ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

“Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’αυτό μένειν”
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Το παρόν ηλεκτρονικό υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών, ως υποστηρικτικό εγχειρίδιο για τα φροντιστηριακά μαθήματα του προγράμματος τους. Το υλικό δεν προορίζεται για εμπορική χρήση ή διάθεση εκτός του επισήμου περιβάλλοντος διδασκαλίας του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Παρόλη την προσεκτική επιμέλεια και συνεχή προσπάθεια ενημέρωσης και βελτίωσης, ενδέχεται να περιέχει λάθη ή παραλείψεις, καθώς βρίσκεται σε αρχικό στάδιο ανάπτυξης. Η συνεργασία και τα σχόλια των φοιτητών στο πλαίσιο της κοινής μας προσπάθειας εκτιμώνται ιδιαίτερα και συμβάλλουν στην καλύτερη ποιότητα και πληρότητα του υλικού.

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

I

Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά

0.1 Πολλαπλή Ολοκλήρωση

Τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων με πολλές μεταβλητές είναι γνωστά ως *πολλαπλά ολοκληρώματα* και αποτελούν τη φυσική επέκταση των ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, τα οποία μελετήσαμε στο πρώτο μέρος του παρόντος βιβλίου. Τα ολοκληρώματα αυτού του τύπου χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό πολλών διαφορετικών ποσοτήτων που εμφανίζονται σε διάφορες εφαρμογές, όπως ο όγκος, η μάζα, η ροή θερμότητας, το συνολικό φορτίο αλλά και η συνισταμένη δύναμη.

Οι στήλες από ηφαιστειογενή βράχο που σχηματίζουν τον Πύργο του Διαβόλου στην Πολιτεία του Wyoming μοιάζουν με τις στήλες όγκου ενός αθροίσματος Riemann μέσω του οποίου αναπαρίσταται ο όγκος που περιορίζεται κάτω από το γράφημα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών. Όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων με μία μεταβλητή, έτσι και στις περιπτώσεις των δύο και τριών μεταβλητών τα ολοκληρώματα ορίζονται ως όρια αθροισμάτων Riemann.

Σχήμα 0.1

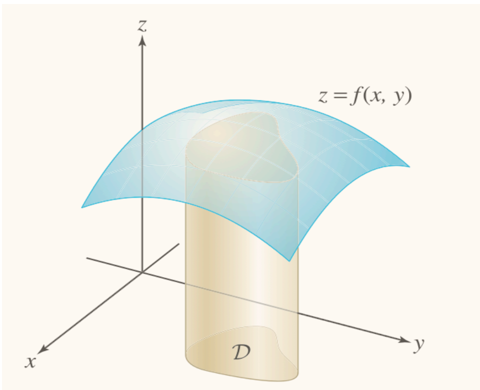
0.1.1 Ολοκλήρωση συναρτήσεων με δύο μεταβλητές

Τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων με πολλές μεταβλητές είναι γνωστά ως *πολλαπλά ολοκληρώματα* και αποτελούν τη φυσική επέκταση των ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, τα οποία μελετήσαμε στο πρώτο μέρος του παρόντος βιβλίου. Τα ολοκληρώματα αυτού του τύπου χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό πολλών διαφορετικών ποσοτήτων που εμφανίζονται σε διάφορες εφαρμογές, όπως ο όγκος, η μάζα, η ροή θερμότητας, το συνολικό φορτίο αλλά και η συνισταμένη δύναμη.

Το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x,y)$, που αποκαλείται **διπλό ολοκλήρωμα**, συμβολίζεται ως

$$\int_D f(x,y)\,dA$$

Όταν για την ολοκληρωτέα συνάρτηση ισχύει $f(x,y) \geq 0$ σε ένα χωρίο D του επιπέδου xy, τότε το ολοκλήρωμα παριστάνει τον όγκο του στερεού που βρίσκεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της $f(x,y)$ και του επιπέδου xy, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Γενικότερα, ένα διπλό ολοκλήρωμα αναπαριστά έναν προσημασμένο όγκο, όπου οι θετικές συνεισφορές προέρχονται από τις περιοχές που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο xy, ενώ οι αρνητικές συνεισφορές οφείλονται στις περιοχές που βρίσκονται κάτω από αυτό το επίπεδο. Υπάρχουν



Σχήμα 0.2

αρκετές ομοιότητες μεταξύ των διπλών και των απλών ολοκληρωμάτων:

- Τα διπλά ολοκληρώματα ορίζονται ως όρια αθροισμάτων Riemann.
- Τα διπλά ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια του θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού

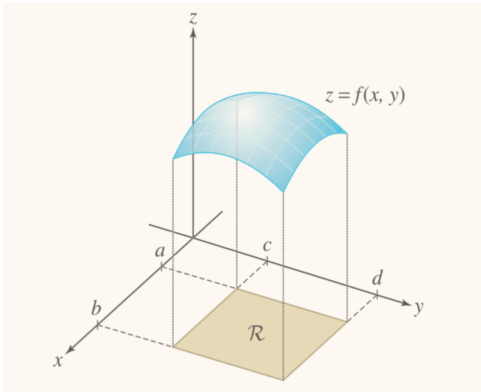
Ωστόσο, μια σημαντική διαφορά που υπάρχει είναι ότι τα χωρία στα οποία λαμβάνει χώρα μια διπλή ολοκλήρωση μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκα. Στην περίπτωση του Λογισμού μίας μεταβλητής, η ολοκλήρωση γίνεται σε ένα απλό διάστημα της μορφής [a,b]. Στην ολοκλήρωση συναρτήσεων με δύο μεταβλητές, το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι μια επίπεδη περιοχή, τα σύνορα της οποίας μπορεί να αποτελούνται από ένα πλήθος διαφορετικών καμπυλών αλλά και ευθύγραμμων τμημάτων (όπως για παράδειγμα το χωρίο $\mathscr{D}$ στο Σχήμα 0.2 αλλά και το $\mathscr{R}$ του Σχήματος 0.3).

Στην τρέχουσα ενότητα θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην απλούστερη περίπτωση, σε αυτή δηλαδή όπου το χωρίο στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση είναι ένα ορθογώνιο.
Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε το ορθογώνιο χωρίο του επιπέδου

$$\mathscr{R} = [a,b] \times [c,d]$$

που απεικονίζεται στο Σχήμα 2 το οποίο αποτελείται από το σύνολο των σημείων (x,y) ώστε:

$$\mathscr{R} : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$$



Σχήμα 0.3

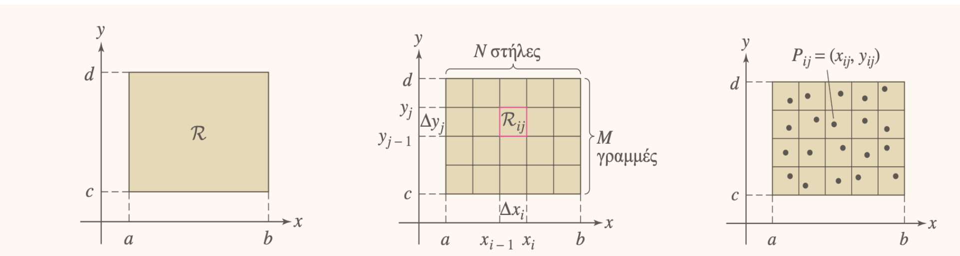
’Οπως και τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων της μίας μεταβλητής, έτσι και τα διπλά ολοκληρώματα ορίζονται μέσω μιας διαδικασίας τριών βημάτων που συνίσταται σε διαμέριση του χωρίου, άθροιση, κατάστρωση και υπολογισμό του ορίου. Στο Σχήμα 0.4 απεικονίζεται το πρώτο βήμα, αυτό της διαμέρισης του χωρίου, το οποίο με τη σειρά του υλοποιείται σε τρία διακριτά στάδια:

1. Διαίρεση των διαστημάτων $[a,b]$ και $[c,d]$ με επιλογή αντίστοιχων διαμερίσεων:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_M = d$$

όπου N και M θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

2. Δημιουργία ενός πλέγματος αποτελούμενου από $N \times M$ μικρότερα ορθογώνια υποχωρία R_{ij}.
3. Επιλογή ενός τυχαίου σημείου P_{ij} σε κάθε μικρότερο ορθογώνιο υποχωρίο R_{ij}.



(α) Ορθογώνιο χωρίο $\mathcal{R}_{ij}=[a,b]\times[c,d]$ (β) Δημιουργία πλέγματος $N \times M$ (γ) Τυχαία σημεία P_{ij}

Σχήμα 0.4

Παρατηρήστε ότι αφού για κάθε ορθογώνιο υποχωρίο ισχύει

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

το R_{ij} έχει εμβαδόν

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$$

όπου

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ και } \Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$

Το επόμενο βήμα στον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος είναι η διαδικασία της άθροισης, κατά την οποία σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann με τη βοήθεια των τιμών της συνάρτησης $f(P_{ij})$:

$$S_{N,M} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\,\Delta A_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\,\Delta x_i\,\Delta y_j.$$

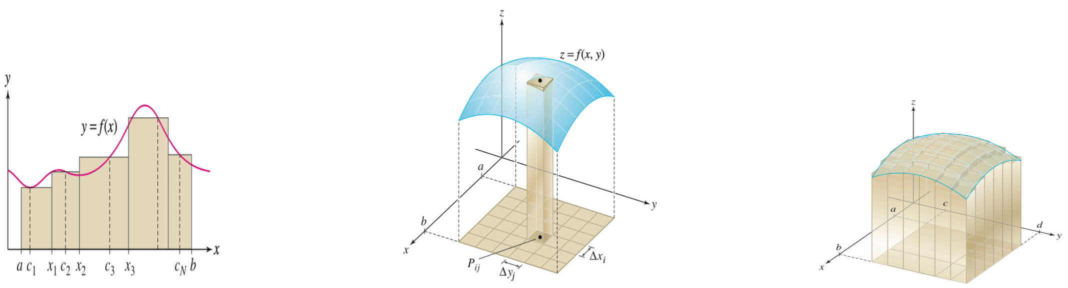
Σημείωση 0.1.1 Θα πρέπει να θυμάστε ότι το άθροισμα Riemann εξαρτάται από την επιλογή της διαμέρισης και από την επιλογή των σημείων P_{ij} σε κάθε υποχωρίο. Θα ήταν λοιπόν πιο σωστό να γράψουμε

$$S_{N,M}(\{P_{ij}\},\{x_i\},\{y_j\})$$

αλλά παρ' όλα αυτά επιλέγουμε να γράφουμε απλώς $S_{N,M}$ προκειμένου να έχουμε απλούστερο συμβολισμό.

Το προηγούμενο διπλό άθροισμα διατρέχει όλα τα ζεύγη i και j στις περιοχές τιμών $1 \le i \le N$ και $1 \le j \le M$ και αποτελείται συνολικά από NM όρους.
Η γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $S_{N,M}$ φαίνεται στο Σχήμα 0.5. Έστω ότι $f(x,y) \ge 0$ στο χωρίο R. Κάθε επιμέρους όρος του αθροίσματος, $f(P_{ij})\Delta A_{ij}$, είναι ίσος με τον όγκο ενός στενού κουτιού ύψους $f(P_{ij})$ που ορθώνεται πάνω από το μικρό υποχωρίο R_{ij}, δηλαδή:

$$f(P_{ij})\Delta A_{ij} = f(P_{ij})\Delta x_i \Delta y_j = \underbrace{\text{ύψος} \times \text{εμβαδόν}}_{\text{όγκος του κουτιού}}.$$



(a) *Στον Λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, ένα άθροισμα Riemann προσεγγίζει το εμβαδόν που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη μέσω του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων περιοχών που σχηματίζονται στη διαμέριση του διαστήματος.*

(b) *Ο όγκος του ορθογώνιου κουτιού είναι $f(P_{ij})\Delta A_{ij}$, με $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$.*

(c) *Το άθροισμα Riemann $S_{N,M}$ είναι το άθροισμα των όγκων των στενών ορθογωνίων κουτιών.*

Σχήμα 0.5

Το άθροισμα $S_{N,M}$ των επιμέρους όγκων αυτών των στενών ορθογώνιων κουτιών προσεγγίζει τον όγκο με τον ίδιο τρόπο που τα αθροίσματα Riemann, στην περίπτωση του Λογισμού των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, προσεγγίζουν το εμβαδόν μέσω των ορθογωνίων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 0.5a.

Στην περίπτωση που $f(P_{ij}) < 0$, ο όρος $f(P_{ij})\Delta A_{ij}$ παριστάνει τον προσημασμένο όγκο ενός στενού κουτιού που εκτείνεται κάτω από το επίπεδο xy. Γενικά, μπορούμε να σκεφτούμε το άθροισμα Riemann $S_{N,M}$ ως ένα άθροισμα προσημασμένων όγκων στενών ορθογώνιων κουτιών, κάποια εκ των οποίων υψώνονται πάνω από το επίπεδο xy και κάποια εκτείνονται κάτω από αυτό. Το τελευταίο βήμα στον ορισμό ενός διπλού ολοκληρώματος είναι η διαδικασία του ορίου. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\mathscr{P} = \{\{x_i\}, \{y_j\}\}$ για τη διαμέριση που έχουμε επιλέξει ενώ με $\|\mathscr{P}\|$ δηλώνονται το μέγιστο από τα πλάτη $\Delta x_i, \Delta y_j$. Ο ακόλουθος ορισμός κάνει πιο σαφή την έννοια των αθροισμάτων Riemann τα οποία συγκλίνουν σε ένα όριο, καθώς τα ορθογώνια υποχωρία της διαμέρισης γίνονται ολοένα και μικρότερα:

Ορισμός 0.1.2 Όριο των αθροισμάτων Riemann Το άθροισμα Riemann $S_{N,M}$ προσεγγίζει ένα όριο L καθώς $\|\mathscr{P}\| \to 0$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left|L - S_{N,M}\right| < \varepsilon$$

για όλες τις διαμερίσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη $\|\mathscr{P}\| < \delta$ και για όλες τις επιλογές σημείων. Πιο συγκεκριμένα, γράφουμε

$$\lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S_{N,M} = \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\,\Delta A_{ij} = L.$$

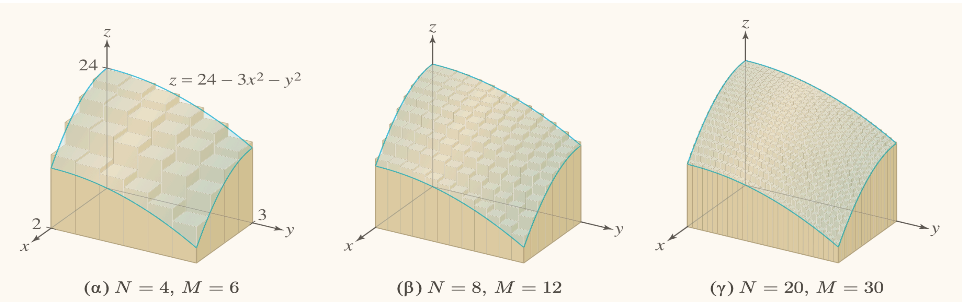
Για παράδειγμα, το Σχήμα 0.6 απεικονίζει πώς τα διαδοχικά αθροίσματα Riemann συγκλίνουν σταδιακά στον όγκο που περικλείεται κάτω από το γράφημα της συνάρτησης

$$z = 24 - 3x^2 - y^2$$

και πάνω από το χωρίο

$$\mathscr{R} = [0,2] \times [0,3],$$

επειδή όσο πιο στενά γίνονται τα ορθογώνια κουτιά τόσο καλύτερα καλύπτει το στερεό η διαμέρισή τους.



Σχήμα 0.6

Ορισμός 0.1.3 Διπλό ολοκλήρωμα σε ορθογώνιο χωρίο Το διπλό ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x,y)$ σε ένα ορθογώνιο χωρίο ορίζεται από το όριο

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,dA = \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\Delta A_{ij}.$$

Στην περίπτωση που το όριο αυτό υπάρχει, θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι *ολοκληρώ-*

σιμη στο χωρίο $\mathscr{R}$.

Θεώρημα 0.1.4 Οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες Αν μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών είναι συνεχής σε ένα ορθογώνιο χωρίο R, τότε η $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο R.

Σημείωση 0.1.5 Το αντίστροφο του Θεωρήματος 0.1.4 δεν ισχύει απαραίτητα. Έτσι, υπάρχουν ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς.

Θεώρημα 0.1.6 Γραμμικές ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x,y)$ και $g(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμες σε ένα ορθογώνιο χωρίο R. Τότε:

1. $$\int_R \big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,dA = \int_R f(x,y)\,dA + \int_R g(x,y)\,dA$$

2. $$\int_R Cf(x,y)\,dA = C\int_R f(x,y)\,dA, \quad \text{για οποιαδήποτε σταθερά } C.$$

0.1.2 Διαδοχικά ολοκληρώματα

Το βασικό εργαλείο για τον υπολογισμό των διπλών ολοκληρωμάτων είναι η πρώτη πρόταση από το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού, όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Για να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση αυτή θα εκφράσουμε το διπλό ολοκλήρωμα ως ένα **διαδοχικό (επαναληπτικό) ολοκλήρωμα** στη μορφή:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$$

Τέτοια διαδοχικά ολοκληρώματα υπολογίζονται με μια διαδικασία δύο βημάτων.

Βήμα 1 Κρατάμε σταθερή τη μεταβλητή x και υπολογίζουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή y. Με τον τρόπο αυτόν προκύπτει μια συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή x, δηλαδή:

$$S(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

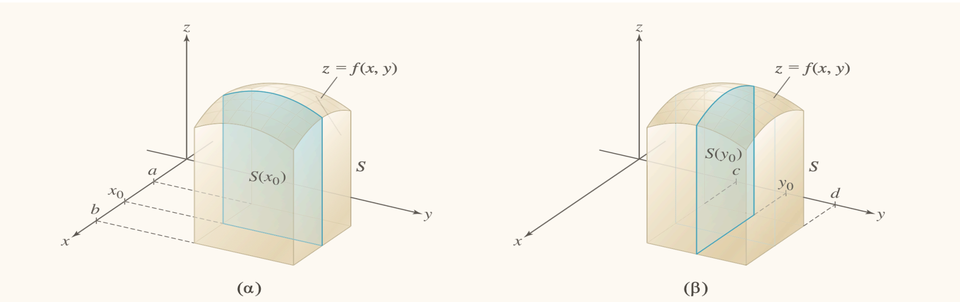
Βήμα 2 Ολοκληρώνουμε την προκύπτουσα συνάρτηση $S(x)$ ως προς τη μεταβλητή x.

Θεώρημα 0.1.7 Θεώρημα Fubini Έστω ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη (π.χ. συνεχής) πάνω σε ένα ορθογώνιο χωρίο

$$\mathscr{R} = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2.$$

Τότε το διπλό ολοκλήρωμα της f πάνω στο $\mathscr{R}$ μπορεί να υπολογιστεί ως διαδοχικό ολοκλήρωμα με οποιαδήποτε σειρά ολοκλήρωσης:

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\right)dy.$$



Σχήμα 0.7

Σημείωση 0.1.8 Εμβάθυνση στα σχήματα Έστω ότι $f(x,y) \geq 0$ σε ένα ορθογώνιο χωρίο R, επομένως το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης f πάνω στο R είναι ο όγκος του στερεού S που περιορίζεται μεταξύ του χωρίου R και του γραφήματος της συνάρτησης f (Σχήμα 0.7). Όταν γράφουμε το διπλό ολοκλήρωμα ως ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης να είναι αυτή που ορίζεται από το $dy\,dx$, τότε για κάθε σταθερή τιμή $x = x_0$ το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής του στερεού S στο κατακόρυφο επίπεδο $x = x_0$ κάθετα στον άξονα x, όπως φαίνεται στο Σχήμα 0.7(α). Επομένως,

$$S(x_0) = \int_c^d f(x_0,y)\,dy = \text{εμβαδόν της εγκάρσιας τομής στο κατακόρυφο επίπεδο } x = x_0 \text{ κάθετα στον άξονα } x$$

Το θεώρημα Fubini λέει ότι ο όγκος V του στερεού S μπορεί να υπολογιστεί ως το ολοκλήρωμα της συνάρτησης των εμβαδών των εγκάρσιων τομών $S(x)$, δηλαδή:

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b S(x)\,dx = \text{ολοκλήρωμα του εμβαδού των εγκάρσιων τομών.}$$

Παρομοίως, το διαδοχικό ολοκλήρωμα που υπολογίζεται με τη σειρά που ορίζεται από το $dx\,dy$ υπολογίζει τον όγκο V ως το ολοκλήρωμα της συνάρτησης των εγκάρσιων τομών που είναι κάθετες στον άξονα y, όπως φαίνεται στο Σχήμα 0.7(β).

Παράδειγμα 0.1.9
Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=0}^{3} \frac{dx\,dy}{\sqrt{3x+4y}}.$$

Παράδειγμα 0.1.10
Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης Επιβεβαιώστε ότι

$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=0}^{3}\frac{dx\,dy}{\sqrt{3x+4y}}=\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{4}\frac{dy\,dx}{\sqrt{3x+4y}}.$$

*Λύση.*Θα υπολογίσουμε αρχικά το εσωτερικό ολοκλήρωμα αντιμετωπίζοντας το y ως μια σταθερά. Αφού ολοκληρώσουμε ως προς τη μεταβλητή x, θα πρέπει να προσδιορίσουμε την αντιπαράγωγο της $\dfrac{1}{\sqrt{3x+4y}}$ ως συνάρτηση του x. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u=3x+4y$, από την οποία προκύπτει ότι $du=3\,dx$, βρίσκουμε:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3x+4y}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+4y}+C$$

Επομένως, θα ισχύει

$$\int_{x=0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3x+4y}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+4y}\Big|_{x=0}^{3}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{4y+9}-\sqrt{4y}\right)$$

Τελικά

$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=0}^{3}\frac{dx\,dy}{\sqrt{3x+4y}}=\frac{2}{3}\int_{y=0}^{4}\left(\sqrt{4y+9}-2\sqrt{y}\right)dy=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}(4y+9)^{3/2}-\frac{4}{3}y^{3/2}\right)\Big|_{y=0}^{4}$$

$$=\frac{1}{9}(25^{3/2})-\frac{8}{9}(4^{3/2})-\frac{1}{9}(9^{3/2})=\frac{34}{9}$$

Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης

Έχοντας ήδη υπολογίσει το αριστερό διαδοχικό ολοκλήρωμα στο προηγούμενο παράδειγμα, όπου καταλήξαμε στην τιμή $\frac{34}{9}$, αρκεί να υπολογίσουμε το δεξιό ολοκλήρωμα και να επιβεβαιώσουμε ότι και αυτό δίνει την ίδια τιμή.

$$\int_{y=0}^{4}\frac{dy}{\sqrt{3x+4y}}=\frac{1}{2}\sqrt{3x+4y}\Big|_{y=0}^{4}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3x+16}-\sqrt{3x}\right)$$

$$\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{4}\frac{dy\,dx}{\sqrt{3x+4y}}=\frac{1}{2}\int_{0}^{3}\left(\sqrt{3x+16}-\sqrt{3x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}(3x+16)^{3/2}-\frac{2}{9}(3x)^{3/2}\right)\Big|_{x=0}^{3}$$

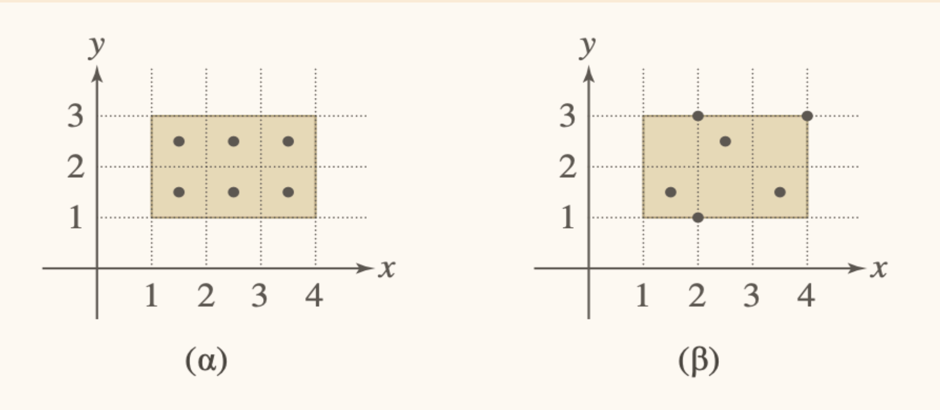
$$=\frac{1}{9}\left(25^{3/2}-9^{3/2}-16^{3/2}\right)=\frac{34}{9}$$

Ασκήσεις 0.1.11

1. Με ποια από τις απαντήσεις α) ή β) είναι ίση το διπλό ολοκλήρωμα
$$\int_1^2 \int_4^5 f(x,y)\,dy\,dx\,;$$
   a) $\displaystyle\int_1^2 \int_4^5 f(x,y)\,dx\,dy$
   b) $\displaystyle\int_4^5 \int_1^2 f(x,y)\,dx\,dy$

2. Υπολογίστε το άθροισμα Riemann για $N = M = 2$ ώστε να εκτιμήσετε το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\sqrt{x+y}$ πάνω στο ορθογώνιο $\mathscr{R} = [0,1]\times[0,1]$. Χρησιμοποιήστε μια κανονική διαμέριση και επιλέξτε τα μέσα των ορθογώνιων υποχωρίων για το άθροισμα Riemann.

3. Στις συναρτήσεις (a) - (d) να υπολογίσετε τα αθροίσματα Riemann για το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,dA$, όπου $\mathscr{R} = [1,4]\times[1,3]$, για το πλέγμα και τις δύο επιλογές σημείων που φαίνονται στο Σχήμα 0.8.
   (a) $f(x,y) = 2x+y$
   (b) $f(x,y) = 7$
   (c) $f(x,y) = 4x$
   (d) $f(x,y) = x-2y$



Σχήμα 0.8

Λύση.

$$\textit{Δίνεται:}\quad f(x,y) = \sqrt{x+y},\quad \mathscr{R} = [0,1]\times[0,1],\quad N = M = 2.$$

$$\textit{Κανονική διαμέριση:}\quad \Delta x = \Delta y = \frac{1}{2},\quad \Delta A = \Delta x\,\Delta y = \frac{1}{4}.$$

Σημεία μέσων: $(0.25,0.25)$, $(0.75,0.25)$, $(0.25,0.75)$, $(0.75,0.75)$.

Υπολογισμοί:

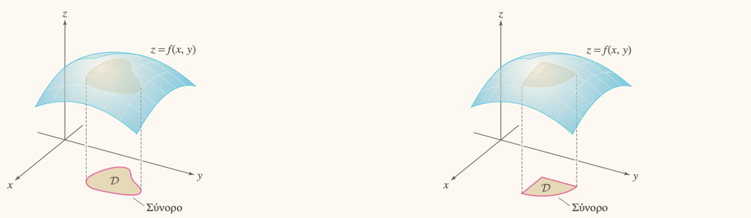
$$
\begin{aligned}
f(0.25,0.25) &= \sqrt{0.5} = \frac{1}{\sqrt{2}},\\
f(0.75,0.25) &= \sqrt{1} = 1,\\
f(0.25,0.75) &= \sqrt{1} = 1,\\
f(0.75,0.75) &= \sqrt{1.5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Άρα, το άθροισμα Riemann (με σημεία μέσων) είναι:

$$S = \Delta A \sum f(x_i^*, y_j^*) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0.983.$$

0.2 Διπλά ολοκληρώματα σε γενικότερα χωρία

Στην προηγούμενη ενότητα περιορίσαμε την προσοχή μας σε ολοκληρώματα πάνω σε ορθογώνια χωρία. Στη γενικότερη περίπτωση τα χωρία ολοκλήρωσης D έχουν ως σύνορα απλές, κλειστές καμπύλες (μια καμπύλη είναι απλή εφόσον δεν τέμνει τον εαυτό της και ορίζεται ως κλειστή αν η αρχή και το πέρας της συμπίπτουν). Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι το σύνορο του χωρίου $\mathscr{D}$ είναι λείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 0.9(α), ή αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος λείων καμπυλών οι οποίες ενώνονται με γωνίες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 0.9(β). Μια συνοριακή καμπύλη αυτού του τύπου είναι γνωστή ως *κατά τμήματα λεία καμπύλη*. Θα υποθέσουμε, τέλος, ότι το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι κλειστό, γεγονός που σημαίνει ότι περιλαμβάνει και το σύνορό του.



(α) Η συνοριακή καμπύλη του χωρίου $\mathcal{D}$ είναι λεία

(β) Το χωρίο $\mathcal{D}$ έχει μια κατά τμήματα λεία συνοριακή καμπύλη, αποτελούμενη από τρεις λείες καμπύλες που ενώνονται στις γωνίες

Σχήμα 0.9

Με βάση το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού σε συναρτήσεις με μία μεταβλητή, έχουμε ότι αν

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq x \leq b$. Ομοίως, με βάση την επέκταση του θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού στην περίπτωση των συναρτήσεων με δύο μεταβλητές, έχουμε το παρακάτω θεώτημα:

Θεώρημα 0.2.2 Έστω $\mathscr{R} = [a,b] \times [c,d]$ και $F \in C^2(R)$ με

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = f(x,y).$$

Τότε

$$\int_{\mathscr{R}} f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c).$$

*Λύση.*Έχουμε

$$\int_b^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \Big)\,dx.$$

Αφού $F \in C^2(R)$, επιτρέπεται η αντιμετάθεση παραγώγισης και ολοκλήρωσης (Leibniz):

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \Big)\,dx = \frac{d}{dy} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx.$$

Με το Θ. Θεμελιώδες του Λογισμού (ως προς x):

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx = F(b,y) - F(a,y).$$

Τώρα ολοκληρώνουμε ως προς y στο $[c,d]$ και εφαρμόζουμε ξανά το Θ. Θεμελιώδες:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d \frac{d}{dy}\big(F(b,y) - F(a,y)\big)\,dy = \big[F(b,y) - F(a,y)\big]_{y=c}^{y=d}.$$

Δηλαδή

$$\int_b^a \int_d^c f(x,y)\,dydx = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c),$$

όπως θέλαμε. □

Παράδειγμα 0.2.3
Προσδιορίστε μία συνάρτηση $F(x,y)$ που να ικανοποιεί

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 6x^2 y,$$

και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της επέκτασης του θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού, στην περίπτωση των συναρτήσεων με δύο μεταβλητές, για να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathscr{R}} 6x^2 y\,dA, \qquad \mathscr{R} = [0,1] \times [0,4].$$

(i) Εξηγήστε ποια αντιπαραγώγιση της συνάρτησης $y\sqrt{1+xy}$ είναι ευκολότερη: ως προς x ή ως προς y;
(ii) Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathscr{R}} y\sqrt{1+xy}\,dA, \qquad \text{με } \mathscr{R}=[0,1]\times[0,1].$$

Λύση.
Μέρος Α. Ζητείται $F(x,y)$ με

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}=6x^2y.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς x:

$$F_y=\int 6x^2y\,dx=2x^3y+g(y).$$

Ολοκληρώνουμε ως προς y:

$$F(x,y)=x^3y^2+G(y)+h(x).$$

Μία απλή επιλογή είναι

$$F(x,y)=x^3y^2,$$

η οποία δίνει $F_{xy}=6x^2y$.
Για $R=[0,1]\times[0,4]$ ισχύει το θεώρημα:

$$\iint_R 6x^2y\,dA=F(1,4)-F(0,4)-F(1,0)+F(0,0)=16.$$

Μέρος Β. Συνάρτηση $y\sqrt{1+xy}$.
(i) Ποια αντιπαραγώγιση είναι ευκολότερη; Ως προς x: με $u=1+xy$, $du=y\,dx$,

$$\int y\sqrt{1+xy}\,dx=\int\sqrt{u}\,du=\frac{2}{3}(1+xy)^{3/2}+C.$$

Ως προς y προκύπτει αλλαγή μεταβλητής $u=1+xy$ με παράγοντα $\dfrac{1}{x^2}$ και αλγεβρικά πιο βαριές δυνάμεις. *Άρα ευκολότερη είναι η αντιπαραγώγιση ως προς x.*
(ii) Υπολογισμός $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} y\sqrt{1+xy}\,dA$.
Πρώτα ως προς x:

$$\int_0^1 y\sqrt{1+xy}\,dx=\left[\frac{2}{3}(1+xy)^{3/2}\right]_{x=0}^{1}=\frac{2}{3}\big((1+y)^{3/2}-1\big).$$

Έπειτα ως προς y:

$$\int_0^1\frac{2}{3}\big((1+y)^{3/2}-1\big)\,dy=\frac{2}{3}\left[\frac{2}{5}(1+y)^{5/2}\right]_0^1-\Big[y\Big]_0^1=\frac{4}{15}\big(2^{5/2}-1\big)-1=\frac{16}{15}\sqrt{2}-\frac{19}{15}.$$

Άρα

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} y\sqrt{1+xy}\,dA = \frac{16}{15}\sqrt{2}-\frac{19}{15}.$$

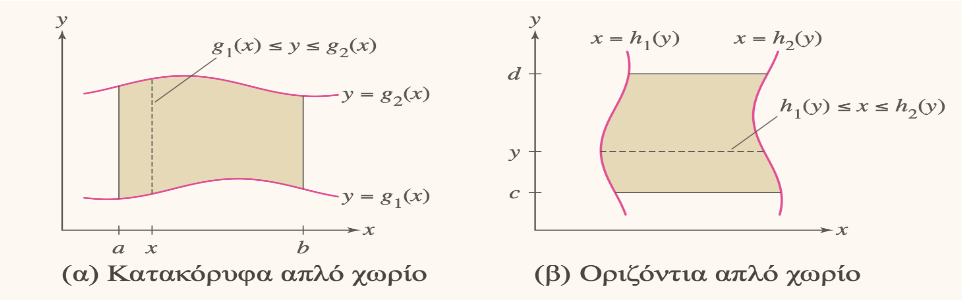
0.2.1 Ολοκλήρωση σε χωρία που περιορίζονται μεταξύ δύο γραφημάτων

Όταν το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι η περιοχή που βρίσκεται μεταξύ δύο γραφημάτων στο επίπεδο xy, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα διπλό ολοκλήρωμα πάνω στο $\mathscr{D}$ με την τεχνική της διαδοχικής ολοκλήρωσης. Θυμηθείτε, από την προηγούμενυ ενότητα, ότι το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι κατακόρυφα απλό αν καλύπτει την περιοχή που βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων δύο συνεχών συναρτήσεων $y = g_1(x)$ και $y = g_2(x)$ για ένα δεδομένο διάστημα τιμών της μεταβλητής x, όπως φαίνεται στο Σχήμα 0.10a, δηλαδή:

$$\mathscr{D} = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}.$$

Παρομοίως, θα λέμε ότι το χωρίο είναι *οριζόντια απλό* (βλ. Σχήμα 0.10b) αν

$$\mathscr{D} = \{(x,y) : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}.$$



Σχήμα 0.10

Θεώρημα 0.2.4 Αν το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι κατακόρυφα απλό και περιγράφεται ως

$$a \le x \le b, \qquad g_1(x) \le y \le g_2(x),$$

τότε

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dA \;=\; \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Αν το $\mathscr{D}$ είναι οριζόντια απλό χωρίο και περιγράφεται ως

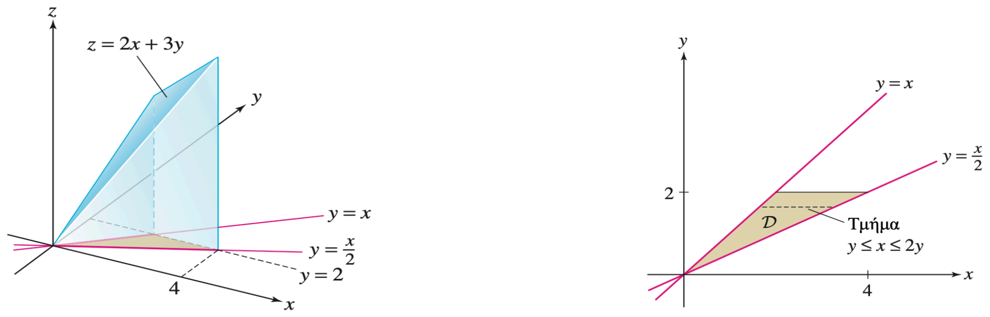
$$c \le y \le d, \qquad h_1(y) \le x \le h_2(y),$$

τότε

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dA \;=\; \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Παράδειγμα 0.2.5

Υπολογισμός όγκου με ολοκλήρωμα Υπολογίστε τον όγκο V του στερεού που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $z = 2x + 3y$ και πάνω από το τρίγωνο $\mathscr{D}$ του επιπέδου xy που φαίνεται στο Σχήμα 0.11a.



(a) (b)

Σχήμα 0.11

Από το Σχήμα 0.11b διαπιστώνουμε ότι το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι μία οριζόντια απλή περιοχή που περιγράφεται ως

$$\mathscr{D} : 0 \leq y \leq 2, \qquad y \leq x \leq 2y.$$

Ο ζητούμενος όγκος είναι ίσος με το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = 2x + 3y$ πάνω στο χωρίο D, δηλαδή:

$$V = \iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\, dA = \int_0^2 \int_{x=y}^{2y} (2x+3y)\, dx\, dy.$$

Υπολογίζουμε:

$$V = \int_0^2 \left[x^2 + 3yx\right]_{x=y}^{2y} dy = \int_0^2 \left((4y^2 + 6y^2) - (y^2 + 3y^2)\right) dy.$$

$$V = \int_0^2 (6y^2)\, dy = 6 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = 2 \cdot 8 = 16.$$

Παράδειγμα 0.2.6

Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης Σχεδιάστε το χωρίο $\mathscr{D}$ στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση

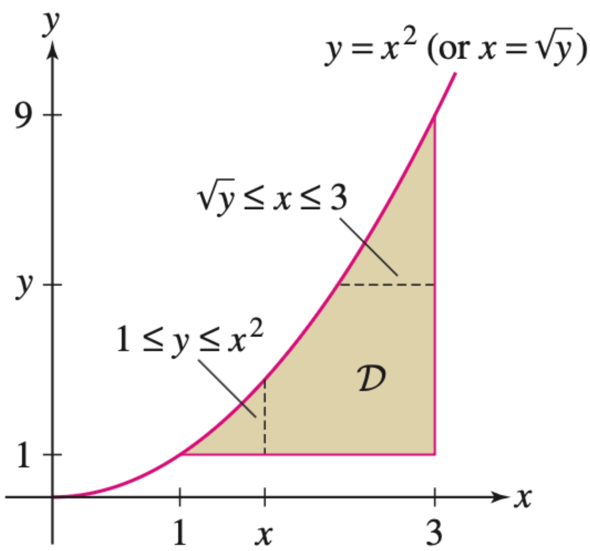
$$\int_1^9 \int_{\sqrt{y}}^3 xe^y\, dx\, dy$$

και στη συνέχεια αλλάξτε τη σειρά της ολοκλήρωσης ώστε να υπολογίσετε το ζητούμενο ολοκλήρωμα.

Η περιοχή αυτή φαίνεται στο Σχήμα 0.12, από το οποίο διαπιστώνουμε ότι το $\mathscr{D}$ μπορεί επίσης να περιγραφεί και ως ένα κατακόρυφα απλό χωρίο, δηλαδή:

$$1 \leq x \leq 3, \qquad 1 \leq y \leq x^2.$$

Επομένως, μπορούμε να εκφράσουμε το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε ως εξής:



Σχήμα 0.12

$$\int_1^9 \int_{\sqrt{y}}^3 xe^y \, dx \, dy = \int_1^3 \int_1^{x^2} xe^y \, dy \, dx = \int_1^3 \left(\int_{y=1}^{x^2} xe^y \, dy \right) dx.$$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα:

$$\int_1^{x^2} xe^y \, dy = x \left[e^y \right]_{y=1}^{y=x^2} = x\left(e^{x^2} - e\right).$$

Άρα

$$\int_1^3 \left(xe^{x^2} - ex \right) dx = \left[\tfrac{1}{2} e^{x^2} - \tfrac{1}{2} e x^2 \right]_1^3.$$

Τελικό αποτέλεσμα:

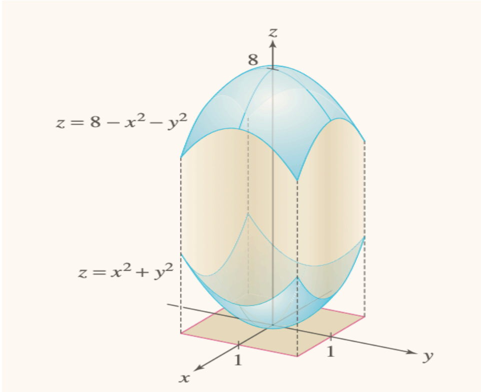
$$\frac{1}{2}\left(e^9 - 9e - (e - e)\right) = \frac{1}{2}\left(e^9 - 9e\right).$$

Παράδειγμα 0.2.7

Όγκος που περικλείεται μεταξύ δύο επιφανειών Υπολογίστε τον όγκο V του στερεού που

βρίσκεται πάνω από το παραβολοειδές που περιγράφεται από την εξίσωση $z = 8 - x^2 - y^2$ και κάτω από το παραβολοειδές με εξίσωση $z = x^2 + y^2$ στο χωρίο $D = \{(x, y) : -1 \le x \le 1, \ -1 \le y \le 1\}$.

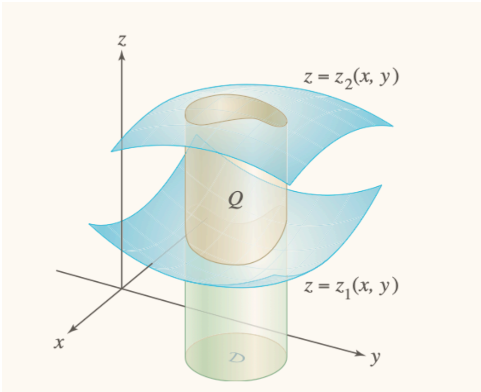
Το στερεό του οποίου ζητείται ο όγκος φαίνεται στο Σχήμα 0.13 και προκύπτει από την περιοχή που βρίσκεται μεταξύ του παραβολοειδούς $z = 8 - x^2 - y^2$ και του χωρίου D αν αφαιρέσουμε τον όγκο που βρίσκεται μεταξύ του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ και του χωρίου D. Επομένως, ο ζητούμενος όγκος υπολογίζεται από τη διαφορά των αντίστοιχων όγκων ως εξής:



Σχήμα 0.13 *Προσδιορισμός του όγκου ενός στερεού που βρίσκεται μεταξύ δύο παραβολοειδών πάνω από ένα τετράγωνο χωρίο*

Γενικεύοντας την ιδέα του προηγούμενου παραδείγματος, μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός στερεού Q που περικλείεται μεταξύ δύο επιφανειών και ορίζεται πάνω σε ένα χωρίο D του επιπέδου xy, όπως φαίνεται στο Σχήμα 14. Οι επιφάνειες είναι ουσιαστικά τα γραφήματα των συναρτήσεων $z_1(x,y)$ και $z_2(x,y)$, με $z_1(x,y) \leq z_2(x,y)$ στο D και ο όγκος υπολογίζεται ως

$$V = \iint_D z_2(x,y)\,dA - \iint_D z_1(x,y)\,dA = \iint_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))\,dA$$



Σχήμα 0.14 *Προσδιορισμός του όγκου ενός στερεού $\mathcal{Q}$ το οποίο περικλείεται μεταξύ δύο επιφανειών πάνω από ένα χωρίο $\mathcal{D}$*

Η δεύτερη ισότητα δικαιολογείται από την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

Ασκήσεις 0.2.8

1. Ποιες από τις ακόλουθες εκφράσεις δεν έχουν νόημα;

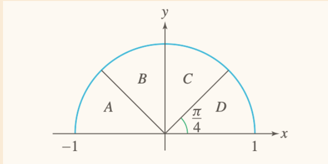
   a) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^x f(x,y)\,dy\,dx$

   b) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^y f(x,y)\,dy\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^y f(x,y)\,dy\,dx$

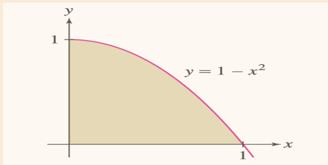
   d) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 f(x,y)\,dy\,dx$

2. Βρείτε ποια από τις τέσσερις περιοχές του Σχήματος 0.15 είναι το χωρίο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διπλή ολοκλήρωση
$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$



Σχήμα 0.15

3. Εκφράστε το χωρίο $\mathscr{D}$ του Σχήματος 0.16 ως μια κατακόρυφα και οριζόντια απλή περιοχή και εκτιμήστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = xy$ πάνω στο $\mathscr{D}$ ως διαδοχικό ολοκλήρωμα με δύο τρόπους.



Σχήμα 0.16

4. Να σχεδιάσετε το χωρίο
$$\mathscr{D} : 0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le 4 - x^2$$
και υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\iint_{\mathscr{D}} y\,dA$$
εκφράζοντάς το στη μορφή ενός διαδοχικού ολοκληρώματος.

5. (α) Εξηγήστε ποια αντιπαραγώγιση της συνάρτησης xe^{xy} είναι ευκολότερη: ως προς x ή ως προς y;

   (β) Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα
$$\iint_{\mathscr{R}} xe^{xy}\,dA$$
με $\mathscr{R} = [0,1]\times[0,1]$.

6. Στις επόμενες συναρτήσεις να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα πάνω στο χωρία που δίνονται.
   (a) $f(x,y) = x^3y, \quad 0 \le x \le 5, \quad x \le y \le 2x+3.$

   (b) $f(x,y) = -2, \quad 0 \le x \le 3, \quad 1 \le y \le e^x.$

   (c) $f(x,y) = x, \quad 0 \le x \le 1, \quad 1 \le y \le e^{x^2}.$

   (d) $f(x,y) = \cos(2x+y), \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 1 \le y \le 2x.$

   (e) $f(x,y) = 6xy - x^2$, στο χωρίο που φράσσεται από κάτω από την $y = x^2$ και από πάνω από την $y = \sqrt{x}$.

   (f) $f(x,y) = \sin x$, στο χωρίο που περικλείεται από τα γραφήματα των $x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = \cos x$.

(g) $f(x,y) = e^{x+y}$, στο χωρίο που περικλείεται από τα γραφήματα των $y = x - 1$ και $y = 12 - x$ για $2 \leq y \leq 4$.

(h) $f(x,y) = (x+y)^{-1}$, στο χωρίο που περικλείεται από τα γραφήματα των $y = x$, $y = 1$, $y = e$ και $x = 0$.

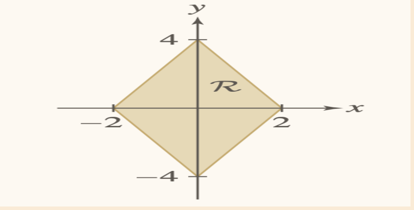
7. Υπολογίστε τον όγκο της περιοχής που περικλείεται από τις επιφάνειες
$$z = 16 - y, \quad z = y, \quad y = x^2 \text{ και } y = 8 - x^2.$$

8. Υπολογίστε τον όγκο της περιοχής που περικλείεται από τις επιφάνειες
$$y = 1 - x^2, \quad z = 1, \quad y = 0 \text{ και } z + y = 2.$$

9. Να γράψετε, χωρίς να υπολογίσετε, το διπλό ολοκλήρωμα με το οποίο υπολογίζεται ο όγκος της περιοχής που περικλείεται από τα παραβολοειδή
$$z = x^2 + y^2 \quad \text{και} \quad z = 8 - x^2 - y^2.$$

10. Υπολογίστε τον όγκο της περιοχής που περικλείεται από τις επιφάνειες
$$z = 2 - y^2, \quad z = y, \quad x = 0, \quad y = 0 \text{ και } x + y = 1.$$

11. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = y^2$ πάνω στον ρόμβο $\mathscr{R}$ του Σχήματος 0.17.



Σχήμα 0.17 $|x| + \frac{1}{2}|y| \leq 1$

12. Ολοκληρώστε τη συνάρτηση $f(x,y) = x$ πάνω στην περιοχή που περικλείεται από τις $y = x$, $y = 4x - x^2$ και $y = 0$ με δύο τρόπους: εκφράζοντας το χωρίο ως κατακόρυφα απλή περιοχή και ως οριζόντια απλή περιοχή.

13. Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα των παρακάτω συναρτήσεων πάνω στο χωρίο $\mathscr{D}$ που δημιουργείται από τους περιορισμούς των x και y.

a. $f(x,y) = x^3 y, \quad 0 \leq x \leq 5, \quad x \leq y \leq 2x + 3.$

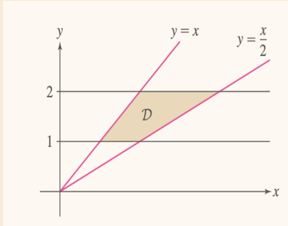
a. $f(x,y) = -2, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 1 \leq y \leq e^x.$

c. $f(x,y) = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq e^{x^2}.$

d. $f(x,y) = \cos(2x + y), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq y \leq 2x.$

e. $f(x,y) = 6xy - x^2$, στο χωρίο που φράσσεται από κάτω από την $y = x^2$ και από πάνω από την $y = \sqrt{x}$.

14. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = \dfrac{\sin y}{y}$ στο χωρίο D που απεικονίζεται στο Σχήμα 0.18.



Σχήμα 0.18

15. Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα των παρακάτω συναρτήσεων πάνω στο χωρίο $\mathscr{D}$ που δημιουργείται από τους περιορισμούς των x και y.

a. $f(x,y) = x^3y, \quad 0 \le x \le 5, \quad x \le y \le 2x+3.$

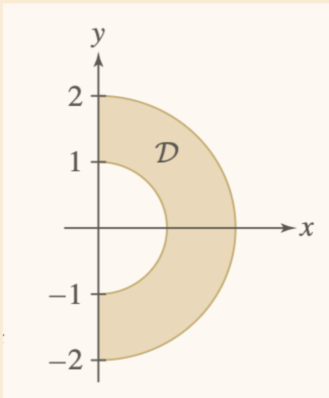
a. $f(x,y) = -2, \quad 0 \le x \le 3, \quad 1 \le y \le e^x.$

c. $f(x,y) = x, \quad 0 \le x \le 1, \quad 1 \le y \le e^{x^2}.$

d. $f(x,y) = \cos(2x+y), \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 1 \le y \le 2x.$

e. $f(x,y) = 6xy - x^2$, στο χωρίο που φράσσεται από κάτω από την $y = x^2$ και από πάνω από την $y = \sqrt{x}$.

16. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_D x\,dA$ πάνω στο χωρίο D του Σχήματος 0.19.



Σχήμα 0.19

Λύση.

3. *Κατακόρυφη απλή περιοχή (ως y-προς-x):*

$$\mathscr{D} = \{(x,y) : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 - x^2\}.$$

Οριζόντια απλή περιοχή (ως x-προς-y):

$$\mathscr{D} = \{(x,y) : \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le x \le \sqrt{1-y}\}.$$

Ολοκλήρωση δύο τρόπων για $f(x,y) = xy$:

(α) *Κατακόρυφη διάταξη*

$$\iint_{\mathscr{D}} xy\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} xy\,dy\,dx = \int_0^1 x\,\frac{(1-x^2)^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x-2x^3+x^5\right)dx = \frac{1}{12}.$$

(β) *Οριζόντια διάταξη*

$$\iint_{\mathscr{D}} xy\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y}} xy\,dx\,dy = \int_0^1 y\,\frac{1-y}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (y-y^2)\,dy = \frac{1}{12}.$$

4. Δίνεται το χωρίο

$$\mathscr{D} = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 4-x^2\}.$$

Ως διαδοχικό ολοκλήρωμα (κατακόρυφη απλή περιοχή):

$$\iint_{\mathscr{D}} y\,dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{4-x^2} y\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{4-x^2} dx = \int_0^1 \left(8-4x^2\right)dx$$

$$= \left[8x - \tfrac{4}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{20}{3}.$$

Εναλλακτικά (οριζόντια απλή περιοχή): το $\mathscr{D}$ γράφεται ως ένωση τριών ζωνών

$$\begin{aligned} 0 \le y \le 1:&\ \ 0 \le x \le \sqrt{y},\\ 1 \le y \le 3:&\ \ 0 \le x \le 1,\\ 3 \le y \le 4:&\ \ 0 \le x \le \sqrt{4-y}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\iint_{\mathscr{D}} y\,dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy + \int_1^3 \int_0^1 y\,dx\,dy + \int_3^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} y\,dx\,dy = \frac{20}{3}.$$

5. *(α)* Η *αντιπαραγώγιση ως προς* y είναι ευκολότερη, γιατί

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{xy} = xe^{xy}$$

οπότε $\int xe^{xy}\,dy = e^{xy}+C$. Αντίθετα, ως προς x απαιτεί ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int xe^{xy}\,dx = \frac{1}{y^2}\,(xy-1)e^{xy} + C.$$

(β) Με $\mathscr{R} = [0,1]\times[0,1]$,

$$\iint_{\mathscr{R}} xe^{xy}\,dA = \int_0^1 \int_0^1 xe^{xy}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[e^{xy}\right]_{y=0}^1 dx = \int_0^1 \left(e^x-1\right)dx = \left[e^x - x\right]_0^1 = e-2.$$

6.(c)

$$\text{Περιοχή: } 0 \le x \le 1, \quad 1 \le y \le e^{x^2}, \qquad f(x,y) = x.$$

$$\iint_{\mathscr{D}} x\, dA = \int_0^1 \int_1^{e^{x^2}} x\, dy\, dx = \int_0^1 x\,(e^{x^2} - 1)\, dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{e-2}{2}.$$

(Έλεγχος με αλλαγή σειράς): Για $1 \le y \le e$ έχουμε $\sqrt{\ln y} \le x \le 1$, άρα

$$\iint_{\mathscr{D}} x\, dA = \int_1^e \int_{\sqrt{\ln y}}^1 x\, dx\, dy = \int_1^e \tfrac{1}{2}\,(1 - \ln y)\, dy = \frac{e-2}{2}.$$

16.

Το χωρίο D είναι ο δεξιός ημιδακτύλιος της στεφάνης $1 \le r \le 2$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

$$\iint_D x\, dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^2 (r\cos\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, d\theta \int_1^2 r^2\, dr =$$
$$\Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2.$$

$$= (2)\left(\frac{8-1}{3}\right) = \frac{14}{3}.$$

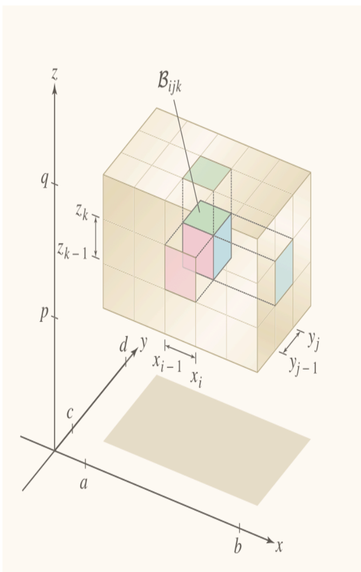
0.3 Τριπλά ολοκληρώματα

Τα τριπλά ολοκληρώματα των συναρτήσεων τριών μεταβλητών $f(x,y,z)$ αποτελούν επέκταση των διπλών ολοκληρωμάτων. Αρχικά, θα αντιμετωπίσουμε την πιο απλή από τις περιπτώσεις, όπου αντί για ένα ορθογώνιο που ανήκει στο επίπεδο, το χωρίο μας θα είναι ένα κουτί, όπως φαίνεται στο Σχήμα 0.20, που θα περιγράφεται ως

$$B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$$

και θα αποτελείται από το σύνολο των σημείων (x,y,z) του $\mathbb{R}^3$ ώστε

$$a \le x \le b, \qquad c \le y \le d, \qquad p \le z \le q$$



Σχήμα 0.20

Για να ολοκληρώσουμε μια συνάρτηση πάνω σε ένα τέτοιο κουτί, θα πρέπει να διαιρέσουμε το κουτί σε μικρότερα κουτιά της μορφής

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

επιλέγοντας τις διαμερίσεις των τριών διαστημάτων

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_M = d$$

$$p = z_0 < z_1 < \cdots < z_L = q$$

με τα N, M και L να είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί. Ο όγκος κάθε μικρότερου κουτιού B_{ijk} είναι

$$\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k,$$

όπου

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \qquad \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \qquad \Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

Επιλέγουμε στη συνέχεια ένα τυχαίο σημείο P_{ijk} από κάθε μικρότερο κουτί B_{ijk} και σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann:

$$S_{N,M,L} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \sum_{k=1}^{L} f(P_{ijk}) \, \Delta V_{ijk}$$

Συμβολίζουμε με $\mathscr{P} = \{\{x_i\}, \{y_j\}, \{z_k\}\}$ τη διαμέριση και έστω $\|\mathscr{P}\|$ το μέγιστο από τα πλάτη $\Delta x_i, \Delta y_j, \Delta z_k$. Αν τα αθροίσματα Riemann $S_{N,M,L}$ προσεγγίζουν ένα όριο καθώς $\|\mathscr{P}\| \to 0$ για μια τυχαία επιλογή των σημείων P_{ijk}, τότε θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **ολοκληρώσιμη** στο B. Αυτή η οριακή τιμή συμβολίζεται ως

$$\iiint_B f(x,y,z) \, dV = \lim_{\|\mathscr{P}\| \to 0} S_{N,M,L}$$

Σημείωση 0.3.1 Ο όρος dA που χρησιμοποιείται στα διπλά ολοκληρώματα και αναφέρεται σε ένα στοιχείο εμβαδού υποδηλώνει ότι οι επιφάνειες αυτές που εμπλέκονται στα ολοκληρώματα πάνω σε χωρία του επιπέδου είναι μικρές. Παρομοίως, ο όρος dV που χρησιμοποιείται στα τριπλά ολοκληρώματα καλείται *στοιχείο* όγκου και δηλώνει ότι οι όγκοι που εμπλέκονται στην ολοκλήρωση σε ένα χωρίο $\mathbb{R}^3$ είναι μικροί.

Θεώρημα 0.3.2 Θεώρημα Fubini για τριπλά ολοκληρώματα Το τριπλό ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x,y,z)$ σε ένα κουτί $B = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$ είναι ίσο με ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα της μορφής:

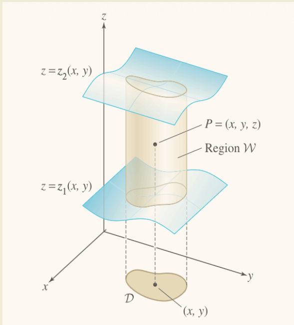
$$\boxed{\iiint_B f(x,y,z) \, dV = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} \int_{z=p}^{q} f(x,y,z) \, dz \, dy \, dx}$$

Επιπλέον, αυτό το διαδοχικό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί επιλέγοντας οποιαδήποτε σειρά ολοκλήρωσης ως προς τις τρεις μεταβλητές.

Παράδειγμα 0.3.3

Ολοκλήρωση σε ένα κουτί Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_B x^2 e^{y+3z}\, dV$, όπου

$$B = [1,4] \times [0,3] \times [2,6].$$



Σχήμα 0.21 *Το σημείο $P = (x, y, z)$ ανήκει στη z-απλή περιοχή $\mathscr{W}$ αν $(x, y) \in \mathscr{D}$ και $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$*

Λύση. Αρχικά, θα εκφράσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα ως διαδοχικό ολοκλήρωμα με τον εξής τρόπο:

$$\iiint_B x^2 e^{y+3z}\, dV = \int_1^4 \int_0^3 \int_2^6 x^2 e^{y+3z}\, dz\, dy\, dx$$

Βήμα 1: Υπολογίστε το εσωτερικό ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή z, κρατώντας τις μεταβλητές x και y σταθερές.

$$\int_{z=2}^{6} x^2 e^{y+3z} dz = \frac{1}{3} x^2 e^{y+3z} \bigg|_{z=2}^{6} = \frac{1}{3} x^2 e^{y+18} - \frac{1}{3} x^2 e^{y+6} = \frac{1}{3}\left(e^{18} - e^{6}\right) x^2 e^{y}$$

Βήμα 2: Υπολογίστε το μεσαίο ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή y, διατηρώντας τη x σταθερή.

$$\int_{y=0}^{3} \frac{1}{3}(e^{18} - e^{6}) x^2 e^{y} dy = \frac{1}{3}(e^{18} - e^{6}) x^2 \int_{y=0}^{3} e^{y} dy = \frac{1}{3}(e^{18} - e^{6}) x^2 (e^{3} - 1)$$

Βήμα 3: Υπολογίστε το εξωτερικό ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή x.

$$\iiint_B (x^2 e^{y+3z})\, dV = \frac{1}{3}(e^{18} - e^{6})(e^{3} - 1) \int_{x=1}^{4} x^2 dx = 7(e^{18} - e^{6})(e^{3} - 1)$$

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε την περίπτωση όπου η ολοκλήρωση δεν γίνεται πάνω σε ένα κουτί, αλλά λαμβάνει χώρα σε ένα στερεό $\mathscr{W}$ που περικλείεται μεταξύ δύο επιφανειών $z = z_1(x, y)$ και $z = z_2(x, y)$ που βρίσκονται πάνω από ένα χωρίο D του επιπέδου xy (βλ. Σχήμα 2). Δηλαδή:

$$\mathscr{W} = \{(x, y, z) : (x, y) \in D \text{ και } z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}.$$

Θεώρημα 0.3.4 Το τριπλό ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x, y, z)$ σε μια περιοχή

$$\mathscr{W} : (x, y) \in D, \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$$

θα είναι ίσο με το διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\iiint_{\mathscr{W}} f(x,y,z)\,dV = \iint_{\mathscr{D}} \left(\int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dA$$

Παρατηρήστε ότι το εσωτερικό ολοκλήρωμα στο δεξιό μέρος της ισότητας του θεωρήματος είναι ένα απλό ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή z, ενώ το εξωτερικό ολοκλήρωμα είναι ένα διπλό ολοκλήρωμα πάνω στις μεταβλητές x και y. Κατά κανόνα, μπορούμε να υπολογίσουμε αυτό το διπλό ολοκλήρωμα ως ένα διπλό διαδοχικό ολοκλήρωμα. Ένα σημείο που δεν έχουμε θίξει μέχρι στιγμής κατά τη θεώρησή μας είναι η γεωμετρική ερμηνεία των τριπλών ολοκληρωμάτων. Είναι γνωστό ότι ένα διπλό ολοκλήρωμα αναπαριστά τον προσημασμένο όγκο μιας τρισδιάστατης περιοχής που περικλείεται μεταξύ του γραφήματος $z = f(x,y)$ και του επιπέδου xy. Το γράφημα όμως μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών $f(x,y,z)$ βρίσκεται σε έναν *τετραδιάστατο χώρο*, επομένως ένα τριπλό ολοκλήρωμα αναπαριστά έναν προσημασμένο «όγκο» μιας τετραδιάστατης περιοχής. Μια τέτοια περιοχή είναι δύσκολο ή και αδύνατο να τη φανταστούμε. Από την άλλη πλευρά, τα τριπλά ολοκληρώματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό πολλών διαφορετικών ποσοτήτων που εμφανίζονται σε ένα τρισδιάστατο πλαίσιο. Ορισμένα σχετικά παραδείγματα είναι η μάζα, οι συντεταγμένες του κέντρου μάζας, οι ροπές αδράνειας, το θερμικό περιεχόμενο ενός σώματος καθώς και το συνολικό φορτίο.

Επιπλέον, ο όγκος V μιας περιοχής $\mathscr{W}$ ορίζεται ως το τριπλό ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης $f(x,y,z) = 1$, δηλαδή:

$$V = \iiint_{\mathscr{W}} 1\,dV$$

Πιο συγκεκριμένα, αν η $\mathscr{W}$ είναι μια z-απλή περιοχή που βρίσκεται μεταξύ των επιφανειών $z = z_1(x,y)$ και $z = z_2(x,y)$, τότε:

$$\iiint_{\mathscr{W}} 1\,dV = \iint_D \left(\int_{z=z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} 1\,dz \right) dA = \iint_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))\,dA$$

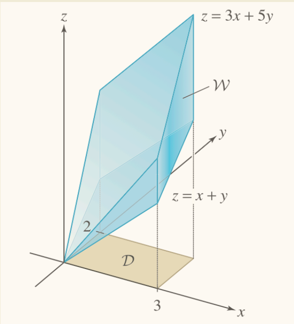
Επομένως, το τριπλό ολοκλήρωμα από το οποίο υπολογίζεται ένας όγκος V είναι ίσο με το διπλό ολοκλήρωμα που υπολογίζει τον όγκο της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ των δύο επιφανειών, όπως διαπιστώσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

Παράδειγμα 0.3.5

Περιοχή που εκτείνεται πάνω από ορθογώνιο χωρίο Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_{\mathscr{W}} z\,dV$$

όπου $\mathscr{W}$ είναι η περιοχή που βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων $z = x + y$ και $z = 3x + 5y$ και εκτείνεται πάνω από το ορθογώνιο $\mathscr{D} = [0,3] \times [0,2]$ (Σχήμα 0.22).



Σχήμα 0.22 *Η περιοχή $\mathscr{W}$ περικλείεται μεταξύ των επιπέδων $z = x + y$ και $z = 3x + 5y$ και εκτείνεται πάνω από το χωρίο $D = [0,3] \times [0,2]$*

*Λύση.*Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2 με $z_1(x,y) = x + y$ και $z_2(x,y) = 3x + 5y$:

$$\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV = \iint_D \left(\int_{z=x+y}^{3x+5y} z\,dz \right) dA$$

$$= \int_{x=0}^{3} \int_{y=0}^{2} \int_{z=x+y}^{3x+5y} z\,dz\,dy\,dx$$

Βήμα 1: Υπολογίστε το εσωτερικό ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή z.

$$\int_{z=x+y}^{3x+5y} z\,dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z=x+y}^{3x+5y} = \frac{1}{2}(3x+5y)^2 - \frac{1}{2}(x+y)^2 = 4x^2+14xy+12y^2$$

Βήμα 2: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή y.

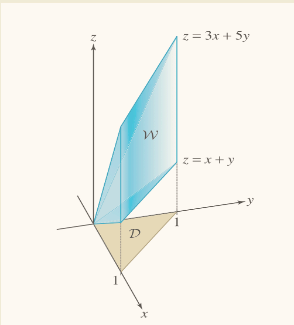
$$\int_{y=0}^{2} \left(4x^2+14xy+12y^2\right) dy = \left(4x^2y+7xy^2+4y^3\right)\Big|_{y=0}^{2} = 8x^2+28x+32$$

Βήμα 3: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή x.

$$\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV = \int_{x=0}^{3} (8x^2+28x+32)\,dx = \left(\frac{8}{3}x^3+14x^2+32x\right)\Big|_0^3 = 72+126+96 = 294$$

Παράδειγμα 0.3.6

Περιοχή που εκτείνεται πάνω από τριγωνικό χωρίο Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV$, όπου $\mathcal{W}$ είναι η περιοχή που φαίνεται στο Σχήμα 0.23.



Σχήμα 0.23 *Η περιοχή $\mathcal{W}$ περικλείεται μεταξύ των επιπέδων $z = x + y$ και $z = 3x + 5y$ και εκτείνεται πάνω από το τριγωνικό χωρίο $\mathcal{D}$*

Λύση. Πρόκειται για μια περίπτωση τριπλού ολοκληρώματος που μοιάζει με αυτήν του προηγούμενου παραδείγματος, με τη διαφορά ότι τώρα η περιοχή $\mathcal{W}$ εκτείνεται πάνω από το τριγωνικό χωρίο που βρίσκεται στο επίπεδο xy και ορίζεται από τις ανισότητες:

$$0 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1-x$$

Επομένως, το ζητούμενο τριπλό ολοκλήρωμα θα είναι ίσο με το διαδοχικό ολοκλήρωμα:

$$\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV = \iint_{\mathcal{D}} \left(\int_{z=x+y}^{3x+5y} z\,dz \right) dA$$

$$= \underbrace{\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1-x}}_{\substack{\text{ολοκλήρωμα} \\ \text{στο τριγωνικό χωρίο}}} \int_{z=x+y}^{3x+5y} z\,dz\,dy\,dx$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα υπολογίστηκε στο προηγούμενο παράδειγμα:

$$\int_{z=x+y}^{3x+5y} z\,dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_{z=x+y}^{3x+5y} = 4x^2 + 14xy + 12y^2$$

Στη συνέχεια, θα ολοκληρώσουμε ως προς τη μεταβλητή y (παραλείποντας ορισμένα ενδιάμεσα βήματα):

$$\int_{y=0}^{1-x} (4x^2 + 14xy + 12y^2)\,dy = 4x^2y + 7xy^2 + 4y^3\Big|_{y=0}^{1-x} = 4 - 5x + 2x^2 - x^3$$

Τέλος, έχουμε:

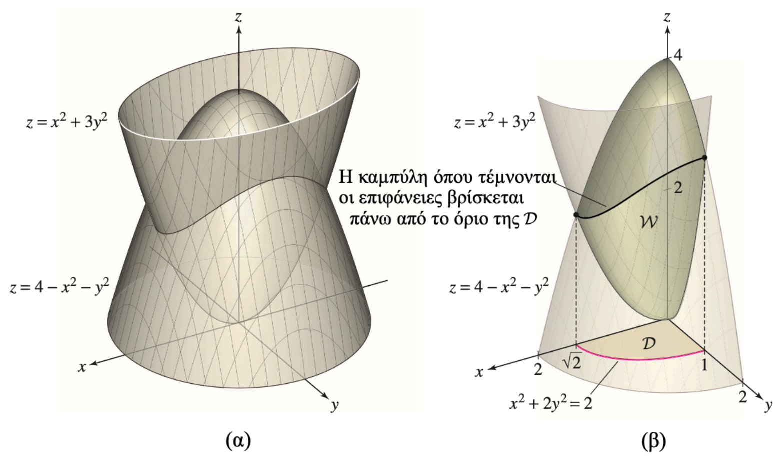
$$\iiint_{\mathcal{W}} z\,dV = \int_{x=0}^{1} \left(4 - 5x + 2x^2 - x^3\right)\,dx = \frac{23}{12}.$$

Παράδειγμα 0.3.7
Περιοχή που βρίσκεται μεταξύ τεμνόμενων επιφανειών Να ολοκληρώσετε τη συνάρτηση $f(x,y,z) = x$ στην περιοχή $\mathcal{W}$ που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια $z = 4 - x^2 - y^2$ και πάνω από την $z = x^2 + 3y^2$ στο ογδοημόριο $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ (βλέπε Σχήμα 0.24).

Λύση. Η περιοχή της ολοκλήρωσης $\mathcal{W}$ είναι z-απλή, επομένως θα έχουμε:

$$\iiint_{\mathcal{W}} x\,dV = \iint_{D} \int_{z=x^2+3y^2}^{4-x^2-y^2} x\,dz\,dA$$

όπου $\mathcal{D}$ είναι η προβολή της περιοχής $\mathcal{W}$ στο επίπεδο xy. Για να υπολογίσουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα στο χωρίο $\mathcal{W}$ πρέπει να προσδιορίσουμε την εξίσωση της καμπύλης που αποτελεί το σύνορο του $\mathcal{D}$.



Σχήμα 0.24 *Το στερεό που περιορίζεται μεταξύ των παραβολοειδών $z = 4 - x^2 - y^2$ και $z = x^2 + 3y^2$ φαίνεται στο (α). Η περιοχή στην οποία λαμβάνει χώρα η ολοκλήρωση φαίνεται στο (β).*

Βήμα 3: Προσδιορίστε το σύνορο του $\mathscr{D}$. Οι επιφάνειες τέμνονται στα σημεία (x,y,z) που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις δύο εξισώσεις που περιγράφουν τις επιφάνειες, δηλαδή:

$$z = x^2 + 3y^2 \qquad \text{και} \qquad z = 4 - x^2 - y^2$$

Άρα:

$$4 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2 \quad \text{ή αλλιώς} \quad x^2 + 2y^2 = 2$$

Επομένως, όπως διαπιστώνουμε παρατηρώντας το Σχήμα 5β, η προβολή του στερεού W πάνω στο χωρίο $\mathscr{D}$ είναι το ένα τέταρτο του εσωτερικού της έλλειψης $x^2 + 2y^2 = 2$ που βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο. Η έλλειψη αυτή τέμνει τους άξονες στα σημεία $(\sqrt{2},0)$ και $(0,1)$.

Βήμα 1: Εκφράστε το $\mathscr{D}$ ως ένα απλό χωρίο. Αφού το $\mathscr{D}$ είναι ταυτόχρονα κατακόρυφα και οριζόντια απλό μπορούμε να προχωρήσουμε στην ολοκλήρωση είτε επιλέγοντας τη σειρά ολοκλήρωσης $dydx$ είτε την $dxdy$. Αν επιλέξουμε τη σειρά $dxdy$, τότε η y μεταβάλλεται από 0 μέχρι 1 και το χωρίο περιγράφεται από τις ανισώσεις:

$$D : 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le \sqrt{2 - 2y^2}$$

Βήμα 2: Γράψτε το τριπλό ολοκλήρωμα ως ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα.

$$\iiint_{\mathscr{W}} x\,dV = \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{\sqrt{2-2y^2}} \int_{z=x^2+3y^2}^{4-x^2-y^2} x\,dz\,dx\,dy$$

Βήμα 3: Προχωρήστε στους υπολογισμούς. Τα αποτελέσματα από τις διαδοχικές ολοκληρώσεις είναι τα εξής:

Εσωτερικό ολοκλήρωμα:

$$\int_{z=x^2+3y^2}^{4-x^2-y^2} x\,dz = x(z)\Big|_{z=x^2+3y^2}^{4-x^2-y^2} = 4x - 2x^3 - 4y^2x$$

Μεσαίο ολοκλήρωμα:

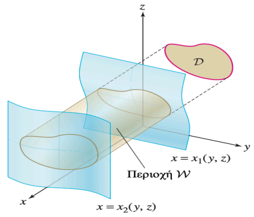
$$\int_{x=0}^{\sqrt{2-2y^2}} (4x - 2x^3 - 4y^2x)dx = \left(2x^2 - \frac{1}{2}x^4 - 2x^2y^2\right)\Bigg|_{x=0}^{\sqrt{2-2y^2}} = 2 - 4y^2 + 2y^4$$

Τριπλό ολοκλήρωμα:

$$\iiint_{\mathscr{W}} x\,dV = \int_{y=0}^{1} (2 - 4y^2 + 2y^4)dy = 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

Έως τώρα έχουμε υπολογίσει τριπλά ολοκληρώματα σε περιοχές $\mathscr{W}$ που ήταν z-απλές και η προβολή τους ήταν ένα χωρίο στο επίπεδο xy. Με ανάλογο απλό τρόπο μπορούμε να προχωρήσουμε σε ολοκληρώσεις σε περιοχές που είναι είτε x είτε y απλές. Έτσι, για παράδειγμα, αν η περιοχή $\mathscr{W}$ είναι η x-απλή περιοχή που περιορίζεται μεταξύ των γραφημάτων των συναρτήσεων $x = x_1(y,z)$ και $x = x_2(y,z)$ και βρίσκονται πάνω από ένα χωρίο D στο επίπεδο yz, όπως φαίνεται στο Σχήμα 0.25, τότε θα ισχύει:

$$\iiint_{\mathscr{W}} f(x,y,z)\,dV = \iint_D \left(\int_{x=x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right) dA$$



Σχήμα 0.25 *Το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι η προβολή του στερεού $\mathscr{W}$ πάνω στο επίπεδο yz*

Ασκήσεις 0.3.8

Να υπολογίσετε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_{\mathscr{B}} f(x,y,z)\,dV$$

για τη συνάρτηση f και το κουτί $\mathscr{B}$ που δίνεται σε κάθε περίπτωση.

1. (a) $f(x,y,z) = xy + z^2, \qquad [-2,2] \times [0,1] \times [0,2]$

   (b) $f(x,y,z) = xe^{y-2z}, \qquad 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1$

   (c) $f(x,y,z) = \frac{x}{(y+z)^2}, \qquad [0,2] \times [2,4] \times [-1,1]$

   (d) $f(x,y,z) = (x+y-z)^2, \qquad [0,a] \times [0,b] \times [0,c]$

2. Να υπολογίσετε το τριπλό ολοκλήρωμα

   $$\iiint_W f(x,y,z)\,dV$$

   για τη συνάρτηση f και την περιοχή $\mathscr{W}$ που δίνεται σε κάθε περίπτωση.

   (a) $f(x,y,z) = x + y, \quad \mathscr{W} : y \leq z \leq x,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 1$

   (b) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}, \quad \mathscr{W} : 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq x \leq 1$

   (c) $f(x,y,z) = xyz, \quad \mathscr{W} : 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2},\ 0 \leq x \leq 1$

   (d) $f(x,y,z) = x, \quad \mathscr{W} : x^2 + y^2 \leq z \leq 4$

   (e) $f(x,y,z) = e^z, \quad \mathscr{W} : x + y + z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$

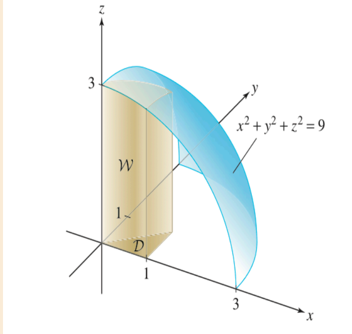
   (f) $f(x,y,z) = z, \quad \mathscr{W} : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2,\ x - y \leq z \leq x + y$

3. Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = z$$

πάνω στην περιοχή $\mathscr{W}$ του Σχήματος 11, η οποία βρίσκεται κάτω από το ημισφαίριο ακτίνας 3 και εκτείνεται πάνω από το τριγωνικό χωρίο $\mathscr{D}$ του επιπέδου xy, με το τελευταίο να φράσσεται από τις ευθείες

$$x = 1, \quad y = 0, \quad x = y.$$



Σχήμα 0.26 *Το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι η προβολή του στερεού $\mathscr{W}$ πάνω στο επίπεδο yz*

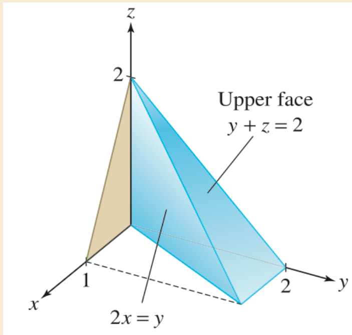
4. Έστω η περιοχή του Σχήματος 0.28 η οποία φράσσεται από τις

$$y+z=2, \quad 2x=y, \quad x=0 \quad \text{και} \quad z=0$$

Να εκφράσετε και να υπολογίσετε το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(x,y,z) = 2x-4y+6z$$

θεωρώντας την περιοχή $\mathscr{W}$ ως:



Σχήμα 0.27 *Το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι η προβολή του στερεού $\mathscr{W}$ πάνω στο επίπεδο yz*

(i) z-απλή περιοχή, οπότε θα πρέπει αρχικά να ολοκληρώσετε ως προς τη μεταβλητή z, με $z_1(x,y) \leq z \leq z_2(x,y)$ για τις κατάλληλες συναρτήσεις z_1 και z_2.

(ii) x-απλή περιοχή, οπότε θα πρέπει αρχικά να ολοκληρώσετε ως προς τη μεταβλητή x, με $x_1(y,z) \leq x \leq x_2(y,z)$ για τις κατάλληλες συναρτήσεις x_1 και x_2.

(iii) y-απλή περιοχή, οπότε θα πρέπει αρχικά να ολοκληρώσετε ως προς τη μεταβλητή y, με $y_1(x,z) \leq y \leq y_2(x,z)$ για τις κατάλληλες συναρτήσεις y_1 και y_2.

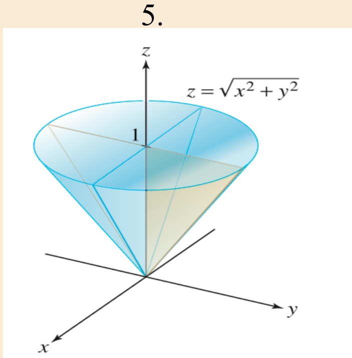
5. Έστω

$$W = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1\}$$

(βλ. Σχήμα 0.28). Να εκφράσετε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_W f(x,y,z)\, dV$$

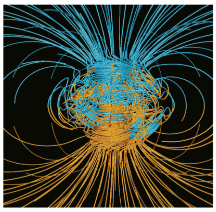
ως ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα με σειρά ολοκλήρωσης την $dz\,dy\,dx$ (για μια τυχαία συνάρτηση f).



Σχήμα 0.28

0.4 Ολοκλήρωση σε πολικές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες

Στον Λογισμό μίας μεταβλητής, μια καλά επιλεγμένη αντικατάσταση *(που αποκαλείται επίσης και αλλαγή μεταβλητών)* μετασχηματίζει πολύ συχνά ένα πολύπλοκο ολοκλήρωμα σε ένα πολύ απλούστερο. Η αλλαγή μεταβλητών αποδεικνύεται ότι είναι επίσης εξαιρετικά χρήσιμη στον Λογισμό πολλών μεταβλητών, αλλά η έμφαση βρίσκεται τώρα σε ένα διαφορετικό σημείο. Έτσι, στον Λογισμό πολλών μεταβλητών, ενδιαφερόμαστε συνήθως για την απλοποίηση όχι μόνο της ολοκληρωτέας παράστασης, αλλά και για την απλοποίηση της αναπαράστασης του χωρίου στο οποίο λαμβάνει χώρα η ολοκλήρωση.
Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε τρεις από τις πλέον χρήσιμες αλλαγές μεταβλητών, με τη βοήθεια των οποίων εκφράζουμε ένα ολοκλήρωμα σε πολικές, κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 0.29, συγκεκριμένα φυσικά συστήματα μπορούν να περιγραφούν πολύ πιο εύκολα με το κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. .



Σχήμα 0.29 *Οι σφαιρικές συντεταγμένες χρησιμοποιούνται στη μελέτη μαθηματικών μοντέλων του γήινου μαγνητικού πεδίου. Στην εικόνα, που έχει δημιουργηθεί με τη βοήθεια προσομοίωσης σε ηλεκτρονικό υπολογιστή με βάση το μοντέλο Glatzmaier-Roberts, απεικονίζονται οι μαγνητικές δυναμικές γραμμές που εισέρχονται (με μπλε χρώμα) και εξέρχονται (με κίτρινο χρώμα) από τη Γη.*

0.4.1 Διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες

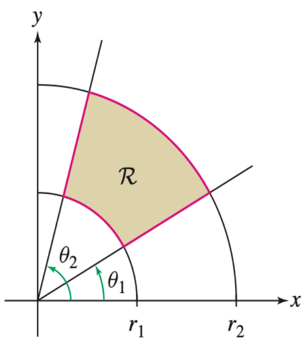
Οι πολικές συντεταγμένες είναι βολικές όταν το χωρίο ολοκλήρωσης είναι ένας γωνιακός τομέας ή ένα πολικό ορθογώνιο, όπως αυτό του Σχήματος 0.30, που ορίζεται ως:

$$\mathscr{R} : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad r_1 \leq r \leq r_2$$

Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει θα υποθέσουμε ότι $r_1 \geq 0$ και επίσης ότι όλες οι ακτινικές συντεταγμένες δεν είναι αρνητικές. Θυμηθείτε τώρα ότι οι ορθογώνιες και οι πολικές συντεταγμένες συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να εκφράσουμε μια συνάρτηση $f(x,y)$ σε πολικές συντεταγμένες ως $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Ο τύπος αλλαγής μεταβλητών για ένα πολικό ορθογώνιο $\mathscr{R}$ έχει τη μορφή:



Σχήμα 0.30 *Πολικές συντεταγμένες*

Ύπαρξη του επιπλέον παράγοντα rστην ολοκληρωτέα μορφή

$$\int_{\mathscr{R}} f(x,y)\, dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

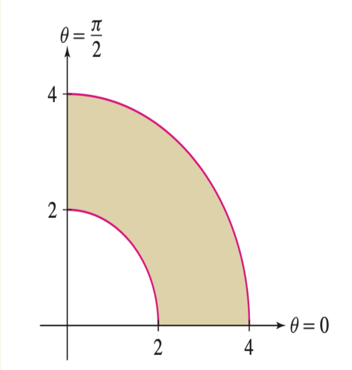
Παρατηρήστε την ύπαρξη του επιπλέον παράγοντα r στην ολοκληρωτέα μορφή που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της ισότητας. Η ύπαρξη του παράγοντα αυτού θα αιτιολογηθεί όταν αποδείξουμε τον γενικό τύπο αλλαγής μεταβλητών.

Παράδειγμα 0.4.1

Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_D (x+y)\,dA,$$

όπου $\mathscr{D}$ είναι το ένα τέταρτο του δακτυλίου που φαίνεται στο Σχήμα 0.31.



Σχήμα 0.31 *Το ένα τέταρτο ενός δακτυλίου που ορίζεται από τις ανισώσεις* $0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 2\le r\le 4.$

Λύση. Το ένα τέταρτο ενός δακτυλίου αποτελεί παράδειγμα χωρίου που είναι ακτινικά απλό.

Βήμα 1 *Περιγράψτε το χωρίο D και τη συνάρτηση f σε πολικές συντεταγμένες.*

Το ένα τέταρτο του δακτυλίου D ορίζεται από τις ανισότητες (βλ. Σχήμα 0.31):

$$\mathscr{D}:\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\quad 2\le r\le 4.$$

Σε πολικές συντεταγμένες η συνάρτηση παίρνει τη μορφή

$$f(x,y)=x+y=r\cos\theta+r\sin\theta=r(\cos\theta+\sin\theta).$$

Βήμα 2 *Αλλαγή μεταβλητών και υπολογισμός.*

Για να εκφράσουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες θα αντικαταστήσουμε το dA με $r\,dr\,d\theta$, οπότε θα έχουμε:

$$\iint_D (x+y)\,dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_2^4 r(\cos\theta+\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_{r=2}^4 (\cos\theta+\sin\theta)\,r^2\,dr=(\cos\theta+\sin\theta)\left(\frac{4^3}{3}-\frac{2^3}{3}\right)=\frac{56}{3}(\cos\theta+\sin\theta).$$

και τελικά:

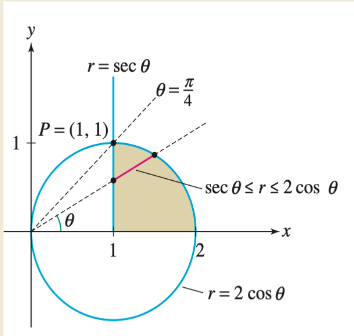
$$\iint_D (x+y)\,dA=\frac{56}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\,d\theta=\frac{56}{3}\left(\sin\theta-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{112}{3}.$$

Παράδειγμα 0.4.2

Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D (x^2+y^2)^{-2}\, dA$$

για το σκιασμένο χωρίο D του Σχήματος 0.32.



Σχήμα 0.32

Λύση. **Βήμα 1** *Περιγράψτε το χωρίο $\mathscr{D}$ και τη συνάρτηση f σε πολικές συντεταγμένες.*

Το τεταρτοκύκλιο βρίσκεται στον γωνιακό τομέα

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{4},$$

καθώς η ευθεία που διέρχεται από το σημείο

$$P = (1, 1)$$

σχηματίζει γωνία $\dfrac{\pi}{4}$ με τον άξονα x, όπως φαίνεται στο Σχήμα 0.32.

- Η κατακόρυφη ευθεία γραμμή $x = 1$ περιγράφεται από την πολική εξίσωση

$$r\cos\theta = 1 \quad \Longrightarrow \quad r = \sec\theta.$$

- Ο κύκλος με ακτίνα 1 και κέντρο το σημείο $(1, 0)$ έχει πολική εξίσωση

$$r = 2\cos\theta.$$

Επομένως, μια ημιευθεία που σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό ημιάξονα x θα τέμνει το χωρίο $\mathscr{D}$ σε τμήμα όπου η ακτινική μεταβλητή παίρνει τιμές μεταξύ $\sec\theta$ και $2\cos\theta$. Με άλλα λόγια, το χωρίο ολοκλήρωσης είναι ακτινικά απλό και περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες από τις ανισώσεις:

$$D: \quad 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{4}, \quad \sec\theta \le r \le 2\cos\theta.$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση εκφράζεται σε πολικές συντεταγμένες ως:

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^{-2} = (r^2)^{-2} = r^{-4}.$$

Βήμα 2 *Αλλαγή μεταβλητών και υπολογισμός.*

Για να εκφράσουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες θα αντικαταστήσουμε το dA με $r\,dr\,d\theta$, οπότε θα έχουμε:

$$\iint_D (x^2+y^2)^{-2}\, dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{r=\sec\theta}^{2\cos\theta} r^{-4}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\sec\theta}^{2\cos\theta} r^{-3}\, dr\, d\theta.$$

Βήμα 3 *Εσωτερικό ολοκλήρωμα και τελικό αποτέλεσμα.*

Το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_{r=\sec\theta}^{2\cos\theta} r^{-3}\,dr = \left[-\tfrac{1}{2}r^{-2}\right]_{r=\sec\theta}^{2\cos\theta} = -\frac{1}{8}\sec^2\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta.$$

Επομένως:

$$\iint_D (x^2+y^2)^{-2}\,dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{8}\sec^2\theta\right) d\theta = \left[\frac{1}{4}(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta) - \frac{1}{8}\tan\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{16}.$$

0.4.2 Τριπλό ολοκλήρωμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες είναι χρήσιμες όταν το χωρίο στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση έχει αξονική συμμετρία - διαθέτει, δηλαδή, συμμετρία ως προς κάποιον άξονα. Στις κυλινδρικές συντεταγμένες (r,θ,z) ο άξονας συμμετρίας είναι ο άξονας z. Θυμηθείτε επίσης τις σχέσεις μετατροπής των κυλινδρικών συντεταγμένων σε ορθογώνιες (βλ. Σχήμα 0.33a):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

Για να γράψουμε ένα τριπλό ολοκλήρωμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες θα υποθέσουμε ότι η περιοχή ολοκλήρωσης W μπορεί να περιγραφεί ως μια περιοχή που περικλείεται μεταξύ δύο επιφανειών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 0.33b, δηλαδή ως:

$$z_1(r,\theta) \le z \le z_2(r,\theta)$$

η οποία αναπτύσσεται πάνω από το ακτινικά απλό χωρίο D του επιπέδου xy που περιγράφεται, σε πολικές συντεταγμένες, από τις ανισώσεις:

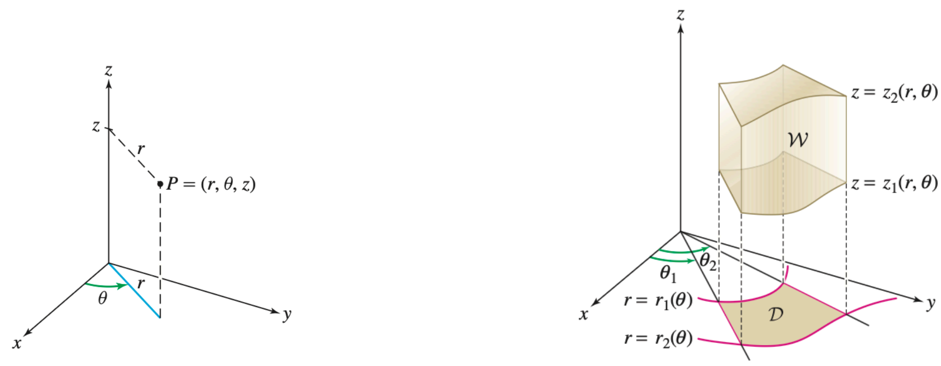
$$D: \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2, \quad r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta).$$

Τότε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint_{\mathscr{W}} f(x,y,z)\,dV$$

μετατρέπεται σε

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f\big(r\cos\theta, r\sin\theta, z\big)\, r\,dz\,dr\,d\theta.$$



(a) *Γραφική παράσταση της* $y = f(x)$. **(b)** *Γραφική παράσταση της* $z = f(x,y)$.

Σχήμα 0.33 *Κυλινδρικές συντεταγμένες και περιγραφή χωρίου*

Θεώρημα 0.4.3 Τριπλό ολοκλήρωμα σε κυλινδρικές συντεταγμένες Για μια συνεχή συνάρτηση f στην περιοχή

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta), \quad z_1(r,\theta) \leq z \leq z_2(r,\theta),$$

το τριπλό ολοκλήρωμα

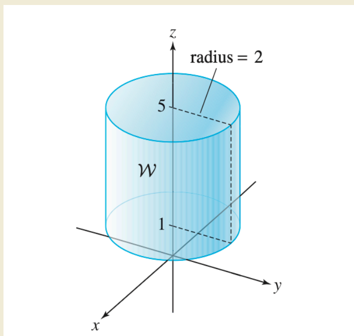
$$\iiint_W f(x,y,z)\,dV$$

είναι ίσο με

$$\boxed{\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dz\,dr\,d\theta}$$

Παράδειγμα 0.4.4

Να ολοκληρώσετε τη συνάρτηση $f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2}$ στην κυλινδρική περιοχή $\mathscr{W}$ η οποία ορίζεται από τις ανισώσεις $x^2+y^2 \leq 4$ για $1 \leq z \leq 5$ (βλ. Σχήμα 0.34).



Σχήμα 0.34

Λύση. Η περιοχή $\mathscr{W}$ στην οποία γίνεται η ολοκλήρωση εκτείνεται πάνω από τον δίσκο ακτίνας 2 με κέντρο την αρχή των αξόνων, επομένως σε κυλινδρικές συντεταγμένες περιγράφεται ως εξής

$$W : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 1 \leq z \leq 5$$

Θα εκφράσουμε την ολοκληρωτέα συνάρτηση σε κυλινδρικές συντεταγμένες, οπότε θα έχουμε:

$$f(x,y,z) = z\sqrt{x^2+y^2} = zr$$

και θα ολοκληρώσουμε χρησιμοποιώντας το στοιχείο όγκου $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$.

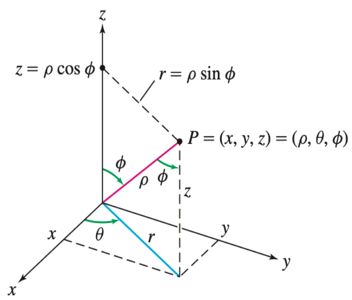
$$\iiint_W z\sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{z=1}^5 (zr)r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 12r^2\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} 32\,d\theta = 64\pi$$

0.4.3 Τριπλό ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες

Στον τύπο αλλαγής μεταβλητών που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση των κυλινδρικών συντεταγμένων, ο στοιχειώδης όγκος εκφράστηκε ως $dV = r\,dr\,d\theta\,dz$. Στις σφαιρικές συντεταγμένες, η ανάλογη σχέση για τον στοιχειώδη όγκο είναι

$$\boxed{dV = \rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta}$$



Σχήμα 0.35 *Σφαιρικές συντεταγμένες*

Για να ξεκινήσουμε τη διαδικασία που θα μας οδηγήσει στην απόδειξη αυτής της σχέσης θα πρέπει να θυμηθούμε τις σχέσεις:

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta, \qquad z = \rho\cos\phi, \qquad r = \rho\sin\phi$$

οι οποίες φαίνονται στο το Σχήμα 0.35.

Θεώρημα 0.4.5 Τριπλό ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες Για μια περιοχή $\mathscr{W}$ που ορίζεται ως

$$\theta_1 \le \theta \le \theta_2, \qquad \phi_1 \le \phi \le \phi_2, \qquad \rho_1(\theta,\phi) \le \rho \le \rho_2(\theta,\phi)$$

το τριπλό ολοκλήρωμα

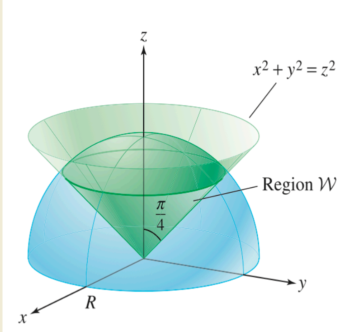
$$\iiint_W f(x,y,z)\,dV$$

είναι ίσο με

$$\boxed{\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1(\theta,\phi)}^{\rho_2(\theta,\phi)} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\,\rho\sin\phi\sin\theta,\,\rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta}$$

Παράδειγμα 0.4.6

Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z) = z$ πάνω στην κωνική περιοχή W του Σχήματος 0.36 , που θυμίζει το χωνάκι ενός παγωτού, η οποία βρίσκεται πάνω από τον κώνο και κάτω από τη σφαίρα.



Σχήμα 0.36 *Το χωνάκι ενός παγωτού ορίζεται από τις ανισώσεις* $0 \le \rho \le R, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$

Λύση. Ο κώνος έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = z^2$ και σε σφαιρικές συντεταγμένες εκφράζεται ως:

$$(\rho \sin\phi \cos\theta)^2 + (\rho \sin\phi \sin\theta)^2 = (\rho \cos\phi)^2$$

$$\rho^2 \sin^2\phi (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho^2 \cos^2\phi$$

$$\sin^2\phi = \cos^2\phi$$

$$\sin\phi = \pm\cos\phi \qquad \Rightarrow \qquad \phi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

Ο μισός κώνος που βρίσκεται πάνω από το επίπεδο xy έχει εξίσωση $\phi = \dfrac{\pi}{4}$. Η σφαίρα έχει εξίσωση $\rho = R$, επομένως το χωνάκι του παγωτού στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση περιγράφεται ως:

$$\mathscr{W}: \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \rho \le R$$

Προκύπτει, επομένως, το ακόλουθο ολοκλήρωμα για το οποίο, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, θα ολοκληρώσουμε πρώτα ως προς τη συντεταγμένη θ, καθώς το αποτέλεσμα των δύο εσωτερικών ολοκληρωμάτων είναι ανεξάρτητα από αυτήν. Δηλαδή:

$$\iiint_W z\,dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^R (\rho\cos\phi)\rho^2 \sin\phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} \int_0^R \rho^3 \cos\phi \sin\phi \, d\rho \, d\phi = \frac{\pi R^4}{2} \int_0^{\pi/4} \sin\phi \cos\phi \, d\phi = \frac{\pi R^4}{8}$$

Ασκήσεις 0.4.7

1. Στις Ασκήσεις (a) - (f) να σχεδιάσετε το χωρίο $\mathscr{D}$ που αναφέρεται σε κάθε περίπτωση και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της αντίστοιχης συνάρτησης $f(x,y)$ πάνω στο χωρίο $\mathscr{D}$ χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες.

   (a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2\leq 2$

   (b) $f(x,y)=x^2+y^2, \quad 1\leq x^2+y^2\leq 4$

   (c) $f(x,y)=xy, \quad x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq 4$

   (d) $f(x,y)=y(x^2+y^2)^3, \quad y\geq 0, x^2+y^2\leq 1$

   (e) $f(x,y)=y(x^2+y^2)^{-1}, \quad y\geq \frac{1}{2}, x^2+y^2\leq 1$

   (f) $f(x,y)=e^{x^2+y^2}, \quad x^2+y^2\leq R$

2. Για κάθε ένα από τα παρακάτω ολοκληρώματα:

   (i) να σχεδιαστεί το χωρίο ολοκλήρωσης, και

   (ii) να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα έπειτα από μεταβολή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες.

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)\,dy\,dx$

   (b) $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$

   (c) $\displaystyle\int_{0}^{1/2}\int_{\sqrt{3x}}^{\sqrt{1-x^2}}x\,dy\,dx$

   (d) $\displaystyle\int_{0}^{4}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2}}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)dy\,dx$

   (e) $\displaystyle\int_{0}^{5}\int_{0}^{y}x\,dx\,dy$

   (f) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{x}^{\sqrt{3x}}y\,dy\,dx$

   (g) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)\,dy\,dx$

   (h) $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{2x-x^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx$

3. Χρησιμοποιήστε κυλινδρικές συντεταγμένες για να υπολογίσετε το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y,z)=z$ στην περιοχή που βρίσκεται πάνω από τον δίσκο $x^2+y^2\leq$

1 του επιπέδου xy και κάτω από την επιφάνεια

$$z = 4 + x^2 + y^2.$$

0.5 Αλλαγή μεταβλητών

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε απεικονίσεις της μορφής

$$G : \mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

όπου $\mathscr{D}$ είναι ένα χωρίο του επιπέδου $\mathbb{R}^2$. Για να μη δημιουργείται σύγχυση ανάμεσα στις μεταβλητές του πεδίου ορισμού και σε εκείνες του πεδίου τιμών, θα χρησιμοποιούμε συνήθως τα γράμματα u, v για τις μεταβλητές στο πεδίο ορισμού, ενώ τα x, y θα αναφέρονται στις αντίστοιχες μεταβλητές του πεδίου τιμών. Με βάση αυτή τη σύμβαση, η απεικόνιση G γράφεται

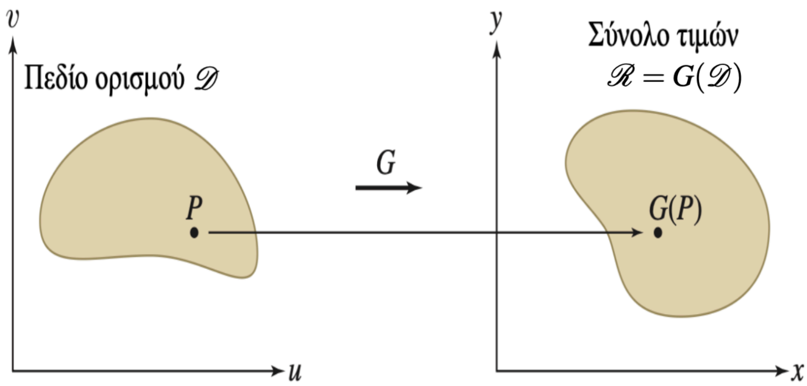
$$G(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v)),$$

όπου οι συναρτήσεις $x(u,v)$ και $y(u,v)$ παριστούν τις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου του πεδίου τιμών ως συναρτήσεις των μεταβλητών u, v του πεδίου ορισμού. Δηλαδή,

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v).$$

Αντιστρόφως, αν η απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη, μπορούμε να εκφράσουμε και τις u, v ως συναρτήσεις των x, y:

$$u = u(x,y), \qquad v = v(x,y).$$



Σχήμα 0.37 *Η απεικόνιση G απεικονίζει το χωρίο $\mathscr{D}$ του επιπέδου (u,v) στο αντίστοιχο χωρίο $\mathscr{R}$ του επιπέδου (x,y).*

Ορισμός 0.5.1 Ιακωβιανός Πίνακας Έστω ένας μετασχηματισμός

$$G : (u,v) \longmapsto (x,y),$$

όπου οι συναρτήσεις $x = x(u,v)$ και $y = y(u,v)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες. Ο *Ιακωβιανός πίνακας* του G ορίζεται ως ο πίνακας όλων των πρώτων μερικών παραγώγων:

$$J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

Η *Ιακωβιανή ορίζουσα* του μετασχηματισμού G είναι

$$\det(J_G) = |J(u,v)| = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Σχόλιο 0.5.2 Γεωμετρική Ερμηνεία της Αλλαγής Μεταβλητών Το πρόβλημα της αλλαγής μεταβλητών μπορεί να διατυπωθεί γεωμετρικά ως εξής:
Δοθέντος ενός χωρίου προς ολοκλήρωση πάνω σε μια επιφάνεια του επιπέδου xy, αναζητούμε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων (u,v), έτσι ώστε μέσω ενός κατάλληλου μετασχηματισμού

$$G : (u,v) \mapsto (x,y)$$

να εκφράσουμε το στοιχειώδες μέτρο $dx\,dy$ ως παραμορφωμένη εικόνα του στοιχειώδους μέτρου $du\,dv$. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το ίδιο ολοκλήρωμα στην περιοχή του επιπέδου xy με πιο συμβατό και απλούστερο τρόπο. Η σχέση μεταξύ των δύο στοιχείων μέτρου δίνεται από

$$dx\,dy = |J(u,v)|\,du\,dv,$$

όπου ο παράγοντας $|J(u,v)|$ εκφράζει την τοπική *παραμόρφωση εμβαδού* που προκαλεί ο μετασχηματισμός G.

Αν λοιπόν το χωρίο $\mathscr{D}$ στο επίπεδο uv είναι απλό (π.χ. ορθογώνιο), και το $\mathscr{R} = G(\mathscr{D})$ είναι το αντίστοιχο χωρίο στο xy–επίπεδο, τότε η παραπάνω αντιστοίχιση γράφεται

$$G(\mathscr{D}) = \mathscr{R},$$

και το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,dx\,dy$$

ισοδυναμεί με

$$\iint_{\mathscr{D}} f(G(u,v))\,|J_G(u,v)|\,du\,dv.$$

Επομένως, ζητούμε έναν μετασχηματισμό G που να προσαρμόζει το μονάδιαιο «πλακάκι» του uv–επιπέδου στο μονάδιαιο μέτρο επιφάνειας του xy–επιπέδου, με συντελεστή παραμόρφωσης $k = |J_G(u,v)|$, ώστε η ολοκλήρωση πάνω στο δύσκολο χωρίο $\mathscr{D}$ να μετατραπεί σε ολοκλήρωση πάνω σε ένα απλούστερο χωρίο $\mathscr{R}$.