ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

"Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ'αυτό μένειν"
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Το παρόν ηλεκτρονικό υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών, ως υποστηρικτικό εγχειρίδιο για τα φροντιστηριακά μαθήματα του προγράμματος τους. Το υλικό δεν προορίζεται για εμπορική χρήση ή διάθεση εκτός του επισήμου περιβάλλοντος διδασκαλίας του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Παρόλη την προσεκτική επιμέλεια και συνεχή προσπάθεια ενημέρωσης και βελτίωσης, ενδέχεται να περιέχει λάθη ή παραλείψεις, καθώς βρίσκεται σε αρχικό στάδιο ανάπτυξης. Η συνεργασία και τα σχόλια των φοιτητών στο πλαίσιο της κοινής μας προσπάθειας εκτιμώνται ιδιαίτερα και συμβάλλουν στην καλύτερη ποιότητα και πληρότητα του υλικού.

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

I

Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά

1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

Ασκήσεις 1.0.1 .
Η σημασία των υποθέσεων

Η παρούσα άσκηση είναι σχεδιασμένη για να τονίσει τη σημασία και την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος Clairaut. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Επιβεβαιώστε ότι για $(x,y) \neq (0,0)$ ισχύει:

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

b) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της μερικής παραγώγου με το όριο για να αποδείξετε ότι

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

και επιπλέον ότι οι μερικές παράγωγοι $f_{yx}(0,0)$ και $f_{xy}(0,0)$ υπάρχουν και οι δύο αλλά δεν είναι ίσες.

c) Δείξτε ότι για $(x,y) \neq (0,0)$ ισχύει:

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

Δείξτε ότι η f_{xy} δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. *Υπόδειξη:* Δείξτε ότι ισχύει

$$\lim_{h\to 0} f_{xy}(h,0) \neq \lim_{k\to 0} f_{xy}(0,k).$$

d) Εξηγήστε τον λόγο για τον οποίο το αποτέλεσμα του ερωτήματος (b) δεν αντιφάσκει με το θεώρημα του Clairaut.

→ Μετάβαση στη Λύση της Άσκησης 1.3.9

Λύση.

(a) Για $(x,y)\neq(0,0)$ γράφουμε $f(x,y) = xy\,(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-1}$. Παραγωγίζοντας και εφαρμόζοντας τον κανόνα ilorίθμου/αλυσίδας,

$$f_x(x,y) = y(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-1} + xy\,(2x)(x^2+y^2)^{-1} - xy(x^2-y^2)\,(2x)\,(x^2+y^2)^{-2}$$

$$= \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = x(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-1} + xy\,(-2y)(x^2+y^2)^{-1} - xy(x^2-y^2)\,(2y)\,(x^2+y^2)^{-2}$$

$$= \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

(b) Με τον ορισμό:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0, \qquad f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0,$$

αφού $f(h,0) = f(0,k) = 0$ για $h\neq 0, k\neq 0$.
Για τις μικτές στο $(0,0)$ χρησιμοποιούμε τα f_x, f_y του (α):

$$f_x(0,y) = \frac{y(0+0-y^4)}{(y^2)^2} = -y \quad (y\neq 0), \qquad f_x(0,0) = 0,$$

άρα

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k} = -1.$$

Ομοίως,

$$f_y(x,0) = \frac{x(x^4-0-0)}{(x^2)^2} = x \quad (x\neq 0), \qquad f_y(0,0) = 0,$$

οπότε

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1.$$

Άρα $f_{yx}(0,0) = 1 \neq -1 = f_{xy}(0,0)$, ενώ και οι δύο υπάρχουν.

(c) Για $(x,y) \neq (0,0)$ παραγωγίζουμε ξανά (ή ισοδύναμα παραγωγίζουμε τις εκφράσεις του (α)) και βρίσκουμε

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

Για τη συνέχεια στο $(0,0)$, εξετάζουμε όρια κατά μήκος των αξόνων:

$$\lim_{h\to 0} f_{xy}(h,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^6}{(h^2)^3} = 1, \qquad \lim_{k\to 0} f_{xy}(0,k) = \lim_{k\to 0} \frac{-k^6}{(k^2)^3} = -1.$$

Τα όρια διαφέρουν $\Rightarrow$ το f_{xy} (και αντίστοιχα το f_{yx}) *δεν* είναι συνεχές στο $(0,0)$.

(d) Το θεώρημα του Clairaut (ή Young) απαιτεί, εκτός από την ύπαρξη των f_{xy}, f_{yx}, και *συνέχεια* κάποιας μικτής παραγώγου σε γειτονιά του σημείου ώστε να συμπέσουν στο σημείο. Στην παρούσα άσκηση, από το (γ) είδαμε ότι το f_{xy} δεν είναι συνεχές στο $(0,0)$, άρα οι υποθέσεις του θεωρήματος *δεν* ισχύουν· επομένως δεν υπάρχει αντίφαση με το (β) όπου $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

← Επιστροφή στην Άσκηση 1.3.9

1.1 Διαφορισιμότητα, εφαπτόμενα επίπεδα και γραμμική προσέγγιση

Στην παρούσα ενότητα θα διερευνήσουμε τη σημαντική έννοια της διαφορισιμότητας για συναρτήσεις με περισσότερες από μία μεταβλητές, σε συνδυασμό με τις σχετιζόμενες ιδέες του εφαπτόμενου επιπέδου και της γραμμικής προσέγγισης. Στον Λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, μια συνάρτηση f είναι *παραγωγίσιμη* αν υπάρχει η παράγωγός της. Δηλαδή, αν υπάρχει η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης σε ένα σημείο a και συμβολίζεται ως $f'(a)$ ή $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$. Ενώ μία συνάρτηση είναι διαφορίσιμη αν μπορεί να περιγραφεί τοπικά από μια γραμμική συνάρτηση, δηλαδή η συνάρτηση συμπεριφέρεται "σαν ευθεία" όταν τη μελετούμε σε μικροσκοπική κλίμακα γύρω από ένα σημείο. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της y για τιμές του x κοντά στο a μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο $(a, f(a))$. Με μαθηματικούς όρους η παραπάνω ιδέα εκφράζεται ως:

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon \Delta x, \text{όπου } \varepsilon \to 0 \text{ καθώς } \Delta x \to 0.$$

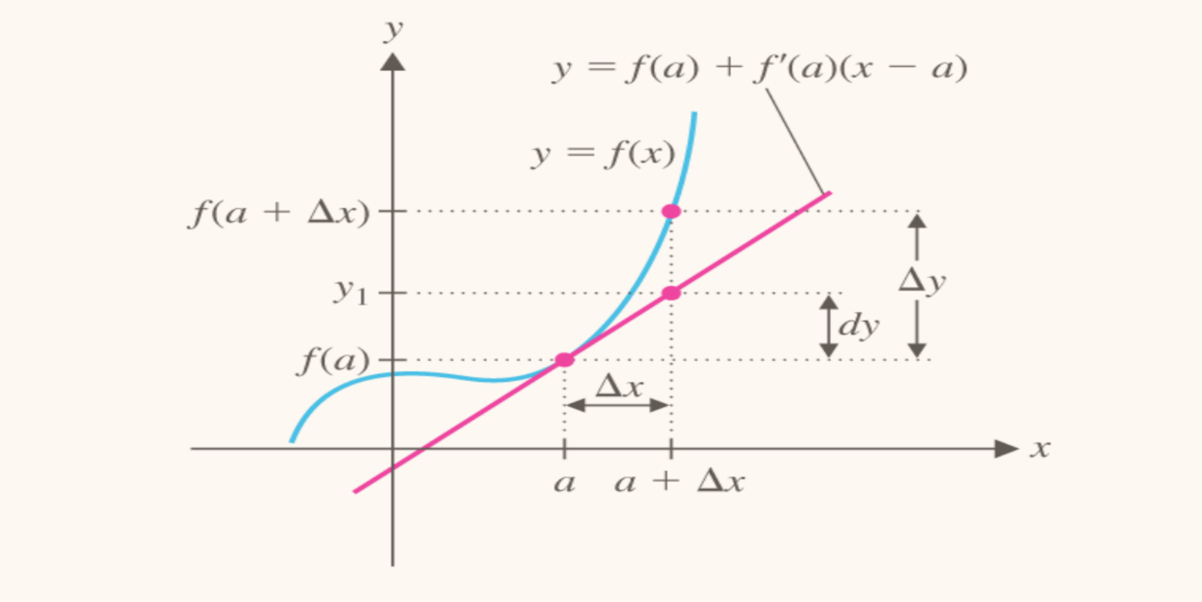
Αυτός ο τύπος οδηγεί στη έννοια του διαφορικού που εκφράζεται ως εξής:

Ορισμός 1.1.1 . Έστω $y = f(x)$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση στο x και $\Delta x = h \neq 0$ μια οποιαδήποτε μεταβολή του x. Τότε σαν *διαφορικό* της f στο x ορίζεται το γινόμενο

$$f'(x) \cdot h = f'(x) \cdot \Delta x,$$

το οποίο συμβολίζεται με $df(x)$ ή dy, δηλαδή

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot h = f'(x) \cdot \Delta x$$



Σχήμα 1.1: *Η γραμμική προσέγγιση του Δx δίνεται από το διαφορικό dx.*

Από τον ορισμό της παραγώγου στη μία μεταβλητή προκύπτει ότι αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο a, τότε

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(a)\Delta x + \varepsilon \Delta x}{\Delta x} = f'(a) + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = f'(a),$$

και συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη.

Αντίστροφα, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a, τότε θα έχουμε

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a).$$

Συνεπώς,

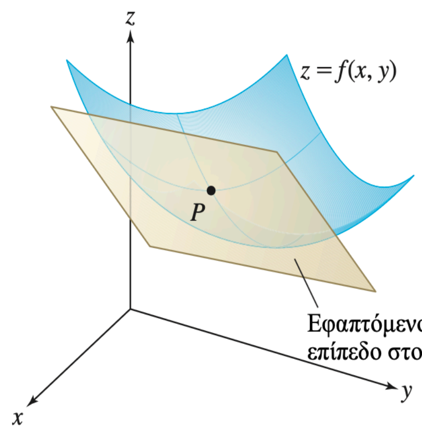
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \varepsilon, \;\; \text{όπου} \;\; \varepsilon \to 0 \text{ καθώς } \Delta x \to 0.$$

Ισοδύναμα έχουμε

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon \Delta x, \text{όπου } \varepsilon \to 0 \text{ καθώς } \Delta x \to 0$$

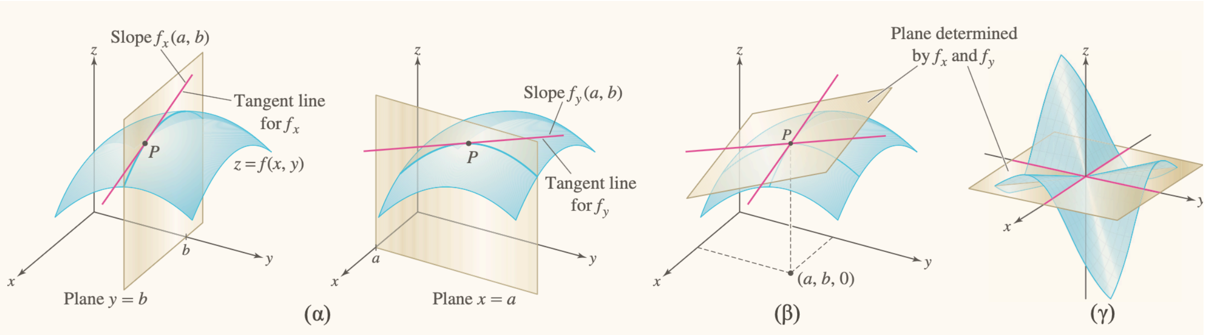
που συνεπάγεται ότι η f είναι διαφορίσιμη.

Επεκτείνοντας την ιδέα αυτή, θα περίμενε κανείς ότι μια συνάρτηση $f(x,y)$ θα είναι διαφορίσιμη αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοί της $f_x(x,y)$ και $f_y(x,y)$. Δυστυχώς όμως, όπως θα διαπιστώσουμε, η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν είναι αρκετά ισχυρή συνθήκη ώστε να εξασφαλίζει τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν είναι ικανή συνθήκη που εξασφαλίζει τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης. Η διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης $f(x,y)$ στο (a,b) θα πρέπει να εξασφαλίζει το γεγονός ότι υπάρχει ένα εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της $f(x,y)$ και στο σημείο $P=(a,b,f(a,b))$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: *Το εφαπτόμενο επίπεδο*

Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της $f(x,y)$, $f_x(a,b)$ και $f_y(a,b)$ στο (a,b), τότε αυτές προσδιορίζουν ευθείες που είναι εφαπτόμενες στο γράφημα της $f(x,y)$ στο σημείο P. Στο Σχήμα 1.3(α) φαίνεται ότι η μία από αυτές τις εφαπτόμενες ευθείες κείται στο επίπεδο $y=b$, ενώ η άλλη βρίσκεται στο επίπεδο $x=a$. Θα ονομάζουμε, αντιστοίχως, τις ευθείες αυτές ως την *εφαπτόμενη ευθεία για την* f_x και την *εφαπτόμενη ευθεία για την* f_y. Αυτές οι δύο εφαπτόμενες ευθείες προσδιορίζουν ένα επίπεδο που εύλογα μπορεί να είναι το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της συνάρτησης (βλ. Σχήμα 1.3(β). Θα αναφερόμαστε σε αυτό το επίπεδο ως το *επίπεδο που ορίζεται από τις* f_x *και* f_y. Δυστυχώς, όμως, αυτό το επίπεδο μπορεί να μην είναι πλήρως εφαπτόμενο στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο P καθώς υπάρχει η πιθανότητα άλλες ευθείες, που διέρχονται από το σημείο P και ανήκουν στο επίπεδο, να μην εφάπτονται στο γράφημα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3(γ).



Σχήμα 1.3: *Είναι το επίπεδο που προσδιορίζεται από τις f_x και f_y εφαπτόμενο στο γράφημα της συνάρτησης;*

1.2 Αυξήσεις και Διαφορικά

Ορισμός 1.2.1 . Ο όρος $o(\sqrt{h^2+k^2})$.

Ο όρος $o(\sqrt{h^2+k^2})$ είναι βασικό εργαλείο στη μαθηματική ανάλυση, καθώς διακρίνει τις γραμμικές από τις μη γραμμικές συνιστώσες της τοπικής συμπεριφοράς μιας συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, λέμε ότι μια συνάρτηση $f(h,k)$ ανήκει στο $o(\sqrt{h^2+k^2})$ αν,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ ώστε για κάθε σημείο } (h,k) \text{ με } \sqrt{h^2+k^2} < \delta \text{ να ισχύει:}$$

$$|f(h,k)| < \varepsilon\sqrt{h^2+k^2}.$$

Με άλλα λόγια: $f(h,k) = o\Big(\sqrt{h^2+k^2}\Big) \iff \dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0.$

Θεώρημα 1.2.2 . (Κριτήριο διαφορισιμότητας)Έστω $f : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, S ανοικτό, και $(a,b) \in S$. Αν οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y υπάρχουν σε μία περιοχή του (a,b) και είναι συνεχείς στο (a,b), τότε η f είναι διαφορίσιμη στο (a,b), δηλαδή

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k + o\big(\sqrt{h^2+k^2}\big) \quad \text{καθώς } (h,k) \to (0,0).$$

Υπενθυμίζουμε ότι η *αύξηση* Δy της $f(x)$ στο $x = a$ είναι

$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a),$$

και για "μικρό" Δx έχουμε την προσέγγιση

$$\Delta y \approx dy = f'(a)\,\Delta x.$$

Έστω $z = f(x,y)$. Ορίζουμε την *αύξηση* της f στο (a,b) ως

$$\Delta z = f(a+\Delta x,\, b+\Delta y) - f(a,b).$$

Τότε έχουμε

$$\Delta z = \big[f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b+\Delta y)\big] + \big[f(a, b+\Delta y) - f(a,b)\big].$$

Με βάση το Θεώρημα Μέσης Τιμής (MVT):

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b+\Delta y) = f_x(u, b+\Delta y)\,\Delta x,$$

$$f(a, b+\Delta y) - f(a,b) = f_y(a,v)\,\Delta y,$$

όπου $u \in (a, a+\Delta x)$ και $v \in (b, b+\Delta y)$.

Άρα

$$\Delta z = f_x(u, b+\Delta y)\,\Delta x + f_y(a,v)\,\Delta y.$$

Γράφουμε

$$\Delta z = \Big(f_x(a,b) + \underbrace{[f_x(u,b+\Delta y) - f_x(a,b)]}_{\varepsilon_1}\Big)\Delta x + \Big(f_y(a,b) + \underbrace{[f_y(a,v) - f_y(a,b)]}_{\varepsilon_2}\Big)\Delta y.$$

Έτσι,

$$\Delta z = \underbrace{f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y}_{dz} + \underbrace{\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}_{\text{σφάλμα}}.$$

Αν f_x, f_y είναι συνεχείς στο (a,b), τότε

$$\varepsilon_1 \to 0, \quad \varepsilon_2 \to 0 \quad \text{όταν } (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).$$

Συνεπώς

$$\Delta z = dz + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = dz + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).$$

Απο την ισότητα

$$\Delta z = dz + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).$$

έχουμε

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)} \frac{\Delta z - dz}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

που σημαίνει ότι η f είναι διαφορίσιμη στο (a,b).

Σημείωση 1.2.3 . Πως προκύπτει $dz + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = dz + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$. 'Εχουμε

$$\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = \left(\frac{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right) \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Θέτουμε

$$\eta = \frac{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

Τότε το σφάλμα γράφεται:

$$\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = \eta \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Όριο καθώς $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$:

Αν $\varepsilon_1 \to 0$ και $\varepsilon_2 \to 0$, τότε και ο συνδυασμός τους η «πακετάρεται» σε μια μορφή που εξαρτάται μόνο από την ευκλείδεια απόσταση

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Πράγματι,

$$|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y| \le \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Αρκεί να υψώσουμε στο τετράγωνο και να δείξουμε ότι

$$(\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y)^2 \le (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)\big((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\big).$$

Πράγματι,

$$(\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y)^2 = \varepsilon_1^2 (\Delta x)^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2 \, \Delta x \, \Delta y + \varepsilon_2^2 (\Delta y)^2.$$

Ενώ

$$(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)\big((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\big) = \varepsilon_1^2 (\Delta x)^2 + \varepsilon_1^2 (\Delta y)^2 + \varepsilon_2^2 (\Delta x)^2 + \varepsilon_2^2 (\Delta y)^2.$$

Άρα η διαφορά είναι

$$\left[(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\right]-(\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y)^2=(\varepsilon_1\Delta y-\varepsilon_2\Delta x)^2 \ \geq \ 0.$$

Συνεπώς η αρχική ανισότητα ισχύει.

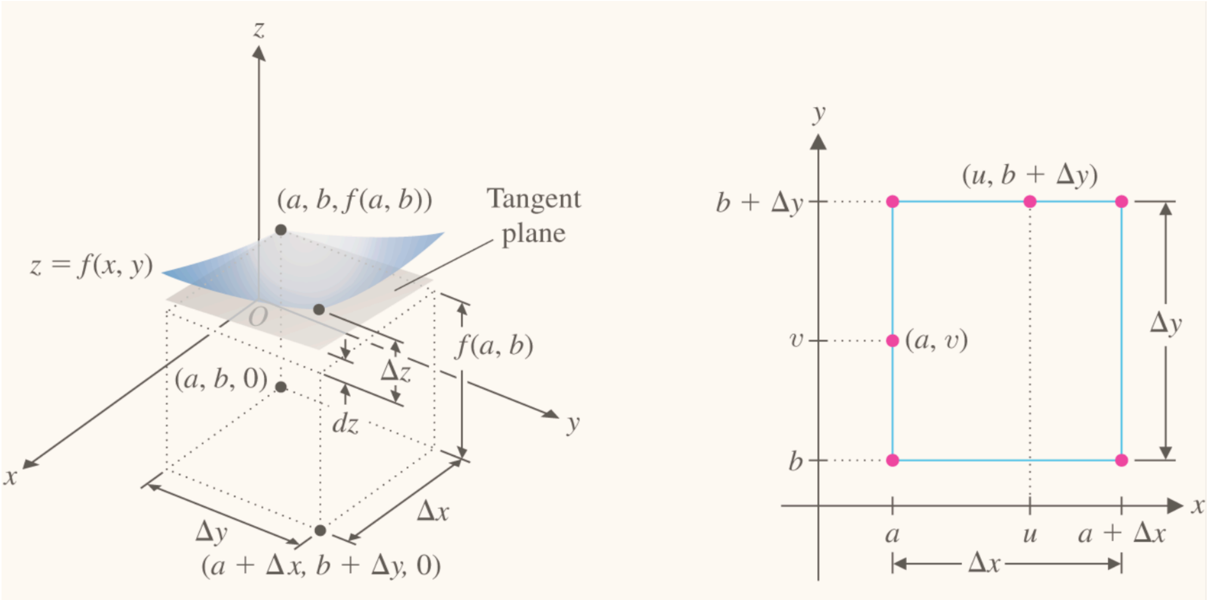
Ορισμός 1.2.4 . Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και $z=f(x,y)$. Λέμε ότι η f είναι *διαφορίσιμη* στο σημείο (a,b) αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(a,b), f_y(a,b)$ και ισχύει ότι για κάθε $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ έχουμε

$$\Delta z=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=f_x(a,b)\,\Delta x+f_y(a,b)\,\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

όπου $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ καθώς $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ ή ισοδύναμα:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)-f_x(a,b)\,\Delta x-f_y(a,b)\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

Δηλαδή, η μεταβολή Δz γράφεται ως άθροισμα μιας γραμμικής συνάρτησης των $(\Delta x,\Delta y)$ και ενός σφάλματος που τείνει στο μηδέν όταν $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.



Σχήμα 1.4: *Είναι το επίπεδο που προσδιορίζεται από τις f_x και f_y εφαπτόμενο στο γράφημα της συνάρτησης;*

Υπενθύμιση 1.2.5 .
Ικανή και Αναγκαία Συνθήκη Έστω δύο προτάσεις A και B.

1. Αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$A\Rightarrow B,$$

τότε λέμε ότι *η πρόταση A είναι ικανή συνθήκη για την B*, δηλαδή η ισχύς της A εξασφαλίζει την ισχύ της B.
2. Αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$B \Rightarrow A,$$

τότε λέμε ότι *η πρόταση A είναι αναγκαία συνθήκη για την B*, δηλαδή για να ισχύει η B, πρέπει οπωσδήποτε να ισχύει και η A.

3. Αν ισχύουν και οι δύο συνεπαγωγές

$$A \Rightarrow B \quad \text{και} \quad B \Rightarrow A,$$

τότε γράφουμε

$$A \Leftrightarrow B$$

και λέμε ότι η πρόταση A ικανή και αναγκαία συνθήκη για την B.

Λογική μορφή	*Φραστική διατύπωση*	*Ερμηνεία*
$A \Rightarrow B$	«Αν ισχύει το A, τότε ισχύει το B»	Το A είναι *ικανή συνθήκη* για το B
$B \Rightarrow A$	«Αν ισχύει το B, τότε ισχύει το A»	Το A είναι *αναγκαία συνθήκη* για το B
$A \Leftrightarrow B$	«Αν και μόνο αν»	Το A είναι *και ικανή και αναγκαία συνθήκη* για το B

Πίνακας 1.1 Ικανή, αναγκαία και ικανή-αναγκαία συνθήκη

Παράδειγμα 1.2.6 .
Ένας αριθμός είναι άρτιος αν και μόνο αν διαιρείται με το 2.

- Αν ένας αριθμός είναι άρτιος, τότε διαιρείται με το 2 σημαίνει ότι η ιδιότητα «άρτιος» είναι *ικανή συνθήκη*.
- Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 2, τότε είναι άρτιος σημαίνει ότι η ιδιότητα «άρτιος» είναι *αναγκαία συνθήκη*.

Σημείωση 1.2.7 . Το θεώρημα 1.2.2 δίνει ικανή συνθήκη, όχι όμως αναγκαία. Υπάρχουν συναρτή- σεις που είναι διαφορίσιμες αλλά οι μερικές τους παράγωγοι δεν είναι συνεχείς.

Παράδειγμα 1.2.8 .
Εξετάστε αν η συνάρτηση f

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και αν οι

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

είναι συνεχείς στο $(0,0)$. Τι συμπεραίνετε;

$\longrightarrow$ Μετάβαση στη Λύση του Παραδείγματος 1.2.8

*Λύση.*Υπολογισμοί των $\Delta f, df$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^2} = 0.$$

Όμοια, λόγω κυκλικότητας των x, y, θα ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Άρα $df = 0$.

Επίσης

$$\Delta f = f(h,k) - f(0,0) = (h^2+k^2)\sin\frac{1}{h^2+k^2}.$$

Και από (Μ.σ.2.5) έχουμε

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{(h^2+k^2)\sin\frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}\,\sin\frac{1}{h^2+k^2}.$$

Η έκφραση αυτή τείνει στο μηδέν για $h\to 0$, $k\to 0$, διότι $\sqrt{h^2+k^2}\to 0$ και $\sin\frac{1}{h^2+k^2}$ είναι φραγμένη. (*Μηδενική επί φραγμένη* = μηδενική). Άρα η $f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Για τη συνέχεια των f_x, f_y στο $(0,0)$ έχουμε:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Οι f_x, f_y είναι συνεχείς για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f_x στο σημείο $(0,0)$. Έχουμε

$$f_x(x,x) = 2x\sin\frac{1}{2x^2} - \frac{x}{x^2}\cos\frac{1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{2x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

δεν υπάρχει, το

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x)$$

δεν υπάρχει. Συνεπώς και το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$$

δεν υπάρχει. Όμοια, δεν υπάρχει και το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y).$$

Συμπέρασμα: Συμπεραίνουμε ότι κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση δεν έχει κατ' ανάγκην μερικές παραγώγους πρώτης τάξης συνεχείς.

← Επιστροφή στο Παράδειγμα 1.2.8

Παράδειγμα 1.2.9 .
Η συνάρτηση δύο μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη και δεν έχει μερικές παράγωγους συνεχείς στο σημείο αυτό Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και αν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της είναι συνεχείς στο ίδιο σημείο. Τι παρατηρείτε σχετικά με τη σχέση μεταξύ διαφορισιμότητας και συνέχειας των μερικών παραγώγων;

Λύση.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ερώτημα: Εξετάζουμε αν η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και αν οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης είναι συνεχείς στο ίδιο σημείο.

1. *Υπολογισμός μερικών παραγώγων στο σημείο* $(0,0)$*:*

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0.$$

Άρα $f_x(0,0) = 0$ και $f_y(0,0) = 0$.

2. Τύποι μερικών παραγώγων για $(x,y) \neq (0,0)$*:*
Με χρήση του κανόνα του πηλίκου:

$$f_x(x,y) = \frac{(2xy)(x^2+y^2) - x^2y(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$f_y(x,y) = \frac{x^2(x^2+y^2) - x^2y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

3. Συνέχεια των μερικών παραγώγων στο σημείο $(0,0)$*:*
Θα δείξουμε ότι
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0$ και $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = 0.$
Για τη f_x*:*

$$|f_x(x,y)| = \left| \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq 2\frac{|x|\,|y|^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

Θέτουμε $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Τότε $|x| \leq r$, $|y| \leq r$, άρα

$$|f_x(x,y)| \leq 2\frac{r\,r^3}{r^4} = 2r \to 0 \quad \text{όταν } (x,y) \to (0,0).$$

Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0)$. Η f_x είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Για τη f_y*:*

$$|f_y(x,y)| = \left| \frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \right| \leq \frac{x^2(|x|^2+|y|^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1.$$

Για να βρούμε το όριο, εκφράζουμε ξανά σε πολικές συντεταγμένες: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$:

$$f_y = \frac{r^4\cos^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{r^4} = \cos^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

Το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από το r, άρα το όριο ως $(x,y) \to (0,0)$ είναι $\cos^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$, που εξαρτάται από τη διεύθυνση. **Όμως αυτό είναι λάθος για τη συνέχεια:** το όριο *δεν τείνει στο μηδέν* για όλες τις διευθύνσεις, οπότε πρέπει να επανελέγξουμε προσεκτικά.

Εξετάζουμε συγκεκριμένες πορείες:

- Αν $y = 0$: $f_y(x,0) = \frac{x^2\cdot x^2}{x^4} = 1$. - Αν $x = 0$: $f_y(0,y) = 0$.
Άρα το όριο της $f_y(x,y)$ **δεν υπάρχει** στο $(0,0)$.

Συμπέρασμα:
- Οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ υπάρχουν. - Η f_x είναι συνεχής στο $(0,0)$. - Η f_y δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Επομένως, η f *δεν είναι διαφορίσιμη* στο $(0,0)$, παρόλο που οι μερικές παράγωγοι της υπάρχουν.

Παράδειγμα 1.2.10 .
Παράδειγμα συνάρτησης που οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0), f_y(0,0)$ υπάρχουν αλλά δεν

είναι συνεχείς εκεί. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases},.$$

Λύση.

Βήμα 1: Υπολογισμός μερικών παραγώγων στο $(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \qquad f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0.$$

Βήμα 2: Για $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$f_x(x,y) = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad f_y(x,y) = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Πράγματι, για να είναι η f διαφορίσιμη στο $(0,0)$ απαιτείται, μεταξύ άλλων, οι μερικές παράγωγοι να είναι συνεχείς εκεί. Δηλαδή πρέπει

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = f_y(0,0).$$

Εξετάζουμε το $f_x(x,y)$:

- Αν $y = x$, τότε $f_x(x,x) = 0$.
- Αν $y = 0$, τότε $f_x(x,0) = 0$.
- Αν $x = 0$, τότε $f_x(0,y) = \dfrac{y^3}{y^4} = \dfrac{1}{y} \to \infty$.

Επομένως, το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$ δεν υπάρχει. Άρα η f_x δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Ανάλογα δείχνουμε ότι και η f_y δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Συμπερασματικά, αν και οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0), f_y(0,0)$ υπάρχουν, δεν είναι συνεχείς εκεί. Άρα η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Ορισμός 1.2.11 . Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $z = f(x,y)$. Καλούμε *γραμμικοποίηση της* $f(x,y)$ *με κέντρο το σημείο* (a,b) την παράσταση

$$L(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Θα αναφέρουμε την $L(x,y)$ ως *γραμμικοποίηση της* $f(x,y)$ *με κέντρο το σημείο* (a,b). Αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγιστεί η συνάρτηση $f(x,y)$ κοντά στο (a,b).

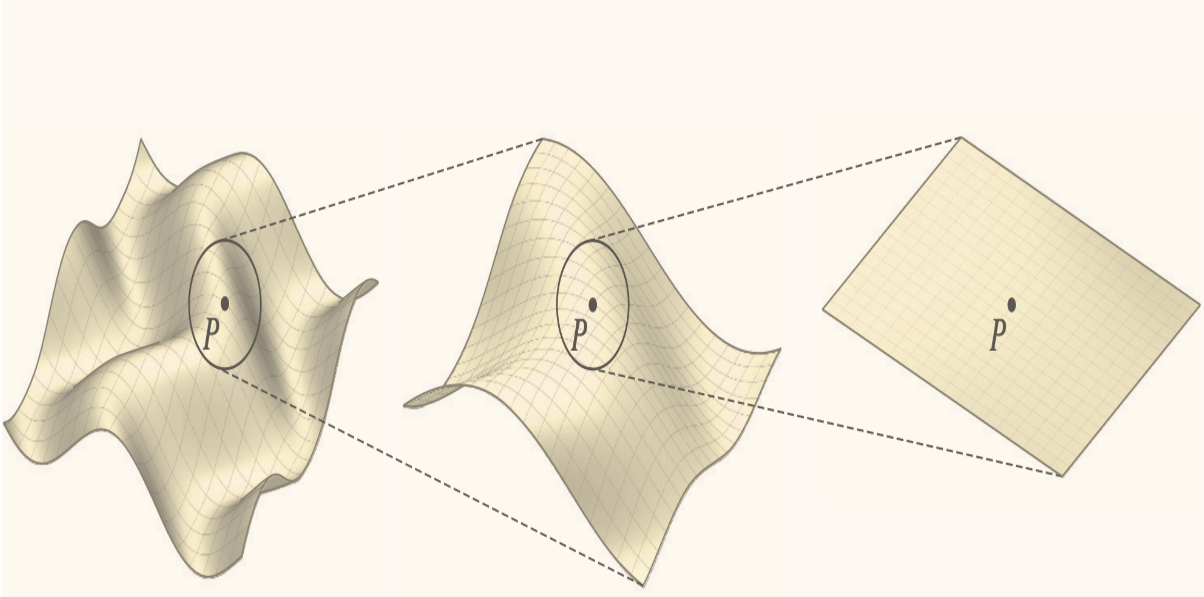
Θεώρημα 1.2.12 . Διαφορισιμότητα και εφαπτόμενο επίπεδο Έστω ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ ορίζεται σε έναν δίσκο D που περιέχει το (a,b) και ότι επιπλέον οι μερικές παράγωγοι $f_x(a,b)$ και $f_y(a,b)$ υπάρχουν. Τότε:

• Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι *διαφορίσιμη* στο (a,b) αν

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-L(x,y)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0.$$

• Αν η $f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο (a,b), τότε το *εφαπτόμενο επίπεδο* στο γράφημα της συνάρτησης και στο σημείο $(a,b,f(a,b))$ είναι το επίπεδο με εξίσωση $z=L(x,y)$. Η αναλυτική εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι η

$$z = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$



Σχήμα 1.5: *Το γράφημα της συνάρτησης μοιάζει ολοένα και περισσότερο με το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο P καθώς προχωράμε στην ολοένα και μεγαλύτερη μεγέθυνσή του.*

Υπενθύμιση 1.2.13 .
Μια συνάρτηση f λέγεται ότι έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο σημείο (x_0,y_0) αν

υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι σε μία περιοχή του (x_0,y_0) και είναι συνεχείς στο σημείο αυτό. Αν ισχύει αυτό σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f ανήκει στην κλάση C^1 ($C^1(\mathbb{R}^2)$). Δηλαδή:

$$f \in C^1(\mathbb{R}^2) \iff f \text{ είναι παραγωγίσιμη και οι } f_x, f_y \text{ είναι συνεχείς στο } \mathbb{R}^2$$

Έτσι και γενικότερα: Μια συνάρτηση ανήκει στην κλάση C^k αν όλες οι μερικές παράγωγοι μέχρι και τάξης k υπάρχουν και είναι συνεχείς.

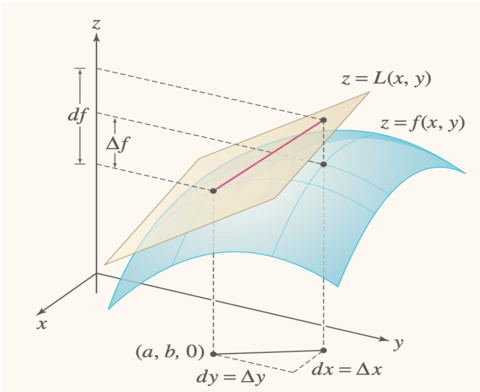
1.3 Διαφορικά και γραμμική προσέγγιση

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο (a,b) και ότι επιπλέον $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Τότε το διαφορικό df ορίζεται ως:

$$\boxed{df = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy}$$

Στο Σχήμα 1.6 φαίνεται ότι το διαφορικό df αντιπροσωπεύει τη μεταβολή στο ύψος του εφαπτόμενου επιπέδου για δεδομένες μεταβολές dx και dy των μεταβλητών x και y.
Αν με Δf συμβολίσουμε την πραγματική αλλαγή της συνάρτησης $f(x,y)$, τότε προκύπτει ότι $\Delta f \approx df$ και έτσι καταλήγουμε στη διαφορική μορφή της γραμμικής προσέγγισης:

$$\boxed{\Delta f \approx df = f_x(x,y)\,dx + f_y(x,y)\,dy}$$



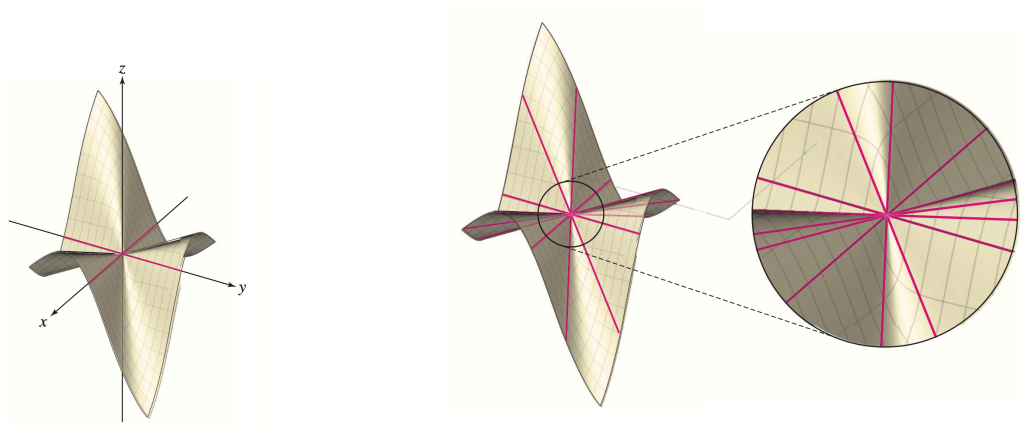
Σχήμα 1.6: *Η γραφική παράσταση της συνάρτησης*

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}.$$

Σχόλιο 1.3.1 . Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν εγγυάται τη διαφορσιμότητα μιας συνάρτησης. Η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

δείχνει μια τέτοια περίπτωση. Πράγματι, έχουμε $f_x(0,0) = 0$ και $f_y(0,0) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι το επίπεδο που ορίζεται από τις μερικές παραγώγους είναι το επίπεδο xy. Όμως, το γράφημα της f κοντά στην αρχή των αξόνων αποτελείται από ευθείες που διέρχονται από την αρχή, οι οποίες δεν ανήκουν όλες στο επίπεδο xy. Καθώς μεγεθύνουμε την περιοχή γύρω από $(0,0)$, οι ευθείες αυτές συνεχίζουν να σχηματίζουν γωνίες με το επίπεδο xy και έτσι το γράφημα δεν τείνει να γίνει επίπεδο. Επομένως, η $f(x,y)$ *δεν είναι διαφορίσιμη* στο $(0,0)$ και δεν υπάρχει εφαπτόμενο επίπεδο εκεί.



(a) *Το οριζόντιο ίχνος στο $z = 0$ περιλαμβάνει τους άξονες x και y*

(b) *Το οριζόντιο ίχνος στο $z = 0$ περιλαμβάνει τους άξονες x και y. Αλλά η γραφική παράσταση περιέχει επίσης μη οριζόντιες ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Επομένως, η γραφική παράσταση δεν εμφανίζεται πιο επίπεδη καθώς μεγεθύνουμε στην αρχή των αξόνων.*

Σχήμα 1.7: *Η συνάρτηση $f(x,y)$ δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$.*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Μερικές παράγωγοι στο (0,0)

$$f(x,0) = 0 \Rightarrow f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \quad f(0,y) = 0 \Rightarrow f_y(0,0) = 0.$$

2) Συνέχεια στο (0,0)

Θέτουμε $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Ισχύει $|xy| \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$, άρα

$$|2xy(x+y)| \leq (x^2+y^2)(|x|+|y|) \leq \sqrt{2}\,(x^2+y^2)^{3/2} = \sqrt{2}\,r^3.$$

Οπότε

$$|f(x,y)| = \left| \frac{2xy(x+y)}{x^2+y^2} \right| \leq \sqrt{2}\,r \to 0$$

καθώς $(x,y) \to (0,0)$. Επομένως η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

3) Μη διαφορισιμότητα στο (0,0)

Αν η f ήταν διαφορίσιμη στο $(0,0)$, θα είχαμε

$$df(0,0) = f_x(0,0)\,dx + f_y(0,0)\,dy = 0,$$

και επομένως

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Ελέγχουμε κατά μήκος της ευθείας $y = x$:

$$f(x,x) = \frac{2x \cdot x(x+x)}{x^2+x^2} = \frac{4x^3}{2x^2} = 2x, \quad \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}\,|x|.$$

Άρα

$$\frac{|f(x,x)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|2x|}{\sqrt{2}\,|x|} = \sqrt{2} \not\to 0.$$

Η αναγκαία συνθήκη αποτυγχάνει, συνεπώς η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Συμπέρασμα: Η f είναι συνεχής και έχει μερικές παραγώγους στο $(0,0)$, όμως δεν είναι διαφορίσιμη. Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν εγγυάται τη διαφορισιμότητα.

Ασκήσεις 1.3.2 .
Εξετάστε αν η συνάρτηση f με

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

*Λύση.*Από (Μ.σ.2.5) πρέπει να βρούμε τα $df, \Delta f$ στο $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$$

Άρα

$$df = 0h + 0k = 0$$

Επίσης,

$$\Delta f = f(0+h,0+k) - f(0,0) = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Συνεπώς,

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{h^2+k^2}$$

Πλησιάζουμε το $(0,0)$ με πολικές συντεταγμένες $h = r\cos\theta$, $k = r\sin\theta$ με $r \to 0$ και $\theta \in [0,2\pi)$, οπότε έχουμε

$$\lim_{r\to 0} \frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

Το όριο για $r \to 0$ δεν υπάρχει διότι είναι εξαρτώμενο του θ. Συνεπώς δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$, αν και είναι συνεχής.

Λυμένες ασκήσεις 1.3.3 .
Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+2y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ και να εξεταστεί αν είναι συνεχείς στο $(0,0)$.

Υπολογισμός μερικών παραγώγων στο $(0,0)$*:*

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = 2$$

Αναλυτικός έλεγχος συνέχειας για f_x*:*
Υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3+2y^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3+2y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

Περνάμε σε πολικές συντεταγμένες:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

$$f_x(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{3(r\cos\theta)^2\cdot r^2 - 2r\cos\theta\cdot[r^3\cos^3\theta+2r^3\sin^3\theta]}{r^4}$$

Υπολογίζοντας τους όρους:

$$3(r\cos\theta)^2\cdot r^2 = 3r^4\cos^2\theta$$

$$2r\cos\theta\cdot[r^3\cos^3\theta+2r^3\sin^3\theta] = 2r^4\cos^4\theta+4r^4\cos\theta\sin^3\theta$$

Άρα:

$$f_x(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{3r^4\cos^2\theta+3r^4\cos^2\theta\sin^2\theta-2r^4\cos^4\theta-4r^4\cos\theta\sin^3\theta}{r^4}$$

Απλοποιείται ως:

$$= \cos^4\theta+3\cos^2\theta\sin^2\theta-4\cos\theta\sin^3\theta$$

Παίρνουμε το όριο:

$$\lim_{(r,\theta)\to(0,0)} f_x(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \cos^4\theta + 3\cos^2\theta\sin^2\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta = 1$$

και επειδή $f_x(0,0) = 1$ έχουμε ότι η f_x είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Ομοίως ισχύει για την f_y

$$f_y(x,y) = \frac{6y^2(x^2+y^2) - 2y(x^3+2y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

Περνάμε πάλι σε πολικές συντεταγμένες, εκτελούμε αναλυτικούς υπολογισμούς και βρίσκουμε ότι το όριο είναι παντού ίσο με 2 όπως η τιμή στο σημείο $(0,0)$.

Συμπέρασμα:

$$f_x(0,0) = 1, \quad f_y(0,0) = 2$$

και οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο $(0,0)$.

Θεώρημα 1.3.4 . Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο (a,b), τότε στο ίδιο σημείο υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(a,b)$ και $f_y(a,b)$.

Λύση. Εφόσον η f είναι διαφορίσιμη στο (a,b), υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(a+h,b+k) - f(a,b) - L(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Ο γραμμικός αυτός μετασχηματισμός γράφεται ως

$$L(h,k) = A\,h + B\,k,$$

όπου $A, B \in \mathbb{R}$.

Θα δείξουμε ότι $A = f_x(a,b)$ και $B = f_y(a,b)$.

Πράγματι, για $h \neq 0$ και $k = 0$ έχουμε:

$$f(a+h,b) - f(a,b) = A\,h + R(h,0), \quad \text{όπου} \quad \frac{|R(h,0)|}{|h|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Διαίρεση με h δίνει:

$$\frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A + \frac{R(h,0)}{h},$$

και λαμβάνοντας όριο όταν $h \to 0$ προκύπτει

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} = A.$$

Ανάλογα, θέτοντας $h = 0$ και $k \neq 0$:

$$f(a,b+k) - f(a,b) = B\,k + R(0,k), \quad \text{με} \quad \frac{|R(0,k)|}{|k|} \xrightarrow[k\to 0]{} 0,$$

οπότε

$$f_y(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k} = B.$$

Άρα οι μερικές παράγωγοι $f_x(a,b)$ και $f_y(a,b)$ υπάρχουν και ισούνται με τους συντελεστές του γραμμικού μέρους $L(h,k)$ της διαφορικής.

Σχόλιο 1.3.5 . Η διαφορισιμότητα συνεπάγεται ύπαρξη των μερικών παραγώγων στο σημείο, αλλά όχι τη συνέχειά τους.

Παράδειγμα 1.3.6 .
Η διαφορισιμότητα δεν συνεπάγεται τη συνέχειά των μερικών παραγώγων Εξετάστε αν η

συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\dfrac{1}{x^2+y^2}), & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και αν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ είναι συνεχείς στο $(0,0)$. Τι συμπεραίνετε;

Λύση.
Βήμα 1: Συνέχεια στο $(0,0)$. Για $(x,y)\neq(0,0)$ θέτουμε $r^2 = x^2+y^2$, άρα

$$f(x,y) = r^2\sin(\frac{1}{r^2}).$$

Εφόσον $|\sin(\dfrac{1}{r^2})|\leq 1$, προκύπτει

$$|f(x,y)|\leq r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0,$$

οπότε $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ και η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.
Βήμα 2: Μερικές παράγωγοι στο $(0,0)$. Υπολογίζουμε με τον ορισμό:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(\frac{1}{h^2})}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin(\frac{1}{h^2}) = 0.$$

Ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} k\sin(\frac{1}{k^2}) = 0.$$

Άρα $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη. Πράγματι

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h^2+k^2)\sin\left(\dfrac{1}{h^2+k^2}\right)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\cdot\sin\left(\frac{1}{h^2+k^2}\right) = 0$$

Βήμα 3: Μερικές παράγωγοι για $(x,y)\neq(0,0)$. Χρησιμοποιούμε τον κανόνα γινομένου και αλυσίδας:

$$f_x(x,y) = 2x\sin\Big(\frac{1}{x^2+y^2}\Big) - (x^2+y^2)\cos\Big(\frac{1}{x^2+y^2}\Big)\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}.$$

Απλοποιώντας:

$$f_x(x,y) = 2x\left[\sin\Big(\frac{1}{x^2+y^2}\Big) - \frac{\cos\Big(\dfrac{1}{x^2+y^2}\Big)}{x^2+y^2}\right].$$

Ανάλογα,

$$f_y(x,y) = 2y\left[\sin\Big(\frac{1}{x^2+y^2}\Big) - \frac{\cos\Big(\dfrac{1}{x^2+y^2}\Big)}{x^2+y^2}\right].$$

Βήμα 4: Συνέχεια των f_x, f_y *στο* $(0,0)$. Εξετάζουμε το όριο του $f_x(x,y)$ στο $(0,0)$.

Χρησιμοποιούμε ξανά $r^2 = x^2+y^2$, οπότε

$$|f_x(x,y)| = 2|x|\left|\sin\Big(\frac{1}{r^2}\Big) - \frac{\cos\Big(\dfrac{1}{r^2}\Big)}{r^2}\right|.$$

Το δεύτερο σκέλος περιέχει $\dfrac{\cos(1/r^2)}{r^2}$ που **δεν τείνει στο** 0 καθώς $r\to 0$ (ταλαντώνεται απεριόριστα). Ειδικά, αν πάρουμε κατά μήκος του άξονα $y=0$:

$$f_x(x,0) = 2x\left[\sin\Big(\frac{1}{x^2}\Big) - \frac{\cos\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)}{x^2}\right],$$

και ο όρος $-\dfrac{2x\cos(1/x^2)}{x^2} = -\dfrac{2\cos(1/x^2)}{x}$ δεν έχει όριο. Άρα το f_x δεν είναι συνεχές στο $(0,0)$ (αντίστοιχα και το f_y).

Συμπέρασμα: Η διαφορισιμότητα δεν συνεπάγεται τη συνέχεια των μερικών παραγώγων.

Θεώρημα 1.3.7 . Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{R}$ με τις μερικές παραγώγους f_x, f_y ορισμένες σε μια γειτονιά του $a \in U$ και *συνεχείς στο* a. Τότε η f είναι διαφορίσιμη στο a.

*Λύση.*Γράφουμε, για (x,y) κοντά στο $a = (a_1, a_2)$,

$$f(x,y) - f(a_1,a_2) = \big[f(x,y) - f(a_1,y)\big] + \big[f(a_1,y) - f(a_1,a_2)\big].$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής μίας μεταβλητής στις συναρτήσεις $u \mapsto f(u,y)$ και $v \mapsto f(a_1,v)$, υπάρχουν ξ μεταξύ a_1 και x, και η μεταξύ a_2 και y με

$$f(x,y) - f(a_1,y) = f_x(\xi,y)\,(x-a_1), \qquad f(a_1,y) - f(a_1,a_2) = f_y(a_1,\eta)\,(y-a_2).$$

Άρα

$$f(x,y) - f(a_1,a_2) = f_x(a)\,(x-a_1) + f_y(a)\,(y-a_2) + R(x,y),$$

όπου

$$R(x,y) = \big[f_x(\xi,y) - f_x(a)\big](x-a_1) + \big[f_y(a_1,\eta) - f_y(a)\big](y-a_2).$$

Θέτουμε $h = x - a_1$, $k = y - a_2$. Από τη συνέχεια των f_x, f_y στο a, καθώς $(h,k) \to (0,0)$ έχουμε $f_x(\xi,y) \to f_x(a)$ και $f_y(a_1,\eta) \to f_y(a)$, οπότε

$$\frac{|R(a_1+h, a_2+k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq$$
$$|f_x(\xi, a_2+k) - f_x(a)|\,\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} + |f_y(a_1,\eta) - f_y(a)|\,\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0.$$

Άρα

$$f(a_1+h, a_2+k) = f(a) + f_x(a)\,h + f_y(a)\,k + o\big(\sqrt{h^2+k^2}\big),$$

δηλαδή η f είναι διαφορίσιμη στο a με διαφορική $Df(a)(h,k) = f_x(a)\,h + f_y(a)\,k$.

Σχόλιο 1.3.8 . Από το Θεώρημα 1.3.7 προκύπτει ότι αν οι f_x, f_y είναι συνεχείς σε ένα $U \subseteq D_f$, τότε η f είναι διαφορίσιμη στο U. Το αντίστροφο δεν ισχύει, όπως έδειξε το αντιπαράδειγμα.

Ασκήσεις 1.3.9 .

1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = x^3 y$$

είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο (a,b).
Να βρείτε την γραμμική προσέγγιση της $f(x,y)$ στο σημείο $(1,2)$ και να την χρησιμοποιήσετε για να προσεγγίσετε την τιμή $f(1.01,\, 1.99)$.

2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση
$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$
δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$.

3. Εξετάστε αν η συνάρτηση f με
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

4. Να δείξετε ότι η συνάρτηση
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

5. Να δείξετε ότι η συνάρτηση
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

6. Αν η f είναι διαφορίσιμη συνάρτηση με τοπική γραμμικοποίηση
$$L(x,y)=f(a,b)+m(x-a)+n(y-b),$$
τότε $m=f_x(a,b)$ και $n=f_y(a,b)$.

7. Θεωρήστε τη συνάρτηση
$$f(x,y)=\sqrt[3]{xy}.$$
Δείξτε ότι οι μερικές παράγωγοι της f υπάρχουν, αλλά η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

8. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της διαφορισιμότητας για να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο (a,b), τότε η f θα είναι και συνεχής στο (a,b).

9. Έστω η συνάρτηση
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Στην άσκηση αυτή μπορείτε να αποδείξετε ότι αν και η $g(x,y)$ είναι συνεχής στο $(0,0)$ και οι μερικές παράγωγοι $g_x(0,0)$ και $g_y(0,0)$ υπάρχουν, η $g(x,y)$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

a) Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, ότι η $f(x,y)$ είναι συνεχής στο $(0,0)$.
b) Να χρησιμοποιήσετε τους ορισμούς με βάση το όριο για να δείξετε ότι οι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ υπάρχουν και είναι ίσες με το μηδέν.
c) Δείξτε ότι η γραμμικοποίηση της $f(x,y)$ στο $(0,0)$ είναι η $L(x,y)=0$.
d) Δείξτε ότι αν η $f(x,y)$ ήταν διαφορίσιμη στο $(0,0)$, τότε θα έπρεπε να ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(h,h)}{h}=0.$$

Στη συνέχεια, παρατηρήστε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει καθώς $f(h,h)=2h$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $f(x,y)$ δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

10. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της διαφορσιμότητας για να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση $f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και ισχύει

$$f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0,$$

τότε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

→ Μετάβαση στη Λύση της Άσκησης 1.3.9

1. *Λύση.*

Η f είναι πολυωνυμική ως προς x,y, άρα είναι C^∞ στο $\mathbb{R}^2$ και ιδίως διαφορίσιμη σε κάθε (a,b).
Οι μερικές παράγωγοι:

$$f_x(x,y)=3x^2y,\qquad f_y(x,y)=x^3.$$

Στο $(1,2)$:

$$f(1,2)=2,\qquad f_x(1,2)=6,\qquad f_y(1,2)=1.$$

Η γραμμική προσέγγιση (εφαπτόμενο επίπεδο) είναι

$$L_{(1,2)}(x,y)=f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)=2+6(x-1)+(y-2)=6x+y-6.$$

Άρα

$$f(1.01,1.99)\approx L_{(1,2)}(1.01,1.99)=6(1.01)+1.99-6=2.05.$$

Έλεγχος: Η ακριβής τιμή είναι $f(1.01,1.99)=(1.01)^3\cdot 1.99\approx 2.0503$, οπότε το σφάλμα της προσέγγισης είναι περίπου 3×10^{-4}.

2. *Λύση.*

Η συνάρτηση είναι προφανώς συνεχής παντού, και στο $(0,0)$ συγκεκριμένα,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Οι μερικές παράγωγοι στο $(0,0)$ είναι:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Το όριο αυτό είναι 1 αν $h > 0$ και -1 αν $h < 0$, άρα δεν υπάρχει. Ομοίως, η $f_y(0,0)$ δεν υπάρχει για τον ίδιο λόγο (αν υπολογιστεί με k αντί h).
Άρα η f δεν έχει μερικές παραγώγους στο $(0,0)$ και επομένως δεν μπορεί να είναι διαφορίσιμη εκεί. *Συμπέρασμα:* Η συνάρτηση $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ είναι συνεχής αλλά όχι διαφορίσιμη

στο σημείο $(0,0)$.

3. (a) *Συνέχεια στο* $(0,0)$. Για $(x,y) \neq (0,0)$ θέτουμε $r^2 = x^2+y^2$. Τότε

$$|f(x,y)| = \left|\frac{2xy(x+y)}{x^2+y^2}\right| \leq 2|x+y|\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq 2|x+y|.$$

Επειδή $|x+y| \leq \sqrt{2(x^2+y^2)} = \sqrt{2}\,r$, έχουμε

$$|f(x,y)| \leq 2\sqrt{2}\,r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Άρα $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, επομένως η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.
(b) *Μερικές παράγωγοι στο* $(0,0)$. Με τον ορισμό:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Ομοίως,

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0.$$

Άρα $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.
(c) *Γραμμικοποίηση.* Η γραμμικοποίηση της f στο $(0,0)$ είναι

$$L(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 0.$$

(d) *Έλεγχος διαφορισιμότητας.* Αν η f ήταν διαφορίσιμη στο $(0,0)$, τότε θα ίσχυε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-L(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Θεωρούμε την ευθεία $y = x$. Τότε

$$f(x,x) = \frac{2x\cdot x(2x)}{x^2+x^2} = \frac{4x^3}{2x^2} = 2x.$$

Άρα

$$\frac{f(x,x)}{\sqrt{x^2+x^2}} = \frac{2x}{\sqrt{2}|x|} = \sqrt{2}\,\mathrm{sgn}(x),$$

που δεν τείνει στο 0 όταν $x \to 0$.
Επομένως, η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$, παρότι είναι συνεχής και έχει μηδενικές μερικές παραγώγους στο σημείο αυτό.

Συμπέρασμα: Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$, οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι 0, όμως η συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

4. Έστω ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και ισχύει

$$f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0.$$

Από τον ορισμό της διαφορισιμότητας έχουμε ότι η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - L(0,0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0.$$

Επειδή $L(0,0) = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 0$, θα έχουμε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$