ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΑΝΔΡΙΚΟΠΟΥΛΟΣ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ

"Τα πάντα ρει, μηδέποτε κατά τ'αυτό μένειν"
Ηράκλειτος

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Το παρόν ηλεκτρονικό υλικό διατίθεται αποκλειστικά για τους φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών, ως υποστηρικτικό εγχειρίδιο για τα φροντιστηριακά μαθήματα του προγράμματος τους. Το υλικό δεν προορίζεται για εμπορική χρήση ή διάθεση εκτός του επισήμου περιβάλλοντος διδασκαλίας του Τμήματος Ηλεκτρονικών Υπολογιστών και Πληροφορικής του Πανεπιστημίου Πατρών. Παρόλη την προσεκτική επιμέλεια και συνεχή προσπάθεια ενημέρωσης και βελτίωσης, ενδέχεται να περιέχει λάθη ή παραλείψεις, καθώς βρίσκεται σε αρχικό στάδιο ανάπτυξης. Η συνεργασία και τα σχόλια των φοιτητών στο πλαίσιο της κοινής μας προσπάθειας εκτιμώνται ιδιαίτερα και συμβάλλουν στην καλύτερη ποιότητα και πληρότητα του υλικού.

Δεκέμβρης 2025

Περιεχόμενα

I

Η Κληρονομιά των Αρχαίων Ελλήνων στα Μαθηματικά

1 Προελληνικά και Ελληνικά Μαθηματικά

Περίληψη 1.0.1

- Ένα διανυσματικό πεδίο αντιστοιχίζει ένα διάνυσμα σε κάθε σημείο ενός χωρίου. Ένα διανυσματικό πεδίο στον χώρο $\mathbb{R}^3$ αναπαρίσταται από μια τριάδα συναρτήσεων $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$. Ένα διανυσματικό πεδίο στον χώρο $\mathbb{R}^2$ αναπαρίσταται από ένα ζεύγος συναρτήσεων $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2 \rangle$. Σε όλες τις περιπτώσεις υποθέτουμε ότι οι συνιστώσες F_j είναι λείες συναρτήσεις στα πεδία ορισμού τους.

- Ο τελεστής ανάδελτα ορίζεται

$$\nabla = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle$$

  και χρησιμοποιείται για τον ορισμό της κλίσης (∇f), της απόκλισης $(\nabla \cdot \mathbf{F})$ και του στροβιλισμού $(\nabla \times \mathbf{F})$.
  Λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} = F_1 i + F_2 j + F_3 k$$

  απορρέει από βαθμωτό δυναμικό, όταν είναι δυνατόν να βρεθεί μία βαθμωτή συνάρτηση

$$f(x,y,z)$$

  τέτοια ώστε

$$\mathbf{F} = \nabla f \qquad \text{ή} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = F_1, \frac{\partial f}{\partial y} = F_2, \frac{\partial f}{\partial z} = F_3.$$

  Αν $\mathbf{F} = \nabla f$, τότε το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ *αποκαλείται συντηρητικό* και η f *ονομάζεται συνάρτηση δυναμικού* για το πεδίο $\mathbf{F}$.

- Ικανή και αναγκαία συνθήκη προκειμένου το πεδίο $\mathbf{F}$ να απορρέει από δυναμικό είναι
$$curl\mathbf{F} = 0$$
όπου $F : \Omega \to \mathbb{R}^3$ και $\Omega = \mathbb{R}^3$ ή Ω κυρτό, και το δυναμικό δίνεται από τη σχέση
$$f(x,y,z) = \int_a^x P(t,y,z)\,dt + \int_b^y Q(a,t,z)\,dt + \int_c^z R(a,b,t)\,dt.$$
όπου (a,b,c) σημείο του πεδίου ορισμού της $\mathbf{F}$.

- *Η απόκλιση* ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ είναι η βαθμωτή συνάρτηση που δίνεται ως
$$\mathrm{div}(\mathbf{F}) = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$
Το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ ονομάζεται *σωληνοειδές*, όταν σε κάθε σημείο του ισχύει
$$\mathrm{div}\,(\mathbf{F}) = 0.$$

- *Ο στροβιλισμός* ενός διανυσματικού πεδίου $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ είναι το διανυσματικό πεδίο που δίνεται ως
$$\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

- Αν η συνάρτηση $f(x,y,z)$ είναι συνάρτηση δυναμικού του πεδίου $\mathbf{F}$, τότε το έργο της κατά τη μετατόπιση ενός υλικού σημείου από τη θέση A στη θέση B είναι
$$W_{A\to B} = f(B) - f(A).$$
Στην Κλασική Μηχανική η σχέση που συνδέει την δύναμη F με την δυναμική ενέργεια $f(x,y,z)$ είναι
$$F = -\nabla f$$
και συνεπώς το έργο από τη θέση A στη θέση B είναι
$$W_{A\to B} = f(A) - f(B).$$

- Δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις δυναμικού ενός συντηρητικού διανυσματικού πεδίου μπορούν να διαφέρουν κατά μια σταθερά (σε ένα ανοικτό, συνεκτικό χωρίο).

- Ένα συντηρητικό διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \langle F_1, F_2, F_3 \rangle$ ικανοποιεί τη συνθήκη
$$\mathrm{curl}(\mathbf{F}) = 0, \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}.$$

- Κάθε διανυσματική συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση

$$F = \operatorname{curl} f$$

ονομάζεται διανυσματικό δυναμικό.

- Μια σχέση εύρεσης του διανυσματικού δυναμικού είναι

$$f(x,y,z) = \left(\int_c^z F_1(x,y,t)\,dt,\ \int_a^x F_2(t,y,c)\,dt - \int_c^z F_3(x,y,t)\,dt,\ 0 \right).$$

όπου (a,b,c) σημείο του πεδίου ορισμού της $\mathbf{F}$.

- Το ακτινικό μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο και το διανυσματικό πεδίο αντιστρόφου τετραγώνου είναι συντηρητικά:

$$\mathbf{e_r} = \left\langle \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right\rangle = \nabla r, \qquad \frac{\mathbf{e_r}}{r^2} = \left\langle \frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right\rangle = \nabla(-r^{-1}),$$

όπου

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Ασκήσεις 1.0.2

1. Ποιο από τα ακόλουθα είναι ένα μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο στο επίπεδο;
   (a) $\mathbf{F} = \langle y, x \rangle$
   (b) $\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\rangle$
   (c) $\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2} \right\rangle$
2. Να σχεδιάσετε ένα παράδειγμα ενός μη σταθερού διανυσματικού πεδίου του επιπέδου, στο οποίο κάθε διάνυσμα να είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\langle 1, 1 \rangle$.
3. Να υπολογίσετε και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τα διανύσματα που αντιστοιχίζονται στα σημεία $P = (1,2)$ και $Q = (-1,-1)$ από το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \langle x^2, x \rangle$.
4. Να υπολογίσετε και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τα διανύσματα που αντιστοιχίζονται στα σημεία $P = (1,2)$ και $Q = (-1,-1)$ από το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = \langle -y, x \rangle$.

   Στις Ασκήσεις 5 –7 να υπολογίσετε για κάθε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ *την απόκλιση* $\operatorname{div}(\mathbf{F})$ *και τον στροβιλισμό* $\operatorname{curl}(\mathbf{F})$.
5. $\mathbf{F} = \left\langle \dfrac{y}{x}, \dfrac{y}{z}, \dfrac{z}{x} \right\rangle$
6. $\mathbf{F} = \langle e^y, \sin x, \cos x \rangle$

7. $\mathbf{F} = \left\langle \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0 \right\rangle$

Στις Ασκήσεις 8–10 να αποδείξετε τις ζητούμενες ταυτότητες υποθέτοντας ότι οι εμπλεκόμενες μερικές παράγωγοι υπάρχουν και είναι συνεχείς.

8. Αν η f είναι μια βαθμωτή συνάρτηση, τότε

$$\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f\,\operatorname{div}(\mathbf{F}) + \mathbf{F}\cdot\nabla f$$

9.

$$\operatorname{curl}(f\mathbf{F}) = f\,\operatorname{curl}(\mathbf{F}) + (\nabla f)\times\mathbf{F}$$

10.

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$$

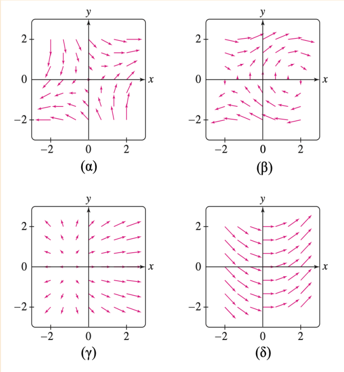
Στις Ασκήσεις 11–14 να αντιστοιχίσετε κάθε διανυσματικό πεδίο του επιπέδου με τις αναπαραστάσεις του Σχήματος 1.1.

11. $\mathbf{F} = \langle 2,\ x\rangle$

12. $\mathbf{F} = \langle 2x+2,\ y\rangle$

13. $\mathbf{F} = \langle y,\ \cos x\rangle$

14. $\mathbf{F} = \langle x+y,\ x-y\rangle$



Σχήμα 1.1

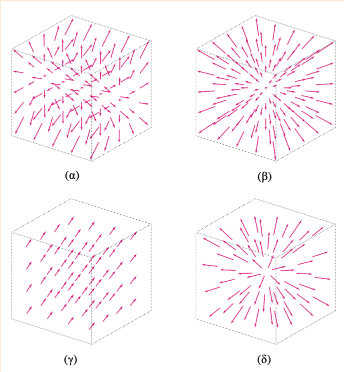
Στις Ασκήσεις 15–18 να αντιστοιχίσετε κάθε διανυσματικό πεδίο του επιπέδου με τις αναπαραστάσεις του Σχήματος 1.2.

15. $\mathbf{F} = \langle 1,\ 1,\ 1\rangle$

16. $\mathbf{F} = \langle x,\ 0,\ z\rangle$

17. $\mathbf{F} = \langle x,\ y,\ z\rangle$

18. $\mathbf{F} = e_r$



Σχήμα 1.2

Στις Ασκήσεις 19– 22 να βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ που δίνεται ή να αποδείξετε ότι μια τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει.

19. $\mathbf{F} = \langle 2xyz, x^2z, x^2yz\rangle$

20. $\mathbf{F} = \langle yz^2, xz^2, 2xyz\rangle$

21. $\mathbf{F} = \langle 2xze^{x^2}, 0, e^{x^2} \rangle$

22. $\mathbf{F} = \langle yz\cos(xyz), xz\cos(xyz), xy\cos(xyz) \rangle$

23. Έστω $\varphi = \ln r$, όπου $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Να εκφράσετε την κλίση $\nabla\varphi$ με τη βοήθεια του μοναδιαίου ακτινικού διανύσματος $\mathbf{e_r}$ στον χώρο $\mathbb{R}^2$.

24. Για το σημείο $P = (a,b)$ ορίζουμε το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα με αρχή το σημείο P:

$$\mathbf{e_P} = \frac{\langle x-a, y-b \rangle}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

   (a) Επιβεβαιώστε ότι το $\mathbf{e_P}$ είναι ένα μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο.

   (b) Υπολογίστε το $\mathbf{e_P}(1,1)$ για $P = (3,2)$.

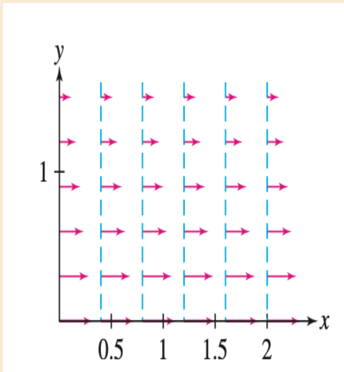
   (c) Βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το πεδίο $\mathbf{e_P}$.

25. Στην άσκηση αυτή μπορείτε να αποδείξετε ότι το διανυσματικό πεδίο του Σχήματος 1.3 δεν είναι συντηρητικό, αιτιολογώντας την ισχύ των ακόλουθων προτάσεων.

   (a) Αν υπάρχει μια συνάρτηση δυναμικού f για το πεδίο $\mathbf{F}$, τότε οι ισοσταθμικές καμπύλες της f θα πρέπει να είναι κατακόρυφες ευθείες γραμμές.

   (b) Αν υπάρχει μια συνάρτηση δυναμικού f για το πεδίο $\mathbf{F}$, τότε οι ισοσταθμικές καμπύλες της f θα πρέπει να απομακρύνονται μεταξύ τους καθώς το y αυξάνεται.

   (c) Εξηγήστε γιατί τα (α) και (β) είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους και επομένως δεν μπορεί να υπάρχει μια συνάρτηση δυναμικού f.



Σχήμα 1.3

1.1 Βαθμωτό και Διανυσματικό Δυναμικό

Λέμε ότι το διανυσματικό πεδίο

$$F = F_1 i + F_2 j + F_3 k$$

απορρέει από βαθμωτό δυναμικό, όταν είναι δυνατόν να βρεθεί μία βαθμωτή συνάρτηση

$$f(x,y,z)$$

τέτοια ώστε

$$F = \nabla f \qquad \text{ή} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = F_1, \ \frac{\partial f}{\partial y} = F_2, ; \frac{\partial f}{\partial z} = F_3.$$

Η συνάρτηση f(x,y,z) ονομάζεται δυναμική συνάρτηση (δυναμικό) του πεδίου F και το έργο της κατά τη μετατόπιση ενός υλικού σημείου από τη θέση A στη θέση B είναι

$$W_{A\to B} = f(B) - f(A).$$

Στην Κλασική Μηχανική η σχέση που συνδέει την δύναμη F με την δυναμική ενέργεια $f(x,y,z)$ είναι

$$F = -\nabla f$$

και συνεπώς το έργο από τη θέση A στη θέση B είναι

$$W_{A\to B} = f(A) - f(B).$$

Ορισμός 1.1.1 Το διανυσματικό πεδίο F ονομάζεται *σωληνοειδές*, όταν σε κάθε σημείο του ισχύει

$$\operatorname{div} F = 0.$$

Κάθε διανυσματική συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση

$$F = \operatorname{curl} f$$

ονομάζεται διανυσματικό δυναμικό.

Σχόλιο 1.1.2

Παράγωγος κατα κατεύθυνση

Όταν το $\mathbf{u}$ είναι συγγραμμικό της κλίσης $\nabla f|_P$, τότε η παράγωγος κατα κατεύθυνση γίνεται μέγιστη, δηλαδή

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f|_P}{\|\nabla f|_P\|},$$

και η τιμή της είναι

$$D_{\mathbf{u}}(P) = \|\nabla f|_P\|.$$

Βαθμωτό δυναμικό

Έστω διανυσματικό πεδίο $F(x,y,z) = (F_1, F_2, F_3)$. Λέμε ότι το πεδίο F είναι συντηρητικό αν υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$F = \nabla f$$

δηλαδή

$$f_x = F_1, \qquad f_y = F_2, \qquad f_z = F_3.$$

Η συνάρτηση f ονομάζεται *βαθμωτό δυναμικό του F*.
Ικανή και αναγκαία συνθήκη ύπαρξης βαθμωτού δυναμικού σε απλό συνεκτικό ή κυρτό χωρίο είναι

$$curl F = 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση το δυναμικό f δίνεται από οποιοδήποτε ολοκλήρωμα γραμμής

$$f(x,y,z) = \int_\gamma F \cdot d\mathbf{r},$$

το οποίο δεν εξαρτάται από τη διαδρομή.
Εφαρμογές του βαθμωτού δυναμικού:

- ηλεκτροστατικά πεδία $(E = -\nabla\phi)$,
- βαρυτικό δυναμικό,
- potential flows στη ρευστομηχανική,
- υπολογισμός έργου μέσω ολοκληρωμάτων γραμμής,
- μοντέλα θερμοκρασίας και πίεσης.

Διανυσματικό δυναμικό

Ένα διανυσματικό πεδίο F λέγεται ότι έχει *διανυσματικό δυναμικό* A αν

$$F = curl A.$$

Η συνθήκη ύπαρξης διανυσματικού δυναμικού είναι

$$\operatorname{div} F = 0$$

σε απλό συνεκτικό χωρίο.
Το διανυσματικό δυναμικό δεν είναι μοναδικό: αν A είναι ένα τέτοιο δυναμικό, τότε και το

$$A + \nabla\psi$$

παράγει το ίδιο F (gauge freedom).
Εφαρμογές του διανυσματικού δυναμικού:

- μαγνητικό πεδίο $(B = curl A)$,
- εξισώσεις Maxwell στην ηλεκτροδυναμική,
- ροές ρευστών σε 2D μέσω stream functions,
- numerical FEM/CFD για ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα,
- κβαντομηχανική (Aharonov–Bohm effect),
- διαφορική γεωμετρία και gauge theory.

Πρόταση 1.1.3 Έστω το διανυσματικό πεδίο $F = (P,Q,R)$ με τις P,Q,R να έχουν μερικές παραγώγους δευτέρας τάξης συνεχείς στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Τότε

$$curl(\nabla f) = 0.$$

*Λύση.*Η κλίση της f είναι

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z).$$

Αν $F = (P,Q,R)$, τότε ο στροβιλισμός δίνεται από

$$curlF = (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y).$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο στο $F = \nabla f$:

$$curl(\nabla f) = (f_{zy} - f_{yz},\ f_{xz} - f_{zx},\ f_{yx} - f_{xy}).$$

Επειδή η f έχει συνεχείς δεύτερες μερικές παραγώγους, από το θεώρημα συμμετρίας των μικτών παραγώγων ισχύει

$$f_{zy} = f_{yz}, \qquad f_{xz} = f_{zx}, \qquad f_{yx} = f_{xy}.$$

Άρα κάθε συνιστώσα του $curl(\nabla f)$ μηδενίζεται και επομένως

$$curl(\nabla f) = 0.$$

Η πρόταση αποδείχθηκε.

Πρόταση 1.1.4 Έστω το διανυσματικό πεδίο $F = (P,Q,R)$ με τις P,Q,R να έχουν μερικές παραγώγους δευτέρας τάξης συνεχείς στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Τότε

$$div(curlF) = 0.$$

*Λύση.*Ο στροβιλισμός του F είναι

$$curlF = (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y).$$

Υπολογίζουμε τώρα τη διασπορά του:

$$div(curlF) = (R_y - Q_z)_x + (P_z - R_x)_y + (Q_x - P_y)_z.$$

Αναπτύσσοντας, παίρνουμε

$$R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz}.$$

Επειδή όλες οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς, ισχύουν οι ισότητες

$$R_{yx} = R_{xy}, \quad Q_{zx} = Q_{xz}, \quad P_{zy} = P_{yz},$$

οπότε κάθε όρος ακυρώνει τον αντίστοιχό του. Έτσι

$$div(curlF) = 0.$$

Η πρόταση αποδείχθηκε.

Πρόταση 1.1.5 Αν η συνάρτηση $f(x,y,z)$ έχει μερικές παραγώγους μέχρι και δευτέρας τάξης συνεχείς στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, τότε

$$curl(\nabla f) = 0.$$

*Λύση.*Έχουμε

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z).$$

Ο στροβιλισμός της κλίσης είναι

$$curl(\nabla f) = (f_{zy} - f_{yz},\ f_{xz} - f_{zx},\ f_{yx} - f_{xy}).$$

Με δεδομένο ότι όλες οι δεύτερες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς, από το θεώρημα συμμετρίας των μικτών παραγώγων προκύπτει

$$f_{zy} = f_{yz}, \qquad f_{xz} = f_{zx}, \qquad f_{yx} = f_{xy}.$$

Άρα κάθε συνιστώσα του στροβιλισμού μηδενίζεται, επομένως

$$curl(\nabla f) = 0.$$

Η πρόταση αποδείχθηκε.

Ορισμός 1.1.6 Αν η $f(x,y,z)$ έχει μερικές παραγώγους δευτέρας τάξης συνεχείς, τότε:

$$\nabla(\nabla f) = div(\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Ορίζουμε τον τελεστή Δ:

$$\Delta \equiv \nabla\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Η διαφορική εξίσωση του Laplace για την $f(x,y,z)$ είναι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου 1.1.7

1. Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z) = e^x + e^{-2y} + e^{-3z}$. Να βρεθεί η παράγωγος της f στο σημείο $(0,0,0)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $(1,1,1)$, καθώς και η κατεύθυνση κατά την οποία η παράγωγος λαμβάνει τη μέγιστη τιμή στο σημείο αυτό.

2. Αν η f έχει μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης συνεχείς, να αποδειχθεί ότι $curl(\nabla f) = 0$.

3. Βρείτε τη μέγιστη τιμή της κατά κατεύθυνση παραγώγου της συνάρτησης $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ στο σημείο $(3,4)$, καθώς επίσης και την κατεύθυνση για την οποία επιτυγχάνεται αυτή η μέγιστη τιμή.

4. Για το σημείο $P = (a,b)$ ορίζουμε το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα με αρχή το σημείο P:

$$\mathbf{e}_P = \frac{\langle x-a, y-b\rangle}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

   (a) Επιβεβαιώστε ότι το $\mathbf{e}_P$ είναι ένα μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο.

   (b) Υπολογίστε το $\mathbf{e}_P(1,1)$ για $P = (3,2)$.

   (c) Βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το πεδίο $\mathbf{e}_P$.

   ddd

5. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left\langle \frac{2xf}{z-2}, -\frac{yf}{2(z-2)}, \frac{y^2-4x^2}{2(z-2)}f \right\rangle.$$

   Να προσδιοριστεί η συνάρτηση $f = f(z)$ ώστε το πιο πάνω διανυσματικό πεδίο να είναι αστρόβιλο, δηλαδή $curl\mathbf{F} = 0$.

6. (a) Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x,y,z) = xy^2 + yz$ στο σημείο $(1,1,2)$ κατά την κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{d}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

   (b) Αν $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$, να εξεταστεί αν η $f(x,y)$ έχει παραγώγους κατά κατεύθυνση στην αρχή των αξόνων.

7. (a) Δίνεται η $f(x,y,z) = x^2yz^3$ και το σημείο $M(1,-2,3)$. Να βρεθεί η κατεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{u}(u_1,u_2,u_3)$ έτσι ώστε η $D_{\mathbf{u}}(1,-2,3)$ να γίνεται μέγιστη.

   (b) Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & xy = 0, \\ 1, & xy \neq 0. \end{cases}$$

Βρείτε, αν υπάρχουν, τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ και στη συνέχεια την $D_{\mathbf{u}}(0,0)$, όπου $\mathbf{u}(u_1,u_2)$ είναι τέτοιο ώστε $u_1u_2 \neq 0$ και $u_1^2+u_2^2=1$. Από τις μερικές παραγώγους και την κατευθυνόμενη παράγωγο να εξαχθεί συμπέρασμα για την ύπαρξή τους.

8. (a) Αν φ, F είναι αντίστοιχα βαθμωτή και διανυσματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^3$, αποδείξτε τη σχέση $div(\varphi\mathbf{F}) = \varphi\, div\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\nabla\varphi$.

   (b) Έστω $\vec{F}(x,y,z) = xy\,i + y\,j + z\,k$. Υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε $\mathbf{F} = \nabla f$ και γιατί;

9. Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F} = (\sin y^2 + z^3,\ 2xy\cos y^2 - 2,\ 3xz^2 + 4)$.
   (a) Δείξτε ότι το $\mathbf{F}$ είναι συντηρητικό πεδίο.

   (b) Βρείτε την δυναμική ενέργεια.

   (c) Υπολογίστε το έργο κατά την κίνηση ενός υλικού σημείου από το $A(2,0,-1)$ στο $B(1,\sqrt{\pi/2},1)$.

Λύση.

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής, καθώς και οι f_x, f_y, f_z. Άρα

$$D_{\mathbf{u}}f(x,y,z) = \nabla f_{(x,y,z)}\cdot\mathbf{u} = f_x(x,y,z)h + f_y(x,y,z)k + f_z(x,y,z)l.$$

Αλλά $\nabla f(x,y,z) = \left(e^x, -2e^{-2y}, -3e^{-3z}\right)$ και $\nabla f(0,0,0) = (1,-2,-3)$, οπότε

$$D_{\mathbf{u}}f(0,0,0) = (1,-2,-3)\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = -\frac{4}{\sqrt{3}}$$

Η κατεύθυνση για την οποία η κατά κατεύθυνση παράγωγος είναι μέγιστη είναι η ίδια με την κατεύθυνση του $\nabla f(0,0,0)$, δηλαδή $\mathbf{u} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,-3)$.

2.

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\right) + \mathbf{i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right) = 0$$

διότι αν οι δεύτερες παράγωγοι είναι συνεχείς έχουμε $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ κλπ.

3. Έχουμε

$$\nabla f = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; , \; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

η οποία στο σημείο $(3,4)$ είναι

$$\nabla f(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

Επειδή οι f_x, f_y είναι συνεχείς στο $(3,4)$, η κατεύθυνση για την οποία μεγιστοποιείται η κατά κατεύθυνση παράγωγος είναι

$$\mathbf{u} = \frac{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)}{\sqrt{\frac{3^2}{5^2} + \frac{4^2}{5^2}}} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)$$

και η τιμή της είναι

$$|\nabla f| = \left(\frac{3}{5} \right)^2 + \left(\frac{4}{5} \right)^2 = 1$$

4. (a) *Επιβεβαίωση ότι το $\mathbf{e}_P$ είναι μοναδιαίο διανυσματικό πεδίο*

   Το μέτρο του διανύσματος $|\mathbf{e}_P|$ πρέπει να είναι 1.

$$|\mathbf{e}_P| = \left| \frac{\langle x-a, y-b \rangle}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} \right| = \frac{|\langle x-a, y-b \rangle|}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 1$$

   Εφόσον $|\mathbf{e}_P| = 1$, το πεδίο είναι μοναδιαίο.

   (b) *Υπολογισμός του $\mathbf{e}_P(1,1)$ για $P = (3,2)$*

   Αντικαθιστούμε $a = 3, b = 2$ και $x = 1, y = 1$.

$$\mathbf{e}_P(1,1) = \frac{\langle 1-3, 1-2 \rangle}{\sqrt{(1-3)^2+(1-2)^2}} = \frac{\langle -2, -1 \rangle}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}} = \frac{\langle -2, -1 \rangle}{\sqrt{5}}$$

$$= \left\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\rangle$$

   (c) *Εύρεση συνάρτησης δυναμικού $f(x,y)$*

   Ολοκληρώνοντας την συνιστώσα $F_1 = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}$ ως προς x:

$$f(x,y)=\int \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}\,dx=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+g(y)$$

Συγκρίνοντας την $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ με την συνιστώσα $F_2=\dfrac{\partial f}{\partial y}$ του πεδίου, προκύπτει $g'(y)=0$.
Μια συνάρτηση δυναμικού είναι:

$$f(x,y)=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+K$$

όπου K σταθερά.

5.

$$rot\mathbf{F}=0 \iff \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{2x}{z-2}f & -\dfrac{y}{2(z-2)}f & \dfrac{y^2-4x^2}{2(z-2)}f \end{vmatrix}=0.$$

$$\iff \mathbf{i}\left[\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y^2-4x^2}{2(z-2)}f\Big)-\frac{\partial}{\partial z}\Big(-\frac{y}{2(z-2)}f\Big)\right]$$

$$-\mathbf{j}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{y^2-4x^2}{2(z-2)}f\Big)-\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{2x}{z-2}f\Big)\right]$$

$$+\mathbf{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{y}{2(z-2)}f\Big)-\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{2x}{z-2}f\Big)\right]=0$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{yf}{z-2}+\dfrac{yf'(z-2)-yf}{2(z-2)^2}=0, \\ -\dfrac{4xf}{z-2}-2x\dfrac{f'(z-2)-f}{(z-2)^2}=0, \\ 0=0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y(z-2)f'(z)+y(2z-5)f(z)=0, \\ x(z-2)f'(z)+x(2z-5)f(z)=0, \end{cases} \qquad (y\neq 0,\ x\neq 0)$$

$$(z-2)f'(z)+(2z-5)f(z)=0 \iff \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{2z-5}{z-2} \iff$$

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -\int \frac{2z-5}{z-2}dz + c_1 \iff$$

$$\ln f(z) = -\int\left(2-\frac{1}{z-2}\right)dz + c_1 = -2z+\ln|z-2|+c_1 \iff$$

$$f(z) = c\,e^{-2z}(z-2)$$

6. (a) Η κλίση της f, $\nabla f = (y^2,\, 2xy+z,\, y)$, για $P_0(1,1,2)$ είναι

$$\nabla f\big|_{P_0} = (1,4,1).$$

Το διάνυσμα $\mathbf{d}$ είναι όντως μοναδιαίο, διότι

$$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{4}{9}} = 1$$

και επειδή οι f_x, f_y, f_z είναι συνεχείς παντού έχουμε

$$D_{\mathbf{d}}(P_0) = (1,4,1)\cdot\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) = 0$$

Επομένως το διάνυσμα της κλίσης στο σημείο P_0 είναι κάθετο στο $\mathbf{d}$.

(b) Δίνεται η $f(x,y)$ δίπλα στο $(0,0)$ και ζητείται να εξετάσουμε την ύπαρξη παραγώγων κατά κατεύθυνση στο $(0,0)$. Αν $\mathbf{u}=(h,k)$ με $h^2+k^2=1$, τότε έχουμε:

$$D_{\mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(th,\,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2hk}{t^2(h^2+k^2)}\cdot 0 = \lim_{\lambda\to 0}\frac{hk}{t}.$$

Από τη σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι όταν $h=0$ ή $k=0 \Rightarrow D_{\mathbf{u}}(0,0)=0$ ενώ όταν $hk\neq 0$ η $D_{\mathbf{u}}(0,0)$ δεν υπάρχει.

7. (a) Από το πρόβλημα έχουμε ότι

$$\mathbf{u} = \frac{\nabla f_M}{\|\nabla f_M\|},$$

όπου

$$\nabla f_M = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)_M = (-108, 27, -54).$$

$$\|\nabla f_M\| = \sqrt{108^2+27^2+54^2} = 27\sqrt{21}.$$

Άρα

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{21}}(-4,1,-2).$$

(b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{y^2-0}{y} = 0.$$

Από τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου έχουμε

$$D_{\mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(th,tk)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1-0}{t}$$

που δεν υπάρχει. Συμπεραίνουμε ότι μπορεί να μην υπάρχει η παράγωγος κατά κατεύθυνση στο $(0,0)$, ενώ υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι.

8. (a) Αν $\vec{F}(P,Q,R)$ είναι μία διανυσματική συνάρτηση στο $\mathbb{R}^3$, τότε θα έχουμε

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi P) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi Q) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi R)$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial x}P + \varphi\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}Q + \varphi\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}R + \varphi\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$= \varphi\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}P + \frac{\partial \varphi}{\partial y}Q + \frac{\partial \varphi}{\partial z}R\right)$$

$$= \varphi\,\operatorname{div}\vec{F} + \vec{F}\cdot\nabla\varphi$$

(b) Αν υπάρχει συνάρτηση f τέτοια ώστε $\vec{F} = \nabla f$, τότε θα πρέπει

$$f_x = xy, \qquad f_y = y, \qquad f_z = z.$$

Όμως

$$f_{xy} = x \text{ και } f_{yx} = 0.$$

Και επειδή οι

$$f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx}$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις, θα πρέπει $f_{xy} = f_{yx}$, δηλαδή $x = 0$.
Συνεπώς δεν υπάρχει τέτοια f.

9. (a) Για να είναι το πεδίο $\mathbf{F}$ συντηρητικό θα πρέπει $rot\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Όμως

$$rot\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \sin y^2 + z^3 & 2xy\cos y^2 - 2 & 3xz^2 + 4 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{k}(2y\cos y^2 - 2y\cos y^2) - \mathbf{j}(3z^2 - 3z^2) + \mathbf{i}(0) = \mathbf{0}$$

Άρα το πεδίο είναι συντηρητικό.

(b) Αν $f(x,y,z)$ είναι η συνάρτηση δυναμικής ενέργειας, τότε αυτή υπολογίζεται από τον τύπο

$$f(x,y,z) = \int_a^x F_1(t,y,z)dt + \int_b^y F_2(a,t,z)dt + \int_c^z R(a,b,t)dt$$

όπου $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ και (a,b,c) σημείο του πεδίου ορισμού της $\mathbf{F}$. Παίρνουμε $(a,b,c) = (0,0,0)$ και έχουμε

$$f(x,y,z) = \int_0^x (\sin y^2 + z^3)dt + \int_0^y (-2)dt + \int_0^z 4dt \Rightarrow$$

$$f(x,y,z) = x\sin y^2 + xz^3 - 2y + 4z$$

(c) Ως γνωστόν, το έργο είναι

$$W_{A\to B} = f(B) - f(A) = f(1, \sqrt{\pi}/2, 1) - f(2,0,-1)$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} + 1 - 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} + 4 = 12 - 2\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$