Μερικές Παράγωγοι και Διαφορισιμότητα

Ιωάννης Γουναρίδης

Τμ. Μηχανικών Υπολογιστών & Πληροφορικής

Πανεπιστήμιο Πατρών

Γενικά Μαθηματικά II

Ορισμός Μερικής Παραγώγου

Έστω η συνάρτηση $z = f(x, y)$ ορισμένη στο $x0y$. Ονομάζουμε μερική παράγωγο της $f(x, y)$ ως προς x στη θέση (x_0, y_0) το όριο:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Δηλαδή παίρνουμε το x ως μεταβλητή και το $y = y_0$ σταθερό.

Μερική Παράγωγος ως προς y

Ομοίως, η μερική παράγωγος ως προς y ορίζεται ως:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Δηλαδή παίρνουμε το y ως μεταβλητή και το $x = x_0$ σταθερό.

Μερικές Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης - Συμβολισμοί

Οι κανόνες παραγώγισης για συναρτήσεις μιας μεταβλητής ισχύουν και για τις μερικές παραγώγους. Για ανώτερες τάξεις, χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f_{xxy}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = f_{zyx}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yxy}$$

Περίληψη Συμβολισμών

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f_{xxy} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = f_{zyx} \qquad \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yxy}$$

Ορισμός: Μικτές Παράγωγοι

Οι συναρτήσεις $f_{xy}(x, y)$ και $f_{yx}(x, y)$ λέγονται μικτές παράγωγοι και υπολογίζονται ως εξής:

- $f_{xy}(x, y)$: Παραγωγίζοντας πρώτα ως προς x και μετά ως προς y.
- $f_{yx}(x, y)$: Παραγωγίζοντας πρώτα ως προς y και μετά ως προς x.

Προσοχή: Οι $f_{xy}(x, y)$ και $f_{yx}(x, y)$ είναι ίσες όταν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 1

Αν η συνάρτηση $z = f(x, y)$ και οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y, f_{xy} είναι συνεχείς, τότε ισχύει:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Πρόταση 2

Αν η συνάρτηση $z = f(x, y)$ είναι ορισμένη και οι f_x, f_y είναι πεπερασμένες και συνεχείς στο (x_0, y_0), τότε:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

Πρόταση 3

Αν η $z = f(x, y)$ είναι δύο φορές διαφορίσιμη, τότε:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Μεθοδολογικό Σχόλιο 2.1

Όταν μας δίνεται ότι υπάρχουν μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης και είναι συνεχείς, ή ότι η συνάρτηση είναι δύο φορές διαφορίσιμη, αυτό σημαίνει ισότητα μικτών παραγώγων:

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Κανόνας της Αλυσίδας

Υπενθυμίζουμε ότι για συναρτήσεις μιας μεταβλητής ισχύει:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ο κανόνας αυτός εφαρμόζεται και στις σύνθετες συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών.

Σύνθεση Συναρτήσεων

Έστω:

$$g : A \to B \quad \text{με} \quad y = g(x)$$

$$f : B \to \Gamma \quad \text{με} \quad z = f(y)$$

Ορίζουμε τη σύνθεση $f \circ g : A \to \Gamma$ με:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Διάγραμμα Ροής

$$\text{A: } x \xrightarrow{g(x)} \text{B: } y = g(x) \xrightarrow{f(y)} \Gamma\text{: } z = f(y)$$

Για την παράγωγο ισχύει:

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dg}{dx}$$

Μεθοδολογικό Σχόλιο 2.2

Αν έχουμε το διάγραμμα ροής της σύνθεσης $f(g(x))$, τότε για τον υπολογισμό της παραγώγου, πολλαπλασιάζουμε τις παραγώγους κάθε κομματιού του ¨δρόμου' που συνδέει το x και το z, από το τέλος προς την αρχή.

Συγκεκριμένα:

$$\frac{df}{dy} \times \frac{dg}{dx}$$

Παρατήρηση για Πολλαπλούς Δρόμους

Αν από την αρχική μεταβλητή μέχρι τη συνάρτηση έχουμε περισσότερους από έναν δρόμους, τότε τους αθροίζουμε.

Μερικές Παράγωγοι για Σύνθετες Συναρτήσεις

Έστω $z = f(x, y)$, όπου x και y είναι μονοπαραμετρικά εκφρασμένα ως προς t:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

Για τη σύνθεση $z = f(x(t), y(t))$, ισχύει:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Παράγωγος Πρώτης Τάξης ως προς t

Για τη συνάρτηση $z = f(x, y)$, με x και y συναρτήσεις του t, η παράγωγος ως προς t δίνεται από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_x\dot{x} + f_y\dot{y}$$

Όπου $\dot{x}$ και $\dot{y}$ είναι οι παράγωγοι των x και y ως προς t.

Διάγραμμα Ροής για Σύνθεση

$$
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dr, "\frac{\partial f}{\partial x}"] & \\
t \arrow[ur, "x(t)"] \arrow[dr, "y(t)"'] & & z = f(x, y) \\
 & y \arrow[ur, "\frac{\partial f}{\partial y}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Παράγωγος Δεύτερης Τάξης ως προς t

Η παράγωγος δεύτερης τάξης δίνεται από:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = (f_x\dot{x} + f_y\dot{y})^{(2)} = f_x\ddot{x} + f_y\ddot{y} + f_{xx}(\dot{x})^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}(\dot{y})^2$$

Όπου $\ddot{x}$ και $\ddot{y}$ είναι οι δευτέρες παράγωγοι των x και y ως προς t.

Απόδειξη της Παράγωγου Δεύτερης Τάξης

Η απόδειξη της σχέσης βασίζεται στον υπολογισμό:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{df}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(f_x \dot{x} + f_y \dot{y}\right)$$

Επομένως:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = f_{xx}(\dot{x})^2 + 2 f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}(\dot{y})^2 + f_x \ddot{x} + f_y \ddot{y}$$

Παράγωγος Δεύτερης Τάξης ως προς t

Για τη συνάρτηση $f(x, y)$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$, η παράγωγος δεύτερης τάξης δίνεται από:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = f_{xx}(\dot{x})^2 + 2f_{xy}\dot{x}\dot{y} + f_{yy}(\dot{y})^2 + f_x\ddot{x} + f_y\ddot{y}$$

Διάγραμμα Ροής για Μετασχηματισμό Μεταβλητών

Έστω ότι $x = x(u, v)$ και $y = y(u, v)$. Για τον μετασχηματισμό από τις μεταβλητές (u, v) στις (x, y), το διάγραμμα ροής είναι το εξής:

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "x(u,v)"] \arrow[rdd] & x \arrow[rd, "\frac{\partial f}{\partial x}"] & \\
 & & z = f(x,y) = g(u,v) \\
v \arrow[r, "y(u,v)"'] \arrow[ruu] & y \arrow[ru, "\frac{\partial f}{\partial y}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Μερικές Παράγωγοι Πρώτης Τάξης ως προς u και v

Οι μερικές παράγωγοι της $z = f(x, y) = g(u, v)$ ως προς u και v είναι:

$$\frac{\partial g}{\partial u} = g_u = f_x \frac{\partial x}{\partial u} + f_y \frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = g_v = f_x \frac{\partial x}{\partial v} + f_y \frac{\partial y}{\partial v}$$

Μερικές Παράγωγοι Δεύτερης Τάξης ως προς u και v

Για τη σύνθετη συνάρτηση $z = f(x, y) = g(u, v)$, οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης είναι:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = g_{uu} = \left(f_x \frac{\partial x}{\partial u} + f_y \frac{\partial y}{\partial u} \right)^{(2)} + f_x \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + f_y \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = g_{vv} = \left(f_x \frac{\partial x}{\partial v} + f_y \frac{\partial y}{\partial v} \right)^{(2)} + f_x \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + f_y \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$$

Διάγραμμα Ροής για Μετασχηματισμό Μεταβλητών

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r] \arrow[ddr] & x \arrow[dr, "\frac{\partial f}{\partial x}"] & \\
 & & z = f(x,y) = g(u,v) \\
v \arrow[r] \arrow[uur] & y \arrow[ur, "\frac{\partial f}{\partial y}"'] &
\end{tikzcd}$$

Μεθοδολογικό Σχόλιο 2.3

Για τη σύνθεση με $x = x(u, v)$ και $y = y(u, v)$, μπορούμε να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους g_{uu}, g_{vv}, g_{uv}, εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας.
Συγκεκριμένα:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = f_{xx}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + f_{xy}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) + f_{yy}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Αντίστροφη Σύνθεση Μεταβλητών

Έστω ότι η $f(x, y) = g(u, v)$ και οι μεταβλητές x, y εκφράζονται ως $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους μέσω του κανόνα της αλυσίδας.

Το διάγραμμα ροής θα είναι:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[ddr] & u \arrow[dr, "\frac{\partial g}{\partial u}"] & \\
& & g(u, v) = f(x, y) \\
y \arrow[r] \arrow[uur] & v \arrow[ur, "\frac{\partial g}{\partial v}"'] &
\end{tikzcd}$$

Μεθοδολογικό Σχόλιο 2.4

Έστω ότι $F(\sigma_1(x,y,z),\sigma_2(x,y,z)) = 0$ με $z = f(x,y)$. Για τον υπολογισμό παραγώγων της z ως προς x και y, ορίζουμε:

$$u = \sigma_1(x,y,z) \quad \text{και} \quad v = \sigma_2(x,y,z)$$

Τότε το διάγραμμα ροής είναι:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[ddr] & u \arrow[dr] & \\
z \arrow[ur] \arrow[dr] & & F(u,v) = 0 \\
y \arrow[uur] \arrow[r] & v \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ορισμός Διαφορισιμότητας

Μια συνάρτηση $z = f(x, y)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο (x_0, y_0), αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ και ισχύει:

$$\Delta f = df + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k \quad \text{όπου } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0 \text{ όταν } h, k \to 0$$

όπου:

$$\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \quad \text{και} \quad df = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y}$$

Μεθοδολογικό Σχόλιο 2.5

Αν:

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2 + k^2}} \to 0 \quad \text{για } (h, k) \to (0, 0)$$

τότε η $f(x, y)$ είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0). Αν η σχέση δεν ισχύει, τότε η $f(x, y)$ δεν είναι διαφορίσιμη.
Επιπλέον, αν:

$$\frac{\Delta f - df}{\sqrt{h^2 + k^2}} \quad \text{δεν συγκλίνει στο 0, τότε η } f(x, y) \text{ δεν είναι διαφορίσιμη.}$$

Ιδιότητες Διαφορισιμότητας

- **1ο**: Αν η $f(x,y)$ έχει μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στον τόπο t οι οποίες είναι συνεχείς, τότε είναι και διαφορίσιμη στον τόπο t.
- **2ο**: Αν η $f(x,y)$ είναι διαφορίσιμη στον τόπο t, τότε είναι και συνεχής στον τόπο αυτό.

Παρατήρηση: Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι διαφορίσιμες χωρίς να έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους.

Παρατηρήσεις για τη Διαφορισιμότητα

- Το αντίστροφο της πρώτης ιδιότητας δεν ισχύει γενικά, δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις που είναι διαφορίσιμες, αλλά δεν έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους.
- Το αντίστροφο της δεύτερης ιδιότητας επίσης δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις που είναι συνεχείς, αλλά δεν είναι διαφορίσιμες.

Ορισμός Ολικού Διαφορικού

Το ολικό διαφορικό της $z = f(x, y)$ στο σημείο (x, y) για τις αυξήσεις dx και dy των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y είναι:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Για μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με πολλαπλές μεταβλητές, το ολικό διαφορικό πρώτης τάξης δίνεται από:

$$df(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Πρόβλημα Ολικού Διαφορικού

Έστω $P, Q, R : A \to \mathbb{R}$ με $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Πότε το διαφορικό:

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

είναι τέλειο ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης $\Phi(x, y, z)$·

Λύση και Συνθήκες

Για να είναι τέλειο το ολικό διαφορικό, πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Αυτές είναι οι αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να υπάρχει λύση.

Υπολογισμός της Συνάρτησης Φ

Η συνάρτηση $\Phi(x, y, z)$ μπορεί να υπολογιστεί με τη σχέση:

$$\Phi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y, z)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t, z)\, dt + \int_{z_0}^{z} R(x_0, y_0, t)\, dt$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε με τα ολοκληρώματα:

$$\Phi = \int P\, dx + A_1(y, z), \quad \Phi = \int Q\, dy + A_2(x, z), \quad \Phi = \int R\, dz + A_3(x, y$$

όπου οι συναρτήσεις A_1, A_2, A_3 πρέπει να είναι οι ίδιες.

Ομογενείς Συναρτήσεις

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^n$ είναι ομογενής βαθμού p αν ισχύει:

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^p f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \forall t > 0$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση παραμένει αναλλοίωτη ως προς τον βαθμό p υπό ομοιόμορφη κλιμάκωση των μεταβλητών.

Θεώρημα του Ευλερ για Ομογενείς Συναρτήσεις

Η συνάρτηση $f(x, y, z)$, που έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, είναι ομογενής βαθμού p αν και μόνο αν:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = p \cdot f(x, y, z)$$

Αυτό εκφράζει την ιδιότητα ομογένειας μέσω της σχέσης των μερικών παραγώγων και υποδεικνύει ότι η κλιμάκωση των μεταβλητών διατηρεί την αρχική μορφή της συνάρτησης.

Παρατήρηση και Εφαρμογές

- Το παραπάνω πρόβλημα συνδέεται με διαφορικές εξισώσεις και έχει εφαρμογές στον υπολογισμό δυναμικών πεδίων.
- Το θεώρημα απαντά σε ερωτήματα σχετικά με τη διατήρηση ομοιογένειας και υπολογισμού συντηρητικών πεδίων.