

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Σταύρος Κοσμάδης, Δημήτριος Κοσμόπουλος & Εμμανουήλ Ψαράκης

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Το **Βασικό Ερώτημα** που θα προσπαθήσουμε να **απαντήσουμε** είναι:

Πώς μπορούμε να **γενικεύσουμε** τεχνικές:

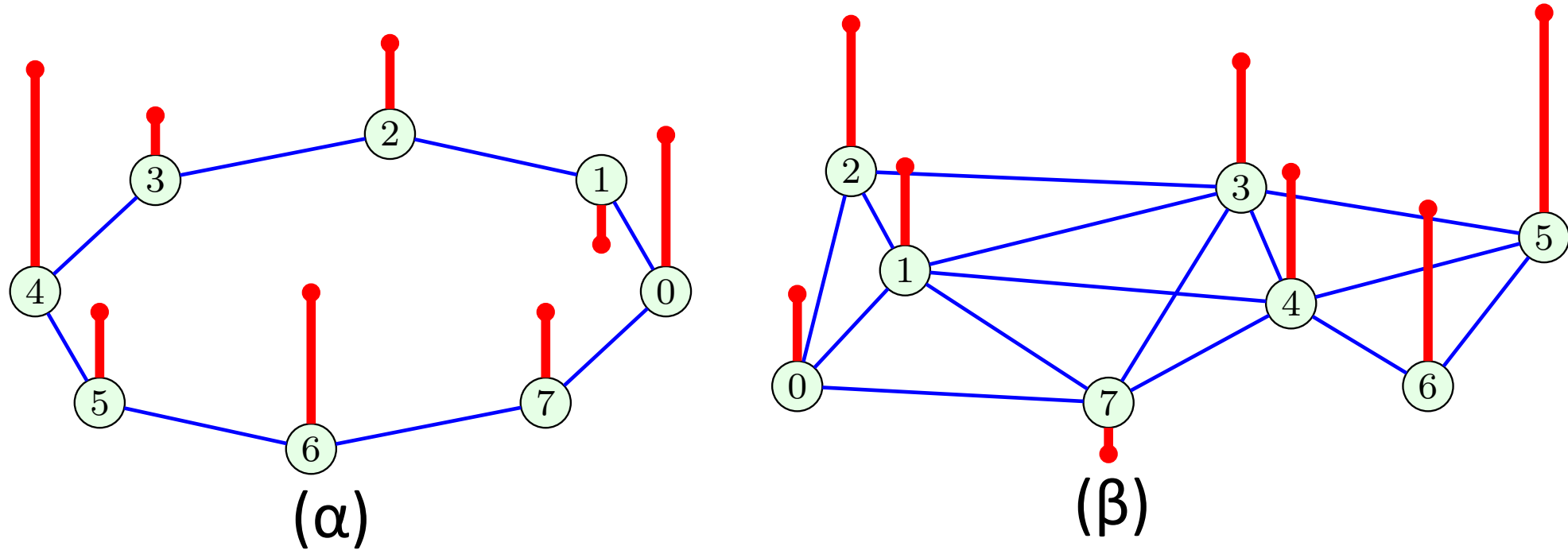
- της **κλασσικής** και
- της **στατιστικής** επεξεργασίας σημάτων
σε **δεδομένα** που είναι **πιο γενικά δομημένα**;

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης, ή....:

$$\mathcal{V}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

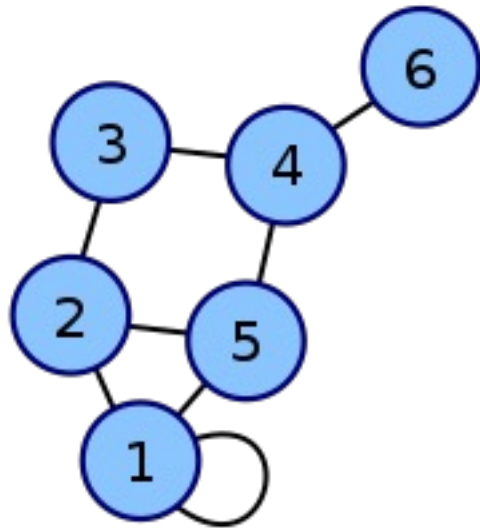


(α): **Περιοδικό** Σήμα Διακριτού Χρόνου τοποθετημένο σε ένα **μη κατευθυνόμενο Κυκλικό** Γράφημα

(β): **Μη κατευθυνόμενο** Γράφημα και η αναπαράσταση ενός **Περιοδικού (;)** σήματος διακριτού χρόνου πάνω του

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γράφημα



Μητρώο Γειτνίασης

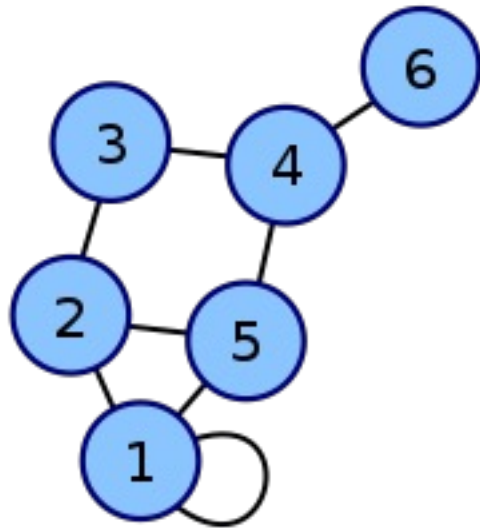
	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	1
5	1	1	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0	0

Το μητρώο γειτνίασης A έχει διαστάσεις $M \times M$ (6×6 στο παράδειγμά μας) και η τιμή του στοιχείου a_{ij} του μητρώου υποδηλώνει την ύπαρξη ή όχι της ακμής (i, j) , δηλαδή:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{αν υπάρχει η ακμή} \\ 0, & \text{αν δεν υπάρχει} \end{cases}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γράφημα



Μητρώο Γειτνίασης

	1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	1	0
2	1	0	1	0	1	0
3	0	1	0	1	0	0
4	0	0	1	0	1	1
5	1	1	0	1	0	0
6	0	0	0	1	0	0

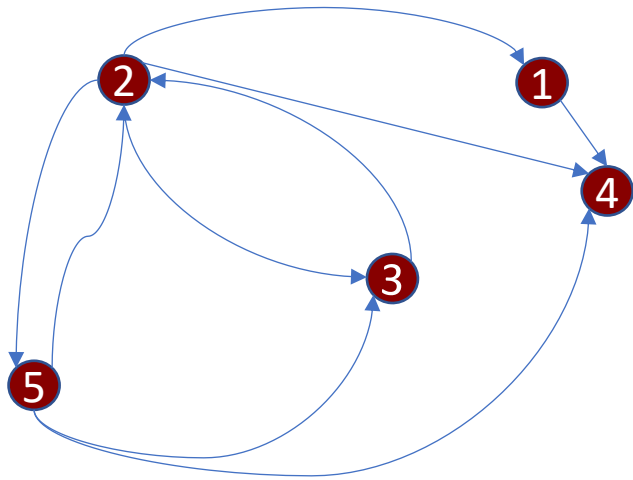
Το μητρώο **γειτνίασης** ενός **μη κατευθυνόμενου** γραφήματος είναι **συμμετρικό**, και επομένως έχει:

- ένα πλήρες σύνολο από **πραγματικές ιδιοτιμές** και
- **μια ορθογώνια** βάση ιδιοδιανυσμάτων

Το σύνολο των **ιδιοτιμών** του μητρώου αποτελεί το **φάσμα** του.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γράφημα



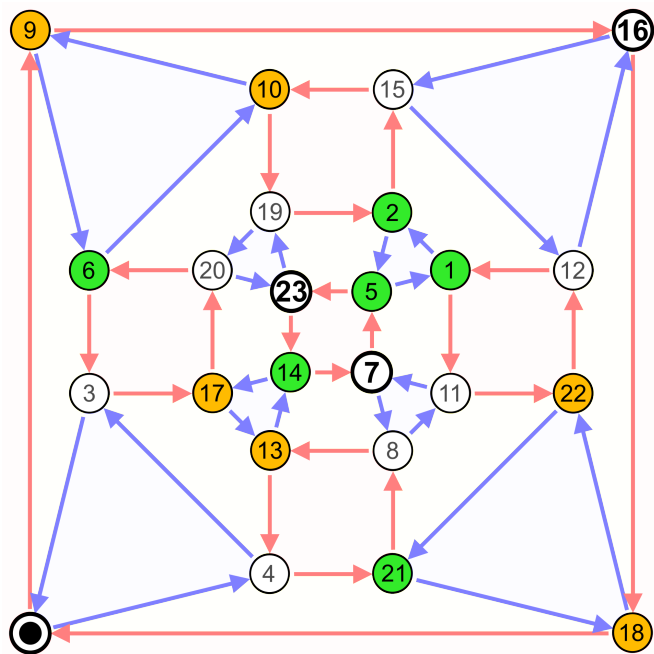
Μητρώο Γειτνίασης

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	0
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0
5	0	1	1	1	0

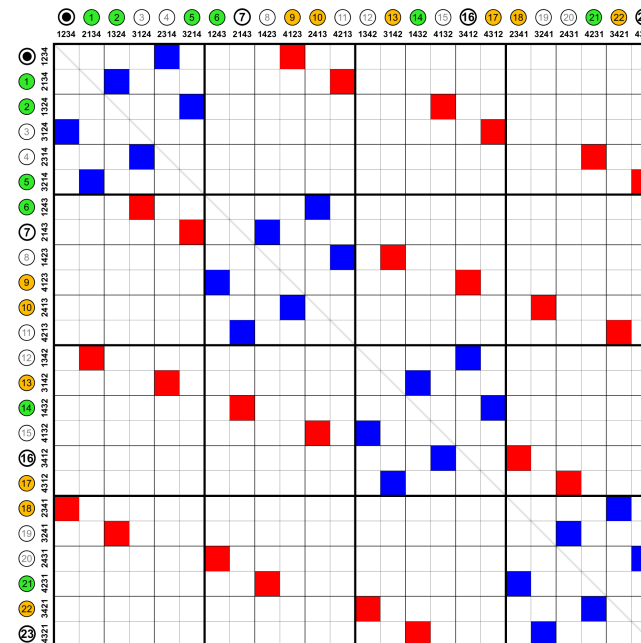
Συμπληρώστε το μητρώο Γειτνίασης για το παραπάνω Γράφημα

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Γράφημα



Μητρώο Γειτνίασης



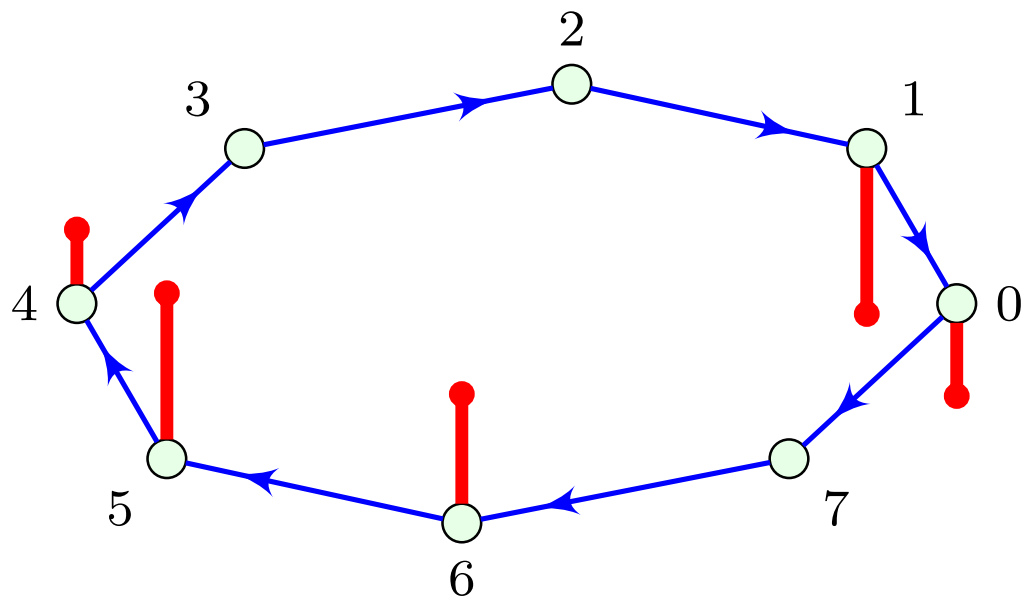
Το μητρώο γειτνίασης ενός μη κατευθυνόμενου γραφήματος είναι **συμμετρικό**, και επομένως έχει ένα πλήρες σύνολο από **πραγματικές ιδιοτιμές** και μια ορθογώνια βάση ιδιοδιανυσμάτων. Τι μπορούμε να πούμε για τα **ιδιοδιανύσματα** ενός κατευθυνόμενου γραφήματος;

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

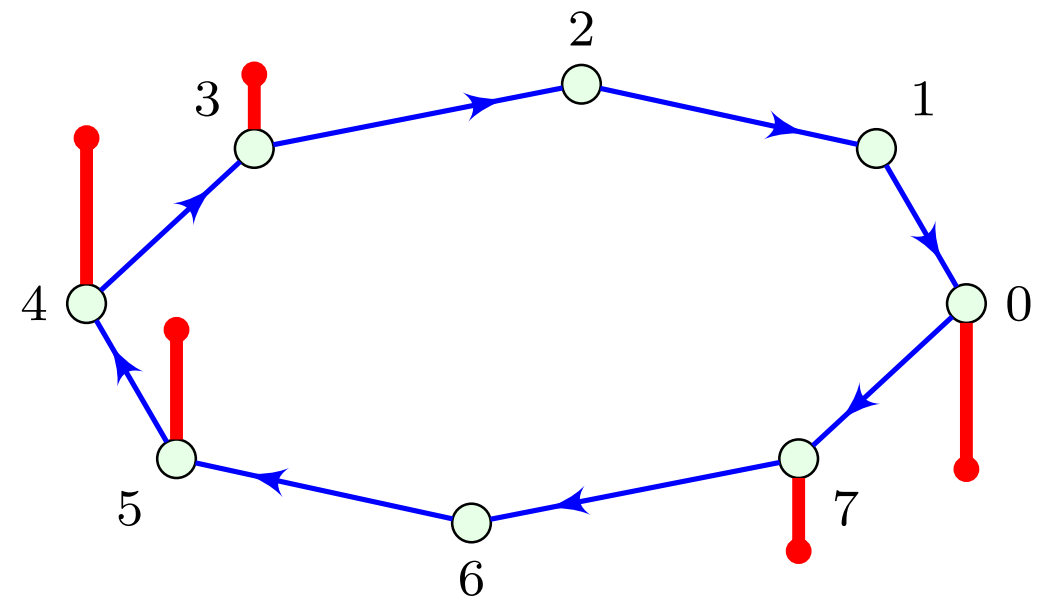
1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
3. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
4. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα
5. Απόκριση Συχνότητας
6. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
7. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αναπαράσταση Περιοδικού Σήματος
σε Κυκλικό Γράφημα



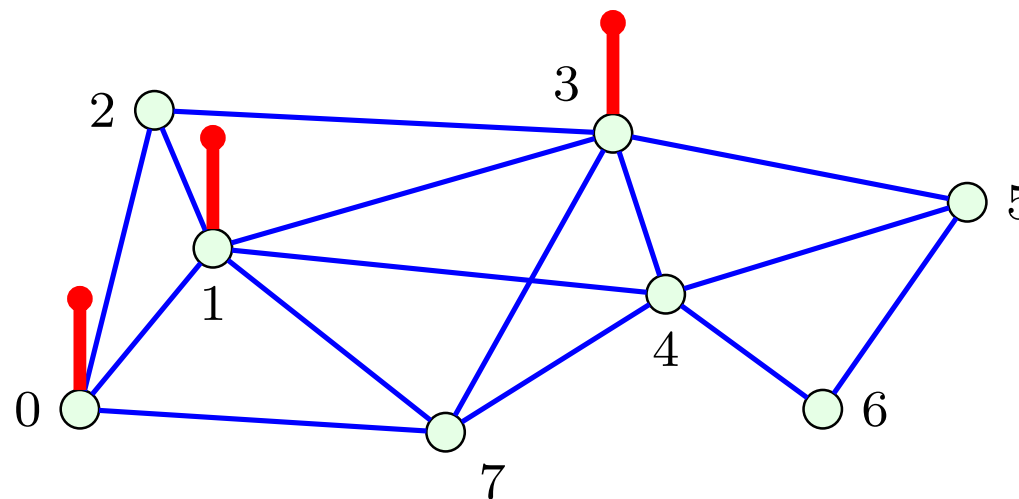
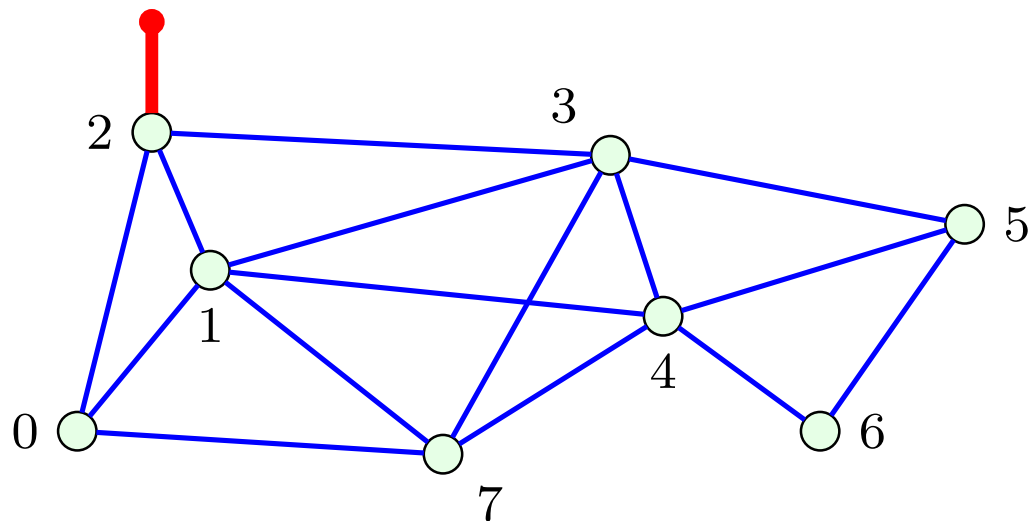
Ολίσθηση του Περιοδικού Σήματος
σε Κυκλικό Γράφημα



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

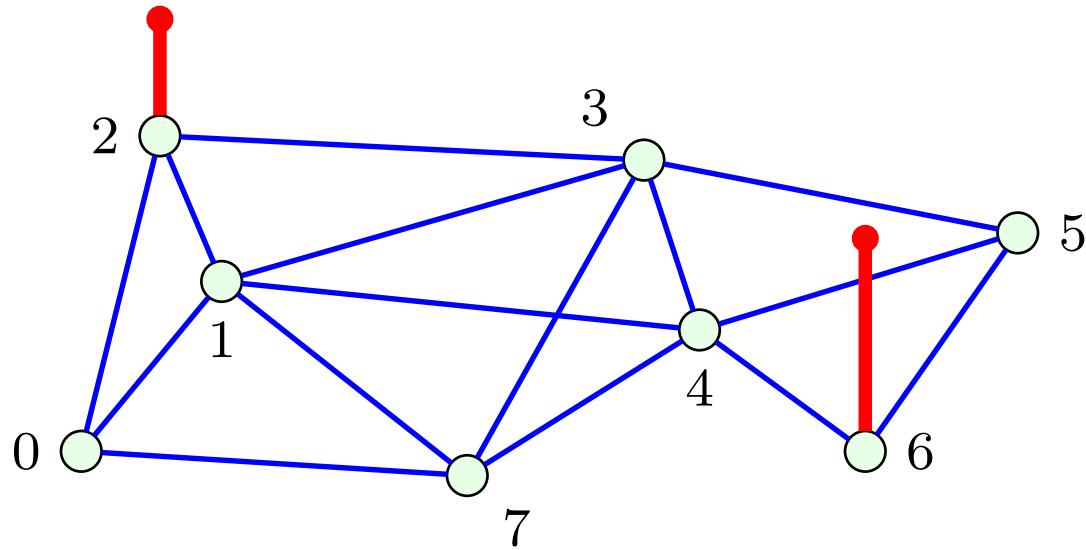
Αναπαράσταση δεξιά ολισθημένης ακολουθίας Kronecker ($\delta(n-2)$) σε Γράφημα

Ολίσθηση (πώς;) ενός βήματος της ακολουθίας στο Γράφημα (αποδείξτε το)

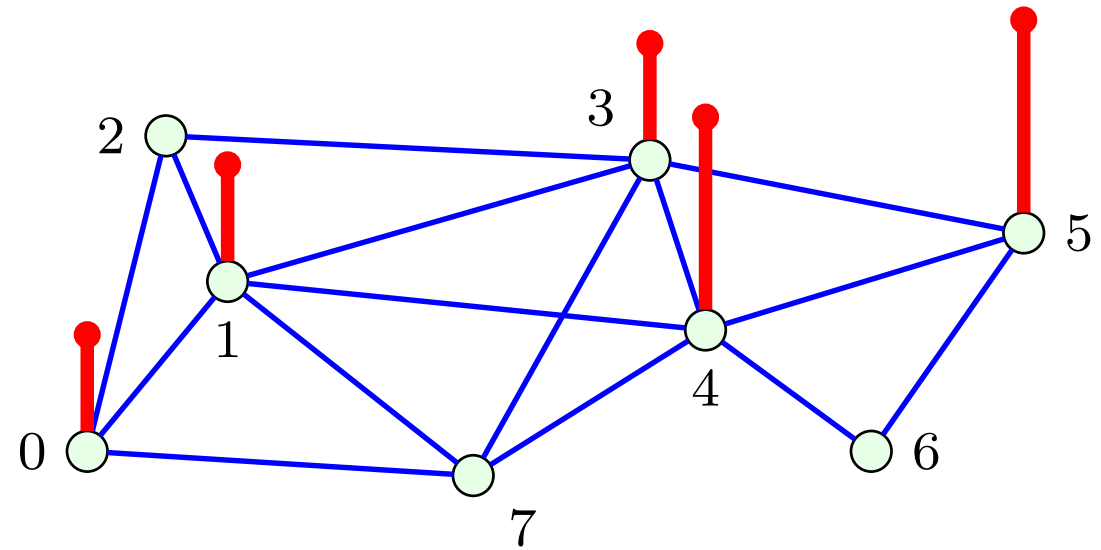


ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αναπαράσταση Περιοδικού Σήματος
σε Γράφημα

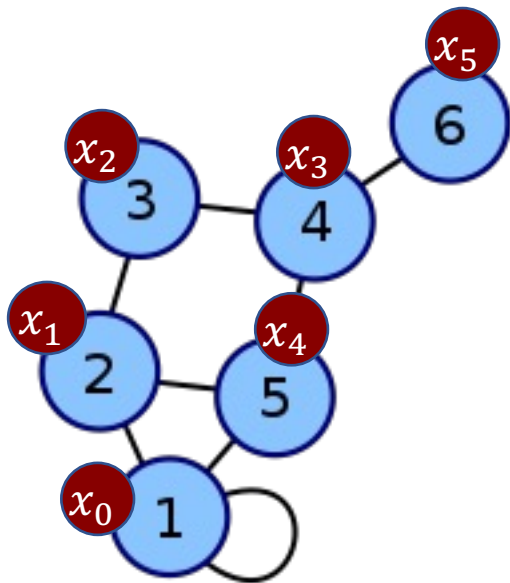


Ολίσθηση Σήματος στο Γράφημα



ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Ολίσθησης Γραφημάτων:



$$A\mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

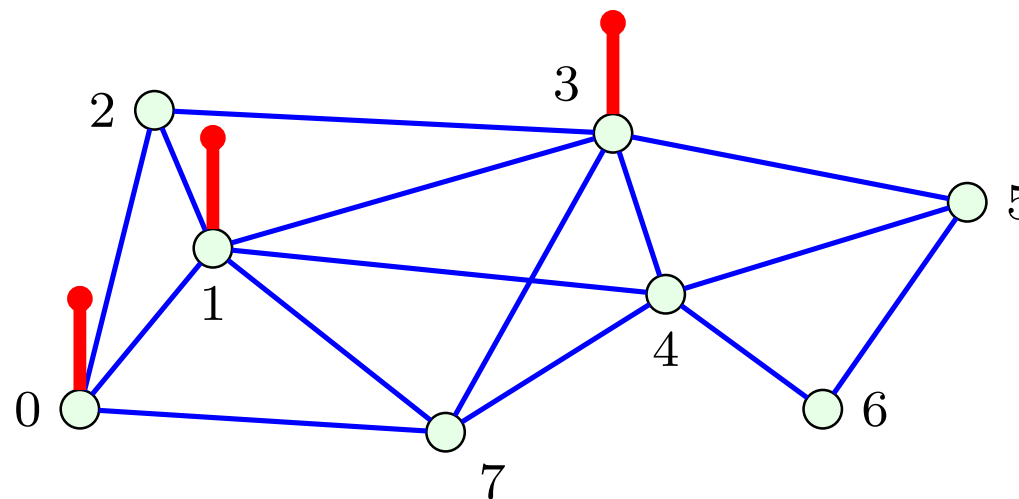
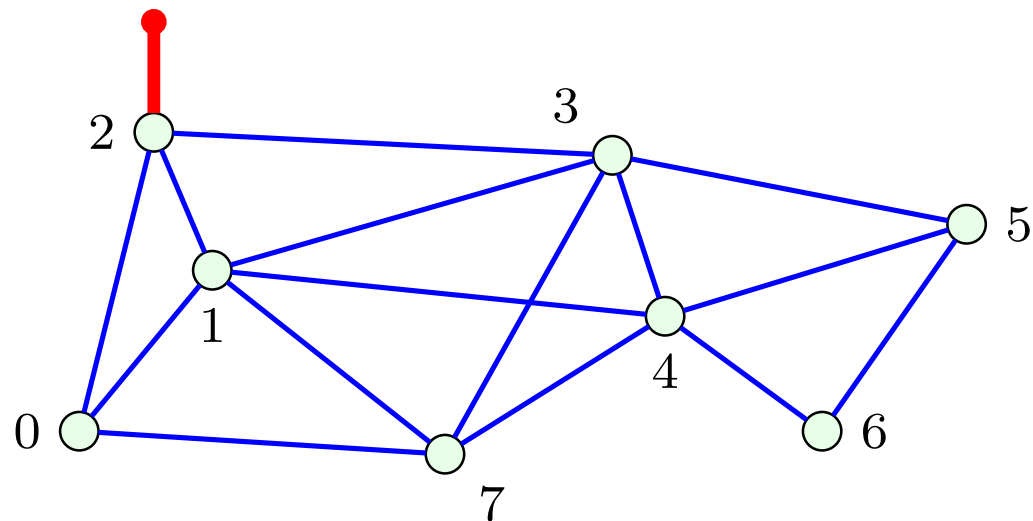
Μητρώο Ολίσθησης Γραφημάτων:

$$A\mathbf{x}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + x_1 + x_4 \\ x_0 + x_2 + x_4 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 + x_5 \\ x_0 + x_1 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

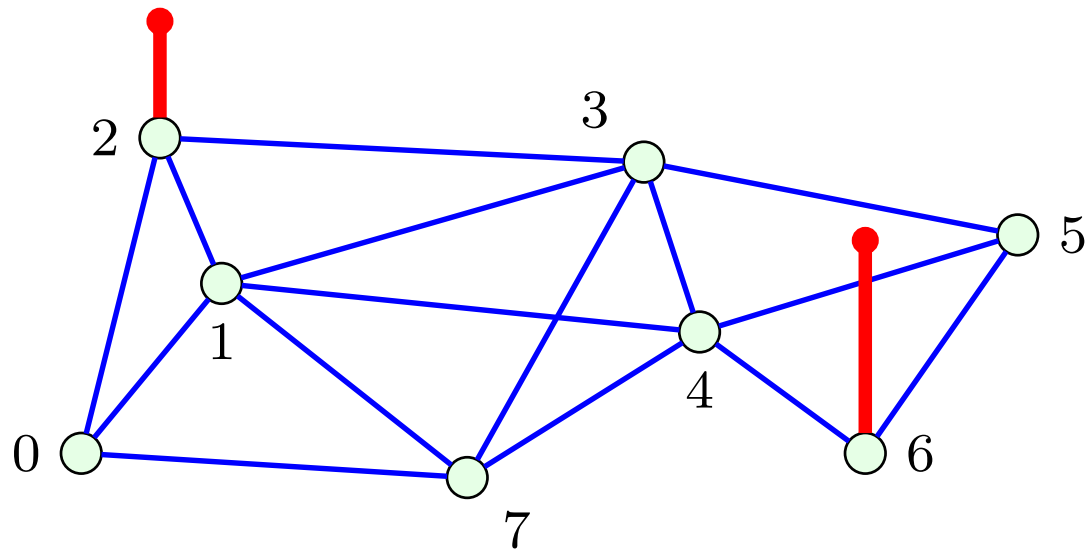
Αναπαράσταση δεξιά ολισθημένης ακολουθίας Kronecker ($\delta(n-2)$) σε Γράφημα

Ολίσθηση (πώς;) ενός βήματος της ακολουθίας στο Γράφημα (αποδείξτε το)

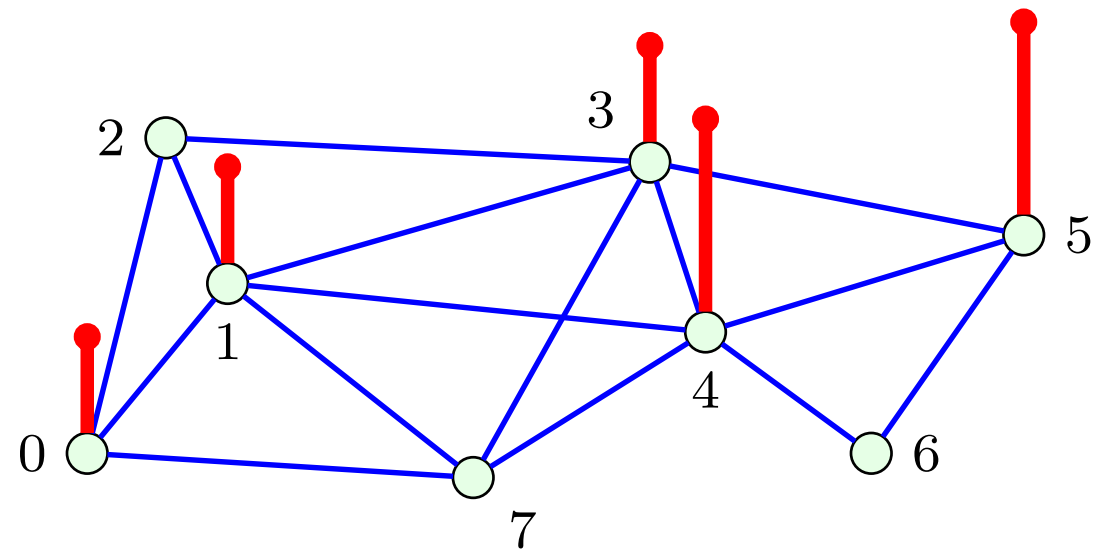


ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αναπαράσταση Περιοδικού Σήματος
σε Γράφημα

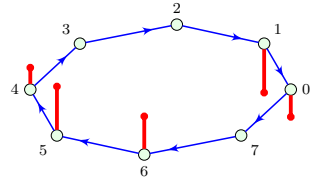


Ολίσθηση του Περιοδικού Σήματος
στο Γράφημα



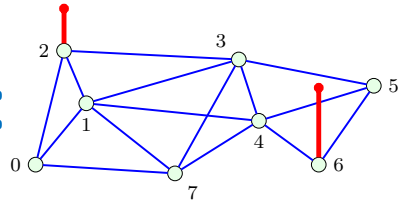
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Κυκλική Συνέλιξη:



$$\mathbf{h}_M \circledast \mathbf{x}_M = \sum_{m=0}^{M-1} U_M^m \mathbf{h}_M x_m = \sum_{m=0}^{M-1} U_M^m \mathbf{x}_M h_m = \mathbf{x}_M \circledast \mathbf{h}_M$$

Συνέλιξη Γειτνίασης:



$$\mathbf{h}_M \circledast \mathbf{x}_M = \sum_{m=0}^{M-1} A_M^m \mathbf{h}_M x_m = \sum_{m=0}^{M-1} A_M^m \mathbf{x}_M h_m = \mathbf{x}_M \circledast \mathbf{h}_M$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Μητρώου Κυκλικής Ολίσθησης:

$$\begin{matrix} U_M^0 \mathbf{x}_M \\ U_M^1 \mathbf{x}_M \\ U_M^2 \mathbf{x}_M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_M^{M-1} \\ \mathbf{x}_M \end{matrix}$$

Το Μητρώο είναι
ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ:

$$U_M = W \Lambda_M W^H$$

$$\begin{matrix} I_M \mathbf{x}_M \\ W \Lambda_M^1 W^H \mathbf{x}_M \\ W \Lambda_M^2 W^H \mathbf{x}_M \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ W \Lambda_M^{M-1} W^H \mathbf{x}_M \end{matrix}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Ολίσθησης Γραφημάτων:

$$\begin{aligned} & A_M^0 \mathbf{x}_M \\ & A_M^1 \mathbf{x}_M \\ \cdot & A_M^2 \mathbf{x}_M \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & A_M^{M-1} \mathbf{x}_M \end{aligned}$$

Αν το Μητρώο Γειτνίασης
είναι ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟ:

$$A_M = V \Lambda_M V^T$$

$$\begin{aligned} & I_M \mathbf{x}_M \\ & V \Lambda_M^1 V^T \mathbf{x}_M \\ & V \Lambda_M^2 V^T \mathbf{x}_M \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & V \Lambda_M^{M-1} V^T \mathbf{x}_M \end{aligned}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Κυκλική Ολίσθηση Σημάτων – Ιδιότητες

Ας ορίσουμε το ακόλουθο ορθοκανονικό μητρώο:

$$W_{M \times M} = \frac{1}{\sqrt{M}} [z_0 \quad z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_{M-1}]$$

$$z_m^t = [z_m^0 \quad z_m^1 \quad z_m^2 \quad \dots \quad z_m^{M-1}]$$

$z_m = e^{j \frac{2\pi m}{M}}$, $m=0,1,2,\dots,M-1$, οι M -οστές ρίζες της μονάδας, δηλαδή:

$$z_m^M = 1, m = 0,1, \dots$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Κυκλική Ολίσθηση Σημάτων – Ιδιότητες

Αποδείξτε ότι το μητρώο:

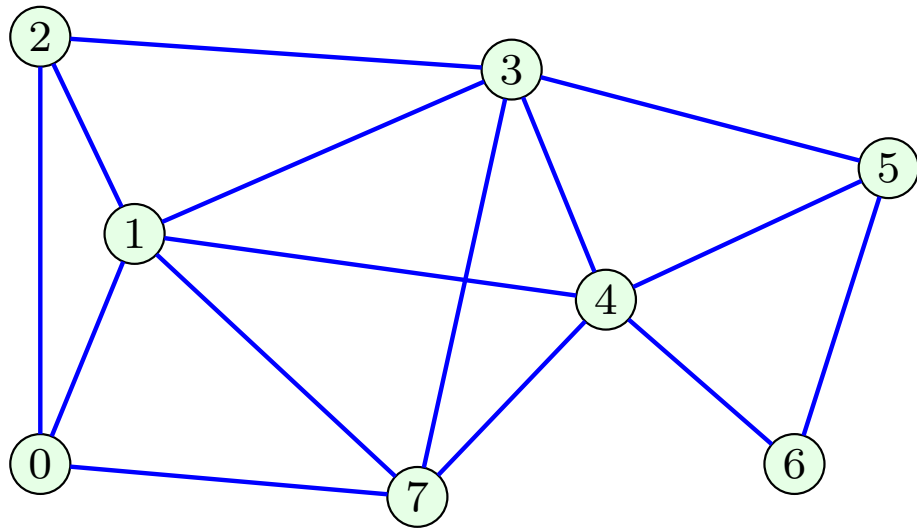
$$W_{M \times M} = \frac{1}{\sqrt{M}} [\mathbf{z}_0 \quad \mathbf{z}_1 \quad \mathbf{z}_2 \quad \dots \quad \mathbf{z}_{M-1}]$$

είναι ορθοκανονικό, δηλαδή:

$$\frac{1}{\sqrt{M}} \langle \mathbf{z}_m, \mathbf{z}_l \rangle = \begin{cases} 1, & m = l \\ 0, & m \neq l \end{cases}, m, l = 0, 1, \dots, M - 1$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Συνδεδεμένο Γράφημα

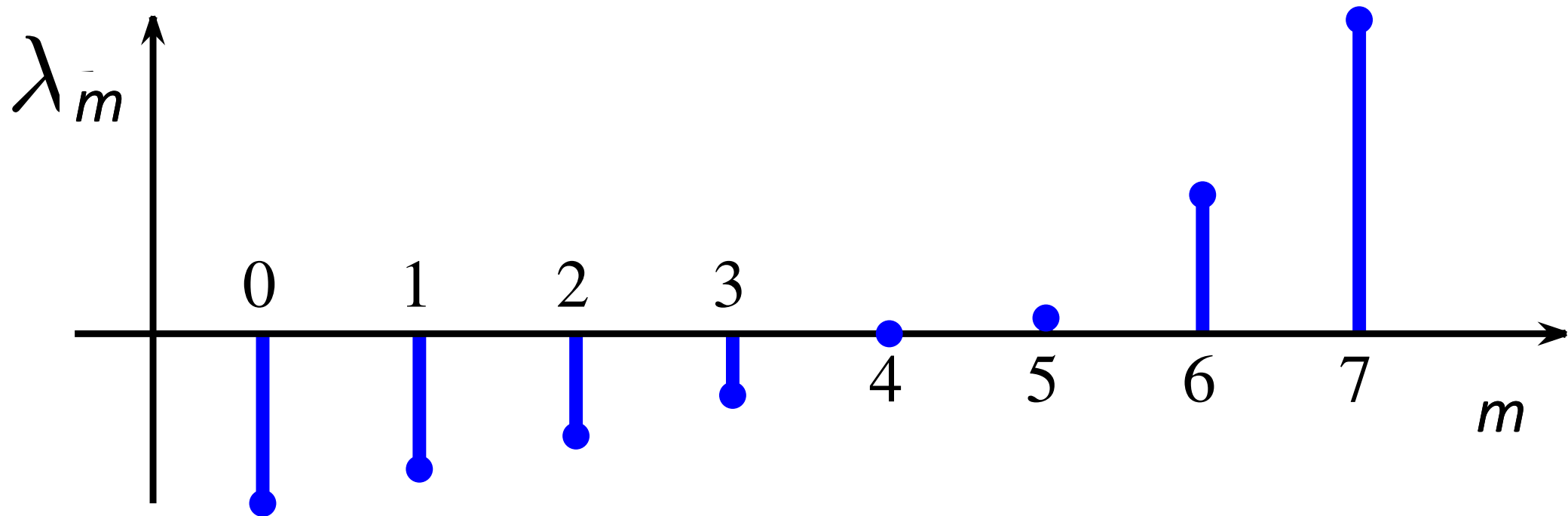


Μητρώο Γειτνίασης

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

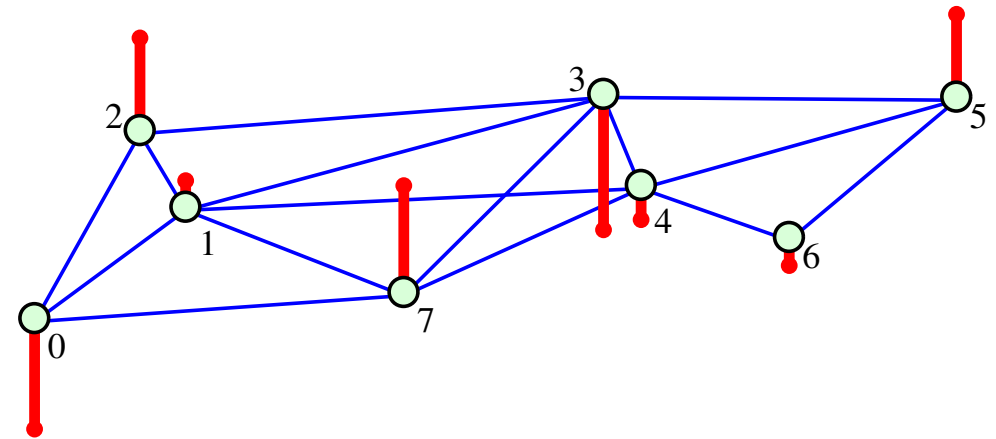
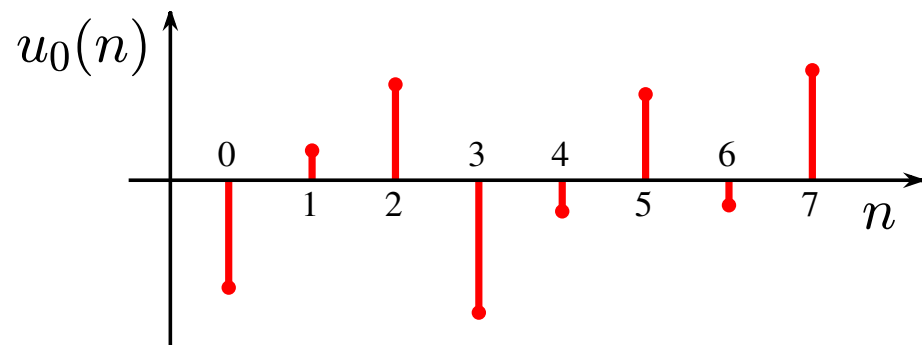
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Μητρώου Γειτνίασης: Οι ιδιοτιμές $\lambda_m, m = 0, 1, \dots, M - 1$



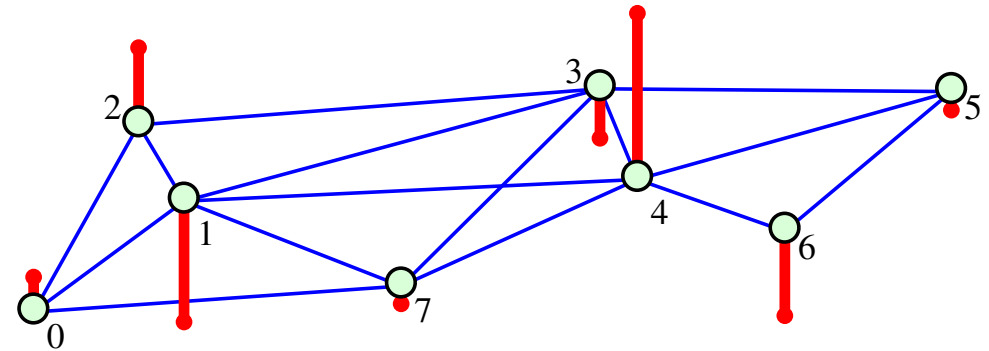
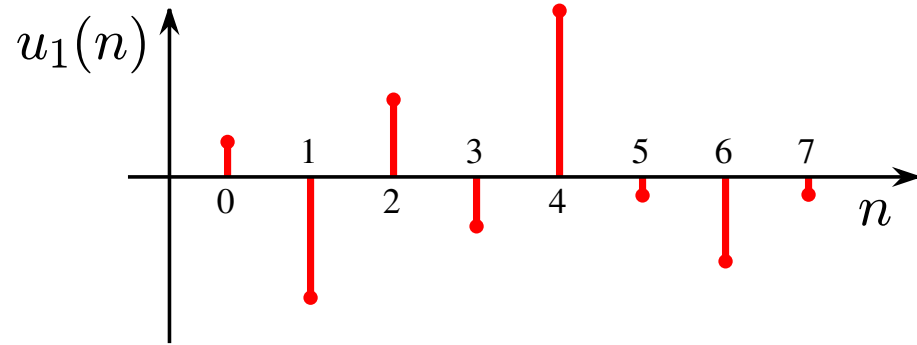
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Μητρώου Γειτνίασης: Το πρώτο ιδιοδιάνυσμα v_0



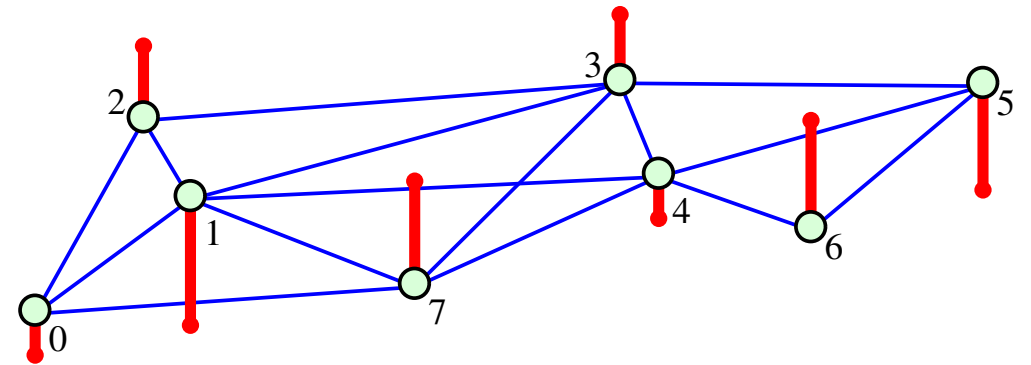
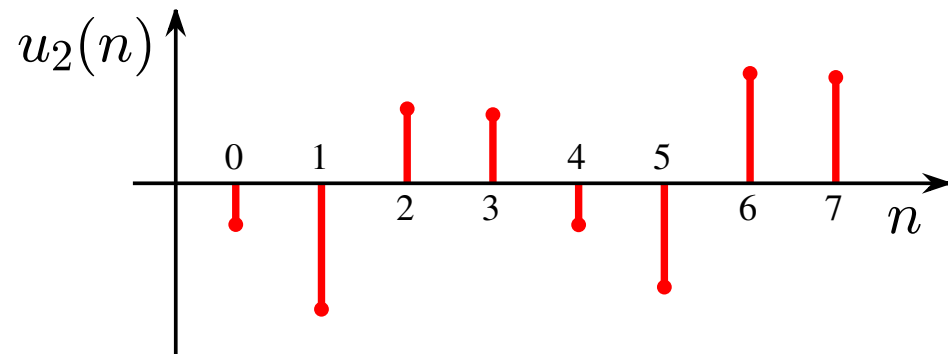
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Μητρώου Γειτνίασης: Το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα v_1



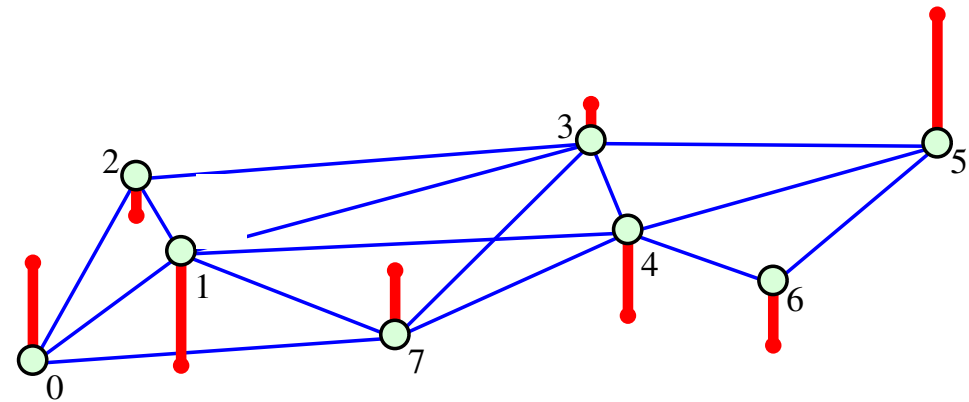
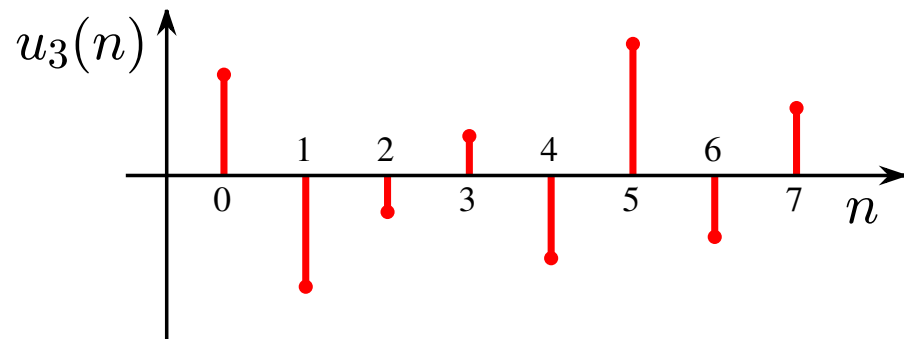
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Μητρώου Γειτνίασης: Το τρίτο ιδιοδιάνυσμα v_2



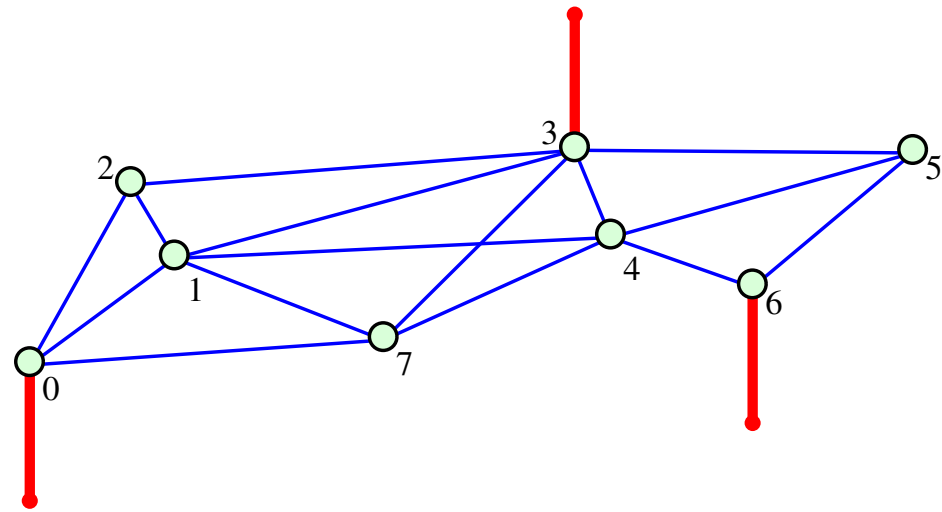
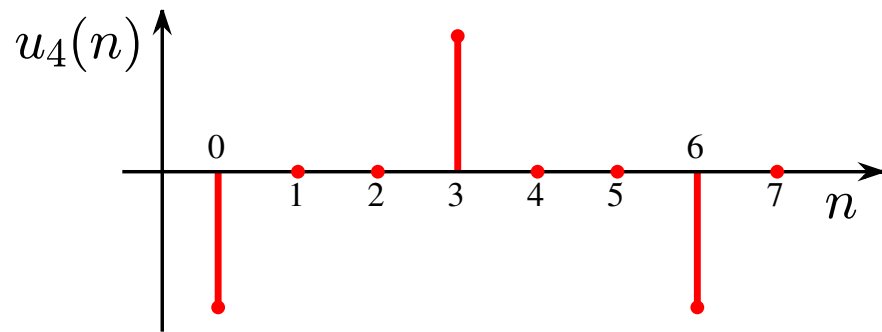
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Μητρώου Γειτνίασης: Το τέταρτο ιδιοδιάνυσμα v_3



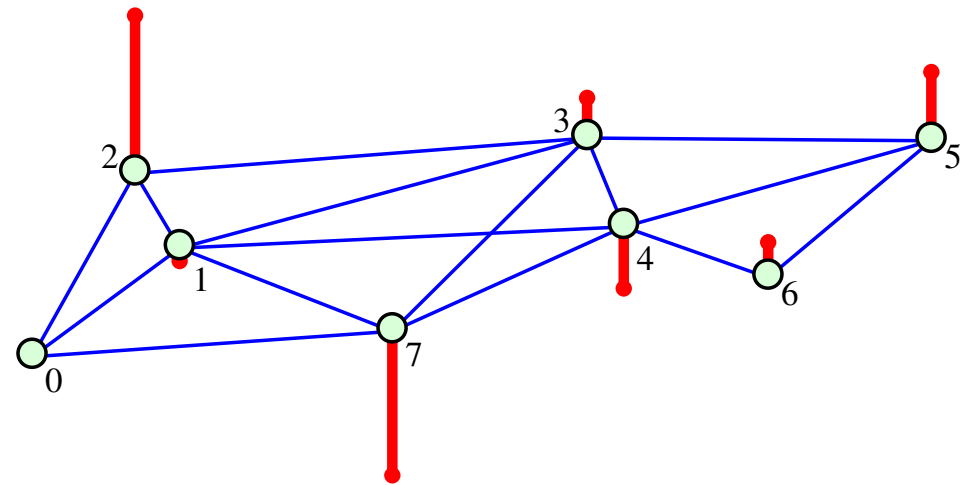
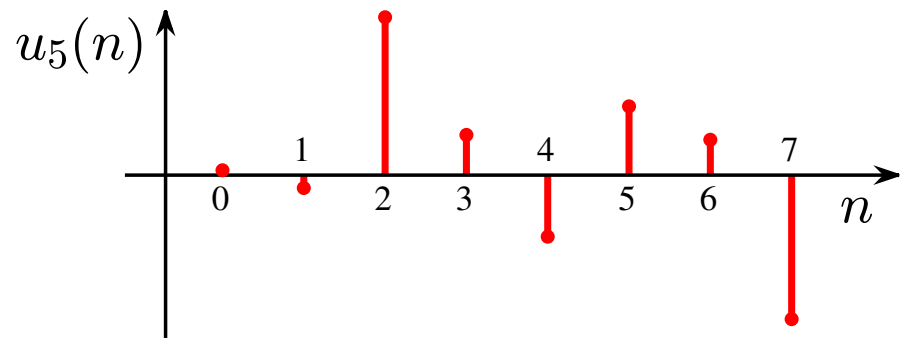
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Μητρώου Γειτνίασης: Το πέμπτο ιδιοδιάνυσμα v_4



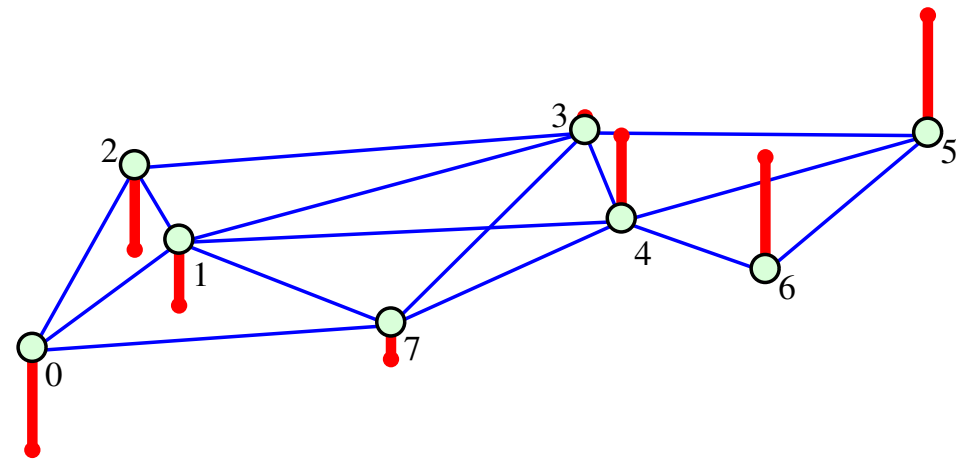
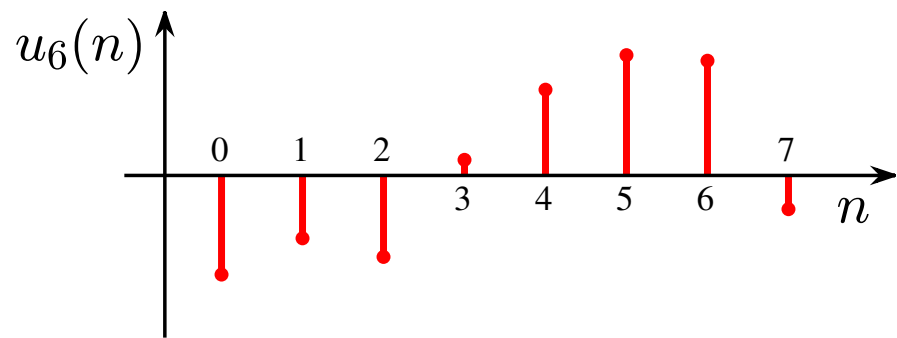
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Μητρώου Γειτνίασης: Το έκτο ιδιοδιάνυσμα v_5



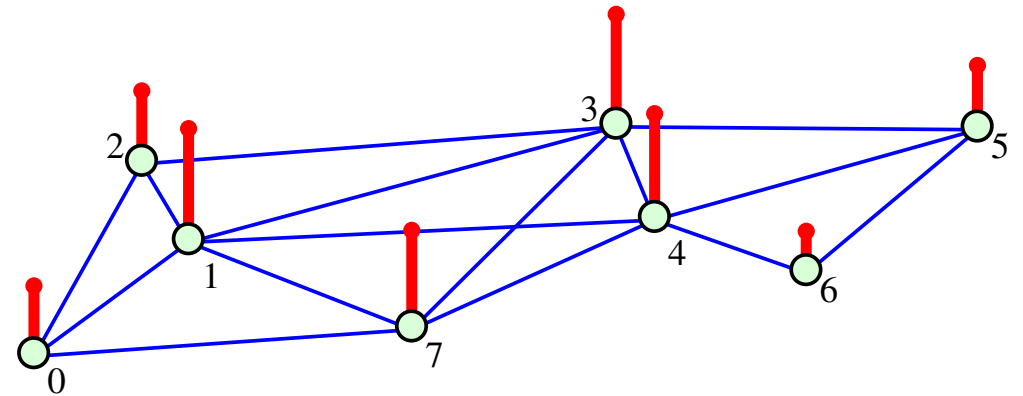
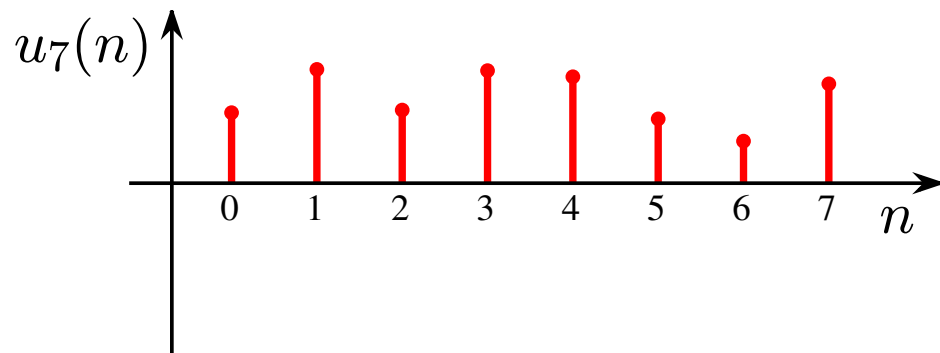
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Μητρώου Γειτνίασης: Το έβδομο ιδιοδιάνυσμα v_6



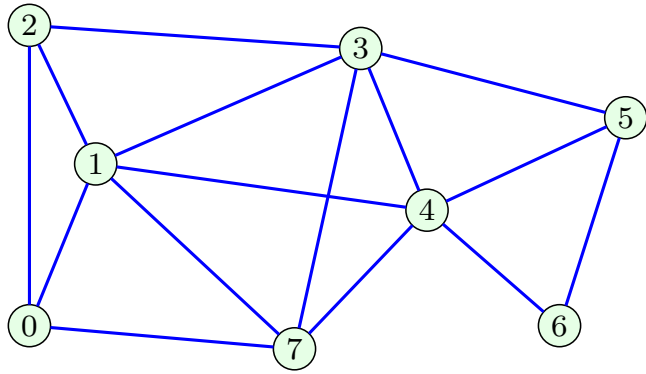
ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Αποσύνθεση Μητρώου Γειτνίασης: Το όγδοο ιδιοδιάνυσμα v_7

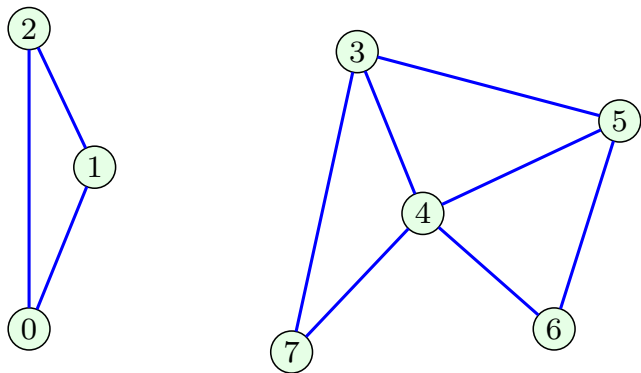


ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Συνδεδεμένο Γράφημα



Μη Συνδεδεμένο Γράφημα



Μητρώο Γειτνίασης

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Μητρώο Γειτνίασης

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα
6. Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Κυκλική Ολίσθηση Σημάτων – Ιδιότητες

Αν $\mathbf{x}_M = [x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_{M-2} \quad x_{M-1}]^t$, τότε:

$$U_M \mathbf{x}_M = \begin{bmatrix} x_{M-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{M-2} \end{bmatrix}, \text{ και } \mathbf{v}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M-1}^t & 1 \\ I_{M-1} & \mathbf{0}_{M-1} \end{bmatrix}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Κυκλική Ολίσθηση Σημάτων – Ιδιότητες

Αν $\mathbf{x}_M = [x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_{M-2} \quad x_{M-1}]^t$, τότε:

$$U_M \mathbf{x}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M-1}^t & 1 \\ I_{M-1} & \mathbf{0}_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{M-1} \\ x_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{M-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{M-2} \end{bmatrix}, \text{ άρα:}$$

$$I_1: || U_M \mathbf{x}_M ||_2^2 = || \mathbf{x}_M ||_2^2$$

Διατήρηση της ενέργειας

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Κυκλική Ολίσθηση Σημάτων – Ιδιότητες

Αν $\mathbf{x}_M = [x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_{M-2} \quad x_{M-1}]^t$, τότε:

$$U_M \mathbf{x}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M-1}^t & 1 \\ I_{M-1} & \mathbf{0}_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{M-1} \\ x_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{M-1} \\ x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{M-2} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_M^{(1)}, \text{ άρα:}$$

$$I_1: \|\mathbf{x}_M^{(1)}\|_2^2 = \|U_M \mathbf{x}_M\|_2^2 = \|\mathbf{x}_M\|_2^2 \quad \text{Διατήρηση της ενέργειας}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Κυκλική Ολίσθηση Σημάτων – Ιδιότητες
Τα $M - 1$ σήματα που προκύπτουν από κυκλικές ολισθήσεις του \mathbf{x}_M :

$$\mathbf{x}_M^{(l)} = U_M^l \mathbf{x}_M, l = 1, 2, \dots, M - 1$$

έχουν την ίδια ενέργεια με το αρχικό σήμα \mathbf{x}_M , δηλαδή:

$$\|\mathbf{x}_M^{(l)}\|_2^2 = \|U_M^l \mathbf{x}_M\|_2^2 = \|\mathbf{x}_M\|_2^2, l = 1, 2, \dots, M - 1$$

Αποδείξτε ότι: 1. $U_M^T U_M = I_M$ και $U_M^{lT} U_M^l = I_M, l = 1, 2, \dots, M$
2. $U_M^M = U_M$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα
6. Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Ολίσθηση Γραφημάτων – Ιδιότητες

Η ενέργεια ενός ολισθημένου γραφήματος είναι $\|\mathbf{x}_1\|_2^2 = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2$ όπου \mathbf{A} το μητρώο γειτνίασης.

Χρησιμοποιώντας την l_2 στάθμη ενός πίνακα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η ενέργεια του ολισθημένου γραφήματος και του αρχικού, ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$\max_{\mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \max_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}^t \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \lambda_{max}^2, \text{ όπου } \lambda_{max} = \max_k \{\lambda_k\}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα
6. Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Ολίσθηση Γραφημάτων – Ιδιότητες
Επομένως η ενέργεια ενός ολισθημένου γραφήματος δεν διατηρείται!

Αν θέλουμε να διατηρείται, θα πρέπει αντί να χρησιμοποιούμε το μητρώο γειτνίασης A να χρησιμοποιήσουμε το κανονικοποιημένο μητρώο:

$$A_{norm} = \frac{A}{\lambda_{max}}$$

Τώρα είναι προφανές ότι: $\max_x \frac{x^t A_{norm}^T A_{norm} x}{\|x\|_2^2} = 1!$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Ολίσθηση Γραφημάτων – Ιδιότητες
Επομένως η ενέργεια ενός ολισθημένου γραφήματος δεν διατηρείται!

Η ενέργεια ενός ολισθημένου σήματος γραφήματος είναι μικρότερη ή ίση με την ενέργεια του αρχικού σήματος γραφήματος.

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το σήμα είναι ανάλογο του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_{max} .

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα
6. Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Ολίσθηση Γραφημάτων – Ιδιότητες

Η έξοδος ενός συστήματος σε ένα γράφημα με κανονικοποιημένο μητρώο γειτνίασης θα είναι της μορφής:

$$\mathbf{y} = \sum_{m=0}^{M-1} h_m A_{norm}^m \mathbf{x}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Ολίσθηση Γραφημάτων – Ιδιότητες

Επομένως, η έξοδος ενός συστήματος σε ένα γράφημα με κανονικοποιημένο μητρώο γειτνίασης μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως εξής:

$$\mathbf{y} = \left(\sum_{m=0}^{M-1} h_m A_{norm}^m \right) \mathbf{x} = H(A_{norm}) \mathbf{x}$$

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα (GFT)
6. Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

ΒΑΣΙΣΜΕΝΗ ΣΤΟ ΜΗΤΡΩΟ ΓΕΙΤΝΙΑΣΗΣ

Μητρώο Κυκλικής Ολίσθησης: Ολίσθηση Γραφημάτων – Ιδιότητες

Ας υποθέσουμε ότι το μητρώο $H(A_{norm})$ είναι διαγωνοποιήσιμο, δηλαδή: $H(A_{norm}) = \mathbf{U}\mathbf{H}(\mathbf{\Lambda})\mathbf{U}^{-1}$, τότε:

$$\mathbf{y} = H(A_{norm})\mathbf{x} = \mathbf{U}\mathbf{H}(\mathbf{\Lambda})\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}$$

ή: $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{H}(\mathbf{\Lambda})\mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}$

ή ισοδύναμα: $\mathbf{Y} = \mathbf{H}(\mathbf{\Lambda})\mathbf{X}$, όπου $\mathbf{Y} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{y}$ και $\mathbf{X} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}$

είναι οι Μετασχηματισμοί Fourier των γραφοσημάτων (GFT) \mathbf{x} και \mathbf{y} αντίστοιχα.

ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

1. Ολίσθηση γραφοσήματος
2. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος
3. Ενέργεια Ολισθημένου Σήματος σε Γράφημα (κανονικοποίηση)
4. Σήματα σε Γραφήματα & Συστήματα
5. Μετασχηματισμός Fourier Σήματος σε Γράφημα (GFT)
6. Συνάρτηση Μεταφοράς - Απόκριση Συχνότητας
7. Φασματική Κατάταξη ιδιοδιανυσμάτων
8. Φιλτράρισμα στο φασματικό χώρο & στο χώρο των ακμών