ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

“Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ’αυτό μένειν”
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Το παρόν ηλεκτρονικό υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών, ως υποστηρικτικό εγχειρίδιο για τα φροντιστηριακά μαθήματα του προγράμματος τους. Το υλικό δεν προορίζεται για εμπορική χρήση ή διάθεση εκτός του επισήμου περιβάλλοντος διδασκαλίας του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Παρόλη την προσεκτική επιμέλεια και συνεχή προσπάθεια ενημέρωσης και βελτίωσης, ενδέχεται να περιέχει λάθη ή παραλείψεις, καθώς βρίσκεται σε αρχικό στάδιο ανάπτυξης. Η συνεργασία και τα σχόλια των φοιτητών στο πλαίσιο της κοινής μας προσπάθειας εκτιμώνται ιδιαίτερα και συμβάλλουν στην καλύτερη ποιότητα και πληρότητα του υλικού.

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

I

Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά

1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

Ορισμός 1.0.1 . Έστω $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(a,b) \in D$. Λέμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $(x,y) \in D$ με

$$0 < |x-a| < \delta_1 \quad \text{και} \quad 0 < |y-b| < \delta_2$$

να ισχύει

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Παράδειγμα 1.0.2 .
Είναι γνωστό ότι ο ορισμός της συνέχειας μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο (x_0, y_0)

του πεδίου ορισμού της δίνεται από τον κάτωθι ορισμό:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = l \iff (\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta_1(\varepsilon) > 0)\,(\exists \delta_2(\varepsilon) > 0) \text{ τ.ω.}$$

$$(|x - x_0| < \delta_1) \text{ και } (|y - y_0| < \delta_2) \implies (|f(x,y) - l| < \varepsilon).$$

Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2}, & \text{αν } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό, για να είναι η συνάρτηση f συνεχής στο σημείο $O(0,0)$ θα πρέπει:

(i) $\delta_1 \leq \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$,

(ii) $\delta_2 \leq \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$,

(iii) $\delta_1 \leq \sqrt{\varepsilon}$ και $\delta_2 \leq \sqrt{\varepsilon}$,

(iv) $\delta_1^2 + \delta_2^2 \leq \varepsilon$.

.

Παράδειγμα 1.0.3 .
Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στο $(0,0)$ τη συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\tan(x+y), & \text{αν } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{αν } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Ασκήσεις 1.0.4 .
Στις επόμενες ασκήσεις να χρησιμοποιήσετε κατάλληλη μέθοδο για να υπολογίσετε το ζητούμενο όριο ή να αποδείξετε ότι αυτό δεν υπάρχει.

1. (a)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

   (b)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+2y^2}$$

   (c)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

2. Ελέγξτε αν η ακόλουθη συνάρτηση είναι συνεχής:
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{αν } x^2+y^2<1, \\ 1, & \text{αν } x^2+y^2 \geq 1. \end{cases}$$

3. Έστω $a,b \geq 0$. Να αποδείξετε ότι αν $a+b>2$, τότε
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a y^b}{x^2+y^2} = 0,$$
ενώ αν $a+b \leq 2$, τότε το προηγούμενο όριο δεν υπάρχει.

4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(2^x-1)(\sin y)}{xy}, & \text{αν } xy \neq 0, \\ \ln 2, & \text{αν } xy = 0 \end{cases}$$
είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Λύση της άσκησης 2.

Η συνάρτηση δίνεται ως

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{αν } x^2+y^2 < 1, \\ 1, & \text{αν } x^2+y^2 \geq 1. \end{cases}$$

Εξέταση συνέχειας

- Στο εσωτερικό του δίσκου $x^2+y^2 < 1$ το $f(x,y) = x^2+y^2$ είναι πολυωνυμική και άρα συνεχής.
- Έξω από το δίσκο $x^2+y^2 > 1$ η $f(x,y) = 1$ είναι σταθερή και άρα συνεχής.
- Πρόβλημα εντοπίζεται στη γραμμή $x^2+y^2 = 1$ (σύνορο των δύο περιοχών).

Συνοριακός Έλεγχος

Έστω σημείο (x_0,y_0) με $x_0^2+y_0^2 = 1$:

- $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0),x^2+y^2<1} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (x^2+y^2) = x_0^2+y_0^2 = 1.$
- Η τιμή της συνάρτησης επί του συνόρου είναι επίσης $f(x_0,y_0) = 1$.

Άρα,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

για κάθε (x_0,y_0) με $x_0^2+y_0^2 = 1$. *Συμπέρασμα*

Η συνάρτηση $f(x,y)$ είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}^2$.

Λύση της άσκησης 3.

Για να αποδείξουμε ότι αν $a+b > 2$, τότε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^a y^b}{x^2+y^2} = 0,$$

αρκεί να περάσουμε σε πολικές συντεταγμένες.

Θέτουμε $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, με $r \to 0$:

$$x^a y^b = (r\cos\theta)^a (r\sin\theta)^b = r^{a+b}(\cos\theta)^a(\sin\theta)^b,$$

$$x^2+y^2 = r^2,$$

οπότε

$$\frac{x^a y^b}{x^2+y^2} = r^{a+b-2}(\cos\theta)^a(\sin\theta)^b.$$

Το γινόμενο $(\cos\theta)^a(\sin\theta)^b$ είναι πάντοτε φραγμένο (ανήκει στο $[-1,1]$), οπότε το όριο εξαρτάται μόνο από τη δύναμη του r.

- Αν $a+b>2$, τότε ο εκθέτης $a+b-2>0$, άρα καθώς $r\to 0$, $r^{a+b-2}\to 0$ και τελικά το όριο είναι 0 για κάθε διεύθυνση.
- Αν $a+b\leq 2$, τότε το όριο δεν υπάρχει ή δεν είναι 0, διότι ο εκθέτης δεν είναι θετικός και το πηλίκο είτε συγκλίνει σε μη μηδενικό όριο είτε δεν υπάρχει (π.χ. ελέγχοντας πάνω στους άξονες ή σε καμπύλες).

Άρα, πράγματι, το ζητούμενο ισχύει.

Λύση της άσκησης 4.

Θέλουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(2^x-1)\sin y}{xy}, & \text{αν } xy\neq 0,\\ \ln 2, & \text{αν } xy=0\end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.

Για να το αποδείξουμε, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=\ln 2$$

Υπολογίζουμε το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(2^x-1)\sin y}{xy}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1)}{x}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=ln2\cdot 1=ln2.$$

΄Αρα η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

1.1 Μερικές παράγωγοι

Όπως έχουμε ήδη τονίσει, μια συνάρτηση f με δύο ή περισσότερες μεταβλητές δεν έχει έναν μοναδικό ρυθμό μεταβολής αφού η κάθε μεταβλητή μπορεί να επηρεάζει με διαφορετικό τρόπο την f. Έτσι, για παράδειγμα, η ένταση του ρεύματος I που κυκλοφορεί σε ένα κύκλωμα είναι συνάρτηση τόσο της διαφοράς δυναμικού V όσο και της αντίστασης R, με την εξάρτηση να περιγράφεται μέσω του νόμου του Ohm που έχει τη μορφή:

$$I(V,R)=\frac{V}{R}.$$

Η ένταση του ρεύματος I *αυξάνεται* ως συνάρτηση του V (όταν η R είναι σταθερή), αλλά *μειώνεται* ως συνάρτηση του R (όταν το V είναι σταθερό).

Οι *μερικές παράγωγοι* είναι οι ρυθμοί μεταβολής ως προς καθεμία από τις μεταβλητές ξεχωριστά. Έτσι, μια συνάρτηση $f(x,y)$ με δύο μεταβλητές θα έχει δύο μερικές παραγώγους, που συμβολίζονται με f_x και f_y, οι οποίες μάλιστα θα ορίζονται από τα ακόλουθα όρια (εφόσον αυτά υπάρχουν):

Οι μερικές παράγωγοι ισούνται με τον ρυθμό μεταβολής ως προς κάθε μεταβλητή.

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h},\quad f_y(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η f_x είναι η παράγωγος της $f(x,b)$, που είναι συνάρτηση μόνο του x, ενώ η f_y είναι η παράγωγος της $f(a,y)$ που είναι συνάρτηση μόνο του y. Η f_x ονομάζεται *μερική* *παράγωγος της* f *ως προς τη μεταβλητή* x ή ως η x παράγωγος της f, ενώ παρόμοια ορολογία χρησιμοποιείται για την f_y.

Ο συμβολισμός κατά Leibniz για τις μερικές παραγώγους είναι ο ακόλουθος:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y,$$

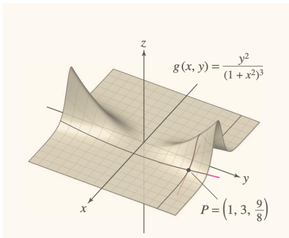
και

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(a,b)} = f_x(a,b), \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(a,b)} = f_y(a,b).$$

Σημείωση 1.1.1 . Το σύμβολο ∂ που χρησιμοποιείται για τη μερική παράγωγο είναι ένα «στρογγυλεμένο d». Χρησιμοποιείται προκειμένου να διαχωρίσει τις παραγώγους μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών από τις παραγώγους των συναρτήσεων μίας μεταβλητής όπου χρησιμοποιούμε το σύμβολο «d».

Παράδειγμα 1.1.2 .
Υπολογίστε τις τιμές των μερικών παραγώγων $g_x(1,3)$ και $g_y(1,3)$, όπου

$$g(x,y) = \frac{y^2}{(1+x^2)^3}.$$



Σχήμα 1.1: *Οι κλίσεις των εφαπτόμενων ευθειών στις καμπύλες-ίχνη στο σημείο* P *είναι οι* $g_x(1,3)$ *και* $g_y(1,3)$

Προπαρασκευαστικές ερωτήσεις 1.1.3 .

1. Η Ηρώ κατέληξε στην ακόλουθη *λανθασμένη* σχέση, καθώς δεν εφάρμοσε σωστά τον κανόνα του γινομένου:

   $$\tfrac{\partial}{\partial x}(x^2y^2) = x^2(2y) + y^2(2x).$$

   Ποιο ήταν το λάθος που έκανε και πώς θα πρέπει να γίνει σωστά ο υπολογισμός;

2. Εξηγήστε γιατί δεν είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του πηλίκου προκειμένου να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο

   $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{y+1}\right).$$

   Εφαρμόζεται ο κανόνας παραγώγισης πηλίκου στον υπολογισμό της μερικής παραγώγου

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{y+1}\right);$$

3. Ποια από τις ακόλουθες μερικές παραγώγους μπορεί να υπολογιστεί χωρίς προσφυγή στον κανόνα του πηλίκου;

α) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{xy}{y^2+1}\right)$ β) $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{xy}{y^2+1}\right)$ γ) $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y^2}{y^2+1}\right)$