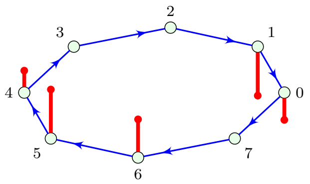
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Σταύρος Κοσμαδάκης, Δημήτριος Κοσμόπουλος & Εμμανουήλ Ψαράκης

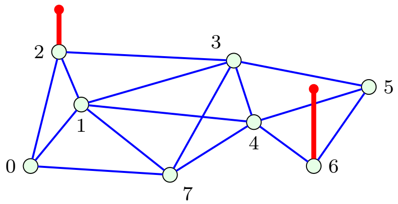
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Κυκλική Συνέλιξη:



$$\boldsymbol{h}_M \circledast_{U_M} \boldsymbol{x}_M = \sum_{m=0}^{M-1} U_M^m \boldsymbol{h}_M \, x_m = \sum_{m=0}^{M-1} U_M^m \boldsymbol{x}_M \, h_m = \boldsymbol{x}_M \circledast_{U_M} \boldsymbol{h}_M$$

Συνέλιξη Γειτνίασης:



$$\boldsymbol{h}_M \circledast_{A_M} \boldsymbol{x}_M = \sum_{m=0}^{M-1} \mathrm{A}_M^m \boldsymbol{h}_M \, x_m = \sum_{m=0}^{M-1} \mathrm{A}_M^m \boldsymbol{x}_M \, h_m = \boldsymbol{x}_M \circledast_{A_M} \boldsymbol{h}_M$$

Αποσύνθεση Μητρώου Κυκλικής Ολίσθησης:

$U_M^0 \boldsymbol{x}_M$

$U_M^1 \boldsymbol{x}_M$

$U_M^2 \boldsymbol{x}_M$

.

.

.

U_M^{M-1}

$\boldsymbol{x}_M$

Το Μητρώο είναι ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ:

$$U_M = W \Lambda_M W^H$$

$I_M \boldsymbol{x}_M$

$W \Lambda_M^1 W^H \boldsymbol{x}_M$

$W \Lambda_M^2 W^H \boldsymbol{x}_M$

.

.

.

$W \Lambda_M^{M-1} W^H \boldsymbol{x}_M$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Ολίσθησης Γραφημάτων:

$A_M^0 \boldsymbol{x}_M$
$A_M^1 \boldsymbol{x}_M$
$. \; A_M^2 \boldsymbol{x}_M$
.
.
.
$A_M^{M-1} \boldsymbol{x}_M$

Αν το Μητρώο Γειτνίασης είναι ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ:

$$A_M = V \Lambda_M V^{\mathrm{T}}$$

$I_M \boldsymbol{x}_M$
$V \Lambda_M^1 V^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_M$
$V \Lambda_M^2 V^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_M$
.
.
.
$V \Lambda_M^{M-1} V^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_M$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα
6. Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμένη Στο Μητρώο Γειτνίασης

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Ολίσθηση Γραφημάτων – Ιδιότητες

Η ενέργεια ενός ολισθημένου γραφήματος είναι $||\boldsymbol{x}_1||_2^2 = ||\mathrm{A}\boldsymbol{x}||_2^2$ όπου Α το μητρώο γειτνίασης.

Χρησιμοποιώντας την l_2 στάθμη ενός πίνακα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ενέργεια του ολισθημένου γραφήματος και του αρχικού, ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$\max_{\boldsymbol{x}} \frac{||A\boldsymbol{x}||_2^2}{||\boldsymbol{x}||_2^2} = \max_{\boldsymbol{x}} \frac{\boldsymbol{x}^t A^T A\boldsymbol{x}}{||\boldsymbol{x}||_2^2} = \lambda_{max}^2, \text{ όπου } \lambda_{max} = \max_{\boldsymbol{k}} \{\lambda_k\}$$

Ολίσθηση Γραφημάτων – Ιδιότητες

Επομένως η ενέργεια ενός ολισθημένου γραφήματος δεν διατηρείται!

Η ενέργεια ενός ολισθημένου σήματος γραφήματος είναι μικρότερη ή ίση με την ενέργεια του αρχικού σήματος γραφήματος.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το σήμα είναι ανάλογο του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_{max} .

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα
6. Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

Ιδιότητες

Επομένως, η έξοδος ενός συστήματος σε ένα γράφημα με κανονικοποιημένο μητρώο γειτνίασης μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\boldsymbol{y} = \left(\sum_{m=0}^{M-1} h_m A_{norm}^{m} \right) \boldsymbol{x} = H(A_{norm}) \boldsymbol{x}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα (GFT)
6. Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

Ιδιότητες

Ας υποθέσουμε ότι το μητρώο $H(A_{norm})$ είναι διαγωνοποιήσιμο, δηλαδή: $H(A_{norm}) = \boldsymbol{U}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}^{-1}$, τότε:

$$\boldsymbol{y} = H(A_{norm})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}^{-1}\,\boldsymbol{x}$$

ή: $$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{U}^{-1}\,\boldsymbol{x}$$

ή ισοδύναμα: $\boldsymbol{\Upsilon} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\Lambda})\mathbf{X}$, όπου $\boldsymbol{\Upsilon} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{y}$ και $\mathbf{X} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}$

είναι οι Μετασχηματισμοί Fourier (GFT) των γραφοσημάτων $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ αντίστοιχα.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα (GFT)
6. Συνάρτηση Μεταφοράς - Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
Βασισμενη Στο Μητρωο Γειτνιασησ

Συνάρτηση Μεταφοράς - Απόκριση Συχνότητας;

Αν $\mathbf{Y} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{y}$ και $\mathbf{X} = \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{x}$ είναι οι Μετασχηματισμοί Fourier των γραφημάτων (GFT) $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ αντίστοιχα, τότε το διαγώνιο μητρώο:

$$H(\Lambda)\mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

αποτελεί τον GFT της "κρουστικής απόκρισης" του διακριτού χρόνου συστήματος

Αν λ_k μία ιδιοτιμή του μητρώου A_{norm}, τότε:

$$H(\lambda_k) = \sum_{m=0}^{M-1} h_m \lambda_k^m$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα (GFT)
6. Συνάρτηση Μεταφοράς - Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΟΜΑΛΑ ΓΡΑΦΟΣΗΜΑΤΑ (Smooth Graps Signals)

- Πώς μπορούμε να ορίσουμε την ομαλότητα στο χώρο του γραφήματος;
- Μπορούμε να την ορίσουμε με μοναδικό τρόπο;
- Πώς μπορούμε να ορίσουμε την ομαλότητα στο Φασματικό χώρο;
- Ποιά ποσότητα παίζει το ρόλο της συχνότητας
- Τι σημαίνει Χαμηλή και Υψηλή συχνότητα;

Μητρώο Γειτνίασης: A

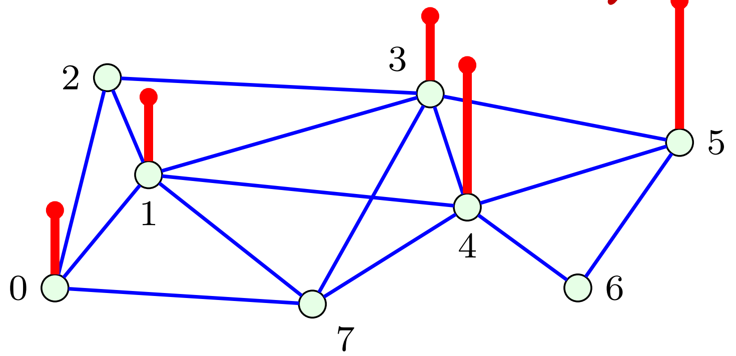
Συνδυαστικό Λαπλασιανό Μητρώο Γειτνίασης: $L_C=D-A$

Μη συμμετρικό Λαπλασιανό Μητρώο (Random walk): $L_{NS}=I-D^{-1}A$

Συμμετρικό Λαπλασιανό Μητρώο (Κανονικοποιημένο): $L_S=I-D^{-1/2}AD^{-1/2}$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
ΟΜΑΛΑ ΣΗΜΑΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ (Smooth Graps Signals)

Ομαλότητα στο χώρο του γραφήματος: $\mathcal{G}=(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, A, D, $L_C=D-A$, $P=D^{-1}A$



Η τετραγωνική μορφή:

$$\boldsymbol{x}_M^t L_C \boldsymbol{x}_M$$

που βασίζεται στο Συνδυαστικό Λαπλασιανό Μητρώο Γειτνίασης μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί σαν μέτρο της **συνολικής ομαλότητας** του σήματος γραφήματος

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

Φασματική Κατάταξη: Spectral Ordering Χαμηλοπερατό & Υψηπερατό

Γραφήματα

Η συνολική διακύμανση ενός γραφήματος:

$$E_{\Delta_{\xi_\kappa}} = ||\Delta \boldsymbol{\xi}_\kappa||_1 = ||\boldsymbol{\xi}_\kappa - A_{norm}\boldsymbol{\xi}_\kappa||_1 = \mathrm{TV}_{Anorm}(\xi_N)$$

$$0 = E_{\Delta_{\xi_{max}}} = E_{\Delta_{\xi_1}} \leq E_{\Delta_{\xi_2}} \leq E_{\Delta_{\xi_3}} \leq \ldots \leq E_{\Delta_{\xi_N}} = \left(1 - \frac{\lambda_{min}}{\lambda_{max}}\right)^2$$

$$\lambda_{max} = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_N = \lambda_{min}$$

είναι το κριτήριο κατάταξης ιδιοδιανυσμάτων σε αυτά των αργών και γρήγορων αλλαγών (ισχύει πάντα αυτό;)

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα (GFT)
6. Συνάρτηση Μεταφοράς - Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

Φασματική Αποθορυβοποίηση: Spectral Denoising-filtering

Ιδανικό χαμηλοπερατό Φίλτρο

Διατηρούμε όλα τα ιδιοδιανύσματα των οποίων οι ιδιοτιμές είναι μεγαλύτερες από την ιδιοτιμή λ_*, δηλαδή:

$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}1, & \lambda > \lambda_* \\ 0 & \lambda < \lambda_*\end{cases}$$

Αποθορυβοποίηση μέ “κανονικοποίηση” (regularization)

Ας θεωρήσουμε ότι διαθέτουμε τις παρατηρήσεις: $\boldsymbol{y}_N = \boldsymbol{x}_N + \boldsymbol{w}_N$

$$\min_{\boldsymbol{x}_N} ||\boldsymbol{w}_N||_2^2 + \boldsymbol{\lambda}||\,\boldsymbol{x}_N - \mathbf{A}\boldsymbol{x}_N||_2^2$$

$$\boldsymbol{x}^*{}_N = [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\lambda}(\mathbf{I} - \boldsymbol{A})^T(\mathbf{I} - \boldsymbol{A})]^{-1}\boldsymbol{y}_N$$

Ας σχολιάσουμε το κόστος της λύσης…

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

Σχεδίαση Φίλτρων στον Χώρο των Κόμβων

Έστω $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\Lambda})$ ο ιδανικός GFT του Γραφήματος τον οποίο, στην γενική περίπτωση, θέλουμε να προσεγγίσουμε με το ακόλουθο διάνυσμα:

$$\boldsymbol{diag}(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\Lambda})) = \sum_{m=0}^{M-1} \Lambda_M^m \boldsymbol{h}_M$$

ή ισοδύναμα:

$$d(\lambda_n) \sim \sum_{m=0}^{M-1} \lambda_n^m h_m, n = 1,2, \dots M$$

Μητρώο Γειτνίασης: A

Συνδυαστικό Λαπλασιανό Μητρώο Γειτνίασης: $L_C=D-A$

Μη συμμετρικό Λαπλασιανό Μητρώο (Random walk): $L_{NS}=I-D^{-1}A$

Συμμετρικό Λαπλασιανό Μητρώο (Κανονικοποιημένο): $L_S=I-D^{-1/2}AD^{-1/2}$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Συμμετρικό Λαπλασιανό Μητρώο (Κανονικοποιημένο): $L_S=I-D^{-1/2}AD^{-1/2}$

Βασική ιδιότητα: έχει ιδιοτιμές πάντα στο διάστημα [0 2]!!

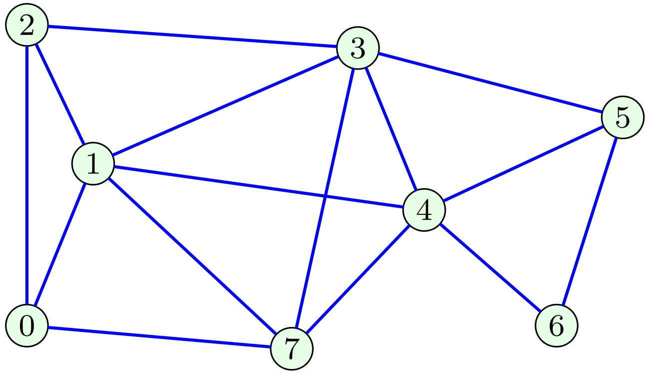
$$d(\lambda\ )\sim \sum_{m=0}^{M-1} \lambda^m h_m, n = 1,2,\ldots M$$

$$d(\omega)\sim \sum_{m=0}^{M-1} \cos(m\omega) g_m, n = 1,2,\ldots M!!!$$

Οι κλασσικές τεχνικές σχεδίασης φίλτρων είναι και πάλι εδώ !!

Minimax Design of Graph Filter Using Chebyshev
Polynomial Approximation Chien-Cheng Tseng , *Senior Member, IEEE*, and Su-Ling Lee

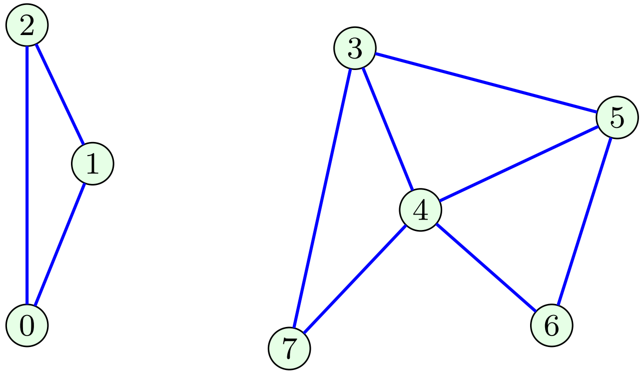
Συνδεδεμένο Γράφημα



Μητρώο Γειτνίασης

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c}
0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}\\
\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7
\end{array}
\end{array}
$$

Μη Συνδεδεμένο Γράφημα

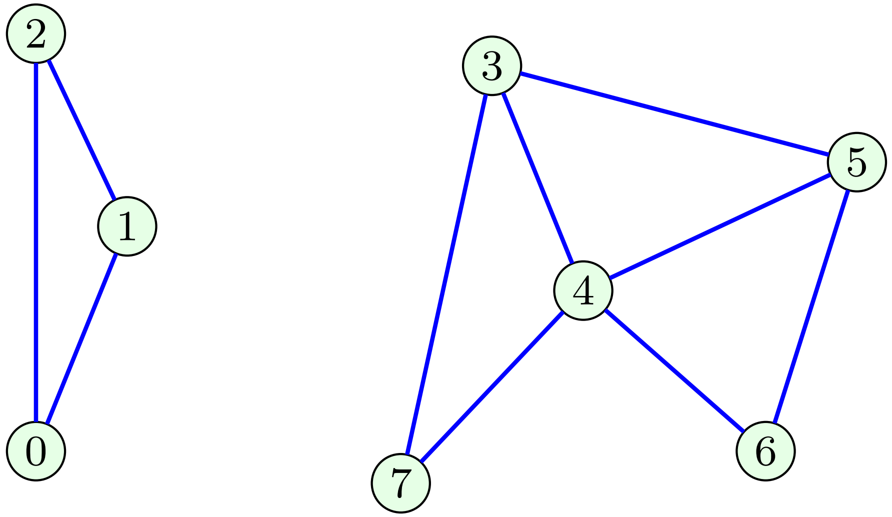


Μητρώο Γειτνίασης

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Ασύνδετο Γράφημα



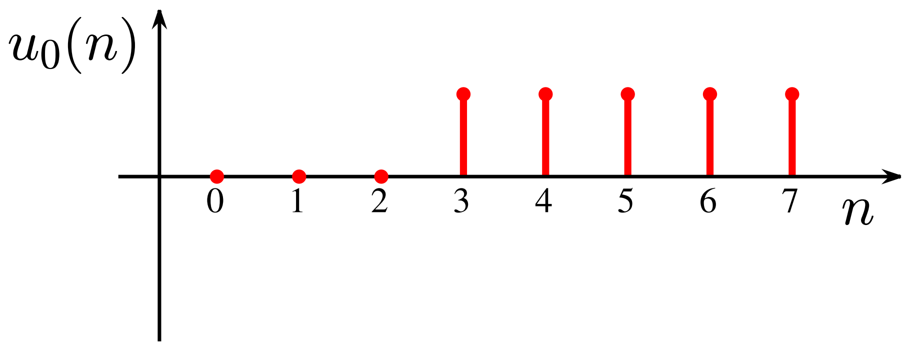
Μητρώο Γειτνίασης

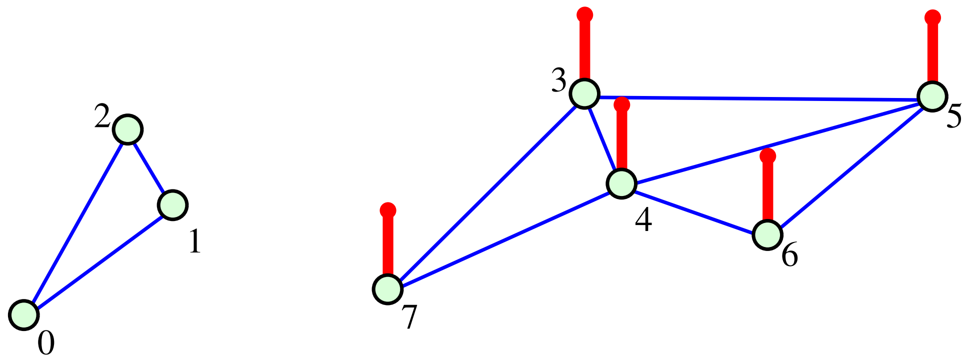
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Λαπλασιανό Μητρώο Γειτνίασης

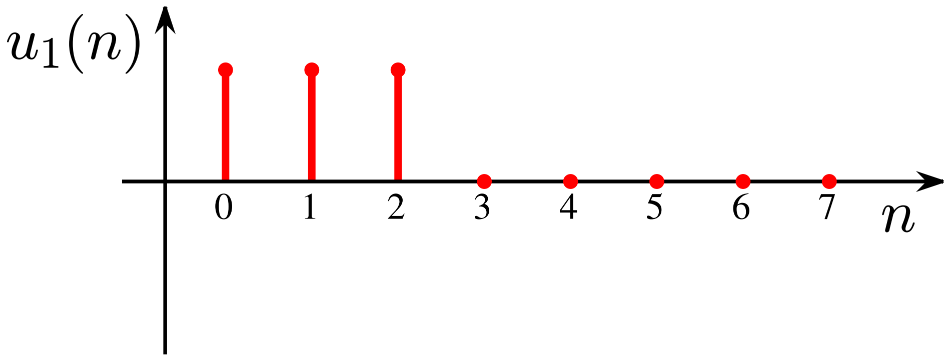
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

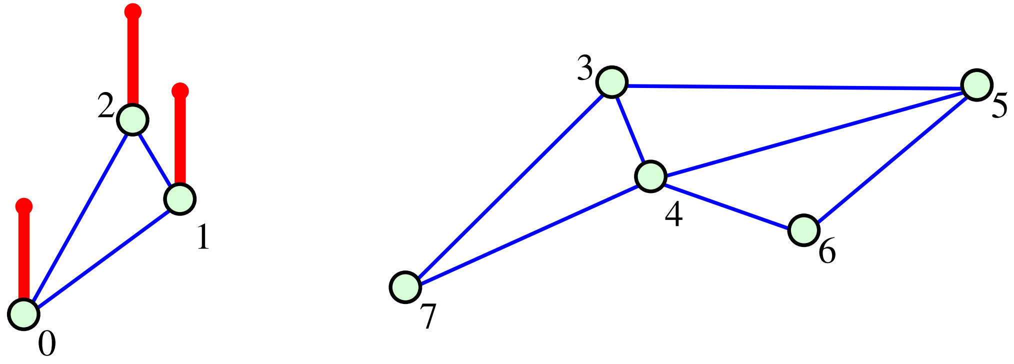
Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το πρώτο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v_0}$



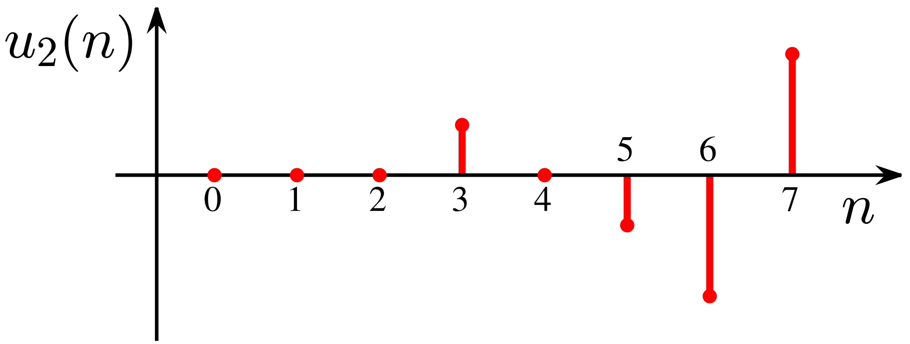


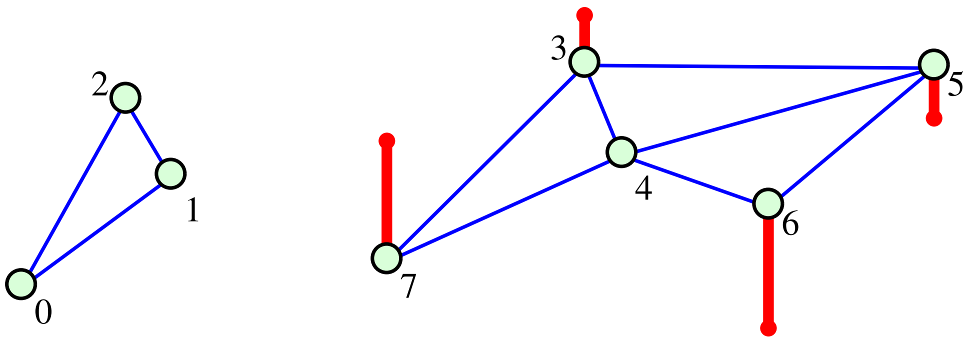
Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v}_1$



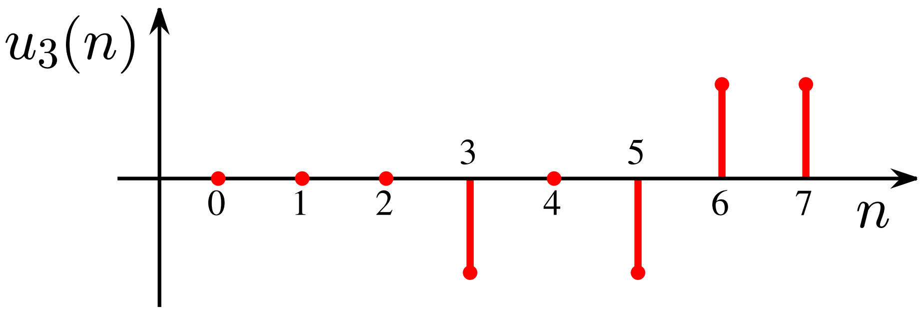


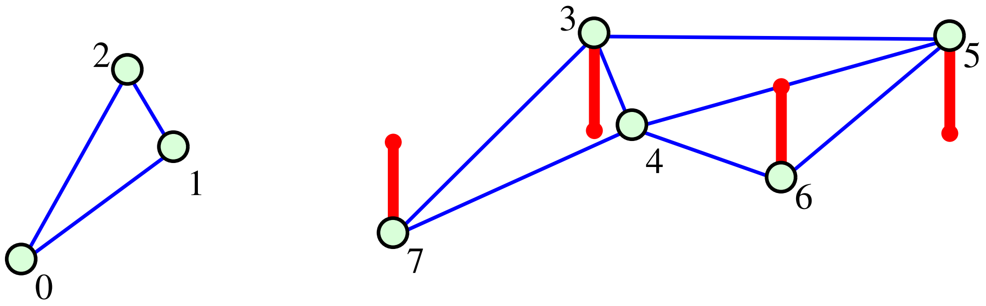
Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το τρίτο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v_2}$



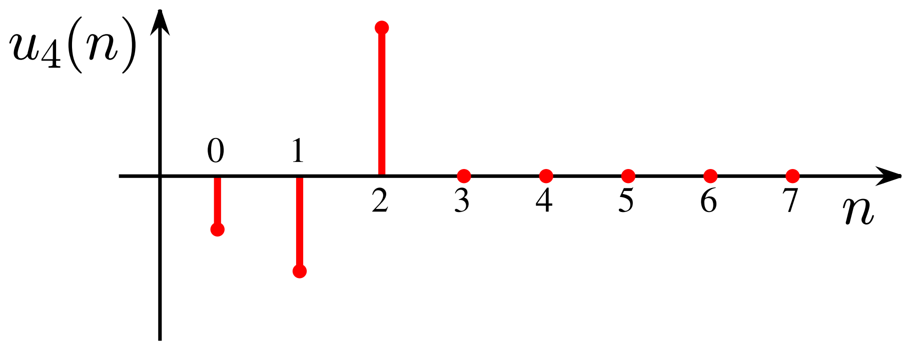


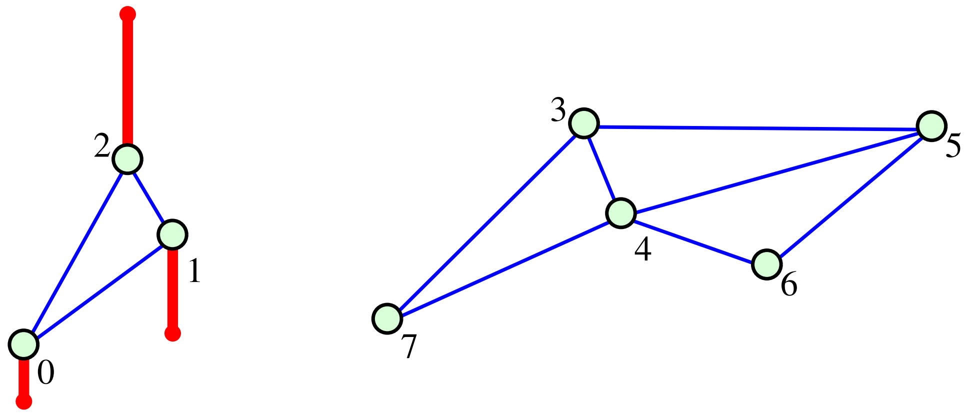
Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το τέταρτο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v}_3$



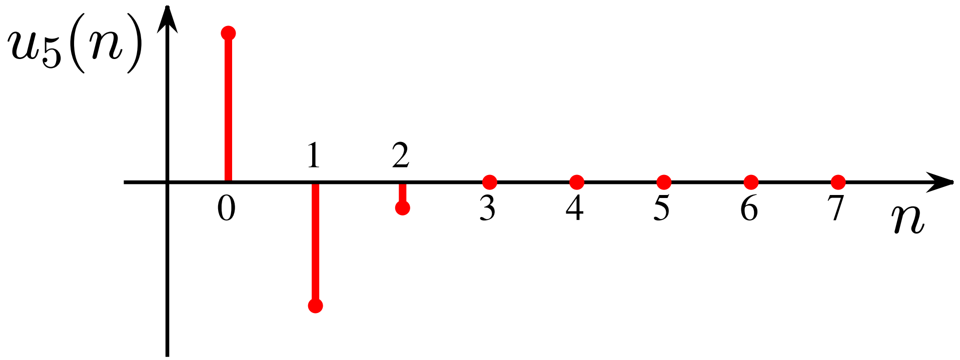


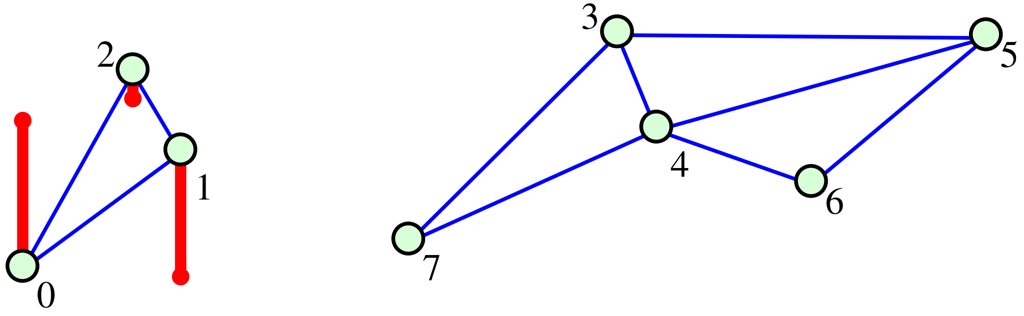
Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το πέμπτο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v_4}$



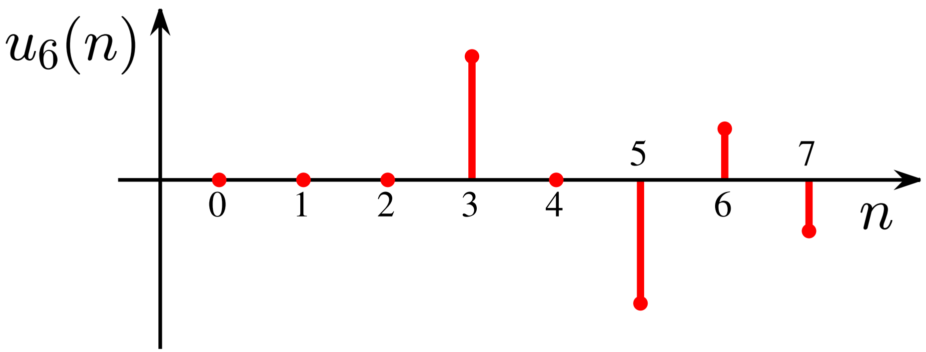


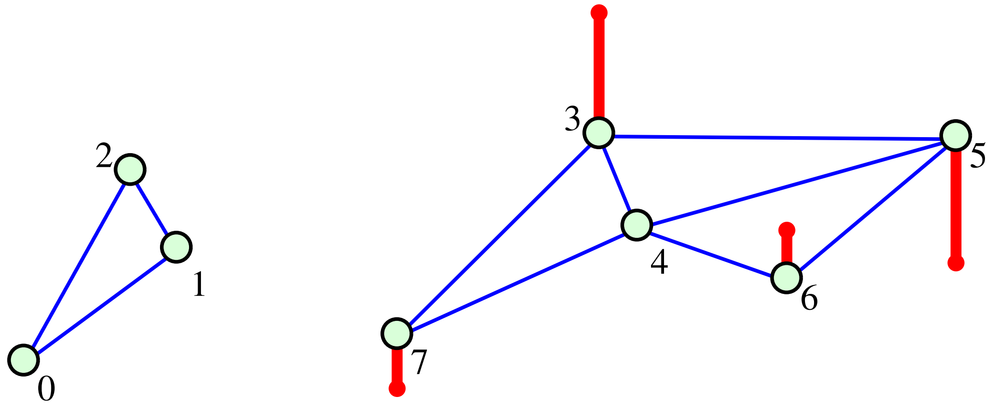
Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το έκτο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v}_5$



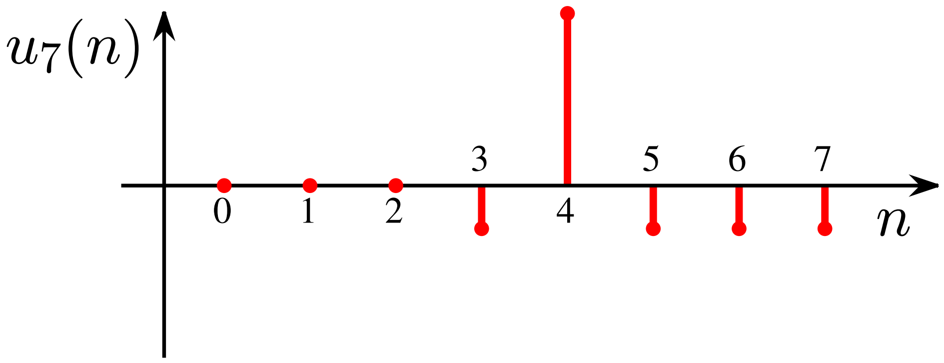


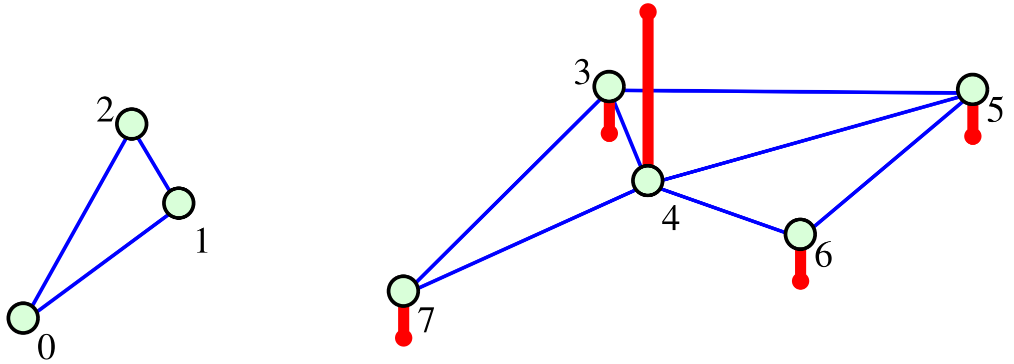
Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το έβδομο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v_6}$





Αποσύνθεση Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης: Το όγδοο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v_7}$





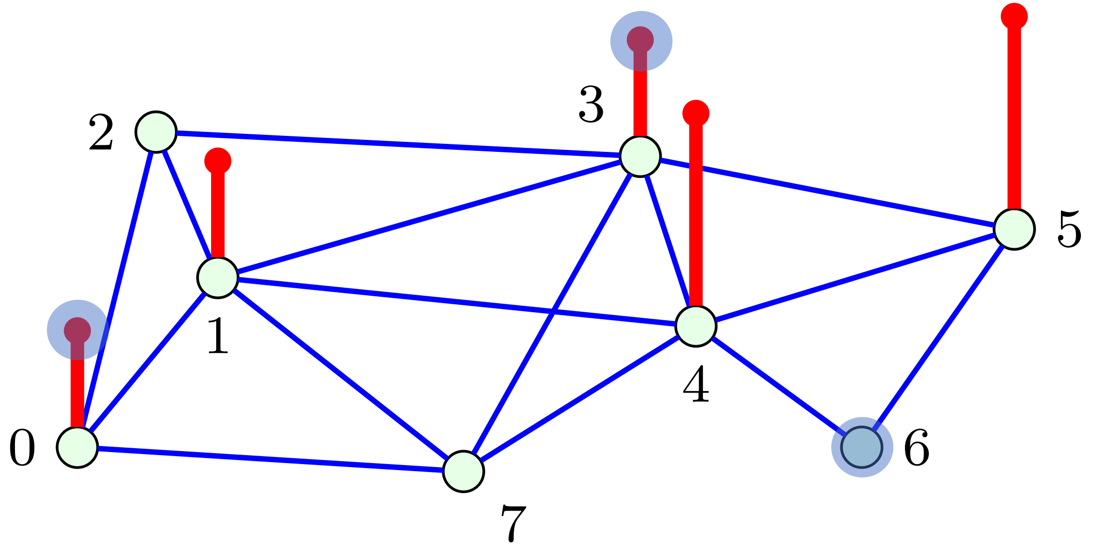
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση Σήματος σε Γράφημα
2. Ενέργεια ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
3. Μετασχηματισμός Fourier Γραφο-Σήματος (GFT)
4. Απόκριση Συχνότητας(;) - Συνάρτηση Μεταφοράς (;)
5. Σήματα & Συστήματα σε Γραφήματα
6. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
7. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών
8. Δειγματοληψία
9. Τυχαιότητα και Στοχαστικές Διαδικασίες σε Γραφήματα

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Ο στόχος η δειγματοληψία και η ανάκτηση σημάτων που ορίζονται σε γραφήματα.

- Συνθήκες για τέλεια ανάκτηση σημάτων γραφήματος περιορισμένης ζώνης από δείγματα που συλλέχθηκαν από ένα σύνολο κορυφών.



Ένα σήμα γραφήματος θα λέμε ότι είναι ζωνοπεριορισμένο σε σχέση με τη βάση *V* ενός GFT, με εύρος ζώνης *K* αν:

$$x = V_K a, a \in R^B$$

όπου V_K είναι είναι ένας υποπίνακας που περιέχει τις πρώτες *K* στήλες του μητρώου βάσης *V*. Η κλάση των σημάτων γραφήματος είναι γνωστή ως $BL_V(K)$

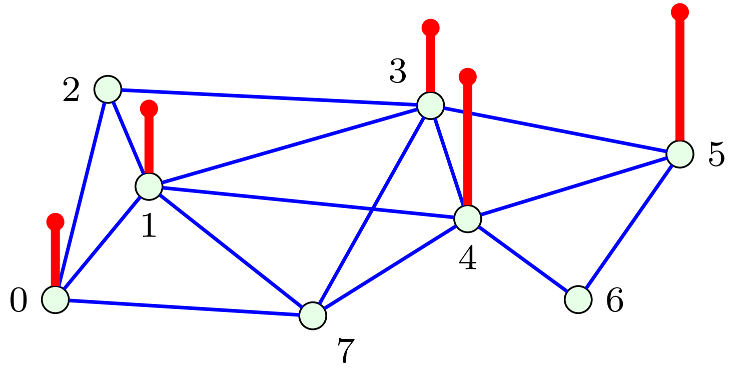
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Όταν η βάση V είναι το μητρώο ιδιοδιανυσμάτων V_{Lc} του Συνδυαστικού Λαπλασιανού Μητρώου Γειτνίασης $L_C=D-A$ τότε, τα σήματα που ανήκουν στη κλάση $BL_V(K)$ είναι συνολικά ομαλά κατά Lipschitz με παράμετρο K (αποδείξτε το).

$$\min_{\boldsymbol{x}_N} ||\boldsymbol{y}_N - \boldsymbol{x}_N||_2^2 + \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{x}_N^t \boldsymbol{L}_C \boldsymbol{x}_N$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ &ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ
ΟΜΑΛΑ ΣΗΜΑΤΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ (Smooth Graps Signals)

Ομαλότητα στο χώρο του γραφήματος: $\mathcal{G}=(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, A, D, $L_C=D-A$, $P=D^{-1}A$



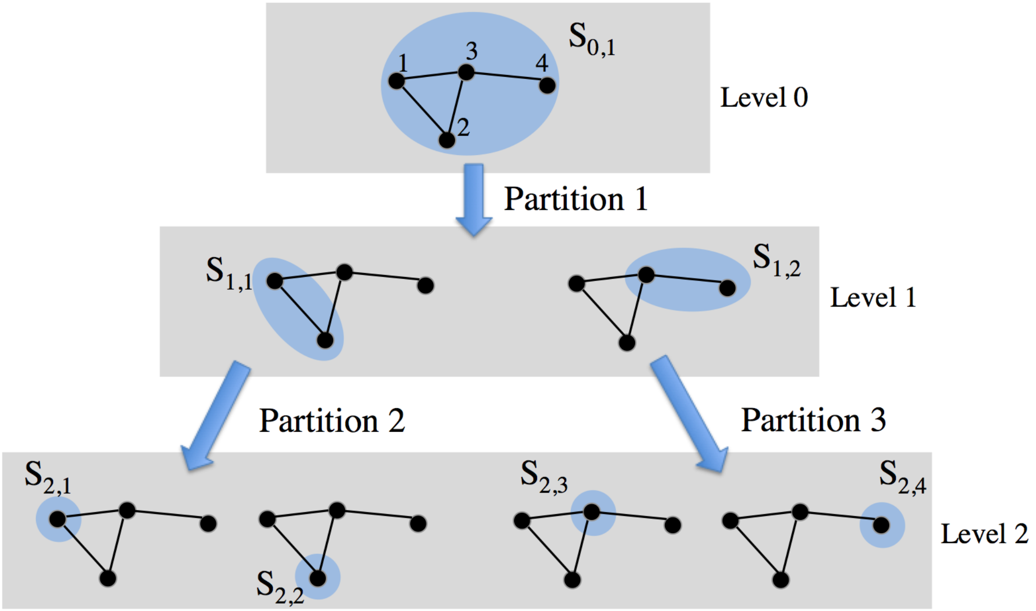
Αν:

$$\sum_{(n,m)\in\mathcal{E}} l_{nm}\,|x_n - x_m|^2 \leq K$$

Θα λέμε ότι το σήμα γραφήματος είναι **συνολικά ομαλό κατά Lipschitz** με παράμετρο K

Όταν η βάση *V* είναι το μητρώο ιδιοδιανυσμάτων V_P του Μητρώου Μετάβασης *P=D*$^{-1}$*A* τότε, τα σήματα που ανήκουν στη κλάση $BL_{V_P}(K)$ είναι ανά γειτονιά ομαλά κατά Lipschitz με παράμετρο K (αποδείξτε το)

Δειγματοληψία και multiresolution analysis



REPRESENTATIONS OF PIECEWISE SMOOTH SIGNALS ON GRAPHS

Siheng Chen[1], *Rohan Varma*[1], *Aarti Singh*[2], *Jelena Kovačević*[1,3]

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση Σήματος σε Γράφημα
2. Ενέργεια ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
3. Μετασχηματισμός Fourier Γραφο-Σήματος (GFT)
4. Απόκριση Συχνότητας(;) - Συνάρτηση Μεταφοράς (;)
5. Σήματα & Συστήματα σε Γραφήματα
6. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
7. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών
8. Δειγματοληψία
9. Τυχαιότητα και Στοχαστικές Διαδικασίες σε Γραφήματα

Definition 2 (Time Wide-Sense Stationarity). *A signal is Time Wide-Sense Stationary (WSS) if its first two statistical moments are invariant under translation, i.e:*

1. $m_{\mathbf{x}}[t] = \mathbb{E}\{\mathbf{x}[t]\} = c \in \mathbb{R}$,
2. $\mathbb{E}\{(\mathbf{x}[t] - m_{\mathbf{x}})(\mathbf{x}[s] - m_{\mathbf{x}})^*\} = \eta_{\mathbf{x}}[t-s]$,

where $\eta_{\mathbf{x}}$ is called the autocorrelation function of $\mathbf{x}$.

Definition 3. *A stochastic graph signal $\mathbf{x}$ defined on the vertices of a graph $\mathcal{G}$ is called Graph Wide-Sense (or second order) Stationary (GWSS), if and only if it satisfies the following properties:*

1. *its first moment is constant over the vertex set:* $m_{\mathbf{x}}[i] = \mathbb{E}\{\mathbf{x}[i]\} = c \in \mathbb{R}$ *and*
2. *its covariance is invariant with respect to the localization operator:*

$$\Sigma_{\mathbf{x}}[i,n] = \mathbb{E}\{(\mathbf{x}[i] - m_{\mathbf{x}})(\mathbf{x}[n] - m_{\mathbf{x}})\} = \mathcal{T}_i \gamma_{\mathbf{x}}[n].$$

$$\gamma_{\mathbf{x}}[\ell] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \eta_{\mathbf{x}}[t] e^{-j2\pi \frac{\ell t}{N}},$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Theorem 1. *If a signal is GWSS, its covariance matrix* $\Sigma_{\mathbf{x}}[i,j]$ *is jointly diagonalizable with the Laplacian of* $\mathcal{G}$, *i.e* $\Sigma_{\mathbf{x}} = U\Gamma_{\mathbf{x}}U^*$, *where* $\Gamma_{\mathbf{x}}$ *is a diagonal matrix.*

Proof. By Definition 1, the covariance localization operator can be written as:

$$\mathcal{T}_i\gamma_{\mathbf{x}}[n] = \gamma_{\mathbf{x}}(L)[i,n] = U\gamma_{\mathbf{x}}(\Lambda)U^*[i,n] \tag{6}$$

where $\gamma_{\mathbf{x}}(\Lambda)$ is a diagonal matrix satisfying $\gamma_{\mathbf{x}}(\Lambda)[\ell,\ell] = \gamma_{\mathbf{x}}(\lambda_\ell)$. To complete the proof set $\Gamma_{\mathbf{x}} = \gamma_{\mathbf{x}}(\Lambda)$. $\square$

Definition 1. *Let* $\mathcal{C}$ *be the set of functions* $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. *For agraph kernel* $g \in \mathcal{C}$ *(defined in the spectral domain) and a node* i, *the localization operator* $\mathcal{T}_i : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^N$ *reads:*

$$\mathcal{T}_i g[n] := \sum_{\ell=0}^{N-1} g(\lambda_\ell)u_\ell^*[i]u_\ell[n] = (g(L)\delta_i)[n] = g(L)[i,n]. \tag{2}$$

Stationary signal processing on graphs

Nathanaël Perraudin and Pierre Vandergheynst *