Εφαρμογή πολυωνύμου $m(x)$ σε τελεστή $A: C^N \to C^N$

Έστω $m(x) = \mu_n x^n + \mu_{n-1} x^{n-1} + \dots \mu_1 x + \mu_0$,

Ορίζουμε : $m(A) = \mu_n \bullet A^n + \mu_{n-1} \bullet A^{n-1} + \dots \mu_1 \bullet A + \mu_0 \bullet \mathbf{1}$.

Ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ τελεστή $A: C^N \to C^N$

Πολυώνυμο $m_A(x) = x^n + \mu_{n-1} x^{n-1} + \dots \mu_1 x + \mu_0$ *ελάχιστου βαθμού,*

για το οποίο $m_A(A) = A^n + \mu_{n-1} \bullet A^{n-1} + \dots \mu_1 \bullet A + \mu_0 \bullet \mathbf{1} = \mathbf{0}$.

Άσκηση 1 Έστω $\upsilon(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $m(x)$, με το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ του τελεστή A.

Αποδείξτε ότι: $m(A) = \upsilon(A)$.

Ιδιότητες του ελάχιστου πολυώνυμου $\mathbf{m_A(x)}$ ***του* γραμμικού *τελεστή*** A

Ο βαθμός του $m_A(x)$ είναι *το πολύ* N, όπου $A: C^N \to C^N$.

Το $m_A(x)$ διαιρεί κάθε πολυώνυμο $m(x)$ για το οποίο $m(A) = \mathbf{0}$.

Το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι μοναδικό.

Το $m_A(x)$ διαιρεί το *χαρακτηριστικό* πολυώνυμο του A.

Κάθε ιδιοτιμή του A είναι ρίζα του $m_A(x)$.

Άσκηση 2 Βρείτε τα ελάχιστα πολυώνυμα και τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των τελεστών: $Tr_1: C^N \to C^N$, $Tr_2: C^N \to C^N$.

Άσκηση 3 Έστω ότι ο γραμμικός τελεστής $A: C^N \to C^N$ έχει N διαφορετικές ιδιοτιμές. Αποδείξτε ότι: το *ελάχιστο* πολυώνυμο του A ταυτίζεται με το *χαρακτηριστικό* πολυώνυμο του A.

Τελεστής ολίσθησης γραφήματος G $\qquad Tr_G : C^N \to C^N$

Ο *γραμμικός* τελεστής Tr_G περιγράφεται, ως προς τη βάση $\{ P_K \}$
του διανυσματικού χώρου $(C^N , + , - , \mathbf{0} , \bullet)$, από το *μητρώο γειτνίασης* του G .

Έστω $m_G(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του τελεστή Tr_G.

Έστω $h(x) = \sum_{0 \le K \le N-1} h_K x^K$ ένα στοιχείο του ***αντιμεταθετικού δακτύλιου***

$$(C[x] / m_G(x) \ , \ + \ \mathrm{mod}\, m_G(x) \ , \ - \ \mathrm{mod}\, m_G(x) \ , \ \mathbf{0} , \ \circ \ \mathrm{mod}\, m_G(x) \ , \ \mathbf{1} \ ) .$$

Ορισμός: το $h(x)$ περιγράφει ένα *φίλτρο γραφήματος* $H : C^N \to C^N$,
όπου $H = h(Tr_G) = \sum_{0 \le K \le N-1} h_K \bullet Tr_G{}^K$

Η ακολουθία h_j , $0 \le j \le N-1$, είναι οι *συντελεστές* του φίλτρου H .

Σημείωση Έστω $h_1(x) = h_2(x) \ \mathrm{mod}\, m_G(x)$: τα πολυώνυμα $h_1(x) , h_2(x)$
θα περιγράφουν το ίδιο φίλτρο γραφήματος (βλέπε την Άσκηση 1).

Άσκηση 4 Έστω H ένα φίλτρο γραφήματος. Ελέγξτε ότι:
Ο τελεστής H είναι γραμμικός, και $H \circ Tr_G = Tr_G \circ H$

Graph Fourier Transform ***Case 1*** **:**

Ο γραμμικός τελεστής $Tr_G : C^N \to C^N$ έχει N *διαφορετικές ιδιοτιμές*.

<u>Σημείωση</u> Θα υπάρχουν N γραμμικά ανεξάρτητα ιδιο-διανύσματα του Tr_G.

Έστω ρ_K, $0 \le K \le N-1$ οι ιδιοτιμές του Tr_G, $\rho_j \ne \rho_K$ για $j \ne K$.

Έστω $m_G(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του τελεστή Tr_G:

$$m_G(x) = \prod_{0 \le K \le N-1} (x-\rho_K) .$$

Εξετάζουμε την εφαρμογή του Chinese Remainder Theorem

για τα πολυώνυμα $r_K(x) = x-\rho_K$, $0 \le K \le N-1$.

Κατασκευάζονται τα πολυώνυμα

$f_K(x) = \prod_{j \ne K} (\rho_K - \rho_j)^{-1} (x-\rho_j)$, για τα οποία

$$\sum_{0 \le K \le N-1} f_K(x) = 1 \mod m_G(x) ,$$

$$(x-\rho_K) \circ f_K(x) = 0 \mod m_G(x) .$$

Επειδή $m_G(Tr_G) = \mathbf{0}$, θα έχουμε (βλέπε την Σημείωση)

$$\sum_{0 \le K \le N-1} f_K(Tr_G) = \mathbf{1}$$

$$(Tr_G - \rho_K \mathbf{1}) \circ f_K(Tr_G) = \mathbf{0} , \quad 0 \le K \le N-1 .$$

Επομένως, για κάθε σήμα $s : Z_N \to C$ θα έχουμε

$$\sum_{0 \le K \le N-1} f_K(Tr_G)(s) = s$$ ***Inverse Graph Fourier Transform***

$$(Tr_G - \rho_K \mathbf{1}) (f_K(Tr_G)(s)) = \mathbf{0} , \quad 0 \le K \le N-1 .$$

Βλέπουμε ότι: οι ***συνιστώσες Φουριέ*** του s,

$f_K(Tr_G)(s)$, $0 \le K \le N-1$, είναι <u>*ιδιο-διανύσματα*</u> του τελεστή Tr_G.

Graph Fourier Transform ***Case 2* :**

Ο γραμμικός τελεστής $Tr_G : C^N \to C^N$ έχει *ακριβώς* Λ *διαφορετικές ιδιοτιμές* $(\Lambda \le N)$ και *ο ιδιο-χώρος κάθε ιδιοτιμής έχει διάσταση* 1 .

<u>Σημείωση</u> Θα υπάρχουν ακριβώς Λ (όχι περισσότερα) γραμμικά ανεξάρτητα ιδιο-διανύσματα του Tr_G : κάθε ιδιο-διάνυσμα θα αντιστοιχεί σε μία από τις Λ ιδιοτιμές.

Έστω ρ_K , $0 \le K \le \Lambda - 1$ οι ιδιοτιμές του Tr_G, $\rho_j \ne \rho_K$ για $j \ne K$.

Έστω $m_G(x)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του τελεστή Tr_G .

Λήμμα $m_G(x) = \prod_{0 \le K \le \Lambda-1} (x - \rho_K)^{J(K)}$, $1 \le J(K)$,

και $\sum_{0 \le K \le \Lambda-1} J(K) = N.$

Εξετάζουμε την εφαρμογή του Chinese Remainder Theorem για τα πολυώνυμα $r_K(x) = (x - \rho_K)^{J(K)}$, $0 \le K \le \Lambda - 1$. Κατασκευάζονται τα πολυώνυμα

$g_K(x)$, για τα οποία

$$\sum_{0 \le j \le \Lambda-1} g_j(x) = 1 \mod m_G(x) ,$$

$$(x - \rho_K)^{J(K)} \circ g_K(x) = 0 \mod m_G(x) .$$

Επειδή $m_G(Tr_G) = \mathbf{0}$, θα έχουμε

$$\sum_{0 \le j \le \Lambda-1} g_j(Tr_G) = \mathbf{1} \qquad (Tr_G - \rho_K \mathbf{1})^{J(K)} \circ g_K(Tr_G) = \mathbf{0} , \qquad 0 \le K \le \Lambda - 1 .$$

Επομένως, για κάθε σήμα $s : Z_N \to C$ θα έχουμε

$\sum_{0 \le j \le \Lambda-1} g_j(Tr_G)\,(s) = s$ **Inverse Graph Fourier Transform**

$$(Tr_G - \rho_K \mathbf{1})^{J(K)} \circ (\, g_K(Tr_G)\,(s)\,) = \mathbf{0} , \quad 0 \le \Lambda \le N-1 .$$

Οι *συνιστώσες Φουριέ* $\{ g_K(Tr_G)\,(s) \}$ είναι *γενικευμένα ιδιο-διανύσματα* του τελεστή Tr_G .