ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

“Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’αυτό μένειν”
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Το παρόν ηλεκτρονικό υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών, ως υποστηρικτικό εγχειρίδιο για τα φροντιστηριακά μαθήματα του προγράμματος τους. Το υλικό δεν προορίζεται για εμπορική χρήση ή διάθεση εκτός του επισήμου περιβάλλοντος διδασκαλίας του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Παρόλη την προσεκτική επιμέλεια και συνεχή προσπάθεια ενημέρωσης και βελτίωσης, ενδέχεται να περιέχει λάθη ή παραλείψεις, καθώς βρίσκεται σε αρχικό στάδιο ανάπτυξης. Η συνεργασία και τα σχόλια των φοιτητών στο πλαίσιο της κοινής μας προσπάθειας εκτιμώνται ιδιαίτερα και συμβάλλουν στην καλύτερη ποιότητα και πληρότητα του υλικού.

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

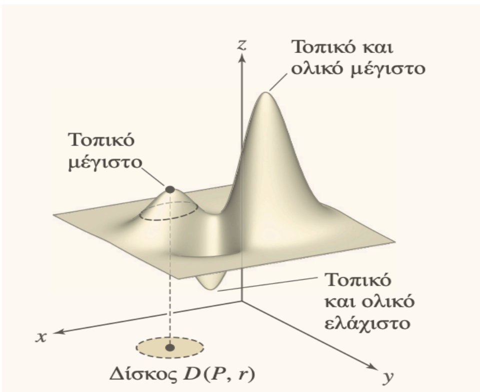
I

Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά

1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

1.1 Βελτιστοποίηση στον Λογισμό πολλών μεταβλητών

Θυμηθείτε, καταρχάς, ότι η *βελτιστοποίηση* είναι η διαδικασία της εύρεσης των ακρότατων τιμών μιας συνάρτησης. Αυτό ισοδυναμεί με την εύρεση των μεγίστων και ελαχίστων τιμών στο γράφημα της συνάρτησης και στο δεδομένο κάθε φορά πεδίο ορισμού. Όπως διαπιστώσαμε από την περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, είναι σημαντικό να διαχωρίσουμε μεταξύ *τοπικών* και *ολικών* ακρότατων τιμών.
Μια τοπικά ακρότατη τιμή είναι μια τιμή $f(a,b)$ που είναι μέγιστη ή ελάχιστη σε κάποιον μικρό ανοικτό δίσκο γύρω από το (a,b) (βλ. Σχήμα 1.1).



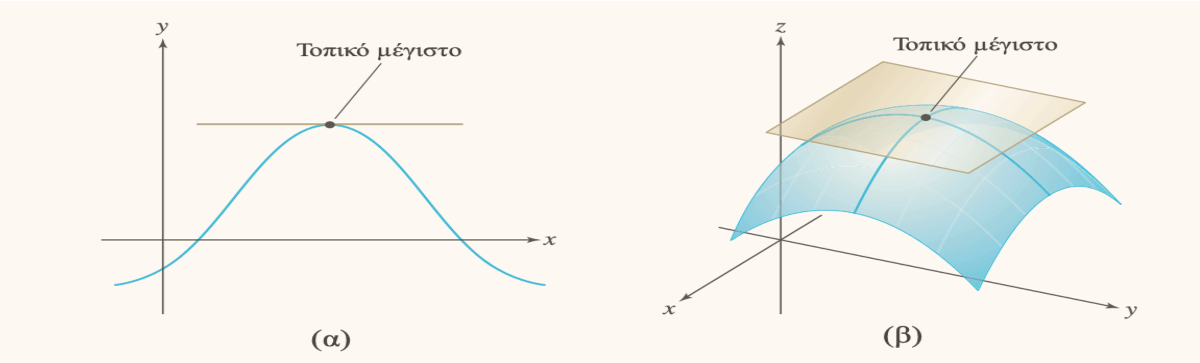
Σχήμα 1.1 *Η συνάρτηση $f(x,y)$ έχει ένα τοπικό μέγιστο στο P.*

Ορισμός 1.1.1 Τοπικά ακρότατες τιμές Μια συνάρτηση $f(x,y)$ έχει τοπικό ακρότατο στο $P = (a,b)$ αν υπάρχει ένας ανοικτός δίσκος $D(P,r)$ τέτοιος ώστε
- *Τοπικό μέγιστο:* $f(x,y) \leq f(a,b)$ για όλα τα $(x,y) \in D(P,r)$.
- *Τοπικό ελάχιστο:* $f(x,y) \geq f(a,b)$ για όλα τα $(x,y) \in D(P,r)$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, αν η τιμή $f(a)$ είναι ένα τοπικό ακρότατο, τότε το a είναι ένα κρίσιμο σημείο, γεγονός που σημαίνει ότι η εφαπτόμενη ευθεία (αν υπάρχει) είναι οριζόντια στο $x = a$. Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει για τις συναρτήσεις με δύο μεταβλητές, αλλά σε αυτή την περίπτωση είναι το *εφαπτόμενο επίπεδο* αυτό που πρέπει να είναι οριζόντιο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2.
Το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $z = f(x,y)$ στο $P = (a,b)$ έχει εξίσωση

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b).$$

Συνεπώς, το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο αν $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, δηλαδή αν η εξίσωση ανάγεται στην $z = f(a,b)$. Η συνθήκη αυτή μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό για ένα κρίσιμο σημείο, όπου λάβαμε υπόψη μας την πιθανότητα να μην υπάρχουν είτε η μία είτε και οι δύο μερικές παράγωγοι.



Σχήμα 1.2 *Το γράφημα της συνάρτησης μοιάζει ολοένα και περισσότερο με το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο P καθώς προχωράμε στην ολοένα και μεγαλύτερη μεγέθυνσή του.*

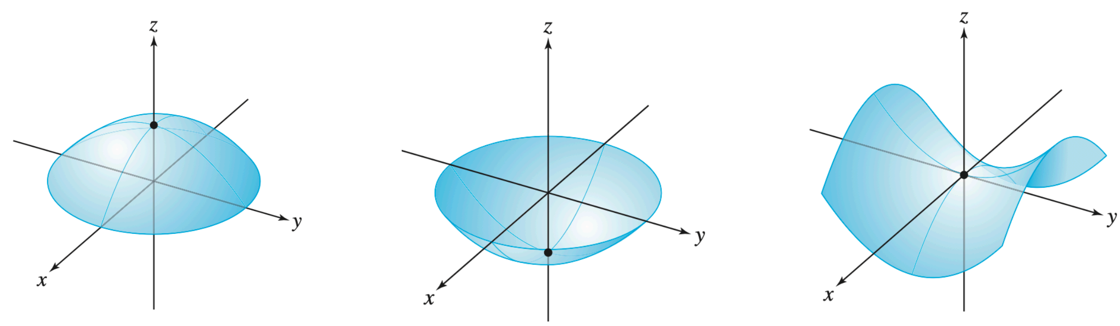
Ορισμός 1.1.2 Κρίσιμο σημείο Ένα σημείο $P = (a,b)$ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x,y)$ ονομάζεται **κρίσιμο** αν:

$f_x(a,b) = 0$ ή $f_x(a,b)$ δεν υπάρχει και

- $f_y(a,b) = 0$ ή $f_y(a,b)$ δεν υπάρχει.

Θεώρημα 1.1.3 Θεώρημα Fermat Αν η συνάρτηση $f(x,y)$ έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο $P = (a,b)$, τότε το (a,b) είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $f(x,y)$.

Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση f με μία μεταβλητή μπορεί να έχει ένα σημείο καμπής αντί για ένα τοπικό ακρότατο σε ένα κρίσιμο σημείο. Ένα παρόμοιο φαινόμενο εμφανίζεται και στον Λογισμό πολλών μεταβλητών. Για καθεμία από τις συναρτήσεις του Σχήματος 1.3, το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο. Όμως, η συνάρτηση του Σχήματος 1.3c έχει ένα *σαγματικό σημείο*, δηλαδή ένα κρίσιμο σημείο, το οποίο δεν είναι ούτε τοπικό ελάχιστο ούτε τοπικό μέγιστο. Αν σταθείτε σε ένα τέτοιο σημείο και ξεκινήσετε να περπατάτε, τότε αν κινηθείτε προς ορισμένες κατευθύνσεις όπως οι $+j$ και $-j$ θα «οδηγηθείτε» προς τα επάνω, ενώ αν ακολουθήσετε άλλες, όπως οι κατευθύνσεις $+i$ και $-i$, θα «οδηγηθείτε» προς τα κάτω.



(a) *Τοπικό μέγιστο* **(b)** *Τοπικό ελάχιστο* **(c)** *Σαγματικό σημείο*

Σχήμα 1.3

Σημείωση 1.1.4 Τετραγωνικές μορφές

Η μελέτη των τετραγωνικών μορφών, δηλαδή του αν ένας ακέραιος μπορεί να εκφραστεί ως τιμή μιας τέτοιας μορφής, ξεκινά από πολύ παλιά. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι το θεώρημα του Fermat για το άθροισμα δύο τετραγώνων, που εξετάζει πότε ένας ακέραιος μπορεί να γραφεί ως x^2+y^2, με x,y ακεραίους. Το πρόβλημα αυτό σχετίζεται στενά με την εύρεση των Πυθαγόρειων τριάδων. Ήδη από το 628, ο Ινδός μαθηματικός Brahmagupta μελέτησε εξισώσεις της μορφής $x^2-ny^2=c$, γνωστές σήμερα ως εξίσωση του Pell, και έδωσε μεθόδους επίλυσής τους. Στην Ευρώπη, το πρόβλημα αυτό ασχολήθηκαν να μελετήσουν οι Brouncker, Euler και Lagrange. Αργότερα, το 1801, ο Gauss δημοσίευσε το έργο Disquisitiones Arithmeticae, όπου ανέπτυξε πλήρη θεωρία για τις δυαδικές τετραγωνικές μορφές πάνω στους ακεραίους. Η θεωρία των τετραγωνικών μορφών εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη φύση των συντελεστών: μπορεί να είναι πραγματικοί, μιγαδικοί, ρητοί ή ακέραιοι αριθμοί. Στη γραμμική άλγεβρα και τη αναλυτική γεωμετρία, οι συντελεστές θεωρούνται συνήθως πραγματικοί ή μιγαδικοί, ενώ στη θεωρία αριθμών είναι στοιχεία ενός δακτυλίου ή ενός πεδίου.

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία

$$A(x_1,y_1,z_1) \quad \text{και} \quad B(x_2,y_2,z_2)$$

του χώρου $\mathbb{R}^3$. Η Ευκλείδεια απόστασή τους είναι:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

$$=\sqrt{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2+z_1^2+z_2^2-2z_1z_2}.$$

Η παράσταση

$$Q(A,B)=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2+z_1^2+z_2^2-2z_1z_2$$

είναι ουσιαστικά ένα πολυώνυμο, κάθε όρος του οποίου είναι δευτέρου βαθμού ως προς τις μεταβλητές x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2. Κάθε παράσταση που μπορεί να γραφεί σε αυτή τη μορφή ονομάζεται τετραγωνική μορφή.

Ορισμός Με τον όρο *τετραγωνική μορφή* (quadratic form) $Q(x)$ n μεταβλητών $x_1,x_2,\dots,x_n$ εννοούμε κάθε έκφραση που μπορεί να γραφεί ως:

$$Q(x)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{(n-1)n}x_{n-1}x_n.$$

Τετραγωνικές μορφές με Μήτρες

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+\sum_{i<j}\sum_{j}a_{ij}x_ix_j,$$

ή

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j,$$

όπου

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad a_{ij} = a_{ji},\ i,j = 1,2,\dots,n.$$

Μια τετραγωνική μορφή μπορεί να γραφεί συνοπτικά με τη βοήθεια μητρών. Για την τετραγωνική μορφή (16) θεωρούμε τη συμμετρική μήτρα:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Για τη μήτρα αυτή ισχύει $a_{ij} = a_{ji}$ για $i, j = 1,2,\dots,n$. Με τη βοήθεια της μήτρας A, η τετραγωνική μορφή μπορεί να γραφεί ως:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = x^T A x.$$

Επειδή η τετραγωνική μορφή συνδέεται άμεσα με τη μήτρα A, συμβολίζεται συχνά και ως $Q_A(x)$.

Παράδειγμα 1 Για $n = 2$ και $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ έχουμε την τετραγωνική μορφή

$$Q_A(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1 x_2.$$

Παράδειγμα 2 Η τετραγωνική μορφή

$$Q_A(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1 x_2$$

γράφεται ως

$$Q_A(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Θετικότητα και Αρνητικότητα Τετραγωνικής Μορφής

Ορισμός Έστω τετραγωνική μορφή $Q_A(x)$ με $x \in S$, $S \subseteq \mathbb{R}^n$.

Η τετραγωνική αυτή μορφή λέγεται ότι είναι:

- *Θετικά ορισμένη (positive definite)* αν και μόνο αν $Q_A(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.
- *Θετικά ημιορισμένη (positive semidefinite)* αν και μόνο αν $Q_A(x) \geq 0$ για κάθε $x \neq 0$.

- *Αρνητικά ορισμένη (negative definite)* αν και μόνο αν $Q_A(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$.
- *Αρνητικά ημιορισμένη (negative semidefinite)* αν και μόνο αν $Q_A(x) \leq 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Ορισμός Η *k-τάξης κύρια ελάσσων ορίζουσα*, είναι η ορίζουσα της υπομήτρας D_k τάξης k, της οποίας τα διαγώνια στοιχεία βρίσκονται επάνω στη διαγώνιο της A.

Για παράδειγμα, έστω μια τετραγωνική μήτρα τάξης 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες προκύπτουν καθώς κινούμαστε κατά μήκος της διαγωνίου a_{11}, a_{22}, a_{33}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D_1 = a_{11}, \\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Κριτήριο Θετικότητας και Αρνητικότητας

(α) Η τετραγωνική μορφή $Q_A(x)$ είναι **θετικά ορισμένη** αν και μόνο αν οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες ικανοποιούν

$$D_1 > 0,\ D_2 > 0,\ \dots,\ D_n > 0.$$

Δηλαδή, όλες οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες είναι θετικές.

(β) Η τετραγωνική μορφή $Q_A(x)$ είναι **αρνητικά ορισμένη** αν και μόνο αν οι διαδοχικές κύριες ελάσσονες εναλλάσσονται στο πρόσημο, αρχίζοντας από αρνητική:

$$D_1 < 0,\ D_2 > 0,\ \dots,\ (-1)^n D_n > 0.$$

Για μια συμμετρική μήτρα A, αν είναι θετικά ορισμένη, τότε

$$|A| = D_n > 0.$$

(γ) Η τετραγωνική μορφή $Q_A(x)$ είναι *θετικά ημιορισμένη* αν και μόνο αν

$$\bar{D}_1 \geq 0,\ \bar{D}_2 \geq 0,\ \dots,\ \bar{D}_k \geq 0,$$

δηλαδή αν και μόνο αν όλες οι κύριες ελάσσονες είναι μη αρνητικές.

(δ) Η τετραγωνική μορφή $Q_A(x)$ είναι *αρνητικά ημιορισμένη* αν και μόνο αν

$$\bar{D}_1 \leq 0,\ \bar{D}_2 \geq 0,\ \dots,\ (-1)^n \bar{D}_n \geq 0.$$

Παράδειγμα 3

1. Η τετραγωνική μορφή

$$Q_A(x) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$

   είναι θετικά ορισμένη γιατί

$$|A_1| = 3 > 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

2. Η τετραγωνική μορφή

$$Q_A(x) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -6x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2$$

   είναι αρνητικά ορισμένη γιατί

$$|A_1| = -6 < 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 14 > 0.$$

3. Η τετραγωνική μορφή

$$Q_A(x) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1x_2$$

   δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ορισμένη γιατί

$$|A_1| = 1 > 0, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Διαφορικό δευτέρας τάξεως και τετραγωνική μορφή.

Υπόθεση: $f \in C^2, f_{xy} = f_{yx}$ - Θεώρημα Clairaut. ’Εχουμε ότι $dz = f_x\,dx + f_y\,dy$.

Παίρνουμε δεύτερο διαφορικό (χρησιμοποιούμε ότι $d(dx) = d(dy) = 0$ και τη γραμμικότητα του d):

$$d^2z \;=\; d(dz) = d(f_x)\,dx + d(f_y)\,dy.$$

Υπολογίζουμε τα $d(f_x)$ και $d(f_y)$:

$$d(f_x) = f_{xx}\,dx + f_{xy}\,dy, \qquad d(f_y) = f_{yx}\,dx + f_{yy}\,dy.$$

Άρα

$$d^2z = \big(f_{xx}\,dx + f_{xy}\,dy\big)\,dx + \big(f_{yx}\,dx + f_{yy}\,dy\big)\,dy =$$

$$= f_{xx}\,dx^2 + (f_{xy} + f_{yx})\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2.$$

Επειδή $f \in C^2$, τότε $f_{xy} = f_{yx}$ και επομένως

$$d^2z = f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2 = (dx,\,dy)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

1.1.1 Από τον Λογισμό της Μίας στη Θεωρία των Πολλών Μεταβλητών

Ακριβώς όπως στον Λογισμό της μίας μεταβλητής, όπου η μελέτη των κρίσιμων σημείων μιας συνάρτησης βασίζεται στα λεγόμενα **κριτήρια της πρώτης και δεύτερης παραγώγου**, έτσι και στον Λογισμό πολλών μεταβλητών υπάρχουν ανάλογες συνθήκες που μας επιτρέπουν να καθορίσουμε τη φύση ενός κρίσιμου σημείου - αν δηλαδή αντιστοιχεί σε *τοπικό μέγιστο*, *τοπικό ελάχιστο* ή *σημείο σαγματικού τύπου*.

Στην περίπτωση μίας μεταβλητής, γνωρίζουμε ότι η εξίσωση

$$f'(x) = 0$$

χαρακτηρίζει τα κρίσιμα σημεία, ενώ το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου $f''(x)$ καθορίζει το είδος του ακροτάτου. Αν $f''(x) > 0$, τότε το σημείο είναι ελάχιστο, αν $f''(x) < 0$, μέγιστο, και αν $f''(x) = 0$, το κριτήριο είναι αβέβαιο.

Στις συναρτήσεις δύο μεταβλητών $f(x,y)$, η ίδια λογική επεκτείνεται, αλλά οι παράγωγοι δεν αρκούν μόνες τους για να περιγράψουν τη γεωμετρική συμπεριφορά της επιφάνειας. Εδώ, τα ολικά διαφορικά αποτελούν το κατάλληλο εργαλείο για να εκφράσουμε και να γενικεύσουμε τις έννοιες του πρώτου και του δεύτερου κριτηρίου.

Η συνθήκη

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy = 0$$

αντιστοιχεί στο γνωστό κριτήριο $f'(x) = 0$ της μίας μεταβλητής: εκφράζει το γεγονός ότι, στο κρίσιμο σημείο, το ολικό διαφορικό μηδενίζεται, δηλαδή η εφαπτομένη επιφάνεια είναι οριζόντια. Επομένως για να υπάρξει κρίσιμο σημείο, απαιτείται το ολικό διαφορικό να μηδενίζεται ανεξάρτητα από τις κατευθύνσεις dx, dy. Αυτό σημαίνει ότι για να είναι ένα σημείο (a,b) κρίσιμο σημείο πρέπει:

Κριτήριο Πρώτης Τάξεως για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0.$$

Αντίστοιχα, το διαφορικό δευτέρας τάξεως

$$d^2z = (dx,\,dy)\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

γενικεύει τη δεύτερη παράγωγο $f''(x)$. Η παραπάνω σχέση δείχνει ότι το δεύτερο διαφορικό είναι *τετραγωνική μορφή*, της οποίας το πρόσημο καθορίζει τον τύπο του κρίσιμου σημείου, ακριβώς όπως το πρόσημο της $f''(x)$ στον μονοδιάστατο λογισμό. Έτσι, ενώ στον χώρο μίας μεταβλητής η κυρτότητα ή κοίλανση της γραφικής παράστασης καθορίζεται από ένα απλό πρόσημο, στον χώρο δύο μεταβλητών ο ρόλος αυτός αναλαμβάνεται από το *σύμβολο του Hessian*, δηλαδή τη μήτρα των δευτέρων παραγώγων. Με αυτόν τον τρόπο, η μετάβαση από τον Λογισμό της μίας μεταβλητής στον Λογισμό πολλών μεταβλητών δεν αποτελεί απλώς τεχνική γενίκευση, αλλά μια *θεμελιακή ενοποίηση*. Οι έννοιες της παραγωγισιμότητας και της διαφορισιμότητας ταυτίζονται, ενώ τα γνωστά κριτήρια του μονοδιάστατου λογισμού εκφράζονται πλέον μέσα από τα ολικά διαφορικά. Η θεωρία αποκτά έτσι μια ενιαία γεωμετρική ερμηνεία, που ισχύει σε κάθε διάσταση και επιτρέπει τον καθορισμό του είδους των κρίσιμων σημείων μέσω της συμπεριφοράς του διαφορικού δευτέρας τάξεως. Με βάση τα παραπάνω, το κριτήριο δευτέρας τάξεως για συναρτήσεις δύο μεταβλητών σε ένα κρίσιμο σημείο (a,b) με την βοήθεια της Εισσιανής

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{yx}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$

διαμορφώνεται ως εξής:

Κριτήριο Δευτέρας Τάξεως για συναρτήσεις δύο μεταβλητών

$$Aν\;\; D(a,b) = detH = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a,b)\, f_{yy}(a,b) - [f_{xy}(a,b)]^2.$$

Τότε ισχύουν:

1. Αν $D(a,b) > 0$ και $f_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow$ το σημείο (a,b) είναι *τοπικό ελάχιστο*.
2. Αν $D(a,b) > 0$ και $f_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow$ το σημείο (a,b) είναι *τοπικό μέγιστο*.
3. Αν $D(a,b) < 0 \Rightarrow$ το σημείο (a,b) είναι *σαγματικό σημείο*.
4. Αν $D(a,b) = 0 \Rightarrow$ το κριτήριο είναι *απροσδιόριστο*.

Σχόλιο 1.1.5 Σύμφωνα με το *Θεώρημα Weierstrass*, κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό και φραγμένο σύνολο παίρνει τουλάχιστον μία μέγιστη και μία ελάχιστη τιμή. Επομένως, αν στο εσωτερικό του συνόλου δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία που να ικανοποιούν τις συνθήκες πρώτης τάξης, τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης θα εντοπίζονται αναγκαστικά σε σημεία του *συνόρου* του πεδίου ορισμού.

Περίληψη 1.1.6

- Θα λέμε ότι το $P = (a,b)$ είναι ένα *κρίσιμο σημείο* της συνάρτησης $f(x,y)$ αν:

  $f_x(a,b) = 0$ ή $f_x(a,b)$ δεν υπάρχει, και $f_y(a,b) = 0$ ή $f_y(a,b)$ δεν υπάρχει.

- Τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα μιας συνάρτησης f εμφανίζονται στα κρίσιμα σημεία.
- Η *διακρίνουσα* της $f(x,y)$ στο $P = (a,b)$ είναι η ποσότητα:

$$D(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - \left(f_{xy}(a,b)\right)^2$$

- *Κριτήριο δεύτερης μερικής παραγώγου:* Αν το $P=(a,b)$ είναι κρίσιμο σημείο της $f(x,y)$:

$$\begin{aligned} D(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)>0 &\Rightarrow f(a,b) \text{ τοπικό ελάχιστο,}\\ D(a,b)>0,\ f_{xx}(a,b)<0 &\Rightarrow f(a,b) \text{ τοπικό μέγιστο,}\\ D(a,b)<0 &\Rightarrow \text{σαγματικό σημείο,}\\ D(a,b)=0 &\Rightarrow \text{το κριτήριο δεν αποφασίζει.} \end{aligned}$$

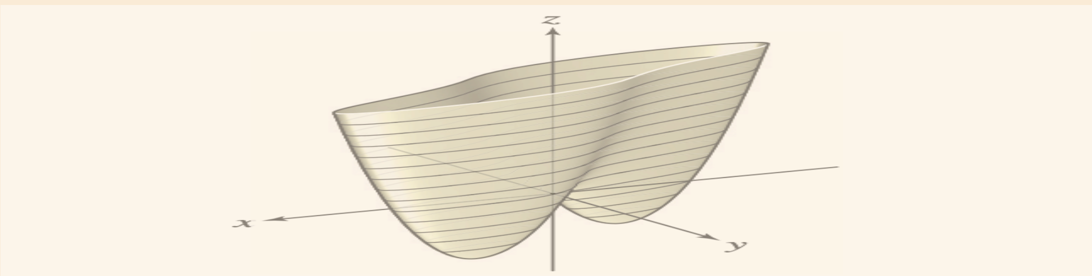
- Ένα σημείο P είναι *εσωτερικό* σημείο του χωρίου D αν το D περιέχει κάποιον ανοικτό δίσκο $D(P,r)$. Ένα σημείο P είναι *συνοριακό* αν κάθε $D(P,r)$ περιέχει σημεία εντός και εκτός του D. Το *εσωτερικό* του D είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων, ενώ το *σύνορο* το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων. Ένα χωρίο είναι *κλειστό* αν περιέχει και τα συνοριακά του σημεία και *ανοικτό* αν περιέχει μόνο τα εσωτερικά του.

- *Ακρότατα τιμών σε κλειστά και φραγμένα σύνολα:* Αν f είναι συνεχής και D κλειστό και φραγμένο, τότε:
  - Η f παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή στο D.
  - Οι ακραίες τιμές εμφανίζονται είτε στα κρίσιμα σημεία του εσωτερικού του D, είτε σε σημεία του συνόρου του D.

Για τον προσδιορισμό των ακρότατων τιμών: πρώτα εξετάζουμε τα κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του D, έπειτα συγκρίνουμε με τις τιμές της f στα συνοριακά σημεία.

Ασκήσεις 1.1.7

1. Έστω το σημείο $P=(a,b)$ ένα κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $f(x,y)=x^2+y^4-4xy$.
(α) Χρησιμοποιήστε τη συνθήκη $f_x(x,y)=0$ για να αποδείξετε ότι πρέπει να ισχύει η σχέση $a=2b$. Στη συνέχεια, βασιστείτε στη συνθήκη $f_y(x,y)=0$ για να αποδείξετε ότι μπορεί να ισχύει
$$P=(0,0),\quad (2\sqrt{2},\sqrt{2})\quad \text{ή}\quad (-2\sqrt{2},-\sqrt{2}).$$
(β) Συμβουλευτείτε το Σχήμα 1.4 για να προσδιορίσετε τα τοπικά ελάχιστα καθώς και τα σαγματικά σημεία για τη συνάρτηση $f(x,y)$ και να προσδιορίσετε το ολικό ελάχιστό της.



Σχήμα 1.4

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = y^2x - yx^2 + xy.$$

   (a) Δείξτε ότι τα κρίσιμα σημεία (x,y) της συνάρτησης ικανοποιούν τις εξισώσεις

   $$y\big(y-2x+1\big) = 0, \qquad x\big(2y-x+1\big) = 0.$$

   (b) Δείξτε ότι η συνάρτηση f έχει τρία κρίσιμα σημεία στα οποία είτε $x=0$ είτε $y=0$ (είτε και $x=0$ και $y=0$) και ένα κρίσιμο σημείο στο οποίο και το x και το y είναι διαφορετικά του μηδενός.

   (c) Χρησιμοποιήστε το κριτήριο της δεύτερης μερικής παραγώγου για να αποφασίσετε για το είδος του κρίσιμου σημείου (τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο ή σαγματικό σημείο).

3. Να προσδιορίσετε τα ολικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων στο χωρίο που δίνεται σε κάθε περίπτωση.

   (a) $f(x,y) = x^3 - 2y, \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$

   (b) $f(x,y) = 5x - 3y, \qquad y \ge x-2,\ y \ge -x-2,\ y \le 3.$

   (c) $f(x,y) = x^2 + 2y^2, \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$

   (d) $f(x,y) = x^3 + x^2y + 2y^2, \qquad x,y \ge 0,\ x+y \le 1.$

   (e) $f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^2, \qquad x,y \ge 0,\ x+y \le 1.$

   (f) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy, \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$

   (g) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y, \qquad x \ge 0,\ 0 \le y \le 3,\ y \ge x.$

   (h) $f(x,y) = (4y^2 - x^2)\,e^{-x^2-y^2}, \qquad x^2 + y^2 \le 2.$

   (i) $f(x,y) = x^2 + 2xy^2, \qquad x^2 + y^2 \le 1.$

4. Βρείτε το σημείο του επιπέδου

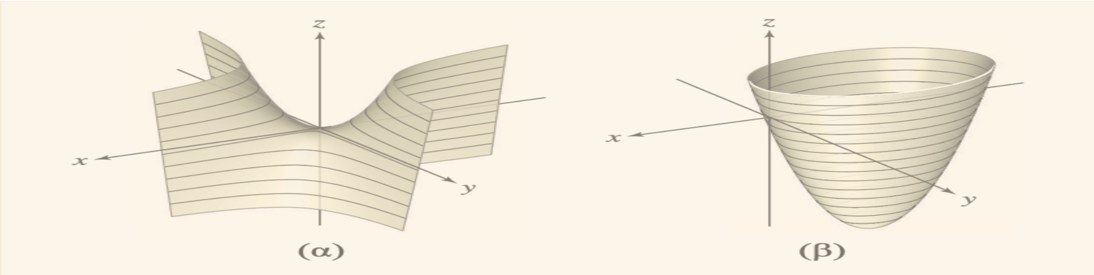
$$z = x + y + 1$$

   που βρίσκεται εγγύτερα στο $P = (1,0,0)$.

5. Προσδιορίστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4y + 6x, \qquad g(x,y) = x^2 - 12xy + y.$$

   Στη συνέχεια, χρησιμοποιήστε το κριτήριο της δεύτερης μερικής παραγώγου για να αποφασίσετε αν έχετε τοπικό ελάχιστο, τοπικό μέγιστο ή σαγματικό σημείο σε καθένα από τα κρίσιμα σημεία.
   Τέλος, αντιστοιχίστε τις συναρτήσεις $f(x,y)$ και $g(x,y)$ με τα γραφήματα (α) και (β) του Σχήματος 1.5.



Σχήμα 1.5

6. Προσδιορίστε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης

$$f(x,y) = x + y - x^2 - y^2 - xy$$

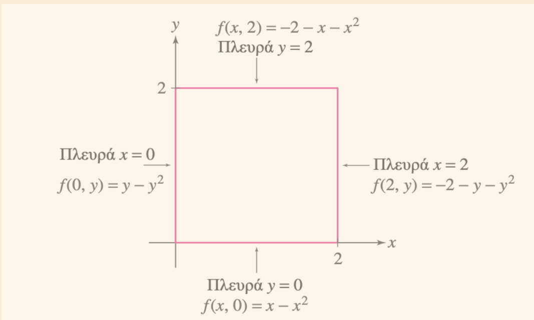
στο τετράγωνο του Σχήματος 1.5 που ορίζεται από τις ανισώσεις $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2$, ακολουθώντας τα εξής βήματα:

   a) Αρχικά προσδιορίστε το κρίσιμο σημείο της συνάρτησης $f(x,y)$ μέσα στο τετράγωνο και στη συνέχεια εκτιμήστε την τιμή της συνάρτησης f στο σημείο αυτό.

   b) Στην κάτω πλευρά του τετραγώνου ισχύει ότι $y = 0$ και $f(x,y) = x - x^2$. Υπολογίστε τις ακρότατες τιμές της συνάρτησης f σε αυτή την πλευρά.

   c) Προσδιορίστε τις ακρότατες τιμές της συνάρτησης f στις υπόλοιπες πλευρές του τετραγώνου.

   d) Βρείτε τώρα τη μέγιστη των τιμών που υπολογίσατε στα ερωτήματα α), β) και γ).



Σχήμα 1.6 *Οι τύποι της συνάρτησης $f(x,y) = x + y - x^2 - y^2 - xy$ στο σύνορο του τετραγώνου $0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 2$*

7. Έστω n σημεία $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Η βέλτιστη **ευθεία ελαχίστων τετραγώνων** είναι η γραμμική συνάρτηση

$$f(x) = mx + b$$

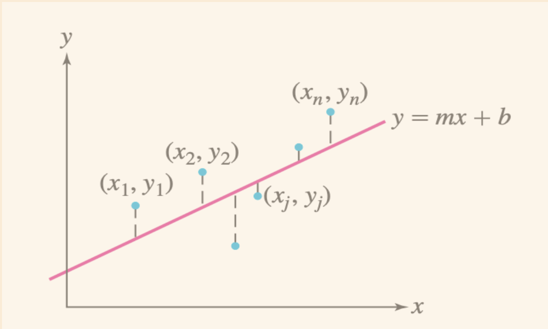
η οποία ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων (βλ. Σχήμα 1.7):

$$E(m,b) = \sum_{j=1}^{n} (y_j - f(x_j))^2$$

Δείξτε ότι η ελάχιστη τιμή της ποσότητας E επιτυγχάνεται για τις τιμές των m και b που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$m\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) + bn = \sum_{j=1}^{n} y_j$$

$$m\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + b\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$



Σχήμα 1.7 *Η βέλτιστη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των κατακόρυφων αποστάσεων μεταξύ των δεδομένων σημείων και της ευθείας.*

$f(x,y) = x^3 + x^2y + 2y^2, \quad x,y \geq 0,\ x+y \leq 1.$

Βήμα 1. Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους:

$f_x = 3x^2 + 2xy, \qquad f_y = x^2 + 4y.$

Βήμα 2. Εσωτερικά κρίσιμα σημεία:

$f_x = 0,\ f_y = 0.$

Από το $f_y = x^2 + 4y = 0$ προκύπτει $y = -\dfrac{x^2}{4}$, που δεν ικανοποιεί $y \geq 0$, άρα δεν υπάρχουν εσωτερικά κρίσιμα σημεία.

Βήμα 3. Εξετάζουμε τα όρια της περιοχής.

(a) Στην πλευρά $x = 0$: $\quad f(0,y) = 2y^2$, με $0 \leq y \leq 1$.

$f'(y) = 4y = 0 \Rightarrow y = 0.$

Άρα, $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 2$. Μέγιστο 2 στο $(0,1)$.

(b) Στην πλευρά $y = 0$: $\quad f(x,0) = x^3$, με $0 \leq x \leq 1$.

$f'(x) = 3x^2 \Rightarrow x = 0.$

$f(0,0) = 0$, $f(1,0) = 1$. Μέγιστο 1 στο $(1,0)$.

(c) Στην πλευρά $x + y = 1$: θέτουμε $y = 1 - x$, $0 \leq x \leq 1$.

$$f(x,1-x) = x^3 + x^2(1-x) + 2(1-x)^2 = x^2 + 2(1-2x+x^2) = 3x^2 - 4x + 2.$$

$$f'(x) = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}, \quad y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$f\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{9}\right) - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 2 = \frac{2}{3}.$$

$f(0,1) = 2, \quad f(1,0) = 1.$

Συμπέρασμα:

$\boxed{f_{\min} = 0 \text{ στο } (0,0), \quad f_{\max} = 2 \text{ στο } (0,1).}$

Λύση.

2. Έστω

$$f(x,y) = y^2x - yx^2 + xy.$$

(a) Υπολογίζουμε τις πρώτες μερικές:

$$f_x = y^2 - 2yx + y = y(y-2x+1), \qquad f_y = 2xy - x^2 + x = x(2y-x+1).$$

Τα κρίσιμα σημεία ικανοποιούν το σύστημα

$$y(y-2x+1) = 0, \qquad x(2y-x+1) = 0,$$

όπως ζητήθηκε.

(b) Επίλυση του συστήματος κατά περιπτώσεις.

(i) $x = 0$. Τότε $y(y+1) = 0 \Rightarrow y = 0$ ή $y = -1$.

$$(0,0),\ (0,-1).$$

(ii) $y = 0$. Τότε $x(1-x) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

$$(0,0),\ (1,0).$$

(iii) $x \neq 0,\ y \neq 0$. Τότε

$$y - 2x + 1 = 0, \qquad 2y - x + 1 = 0 \implies \begin{cases} y = 2x-1, \\ 2(2x-1) - x + 1 = 0 \end{cases} \implies x = \frac{1}{3},\ y = -\frac{1}{3}.$$

Άρα συνολικά τέσσερα κρίσιμα σημεία:

$$(0,0),\ (0,-1),\ (1,0),\ \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$

Τα τρία πρώτα έχουν είτε $x = 0$ είτε $y = 0$, ενώ το τέταρτο έχει και x και y διάφορα του μηδενός.

(γ) Κριτήριο δεύτερης παραγώγου. Οι δεύτερες μερικές είναι

$$f_{xx} = -2y, \qquad f_{yy} = 2x, \qquad f_{xy} = 2y - 2x + 1.$$

Η Εσσιανή είναι

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}, \text{ και } D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -4xy - (2y-2x+1)^2.$$

Έλεγχος στα κρίσιμα σημεία:

1) Στο $(0,0)$:

$$f_{xx} = 0,\ f_{yy} = 0,\ f_{xy} = 1 \Rightarrow D = -1 < 0$$

$\Rightarrow$ σαγματικό.
2) Στο $(0,-1)$:

$$f_{xx}=2,\ f_{yy}=0,\ f_{xy}=-1 \Rightarrow D=-1<0$$

$\Rightarrow$ σαγματικό.
3) Στο $(1,0)$:

$$f_{xx}=0,\ f_{yy}=2,\ f_{xy}=-1 \Rightarrow D=-1<0$$

$\Rightarrow$ σαγματικό.
4) Στο $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$:

$$f_{xx}=\frac{2}{3},\quad f_{yy}=\frac{2}{3},\quad f_{xy}=-\frac{1}{3} \Rightarrow D=\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{3}>0,$$

και $f_{xx}=\dfrac{2}{3}>0 \Rightarrow$ *τοπικό ελάχιστο*. Η τιμή του ελαχίστου:

$$f\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{27}-\frac{3}{27}=-\frac{1}{27}.$$

Συμπέρασμα: Τα $(0,0),\ (0,-1),\ (1,0)$ είναι σαγματικά σημεία, ενώ στο $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ η f έχει *τοπικό ελάχιστο* με τιμή $-\dfrac{1}{27}$.

5. *(i) Για* $f(x,y)=x^2+2y^2-4y+6x$.

$$f_x=2x+6,\qquad f_y=4y-4.$$

Κρίσιμα σημεία: $f_x=f_y=0 \Rightarrow x=-3,\ y=1$.
Δεύτερες μερικές:

$$f_{xx}=2>0,\quad f_{yy}=4>0,\quad f_{xy}=0 \Rightarrow D=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=8>0.$$

Άρα, επειδή $f_{xx}>0$, στο $(-3,1)$ έχουμε *τοπικό (και καθολικό) ελάχιστο* με

$$f(-3,1)=(-3)^2+2\cdot 1^2-4\cdot 1+6(-3)=-11.$$

Εναλλακτικά, $f=(x+3)^2+2(y-1)^2-11$, σαφώς κυρτή (ελλειπτικό παραβολοειδές).

(ii) Για $g(x,y)=x^2-12xy+y$.

$$g_x=2x-12y,\qquad g_y=-12x+1.$$

Κρίσιμο σημείο από $g_x=g_y=0$:

$$-12x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{12},\qquad 2x-12y=0 \Rightarrow y=\frac{x}{6}=\frac{1}{72}.$$

Δεύτερες μερικές:

$$g_{xx}=2,\quad g_{yy}=0,\quad g_{xy}=-12 \Rightarrow D=g_{xx}g_{yy}-g_{xy}^2=2\cdot 0-(-12)^2=-144<0.$$

Άρα στο $\left(\frac{1}{12}, \frac{1}{72}\right)$ έχουμε *σαγματικό σημείο* (υπερβολικό παραβολοειδές).

Αντιστοίχιση με γραφήματα Σχ. 1.5:

- $f(x,y)$: ελλειπτικό παραβολοειδές με ελάχιστο στο $(-3,1) \Rightarrow$ αντιστοιχεί στο *(α)*.
- $g(x,y)$: υπερβολικό παραβολοειδές (σαγματικό) $\Rightarrow$ αντιστοιχεί στο *(β)*.

6. Η συνάρτηση είναι

$$f(x,y) = x + y - x^2 - y^2 - xy,$$

και ορίζεται στο τετράγωνο $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$.
(a) Κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό.
Υπολογίζουμε τις πρώτες μερικές:

$$f_x = 1 - 2x - y, \qquad f_y = 1 - 2y - x.$$

Θέτουμε $f_x = f_y = 0$:

$$\begin{cases} 1 - 2x - y = 0 \\ 1 - 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 1 - 2(1 - 2x) - x = 0 \end{cases} \Rightarrow -1 + 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3},\ y = \frac{1}{3}.$$

Το σημείο $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ανήκει στο εσωτερικό του τετραγώνου.
Υπολογίζουμε

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

(b) Στην πλευρά $y = 0$:

$$f(x,0) = x - x^2.$$

Η παράγωγος $f'(x) = 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Άρα $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Στα άκρα $x = 0, 2$: $f(0,0) = 0,\ f(2,0) = -2$.

(c) Πλευρές:

• $x = 0$: $\quad f(0,y) = y - y^2$,

$$f'(y) = 1 - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}, \quad f\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

• $x = 2$: $\quad f(2,y) = 2 + y - 4 - y^2 - 2y = -2 - y^2 - y$,

$$f'(y) = -2y - 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \text{ (εκτός περιοχής)}.$$

Άρα στις άκρες $y = 0, 2$:

$$f(2,0) = -2,\ f(2,2) = -8.$$

• $y = 2$: $\quad f(x,2) = x + 2 - x^2 - 4 - 2x = -2 - x^2 - x,$

$$f'(x) = -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ (εκτός περιοχής)},$$

οπότε $f(0,2) = -2,\ f(2,2) = -8.$

(d) Συνοψίζουμε τις τιμές:

- Εσωτερικό: $f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$
- Πλευρές: μέγιστο $= \frac{1}{4}$ στα $(0, \frac{1}{2})$ και $(\frac{1}{2}, 0)$
- Άκρα: μικρότερες τιμές $(-2, -8)$.

Συμπέρασμα: Η *μέγιστη τιμή* της f στο τετράγωνο είναι

$$f_{\max} = \frac{1}{3}$$

και προσεγγιστικά εμφανίζεται στο εσωτερικό σημείο $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

7. Έστω n σημεία $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ και η γραμμική συνάρτηση

$$f(x) = mx + b.$$

Θέλουμε να προσδιορίσουμε τις τιμές των m, b που ελαχιστοποιούν το άθροισμα τετραγώνων των σφαλμάτων:

$$E(m,b) = \sum_{j=1}^{n} \big(y_j - f(x_j)\big)^2 = \sum_{j=1}^{n} \big(y_j - (mx_j + b)\big)^2.$$

Για ελάχιστο, απαιτούμε οι μερικές παράγωγοι να μηδενίζονται:

$$\frac{\partial E}{\partial m} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial b} = 0.$$

Υπολογίζουμε:

$$\frac{\partial E}{\partial m} = -2 \sum_{j=1}^{n} x_j \big(y_j - (mx_j + b)\big) = 0,$$

$$\frac{\partial E}{\partial b} = -2 \sum_{j=1}^{n} \big(y_j - (mx_j + b)\big) = 0.$$

Διαιρούμε και τις δύο εξισώσεις με -2:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j (y_j - mx_j - b) = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(y_j - mx_j - b) = 0.$$

Αναπτύσσοντας:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j - m\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - b\sum_{j=1}^{n} x_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_j - m\sum_{j=1}^{n} x_j - bn = 0.$$

Επαναγράφοντας το σύστημα με τα m, b ως αγνώστους:

$$\begin{cases} m\sum_{j=1}^{n} x_j + bn = \sum_{j=1}^{n} y_j, \\ m\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + b\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j. \end{cases}$$

Αυτό είναι το *σύστημα ελαχίστων τετραγώνων*, το οποίο δίνει τις βέλτιστες τιμές των m και b.
Λύνοντας για m, b:

$$m = \frac{n\sum x_j y_j - \sum x_j \sum y_j}{n\sum x_j^2 - (\sum x_j)^2}, \qquad b = \frac{\sum y_j - m\sum x_j}{n}.$$

Έτσι η *ευθεία ελαχίστων τετραγώνων* είναι

$$f(x) = mx + b,$$

όπου m, b δίνονται από τους παραπάνω τύπους.

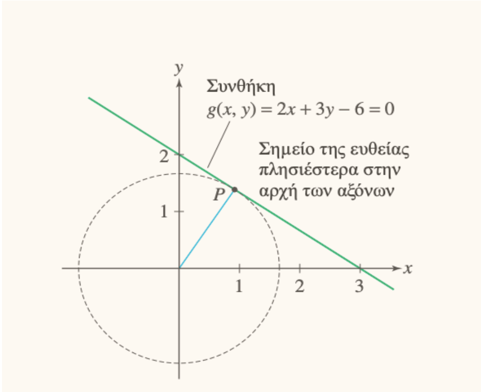
1.2 Πολλαπλασιαστές Lagrange: Βελτιστοποίηση υπό συνθήκη

Σε ορισμένα από τα προβλήματα βελτιστοποίησης ζητείται ο προσδιορισμός των ακρότατων τιμών μιας συνάρτησης $f(x,y)$ η οποία υπόκειται σε κάποια συνθήκη που μπορεί να εκφραστεί ως $g(x,y)=0$. αποθέστε ότι επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε εκείνο το σημείο της ευθείας $2x+3y=6$ το οποίο βρίσκεται πλησιέστερα στην αρχή των αξόνων (βλ. Σχήμα 1). Η απόσταση από το σημείο (x,y) μέχρι την αρχή των αξόνων είναι

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},$$

επομένως το πρόβλημα που έχουμε να επιλύσουμε στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:
Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$



Σχήμα 1.8 *Εύρεση του ελαχίστου της συνάρτησης $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ πάνω στην ευθεία $2x+3y=6$.*

που υπόκειται στη συνθήκη $g(x,y)=2x+3y=6$. Δεν αναζητούμε, λοιπόν, γενικά την ελάχιστη τιμή της $f(x,y)$ (η οποία πολύ εύκολα άλλωστε προκύπτει ότι είναι η τιμή 0), αλλά την ελάχιστη τιμή μεταξύ όλων των σημείων (x,y) που βρίσκονται στην ευθεία. Γενικά, στη βελτιστοποίηση υπό συνθήκη δεν αναζητούμε τα ακρότατα (μέγιστα ή ελάχιστα) μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x,y)$, σε όλο το επίπεδο, αλλά μόνο σε σημεία που ικανοποιούν μία επιπλέον *συνθήκη*, η οποία μπορεί να γραφεί με τη μορφή εξίσωσης

$$g(x,y)=c.$$

1.3 Μέθοδος των πολλαπλασιαστών Lagrange

1.3.1 Κριτήριο Πρώτης Τάξεως

Ξεκινάμε με ένα θεώρημα που αποτελεί τη βάση της μεθόδου των *πολλαπλασιαστών Lagrange*. Το θεώρημα αυτό μας δίνει τις αναγκαίες συνθήκες ώστε μια συνάρτηση $f(x,y)$ να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο υπό έναν περιορισμό της μορφής $g(x,y)=c$.

Θεώρημα 1.3.1 Πολλαπλασιαστές Lagrange Έστω ότι οι $f(x,y)$ και $g(x,y)$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις. Αν η $f(x,y)$ έχει ένα τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο υπό τον περιορισμό

$$g(x,y)=c$$

στο σημείο $P=(a,b)$ και εφόσον

$$(g_x(a,b),g_y(a,b))\neq(0,0),$$

τότε υπάρχει κάποια βαθμωτή ποσότητα λ τέτοια ώστε να ισχύει το σύστημα:

$$\begin{cases} f_x(a,b) - \lambda g_x(a,b) = 0, \\ f_y(a,b) - \lambda g_y(a,b) = 0, \\ g(a,b) = c. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια, το θεώρημα μάς λέει ότι η διαδικασία αναζήτησης ακροτάτων υπό περιορισμούς μπορεί να περιγραφεί με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange. Πιο αναλυτικά, έστω η συνάρτηση $z = f(x,y)$ και έστω ότι έχουμε το πρόβλημα

$$\max f(x,y) \quad \text{υπό τον περιορισμό } g(x,y) = c,$$

τότε εισάγουμε τον *πολλαπλασιαστή Lagrange* λ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda(c - g(x,y)).$$

Τα πιθανά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)$, υπό τον περιορισμό $g(x,y) = c$, προσδιορίζονται από την επίλυση του συστήματος εξισώσεων που εκφράζει τις συνθήκες πρώτης τάξης βελτιστοποίησης, γνωστές ως συνθήκες των πολλαπλασιαστών του Lagrange, και διατυπώνονται ως εξής:

Κριτήριο Πρώτης Τάξης

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad g(x,y) = c..$$

1.3.2 Κριτήριο Δευτέρας Τάξεως

Για να διαπιστωθεί αν τα σημεία που προκύπτουν από το σύστημα είναι τοπικά μέγιστα, ελάχιστα ή σαγματικά σημεία, εξετάζουμε την *Εσσιανή* της $L(x,y,\lambda)$ ως προς τις μεταβλητές x, y, δηλαδή τον πίνακα

Κριτήριο Πρώτης Τάξης

$$\det(H) = \begin{vmatrix} 0 & g_x(x,y) & g_y(x,y) \\ g_x(x,y) & L_{xx}(x,y) & L_{xy}(x,y) \\ g_y(x,y) & L_{yx}(x,y) & L_{yy}(x,y) \end{vmatrix}$$

Η φύση του σημείου καθορίζεται από την *οριστικότητα* του πίνακα H:

- Αν ο πίνακας H είναι *θετικά ορισμένος*, τότε το σημείο είναι τοπικό ελάχιστο.
- Αν ο πίνακας H είναι *αρνητικά ορισμένος*, τότε το σημείο είναι τοπικό μέγιστο.
- Αν ο πίνακας H αλλάζει πρόσημο, τότε το σημείο είναι σαγματικό.
- Αν κάποια κύρια ορίζουσα μηδενίζεται, τότε το κριτήριο παραμένει απροσδιόριστο και απαιτείται περαιτέρω μελέτη της συνάρτησης.

Με τον τρόπο αυτό, το Κριτήριο Δευτέρας Τάξεως δίνει ένα αποτελεσματικό εργαλείο για την ταξινόμηση των κρίσιμων σημείων σε τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα ή σαγματικά σημεία, στηριζόμενο στην ανάλυση του προσήμου των ιδιοτιμών ή ισοδύναμα στις συνθήκες των κυρίων οριζουσών.

Σημείωση 1.3.2 Συνθήκες αριστοποίησης υπό περιορισμούς Εδώ θα εξετάσουμε πώς προκύπτουν τα κριτήρια πρώτης και δεύτερης τάξεως για την αριστοποίηση συναρτήσεων όταν υπάρχουν περιορισμοί. Ας ξεκινήσουμε με τα κριτήρια πρώτης τάξης. Έστω η συνάρτηση $z = f(x,y)$, την οποία επιθυμούμε να αριστοποιήσουμε υπό τον περιορισμό $g(x,y) = c$. Γνωρίζουμε ότι, ανεξάρτητα αν οι μεταβλητές x και y είναι εξαρτημένες ή ανεξάρτητες μεταξύ τους, ισχύει:

$$dz = f_x dx + f_y dy$$

Ενώ αν πάρουμε το ολικό διαφορικό του περιορισμού έχουμε:

$$dg = g_x dx + g_y dy = 0$$

Λύνοντας το γραμμικό σύστημα πρώτου βαθμού με αγνώστους τα dx και dy έχουμε:

$$dz = f_x dx - g_x \frac{f_y}{g_y} dx = \left(f_x - g_x \frac{f_y}{g_y} \right) dx = 0.$$

Για να είναι $dz = 0$, επειδή $dx \neq 0$, συνεπάγεται ότι:

$$f_x - g_x \frac{f_y}{g_y} = 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}.$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι οι παραγώγοι της f ως προς κάθε μεταβλητή είναι ανάλογοι με τις παραγώγους της g. Δηλαδή, υπάρχει κάποιος αριθμός λ ώστε:

$$f_x = -\lambda g_x, \quad f_y = -\lambda g_y$$

Λύνοντας τις εξισώσεις ως προς x, y και λ, βρίσκουμε τα ακρότατα της συνάρτησης. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν υπάρχει κάποιος τρόπος που να μας οδηγεί στο παραπάνω σύστημα εξισώσεων. Η απάντηση είναι καταφατική· η εξίσωση που μας δίνει την παραπάνω λύση είναι η **εξίσωση του Lagrange**, που γράφεται:

$$L = f(x,y) + \lambda\,(c - g(x,y)).$$

Τα ακρότατα της f υπό τον περιορισμό $g(x,y) = c$ προκύπτουν από την επίλυση του συστήματος

Κριτήριο Πρώτης Τάξης

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad g(x,y) = c.$$

Όμοια, για να εξετάσουμε το κριτήριο δεύτερης τάξης στα δεσμευμένα ακρότατα, παρατηρούμε ότι - όπως ακριβώς συμβαίνει και με τα ελεύθερα ακρότατα - το διαφορικό δεύτερης τάξης πρέπει να ικανοποιεί τις ίδιες συνθήκες προσήμου: να είναι θετικά ορισμένο, δηλαδή $d^2z > 0$, στην περίπτωση τοπικού ελαχίστου, και αρνητικά ορισμένο, δηλαδή $d^2z < 0$, στην περίπτωση τοπικού μεγίστου. Έτσι λοιπόν από

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy$$

έχουμε:

$$d^2z = f_x\,d^2x + f_{xx}\,dx^2 + 2f_{xy}\,dx\,dy + f_{yy}\,dy^2$$

και

$$d^2g = g_x\,d^2x + g_{xx}\,dx^2 + 2g_{xy}\,dx\,dy + g_{yy}\,dy^2 = 0$$

Συνεχίζοντας έχουμε

$$g_xd^2z - f_xd^2g =$$
$$g_x(f_xd^2x + f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dx\,dy + f_{yy}dy^2) - f_x(g_xd^2x + g_{xx}dx^2 + 2g_{xy}dx\,dy + g_{yy}dy^2)$$

$$= (g_xf_{xx} - f_xg_{xx})dx^2 + (g_xf_{yy} - f_xg_{yy})dy^2 + 2(g_xf_{xy} - f_xg_{xy})dx\,dy$$

Διαιρούμε με g_x, έχοντας υπόψη ότι $d^2g = 0$, και καταλήγουμε:

$$d^2z = \left(f_{xx} - \frac{f_x}{g_x}g_{xx}\right)dx^2 + \left(f_{yy} - \frac{f_x}{g_x}g_{yy}\right)dy^2 + 2\left(f_{xy} - \frac{f_x}{g_x}g_{xy}\right)dx\,dy$$

Το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης αποτελεί μια τετραγωνική μορφή, και ανάλογα με το αν είναι θετικά ή αρνητικά ορισμένη, έχουμε ελάχιστο ή μέγιστο αντίστοιχα.

$$d^2z = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx} - \lambda g_{xx} & f_{xy} - \lambda g_{xy} \\ g_y & f_{xy} - \lambda g_{xy} & f_{yy} - \lambda g_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dx \\ dy \end{bmatrix}$$

ή

$$d^2z = \begin{bmatrix} 0 & dx & dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ dx \\ dy \end{bmatrix}$$

όπου $L = f(x,y) + \lambda(c - g(x,y)$.

Αποδεικνύεται ότι η ορίζουσα

Κριτήριο Δεύτερης Τάξης

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix}$$

είναι θετικά ορισμένη αν η $\overline{H}$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός, και αρνητικά ορισμένη αν η $\overline{H}$ είναι μικρότερη του μηδενός.

Ασκήσεις 1.3.3

1. Να εφαρμόσετε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για τη συνάρτηση
$$f(x,y) = (x^2+1)y$$
υπό τον περιορισμό
$$x^2+y^2 = 5.$$

2. Στις επόμενες ασκήσεις να υπολογίσετε τις ελάχιστες και μέγιστες τιμές της συνάρτησης που δίνεται σε κάθε περίπτωση, υπό τον δεδομένο περιορισμό.
   a) $f(x,y) = 2x+3y, \quad x^2+y^2 = 4$
   b) $f(x,y) = x^2+y^2, \quad 2x+3y = 6$
   c) $f(x,y) = 4x^2+9y^2, \quad xy = 4$
   d) $f(x,y) = xy, \quad 4x^2+9y^2 = 32$
   e) $f(x,y) = x^2y+x+y, \quad xy = 4$

3. Προσδιορίστε το σημείο (a,b) του γραφήματος της συνάρτησης
$$y = e^x$$
για το οποίο το γινόμενο ab γίνεται ελάχιστο.

4. Βρείτε το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τον μέγιστο όγκο αν το άθροισμα των ακμών του είναι ίσο με $300\,\text{cm}$.

5. Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή που παίρνει η συνάρτηση
$$f(x,y) = x^2y^3$$

πάνω στον μοναδιαίο κύκλο είναι

$$\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

6. Δείξτε ότι οι εξισώσεις Lagrange για τη συνάρτηση

$$f(x,y) = 2x + y$$

που υπόκειται στον περιορισμό

$$g(x,y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$$

έχουν λύση, αλλά παρ' όλα αυτά η συνάρτηση f δεν έχει μέγιστη ή ελάχιστη τιμή πάνω στην καμπύλη της συνθήκης. Αντιφάσκει το συμπέρασμα αυτό με το Θεώρημα 1;

7. Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός ορθού κυκλικού κώνου ακτίνας r και ύψους h δίνεται από τη σχέση

$$S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2},$$

ενώ ο όγκος του είναι

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h.$$

(a) Προσδιορίστε τον λόγο h/r για εκείνον τον κώνο που έχει δεδομένη επιφάνεια S και μέγιστο όγκο V.

(b) Ποια είναι η τιμή του λόγου h/r για τον κώνο με δεδομένο όγκο V και ελάχιστη επιφάνεια S;

(c) Υπάρχει κώνος με δεδομένο όγκο V και μέγιστη επιφάνεια S;

8. Ο Αντώνης έχει \$5.00 που μπορεί να διαθέσει για ένα γεύμα αποτελούμενο από χάμπουργκερ (με κόστος \$1.50 το ένα) και τηγανητές πατάτες (με κόστος \$1.00 η μερίδα). Η ικανοποίηση που παίρνει ο Αντώνης από το φαγητό του όταν καταναλώσει x χάμπουργκερ και y μερίδες πατάτες μετριέται από τη συνάρτηση

$$U(x,y) = \sqrt{xy}.$$

Ποιες ποσότητες φαγητού από κάθε είδος θα πρέπει να καταναλώσει ώστε να μεγιστοποιηθεί το αίσθημα της απόλαυσης που θα αισθανθεί; (Υποθέστε ότι μπορεί να αγοράσει και κλασματικές ποσότητες από το κάθε είδος φαγητού.)

Λύση.

1. Έστω

$$f(x,y) = (x^2+1)y, \qquad g(x,y) = x^2 + y^2 - 5 = 0.$$

Εισάγουμε τον πολλαπλασιαστή Lagrange και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + (c - g(x,y)) = (x^2+1)y + \lambda(5 - x^2 - y^2).$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους:

$$L_x = 2xy - 2\lambda x, \quad L_y = x^2 + 1 - 2\lambda y, \qquad g_x = 2x, \quad g_y = 2y.$$

Οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι:

$$\begin{cases} L_x(x,y) = 2xy - 2\lambda x = 0, \\ L_y(x,y) = x^2 + 1 - 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Άρα το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 2xy = 2\lambda x, \\ x^2 + 1 = 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Περίπτωση 1: $x \neq 0$.
Από την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$2xy = 2x\lambda \Rightarrow y = \lambda.$$

Αντικαθιστούμε στη δεύτερη:

$$x^2 + 1 = 2y^2 \Rightarrow x^2 + 1 = 2y^2.$$

Από τον περιορισμό $x^2 + y^2 = 5$ προκύπτει

$$5 - y^2 + 1 = 2y^2 \Rightarrow 3y^2 = 6 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}.$$

Τότε $x^2 = 5 - y^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.
Άρα τα σημεία είναι:

$$(\sqrt{3}, \sqrt{2}),\ (-\sqrt{3}, \sqrt{2}),\ (\sqrt{3}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{3}, -\sqrt{2}).$$

Δεύτερες συνθήκες (Lagrange).

’Εχουμε

$$L_{xx} = 2y - 2\lambda,\ L_{xy} = L_{yx} = 2x,\ L_{yy} = -2\lambda.$$

Συνεπώς, από $y = ;ambda$ έχουμε

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2y - 2\lambda & 2x \\ 2y & 2x & -2\lambda \end{vmatrix} = 24x^2y.,$$

Εύκολα τώρα βρίσκουμε τα μέγιστα και τα ελάχιστα, για παράδειγμα για το σημείο $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ έχουμε $\overline{H} = 144 > 0$, άρα μέγιστο.

2. (α) ’Εχουμε $f(x,y) = 2x + 3y$ με περιορισμό $x^2 + y^2 = 4$. Εισάγουμε τον πολλαπλασιαστή Lagrange και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$L(x,y,)=f(x,y)+(c-g(x,y))=2x+3y+\lambda(4-x^2-y^2).$$

Συνεπώς,

$$L_x=2-2\lambda x,\ L_y=3-2\lambda y,\ L_{xx}=-2\lambda,\ L_{xy}=L_{yx}=0,\ L_{yy}=-2\lambda.$$

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης έχουμε

$$\begin{cases} 2-2\lambda x=0, \\ 3-2\lambda y=0, \\ x^2+y^2=4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=2\lambda x \Rightarrow x=\dfrac{1}{\lambda}, \\ 3=2\lambda y \Rightarrow y=\dfrac{3}{2\lambda}, \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$$

Επομένως,

$$\frac{1}{\lambda^2}+\frac{9}{4\lambda^2}=4 \Rightarrow \frac{13}{4\lambda^2}=4 \Rightarrow \lambda^2=\frac{13}{16}.$$

Άρα

$$(x,y)=\Big(\pm\frac{4}{\sqrt{13}},\ \pm\frac{6}{\sqrt{13}}\Big).$$

Από τις συνθήκες δευτέρας τάξεως έχουμε

$$\overline{H}=\begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 0 & -2\lambda \\ 2y & -2\lambda & 0 \end{vmatrix}=-16\lambda xy.$$

Αφου βάλουμε τις αντίστοχες τιμές στην παραπάνω ορίζουσα με απλές πράξεις έχουμε:

$$f_{\max} \text{ στο } \Big(\frac{4}{\sqrt{13}},\frac{6}{\sqrt{13}}\Big), \qquad f_{\min} \text{ στο } \Big(-\frac{4}{\sqrt{13}},-\frac{6}{\sqrt{13}}\Big).$$

(β) Έχουμε $f(x,y)=x^2+y^2$ με περιορισμό $2x+3y=6$. Εισάγουμε τον πολλαπλασιαστή Lagrange και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$L(x,y,)=f(x,y)+(c-g(x,y))=x^2+y^2+\lambda(6-2x-3y).$$

Συνεπώς,

$$L_x = 2x - 2\lambda,\ \ L_y = 2y - 3\lambda,\ L_{xx} = 2,\ \ L_{xy} = L_{yx} = 0,\ \ L_{yy} = 2.$$

Από τις συνθήκες πρώτης τάξης έχουμε

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda = 0, \\ \\ 2y - 3\lambda = 0, \\ \\ 2x + 3y = 6. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \lambda, \\ \\ y = \dfrac{3}{2}\lambda, \\ \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Άρα

$$2\lambda + 3 \cdot \frac{3}{2}\lambda = 6 \ \Rightarrow\ \frac{13}{2}\lambda = 6 \ \Rightarrow\ \lambda = \frac{12}{13}.$$

Οπότε

$$(x, y) = \left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right).$$

Από τις συνθήκες δευτέρας τάξεως έχουμε

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -26 < 0.$$

Επομένως η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $(x, y) = \left(\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right)$ το οποίο ειναι

$$f_{\min} = \frac{468}{\sqrt{169}}.$$

5. Έχουμε

$$f(x, y) = x^2 y^3, \qquad g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange έχουμε την συνάρτηση

$$L(x, y,) = f(x, y) + (c - g(x, y)) = x^2 y^3 + \lambda(1 - x^2 - y^2).$$

Συνεπώς,

$$L_x = 2xy^3 - 2\lambda x,\ \ L_y = 3x^2y^2 - 2\lambda y,\ L_{xx} = 2y^3 - 2\lambda,$$

$$L_{xy} = L_{yx} = 6xy^2,\ \ L_{yy} = 6x^2y - 2\lambda.$$

Το σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 2xy^3 = 2\lambda x, \\ 3x^2y^2 = 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Περίπτωση 1: $x \neq 0,\ y \neq 0.$
Από την πρώτη εξίσωση:

$$2xy^3 = 2x\lambda \ \Rightarrow\ \lambda = y^3.$$

Από τη δεύτερη:

$$3x^2y^2 = 2y\lambda = 2y^4 \Rightarrow 3x^2y^2 = 2y^4 \Rightarrow 3x^2 = 2y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{3}y^2.$$

Από τον περιορισμό $x^2 + y^2 = 1$ έχουμε

$$\frac{2}{3}y^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{5}{3}y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{3}{5}.$$

Άρα

$$x^2 = \frac{2}{5}, \qquad y = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Από τις συνθήκες δευτέρας τάξεως έχουμε

$$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix}$$

Οι συνδυασμοί σημείων είναι

$$(\pm\sqrt{\frac{2}{5}},\ \pm\sqrt{\frac{3}{5}}).$$

Εύκολα επίσης αποδεικνύεται ότι στο σημείο $(\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}})$ έχουμε $\overline{H} > 0$ και άρα μέγιστο.
Συνεπώς

$$f(x,y) = x^2y^3 = (\frac{2}{5})\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3 = \frac{2}{5}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{5\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{3}}{25\sqrt{5}} = \frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Άρα η συνάρτηση $f(x,y) = x^2y^3$ πάνω στον μοναδιαίο κύκλο $x^2+y^2 = 1$ παίρνει μέγιστη τιμή

$$f_{\max} = \frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}.$$

7. Δίνονται

$$S = \pi r\sqrt{r^2+h^2}, \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Θέλουμε τον λόγο $\frac{h}{r}$ για εκείνον τον κώνο που έχει δεδομένη επιφάνεια S και μέγιστο όγκο V. 'Αρα πρέπει πρώτα να λύσουμε το πρόβλημα εύρεσης του μέγιστου όγκου με περιορισμό την συγκεκριμένη επιφάνεια S. Συνεπώς, εφαρμόζουμε τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange για τη μεγιστοποίηση του $V(r,h)$ με περιορισμό $g(r,h) = \pi r\sqrt{r^2+h^2} - S = 0$.
Άρα

$$L(r,h,\lambda) = f(r,h) + (c - g(r,h)) = \frac{1}{3}\pi r^2 h + \lambda(S - \pi r\sqrt{r^2+h^2}).$$

Συνεπώςαπό τις συνθήκες πρώτης τάξεως έχουμε

$$L_r = \frac{2}{3}\pi rh - \lambda\pi\frac{2r^2+h^2}{\sqrt{r^2+h^2}} = 0, \;\; L_h = \frac{1}{3}\pi r^2 - \lambda\pi\frac{rh}{\sqrt{r^2+h^2}} = 0.$$

Από τη δεύτερη συνιστώσα:

$$\frac{1}{3}\pi r^2 = \lambda\,\pi\frac{rh}{\sqrt{r^2+h^2}} \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{3}\frac{r\sqrt{r^2+h^2}}{h}.$$

Αντικαθιστούμε στην πρώτη συνιστώσα:

$$\frac{2}{3}\pi rh = \lambda\,\pi\frac{2r^2+h^2}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{1}{3}\pi r\frac{2r^2+h^2}{h}.$$

Άρα

$$2h^2 = 2r^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 2r^2 \Rightarrow \boxed{\frac{h}{r} = \sqrt{2}}.$$

Οι λεπτομερείς επαληθεύσεις των συνθηκών δεύτερης τάξεως (θετικής/αρνητικής οριστικότητας) αφήνονται ως άσκηση στον αναγνώστη.

8. Λύση. Έχουμε τον περιορισμό προϋπολογισμού:

$$1.5x + 1.0y = 5.$$

Θέτουμε το πρόβλημα Lagrange:

$$L(x,y,\lambda) = \sqrt{xy} + \lambda(5 - 1.5x - y).$$

Παράγωγοι:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{y^{1/2}}{x^{1/2}} - 1.5\lambda = 0, \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{x^{1/2}}{y^{1/2}} - \lambda = 0, \\ \\ 5 - 1.5x - y = 0. \end{cases}$$

Διαιρούμε την πρώτη με τη δεύτερη:

$$\frac{\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}}}{\frac{x^{1/2}}{y^{1/2}}} = 1.5 \Rightarrow \frac{y}{x} = 1.5 \Rightarrow y = 1.5x.$$

Αντικαθιστούμε στον περιορισμό:

$$1.5x + 1(1.5x) = 5 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}.$$

$$y = 1.5x = 2.5.$$

Άρα:

$$x = \frac{5}{3} \approx 1.67, \qquad y = 2.5.$$

Έλεγχος με κριτήριο δευτέρας τάξεως Θέτουμε $g(x,y) = 1.5x + y - 5 = 0$ και $\mathscr{L}(x,y,\lambda) = \sqrt{xy} + \lambda(5 - 1.5x - y)$. Τα δεύτερα παράγωγα (επειδή g είναι γραμμικό) είναι:

$$L_{xx} = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{y}}{x^{3/2}}, \qquad L_{yy} = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{x}}{y^{3/2}}, \qquad L_{xy} = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{xy}}.$$

Επίσης $g_x = 1.5,\ g_y = 1$.

Στο σημείο 1ης τάξης $x = \frac{5}{3}$, $y = 2.5$ ο Hessian είναι

$$H = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1.5 & 1 \\ 1.5 & -0.183712 & 0.122474 \\ 1 & 0.122474 & -0.081650 \end{vmatrix},$$

του οποίου η ορίζουσα υπολογίζεται

$$H \approx 0.734847 > 0.$$

Για ένα πρόβλημα με έναν ισοπεριορισμό, η συνθήκη δευτέρας τάξεως για *μέγιστο* είναι $\overline{H} > 0$. Επομένως το σημείο $x_1 = \frac{5}{3}$, $y = 2.5$ ικανοποιεί τις συνθήκες δευτέρας τάξεως και δίνει μέγιστο. Η μέγιστη χρησιμότητα είναι:

$$U = \sqrt{(1.67)(2.5)} = \sqrt{4.175} \approx 2.04.$$

Επομένως, 0 Αντώνης πρέπει να αγοράσει περίπου 1.67 χάμπουργκερ και 2.5 μερίδες πατάτες για να μεγιστοποιήσει την απόλαυσή του.

Παρατήρηση. Η $U(x,y) = \sqrt{xy}$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}^2_{++}$ και το σύνολο προϋπολογισμού είναι κυρτό, άρα οι συνθήκες πρώτης τάξης είναι ήδη επαρκείς. Ο έλεγχος με την *εισ/νη δευτέρας τάξεως* το επιβεβαιώνει.

Σημείωση 1.3.4 Δομικά σχήματα βελτιστοποίησης χωρίς και με συνθήκες

Παράδειγμα: Προσδιορίστε τα ακρότατα της $f(x,y) = 2x + 5y$ πάνω στην έλλειψη

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1.$$

Λύση.Θέτουμε

$$g(x,y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$$

και

$$L(x,y,\lambda) = 2x + 5y + \lambda\left(1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}\right).$$

$$L_x = 2 - \lambda\frac{x}{8} = 0 \Rightarrow x = \frac{16}{\lambda}, \qquad L_y = 5 - \lambda\frac{2y}{9} = 0 \Rightarrow y = \frac{45}{2\lambda}.$$

$$\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{4}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{15}{2\lambda}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{289}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{17}{2}.$$

$$\lambda = \frac{17}{2} \Rightarrow (x,y) = \left(\frac{32}{17}, \frac{45}{17}\right).$$

$$\lambda = -\frac{17}{2} \Rightarrow (x,y) = \left(-\frac{32}{17}, -\frac{45}{17}\right).$$

Έλεγχος Συνθηκών Δευτέρας Τάξεως
Έστω ο περιορισμός

$$g(x,y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad g_x(x,y) = \frac{x}{8},\ g_y(x,y) = \frac{2y}{9}.$$

Η Εισσιανή δευτέρας τάξεως είναι:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{xy} & L_{yy} \end{vmatrix}, \qquad L_{xx} = -\frac{\lambda}{8}, \quad L_{yy} = -\frac{2\lambda}{9}, \quad L_{xy} = 0.$$

Για $\lambda = \frac{17}{2}$:

$$L_{xx} = -\frac{17}{16}, \quad L_{yy} = -\frac{17}{9},\ g_x(x,y) = \frac{4}{17},\ g_y(x,y) = \frac{10}{17}.$$

$$= -g_x^2 L_{yy} - L_{xx} g_y^2 = \frac{17}{36} > 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με τις συνθήκες Lagrange ότι το σημείο $\left(\frac{32}{17}, \frac{45}{17}\right)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Ομοίως για $\lambda = -\frac{17}{2}$:

$$L_{xx} = \frac{17}{16}, \quad L_{yy} = \frac{17}{9} \textit{ και } H = -\frac{17}{36} < 0.$$

Άρα το σημείο είναι *ελάχιστο*.

Συνοψίζοντας:

$$f_{\max} = 17 \quad \text{στο} \quad \left(\frac{32}{17}, \frac{45}{17}\right), \qquad f_{\min} = -17 \quad \text{στο} \quad \left(-\frac{32}{17}, -\frac{45}{17}\right).$$

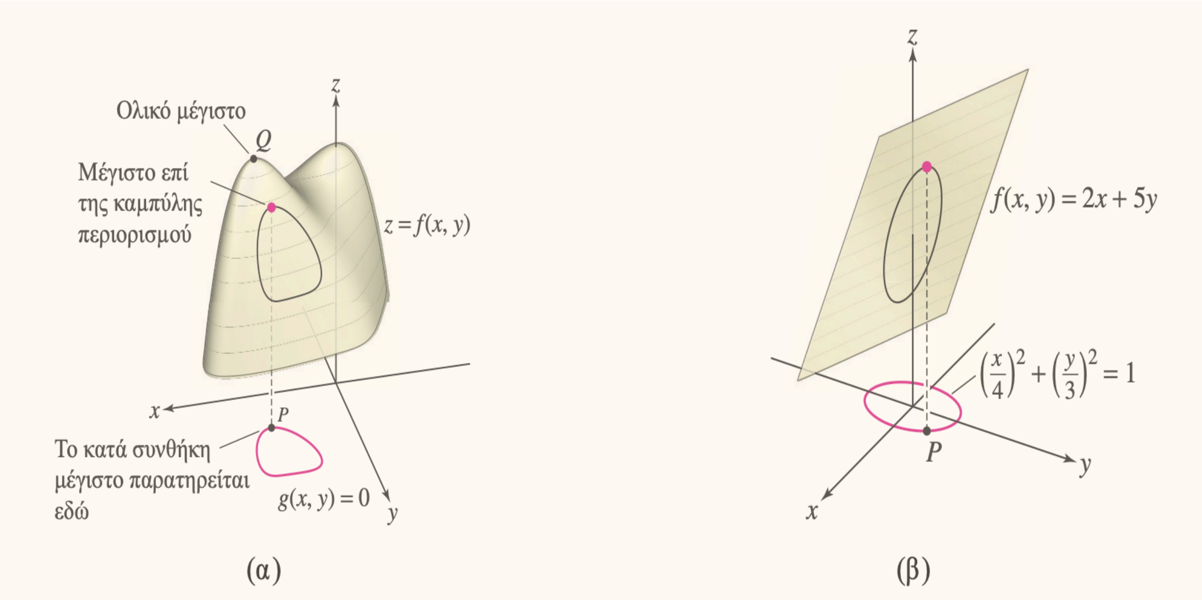
Σε ένα συνηθισμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης, χωρίς κάποια συνθήκη, το ολικό μέγιστο είναι το ύψος του υψηλότερου σημείου της επιφάνειας

$$z = f(x,y)$$

(δηλαδή το σημείο Q του Σχήματος 1.9(α)). Όταν όμως δίνεται ένας περιορισμός, τότε εστιάζουμε την προσοχή μας στην καμπύλη που βρίσκεται πάνω στην υπό μελέτη επιφάνεια και πάνω από την περιοριστική καμπύλη

$$g(x,y) = c$$

. Η ζητούμενη μέγιστη τιμή που υπόκειται στη συνθήκη είναι το ύψος του υψηλότερου σημείου αυτής της καμπύλης. Το Σχήμα 1.9(β) απεικονίζει το πρόβλημα βελτιστοποίησης που επιλύσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.



Σχήμα 1.9 *Η γραμμική προσέγγιση του Δx δίνεται από το διαφορικό dx.*

1.4 Πολλαπλή Ολοκλήρωση

Τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων με πολλές μεταβλητές είναι γνωστά ως *πολλαπλά ολοκληρώματα* και αποτελούν τη φυσική επέκταση των ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, τα οποία μελετήσαμε στο πρώτο μέρος του παρόντος βιβλίου. Τα ολοκληρώματα αυτού του τύπου χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό πολλών διαφορετικών ποσοτήτων που εμφανίζονται σε διάφορες εφαρμογές, όπως ο όγκος, η μάζα, η ροή θερμότητας, το συνολικό φορτίο αλλά και η συνισταμένη δύναμη.

Οι στήλες από ηφαιστειογενή βράχο που σχηματίζουν τον Πύργο του Διαβόλου στην Πολιτεία του Wyoming μοιάζουν με τις στήλες όγκου ενός αθροίσματος Riemann μέσω του οποίου αναπαρίσταται ο όγκος που περιορίζεται κάτω από το γράφημα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών. Όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων με μία μεταβλητή, έτσι και στις περιπτώσεις των δύο και τριών μεταβλητών τα ολοκληρώματα ορίζονται ως όρια αθροισμάτων Riemann.

Σχήμα 1.10

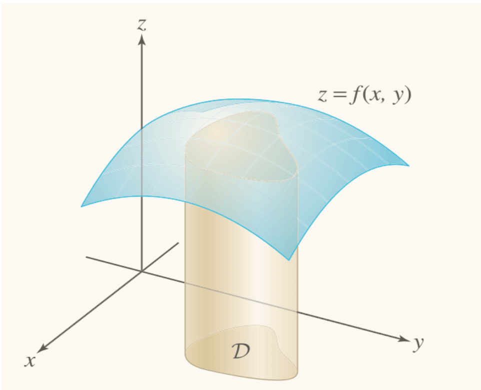
1.4.1 Ολοκλήρωση συναρτήσεων με δύο μεταβλητές

Τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων με πολλές μεταβλητές είναι γνωστά ως *πολλαπλά ολοκληρώματα* και αποτελούν τη φυσική επέκταση των ολοκληρωμάτων των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, τα οποία μελετήσαμε στο πρώτο μέρος του παρόντος βιβλίου. Τα ολοκληρώματα αυτού του τύπου χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό πολλών διαφορετικών ποσοτήτων που εμφανίζονται σε διάφορες εφαρμογές, όπως ο όγκος, η μάζα, η ροή θερμότητας, το συνολικό φορτίο αλλά και η συνισταμένη δύναμη.

Το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών $f(x,y)$, που αποκαλείται **διπλό ολοκλήρωμα**, συμβολίζεται ως

$$\int_D f(x,y)\,dA$$

Όταν για την ολοκληρωτέα συνάρτηση ισχύει $f(x,y) \geq 0$ σε ένα χωρίο D του επιπέδου xy, τότε το ολοκλήρωμα παριστάνει τον όγκο του στερεού που βρίσκεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της $f(x,y)$ και του επιπέδου xy, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Γενικότερα, ένα διπλό ολοκλήρωμα αναπαριστά έναν προσημασμένο όγκο, όπου οι θετικές συνεισφορές προέρχονται από τις περιοχές που βρίσκονται πάνω από το επίπεδο xy, ενώ οι αρνητικές συνεισφορές οφείλονται στις περιοχές που βρίσκονται κάτω από αυτό το επίπεδο. Υπάρχουν αρκετές ομοιότητες μεταξύ των διπλών και των απλών ολοκληρωμάτων:



Σχήμα 1.11

- Τα διπλά ολοκληρώματα ορίζονται ως όρια αθροισμάτων Riemann.
- Τα διπλά ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν με τη βοήθεια του θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού

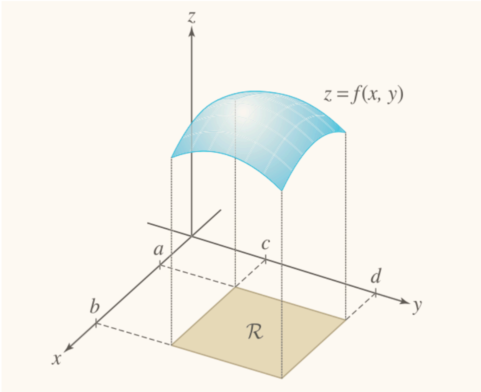
Ωστόσο, μια σημαντική διαφορά που υπάρχει είναι ότι τα χωρία στα οποία λαμβάνει χώρα μια διπλή ολοκλήρωση μπορεί να είναι αρκετά πολύπλοκα. Στην περίπτωση του Λογισμού μίας μεταβλητής, η ολοκλήρωση γίνεται σε ένα απλό διάστημα της μορφής [a,b]. Στην ολοκλήρωση συναρτήσεων με δύο μεταβλητές, το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι μια επίπεδη περιοχή, τα σύνορα της οποίας μπορεί να αποτελούνται από ένα πλήθος διαφορετικών καμπυλών αλλά και ευθύγραμμων τμημάτων (όπως για παράδειγμα το χωρίο $\mathscr{D}$ στο Σχήμα 1.11 αλλά και το $\mathscr{R}$ του Σχήματος 1.12).

Στην τρέχουσα ενότητα θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην απλούστερη περίπτωση, σε αυτή δηλαδή όπου το χωρίο στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση είναι ένα ορθογώνιο.
Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε το ορθογώνιο χωρίο του επιπέδου

$$\mathscr{R} = [a,b] \times [c,d]$$

που απεικονίζεται στο Σχήμα 2 το οποίο αποτελείται από το σύνολο των σημείων (x,y) ώστε:

$$\mathscr{R} : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$$



Σχήμα 1.12

'Οπως και τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων της μίας μεταβλητής, έτσι και τα διπλά ολοκληρώματα ορίζονται μέσω μιας διαδικασίας τριών βημάτων που συνίσταται σε διαμέριση του χωρίου, άθροιση, κατάστρωση και υπολογισμό του ορίου. Στο Σχήμα 1.13 απεικονίζεται το πρώτο βήμα, αυτό της διαμέρισης του χωρίου, το οποίο με τη σειρά του υλοποιείται σε τρία διακριτά στάδια:

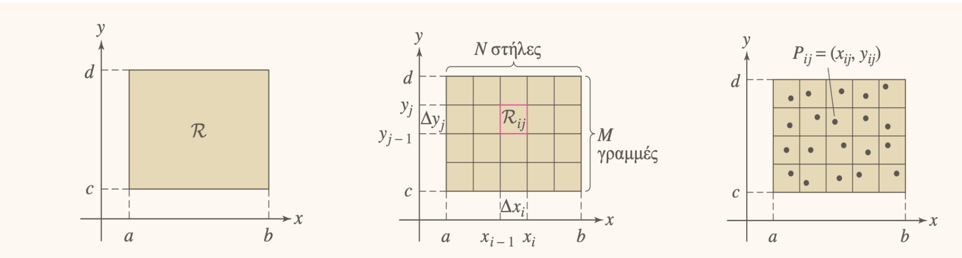
1. Διαίρεση των διαστημάτων $[a,b]$ και $[c,d]$ με επιλογή αντίστοιχων διαμερίσεων:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_M = d$$

   όπου N και M θετικοί ακέραιοι αριθμοί.

2. Δημιουργία ενός πλέγματος αποτελούμενου από $N \times M$ μικρότερα ορθογώνια υποχωρία R_{ij}.

3. Επιλογή ενός τυχαίου σημείου P_{ij} σε κάθε μικρότερο ορθογώνιο υποχωρίο R_{ij}.



(α) Ορθογώνιο χωρίο $\mathcal{R}_{ij}=[a,b]\times[c,d]$ (β) Δημιουργία πλέγματος $N \times M$ (γ) Τυχαία σημεία P_{ij}

Σχήμα 1.13

Παρατηρήστε ότι αφού για κάθε ορθογώνιο υποχωρίο ισχύει

$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

το R_{ij} έχει εμβαδόν

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$$

όπου

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ και } \Delta y_j = y_j - y_{j-1}.$$

Το επόμενο βήμα στον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος είναι η διαδικασία της άθροισης, κατά την οποία σχηματίζουμε το άθροισμα Riemann με τη βοήθεια των τιμών της συνάρτησης $f(P_{ij})$:

$$S_{N,M} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\,\Delta A_{ij} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\,\Delta x_i \Delta y_j.$$

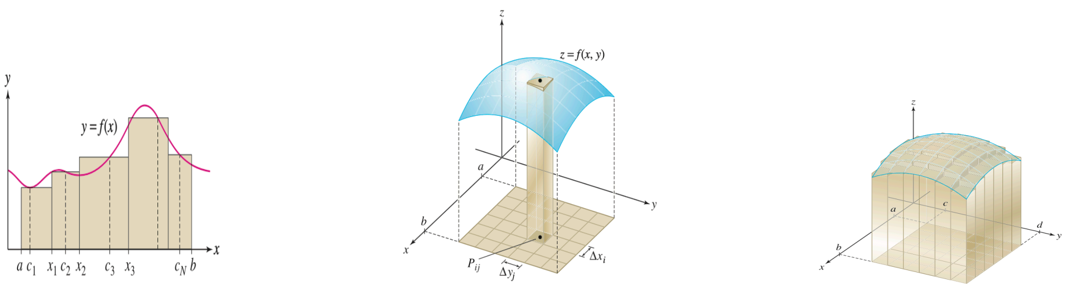
Σημείωση 1.4.1 Θα πρέπει να θυμάστε ότι το άθροισμα Riemann εξαρτάται από την επιλογή της διαμέρισης και από την επιλογή των σημείων P_{ij} σε κάθε υποχωρίο. Θα ήταν λοιπόν πιο σωστό να γράψουμε

$$S_{N,M}(\{P_{ij}\},\{x_i\},\{y_j\})$$

αλλά παρ' όλα αυτά επιλέγουμε να γράφουμε απλώς $S_{N,M}$ προκειμένου να έχουμε απλούστερο συμβολισμό.

Το προηγούμενο διπλό άθροισμα διατρέχει όλα τα ζεύγη i και j στις περιοχές τιμών $1 \le i \le N$ και $1 \le j \le M$ και αποτελείται συνολικά από NM όρους.
Η γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $S_{N,M}$ φαίνεται στο Σχήμα 1.14. Έστω ότι $f(x,y) \ge 0$ στο χωρίο R. Κάθε επιμέρους όρος του αθροίσματος, $f(P_{ij})\Delta A_{ij}$, είναι ίσος με τον όγκο ενός στενού κουτιού ύψους $f(P_{ij})$ που ορθώνεται πάνω από το μικρό υποχωρίο R_{ij}, δηλαδή:

$$f(P_{ij})\Delta A_{ij} = f(P_{ij})\Delta x_i \Delta y_j = \underbrace{\text{ύψος} \times \text{εμβαδόν}}_{\text{όγκος του κουτιού}}.$$



(a) *Στον Λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, ένα άθροισμα Riemann προσεγγίζει το εμβαδόν που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη μέσω του αθροίσματος των εμβαδών των ορθογωνίων περιοχών που σχηματίζονται στη διαμέριση του διαστήματος.*

(b) *Ο όγκος του ορθογώνιου κουτιού είναι $f(P_{ij})\Delta A_{ij}$, με $\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$.*

(c) *Το άθροισμα Riemann $S_{N,M}$ είναι το άθροισμα των όγκων των στενών ορθογωνίων κουτιών.*

Σχήμα 1.14

Το άθροισμα $S_{N,M}$ των επιμέρους όγκων αυτών των στενών ορθογώνιων κουτιών προσεγγίζει τον όγκο με τον ίδιο τρόπο που τα αθροίσματα Riemann, στην περίπτωση του Λογισμού των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, προσεγγίζουν το εμβαδόν μέσω των ορθογωνίων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.14a.

Στην περίπτωση που $f(P_{ij}) < 0$, ο όρος $f(P_{ij})\Delta A_{ij}$ παριστάνει τον προσημασμένο όγκο ενός στενού κουτιού που εκτείνεται κάτω από το επίπεδο xy. Γενικά, μπορούμε να σκεφτούμε το άθροισμα Riemann $S_{N,M}$ ως ένα άθροισμα προσημασμένων όγκων στενών ορθογώνιων κουτιών, κάποια εκ των οποίων υψώνονται πάνω από το επίπεδο xy και κάποια εκτείνονται κάτω από αυτό. Το τελευταίο βήμα στον ορισμό ενός διπλού ολοκληρώματος είναι η διαδικασία του ορίου. Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $\mathscr{P} = \{\{x_i\}, \{y_j\}\}$ για τη διαμέριση που έχουμε επιλέξει ενώ με $\|\mathscr{P}\|$ δηλώνονται το μέγιστο από τα πλάτη $\Delta x_i, \Delta y_j$. Ο ακόλουθος ορισμός κάνει πιο σαφή την έννοια των αθροισμάτων Riemann τα οποία συγκλίνουν σε ένα όριο, καθώς τα ορθογώνια υποχωρία της διαμέρισης γίνονται ολοένα και μικρότερα:

Ορισμός 1.4.2 Όριο των αθροισμάτων Riemann Το άθροισμα Riemann $S_{N,M}$ προσεγγίζει ένα όριο L καθώς $\|\mathscr{P}\| \to 0$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left|L - S_{N,M}\right| < \varepsilon$$

για όλες τις διαμερίσεις που ικανοποιούν τη συνθήκη $\|\mathscr{P}\| < \delta$ και για όλες τις επιλογές σημείων. Πιο συγκεκριμένα, γράφουμε

$$\lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} S_{N,M} = \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\,\Delta A_{ij} = L.$$

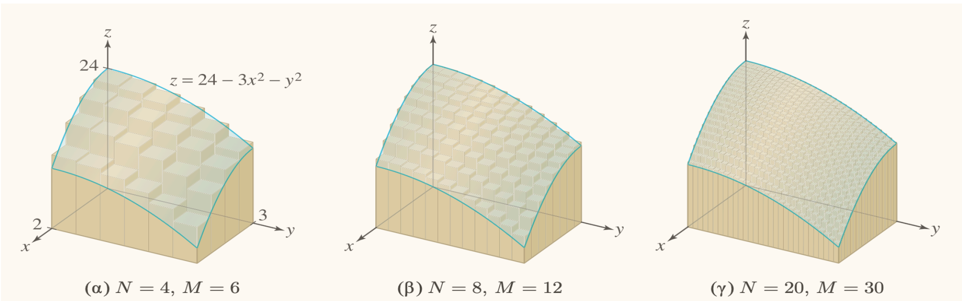
Για παράδειγμα, το Σχήμα 1.15 απεικονίζει πώς τα διαδοχικά αθροίσματα Riemann συγκλίνουν σταδιακά στον όγκο που περικλείεται κάτω από το γράφημα της συνάρτησης

$$z = 24 - 3x^2 - y^2$$

και πάνω από το χωρίο

$$\mathscr{R} = [0,2] \times [0,3],$$

επειδή όσο πιο στενά γίνονται τα ορθογώνια κουτιά τόσο καλύτερα καλύπτει το στερεό η διαμέρισή τους.



Σχήμα 1.15

Ορισμός 1.4.3 Διπλό ολοκλήρωμα σε ορθογώνιο χωρίο Το διπλό ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης $f(x,y)$ σε ένα ορθογώνιο χωρίο ορίζεται από το όριο

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,dA = \lim_{\|\mathscr{P}\|\to 0} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} f(P_{ij})\Delta A_{ij}.$$

Στην περίπτωση που το όριο αυτό υπάρχει, θα λέμε ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι *ολοκληρώ-*

σιμη στο χωρίο $\mathscr{R}$.

Θεώρημα 1.4.4 Οι συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες Αν μια συνάρτηση f δύο μεταβλητών είναι συνεχής σε ένα ορθογώνιο χωρίο R, τότε η $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο R.

Σημείωση 1.4.5 Το αντίστροφο του Θεωρήματος 1.4.4 δεν ισχύει απαραίτητα. Έτσι, υπάρχουν ολοκληρώσιμες συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς.

Θεώρημα 1.4.6 Γραμμικές ιδιότητες του διπλού ολοκληρώματος Έστω ότι οι συναρτήσεις $f(x,y)$ και $g(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμες σε ένα ορθογώνιο χωρίο R. Τότε:

1. $$\int_R \big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,dA = \int_R f(x,y)\,dA + \int_R g(x,y)\,dA$$

2. $$\int_R Cf(x,y)\,dA = C\int_R f(x,y)\,dA, \quad \text{για οποιαδήποτε σταθερά } C.$$

1.4.2 Διαδοχικά ολοκληρώματα

Το βασικό εργαλείο για τον υπολογισμό των διπλών ολοκληρωμάτων είναι η πρώτη πρόταση από το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού, όπως και στην περίπτωση των συναρτήσεων μίας μεταβλητής. Για να χρησιμοποιήσουμε την πρόταση αυτή θα εκφράσουμε το διπλό ολοκλήρωμα ως ένα **διαδοχικό (επαναληπτικό) ολοκλήρωμα** στη μορφή:

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

Τέτοια διαδοχικά ολοκληρώματα υπολογίζονται με μια διαδικασία δύο βημάτων.

Βήμα 1 Κρατάμε σταθερή τη μεταβλητή x και υπολογίζουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή y. Με τον τρόπο αυτόν προκύπτει μια συνάρτηση που εξαρτάται μόνο από τη μεταβλητή x, δηλαδή:

$$S(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

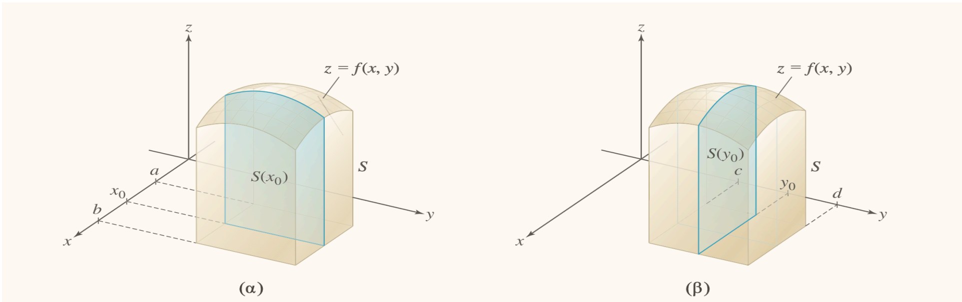
Βήμα 2 Ολοκληρώνουμε την προκύπτουσα συνάρτηση $S(x)$ ως προς τη μεταβλητή x.

Θεώρημα 1.4.7 Θεώρημα Fubini Έστω ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη (π.χ. συνεχής) πάνω σε ένα ορθογώνιο χωρίο

$$\mathscr{R} = [a,b]\times[c,d] \subset \mathbb{R}^2.$$

Τότε το διπλό ολοκλήρωμα της f πάνω στο $\mathscr{R}$ μπορεί να υπολογιστεί ως διαδοχικό ολοκλήρωμα με οποιαδήποτε σειρά ολοκλήρωσης:

$$\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,dA = \int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx\right)dy.$$



Σχήμα 1.16

Σημείωση 1.4.8 Εμβάθυνση στα σχήματα Έστω ότι $f(x,y) \geq 0$ σε ένα ορθογώνιο χωρίο R, επομένως το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης f πάνω στο R είναι ο όγκος του στερεού S που περιορίζεται μεταξύ του χωρίου R και του γραφήματος της συνάρτησης f (Σχήμα 1.16). Όταν γράφουμε το διπλό ολοκλήρωμα ως ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης να είναι αυτή που ορίζεται από το $dy\,dx$, τότε για κάθε σταθερή τιμή $x = x_0$ το εσωτερικό ολοκλήρωμα είναι το εμβαδόν της εγκάρσιας τομής του στερεού S στο κατακόρυφο επίπεδο $x = x_0$ κάθετα στον άξονα x, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.16(α). Επομένως,

$$S(x_0) = \int_c^d f(x_0,y)\,dy = \text{εμβαδόν της εγκάρσιας τομής στο κατακόρυφο επίπεδο } x = x_0 \text{ κάθετα στον άξονα } x$$

Το θεώρημα Fubini λέει ότι ο όγκος V του στερεού S μπορεί να υπολογιστεί ως το ολοκλήρωμα της συνάρτησης των εμβαδών των εγκάρσιων τομών $S(x)$, δηλαδή:

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b S(x)\,dx = \text{ολοκλήρωμα του εμβαδού των εγκάρσιων τομών.}$$

Παρομοίως, το διαδοχικό ολοκλήρωμα που υπολογίζεται με τη σειρά που ορίζεται από το $dx\,dy$ υπολογίζει τον όγκο V ως το ολοκλήρωμα της συνάρτησης των εγκάρσιων τομών που είναι κάθετες στον άξονα y, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.16(β).

Παράδειγμα 1.4.9
Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=0}^{3} \frac{dx\,dy}{\sqrt{3x+4y}}.$$

Παράδειγμα 1.4.10
Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης Επιβεβαιώστε ότι

$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=0}^{3}\frac{dx\,dy}{\sqrt{3x+4y}}=\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{4}\frac{dy\,dx}{\sqrt{3x+4y}}.$$

*Λύση.*Θα υπολογίσουμε αρχικά το εσωτερικό ολοκλήρωμα αντιμετωπίζοντας το y ως μια σταθερά. Αφού ολοκληρώσουμε ως προς τη μεταβλητή x, θα πρέπει να προσδιορίσουμε την αντιπαράγωγο της $\frac{1}{\sqrt{3x+4y}}$ ως συνάρτηση του x. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 3x+4y$, από την οποία προκύπτει ότι $du = 3\,dx$, βρίσκουμε:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4y}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+4y}+C$$

Επομένως, θα ισχύει

$$\int_{x=0}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3x+4y}}=\frac{2}{3}\sqrt{3x+4y}\Big|_{x=0}^{3}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{4y+9}-\sqrt{4y}\right)$$

Τελικά

$$\int_{y=0}^{4}\int_{x=0}^{3}\frac{dx\,dy}{\sqrt{3x+4y}}=\frac{2}{3}\int_{y=0}^{4}\left(\sqrt{4y+9}-2\sqrt{y}\right)dy=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}(4y+9)^{3/2}-\frac{4}{3}y^{3/2}\right)\Big|_{y=0}^{4}$$

$$=\frac{1}{9}(25^{3/2})-\frac{8}{9}(4^{3/2})-\frac{1}{9}(9^{3/2})=\frac{34}{9}$$

Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης

Έχοντας ήδη υπολογίσει το αριστερό διαδοχικό ολοκλήρωμα στο προηγούμενο παράδειγμα, όπου καταλήξαμε στην τιμή $\frac{34}{9}$, αρκεί να υπολογίσουμε το δεξιό ολοκλήρωμα και να επιβεβαιώσουμε ότι και αυτό δίνει την ίδια τιμή.

$$\int_{y=0}^{4}\frac{dy}{\sqrt{3x+4y}}=\frac{1}{2}\sqrt{3x+4y}\Big|_{y=0}^{4}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3x+16}-\sqrt{3x}\right)$$

$$\int_{x=0}^{3}\int_{y=0}^{4}\frac{dy\,dx}{\sqrt{3x+4y}}=\frac{1}{2}\int_{0}^{3}\left(\sqrt{3x+16}-\sqrt{3x}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}(3x+16)^{3/2}-\frac{2}{9}(3x)^{3/2}\right)\Big|_{x=0}^{3}$$

$$=\frac{1}{9}\left(25^{3/2}-9^{3/2}-16^{3/2}\right)=\frac{34}{9}$$

Ασκήσεις 1.4.11

1. Με ποια από τις απαντήσεις α) ή β) είναι ίση το διπλό ολοκλήρωμα

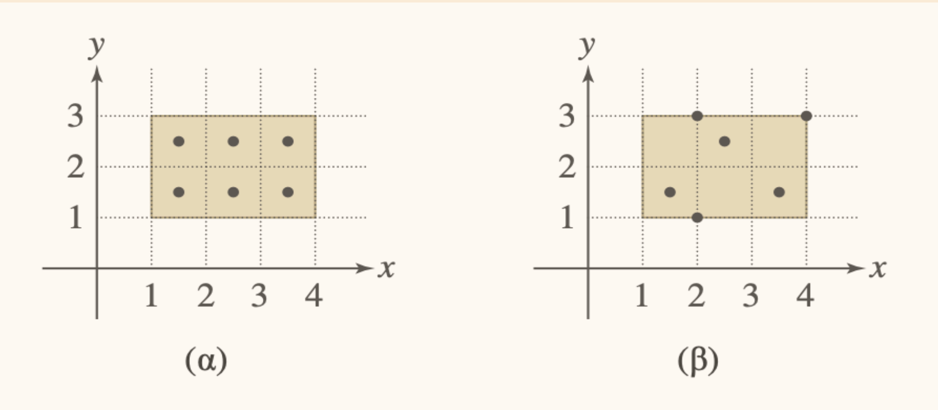
$$\int_1^2 \int_4^5 f(x,y)\,dy\,dx\,;$$

a) $\displaystyle\int_1^2 \int_4^5 f(x,y)\,dx\,dy$

b) $\displaystyle\int_4^5 \int_1^2 f(x,y)\,dx\,dy$

2. Υπολογίστε το άθροισμα Riemann για $N = M = 2$ ώστε να εκτιμήσετε το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $\sqrt{x+y}$ πάνω στο ορθογώνιο $\mathscr{R} = [0,1] \times [0,1]$. Χρησιμοποιήστε μια κανονική διαμέριση και επιλέξτε τα μέσα των ορθογώνιων υποχωρίων για το άθροισμα Riemann.

3. Στις συναρτήσεις (a) - (d) να υπολογίσετε τα αθροίσματα Riemann για το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_{\mathscr{R}} f(x,y)\,dA$, όπου $\mathscr{R} = [1,4] \times [1,3]$, για το πλέγμα και τις δύο επιλογές σημείων που φαίνονται στο Σχήμα 1.17.
   (a) $f(x,y) = 2x + y$
   (b) $f(x,y) = 7$
   (c) $f(x,y) = 4x$
   (d) $f(x,y) = x - 2y$



Σχήμα 1.17

Λύση.

$$\textit{Δίνεται:}\quad f(x,y) = \sqrt{x+y}, \quad \mathscr{R} = [0,1] \times [0,1], \quad N = M = 2.$$

$$\textit{Κανονική διαμέριση:}\quad \Delta x = \Delta y = \frac{1}{2}, \quad \Delta A = \Delta x \Delta y = \frac{1}{4}.$$

Σημεία μέσων: $(0.25, 0.25)$, $(0.75, 0.25)$, $(0.25, 0.75)$, $(0.75, 0.75)$.
Υπολογισμοί:

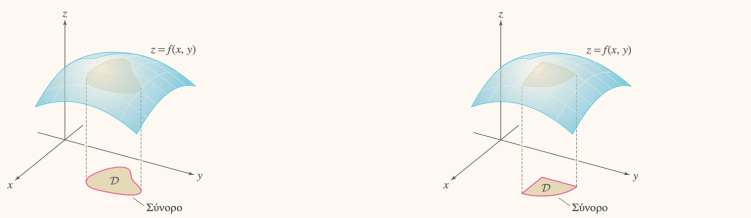
$$
\begin{aligned}
f(0.25, 0.25) &= \sqrt{0.5} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
f(0.75, 0.25) &= \sqrt{1} = 1, \\
f(0.25, 0.75) &= \sqrt{1} = 1, \\
f(0.75, 0.75) &= \sqrt{1.5} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Άρα, το άθροισμα Riemann (με σημεία μέσων) είναι:

$$S = \Delta A \sum f(x_i^*, y_j^*) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \approx 0.983.$$

1.5 Διπλά ολοκληρώματα σε γενικότερα χωρία

Στην προηγούμενη ενότητα περιορίσαμε την προσοχή μας σε ολοκληρώματα πάνω σε ορθογώνια χωρία. Στη γενικότερη περίπτωση τα χωρία ολοκλήρωσης D έχουν ως σύνορα απλές, κλειστές καμπύλες (μια καμπύλη είναι απλή εφόσον δεν τέμνει τον εαυτό της και ορίζεται ως κλειστή αν η αρχή και το πέρας της συμπίπτουν). Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι το σύνορο του χωρίου $\mathscr{D}$ είναι λείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.18(α), ή αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος λείων καμπυλών οι οποίες ενώνονται με γωνίες, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.18(β). Μια συνοριακή καμπύλη αυτού του τύπου είναι γνωστή ως *κατά τμήματα λεία καμπύλη*. Θα υποθέσουμε, τέλος, ότι το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι κλειστό, γεγονός που σημαίνει ότι περιλαμβάνει και το σύνορό του.



(α) Η συνοριακή καμπύλη του χωρίου $\mathcal{D}$ είναι λεία

(β) Το χωρίο $\mathcal{D}$ έχει μια κατά τμήματα λεία συνοριακή καμπύλη, αποτελούμενη από τρεις λείες καμπύλες που ενώνονται στις γωνίες

Σχήμα 1.18

Με βάση το θεμελιώδες θεώρημα του Λογισμού σε συναρτήσεις με μία μεταβλητή, έχουμε ότι αν

$$\frac{dF}{dx} = f(x)$$

τότε

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq x \leq b$. Ομοίως, με βάση την επέκταση του θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού στην περίπτωση των συναρτήσεων με δύο μεταβλητές, έχουμε το παρακάτω θεώτημα:

Θεώρημα 1.5.2 Έστω $\mathscr{R} = [a,b]\times[c,d]$ και $F \in C^2(R)$ με

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = f(x,y).$$

Τότε

$$\int_{\mathscr{R}} f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c).$$

*Λύση.*Έχουμε

$$\int_b^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy\Big)dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\Big)\,dx.$$

Αφού $F \in C^2(R)$, επιτρέπεται η αντιμετάθεση παραγώγισης και ολοκλήρωσης (Leibniz):

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\Big)\,dx = \frac{d}{dy}\int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx.$$

Με το Θ. Θεμελιώδες του Λογισμού (ως προς x):

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx = F(b,y) - F(a,y).$$

Τώρα ολοκληρώνουμε ως προς y στο $[c,d]$ και εφαρμόζουμε ξανά το Θ. Θεμελιώδες:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d \frac{d}{dy}\big(F(b,y) - F(a,y)\big)\,dy = \big[F(b,y) - F(a,y)\big]_{y=c}^{y=d}.$$

Δηλαδή

$$\int_b^a \int_d^c f(x,y)\,dydx = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c),$$

όπως θέλαμε. □

Παράδειγμα 1.5.3
Προσδιορίστε μία συνάρτηση $F(x,y)$ που να ικανοποιεί

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 6x^2 y,$$

και στη συνέχεια χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της επέκτασης του θεμελιώδους θεωρήματος του Λογισμού, στην περίπτωση των συναρτήσεων με δύο μεταβλητές, για να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathscr{R}} 6x^2 y\,dA, \qquad \mathscr{R} = [0,1]\times[0,4].$$

(i) Εξηγήστε ποια αντιπαραγώγιση της συνάρτησης $y\sqrt{1+xy}$ είναι ευκολότερη: ως προς x ή ως προς y;
(ii) Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathscr{R}} y\sqrt{1+xy}\,dA, \qquad \text{με } \mathscr{R} = [0,1]\times[0,1].$$

Λύση.
Μέρος Α. Ζητείται $F(x,y)$ με

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = 6x^2y.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς x:

$$F_y = \int 6x^2y\,dx = 2x^3y + g(y).$$

Ολοκληρώνουμε ως προς y:

$$F(x,y) = x^3y^2 + G(y) + h(x).$$

Μία απλή επιλογή είναι

$$F(x,y) = x^3y^2,$$

η οποία δίνει $F_{xy} = 6x^2y$.
Για $R = [0,1]\times[0,4]$ ισχύει το θεώρημα:

$$\iint_R 6x^2y\,dA = F(1,4) - F(0,4) - F(1,0) + F(0,0) = 16.$$

Μέρος Β. Συνάρτηση $y\sqrt{1+xy}$.
(i) Ποια αντιπαραγώγιση είναι ευκολότερη; Ως προς x: με $u = 1+xy$, $du = y\,dx$,

$$\int y\sqrt{1+xy}\,dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{2}{3}(1+xy)^{3/2} + C.$$

Ως προς y προκύπτει αλλαγή μεταβλητής $u = 1+xy$ με παράγοντα $\dfrac{1}{x^2}$ και αλγεβρικά πιο βαριές δυνάμεις. *Άρα ευκολότερη είναι η αντιπαραγώγιση ως προς x.*
(ii) Υπολογισμός $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} y\sqrt{1+xy}\,dA$.
Πρώτα ως προς x:

$$\int_0^1 y\sqrt{1+xy}\,dx = \Big[\frac{2}{3}(1+xy)^{3/2}\Big]_{x=0}^{1} = \frac{2}{3}\big((1+y)^{3/2} - 1\big).$$

Έπειτα ως προς y:

$$\int_0^1 \frac{2}{3}\big((1+y)^{3/2} - 1\big)\,dy = \frac{2}{3}\Big[\frac{2}{5}(1+y)^{5/2}\Big]_0^1 - \Big[y\Big]_0^1 = \frac{4}{15}\big(2^{5/2} - 1\big) - 1 = \frac{16}{15}\sqrt{2} - \frac{19}{15}.$$

Άρα

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} y\sqrt{1+xy}\,dA = \frac{16}{15}\sqrt{2}-\frac{19}{15}.$$

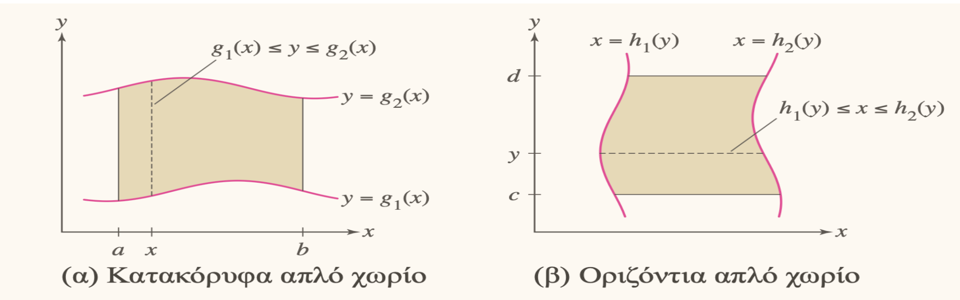
1.5.1 Ολοκλήρωση σε χωρία που περιορίζονται μεταξύ δύο γραφημάτων

Όταν το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι η περιοχή που βρίσκεται μεταξύ δύο γραφημάτων στο επίπεδο xy, μπορούμε να υπολογίσουμε ένα διπλό ολοκλήρωμα πάνω στο $\mathscr{D}$ με την τεχνική της διαδοχικής ολοκλήρωσης. Θυμηθείτε, από την προηγούμενυ ενότητα, ότι το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι κατακόρυφα απλό αν καλύπτει την περιοχή που βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων δύο συνεχών συναρτήσεων $y=g_1(x)$ και $y=g_2(x)$ για ένα δεδομένο διάστημα τιμών της μεταβλητής x, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.19a, δηλαδή:

$$\mathscr{D}=\{(x,y): a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\}.$$

Παρομοίως, θα λέμε ότι το χωρίο είναι *οριζόντια απλό* (βλ. Σχήμα 1.19b) αν

$$\mathscr{D}=\{(x,y): c\le y\le d,\ h_1(y)\le x\le h_2(y)\}.$$



Σχήμα 1.19

Θεώρημα 1.5.4 Αν το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι κατακόρυφα απλό και περιγράφεται ως

$$a\le x\le b,\qquad g_1(x)\le y\le g_2(x),$$

τότε

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dA \;=\; \int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Αν το $\mathscr{D}$ είναι οριζόντια απλό χωρίο και περιγράφεται ως

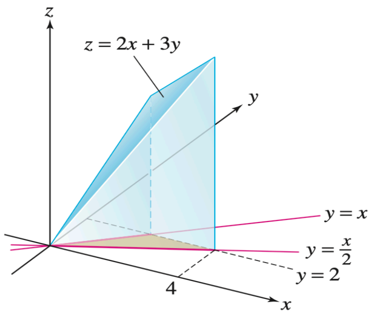
$$c\le y\le d,\qquad h_1(y)\le x\le h_2(y),$$

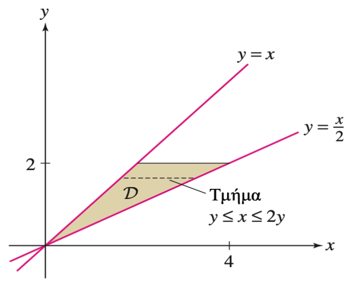
τότε

$$\iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\,dA \;=\; \int_c^d\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Παράδειγμα 1.5.5

Υπολογισμός όγκου με ολοκλήρωμα Υπολογίστε τον όγκο V του στερεού που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $z = 2x + 3y$ και πάνω από το τρίγωνο $\mathscr{D}$ του επιπέδου xy που φαίνεται στο Σχήμα 1.20a.





Σχήμα 1.20

Από το Σχήμα 1.20b διαπιστώνουμε ότι το χωρίο $\mathscr{D}$ είναι μία οριζόντια απλή περιοχή που περιγράφεται ως

$$\mathscr{D} : 0 \leq y \leq 2, \qquad y \leq x \leq 2y.$$

Ο ζητούμενος όγκος είναι ίσος με το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = 2x + 3y$ πάνω στο χωρίο D, δηλαδή:

$$V = \iint_{\mathscr{D}} f(x,y)\, dA = \int_0^2 \int_{x=y}^{2y} (2x+3y)\, dx\, dy.$$

Υπολογίζουμε:

$$V = \int_0^2 \left[x^2 + 3yx\right]_{x=y}^{2y} dy = \int_0^2 \left((4y^2 + 6y^2) - (y^2 + 3y^2)\right) dy.$$

$$V = \int_0^2 (6y^2)\, dy = 6 \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^2 = 2 \cdot 8 = 16.$$

Παράδειγμα 1.5.6

Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης Σχεδιάστε το χωρίο $\mathscr{D}$ στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση

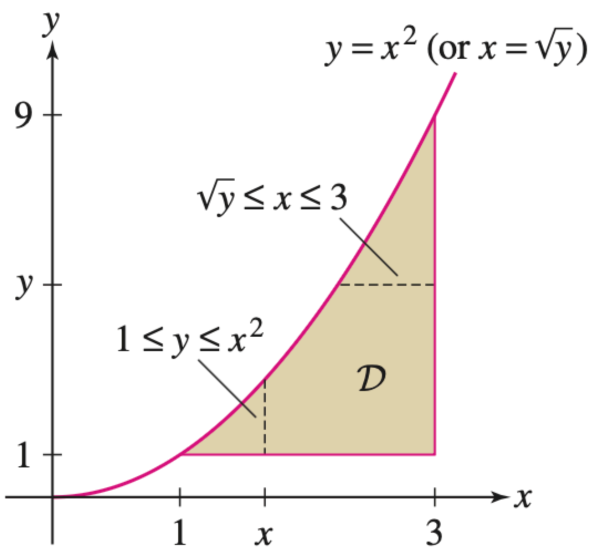
$$\int_1^9 \int_{\sqrt{y}}^3 xe^y\, dx\, dy$$

και στη συνέχεια αλλάξτε τη σειρά της ολοκλήρωσης ώστε να υπολογίσετε το ζητούμενο ολοκλήρωμα.

Η περιοχή αυτή φαίνεται στο Σχήμα 1.21, από το οποίο διαπιστώνουμε ότι το $\mathscr{D}$ μπορεί επίσης να περιγραφεί και ως ένα κατακόρυφα απλό χωρίο, δηλαδή:

$$1 \leq x \leq 3, \qquad 1 \leq y \leq x^2.$$

Επομένως, μπορούμε να εκφράσουμε το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε ως εξής:



Σχήμα 1.21

$$\int_1^9 \int_{\sqrt{y}}^3 xe^y\,dx\,dy = \int_1^3 \int_1^{x^2} xe^y\,dy\,dx = \int_1^3 \left(\int_{y=1}^{x^2} xe^y\,dy \right) dx.$$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα:

$$\int_1^{x^2} xe^y\,dy = x\,[e^y]_{y=1}^{y=x^2} = x\big(e^{x^2} - e\big).$$

Άρα

$$\int_1^3 \left(xe^{x^2} - ex\right) dx = \left[\tfrac{1}{2}e^{x^2} - \tfrac{1}{2}ex^2\right]_1^3.$$

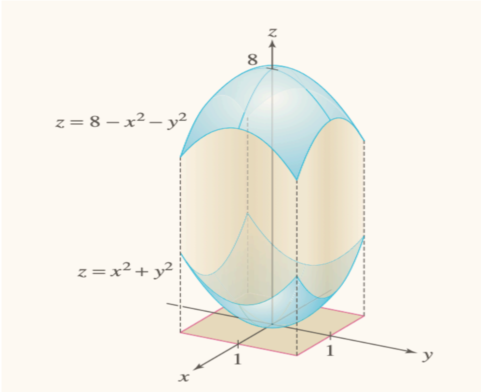
Τελικό αποτέλεσμα:

$$\frac{1}{2}\left(e^9 - 9e - (e - e)\right) = \frac{1}{2}\left(e^9 - 9e\right).$$

Παράδειγμα 1.5.7
Όγκος που περικλείεται μεταξύ δύο επιφανειών Υπολογίστε τον όγκο V του στερεού που

βρίσκεται πάνω από το παραβολοειδές που περιγράφεται από την εξίσωση $z = 8 - x^2 - y^2$ και κάτω από το παραβολοειδές με εξίσωση $z = x^2 + y^2$ στο χωρίο $D = \{(x, y) : -1 \le x \le 1,\ -1 \le y \le 1\}$.

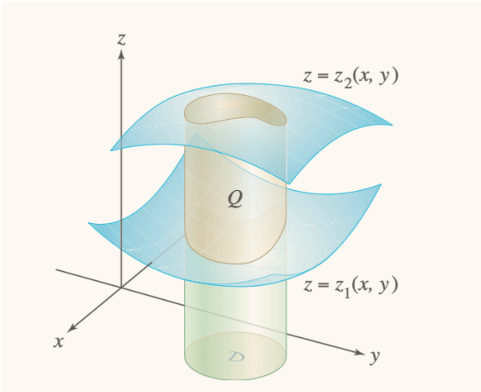
Το στερεό του οποίου ζητείται ο όγκος φαίνεται στο Σχήμα 1.22 και προκύπτει από την περιοχή που βρίσκεται μεταξύ του παραβολοειδούς $z = 8 - x^2 - y^2$ και του χωρίου D αν αφαιρέσουμε τον όγκο που βρίσκεται μεταξύ του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ και του χωρίου D. Επομένως, ο ζητούμενος όγκος υπολογίζεται από τη διαφορά των αντίστοιχων όγκων ως εξής:



Σχήμα 1.22 *Προσδιορισμός του όγκου ενός στερεού που βρίσκεται μεταξύ δύο παραβολοειδών πάνω από ένα τετράγωνο χωρίο*

Γενικεύοντας την ιδέα του προηγούμενου παραδείγματος, μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός στερεού Q που περικλείεται μεταξύ δύο επιφανειών και ορίζεται πάνω σε ένα χωρίο D του επιπέδου xy, όπως φαίνεται στο Σχήμα 14. Οι επιφάνειες είναι ουσιαστικά τα γραφήματα των συναρτήσεων $z_1(x,y)$ και $z_2(x,y)$, με $z_1(x,y) \leq z_2(x,y)$ στο D και ο όγκος υπολογίζεται ως

$$V = \iint_D z_2(x,y)\,dA - \iint_D z_1(x,y)\,dA = \iint_D (z_2(x,y) - z_1(x,y))\,dA$$



Σχήμα 1.23 *Προσδιορισμός του όγκου ενός στερεού $\mathscr{Q}$ το οποίο περικλείεται μεταξύ δύο επιφανειών πάνω από ένα χωρίο $\mathscr{D}$*

Η δεύτερη ισότητα δικαιολογείται από την ιδιότητα της γραμμικότητας του ολοκληρώματος.

Ασκήσεις 1.5.8

1. Ποιες από τις ακόλουθες εκφράσεις δεν έχουν νόημα;

   a) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^x f(x,y)\,dy\,dx$

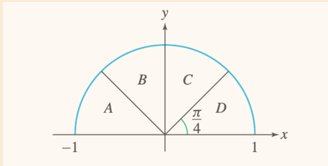
   b) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^y f(x,y)\,dy\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^y f(x,y)\,dy\,dx$

   d) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 f(x,y)\,dy\,dx$

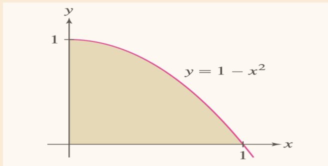
2. Βρείτε ποια από τις τέσσερις περιοχές του Σχήματος 1.24 είναι το χωρίο στο οποίο λαμβάνει χώρα η διπλή ολοκλήρωση

$$\int_{-\sqrt{2}/2}^{0}\int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx.$$



Σχήμα 1.24

3. Εκφράστε το χωρίο $\mathscr{D}$ του Σχήματος 1.25 ως μια κατακόρυφα και οριζόντια απλή περιοχή και εκτιμήστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = xy$ πάνω στο $\mathscr{D}$ ως διαδοχικό ολοκλήρωμα με δύο τρόπους.



Σχήμα 1.25

4. Να σχεδιάσετε το χωρίο

$$\mathscr{D} : 0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le 4 - x^2$$

και υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathscr{D}} y\,dA$$

εκφράζοντάς το στη μορφή ενός διαδοχικού ολοκληρώματος.

5. (α) Εξηγήστε ποια αντιπαραγώγιση της συνάρτησης xe^{xy} είναι ευκολότερη: ως προς x ή ως προς y;

(β) Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathscr{R}} xe^{xy}\,dA$$

με $\mathscr{R} = [0,1] \times [0,1]$.

6. Στις επόμενες συναρτήσεις να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα πάνω στο χωρία που δίνονται.

(a) $f(x,y) = x^3 y, \quad 0 \le x \le 5, \quad x \le y \le 2x + 3.$

(b) $f(x,y) = -2, \quad 0 \le x \le 3, \quad 1 \le y \le e^x.$

(c) $f(x,y) = x, \quad 0 \le x \le 1, \quad 1 \le y \le e^{x^2}.$

(d) $f(x,y) = \cos(2x + y), \quad \frac{1}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad 1 \le y \le 2x.$

(e) $f(x,y) = 6xy - x^2$, στο χωρίο που φράσσεται από κάτω από την $y = x^2$ και από πάνω από την $y = \sqrt{x}$.

(f) $f(x,y) = \sin x$, στο χωρίο που περικλείεται από τα γραφήματα των $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \cos x$.

(g) $f(x,y) = e^{x+y}$, στο χωρίο που περικλείεται από τα γραφήματα των $y = x - 1$ και $y = 12 - x$ για $2 \leq y \leq 4$.

(h) $f(x,y) = (x+y)^{-1}$, στο χωρίο που περικλείεται από τα γραφήματα των $y = x$, $y = 1$, $y = e$ και $x = 0$.

7. Υπολογίστε τον όγκο της περιοχής που περικλείεται από τις επιφάνειες

$$z = 16 - y, \quad z = y, \quad y = x^2 \text{ και } y = 8 - x^2.$$

8. Υπολογίστε τον όγκο της περιοχής που περικλείεται από τις επιφάνειες

$$y = 1 - x^2, \quad z = 1, \quad y = 0 \text{ και } z + y = 2.$$

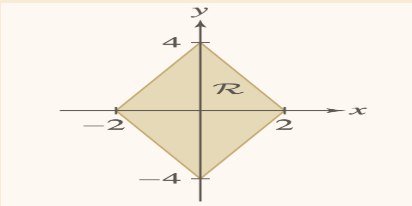
9. Να γράψετε, χωρίς να υπολογίσετε, το διπλό ολοκλήρωμα με το οποίο υπολογίζεται ο όγκος της περιοχής που περικλείεται από τα παραβολοειδή

$$z = x^2 + y^2 \quad \text{και} \quad z = 8 - x^2 - y^2.$$

10. Υπολογίστε τον όγκο της περιοχής που περικλείεται από τις επιφάνειες

$$z = 2 - y^2, \quad z = y, \quad x = 0, \quad y = 0 \text{ και } x + y = 1.$$

11. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = y^2$ πάνω στον ρόμβο $\mathscr{R}$ του Σχήματος 1.26.



Σχήμα 1.26 $|x| + \frac{1}{2}|y| \leq 1$

12. Ολοκληρώστε τη συνάρτηση $f(x,y) = x$ πάνω στην περιοχή που περικλείεται από τις $y = x$, $y = 4x - x^2$ και $y = 0$ με δύο τρόπους: εκφράζοντας το χωρίο ως κατακόρυφα απλή περιοχή και ως οριζόντια απλή περιοχή.

13. Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα των παρακάτω συναρτήσεων πάνω στο χωρίο $\mathscr{D}$ που δημιουργείται από τους περιορισμούς των x και y.

a. $f(x,y) = x^3 y, \quad 0 \leq x \leq 5, \quad x \leq y \leq 2x + 3.$

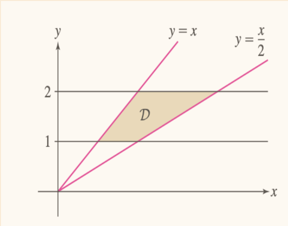
a. $f(x,y) = -2, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 1 \leq y \leq e^x.$

c. $f(x,y) = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq e^{x^2}.$

d. $f(x,y) = \cos(2x + y), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq y \leq 2x.$

e. $f(x,y) = 6xy - x^2$, στο χωρίο που φράσσεται από κάτω από την $y = x^2$ και από πάνω από την $y = \sqrt{x}$.

14. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x,y) = \dfrac{\sin y}{y}$ στο χωρίο D που απεικονίζεται στο Σχήμα 1.27.



Σχήμα 1.27

15. Να υπολογίσετε το διπλό ολοκλήρωμα των παρακάτω συναρτήσεων πάνω στο χωρίο $\mathscr{D}$ που δημιουργείται από τους περιορισμούς των x και y.

a. $f(x,y) = x^3 y, \quad 0 \leq x \leq 5, \quad x \leq y \leq 2x+3.$

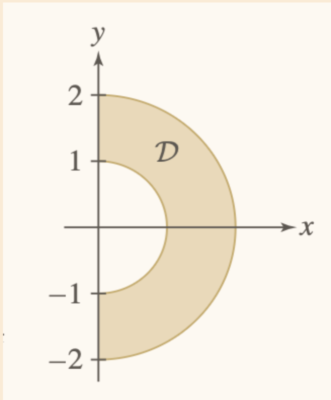
a. $f(x,y) = -2, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 1 \leq y \leq e^x.$

c. $f(x,y) = x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq e^{x^2}.$

d. $f(x,y) = \cos(2x+y), \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq y \leq 2x.$

e. $f(x,y) = 6xy - x^2$, στο χωρίο που φράσσεται από κάτω από την $y = x^2$ και από πάνω από την $y = \sqrt{x}$.

16. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_D x\,dA$ πάνω στο χωρίο D του Σχήματος 1.28.



Σχήμα 1.28

Λύση.

3. *Κατακόρυφη απλή περιοχή (ως y-προς-x):*

$$\mathscr{D} = \{(x,y) :\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Οριζόντια απλή περιοχή (ως x-προς-y):

$$\mathscr{D} = \{(x,y) :\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq x \leq \sqrt{1-y}\}.$$

Ολοκλήρωση δύο τρόπων για $f(x,y) = xy$*:*

(α) *Κατακόρυφη διάταξη*

$$\iint_{\mathscr{D}} xy\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} xy\,dy\,dx = \int_0^1 x\,\frac{(1-x^2)^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 2x^3 + x^5\right)dx = \frac{1}{12}.$$

(β) *Οριζόντια διάταξη*

$$\iint_{\mathscr{D}} xy\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y}} xy\,dx\,dy = \int_0^1 y\,\frac{1-y}{2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (y-y^2)\,dy = \frac{1}{12}.$$

4. Δίνεται το χωρίο

$$\mathscr{D} = \{(x,y):\ 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le 4-x^2\}.$$

Ως διαδοχικό ολοκλήρωμα (κατακόρυφη απλή περιοχή):

$$\iint_{\mathscr{D}} y\,dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{4-x^2} y\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=x^2}^{4-x^2} dx = \int_0^1 \left(8-4x^2\right)dx$$

$$= \left[8x - \tfrac{4}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{20}{3}.$$

Εναλλακτικά (οριζόντια απλή περιοχή): το $\mathscr{D}$ γράφεται ως ένωση τριών ζωνών

$$\begin{aligned} 0 \le y \le 1 &: \ 0 \le x \le \sqrt{y}, \\ 1 \le y \le 3 &: \ 0 \le x \le 1, \\ 3 \le y \le 4 &: \ 0 \le x \le \sqrt{4-y}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\iint_{\mathscr{D}} y\,dA = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} y\,dx\,dy + \int_1^3 \int_0^1 y\,dx\,dy + \int_3^4 \int_0^{\sqrt{4-y}} y\,dx\,dy = \frac{20}{3}.$$

5. *(α)* Η *αντιπαραγώγιση ως προς* y είναι ευκολότερη, γιατί

$$\frac{\partial}{\partial y} e^{xy} = xe^{xy}$$

οπότε $\int xe^{xy}\,dy = e^{xy} + C$. Αντίθετα, ως προς x απαιτεί ολοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int xe^{xy}\,dx = \frac{1}{y^2}(xy-1)e^{xy} + C.$$

(β) Με $\mathscr{R} = [0,1]\times[0,1]$,

$$\iint_{\mathscr{R}} xe^{xy}\,dA = \int_0^1 \int_0^1 xe^{xy}\,dy\,dx = \int_0^1 \left[e^{xy}\right]_{y=0}^1 dx = \int_0^1 \left(e^x - 1\right)dx = \left[e^x - x\right]_0^1 = e-2.$$

6.(c)

$$\text{Περιοχή: } 0 \le x \le 1, \quad 1 \le y \le e^{x^2}, \qquad f(x,y) = x.$$

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,dA = \int_0^1 \int_1^{e^{x^2}} x\,dy\,dx = \int_0^1 x\,(e^{x^2} - 1)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{e-2}{2}.$$

(Έλεγχος με αλλαγή σειράς): Για $1 \le y \le e$ έχουμε $\sqrt{\ln y} \le x \le 1$, άρα

$$\iint_{\mathscr{D}} x\,dA = \int_1^e \int_{\sqrt{\ln y}}^1 x\,dx\,dy = \int_1^e \tfrac{1}{2}\,(1 - \ln y)\,dy = \frac{e-2}{2}.$$

16.

Το χωρίο D είναι ο δεξιός ημιδακτύλιος της στεφάνης $1 \le r \le 2$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

$$\iint_D x\,dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^2 (r\cos\theta)\,r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int_1^2 r^2\,dr = \Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2.$$

$$= (2)\left(\frac{8-1}{3}\right) = \frac{14}{3}.$$