ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

“Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’αυτό μένειν”
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Το παρόν ηλεκτρονικό υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών, ως υποστηρικτικό εγχειρίδιο για τα φροντιστηριακά μαθήματα του προγράμματος τους. Το υλικό δεν προορίζεται για εμπορική χρήση ή διάθεση εκτός του επισήμου περιβάλλοντος διδασκαλίας του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Παρόλη την προσεκτική επιμέλεια και συνεχή προσπάθεια ενημέρωσης και βελτίωσης, ενδέχεται να περιέχει λάθη ή παραλείψεις, καθώς βρίσκεται σε αρχικό στάδιο ανάπτυξης. Η συνεργασία και τα σχόλια των φοιτητών στο πλαίσιο της κοινής μας προσπάθειας εκτιμώνται ιδιαίτερα και συμβάλλουν στην καλύτερη ποιότητα και πληρότητα του υλικού.

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

I

Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά

1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

Ασκήσεις 1.0.1 .
Η σημασία των υποθέσεων

Η παρούσα άσκηση είναι σχεδιασμένη για να τονίσει τη σημασία και την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος Clairaut. Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Επιβεβαιώστε ότι για $(x,y) \neq (0,0)$ ισχύει:

$$f_x(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

b) Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της μερικής παραγώγου με το όριο για να αποδείξετε ότι

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$$

και επιπλέον ότι οι μερικές παράγωγοι $f_{yx}(0,0)$ και $f_{xy}(0,0)$ υπάρχουν και οι δύο αλλά δεν είναι ίσες.

c) Δείξτε ότι για $(x,y) \neq (0,0)$ ισχύει:

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

Δείξτε ότι η f_{xy} δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. *Υπόδειξη:* Δείξτε ότι ισχύει

$$\lim_{h\to 0} f_{xy}(h,0) \neq \lim_{k\to 0} f_{xy}(0,k).$$

d) Εξηγήστε τον λόγο για τον οποίο το αποτέλεσμα του ερωτήματος (b) δεν αντιφάσκει με το θεώρημα του Clairaut.

→ Μετάβαση στη Λύση της Άσκησης 1.0.1

Λύση.

(a) Για $(x,y) \neq (0,0)$ γράφουμε $f(x,y) = xy\,(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-1}$. Παραγωγίζοντας και εφαρμόζοντας τον κανόνα ilorίθμου/αλυσίδας,

$$f_x(x,y) = y(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-1} + xy\,(2x)(x^2+y^2)^{-1} - xy(x^2-y^2)\,(2x)\,(x^2+y^2)^{-2}$$

$$= \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = x(x^2-y^2)(x^2+y^2)^{-1} + xy\,(-2y)(x^2+y^2)^{-1} - xy(x^2-y^2)\,(2y)\,(x^2+y^2)^{-2}$$

$$= \frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

(b) Με τον ορισμό:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0, \qquad f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0,$$

αφού $f(h,0) = f(0,k) = 0$ για $h \neq 0$, $k \neq 0$.
Για τις μικτές στο $(0,0)$ χρησιμοποιούμε τα f_x, f_y του (α):

$$f_x(0,y) = \frac{y(0+0-y^4)}{(y^2)^2} = -y \quad (y \neq 0), \qquad f_x(0,0) = 0,$$

άρα

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{-k-0}{k} = -1.$$

Ομοίως,

$$f_y(x,0) = \frac{x(x^4-0-0)}{(x^2)^2} = x \quad (x \neq 0), \qquad f_y(0,0) = 0,$$

οπότε

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1.$$

Άρα $f_{yx}(0,0) = 1 \neq -1 = f_{xy}(0,0)$, ενώ και οι δύο υπάρχουν.

(c) Για $(x,y) \neq (0,0)$ παραγωγίζουμε ξανά (ή ισοδύναμα παραγωγίζουμε τις εκφράσεις του (α)) και βρίσκουμε

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

Για τη συνέχεια στο $(0,0)$, εξετάζουμε όρια κατά μήκος των αξόνων:

$$\lim_{h\to 0} f_{xy}(h,0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^6}{(h^2)^3} = 1, \qquad \lim_{k\to 0} f_{xy}(0,k) = \lim_{k\to 0} \frac{-k^6}{(k^2)^3} = -1.$$

Τα όρια διαφέρουν $\Rightarrow$ το f_{xy} (και αντίστοιχα το f_{yx}) *δεν* είναι συνεχές στο $(0,0)$.

(d) Το θεώρημα του Clairaut (ή Young) απαιτεί, εκτός από την ύπαρξη των f_{xy}, f_{yx}, και *συνέχεια* κάποιας μικτής παραγώγου σε γειτονιά του σημείου ώστε να συμπέσουν στο σημείο. Στην παρούσα άσκηση, από το (γ) είδαμε ότι το f_{xy} δεν είναι συνεχές στο $(0,0)$, άρα οι υποθέσεις του θεωρήματος *δεν* ισχύουν· επομένως δεν υπάρχει αντίφαση με το (β) όπου $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

← Επιστροφή στην Άσκηση 1.0.1

1.1 Διαφορισιμότητα, εφαπτόμενα επίπεδα και γραμμική προσέγγιση

Στην παρούσα ενότητα θα διερευνήσουμε τη σημαντική έννοια της διαφορισιμότητας για συναρτήσεις με περισσότερες από μία μεταβλητές, σε συνδυασμό με τις σχετιζόμενες ιδέες του εφαπτόμενου επιπέδου και της γραμμικής προσέγγισης. Στον Λογισμό των συναρτήσεων μίας μεταβλητής, μια συνάρτηση f είναι *παραγωγίσιμη* αν υπάρχει η παράγωγός της. Δηλαδή, αν υπάρχει η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης σε ένα σημείο a και συμβολίζεται ως $f'(a)$ ή $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$. Ενώ μία συνάρτηση είναι διαφορίσιμη αν μπορεί να περιγραφεί τοπικά από μια γραμμική συνάρτηση, δηλαδή η συνάρτηση συμπεριφέρεται "σαν ευθεία" όταν τη μελετούμε σε μικροσκοπική κλίμακα γύρω από ένα σημείο. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της y για τιμές του x κοντά στο a μπορεί να προσεγγιστεί χρησιμοποιώντας την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης στο σημείο $(a, f(a))$. Με μαθηματικούς όρους η παραπάνω ιδέα εκφράζεται ως:

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon\Delta x, \text{όπου } \varepsilon \to 0 \text{ καθώς } \Delta x \to 0.$$

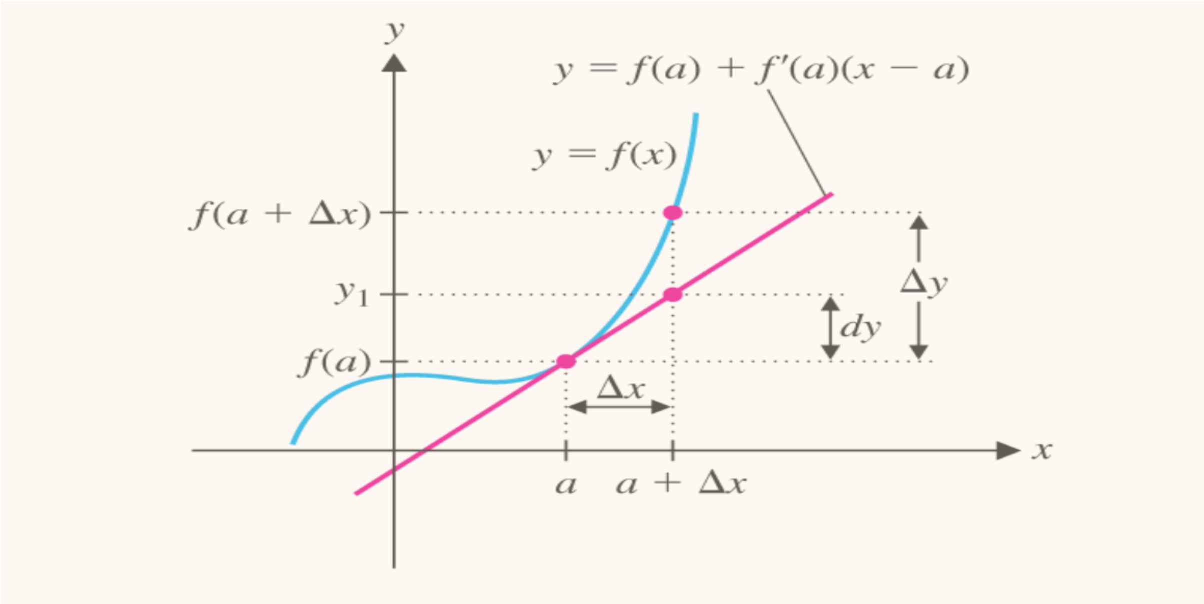
Αυτός ο τύπος οδηγεί στη έννοια του διαφορικού που εκφράζεται ως εξής:

Ορισμός 1.1.1 . Έστω $y = f(x)$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση στο x και $\Delta x = h \neq 0$ μια οποιαδήποτε μεταβολή του x. Τότε σαν *διαφορικό* της f στο x ορίζεται το γινόμενο

$$f'(x) \cdot h = f'(x) \cdot \Delta x,$$

το οποίο συμβολίζεται με $df(x)$ ή dy, δηλαδή

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot h = f'(x) \cdot \Delta x$$



Σχήμα 1.1: *Η γραμμική προσέγγιση του Δx δίνεται από το διαφορικό dx.*

Από τον ορισμό της παραγώγου στη μία μεταβλητή προκύπτει ότι αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι διαφορίσιμη στο a, τότε

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(a)\Delta x + \varepsilon \Delta x}{\Delta x} = f'(a) + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon = f'(a),$$

και συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη.

Αντίστροφα, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο a, τότε θα έχουμε

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a).$$

Συνεπώς,

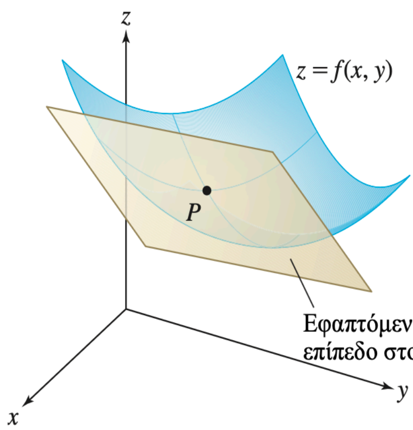
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \varepsilon, \;\; \text{όπου} \;\; \varepsilon \to 0 \text{ καθώς } \Delta x \to 0.$$

Ισοδύναμα έχουμε

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \varepsilon \Delta x, \text{όπου } \varepsilon \to 0 \text{ καθώς } \Delta x \to 0$$

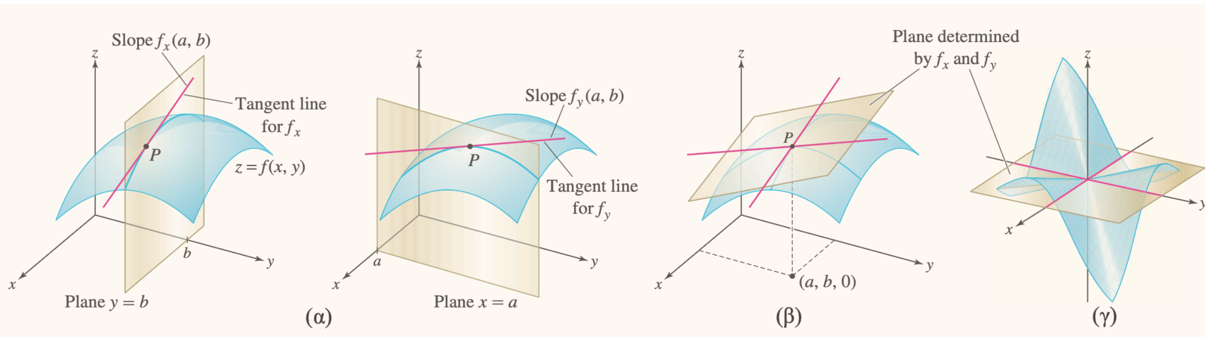
που συνεπάγεται ότι η f είναι διαφορίσιμη.

Επεκτείνοντας την ιδέα αυτή, θα περίμενε κανείς ότι μια συνάρτηση $f(x,y)$ θα είναι διαφορίσιμη αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοί της $f_x(x,y)$ και $f_y(x,y)$. Δυστυχώς όμως, όπως θα διαπιστώσουμε, η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν είναι αρκετά ισχυρή συνθήκη ώστε να εξασφαλίζει τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης. Αρχικά, θα αποδείξουμε ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν είναι ικανή συνθήκη που εξασφαλίζει τη διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης. Η διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης $f(x,y)$ στο (a,b) θα πρέπει να εξασφαλίζει το γεγονός ότι υπάρχει ένα εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της $f(x,y)$ και στο σημείο $P=(a,b,f(a,b))$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: *Το εφαπτόμενο επίπεδο*

Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της $f(x,y)$, $f_x(a,b)$ και $f_y(a,b)$ στο (a,b), τότε αυτές προσδιορίζουν ευθείες που είναι εφαπτόμενες στο γράφημα της $f(x,y)$ στο σημείο P. Στο Σχήμα 1.3(α) φαίνεται ότι η μία από αυτές τις εφαπτόμενες ευθείες κείται στο επίπεδο $y=b$, ενώ η άλλη βρίσκεται στο επίπεδο $x=a$. Θα ονομάζουμε, αντιστοίχως, τις ευθείες αυτές ως την *εφαπτόμενη ευθεία για την* f_x και την *εφαπτόμενη ευθεία για την* f_y. Αυτές οι δύο εφαπτόμενες ευθείες προσδιορίζουν ένα επίπεδο που εύλογα μπορεί να είναι το εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της συνάρτησης (βλ. Σχήμα 1.3(β). Θα αναφερόμαστε σε αυτό το επίπεδο ως το *επίπεδο που ορίζεται από τις f_x και f_y*. Δυστυχώς, όμως, αυτό το επίπεδο μπορεί να μην είναι πλήρως εφαπτόμενο στο γράφημα της συνάρτησης στο σημείο P καθώς υπάρχει η πιθανότητα άλλες ευθείες, που διέρχονται από το σημείο P και ανήκουν στο επίπεδο, να μην εφάπτονται στο γράφημα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.3(γ).



Σχήμα 1.3: *Είναι το επίπεδο που προσδιορίζεται από τις f_x και f_y εφαπτόμενο στο γράφημα της συνάρτησης;*

1.2 Αυξήσεις και Διαφορικά

Ορισμός 1.2.1 . Ο όρος $o(\sqrt{h^2+k^2})$.

Ο όρος $o(\sqrt{h^2+k^2})$ είναι βασικό εργαλείο στη μαθηματική ανάλυση, καθώς διακρίνει τις γραμμικές από τις μη γραμμικές συνιστώσες της τοπικής συμπεριφοράς μιας συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, λέμε ότι μια συνάρτηση $f(h,k)$ ανήκει στο $o(\sqrt{h^2+k^2})$ αν,

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0) \text{ ώστε για κάθε σημείο } (h,k) \text{ με } \sqrt{h^2+k^2}<\delta \text{ να ισχύει:}$$

$$|f(h,k)| < \varepsilon\sqrt{h^2+k^2}.$$

Με άλλα λόγια: $f(h,k) = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \iff \dfrac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0.$

Θεώρημα 1.2.2 . (Κριτήριο διαφορισιμότητας)Έστω $f : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, S ανοικτό, και $(a,b) \in S$. Αν οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y υπάρχουν σε μία περιοχή του (a,b) και είναι συνεχείς στο (a,b), τότε η f είναι διαφορίσιμη στο (a,b), δηλαδή

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + f_x(a,b)\,h + f_y(a,b)\,k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) \quad \text{καθώς } (h,k) \to (0,0).$$

Υπενθυμίζουμε ότι η *αύξηση* Δy της $f(x)$ στο $x = a$ είναι

$$\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a),$$

και για "μικρό" Δx έχουμε την προσέγγιση

$$\Delta y \approx dy = f'(a)\,\Delta x.$$

Έστω $z = f(x,y)$. Ορίζουμε την *αύξηση* της f στο (a,b) ως

$$\Delta z = f(a+\Delta x,\, b+\Delta y) - f(a,b).$$

Τότε έχουμε

$$\Delta z = \big[f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a, b+\Delta y)\big] + \big[f(a,b+\Delta y) - f(a,b)\big].$$

Με βάση το Θεώρημα Μέσης Τιμής (MVT):

$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) - f(a,b+\Delta y) = f_x(u, b+\Delta y)\,\Delta x,$$

$$f(a,b+\Delta y) - f(a,b) = f_y(a,v)\,\Delta y,$$

όπου $u \in (a, a+\Delta x)$ και $v \in (b, b+\Delta y)$.
Άρα

$$\Delta z = f_x(u,b+\Delta y)\,\Delta x + f_y(a,v)\,\Delta y.$$

Γράφουμε

$$\Delta z = \Big(f_x(a,b) + \underbrace{[f_x(u,b+\Delta y) - f_x(a,b)]}_{\varepsilon_1}\Big)\Delta x + \Big(f_y(a,b) + \underbrace{[f_y(a,v) - f_y(a,b)]}_{\varepsilon_2}\Big)\Delta y.$$

Έτσι,

$$\Delta z = \underbrace{f_x(a,b)\Delta x + f_y(a,b)\Delta y}_{dz} + \underbrace{\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y}_{\text{σφάλμα}}.$$

Αν f_x, f_y είναι συνεχείς στο (a,b), τότε

$$\varepsilon_1 \to 0, \quad \varepsilon_2 \to 0 \quad \text{όταν } (\Delta x, \Delta y) \to (0,0).$$

Συνεπώς

$$\Delta z = dz + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = dz + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).$$

Απο την ισότητα

$$\Delta z = dz + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}).$$

έχουμε

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)} \frac{\Delta z - dz}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

που σημαίνει ότι η f είναι διαφορίσιμη στο (a,b).

Σημείωση 1.2.3 . Πως προκύπτει $dz + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = dz + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$. 'Εχουμε

$$\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = \left(\frac{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \right) \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Θέτουμε

$$\eta = \frac{\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

Τότε το σφάλμα γράφεται:

$$\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y = \eta \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Όριο καθώς $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$:

Αν $\varepsilon_1 \to 0$ και $\varepsilon_2 \to 0$, τότε και ο συνδυασμός τους η «πακετάρεται» σε μια μορφή που εξαρτάται μόνο από την ευκλείδεια απόσταση

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Πράγματι,

$$|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y| \ \leq \ \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\, \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Αρκεί να υψώσουμε στο τετράγωνο και να δείξουμε ότι

$$(\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y)^2 \ \leq \ (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)\big((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\big).$$

Πράγματι,

$$(\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y)^2 = \varepsilon_1^2 (\Delta x)^2 + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2\, \Delta x\, \Delta y + \varepsilon_2^2 (\Delta y)^2.$$

Ενώ

$$(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)\big((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\big) = \varepsilon_1^2 (\Delta x)^2 + \varepsilon_1^2 (\Delta y)^2 + \varepsilon_2^2 (\Delta x)^2 + \varepsilon_2^2 (\Delta y)^2.$$

Άρα η διαφορά είναι

$$\left[(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\right]-(\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y)^2=(\varepsilon_1\Delta y-\varepsilon_2\Delta x)^2 \ \geq\ 0.$$

Συνεπώς η αρχική ανισότητα ισχύει.

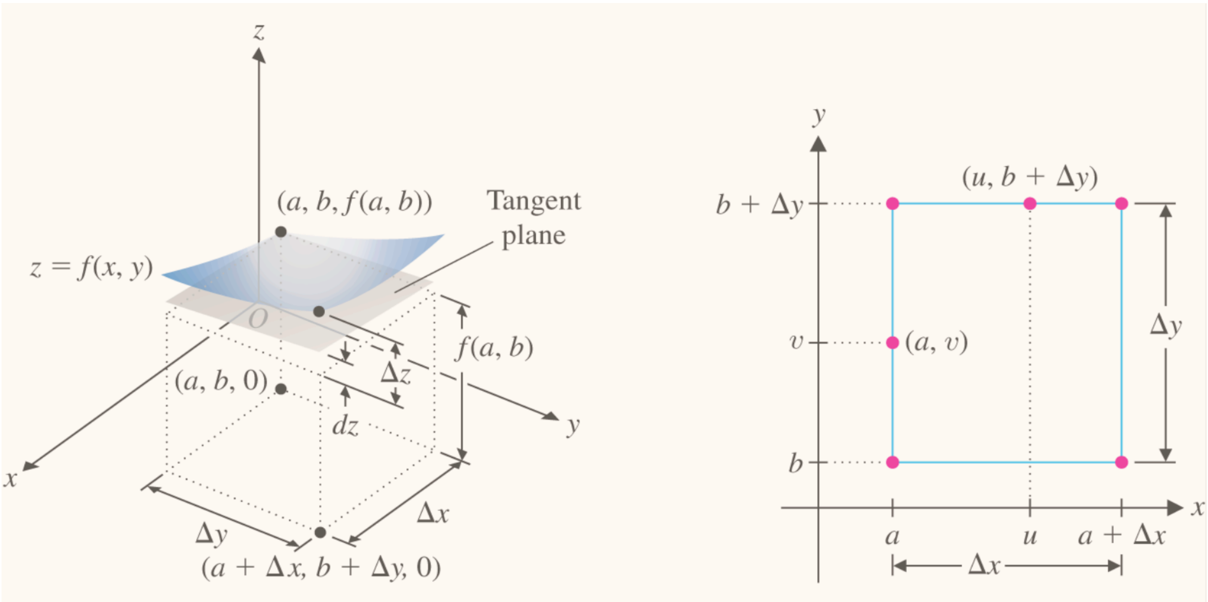
Ορισμός 1.2.4 . Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και $z=f(x,y)$. Λέμε ότι η f είναι *διαφορίσιμη* στο σημείο (a,b) αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(a,b), f_y(a,b)$ και ισχύει ότι για κάθε $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ έχουμε

$$\Delta z=f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)=f_x(a,b)\,\Delta x+f_y(a,b)\,\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y,$$

όπου $\varepsilon_1,\varepsilon_2\to 0$ καθώς $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ ή ισοδύναμα:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(a+\Delta x,b+\Delta y)-f(a,b)-f_x(a,b)\,\Delta x-f_y(a,b)\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

Δηλαδή, η μεταβολή Δz γράφεται ως άθροισμα μιας γραμμικής συνάρτησης των $(\Delta x,\Delta y)$ και ενός σφάλματος που τείνει στο μηδέν όταν $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$.



Σχήμα 1.4: *Είναι το επίπεδο που προσδιορίζεται από τις f_x και f_y εφαπτόμενο στο γράφημα της συνάρτησης;*

Σημείωση 1.2.5 . Το θεώρημα δίνει επαρκή συνθήκη, όχι όμως αναγκαία. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι διαφορίσιμες αλλά οι μερικές τους παράγωγοι δεν είναι συνεχείς.

Παράδειγμα 1.2.6 .
Εξετάστε αν η συνάρτηση f

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$ και αν οι

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

είναι συνεχείς στο $(0,0)$. Τι συμπεραίνετε;

$\longrightarrow$ Μετάβαση στη Λύση του Παραδείγματος 1.2.6

Λύση. Υπολογισμοί των Δf, df :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x^2} = 0.$$

Όμοια, λόγω κυκλικότητας των x, y, θα ισχύει

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Άρα $df = 0$.

Επίσης

$$\Delta f = f(h,k) - f(0,0) = (h^2+k^2)\sin\frac{1}{h^2+k^2}.$$

Και από (Μ.σ.2.5) έχουμε

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{(h^2+k^2)\sin\frac{1}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{h^2+k^2}.$$

Η έκφραση αυτή τείνει στο μηδέν για $h\to 0$, $k\to 0$, διότι $\sqrt{h^2+k^2}\to 0$ και $\sin\frac{1}{h^2+k^2}$ είναι φραγμένη. (*Μηδενική επί φραγμένη* = μηδενική). Άρα η $f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$. Για τη συνέχεια των f_x, f_y στο $(0,0)$ έχουμε:

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 2x\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},$$

$$f_y = \frac{\partial}{\partial y}\left((x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 2y\sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Οι f_x, f_y είναι συνεχείς για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Θα εξετάσουμε τη συνέχεια της f_x στο σημείο $(0,0)$. Έχουμε

$$f_x(x,x) = 2x\sin\frac{1}{2x^2} - \frac{x}{x^2}\cos\frac{1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0} 2x\sin\frac{1}{2x^2} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$

δεν υπάρχει, το

$$\lim_{x\to 0} f_x(x,x)$$

δεν υπάρχει. Συνεπώς και το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$$

δεν υπάρχει. Όμοια, δεν υπάρχει και το

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y).$$

Συμπέρασμα: Συμπεραίνουμε ότι κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση δεν έχει κατ' ανάγκην μερικές παραγώγους πρώτης τάξης συνεχείς.

← Επιστροφή στο Παράδειγμα 1.2.6