Όριο - Συνέχεια

Ιωάννης Γουναρίδης

Τμ. Μηχανικών Υπολογιστών & Πληροφορικής

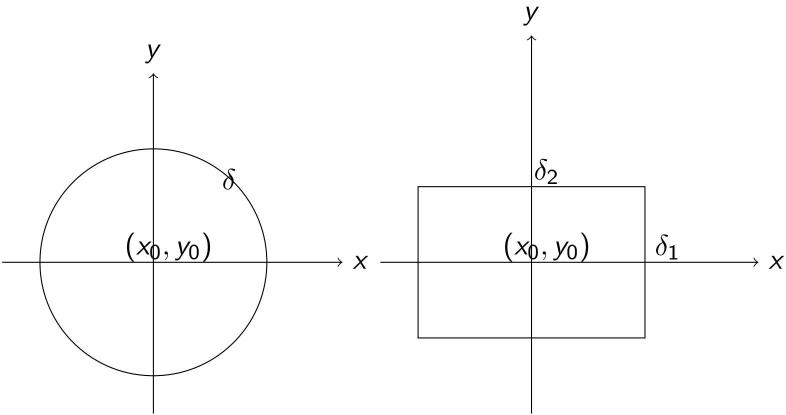
Πανεπιστήμιο Πατρών

Γενικά Μαθηματικά ΙΙ

Περιοχές στο επίπεδο $x0y$

α) Η σχέση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$ μας δίνει τα σημεία του κυκλικού δίσκου κέντρου (x_0, y_0) και ακτίνας δ.
β) Οι σχέσεις $|x - x_0| < \delta_1$ και $|y - y_0| < \delta_2$ μας δίνουν τα σημεία του ορθογωνίου με πλευρές μήκους $2\delta_1$, $2\delta_2$ και κέντρο (x_0, y_0).

Σχήματα: Δίσκος και Ορθογώνιο



Ορισμός 1: Όριο της $f(x, y)$

Λέμε ότι το όριο της $f(x, y)$ είναι L, όταν το (x, y) τείνει στο (x_0, y_0) και γράφουμε:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει περιοχή του (x_0, y_0): αν το (x, y) ανήκει σε αυτήν την περιοχή, τότε ισχύει:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Συνθήκες για το όριο

Αυτό σημαίνει ότι ισχύει ένα από τα παρακάτω:

- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ώστε το $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta) \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1, \delta_2 > 0$ ώστε το $(x, y) \in O((x_0, y_0), \delta_1, \delta_2) \implies |f(x, y) - L| < \varepsilon$

Αποδεικνύεται ότι αν υπάρχει το όριο, αυτό είναι μοναδικό.

Ορισμός 2: Συνέχεια συνάρτησης

Η συνάρτηση $z = f(x, y)$ είναι συνεχής στο σημείο (x_0, y_0) όταν:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Ορισμός 3: Ομοιόμορφη Συνέχεια

Έστω ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^2$ και μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο A, όταν:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{αν } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$$

$$\text{με} \quad (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 < \delta^2,$$

$$\text{τότε} \quad |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

Παρατήρηση

Ενώ μπορούμε να μιλάμε για την συνέχεια μιας συνάρτησης σε ένα σημείο (x_0, y_0), για την ομοιόμορφη συνέχεια μπορούμε να μιλάμε μόνο πάνω σε ένα σύνολο. Προφανώς, αν η $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

Μεθοδολογικό σχόλιο 1.1

Δείχνουμε από τον ορισμό ότι το όριο είναι L, αν από την $|f(x, y) - L| < \varepsilon$ καταλήξουμε σε ανισότητα που ισχύει όταν το (x, y) βρίσκεται σε περιοχή του (x_0, y_0).

Μετατόπιση συντεταγμένων

Με το μετασχηματισμό:

$$x = X + x_0 \quad y = Y + y_0$$

παίρνουμε αντί του ορίου $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, το όριο:

$$\lim_{(X,Y)\to(0,0)} f(X + x_0, Y + y_0)$$

Συνεπώς, η συνέχεια μπορούμε να μεθοδολήσουμε τα περί ορίων για το $(x, y) \to (0, 0)$.

Ορισμός 4: Επαλλάξιμα Όρια

Λέμε ότι τα επαλλάξιμα ή διαδοχικά όρια μιας συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0) είναι:

$$\lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right)$$

Σχετικά με τα επαλλάξιμα όρια ισχύουν

1. Αν τα επαλλάξιμα όρια υπάρχουν και δεν είναι ίσα, τότε το:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

δεν υπάρχει. Εάν το όριο της f στο (x_0, y_0) υπάρχει και τα επαλλάξιμα όρια υπάρχουν, τότε αυτά είναι ίσα.

2. Αν τα επαλλάξιμα όρια υπάρχουν και είναι ίσα με L, τότε το L είναι πιθανό όριο (πηγαίνουμε στον ορισμό).

3. Μπορεί να μην υπάρχουν τα επαλλάξιμα όρια και να υπάρχει το όριο.

Προσδιορισμός του Ορίου

Με ακολουθίες:
Αν $(x_n, y_n) \to (0, 0)$ και $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$, τότε το L είναι πιθανό όριο και από τον ορισμό ελέγχουμε αν όντως είναι το όριο.
Παρατήρηση:
Αυτό εφαρμόζεται συνήθως σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπως:

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{2n\pi}\right) \quad \text{ή}$$

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2n\pi + \pi/3}, \frac{1}{2n\pi + \pi/2}\right)$$

Πολικό Πλησίασμα

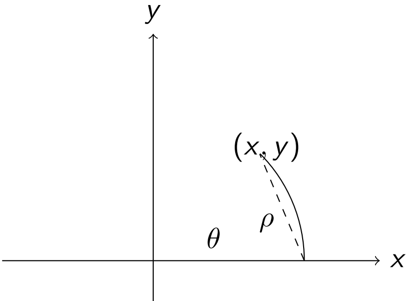
Πλησιάζουμε το $(0, 0)$ με πολικές συντεταγμένες, δηλαδή:

$$x = \rho \cos\theta, \quad y = \rho \sin\theta$$

Για $\rho \to 0$, έχουμε $(x, y) \to (0, 0)$.
Αν:

$$\lim_{\rho \to 0} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = L$$

τότε το L είναι πιθανό όριο.



Ειδικές περιπτώσεις ορίων

- Αν $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = A(\rho)$ (συνάρτηση μόνο της ρ) και $\lim_{\rho\to 0^+} A(\rho) = 1$, τότε:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$$

- Αν $f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = A(\rho)\cdot B(\theta)$ με $|B(\theta)| \leq C$, τότε:

$$\lim_{\rho\to 0^+} A(\rho) = 0 \implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Παρατήρηση

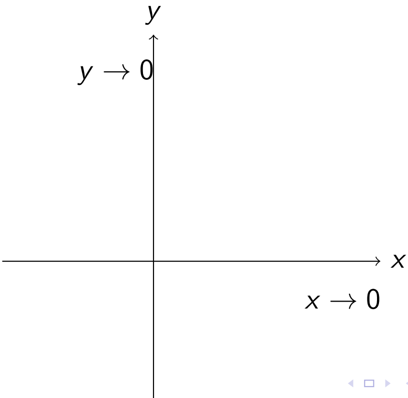
Εφαρμόζεται σε ρητές συναρτήσεις ή σε παραστάσεις της μορφής $x^2 + y^2$.

Με επαλλάξιμα όρια

Αν:

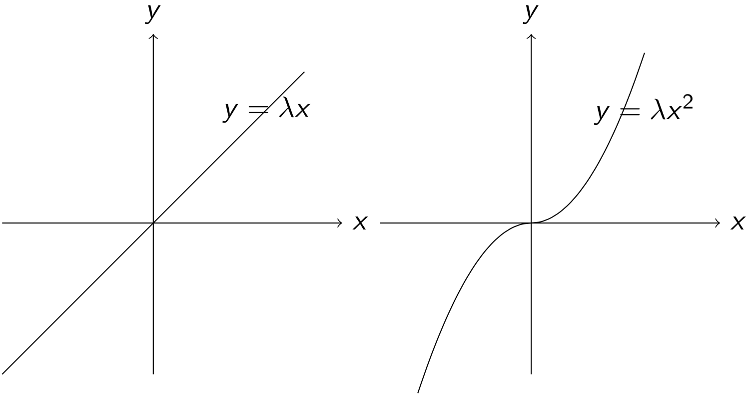
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = L$$

τότε το L είναι πιθανό όριο και από τον ορισμό ελέγχουμε αν όντως είναι το όριο.



Πλησίασμα του (0,0) με καμπύλες

Αν πάρουμε $y = \lambda x$ (ή $y = \lambda x^2$, κτλ.) και $\lim_{x \to 0} f(x, \lambda x) = L$, ανεξάρτητα του λ, τότε το L είναι πιθανό όριο και ανατρέχουμε στον ορισμό.



Παρατήρηση

Εφαρμόζεται συνήθως σε κλασματικές συναρτήσεις, όπου εκλέγουμε την $y = \lambda x^k$, έτσι ώστε ο βαθμός του αριθμητή να ισούται με τον βαθμό του παρονομαστή.

Παράδειγμα: Όριο για $f(x, y) = \frac{y}{y+x^3}$

Για τη συνάρτηση:

$$f(x, y) = \frac{y}{y + x^3}$$

παίρνουμε $y = \lambda x^3$, οπότε:

$$f(x, \lambda x^3) = \frac{\lambda x^3}{\lambda x^3 + x^3} = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$$

Πότε δεν υπάρχει το όριο

Το όριο δεν υπάρχει στις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Αν για τις ακολουθίες $(x_n, y_n) \to (0,0)$ και $(x_n', y_n') \to (0,0)$, έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = l, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n', y_n') = l', \quad \text{όπου} \quad l \neq l'$$

2. Αν για το πολικό πλησίασμα ισχύει:

$$\lim_{\rho\to 0^+} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \phi(\theta)$$

δηλαδή το όριο είναι εξαρτώμενο από τη γωνία θ.

3. Αν:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

δηλαδή τα επαλλάξιμα όρια δεν είναι ίσα.

Μεθοδολογικό Σχόλιο 1.2

Αν:

$$|f(x,y)| \leq g(x,y) \quad \text{για} \quad (x,y) \in B((0,0),a), \quad a > 0$$

και ισχύει:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$$

τότε:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Αν μπορούμε να γράψουμε:

$$f(x,y) = h(x,y) \cdot g(x,y)$$

με $|g(x,y)| \leq M$ για $(x,y) \in B((0,0),a)$, και:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$$

τότε $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Ορισμός Ομοιόμορφης Συνέχειας

Ο ορισμός της ομοιόμορφης συνέχειας μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subset \mathbb{R}^2$, είναι ισοδύναμος με το εξής:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 :$ **αν** $(x, y) \in A$ **και** $(x+\delta_1, y+\delta_2) \in A$ **με** $\delta_1^2+\delta_2^2 < \delta^2$,

τότε:

$$|f(x + \delta_1, y + \delta_2) - f(x, y)| < \varepsilon$$

Μεθοδολογικό Σχόλιο 1.3

Για να εξετάσουμε την ομοιόμορφη συνέχεια μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$, σχηματίζουμε το:

$$|f(x+\delta_1, y+\delta_2) - f(x,y)| = A(\delta_1, \delta_2, x, y)$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $B(\delta_1, \delta_2)$, ώστε για $(x,y) \in A$ να ισχύει:

$$A(\delta_1, \delta_2, x, y) \leq B(\delta_1, \delta_2) \quad \text{και} \quad \lim_{\delta_1, \delta_2 \to 0} B(\delta_1, \delta_2) = 0,$$

τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Συνθήκη Ομοιόμορφης Συνέχειας

Ενώ αν $\delta_1, \delta_2 > 0$ μπορούμε να βρούμε $(x, y) \in A$ με:

$$A(\delta_1, \delta_2, x, y) > c, \quad \text{όπου} \quad c \text{ είναι σταθερά,}$$

τότε η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Παρατήρηση

Η ομοιόμορφη συνέχεια μιας συνάρτησης εξαρτάται κατά κύριο λόγο από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και όχι από τον τύπο της.