^2+4v^2} = R, \quad x^2 = \frac{R+u}{2}, \quad y^2 = \frac{R-u}{2}.$$

Επειδή στο συγκεκριμένο χωρίο έχουμε $v > 0$ (άρα $x, y > 0$), παίρνουμε τον θετικό κλάδο των ριζών. Επομένως:

$$\boxed{G(u,v) = \left(\sqrt{\frac{R+u}{2}}, \sqrt{\frac{R-u}{2}}\right), \qquad R = \sqrt{u^2+4v^2}.}$$

Πράγματι, ελέγχουμε ότι:

$$xy = \sqrt{\frac{R+u}{2}}\sqrt{\frac{R-u}{2}} = \frac{\sqrt{R^2-u^2}}{2} = \frac{\sqrt{4v^2}}{2} = v,$$

και

$$x^2 - y^2 = \frac{(R+u)-(R-u)}{2} = u.$$

Επομένως έχουμε

$$x(u,v) = \sqrt{\frac{R+u}{2}}, \qquad y(u,v) = \sqrt{\frac{R-u}{2}}, \qquad R = \sqrt{u^2+4v^2}.$$

$$R_u = \frac{u}{R}, \qquad R_v = \frac{4v}{R}.$$

$$\partial_u x = \frac{1}{2\sqrt{(R+u)/2}} \cdot \frac{R_u+1}{2} = \frac{R_u+1}{4x}, \qquad \partial_v x = \frac{1}{2\sqrt{(R+u)/2}} \cdot \frac{R_v}{2} = \frac{R_v}{4x},$$

$$\partial_u y = \frac{1}{2\sqrt{(R-u)/2}} \cdot \frac{R_u-1}{2} = \frac{R_u-1}{4y}, \qquad \partial_v y = \frac{1}{2\sqrt{(R-u)/2}} \cdot \frac{R_v}{2} = \frac{R_v}{4y}.$$

$$J_G = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = (\partial_u x)(\partial_v y) - (\partial_v x)(\partial_u y) = \frac{1}{16xy}\Big[(R_u+1)R_v - (R_u-1)R_v\Big] = \frac{R_v}{8xy}.$$

Με $R_v = \dfrac{4v}{R}$ παίρνουμε

$$J_G = \frac{1}{8xy} \cdot \frac{4v}{R} = \frac{v}{2Rxy}.$$

Από τους ορισμούς x, y:

$$xy = \sqrt{\frac{R+u}{2}}\sqrt{\frac{R-u}{2}} = \sqrt{\frac{R^2-u^2}{4}} = \sqrt{\frac{u^2+4v^2-u^2}{4}} = \sqrt{\frac{4v^2}{4}} = |v|.$$

Στο εξεταζόμενο χωρίο $v > 0$, άρα $xy = v$ και επομένως

$$J_G = \frac{1}{2R} = \frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}.$$

Τελική μορφή του ολοκληρώματος χωρίς χρήση αντιστρόφου:

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{D}'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv =$$
$$\iint_{\mathscr{D}'} f\Big(\sqrt{\frac{R+u}{2}}, \sqrt{\frac{R-u}{2}}\Big) \frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}\,du\,dv, \quad R = \sqrt{u^2+4v^2}.$$

$$f(x,y)=xy(x^2+y^2), \qquad \mathscr{D}:\ -3\le x^2-y^2\le 3, \quad 1\le xy\le 4.$$

Θέτουμε:

$$u=x^2-y^2, \qquad v=xy.$$

Τότε το χωρίο $\mathscr{D}$ αντιστοιχίζεται στο

$$\mathscr{D}':\ -3\le u\le 3, \quad 1\le v\le 4.$$

Εκφράζουμε τη $f(x,y)$ συναρτήσει των (u,v):

$$f(x(u,v),y(u,v))=xy(x^2+y^2)=v\,(x^2+y^2)=vR=v\sqrt{u^2+4v^2}.$$

Από τα προηγούμενα έχουμε:

$$J_G=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}.$$

Άρα το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{\mathscr{D}'} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv=$$
$$\iint_{\mathscr{D}'} f\Big(\sqrt{\frac{R+u}{2}},\sqrt{\frac{R-u}{2}}\Big)\ \frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}\,du\,dv=$$
$$\iint_{\mathscr{D}'} v\sqrt{u^2+4v^2}\ \frac{1}{2\sqrt{u^2+4v^2}}\,du\,dv=\frac{1}{2}\iint_{\mathscr{D}'} v\,du\,dv.$$

Υπολογίζουμε:

$$\iint_{\mathscr{D}'} v\,du\,dv=\int_{u=-3}^{3}\int_{v=1}^{4} v\,dv\,du=\int_{u=-3}^{3} du\cdot\int_{v=1}^{4} v\,dv$$

$$=6\int_1^4 v\,dv=6\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^4=3(16-1)=45.$$

Τελικά:

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{2}\times 45=22.5.$$

1.2 Αλλαγή μεταβλητών στην περίπτωση τριών μεταβλητών

Ο τύπος αλλαγής μεταβλητών έχει την ίδια μορφή στην περίπτωση που έχουμε τρεις (ή και ακόμα περισσότερες) μεταβλητές, με τη σχέση που αναλύσαμε για την περίπτωση των δύο μεταβλητών. Έστω η

$$G:\mathscr{W}_0\to\mathscr{W}$$

η οποία απεικονίζει μια περιοχή $\mathscr{W}_0$ του τρισδιάστατου χώρου (u,v,w) σε μια περιοχή $\mathscr{W}$ του τρισδιάστατου χώρου (x,y,z), μέσω των σχέσεων

$$x = x(u,v,w), \qquad y = y(u,v,w), \qquad z = z(u,v,w).$$

Η *Ιακωβιανή ορίζουσα* $J_G(x,y,z)$ είναι η ορίζουσα 3×3:

$$J_G(x,y,z) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

οπότε ο τύπος αλλαγής μεταβλητών παίρνει τη μορφή:

$$dx\,dy\,dz = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw.$$

Αν θέλουμε να είμαστε πιο αυστηροί, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι αν η απεικόνιση G είναι C^1 και ένα προς ένα στο εσωτερικό της περιοχής $\mathscr{W}_0$ και η f είναι συνεχής, τότε:

$$\iiint_{\mathscr{W}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\mathscr{W}_0} f(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw.$$

Στις Ασκήσεις 42 και 43 θα έχετε την ευκαιρία να χρησιμοποιήσετε τον γενικό τύπο αλλαγής μεταβλητών, για να αποδείξετε τις σχέσεις για την ολοκλήρωση σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες που αναφέρθηκαν στην Ενότητα 15.4.

Παράδειγμα 1.2.1

1. *Στις Ασκήσεις (a)–(c) θεωρήστε ότι η*

$$G(u,v) = (2u+v,\, 5u+3v)$$

είναι μια απεικόνιση από το επίπεδο uv στο xy.

   (a) Να αποδείξετε ότι η εικόνα της οριζόντιας ευθείας $v = c$, υπό την απεικόνιση G, είναι η ευθεία με εξίσωση

$$y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}c.$$

   Ποια είναι η εικόνα (σε μορφή κλίσης–τεταγμένης) της κατακόρυφης ευθείας $u = c$;

   (b) Περιγράψτε την εικόνα της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία

$$(u,v) = (1,1) \quad \text{και} \quad (u,v) = (1,-1),$$

   υπό την απεικόνιση G, στη μορφή κλίσης–τεταγμένης.

(c) Περιγράψτε την εικόνα της ευθείας

$$v = 4u,$$

υπό την απεικόνιση G, στη μορφή κλίσης–τεταγμένης.

2. *Στις Ασκήσεις* (a)–(f) *υπολογίστε την Ιακωβιανή ορίζουσα (στο σημείο, εφόσον αυτό αναφέρεται).*

(a) $G(u,v) = (3u + 4v,\ u - 2v)$

(b) $G(r,s) = (rs,\ r + s)$

(c) $G(r,t) = (r\sin t,\ r - \cos t), \quad (r,t) = (1,\pi)$

(d) $G(u,v) = (v\ln u,\ u^2 v^{-1}), \quad (u,v) = (1,2)$

(e) $G(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta), \quad (r,\theta) = \left(4,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$

(f) $G(u,v) = (ue^v,\ e^u)$

3. Έστω $\mathscr{D}$ το παραλληλόγραμμο του Σχήματος 1.8. Εφαρμόστε τον τύπο αλλαγής μεταβλητών στην απεικόνιση

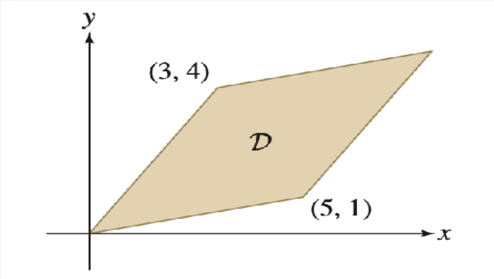
$$G(u,v) = (5u + 3v, u + 4v)$$

προκειμένου να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

ως ένα ολοκλήρωμα πάνω στο χωρίο

$$\mathscr{R} = [0,1] \times [0,1].$$



Σχήμα 1.8

4. Έστω η απεικόνιση

$$G(u,v) = (u - uv,\ uv).$$

(a) Δείξτε ότι η εικόνα της οριζόντιας ευθείας $v = c$ είναι η

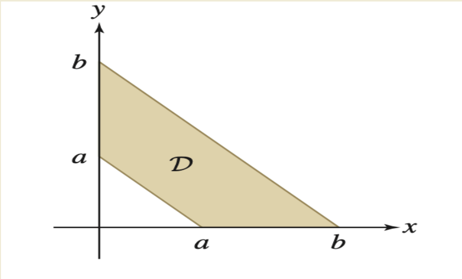
$$y = \frac{c}{1-c}x \quad \text{αν } c \neq 1,$$

ενώ είναι ο άξονας y αν $c = 1$.

(b) Προσδιορίστε τις εικόνες των κατακόρυφων ευθειών του επιπέδου uv.

(c) Υπολογίστε την Ιακωβιανή ορίζουσα της απεικόνισης G. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D xy\,dx\,dy.$$



Σχήμα 1.9

(d) Παρατηρήστε ότι, σύμφωνα με τον τύπο του εμβαδού ενός τριγώνου, το χωρίο D του Σχήματος 1.9 έχει εμβαδόν

$$\frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

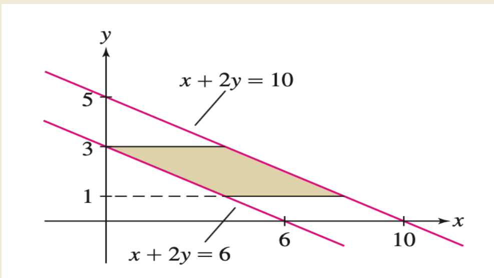
Υπολογίστε το εμβαδόν αυτό εκ νέου, χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής μεταβλητών για την απεικόνιση G.

5. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D (x+3y)\,dx\,dy$$

όπου D είναι η σκιασμένη περιοχή του Σχήματος 1.10.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την απεικόνιση

$$G(u,v) = (u-2v,\, v).$$



Σχήμα 1.10

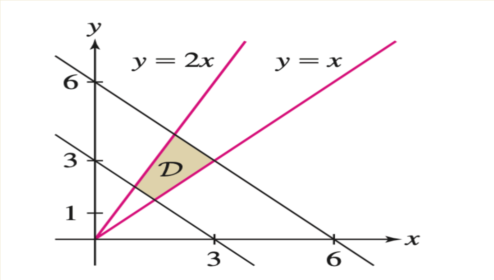
6. Χρησιμοποιήστε την απεικόνιση

$$G(u,v) = \left(\frac{u}{v+1}, \frac{uv}{v+1} \right)$$

για να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D (x+y)\,dx\,dy,$$

όπου D είναι η σκιασμένη περιοχή του Σχήματος 1.11.



Σχήμα 1.11

7. Σχεδιάστε το χωρίο

$$D = \{(x,y) : 1 \leq x+y \leq 4,\ -4 \leq y-2x \leq 1\}.$$

(a) Έστω F η απεικόνιση

$$u = x+y, \qquad v = y-2x$$

από το επίπεδο xy στο επίπεδο uv, ενώ G είναι η αντίστροφή της. Χρησιμοποιήστε την Εξίσωση (14) για να υπολογίσετε την $J_G(x,y)$.

(b) Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$$

με τον τύπο αλλαγής μεταβλητών για την απεικόνιση G.

8. Να σχεδιάσετε το χωρίο D που φράσσεται από τις καμπύλες

$$y = \frac{2}{x}, \quad y = \frac{1}{2x}, \quad y = 2x, \quad y = \frac{x}{2}$$

και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Έστω F η απεικόνιση

$$u = xy, \qquad v = \frac{y}{x}$$

από το επίπεδο xy στο επίπεδο uv.

(a) Βρείτε την εικόνα του χωρίου D υπό την απεικόνιση F.

(b) Έστω ότι $G = F^{-1}$. Να αποδείξετε ότι

$$|J_G| = \frac{1}{2|v|}.$$

(c) Χρησιμοποιήστε τον τύπο αλλαγής μεταβλητών για να αποδείξετε τη σχέση

$$\iint_D f\left(\frac{y}{x}\right) dx\,dy = \frac{3}{4}\int_{1/2}^{2} \frac{f(v)}{v}\,dv.$$

(d) Εφαρμόστε το αποτέλεσμα που αποδείξατε στο ερώτημα (γ) για να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D \frac{y e^{y/x}}{x}\,dx\,dy.$$

9. Χρησιμοποιήστε την απεικόνιση

$$G(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

για να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_R \big((x-y)\sin(x+y)\big)^2\,dx\,dy$$

όπου R είναι το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ και $(0,\pi)$.

Λύση.

1. Δίνεται η απεικόνιση

$$G(u,v) = (x,y) = (2u+v,\, 5u+3v)$$

(a) Έστω η οριζόντια ευθεία $v = c$ στο επίπεδο uv.
Τότε:

$$x = 2u + c, \quad y = 5u + 3c$$

Απομονώνουμε u από την πρώτη:

$$u = \frac{x-c}{2}$$

και αντικαθιστούμε στη δεύτερη:

$$y = 5\frac{x-c}{2} + 3c = \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}c + 3c = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}c$$

Άρα η εικόνα της ευθείας $v = c$ είναι η ευθεία

$$y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}c.$$

Για την κατακόρυφη ευθεία $u = c$ ισχύει:

$$x = 2c + v, \quad y = 5c + 3v.$$

Από την πρώτη $v = x - 2c$ και στη δεύτερη:

$$y = 5c + 3(x - 2c) = 3x - c.$$

Άρα η εικόνα της κατακόρυφης ευθείας $u = c$ είναι:

$$y = 3x - c.$$

(b) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $(u,v) = (1,1)$ και $(u,v) = (1,-1)$ έχει εξίσωση $u = 1$.
Από το (a) γνωρίζουμε ότι η εικόνα της $u = c$ είναι $y = 3x - c$. Άρα, για $c = 1$ έχουμε:

$$y = 3x - 1.$$

(c) Για την ευθεία $v = 4u$ ισχύει:

$$x = 2u + 4u = 6u, \quad y = 5u + 3(4u) = 17u.$$

Απομονώνουμε u από την πρώτη: $u = \dfrac{x}{6}$, και αντικαθιστούμε:

$$y = 17\frac{x}{6} \Rightarrow y = \frac{17}{6}x.$$

Άρα η εικόνα της ευθείας $v = 4u$ είναι η ευθεία:

$$y = \frac{17}{6}x.$$

3.

$$G(u,v) = (x,y) = (5u + 3v,\ u + 4v), \qquad R = [0,1] \times [0,1].$$

Υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό:

$$J_G(u,v) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 17.$$

$$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = 17.$$

Αντικαθιστούμε: $\qquad x = 5u + 3v, \quad y = u + 4v.$

$$xy = (5u + 3v)(u + 4v) = 5u^2 + 23uv + 12v^2.$$

$$\iint_{\mathscr{D}} xy\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{R}} (5u^2 + 23uv + 12v^2) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv =$$
$$17 \int_0^1 \int_0^1 (5u^2 + 23uv + 12v^2)\,dv\,du.$$

$$\int_0^1 (5u^2+23uv+12v^2)\,dv = 5u^2v+\frac{23}{2}uv^2+4v^3\Big|_0^1 = 5u^2+\frac{23}{2}u+4.$$

$$\int_0^1 (5u^2+\frac{23}{2}u+4)\,du = \frac{5}{3}+\frac{23}{4}+4 = \frac{20+69+48}{12} = \frac{137}{12}.$$

$$I = 17\cdot\frac{137}{12} = \boxed{\frac{2329}{12}}.$$

4.

$$G(u,v) = (u-uv,\ uv).$$

(a)

Για την οριζόντια ευθεία $v=c,$ έχουμε: $x=u(1-c),\ y=uc.$

Άρα $y=\dfrac{c}{1-c}x,$ αν $c\neq 1,$ και y είναι ο άξονας y αν $c=1.$

(b)

Για κάθετα σημεία $u=k,$ προκύπτει: $x=k(1-v),\ y=kv\ \Rightarrow\ x+y=k.$

(c)

Υπολογίζουμε τον Ιακωβιανό:

$$J=\begin{vmatrix}\partial x/\partial u & \partial x/\partial v\\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-v & -u\\ v & u\end{vmatrix} = u.$$

(d)

Αν το χωρίο D αντιστοιχεί στο $R:[a,b]\times[0,1],$ τότε το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\iint_{\mathscr{D}} xy\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{R}} x(u,v)\,y(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \iint_{\mathscr{R}}(u-uv)(uv)\,|u|\,du\,dv.$$

Εφόσον $u>0,$ έχουμε: $\displaystyle\iint_{\mathscr{R}}(u-uv)(uv)u\,du\,dv = \iint_{\mathscr{R}}(u^3v-u^3v^2)\,du\,dv.$

$$\iint_{\mathscr{R}}(u^3v-u^3v^2)\,du\,dv = \int_a^b u^3\,du\int_0^1(v-v^2)\,dv = \left[\frac{u^4}{4}\right]_a^b\left[\frac{v^2}{2}-\frac{v^3}{3}\right]_0^1.$$

$$=\frac{1}{4}(b^4-a^4)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}(b^4-a^4)\frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{24}(b^4-a^4)}.$$

Το εμβαδόν του χωρίου (όπως στο Σχήμα 1.9) είναι:

$$A = \frac{1}{2}(b^2 - a^2), \text{και επαληθεύεται μέσω του μετασχηματισμού } G.$$

5.
$$G(u,v) = (x,y) = (u-2v,\ v). \quad \Rightarrow \quad \mathscr{R} = [6,10] \times [1,3].$$

$$J_G(x,y) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad x+3y = (u-2v)+3v = u+v.$$

$$\iint_{\mathscr{D}} (x+3y)\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{R}} (u+v)\,du\,dv = \int_1^3 \int_6^{10} (u+v)\,du\,dv.$$

$$\int_6^{10} (u+v)\,du = \frac{u^2}{2} + vu\Big|_6^{10} = 32+4v, \quad \Rightarrow \quad \int_1^3 (32+4v)\,dv = 32\cdot 2 + 2(3^2-1^2) = 80.$$

Επομένως,

$$\boxed{\iint_{\mathscr{D}} (x+3y)\,dx\,dy = 80.}$$

6.
$$G(u,v) = (x,y) = \Big(\frac{u}{v+1}, \frac{uv}{v+1}\Big), \qquad \Rightarrow \qquad u = x+y,\ v = \frac{y}{x}.$$

Όρια: $y = x \Rightarrow v = 1, \quad y = 2x \Rightarrow v = 2, \quad x+y = 6 \Rightarrow u = 6. \ \Rightarrow \ \mathscr{R} = [0,6] \times [1,2].$

$$\text{\textit{Ιακωβιανός:}} \ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{1}{v+1} & -\frac{u}{(v+1)^2} \\ \frac{v}{v+1} & \frac{u}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(v+1)^2}.$$

$$\iint_{\mathscr{D}} (x+y)\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{R}} u\,\frac{u}{(v+1)^2}\,du\,dv = \int_1^2 \int_0^6 \frac{u^2}{(v+1)^2}\,du\,dv.$$

$$\int_0^6 u^2\,du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^6 = 72, \qquad \int_1^2 \frac{1}{(v+1)^2}\,dv = \left[-\frac{1}{v+1}\right]_1^2 = \frac{1}{6}.$$

Επομένως,

$$\boxed{\iint_{\mathscr{D}} (x+y)\,dx\,dy = 72 \cdot \frac{1}{6} = 12.}$$

7.
$$D = \{(x,y):\ 1 \le x+y \le 4,\ -4 \le y-2x \le 1\}.$$

(a) Ο μετασχηματισμός:

$$F(x,y) = (u,v) = (x+y,\ y-2x).$$

$$J_F = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \ \Rightarrow\ J_G(x,y) = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{3}.$$

(β) Αλλαγή μεταβλητών για $\iint_{\mathscr{D}} e^{x+y}\,dx\,dy$. Από τους ορισμούς:

$$u = x+y,\ v = y-2x \Rightarrow \mathscr{R} = [1,4]\times[-4,1].\text{ Επίσης } e^{x+y} = e^u.$$

$$\iint_{\mathscr{D}} e^{x+y}\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{R}} e^u J_G\,du\,dv = \iint_{\mathscr{R}} e^u \frac{1}{3}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-4}^{1}\int_{1}^{4} e^u\,du\,dv = \frac{1}{3}(1-(-4))\,(e^4-e) = \boxed{\frac{5}{3}(e^4-e)}.$$

8. Δίνεται: $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ στο τεταρτημόριο με σύνορα

$$y = \frac{2}{x},\ y = \frac{1}{2x},\ y = 2x,\ y = \frac{x}{2}. \quad F(x,y) = (u,v) = (xy,\ \frac{y}{x}).$$

(a) Εικόνα του D με τον F.

$$y = \frac{2}{x} \Rightarrow u = 2, \quad y = \frac{1}{2x} \Rightarrow u = \frac{1}{2}, \quad y = 2x \Rightarrow v = 2, \quad y = \frac{x}{2} \Rightarrow v = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow\ \mathscr{R} = \{(u,v):\ \frac{1}{2} \le u \le 2,\ \frac{1}{2} \le v \le 2\}.$$

(b) Ιακωβιανός του $G = F^{-1}$.

$$J_F(u,v) = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x & \partial u/\partial y \\ \partial v/\partial x & \partial v/\partial y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = 2\frac{y}{x} = 2v.$$

$$\Rightarrow\ |J_G| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{|J_F|} = \frac{1}{2|v|}. \quad (\text{στο } D:\ v > 0 \Rightarrow |v| = v)$$

(c) Τύπος αλλαγής μεταβλητών για

$$\iint_{\mathscr{D}} f\left(\frac{y}{x}\right)\,dx\,dy.$$

$$\iint_{\mathscr{D}} f\left(\frac{y}{x}\right)\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{R}} f(v)\,|J_G|\,du\,dv = \iint_{\mathscr{R}} f(v)\,\frac{1}{2v}\,du\,dv =$$
$$\left(\int_{\frac{1}{2}}^{2} du\right)\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f(v)}{v}\,dv = \boxed{\frac{3}{4}\int_{1/2}^{2}\frac{f(v)}{v}\,dv}.$$

(d) Υπολογισμός

$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{y\,e^{y/x}}{x}\,dx\,dy. \quad \frac{y}{x} = v \Rightarrow \text{ ολοκλ. συνάρτηση } ve^{v}.$$

$$\iint_{\mathscr{D}} \frac{y\,e^{y/x}}{x}\,dx\,dy = \iint_{\mathscr{R}} \left(ve^{v}\right)|J_G|\,du\,dv = \iint_{\mathscr{R}} \left(ve^{v}\right)\frac{1}{2v}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{2} du\right)\int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{v}\,dv = \boxed{\frac{3}{4}\left(e^{2}-e^{1/2}\right)}.$$

9. Θέτουμε την αλλαγή

$$(x,y) = G(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$$

οπότε

$$u = x+y, \qquad v = x-y.$$

Ο Ιακωβιανός είναι

$$J_G(x,y) = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u & \partial x/\partial v \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2},$$

$$|J_G(x,y)| = \frac{1}{2}, \quad dx\,dy = \frac{1}{2}\,du\,dv.$$

Το ολοκλήρωμα γράφεται

$$((x-y)\sin(x+y))^2 = (v\sin u)^2 = v^2\sin^2 u.$$

Η περιοχή $\mathscr{R}$ έχει κορυφές $(\pi,0),(2\pi,\pi),(\pi,2\pi),(0,\pi)$. Με $u=x+y,\ v=x-y$ παίρνουμε ορθογώνιο:

$$\pi \le u \le 3\pi, \qquad -\pi \le v \le \pi.$$

Πράγματι, Για τον μετασχηματισμό

$$u = x + y, \qquad v = x - y,$$

παίρνουμε τα 4 κορυφαία σημεία της περιοχής $\mathscr{R}$:

$$(\pi, 0), \quad (2\pi, \pi), \quad (\pi, 2\pi), \quad (0, \pi).$$

Υπολογίζουμε u και v σε καθένα:

- Στο $(\pi, 0)$: $\quad u = \pi + 0 = \pi, \quad v = \pi - 0 = \pi.$
- Στο $(2\pi, \pi)$: $\quad u = 2\pi + \pi = 3\pi, \quad v = 2\pi - \pi = \pi.$
- Στο $(\pi, 2\pi)$: $\quad u = \pi + 2\pi = 3\pi, \quad v = \pi - 2\pi = -\pi.$
- Στο $(0, \pi)$: $\quad u = 0 + \pi = \pi, \quad v = 0 - \pi = -\pi.$

Άρα οι τιμές του u κυμαίνονται από π έως 3π, ενώ οι τιμές του v από $-\pi$ έως π:

$$\pi \le u \le 3\pi, \qquad -\pi \le v \le \pi.$$

Άρα

$$\iint_{\mathscr{R}} \big((x-y)\sin(x+y)\big)^2\, dx\, dy = \int_{\pi}^{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v^2 \sin^2 u \, \frac{1}{2}\, dv\, du = \frac{1}{2}\Big(\int_{-\pi}^{\pi} v^2\, dv\Big)\Big(\int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 u\, du\Big).$$

Υπολογίζουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} v^2\, dv = \frac{2\pi^3}{3}, \qquad \int_{\pi}^{3\pi} \sin^2 u\, du = \pi.$$

Συνεπώς

$$\iint_{\mathscr{R}} \big((x-y)\sin(x+y)\big)^2\, dx\, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi^3}{3} \cdot \pi = \frac{\pi^4}{3}.$$

1.3 Πεπλεγμένες Συναρτήσεις

Στον λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής χρησιμοποιήσαμε την πεπλεγμένη παράγωγη για να προσδιορίσουμε την $\dfrac{dy}{dx}$ στην περίπτωση που η y ορίζεται πεπλεγμένα ως συνάρτηση του x μέσω μιας εξίσωσης της μορφής $f(x,y)=0$. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για συναρτήσεις με περισσότερες μεταβλητές. Ας υποθέσουμε ότι η z ορίζεται πεπλεγμένα από μια εξίσωση της μορφής

$$F(x,y,z)=0.$$

Τότε γενικεύοντας την πεπλεγμένη παράγωγη στις εξισώσεις της μορφής $f(x,y)=0$ έχουμε τα εξής:

Ορισμός 1.3.1 Λέμε ότι η εξίσωση $F(x,y,z)=0$ ορίζει με *πεπλεγμένη μορφή* μια συνάρτηση $z=f(x,y)$ στον χωρίο $\mathscr{D}\subseteq\mathbb{R}^2$, αν για κάθε $(x,y)\in\mathscr{D}$ ισχύει η σχέση

$$F(x,y,f(x,y))=0.$$

Θεώρημα 1.3.2 Έστω η εξίσωση $F(x,y,z)=0$ και το σημείο (x_0,y_0,z_0) εσωτερικό σημείο ενός χωρίου $\mathscr{D}\subseteq\mathbb{R}^3$. Αν ισχύουν οι παρακάτω προϋποθέσεις:

$$\begin{cases} \text{(i)} & F(x_0,y_0,z_0)=0, \\ \text{(ii)} & F_x,\ F_y,\ F_z \text{ είναι συνεχείς στο } \mathscr{D}, \\ \text{(iii)} & F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0, \end{cases}$$

τότε υπάρχει μια περιοχή I_0 γύρω από το σημείο (x_0,y_0) στην οποία ορίζεται μία και μόνον μία διαφορίσιμη συνάρτηση $z=f(x,y)$ τέτοια ώστε:

$$(a)\quad z_0=f(x_0,y_0),$$

$$(b)\quad F(x,y,f(x,y))=0,$$

$$(c)\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

Λύση. Από

$$F(x,y,z)=0 \quad\Rightarrow\quad dF(x,y,z)=0$$

έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0 \tag{i}$$

Επίσης, από

$$z=f(x,y)$$

παίρνουμε

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \tag{ii}$$

Αντικαθιστούμε τη (ii) στη (i):

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = 0$$

Συγκεντρώνοντας όρους ως προς dx και dy:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy = 0$$

Επειδή η σχέση ισχύει για κάθε dx, dy, οι συντελεστές πρέπει να μηδενίζονται:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Άρα προκύπτει:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}}$$

Σημείωση 1.3.3

1. Αν μας ζητείται να αποδείξουμε ότι η $F(x,y,z) = 0$ ορίζει συνάρτηση $z = f(x,y)$ γύρω από το σημείο (x_0, y_0, z_0), τότε αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι σχέσεις (i), (ii), (iii) του προηγούμενου θεωρήματος. (Η συνέχεια των F_x, F_y, F_z συνήθως θα είναι προφανής από άθροισμα – γινόμενο – πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.)

2. Αν μας ζητείται να αποδείξουμε ότι η $F(x,y,z) = 0$ ορίζει συνάρτηση $z = f(x,y)$ γενικότερα στο χωρίο $\mathscr{D}$, τότε δείχνουμε ότι η $F(x,y,z) = 0$ έχει ως προς z μοναδική λύση στον και ότι ικανοποιούνται στον οι σχέσεις (ii), (iii) του θεωρήματος.

Σχόλιο 1.3.4 Πολλές φορές, προς χάριν ομοιομορφίας και απλότητας των αποδείξεων στις ασκήσεις, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό z_x αντί για f_x και z_y αντί για f_y, όταν η συνάρτηση $z = f(x,y)$ ορίζεται πεπλεγμένα ή ρητά. Η ίδια σύμβαση θα ακολουθείται και για παραγώγους ανώτερης τάξης, όπως z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, ώστε να διατηρείται ενιαίος και σαφής τρόπος γραφής σε όλες τις μορφές και βαθμίδες των παραγώγων.

Παράδειγμα 1.3.5
Να δειχθεί ότι υπάρχει συνάρτηση $z = f(x,y)$ που επαληθεύει την εξίσωση

$$\sin(xyz) = 2x + 3y + z$$

στην περιοχή του $(0,0,0)$. Να υπολογιστεί προσεγγιστικά η τιμή του z όταν $x = 0.1, y = -0.2$ (προσέγγιση πρώτης τάξης).

Λύση.

$$F(x,y,z) = \sin(xyz) - 2x - 3y - z.$$

Ελέγχουμε στο $(0,0,0)$:

$$F(0,0,0) = 0, \qquad F_z(x,y,z) = \cos(xyz)\,xy - 1 \;\Rightarrow\; F_z(0,0,0) = -1 \neq 0.$$

Άρα, από το Θεώρημα Έμμεσης Συνάρτησης, υπάρχει (και είναι μοναδική) συνάρτηση $z = f(x,y)$ κοντά στο $(0,0)$ με $F(x,y,f(x,y)) = 0$ και $f(0,0) = 0$.

Οι μερικές παράγωγοι δίνονται από

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad f_y = -\frac{F_y}{F_z},$$

όπου

$$F_x(x,y,z) = \cos(xyz)\,yz - 2, \qquad F_y(x,y,z) = \cos(xyz)\,xz - 3.$$

Στο $(0,0,0)$:

$$F_x(0,0,0) = -2, \quad F_y(0,0,0) = -3, \quad F_z(0,0,0) = -1 \;\Rightarrow$$

$$f_x(0,0) = -2, \quad f_y(0,0) = -3.$$

Επομένως η γραμμική προσέγγιση πρώτης τάξης του f γύρω από το $(0,0)$ είναι

$$L(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y = -2x - 3y.$$

$$z = f(0.1,-0.2) \approx -2(0.1) - 3(-0.2) = 0.4.$$

Παράδειγμα 1.3.6

Δίνεται η εξίσωση

$$z^3 - xz - y = 0.$$

Να βρεθούν τα σημεία $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ για τα οποία η εξίσωση αυτή μπορεί να ορίσει μία συνάρτηση $z = f(x,y)$ και να υπολογιστούν οι παράγωγοι $f_x(0,1)$ και $f_{yy}(0,1)$.

Λύση.

Έχουμε ότι

$$F(x,y,z) = z^3 - xz - y = 0.$$

Για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ η εξίσωση $z^3 - xz - y = 0$ είναι κυβική ως προς z και έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα. Επιπλέον:

$$F_x = -z, \qquad F_y = -1, \qquad F_z = 3z^2 - x$$

οι οποίες είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^3$.

Για να ορίζεται τοπικά η $z = z(x,y)$, πρέπει να ισχύει

$$F_z = 3z^2 - x \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 3z^2 \neq x.$$

Άρα, από το Θεώρημα Έμμεσης Συνάρτησης, η εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ ορίζει συνάρτηση $z = f(x,y)$ όταν $3z^2 \neq x$.

Έχουμε:

$$f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{-z}{3z^2 - x} \Rightarrow f_x = \frac{z}{3z^2 - x}.$$

Βρίσκουμε το z για το σημείο $(x,y) = (0,1)$ από $F(x,y,z) = 0$:

$$z^3 - 0 \cdot z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 1.$$

Άρα

$$f_x(0,1) = \frac{1}{3 \cdot 1^2 - 0} = \frac{1}{3}.$$

Επίσης:

$$f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-1}{3z^2 - x} \Rightarrow f_y = \frac{1}{3z^2 - x}.$$

Παραγωγίζουμε την f_y ως προς y, θεωρώντας το x σταθερό και $z = f(x,y)$:

$$f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{3z^2 - x}\right) = -\frac{(6zz_y)}{(3z^2 - x)^2}.$$

Αντικαθιστούμε το f_y από την (ii):

$$f_{yy} = -\frac{6z}{(3z^2 - x)^3}.$$

Στο σημείο $(x,y) = (0,1)$, όπου $z = 1$:

$$\boxed{f_{yy}(0,1) = -\frac{6 \cdot 1}{(3 \cdot 1^2 - 0)^3} = -\frac{2}{9}.}$$

Παράδειγμα 1.3.7
Δείξτε ότι η σχέση

$$x + y + z - e^{xyz} = 0$$

ορίζει στην περιοχή του σημείου $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ πεπλεγμένη συνάρτηση $z = f(x,y)$. Στη συνέχεια, βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $z = f(x,y)$ στο σημείο $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

*Λύση.*Θέτουμε $F(x,y,z) = x + y + z - e^{xyz}$. Έχουμε $F(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$ και

$$F_z = 1 - e^{xyz}xy \;\Rightarrow\; F_z(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 1 \neq 0,$$

άρα (Θ. έμμεσης συνάρτησης) υπάρχει τοπικά $z = f(x, y)$. Επιπλέον

$$F_x = 1 - e^{xyz}yz, \quad F_y = 1 - e^{xyz}xz, \quad F_z = 1 - e^{xyz}xy,$$

οπότε στο $(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$:

$$F_x = \frac{3}{4}, \qquad F_y = 1, \qquad F_z = 1 \Rightarrow f_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3}{4}, \quad f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -1.$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο:

$$\boxed{z = -\frac{3}{4}x - \left(y - \frac{1}{2}\right)} \quad \text{(ισοδύναμα: } \frac{3}{4}x + y + z = \frac{1}{2}\text{).}$$

Παράδειγμα 1.3.8

Αν $y^3 - xy - z = 0$ και $3y^2 - x \neq 0$, δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = -\frac{3y^2 + x}{(3y^2 - x)^3}.$$

*Λύση.*Έστω $F(x, y, z) = y^3 - xy - z$. Προφανώς οι F_x, F_y, F_z είναι συνεχείς, και επειδή $F_y = 3y^2 - x \neq 0$, από την υπόθεση ορίζεται συνάρτηση $y = f(x, z)$.

Από $y^3 - xy - z = 0$, παραγώγιση ως προς z (με x σταθερό, $y = y(x, z)$):

$$3y^2 \frac{\partial y}{\partial z} - x \frac{\partial y}{\partial z} - 1 = 0.$$

Άρα

$$(3y^2 - x)\frac{\partial y}{\partial z} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{3y^2 - x}.$$

Παραγώγιση ως προς x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3y^2 - x}\right) = -\frac{\partial(3y^2 - x)/\partial x}{(3y^2 - x)^2}.$$

Επειδή

$$\frac{\partial(3y^2 - x)}{\partial x} = 6y\frac{\partial y}{\partial x} - 1,$$

έχουμε

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = -\frac{6y\, y_x - 1}{(3y^2 - x)^2}.$$

Από παραγώγιση της $y^3 - xy - z = 0$ ως προς x:

$$3y^2\frac{\partial y}{\partial x} - y - x\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{3y^2 - x}.$$

Άρα

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} = -\frac{6y \cdot \dfrac{y}{3y^2 - x} - 1}{(3y^2 - x)^2} = -\frac{3y^2 + x}{(3y^2 - x)^3}.$$

Παράδειγμα 1.3.9

Να δειχθεί ότι η εξίσωση $z + xe^{z^2} = y$ επιλύεται μονοσήμαντα ως προς z στην περιοχή της αρχής $(0,0,0)$ και να προσεγγιστεί η επιλύουσα συνάρτηση $z(x,y)$ με ένα πολυώνυμο δεύτερου βαθμού ως προς x, y.

*Λύση.*Έχουμε $F(x,y,z) = z + xe^{z^2} - y$, οπότε

$$F_z = 1 + xe^{z^2} \cdot 2z = 1 + 2xze^{z^2}.$$

Στο σημείο $(0,0,0)$:

$$F_z(0,0,0) = 1 \neq 0, \qquad F(0,0,0) = 0.$$

Επομένως, από το Θεώρημα Έμμεσης Συνάρτησης, η εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ ορίζει τοπικά μοναδικά συνάρτηση $z = z(x,y)$ στην περιοχή του $(0,0,0)$.

Για να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση με πολυώνυμο δεύτερου βαθμού, χρησιμοποιούμε τον τύπο του Taylor:

$$z(x,y) \approx z(0,0) + z_x(0,0)\,x + z_y(0,0)\,y + \frac{1}{2}\left[z_{xx}(0,0)x^2 + 2z_{xy}(0,0)xy + z_{yy}(0,0)y^2\right].$$

Προφανώς $z(0,0) = 0$.

Για τις μερικές παραγώγους ως προς x:

$$z_x + e^{z^2} + xe^{z^2}2zz_x = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{e^{z^2}}{1 + 2xze^{z^2}}.$$

Στο $(0,0,0)$:

$$z_x(0,0) = -1.$$

Για τη δεύτερη παράγωγο z_{xx}, παραγωγίζουμε ως προς x:

$$z_{xx} = \frac{e^{z^2}z_x(1 + 2xze^{z^2}) - e^{z^2}(2z_xe^{z^2} + 2xze^{z^2}2zz_x)}{(1 + 2xze^{z^2})^2}.$$

Στο $(0,0,0)$:

$$z_{xx}(0,0) = 2.$$

Για τις μερικές παραγώγους ως προς y:

$$z_y + xe^{z^2}2zz_y - 1 = 0 \Rightarrow z_y = \frac{1}{1+2xze^{z^2}}.$$

Στο $(0,0,0)$:

$$z_y(0,0) = 1.$$

Για τη δεύτερη παράγωγο z_{yy}:

$$z_{yy} = -\frac{xe^{z^2}2zz_y}{(1+2xze^{z^2})^2}.$$

Στο $(0,0,0)$:

$$z_{yy}(0,0) = 0.$$

Τέλος, για z_{xy}:

$$z_{xy} = \frac{e^{z^2}z_y(1+2xze^{z^2}) - e^{z^2}(2z_xe^{z^2} + 2xze^{z^2}2zz_y)}{(1+2xze^{z^2})^2}.$$

Στο $(0,0,0)$:

$$z_{xy}(0,0) = -1.$$

Άρα το πολυώνυμο δεύτερου βαθμού είναι:

$$z(x,y) = -x + y + \frac{1}{2}\left(2x^2 - 2xy\right) = -x + y + x^2 - xy.$$