Ανάλυση γραμμικού τελεστή αναλλοίωτου ως προς κυκλικές ολισθήσεις

Τα σήματα P_K , $0 \le K \le N-1$, όπου: $P_K(K) = 1$, $P_K(j) = 0$ όταν $j \ne K$ αποτελούν *βάση* του διανυσματικού χώρου $(C^N , + , - , \mathbf{0} , \bullet)$.

Έστω σήμα s και γραμμικός τελεστής A αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις:

$$A(s) = \sum_{0 \le K \le N-1} s(K) \bullet Tr_K(A(P_0))$$

Το σήμα $A(P_0)$ λέγεται <u>κρουστική απόκριση</u> του φίλτρου A.

<u>Κυκλική συνέλιξη</u> των σημάτων s , h λέγεται το σήμα $s * h$, όπου :

$$(s * h)(j) = \sum_{0 \le K \le N-1} s(K)\, h(j-K \mod N) , \qquad 0 \le j \le N-1 .$$

Άσκηση 1 Ελέγξτε ότι:

$$Tr_K(s) = s * P_K , \quad 0 \le K \le N-1$$

$$s * h = h * s \qquad\qquad (s * h) * g = s * (h * g)$$

Άσκηση 2 Ελέγξτε ότι, άν οι τελεστές A , B είναι γραμμικοί και αναλλοίωτοι ως προς κυκλικές ολισθήσεις:

$$A(s) = s * A(P_0) \qquad\qquad (B \circ A)(s) = s * A(P_0) * B(P_0)$$

$$(B \circ A)(P_0) = A(P_0) * B(P_0) \qquad\qquad B \circ A = A \circ B$$

Άσκηση 3 Ελέγξτε ότι: για κάθε σήμα h , ο τελεστής $A(s) = s * h$ είναι γραμμικός.

Περιγραφή σημάτων και φίλτρων μέσω πολυωνύμων

Ένα *σήμα* διακριτού χρόνου $s : Z_N \to C$ μπορεί να περιγραφεί με ένα *πολυώνυμο* $\Pi(s)$, όπου $\Pi(s)(x) = s(0) + s(1)\ x + \ldots\ s(N-1)\ x^{N-1}$.

Το πολυώνυμο $\Pi(s)$ είναι ένα στοιχείο του *διανυσματικού χώρου*

$$(C[x] / < x^N-1 > \ ,\ +\ \mathrm{mod}\ x^N-1\ ,\ -\ \mathrm{mod}\ x^N-1\ ,\ \mathbf{0}\ ,\ \bullet\ \mathrm{mod}\ x^N-1\ ) .$$

Ισχύουν οι ισότητες

$$\Pi(\ s1 + s2\ )\ =\ \Pi(s1) + P(s2)$$

$$\Pi(\ -s\ )\ =\ -\Pi(s)$$

$$\Pi(\ \alpha \bullet s\ )\ =\ \alpha \bullet \Pi(s)\ ,\qquad \alpha \in C$$

Λήμμα

Ισχύει η ισότητα $\Pi(s * h)\ =\ \Pi(s) \circ \Pi(h)\ \ \mathrm{mod}\ x^N-1$.

Απόδειξη

Ο συντελεστής του όρου βαθμού j του πολυωνύμου $\Pi(s * h)$

είναι $\sum_{0 \le K \le N-1}\ s(K)\ h(\ j-K\ \ \mathrm{mod}\ N\ )\ ,\qquad 0 \le j \le N-1$.

Ο συντελεστής του όρου βαθμού j του πολυωνύμου $\Pi(s) \circ \Pi(h)$

είναι $\sum_{0 \le K \le j}\ s(K)\ h(j-K)\ ,\qquad 0 \le j \le 2N-2$,

όπου θέτουμε $s(K) = 0$ όταν $K \ge N$,

$h(j-K) = 0$ όταν $j-K \ge N$.

Ο συντελεστής του όρου βαθμού j του $\Pi(s) \circ \Pi(h)\ \ \mathrm{mod}\ x^N-1$

είναι

$$\sum_{0 \le K \le j}\ s(K)\ h(j-K)$$

$$+ \sum_{j+1 \le K \le N-1}\ s(K)\ h(\ j+N-K\ )\ ,\qquad 0 \le j \le N-1\ .$$

Το συνολικό άθροισμα είναι

$$\sum_{0 \le K \le N-1}\ s(K)\ h(\ j-K\ \ \mathrm{mod}\ N\ )\ .$$

Έστω A ένας τελεστής που είναι γραμμικός και αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις: από την Άσκηση 2 και το Λήμμα,

$$A(s) = s * A(P_0), \qquad \text{και} \qquad \Pi(A(s)) = \Pi(s) \circ \Pi(A(P_0)).$$

Έστω h ένα στοιχείο του ***αντιμεταθετικού δακτύλιου***

$$(C[x] / < x^N - 1 > , \; + \bmod x^N - 1 , \; - \bmod x^N - 1 , \; \mathbf{0} , \; \circ \bmod x^N - 1 , \; \mathbf{1}).$$

<u>Ορισμός</u>: το h περιγράφει το *γραμμικό φίλτρο* $\varphi(h) : C^N \to C^N$,
όπου $\Pi(\varphi(h)(s)) = (h \circ \Pi(s)) \bmod x^N - 1$.

Άσκηση 4 Έστω ότι h είναι το μονώνυμο x^K, $0 \le K \le N-1$.
Ελέγξτε ότι το $\varphi(h)$ είναι ο τελεστής κυκλικής ολίσθησης Tr_K .

Άσκηση 5 Επιβεβαιώστε ότι το φίλτρο $\varphi(h)$ είναι γραμμικό και αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις.

Άσκηση 6 Ελέγξτε ότι $\varphi(h1 \circ h2) = \varphi(h1) \circ \varphi(h2)$
(η πράξη $h1 \circ h2$ είναι γινόμενο πολυωνύμων, η πράξη $\varphi(h1) \circ \varphi(h2)$ είναι συνδεσμολογία φίλτρων εν σειρά).

Άσκηση 7

α Έστω $h = h_0 + h_1 x + \ldots h_{N-1} x^{N-1}$, και $\varphi(h)(P_0)$ η κρουστική απόκριση του φίλτρου $\varphi(h)$: ελέγξτε ότι $\varphi(h)(P_0)(j) = h_j$, $0 \le j \le N-1$.

β Έστω A ένα φίλτρο γραμμικό και αναλλοίωτο ως προς κυκλικές ολισθήσεις. Έστω $A(P_0)$ η κρουστική απόκριση του A, και $A(P_0)(j) = h_j$, $0 \le j \le N-1$.
Θέτουμε $h = h_0 + h_1 x + \ldots h_{N-1} x^{N-1}$: ελέγξτε ότι $\varphi(h) = A$.

Μετασχηματισμός Φουριέ διακριτού χρόνου

N-στές ρίζες του 1 (ρίζες του πολυωνύμου $x^N - 1$) :

$$\zeta^M , \quad \zeta = e^{-2\pi\iota / N} , \quad 0 \le M \le N-1$$

Εκθετικές συναρτήσεις διακριτού χρόνου E_M, $0 \le M \le N-1$:

$$E_M (j) = (\zeta^{-M})^j , \quad j = 0 , 1 , \ldots N-1$$

<u>*Συντελεστές Φουριέ*</u>

Έστω $s(K)$, $0 \le K \le N-1$, οι τιμές ενός σήματος s :

Οι *συντελεστές Φουριέ* του s , είναι οι τιμές

$$\boldsymbol{S}_M = \sum_{0 \le K \le N-1} s(K)\, \zeta^{MK} , \quad 0 \le M \le N-1 .$$

Θεώρημα 1

Οι εκθετικές συναρτήσεις E_M, $0 \le M \le N-1$:

Α Είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Β Είναι *ιδιο-διανύσματα* κάθε γραμμικού τελεστή A
που είναι αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις.

Οι ιδιοτιμές του A που αντιστοιχούν στα ιδιο-διανύσματα E_M,
είναι οι <u>*συντελεστές Φουριέ της κρουστικής απόκρισης*</u> του A.

Γ Για κάθε σήμα h : $\boldsymbol{h}_M \bullet E_M = E_M * h$,
όπου $\boldsymbol{h}_M$ οι συντελεστές Φουριέ του h, $0 \le M \le N-1$.

Θεώρημα 2 <u>*Αντίστροφος μετασχηματισμός Φουριέ*</u>

Δ $\quad 1/N \sum_{0 \le M \le N-1} E_M = \mathbf{1}$, $\quad$ όπου $\quad \mathbf{1}(0) = 1$, $\quad \mathbf{1}(j) = 0$, $\quad 0 < j \le N-1$

Ε $\quad$ Για κάθε σήμα h : $\quad h = \sum_{0 \le M \le N-1} \boldsymbol{h}_M \bullet (1/N\, E_M)$

$$h = \sum_{0 \le M \le N-1} h * (1/N\, E_M)$$

Τα σήματα $\boldsymbol{h}_M \bullet (1/N\, E_M) = h * (1/N\, E_M)$ είναι οι *συνιστώσες Φουριέ* του h :
αποτελούν ανάλυση του h σε στοιχεία των *υπο-χώρων*
που δημιουργούν οι εκθετικές συναρτήσεις E_M, $0 \le M \le N-1$.

Απόδειξη του **Β**

$Tr_K(E_M)(j) = (\zeta^{-M})^{(j-K \mod N)} = (\zeta^{-M})^j \zeta^{MK}$, $\quad$ άρα $\quad Tr_K(E_M) = \zeta^{MK} \bullet E_M$.

Από την ισότητα $\quad A = \sum_{0 \le K \le N-1} h_K \bullet (Tr_1)^K$,

όπου h_K, $0 \le K \le N-1$ είναι οι τιμές της κρουστικής απόκρισης h του A :

$$A(E_M) = \sum_{0 \le K \le N-1} h_K \bullet Tr_K(E_M) = \sum_{0 \le K \le N-1} (h_K \zeta^{MK}) \bullet E_M$$
$$= \left(\sum_{0 \le K \le N-1} h_K \zeta^{MK}\right) \bullet E_M$$

Βλέπουμε ότι η ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στο ιδιο-διάνυσμα E_M
είναι $\sum_{0 \le K \le N-1} h_K \zeta^{MK}$, που είναι ο συντελεστής Φουριέ $\boldsymbol{h}_M$
του σήματος h , $\quad 0 \le M \le N-1$.

Απόδειξη του **Γ**

Έστω A ένας γραμμικός τελεστής, αναλλοίωτος ως προς κυκλικές ολισθήσεις,
με κρουστική απόκριση h .

Από την Απόδειξη του B : $\quad A(E_M) = \boldsymbol{h}_M \bullet E_M$

Από την Άσκηση 2 : $\quad A(E_M) = E_M * h$

Άσκηση 8

α Ελέγξτε ότι οι N-στές ρίζες του 1 είναι ιδιοτιμές του τελεστή κυκλικής ολίσθησης, Tr_1.

Βρείτε τις ιδιοτιμές των τελεστών Tr_K, $0 \le K \le N-1$.

β Αποδείξτε τα Δ, Ε.

Άσκηση 9

Έστω $\Pi(s)(x) = s(0) + s(1)\ x + \ldots\ s(N-1)\ x^{N-1}$ το πολυώνυμο που περιγράφει ένα σήμα $s : Z_N \to C$. Ελέγξτε ότι, για $0 \le M \le N-1$:

α $\Pi(s)(\zeta^M) = \boldsymbol{S}_M$ και $\Pi(s)(x) \bmod x-\zeta^M = \boldsymbol{S}_M$.

β Άν $P(x) = \boldsymbol{S}_M \bmod x-\zeta^M$ για $0 \le M \le N-1$,

θα είναι $P(x) = \Pi(s)(x) \bmod x^N-1$.

Αντίστροφος μετασχηματισμός Φουριέ μέσω πολυωνύμων

Έστω ζ^K , $0 \le K \le N-1$, οι *N-στές ρίζες του* 1 (ρίζες του πολυωνύμου x^N-1) :

έχουμε $x^N-1 = \prod_{0 \le K \le N-1} (x-\zeta^K)$.

Έστω $\Pi(s)(\zeta^M) = \boldsymbol{S}_M$, $0 \le M \le N-1$, οι *συντελεστές Φουριέ* του σήματος s .

Στην εφαρμογή του Chinese Remainder Theorem για τα πολυώνυμα $r_K(x) = x-\zeta^K$, και τις σταθερές $\upsilon_K = \boldsymbol{S}_K$, $0 \le K \le N-1$, κατασκευάζονται τα πολυώνυμα

$$f_K(x) = \prod_{j \ne K} (\zeta^K - \zeta^j)^{-1} (x-\zeta^j) , \qquad 0 \le K \le N-1 .$$

και έχουμε $f_K(x) = 1 \mod x-\zeta^K$

$f_K(x) = 0 \mod x-\zeta^j$, για κάθε $j \ne K$.

Θέτουμε $\Sigma(x) = \sum_{0 \le K \le N-1} \boldsymbol{S}_K f_K(x)$.

Θα είναι $\Sigma(x) = \boldsymbol{S}_M \mod x-\zeta^M$ για $0 \le M \le N-1$:

από την Άσκηση 9 , $\Sigma(x) = \Pi(s)(x) \mod x^N-1$,

οπότε $\Sigma(x) = \Pi(s)(x)$.

Σημείωση 1

Από τις ιδιότητες των πολυωνύμων $f_K(x)$, $0 \le K \le N-1$:

$f_j(x) \circ f_K(x) = 0 \mod x^N-1$ για κάθε $j \ne K$, .

$f_K(x) \circ f_K(x) = f_K(x) \mod x^N-1$.

Επομένως, $\Sigma(x) \circ f_K(x) = (\sum_{0 \le j \le N-1} \boldsymbol{S}_j f_j(x)) \circ f_K(x) = \boldsymbol{S}_K f_K(x)$,

άρα $\Pi(s)(x) \circ f_K(x) = \boldsymbol{S}_K f_K(x)$.

Άσκηση 10

Ελέγξτε ότι: $f_K(x) = 1/N \sum_{0 \le j \le N-1} (\zeta^{-K})^j x^j = \Pi(1/N\, E_K)$.

Από το Θεώρημα 2 Ε : τα πολυώνυμα $\boldsymbol{S}_K f_K(x)$, $0 \le K \le N-1$,
περιγράφουν τις *συνιστώσες Φουριέ* του σήματος s , $\boldsymbol{S}_K \bullet (1/N\, E_K)$.

<u>Εφαρμογή</u> <u>πολυωνύμου</u> f(x) σε <u>τελεστή</u> $A\colon C^N \to C^N$

Έστω $f(x) = \mu_n x^n + \mu_{n-1} x^{n-1} + \ldots \mu_1 x + \mu_0$,

<u>Ορίζουμε</u> : $f(A) = \mu_{n-1} \bullet A^n + \mu_{n-1} \bullet A^{n-1} + \ldots \mu_1 \bullet A + \mu_0 \bullet \mathbf{1}$.

Σημείωση 2

Από τις ιδιότητες των πολυωνύμων $f_K(x)$, $0 \le K \le N-1$:

$$\sum_{0 \le K \le N-1} f_K(x) = 1 \mod x^N - 1 ,$$

$$(x - \zeta^K) \circ f_K(x) = 0 \mod x^N - 1 .$$

Επειδή $Tr_1{}^N - \mathbf{1} = \mathbf{0}$, θα έχουμε

$$\sum_{0 \le K \le N-1} f_K(Tr_1) = \mathbf{1}$$

$$(Tr_1 - \zeta^K \mathbf{1}) \circ f_K(Tr_1) = \mathbf{0} , \quad 0 \le K \le N-1 .$$

Μετασχηματισμός Φουριέ μέσω **πολυωνύμων του τελεστή** Tr_1

Για κάθε σήμα $s : Z_N \to C$:

Επειδή $(Tr_1 - \zeta^K \mathbf{1})\,(\, f_K(Tr_1)\,(s)\,) \;=\; \mathbf{0}\,, \quad 0 \le K \le N-1\,,$

τα σήματα $f_K(Tr_1)\,(s)$ είναι *ιδιο-διανύσματα* του Tr_1 ,

με αντίστοιχες ιδιοτιμές ζ^K , $0 \le K \le N-1$.

Αντίστροφος μετασχηματισμός Φουριέ

$\sum_{\,0 \le K \le N-1} f_K(Tr_1)\,(s) \;=\; s$

Τα σήματα $f_K(Tr_1)\,(s)$, $0 \le K \le N-1$, είναι οι ***συνιστώσες Φουριέ*** του s .

Άσκηση 11

α Βρείτε την κρουστική απόκριση του τελεστή $f_K(Tr_1)$.

β Αποδείξτε ότι: $f_K(Tr_1)\,(s) \;=\; s * (\, 1/N\, E_K\,)$.