

Εφαρμογή πολυωνύμου $m(x)$ σε τελεστή $A: C^N \rightarrow C^N$

$$\text{Έστω} \quad m(x) = \mu_n x^n + \mu_{n-1} x^{n-1} + \dots \mu_1 x + \mu_0$$

$$\text{Ορίζουμε: } m(A) = \mu_n \cdot A^n + \mu_{n-1} \cdot A^{n-1} + \dots \mu_1 \cdot A + \mu_0 \cdot \mathbf{1}.$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(\lambda)$ του γραμμικού τελεστή $A: C^N \rightarrow C^N$

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot \mathbf{1}).$$

Ιδιότητες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου $\chi_A(\lambda)$

Ο βαθμός του $\chi_A(\lambda)$ είναι N , όπου $A: C^N \rightarrow C^N$.

$$\chi_A(\lambda) = \prod_{1 \leq K \leq N} (\lambda - L_K)^{p(K)},$$

όπου $L_K, 1 \leq K \leq N$ οι διαφορετικές ιδιοτιμές του A ,
και $p(K)$ η (αλγεβρική) πολλαπλότητα της L_K .

Θεώρημα Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$.

Ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ του γραμμικού τελεστή $A: C^N \rightarrow C^N$

Πολυώνυμο $m_A(x) = x^n + \mu_{n-1} x^{n-1} + \dots \mu_1 x + \mu_0$ ελάχιστου βαθμού,
για το οποίο $m_A(A) = A^n + \mu_{n-1} \cdot A^{n-1} + \dots \mu_1 \cdot A + \mu_0 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0}$.

Ιδιότητες του ελάχιστου πολυώνυμου $m_A(x)$

- a** Το $m_A(x)$ διαιρεί κάθε πολυώνυμο $m(x)$ για το οποίο $m(A) = \mathbf{0}$.

Πορίσματα

Το $m_A(x)$ είναι μοναδικό.

Το $m_A(x)$ διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A .

Ο βαθμός του $m_A(x)$ είναι το πολύ N , όπου $A: C^N \rightarrow C^N$.

- b** Κάθε ιδιοτιμή του A είναι ρίζα του $m_A(x)$.

Πόρισμα

$$m_A(x) = \prod_{1 \leq K \leq M} (x - L_K)^{q(K)},$$

όπου $L_K, 1 \leq K \leq M$ οι διαφορετικές ιδιοτιμές του A ,

και $q(K) \leq p(K)$, $q(K)$ η γεωμετρική πολλαπλότητα της L_K .

Άσκηση 1

Έστω $v(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $m(x)$ με το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(x)$ του τελεστή A . Αποδείξτε ότι: $m(A) = v(A)$.

Άσκηση 2

Βρείτε τα ελάχιστα πολυώνυμα και τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα των τελεστών:

$$\text{Tr}_1: C^N \rightarrow C^N, \quad \text{Tr}_2: C^N \rightarrow C^N.$$

Άσκηση 3

Έστω ότι ο γραμμικός τελεστής $A: C^N \rightarrow C^N$ έχει N διαφορετικές ιδιοτιμές.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ιδιότητες αποδείξτε ότι: το ελάχιστο πολυώνυμο του A ταυτίζεται με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A .

Ιδιοχώρος για την ιδιοτιμή L του γραμμικού τελεστή $A: C^N \rightarrow C^N$

$$E(A, L) = \{ s \mid s \neq \mathbf{0}, (A - L \cdot \mathbf{1})(s) = \mathbf{0} \}$$

Ο ιδιοχώρος για την ιδιοτιμή L αποτελείται από τα *ιδιο-διανύσματα* του A για την L .

Γενικευμένος Ιδιοχώρος για την ιδιοτιμή L του $A: C^N \rightarrow C^N$

$$GE(A, L) = \{ s \mid s \neq \mathbf{0}, (A - L \cdot \mathbf{1})^n(s) = \mathbf{0} \text{ για κάποιο } n \geq 1 \}$$

Τα στοιχεία του $GE(A, L)$ ονομάζονται *γενικευμένα ιδιο-διανύσματα* για την L .

Προφανώς $E(A, L) \subseteq GE(A, L)$.

Ορισμός

Για κάθε γενικευμένο ιδιο-διάνυσμα $g \in GE(A, L)$:

Η *τάξη* του g είναι ο *ελάχιστος ακέραιος* $t(g) \geq 1$ για τον οποίο
 $(A - L \cdot \mathbf{1})^{t(g)}(g) = \mathbf{0}$.

Θα είναι $t(g) \leq N$.

Προφανώς κάθε ιδιο-διάνυσμα του A θα είναι γενικευμένο ιδιο-διάνυσμα τάξης 1.

Case 1 :

Ο γραμμικός τελεστής $A : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ έχει N διαφορετικές ιδιοτιμές.

a Κάθε ιδιοχώρος του A θα έχει διάσταση 1:

για κάθε ιδιοτιμή L θα υπάρχει μόνο ένα ιδιο-διάνυσμα που είναι γραμμικά ανεξάρτητο από άλλα ιδιο-διανύσματα για την L , και θα υπάρχουν N γραμμικά ανεξάρτητα ιδιο-διανύσματα του A , κάθε ένα αντίστοιχο σε μία από τις διαφορετικές ιδιοτιμές του A .

b Για κάθε ιδιοτιμή L του A : $E(A, L) = GE(A, L)$.

c $m_A(x) = \chi_A(\lambda) = \prod_{1 \leq K \leq N} (\lambda - L_K)$,
όπου $\{ L_K \mid 1 \leq K \leq N \}$ οι ιδιοτιμές του A

Case 2 :

Ο γραμμικός τελεστής $A : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ έχει Λ διαφορετικές ιδιοτιμές, $\Lambda < N$, και κάθε ιδιοχώρος $E(A, L)$ του A έχει διάσταση 1:

a Για κάθε ιδιοτιμή L θα υπάρχει μόνο ένα ιδιο-διάνυσμα που είναι γραμμικά ανεξάρτητο από άλλα ιδιο-διανύσματα για την L , και θα υπάρχουν Λ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιο-διανύσματα του A , κάθε ένα αντίστοιχο σε μία από τις διαφορετικές ιδιοτιμές του A .

b Για κάθε ιδιοτιμή L του A :

Θα υπάρχει ένα γενικευμένο ιδιο-διάνυσμα $g(L)$ για την L , έτσι ώστε:

Τα διανύσματα $\{ (A - L \cdot \mathbf{1})^q (g(L)) , \quad 0 \leq q \leq p(L)-1 \}$

να αποτελούν βάση του γενικευμένου ιδιοχώρου $GE(A, L)$.

Η τάξη του $g(L)$ θα είναι ίση με $p(L)$

Από τα παραπάνω: ο γενικευμένος ιδιοχώρος $GE(A, L)$

θα έχει διάσταση ίση με $p(L)$.

c $m_A(x) = \chi_A(\lambda) = \prod_{1 \leq K \leq \Lambda} (\lambda - L_K)^{p(K)}$,

όπου $\{ L_K \}$ οι διαφορετικές ιδιοτιμές του A , $p(K)$ η πολλαπλότητα της L_K .

Στήν Case 2 η γεωμετρική πολλαπλότητα $q(K)$ της L_K

θα είναι ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα $p(K)$, $1 \leq K \leq \Lambda$.

Case 3 :

Ο γραμμικός τελεστής $A : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$ έχει Λ διαφορετικές ιδιοτιμές, $\Lambda < N$, και

ο ιδιοχώρος $E(A, L_K)$ του A για την ιδιοτιμή L_K έχει διάσταση $M_K \geq 1$, $1 \leq K \leq \Lambda$. Υποθέτουμε ότι $M_j > 1$ για μία τουλάχιστον ιδιοτιμή L_j .

a Για κάθε ιδιοτιμή L_K θα υπάρχουν ακριβώς M_K ιδιο-διανύσματα που είναι γραμμικά ανεξάρτητα από άλλα ιδιο-διανύσματα για την L_K , και θα υπάρχουν $\sum_{1 \leq K \leq \Lambda} M_K$ γραμμικά ανεξάρτητα ιδιο-διανύσματα του A , όπου M_K από αυτά θα αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή L_K .

b Για κάθε ιδιοτιμή L_K του A :

Για κάθε $m = 1, \dots, M_K$ θα υπάρξει ένα γενικευμένο ιδιο-διάνυσμα $g_m(L_K)$ για την L_K , τάξης $t(g_m(L_K))$, έτσι ώστε:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, $t(g_1(L_K)) \geq t(g_2(L_K)) \geq \dots t(g_{M_K}(L_K))$.

Τα διανύσματα $\bigcup_{1 \leq m \leq M_K} \{ (A - L_K \cdot \mathbf{1})^q (g_m(L_K)), 0 \leq q \leq t(g_m(L_K)) - 1 \}$ να αποτελούν βάση του γενικευμένου ιδιοχώρου $GE(A, L_K)$.

$$\sum_{1 \leq m \leq M_K} t(g_m(L_K)) = p(L_K)$$

Από τα παραπάνω: ο γενικευμένος ιδιοχώρος $GE(A, L_K)$ θα έχει διάσταση ίση με $p(L_K)$.

c $m_A(x) = \prod_{1 \leq K \leq \Lambda} (\lambda - L_K)^{t(g_1(L_K))},$

όπου $\{ L_K \}$ οι διαφορετικές ιδιοτιμές του A ,

$t(g_1(L_K))$ η μέγιστη τάξη ενός γενικευμένου ιδιο-διανύσματος της L_K .

Στήν Case 3 η γεωμετρική πολλαπλότητα $q(K)$ της L_K θα είναι ίση με $t(g_1(L_K))$, $1 \leq K \leq \Lambda$.

Άσκηση 4 Αποδείξτε ότι:

Στην *Case 1* θα είναι $E(A, L) = GE(A, L)$, για κάθε ιδιοτιμή L .

Στην *Case 2* και στην *Case 3* θα είναι $p(L) > 1$, για μία τουλάχιστον ιδιοτιμή L .

Στην *Case 3* θα είναι $M_K \leq p(L_K)$, $1 \leq K \leq \Lambda$.

Άσκηση 5

Για γενικό $N \geq 2$: βρείτε έναν γραμμικό τελεστή $A_N : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^N$
με ακριβώς μία ιδιοτιμή $L \neq 0$, έτσι ώστε $E(A_N, L) = GE(A_N, L)$.

Σε ποιά από τις τρεις περιπτώσεις ανήκει ο τελεστής A_N ;

Άσκηση 6 Για κάθε έναν από τους παρακάτω τελεστές (μητρώα) βρείτε:

α Το ελάχιστο πολυώνυμο του τελεστή και την γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής L .

β Μία βάση για τον ιδιοχώρο του τελεστή για την L .

γ Μία βάση για τον γενικευμένο ιδιοχώρο του τελεστή για την L .

$$\begin{matrix} L & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \\ 0 & 0 & L \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} L & 1 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} L & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & L \end{matrix}$$